

УДК 539.3

**НОВЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ТЕПЛОВОГО УДАРА ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОГО ТЕПЛООБМЕНА**© 2023 г. Э. М. Карташов<sup>1, 2, \*</sup>, С. С. Крылов<sup>2, \*\*</sup><sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“МИРЭА – Российский технологический университет”, Москва, Россия<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)”,  
Москва, Россия

\*e-mail: professor.kartashov@gmail.com

\*\*e-mail: compgra@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.05.2023 г.

После доработки 22.08.2023 г.

Принята к публикации 25.08.2023 г.

Статья посвящена практически новым модельным представлениям локально-неравновесного теплопереноса в терминах нестационарной теплопроводности для уравнений гиперболического типа (волновых уравнений), а также динамическим моделям теплового удара на основе волновых уравнений. Приведенные в статье результаты практически открывают самостоятельное научное направление в аналитической теплофизике и в теории теплового удара, а именно: исследование термической реакции твердых тел канонической формы конечных размеров на интенсивный нагрев и охлаждение в условиях локально-неравновесного процесса теплообмена. Указанное направление потребовало развитие специального аппарата операционного исчисления ввиду появления в аналитических решениях модельных задач в пространстве изображений по Лапласу нестандартных операционных изображений, оригиналы которых неизвестны и отсутствуют в справочниках по операционному исчислению. Приведенные изображения являются характерными для операционных решений широкого класса обобщенных краевых задач для уравнений гиперболического типа в теории теплопроводности, диффузии, гидродинамики, колебаний, распространения электричества, термомеханики и других направлений науки и техники. Приведены иллюстративные примеры аналитических решений конкретных модельных задач локально-неравновесного теплообмена и теории теплового удара для конечной области как в классической, так и в обобщенной постановках (последнее с учетом конечной скорости распространения теплоты). Выявлены характерные особенности функциональных конструкций в качестве аналитических решений рассмотренных математических моделей.

*Ключевые слова:* локально-неравновесный теплообмен, тепловой удар, новый аппарат операционного исчисления, аналитические решения

DOI: 10.31857/S0002331023060031, EDN: PWWXZS

**ВВЕДЕНИЕ**

Классические модели аналитической теории переноса теплоты обязаны своим появлением линейному градиентному соотношению Фурье

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda \text{grad} T(M, t),$$

с которым он выступил в докладе “О распространении тепла в твердом теле” в Париже в 1807 году. В законченном виде Фурье представил свою теорию в 1822 г. в работе “Аналитическая теория тепла”, которую Кельвин назвал “великой математической моделью” [1]. Вместе с уравнением энергии для изотропных твердых тел

$$c\rho \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \bar{q}(M,t) + F(M,t).$$

Закон Фурье приводит к уравнению параболического типа для нестационарного теплопереноса вида

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a\Delta T(M,t) + \frac{1}{c\rho} F(M,t), \quad M \in D, \quad t > 0, \quad (1)$$

и соответствующим для (1) краевым задачам с начальным и граничными условиями

$$T(M,t)_{t=0} = \Phi_0(M), \quad M \in \bar{D}, \quad (2)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M,t)}{\partial n} + \beta_2 T(M,t) = \beta_3 \varphi(M,t), \quad M \in S, \quad t > 0. \quad (3)$$

Здесь  $D$  — конечная или частично ограниченная выпуклая область изменения  $M(x, y, z)$ ;  $S$  — кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область  $D$ ;  $\bar{n}$  — внешняя нормаль к  $S$  (вектор, непрерывный в точках  $S$ ). Входящие в (1)–(3) параметры — теплофизические характеристики среды, постоянные величины в интервале температур, не выходящих за точки перехода [2]. В литературе неоднократно отмечались некоторые парадоксы при использовании модельных представлений (1)–(3): отсутствие инерционности процесса теплопроводности в законе Фурье в виду неучета механизма переноса теплоты элементарными частицами вещества (электронами, молекулами, ионными решетками) и времени релаксации, связанного со временем свободного пробега микрочастиц и, как следствие, вытекающий из аналитических решений моделей (1)–(3), вывод о бесконечной скорости распространения теплоты; сингулярный характер теплового потока и скорости движения изотерм в области  $x > 0, t > 0$  при  $x \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 0$ ). Тем не менее указанные обстоятельства не ограничивают область применения математических моделей (1)–(3), охватывая все новые содержательные объекты и все большее число самых разнообразных приложений [3–6].

В последние годы усилился интерес к изучению процессов, протекающих в локально-неравновесных условиях, что обусловлено широкими возможностями их практического применения [7]: создание новых технологий получения наноматериалов и покрытий с уникальными физико-химическими свойствами (бинарные многокомпонентные металлические сплавы, полимерные материалы, металлические полупроводниковые стекла, наножидкости, коллоидные био- и криосистемы); оптимизация режимов лазерной обработки изделий; режимы интенсивного нагрева и охлаждения компонентов наноэлектроники и нанотехники; нагрев, плавление и абляция вещества при воздействии сверхкоротких импульсов и др. Интенсификация тепловых процессов в этих условиях требовала для их описания уточнения гипотезы Фурье, что и было проделано в рамках учета локальной неравновесности, заложенной в соотношении

$$\bar{q}(M,t) = -\lambda \operatorname{grad} T(M,t) - \tau_r \frac{\partial \bar{q}(M,t)}{\partial t}, \quad (4)$$

и учитывающей конечную скорость распространения теплоты. Здесь время  $\tau_r$  — мера инерции теплового потока, связанная со скоростью распространения теплоты соотношением  $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$ . Для металлов  $\tau_r \approx 10^{-14} - 10^{-11}$  с; для аморфных тел типа неорганического стекла и полимеров, имеющих сложную структуру,  $\tau_r \approx 10^{-11} - 10^{-5}$  с (для не-

органического стекла  $\tau_r \approx 10^{-7}$  с, для органического стекла  $\tau_r \approx 10^{-11}$  с), для азота  $\tau_r \approx 10^{-9}$  с, опытное измерение  $\tau_r$  во многих случаях не представляется возможным. Скорость распространения теплоты для стали  $v_T = 1800$  м/с (скорость распространения звука  $v_p = 6100$  м/с), для алюминия  $v_T = 2930$  м/с ( $v_p = 6260$  м/с), для неорганического стекла  $v_T = 1800$  м/с (скорость распространения звука  $v_p = 6100$  м/с), для алюминия  $v_T = 2930$  м/с ( $v_p = 6260$  м/с), для неорганического стекла  $v_T = 2 \times 10^6$  м/с ( $v_p = 4.5 \times 10^3$  м/с), для азота ( $v_T = 150$  м/с) и для газов в условиях разряженного сверхзвукового потока влияние конечной скорости ораспространения теплоты на теплообмен становится заметным. Подобное влияние может проявляться также при очень низких температурах (например, в жидком гелии  $v_T = 19$  м/с при  $T = 1.4$  К) и даже при обычных температурах в твердых телах, когда в нестационарном процессе рассматривается малый период времени [7]. Соотношение (4) было проверено экспериментально. Так, результаты исследований термических переходных процессов (в рамках гипотезы (4)), приведенные в работах Хервига и Бекерта [8] по зарегистрированному Митра с сотрудниками [9] термическому переходному процессу в ряде твердых тел, подтвердили реальность явления тепловой релаксации. Ю.А. Кирсанов с сотрудниками [10] на стадии переходного процесса теплообмена экспериментально измерили время тепловой релаксации ПММА:  $\tau_r = 2.4$  с, позже величина  $\tau_r$  была уточнена:  $\tau_r = (1.48 \pm 0.15)$  с). На необходимость учета влияния ограниченности скорости переноса теплоты (массы) указывали Дж. Максвелл в теории газодинамики [11], А.В. Лыков при исследовании тепло- и влагопереноса в капиллярно-пористых телах [12], Каттанео [13] и Вернотт [14] в теории теплопроводности. Уравнение энергии и соотношение (4) приводят к уравнению переноса теплоты гиперболического типа

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2} + \frac{\tau_r}{c\rho} \left[ \frac{\partial F(M, t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r} F(M, t) \right] \quad (5)$$

и соответствующим краевым задачам нестационарной теплопроводности обобщенного типа. При математической постановке указанных задач следует использовать соответствующие локально-неравновесные граничные условия. Использование стандартных локально-равновесных граничных условий (3) (что довольно часто наблюдается в публикациях по аналитической теплофизике) может привести к физически противоречивым результатам (например, к появлению отрицательных решений для температуры [3]). Эти вопросы детально рассмотрены одним из авторов в [15]. Сформулированы корректные обобщенные граничные условия на основе соотношения (4) в интегральной и эквивалентной дифференциальной формах. Так, в первом случае для условия теплового нагрева (охлаждения) граничное условие второго рода имеет вид:

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \Big|_{M \in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \pm(q_0/\lambda) S_+(t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

В случае нагрева (охлаждения) средой следует записать:

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \Big|_{M \in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h \{T(M, t) \Big|_{M \in S} - [T_0 + S_+(t)(T_c - T_0)]\}, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Здесь

$$S_+(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Следует отметить, что гиперболическое уравнение (5) для описания локально-неравновесных процессов тепломассопереноса было получено впервые в работах И.А. Фока [16] и Б.И. Давыдова [17] на основании предположения о конечном значении скорости частиц, переносящих энергию или массу. Уравнение (5) также получил А.С. Предводителев [18], исходя из анализа скоростей перемещения изотермических поверхностей с использованием представлений Римана, то есть при полном отказе от релаксационной формулы (4).

### НОВЫЕ ОПЕРАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Обобщенные задачи переноса для уравнения (5) значительно отличаются от классических (1)–(3), являясь более сложными при нахождении аналитических решений. Специфика указанных задач заключается в относительной простоте исходных математических моделей и трудностях их решений в аналитически замкнутом виде. Отсюда весьма незначительные успехи в нахождении их точных аналитических решений и, в основном, для частично ограниченных областей. Основной метод решения указанных задач — операционный, но здесь возникают две основные проблемы. Если нахождение операционного решения задачи не составляет особого труда, то переход к оригиналам затрудняется ввиду их отсутствия в таблицах по операционному исчислению. Формальное применение теорем операционного исчисления при нахождении оригиналов может привести к ошибочным результатам, так как искомые оригиналы должны содержать ступенчатую функцию Хевисайда [1], появление которой формально не всегда удается реализовать. Естественный выход из этой ситуации — развитие искусственных приемов или сложный переход к оригиналам с помощью контурного интегрирования изображений [1–19]. Математические модели для уравнения (5) в области  $x \in [0, l], t \geq 0$  с обобщенными граничными условиями практически не располагают в полной мере необходимым аппаратом операционного исчисления, что существенно затрудняет нахождение их точных аналитических решений. Рассмотрим ряд операционных соотношений, характерных для указанного случая. Найдем оригинал изображения

$$\frac{(H - \beta p)^n}{(H + \beta p)^{n+1}}. \quad (9)$$

Воспользуемся справочной формулой [20]

$$\begin{aligned} \frac{(1-p)^n}{p^{n+1}} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k p^{k-n-1} = (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m p^{-(m+1)} \leftarrow \\ &\leftarrow (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m \frac{1}{m!} t^m = (-1)^n L_n(t), \end{aligned}$$

где  $L_n(t) = \frac{1}{n!} \exp(t) \frac{d^n}{dt^n} [t^n \exp(-t)]$  — полином Лагерра [20]. Используя далее последовательно операционные теоремы  $(1/k)\bar{f}(p/k) \leftarrow f(kt)$ ,  $\bar{f}(p-k) \leftarrow \exp(kt)f(t)$ ,  $\bar{f}(p) \exp(-pt_0) \leftarrow f(t-t_0)\eta(t-t_0)$  находим искомый оригинал:

$$\frac{(H - \beta p)^n}{(H + \beta p)^{n+1}} \leftarrow \frac{(-1)^n}{\beta} \exp\left(-\frac{H}{\beta} t\right) L_n\left(2 \frac{H}{\beta} t\right) = f(t). \quad (10)$$

Аналогичными рассуждениями можно показать:

$$\frac{(H + \beta p)^n}{(H - \beta p)^{n+1}} \leftarrow \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{H}{\beta} t\right) L_n^*\left(2 \frac{H}{\beta} t\right), \quad (11)$$

где  $L_n^*(t) = (-1)^{n+1} \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{1}{m!} t^m$  – полином Карташова. По теореме смещения находим:

$$\frac{(H - \beta p)^n}{(H + \beta p)^{n+1}} \exp(-\gamma \beta p) \leftarrow f(t - \gamma \beta) \eta(t - \gamma \beta), \quad (12)$$

где  $f(t)$  – функция (10);  $\eta(z)$  – функция Хевисайда.

Найдем оригинал изображения  $\bar{f}(\sqrt{(p+a)^2 - b^2})$ , если  $\bar{f}(p) \leftarrow f(t)$ . Используем для этих целей теорему Эфроса:

$$\bar{f}[\bar{\Phi}_1(p)] \bar{\Phi}_2(p) \leftarrow \int_0^t f(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau, \quad \Psi(\tau, t) \rightarrow \exp[-\tau \bar{\Phi}_1(p)] \bar{\Phi}_2(p). \quad (13)$$

Находим:

$$\bar{f}(\sqrt{(p+a)^2 - b^2}) \leftarrow \exp(-at) \left[ f(t) + b \int_0^t y f(y) \frac{I_1(b\sqrt{t^2 - y^2})}{\sqrt{t^2 - y^2}} dy \right]. \quad (14)$$

Аналогично находим:

$$\begin{aligned} & \bar{f}(\sqrt{(p+a)^2 - b^2}) \exp\left[-\gamma \sqrt{(p+a)^2 - b^2}\right] \leftarrow \\ & \leftarrow \exp(-at) \left[ f(t - \gamma) + b \int_0^t y f(y - \gamma) \frac{I_1(b\sqrt{t^2 - y^2})}{\sqrt{t^2 - y^2}} dy \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \bar{f}(\sqrt{(p+a)^2 - b^2}) \exp\left[-\gamma \sqrt{(p+a)^2 - b^2}\right] \leftarrow \\ & \leftarrow \int_{\gamma}^t f(t - \gamma) \left[ \exp(-a\tau) + b \tau \int_{\tau}^t \exp(-ay) \frac{I_1(b\sqrt{y^2 - \tau^2})}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} dy \right] d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть теперь  $\bar{s}(p) = \sqrt{\beta^2 p^2 + p}$  или  $\bar{s}(p) = \beta \sqrt{p + \frac{1}{2\beta^2}} - \frac{1}{4\beta^4}$ .

Формулы (10), (14), (15) дают следующие оригиналы:

$$\frac{[H - \bar{s}(p)]^n}{[H + \bar{s}(p)]^{n+1}} \leftarrow \exp\left(-\frac{t}{2\beta^2}\right) \left[ f(t) + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^t f(\sqrt{t^2 - y^2}) I_1\left(\frac{y}{2\beta^2}\right) dy \right],$$

где

$$f(t) = (-1)^n \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{H}{\beta} t\right) L_n\left(2 \frac{H}{\beta} t\right). \quad (17)$$

$$\frac{1}{p} \frac{[H - \bar{s}(p)]^n}{[H + \bar{s}(p)]^{n+1}} \leftarrow \int_0^t \left[ f(\tau) + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^{\tau} f(\sqrt{\tau^2 - y^2}) I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} y\right) dy \right] \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) d\tau, \quad (18)$$

где  $f(t)$  – функция (17).

$$\begin{aligned} & \frac{[H - \bar{s}(p)]^n}{[H + \bar{s}(p)]^{n+1}} \exp[-\gamma \bar{s}(p)] \leftarrow \\ & \leftarrow \left[ f(t - \gamma\beta) + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^t f(\tau - \gamma\beta) \frac{\tau I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{t^2 - \tau^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau \right] \exp\left(-\frac{t}{2\beta^2}\right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$f(t) = \frac{(-1)^n}{\beta} \exp\left(-\frac{H}{\beta} t\right) L_n\left(2\frac{H}{\beta} t\right) \eta(t); \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \frac{[H - \bar{s}(p)]^n}{[H + \bar{s}(p)]^{n+1}} \exp[-\gamma \bar{s}(p)] \leftarrow \\ & \leftarrow \int_0^t \left[ f(\tau - \gamma\beta) + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^\tau f(\tau' - \gamma\beta) \frac{\tau' I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{\tau^2 - \tau'^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - \tau'^2}} d\tau' \right] \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) d\tau, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $f(t)$  – функция (20). Выражение (16) включает важное в практическом плане соотношение

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{p} \bar{f}(\sqrt{\beta^2 p^2 + p}) \exp(-\gamma \sqrt{\beta^2 p^2 + p}) \leftarrow \int_0^t \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) \varphi(\gamma, \tau) d\tau \\ & \varphi(\gamma, t) = f^*(t - \gamma\beta) + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^t y f^*(y - \gamma\beta) \frac{I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{t^2 - y^2}\right)}{\sqrt{t^2 - y^2}} dy, \\ & f^*(t) = \frac{1}{\beta} f(t/\beta) \eta(t). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Приведенные операционные соотношения закрывают проблему нахождения аналитических решений уравнения (5) с обобщенными граничными условиями. Однако указанная проблема имеет интересное продолжение, состоящее в возможности представления одного и того же аналитического решения в виде различных функциональных конструкций. Существенно при этом, что некоторая громоздкость аналитической записи решений может быть упрощена с использованием специальных преобразований, приводящих к новым аналитическим решениям, неизвестным ранее. Покажем это на примере первой краевой задачи для уравнения (5):

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0, \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} & W(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 0, \\ & W(\xi, \tau)|_{\xi=0} = 1, \quad \tau > 0, \quad |W(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq 0, \quad \tau \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Пусть  $\bar{W}(\xi, p) = \int_0^\infty \exp(-p\tau) W(\xi, \tau) d\tau$  – изображение Лапласа функции  $W(\xi, \tau)$ . Найдем операционное решение задачи в виде

$$\bar{W}(\xi, p) = \frac{1}{p} \exp(-\xi \sqrt{\beta^2 p^2 + p}). \quad (25)$$

Оригинал изображения (25) имеет вид

$$W(\xi, \tau) = \left[ \exp\left(-\frac{\xi}{2\beta}\right) + \frac{\xi}{2\beta} \int_{\xi}^{\tau/\beta} \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\right) \frac{I_1\left(\frac{1}{2\beta}\sqrt{x^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} dx \right] \eta(\tau - \xi\beta) =$$

$$= \Psi_1(\xi, \tau) \eta(\tau - \xi\beta).$$
(26)

Оригинал изображения (25) можно записать также через интеграл Римана-Меллина

$$\frac{1}{p} \exp\left[-\beta\xi\sqrt{p(p+1/\beta^2)}\right] \leftarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{p} \exp\left[p\tau - \beta\xi\sqrt{p(p+1/\beta^2)}\right] dp = \Psi_2(\xi, \tau). \quad (27)$$

Подинтегральная функция в (27) удовлетворяет условиям леммы Жордано [2], имеет две точки ветвления. Вычисляя контурный интеграл (27), находим:

$$\Psi_2(\xi, \tau) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho\tau) \frac{\sin\xi\beta\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)}}{\rho} d\rho. \quad (28)$$

Теперь покажем, что аналитические решения первой краевой задачи в виде  $W(\xi, \tau) = \Psi_1(\xi, \tau)\eta(\tau - \xi\beta)$  и  $W(\xi, \tau) = \Psi_2(\xi, \tau)\eta(\tau - \xi\beta)$  эквивалентны, то есть  $\Psi_1(\xi, \tau) = \Psi_2(\xi, \tau)$ . Имеем:

$$\Psi_1(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ - \int_{\xi}^{\tau/\beta} \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\right) I_0\left(\frac{1}{2\beta}\sqrt{x^2 - \xi^2}\right) dx \right].$$

Продифференцируем обе части по  $\tau$ :

$$[\Psi_1]_{\tau}' = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ -\frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) I_0\left(\frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{\tau^2}{\beta^2} - \xi^2}\right) \right] = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ -\frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) J_0\left(\frac{1}{2\beta^2}\sqrt{(\beta\xi)^2 - \tau^2}\right) \right].$$

Воспользуемся далее интегралом (достаточно редким)

$$\int_0^a \frac{\exp(-py)}{\sqrt{ay - y^2}} \cos c\sqrt{ay - y^2} dy = \pi \exp\left(-\frac{ap}{2}\right) J_0\left(\frac{a}{2}\sqrt{c^2 - p^2}\right).$$

Находим:

$$[W_1(\xi, \tau)]_{\tau}' = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ -\frac{1}{\beta\pi} \int_0^{1/\beta^2} \frac{\exp(-\rho\tau)}{\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)}} \cos\left(\beta\xi\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)}\right) d\rho \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho\tau) \sin\beta\xi\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)} d\rho.$$

Проинтегрируем по  $\tau$ :

$$\Psi_1(\xi, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho\tau) \frac{\sin\beta\xi\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)}}{\rho} d\rho + C.$$

Так как по условию задачи  $\Psi_1(0, \tau) = 1$ , то  $C = 1$  и окончательно получаем:

$$\Psi_1(\xi, \tau) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho\tau) \frac{\sin \beta \xi \sqrt{\rho \left( \frac{1}{\beta^2} - \rho \right)}}{\rho} d\rho = \Psi_2(\xi, \tau).$$

Таким образом показано, что

$$W(\xi, \tau) = \Psi_1(\xi, \tau)\eta(\tau - \xi\beta) = \Psi_2(\xi, \tau)\eta(\tau - \xi\beta). \quad (29)$$

Приведенные рассуждения могут быть распространены также на вторую и третью краевые задачи с обобщенными граничными условиями, что подчеркивает особенность гиперболических моделей переноса. Следует отметить, что для областей канонического типа (бесконечная пластина, цилиндр сплошной или полый, шар сплошной или полый) точные аналитические решения гиперболических моделей переноса с обобщенными граничными условиями не получены до сих пор, и данная проблема по существу остается открытой. Более удовлетворительная ситуация имеется для частично ограниченных областей (во всех трех системах координат), однако и эта область аналитической теплофизики находится лишь в самом начале своего развития. Сказанное в равной степени относится и к теории теплового удара в терминах динамической термоупругости. Основные результаты исследований этой проблемы ряда авторов [21] опять таки касаются частично ограниченных областей (упругое полупространство, ограниченное плоской поверхностью; пространство с внутренней цилиндрической или сферической полостью). Практически отсутствуют исследования термической реакции на тепловой удар конечных тел канонической формы в условиях локально-неравновесного теплообмена. Одна из причин последнего — недостаточное развитие соответствующего аппарата операционного исчисления.

Настоящая публикация как раз и посвящена указанной проблеме и практически открывает самостоятельное научное направление в аналитической теплофизике и в теории теплового удара, а именно: исследование термической реакции твердых тел канонической формы в условиях локально-неравновесных процессов теплообмена.

## МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕПЛООВОГО УДАРА В ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Проблема теплового удара — одна из центральных в термомеханике в связи с созданием мощных излучателей энергии и их использованием в различных технологических операциях. Ее исследования на основе моделей динамической и квазистатической термоупругости получили широкое развитие: изучены физические закономерности термонапряженного состояния в изотропных и анизотропных упругих телах на основе классической феноменологии Фурье и (частично) Максвелла—Каттанео—Лыкова о конечной скорости распространения теплоты в твердых телах [21]; развита обобщенная теория сопряжения термомеханических полей с полями различной физической природы (электрических, магнитных); сформулированы определяющие соотношения линеаризованной теории с учетом тепловой памяти [21]; установлена связь макроскопического поведения сплошной среды с внутренними параметрами ее состояния и скоростью их изменения во времени [22]. Интенсификация тепловых воздействий на элементы конструкций, создание новых технологических процессов, основанных на использовании высокоинтенсивных импульсных потоков энергии, стимулирует разработку соответствующих модельных представлений для описания термической реакции конструкционных материалов, применяемых на практике. Систематизация результатов, накопленных в этой области термомеханики, дана в книге [21].

Определяющие соотношения динамической термоупругости имеют следующий вид.

Пусть  $D$  – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства  $M(x, y, z)$ , описывающая реальное твердое тело и находящаяся в условиях термонапряженного состояния;  $S$  – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область  $D$ ,  $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$  – внешняя нормаль к  $S$  (вектор, непрерывный в точках  $S$ ),  $T(M, t)$  – распределение температуры в области  $D$  при  $t > 0$ ;  $T_0$  – начальная температура, при которой область находится в недеформированном и ненапряженном состоянии. Пусть  $\sigma_{ij}(M, t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(M, t)$ ,  $U_i(M, t)$  – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости (в индексных обозначениях):

$$\sigma_{ij,j}(M, t) + F_i(M, t) = \rho \ddot{U}_i(M, t), \quad (30)$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = (1/2)[U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)] \quad (31)$$

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2\mu\varepsilon_{ij}(M, t) + [\lambda\varepsilon_{ii}(M, t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T(M, t) - T_0)]\delta_{ij}, \quad (32)$$

$$M > D, \quad t > 0,$$

где  $\rho$  – плотность;  $\mu = G$ ,  $G$  – модуль сдвига;  $\lambda = 2G\nu/(1 - 2\nu)$  – изотермические коэффициенты Ламе;  $\nu$  – коэффициент Пуассона, при этом  $2G(1 + \nu) = E$ ,  $E$  – модуль Юнга;  $\alpha_T$  – коэффициент линейного теплового расширения;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\bar{\varepsilon}(M, t) = U_{ii}(M, t) = \varepsilon_{ii}(M, t)$  – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений  $\bar{\sigma}(M, t) = \sigma_{nn}(M, t)$  ( $n = x, y, z$ ) соотношением

$$\bar{\varepsilon}(M, t) = \frac{1 - 2\nu}{E} \bar{\sigma}(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0]. \quad (33)$$

Рассмотрим далее в качестве области  $D$  однородный изотропный слой конечной толщины  $l$  при свободных от напряжений границах, занимающий в системе прямоугольных декартовых координат  $(x, y, z)$  область  $0 \leq z \leq l$ ,  $-\infty < x, y < +\infty$ . Поверхности слоя подвергаются различному (интенсивному) тепловому воздействию (температурному, тепловому, воздействию средой) и, таким образом, речь идет о решении ряда одномерных задач об определении нестационарного температурного поля и вызываемых ими динамических температурных напряжений в слое  $0 \leq z \leq l$  при  $t \leq 0$ . В этих условиях при одномерном движении величины  $U_x = U_y = 0$ ;  $U_z = U_z(z, t)$ ;  $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0$ ,  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(z, t)$ ; напряжения  $\sigma_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ),  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)$  ( $i = j$ ); температурная функция  $T = T(z, t)$  и уравнения (30)–(32) при отсутствии объемных сил  $F_i(M, t)$  приводят к следующему соотношению

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial t^2}, \quad 0 < z < l, \quad t > 0, \quad (34)$$

где

$$v_p = \sqrt{\frac{2G(1 - \nu)}{\rho(1 - 2\nu)}} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad (35)$$

скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука. Остальные компоненты тензора напряжения, отличные от нуля, согласно (32)–(33) имеют вид

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{zz}(z, t) - \frac{E\alpha_T [T(z, t) - T_0]}{1 - \nu}, \quad (36)$$

при этом

$$\varepsilon_{zz}(z, t) = \frac{1 - 2\nu}{2G(1 - \nu)} \sigma_{zz}(z, t) + \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \alpha_T [T(z, t) - T_0]. \quad (37)$$

Исходные модели сформулируем в безразмерных переменных:

$$\xi = \frac{v_p z}{a}, \quad \xi_0 = \frac{v_p l}{a}, \quad \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \quad \beta = \frac{v_p}{v_T}, \quad Bi^* = \frac{ha}{v_p}, \quad v_T = \sqrt{a/\tau_r}, \quad W_i(\xi, \tau) = \frac{T_i(z, t) - T_0}{T_c - T_0},$$

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(T_c - T_0)}, \quad S_T = \alpha_T(3\lambda + 2\mu) = \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu}.$$

Рассмотрим следующие модели теплового удара – интенсивный нагрев при  $T_c > T_0$  или интенсивное охлаждение при  $T_c < T_0$ :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad 0 < \xi < \xi_0, \quad \tau > 0, \quad (38)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad (39)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \tau > 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad 0 < \xi < \xi_0, \quad \tau > 0, \quad (41)$$

$$W_i(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} &= Bi^* [W_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} - 1] \\ W_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} &= 0 \end{aligned} \right\} \tau > 0, \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} W_2(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} &= 1 \\ W_2(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} &= 0 \end{aligned} \right\} \tau > 0, \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} W_3(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} &= 0 \\ \frac{\partial W_3(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} &= 0 \end{aligned} \right\} \tau > 0. \quad (45)$$

Остановимся на граничном условии (43): через поверхность  $\xi = 0$  осуществляется теплообмен с внешней средой. Согласно (7) для уравнений гиперболического типа это условие в системе координат  $(\xi, \tau)$  должно иметь вид

$$\frac{1}{\beta^2} \int_0^\tau \frac{\partial W_1(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\beta^2}\right) d\tau' = Bi^* [W_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} - 1], \quad \tau > 0, \quad (46)$$

а в пространстве изображений по Лапласу

$$\frac{d\bar{W}(\xi, p)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = (Bi^* + \beta^2 Bi^* p) \left[ \bar{W}_1(\xi, p) \Big|_{\xi=0} - \frac{1}{p} \right].$$

Оценим  $\beta^2 Bi^*$ . Например, для случая кипящая вода–металлическая стенка средние значения  $\alpha = 4700$  Вт/м<sup>2</sup>К ( $\alpha$  – коэффициент теплообмена),  $v_p = 5000$  м/с,  $\lambda = 144 \times 10^{-5}$  кал/смК. Неравенство  $Bi^* \beta^2 \ll 1$  сводится к эквивалентному  $\tau_r \ll 1/h v_p$ ,

что дает  $\tau_r \ll 10^{-8}$  (с); последнее справедливо, учитывая приведенные выше цифры. Таким образом, операционная форма граничного условия в (43) будет  $[d\bar{W}(\xi, p)/d\xi]_{\xi=0} = Bi^* [\bar{W}(\xi, p)|_{\xi=0} - 1/p]$ . Впрочем, случай (46) будет рассмотрен ниже. Операционная форма аналитических решений задач (38)–(45) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_1(\xi, p) &= \frac{Bi^*}{p} \frac{sh[(\xi_0 - \xi)\bar{s}(p)]}{[Bi^* - \bar{s}(p)] sh\xi_0\bar{s}(p)}; \\ \bar{W}_2(\xi, p) &= \frac{1}{p} \frac{sh[(\xi_0 - \xi)\bar{s}(p)]}{sh\xi_0\bar{s}(p)} \\ \bar{W}_3(\xi, p) &= \frac{1}{p} \frac{ch[(\xi - \xi_0)\bar{s}(p)]}{ch\xi_0\bar{s}(p)} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = p \frac{sh\xi p}{sh\xi_0 p} \int_0^{\xi_0} \bar{W}_i(\xi', p) sh[(\xi' - \xi)p] d\xi' + p \int_0^{\xi} \bar{W}_i(\xi', p) sh[(\xi - \xi')p] d\xi'. \quad (48)$$

Здесь:  $\bar{s}(p) = \sqrt{\beta^2 p^2 + p}$ ;  $i = 1, 2, 3$ .

Соотношения (47)–(48), по существу, новые (операционные) аналитические решения гиперболических моделей (38)–(45). Переход к оригиналам производится с помощью развитого выше аппарата операционного исчисления. Рассмотрим подробно случай  $i = 1$  (граничные условия (43)). Для остальных случаев выпишем готовые решения в оригиналах для напряжений.

Соотношения (47)–(48) для  $i = 1$  приводят к выражению вида:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) &= \frac{Bi^*}{(1 - \beta^2)p - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[Bi^* - \bar{s}(p)]^k}{[Bi^* + \bar{s}(p)]^{k+1}} \times \left\{ \left[ \exp(-\gamma_{2k}(\xi)\bar{s}) - \exp(-\gamma_{1k}(\xi)\bar{s}) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \exp(-\gamma_{3k}(\xi_0)\bar{s}) - \exp(-\gamma_{4k}(\xi_0)\bar{s}) \right] \sum_{n=0}^{\infty} [\exp(-\omega_{1n}(\xi)p) - \exp(-\omega_{2n}(\xi)p)] \right\}. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1k}(\xi) &= 2k\xi_0 + \xi; \quad \gamma_{3k}(\xi_0) = 2k\xi_0; \quad \omega_{1n}(\xi) = 2(n+1)\xi_0 - \xi; \\ \gamma_{2k}(\xi) &= 2(k+1)\xi_0 - \xi; \quad \gamma_{4k}(\xi_0) = 2(k+1)\xi_0; \quad \omega_{2n}(\xi) = 2n\xi_0 + \xi. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Переходя к оригиналам, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{(1 - \beta^2)^{-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tau} \exp\left[-\frac{1}{2\beta^2} \left(\tau - \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} u\right)\right] \left\{ \left[ \varphi(\gamma_{2k}(\xi), \tau - u) - \varphi(\gamma_{1k}(\xi), \tau - u) \right] - \right. \\ &\quad \left. \left[ \varphi(\gamma_{3k}(\xi_0), \tau - u) - \varphi(\gamma_{4k}(\xi_0), \tau - u) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \exp\left(-\frac{\omega_{1n}(\xi)}{1 - \beta^2} \eta(u - \omega_{1n})\right) - \exp\left(-\frac{\omega_{2n}(\xi)}{1 - \beta^2} \eta(u - \omega_{2n})\right) \right] du \right\}. \end{aligned} \quad (51)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma_{ik}, \tau) &= f^*(\tau - \gamma_{ik}\beta) + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^{\tau} f^*(\tau' - \gamma_{ik}\beta) \frac{\tau' I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{\tau'^2 - \tau'^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - \tau'^2}} d\tau'; \\ f^*(\tau) &= (-1)^k \frac{Bi^*}{\beta} \exp\left(-\frac{Bi^*}{\beta} \tau\right) L_k\left(\frac{2Bi^*}{\beta} \tau\right) \eta(\tau). \end{aligned} \quad (52)$$

Функция  $\overline{W}_2(\xi, p)$  в соотношении (48):

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{(1 - \beta^2)^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \langle [\Psi(\gamma_{2k}(\xi), \tau) - \Psi(\gamma_{1k}(\xi), \tau)] - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \times$$

$$\times [\Psi(\gamma_{3k}(\xi_0), \tau - \omega_{jn}(\xi)) \eta(\tau - \omega_{jn}(\xi)) - \Psi(\gamma_{4k}(\xi_0), \tau - \omega_{jn}(\xi)) \eta(\tau - \omega_{jn}(\xi))] \rangle. \quad (53)$$

Здесь:

$$\Psi(\gamma_{ik}, \tau) = \left\langle \exp\left(\frac{\tau - \gamma_{ik}}{1 - \beta^2}\right) \exp\left(\frac{\gamma_{ik}(\beta - 1)}{2\beta(\beta + 1)}\right) + \frac{\gamma_{ik}}{2\beta} \exp\left(\frac{\tau}{1 - \beta^2}\right) \int_{\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}}^{\frac{\tau}{2\beta^2}} \exp\left[-x \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}\right] \times \right.$$

$$\times \frac{I_1\left(\sqrt{x^2 - \left(\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right)^2}\right)}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right)^2}} dx \left. \right\rangle \eta(\tau - \gamma_{ik}\beta). \quad (54)$$

Функция  $\overline{W}_3(\xi, p)$  в соотношении (48):

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{(1 - \beta^2)^{-1}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \Psi(\gamma_{1k}, \tau - \omega_{jn}) \right] -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{j=3}^4 (-1)^{j-3} \exp\left(\frac{\tau - \omega_{jn}}{1 - \beta^2}\right) \eta(\tau - \omega_{jn}) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\Psi(\gamma_{2k}, \tau) + \Psi(\gamma_{3k}, \tau)]. \quad (55)$$

Здесь:

$$\gamma_{1k}(\xi_0) = (2k + 1)\xi_0; \omega_{1n}(\xi) = (2n + 1)\xi_0 - \xi;$$

$$\gamma_{2k}(\xi) = 2(k + 1)\xi_0 - \xi; \omega_{2n}(\xi) = (2n + 1)\xi_0 + \xi; \gamma_{3k}(\xi) = 2k\xi_0 + \xi;$$

$$\omega_{3n}(\xi) = 2(n + 1)\xi_0 - \xi; \omega_{4n}(\xi) = 2n\xi_0 + \xi; \Psi(\gamma_{ik}, \tau) - \text{функция (54)}.$$

Следует подчеркнуть, что термомеханические задачи с обобщенными граничными условиями (6)–(7) – открытая проблема теории теплового удара. Отсутствуют даже единичные публикации, и до сих пор неизвестны функциональные конструкции в качестве аналитических решений этого класса задач. Рассмотрим одну из таких задач (38)–(42) с граничными условиями вида

$$\frac{1}{\beta^2} \int_0^{\tau} \frac{\partial W(\xi, \tau')}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=0} \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\beta^2}\right) d\tau' = Bi^* [W(\xi, \tau)|_{\xi=0} - 1] \tau > 0, \quad (56)$$

$$W(\xi, \tau)|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \tau > 0. \quad (57)$$

Для нахождения аналитического решения обобщенной задачи (38)–(42), (56)–(57) нам понадобятся новые операционные соотношения:

$$\frac{1}{p} \exp\left(-\frac{\tau'}{\beta} \sqrt{\frac{p}{p + 1/\beta^2}}\right) \leftarrow 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \frac{1}{\rho} \exp(-\rho\tau) \sin \frac{\tau'}{\beta} \sqrt{\frac{\rho}{1/\beta^2 - \rho}} d\rho = \Psi_1(\tau, \tau'), \quad (58)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{Bi^*}{p} \frac{\left[ Bi^* - \frac{\bar{s}(p)}{\beta^2 p + 1} \right]^k}{\left[ Bi^* + \frac{\bar{s}(p)}{\beta^2 p + 1} \right]^{k+1}} \leftarrow \int_0^\infty f_k(\tau') \Psi_1(\tau, \tau') d\tau' \\ & f_k(\tau) = (-1)^k Bi^* \exp(-Bi^* \tau) L_k(2Bi^* \tau); \quad \bar{s}(p) = \sqrt{\beta^2 p^2 + p} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \exp[-\gamma_{ik}(\xi) \bar{s}(p)] & \leftarrow \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho \tau) \sin \gamma_{ik} \beta \sqrt{\rho \left( \frac{1}{\beta^2} - \rho \right)} d\rho \eta(\tau - \gamma_{ik} \beta) = \right. \\ & \left. = \Psi_{ik}(\xi, \tau) \eta[\tau - \gamma_{ik}(\xi) \beta] \quad (i = 1, 2). \right. \end{aligned} \quad (60)$$

Вначале запишем решение тепловой задачи (41)–(42), (56)–(57) как новый результат аналитической теплофизики.

Операционное решение:

$$\begin{aligned} \bar{W}(\xi, p) &= \frac{Bi^*}{p} \sum_{k=0}^\infty \frac{\left[ Bi^* - \frac{\bar{s}(p)}{\beta^2 p + 1} \right]^k}{\left[ Bi^* + \frac{\bar{s}(p)}{\beta^2 p + 1} \right]^{k+1}} [\exp(-\gamma_{1k}(\xi) \bar{s}(p)) - \exp(-\gamma_{2k}(\xi) \bar{s}(p))], \\ \gamma_{1k}(\xi) &= 2k\xi_0 + \xi; \quad \gamma_{2k}(\xi) = 2(k+1)\xi_0 - \xi. \end{aligned}$$

Оригинал решения:

$$\begin{aligned} W(\xi, \tau) &= \sum_{k=0}^\infty \int_{\gamma_{1k}(\xi)}^\tau \left[ \int_0^\tau f_k(\tau') \Psi_1(\tau - u, \tau') d\tau' \right] \Psi_{1k}(\xi, u) du - \\ &- \int_{\gamma_{2k}(\xi)}^\tau \left[ \int_0^\tau f_k(\tau') \Psi_1(\tau - u, \tau') d\tau' \right] \Psi_{2k}(\xi, u) du. \end{aligned} \quad (61)$$

Операционное решение для напряжения:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{Bi^* / (1 - \beta^2)} &= \frac{1}{p - 1/(1 - \beta^2)} \sum_{k=0}^\infty \frac{\left( Bi^* - \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\beta^2 p + 1}} \right)^k}{\left( Bi^* + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\beta^2 p + 1}} \right)^{k+1}} [\exp(-\gamma_{3k}(\xi_0) \bar{s}(p)) - \\ &- \exp(-\gamma_{4k}(\xi_0) \bar{s}(p))] \sum_{n=0}^\infty [\exp(-\omega_{1n}(\xi) p) - \exp(-\omega_{2n}(\xi) p)] - \\ &- \frac{1}{p - 1/(1 - \beta^2)} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\left( Bi^* - \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\beta^2 p + 1}} \right)^k}{\left( Bi^* + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\beta^2 p + 1}} \right)^{k+1}} [\exp(-\gamma_{1k}(\xi) \bar{s}(p)) - \exp(-\gamma_{2k}(\xi) \bar{s}(p))] \\ \gamma_{3k}(\xi_0) &= 2k\xi_0; \quad \gamma_{4k}(\xi_0) = 2(k+1)\xi_0; \quad \omega_{1n}(\xi) = 2n\xi_0 + \xi; \quad \omega_{2n}(\xi) = 2(n+1)\xi_0 - \xi. \end{aligned} \quad (62)$$

Оригинал решения:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{Bi^*/(1-\beta^2)} = & \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_{3k}(\xi_0)\beta}^{\tau} \varphi(\gamma_{3k}(\xi_0), u) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{\tau-u-\omega_{1n}(\xi)}{1-\beta^2}\right) \eta(\tau-u-\omega_{1n}) - \right. \\ & \left. - \exp\left(\frac{\tau-u-\omega_{2n}(\xi)}{1-\beta^2}\right) \eta(\tau-u-\omega_{2n}) \right] du - \int_{\gamma_{4k}(\xi_0)\beta}^{\tau} \varphi(\gamma_{4k}(\xi_0), u) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{\tau-u-\omega_{1n}(\xi)}{1-\beta^2}\right) \times \right. \\ & \left. \times \eta(\tau-u-\omega_{1n}) - \exp\left(\frac{\tau-u-\omega_{2n}(\xi)}{1-\beta^2}\right) \eta(\tau-u-\omega_{2n}) \right] du - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \int_{\gamma_{1k}(\xi)\beta}^{\tau} \Psi_2^*(\gamma_{1k}(\xi), y) f_2(\tau-y) dy - \int_{\gamma_{2k}(\xi)\beta}^{\tau} \Psi_2^*(\gamma_{2k}(\xi), y) f_2(\tau-y) dy \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Здесь:

$$\varphi(\gamma_{ik}, \tau) = f_2(\tau - \gamma_{ik}\beta) \exp\left(-\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right) + \frac{\gamma_{ik}}{2\beta} \int_{\gamma_{ik}\beta}^{\tau} f_2(\tau - \tau') \exp\left(-\frac{\tau'}{2\beta^2}\right) \frac{I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{\tau'^2 - (\gamma_{ik}\beta)^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - (\gamma_{ik}\beta)^2}} d\tau';$$

$$f_2(\tau) = \int_0^{\infty} f_1(\tau') \Psi_1^*(\tau, \tau') d\tau'; \quad f_1(\tau) = -(1)^k \exp(-Bi^* \tau) L_k(2Bi^* \tau);$$

$$\Psi_1^*(\tau, \tau') = \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho\tau) \sin \frac{\tau'}{\beta} \frac{\rho}{\sqrt{1/\beta^2 - \rho}} d\rho;$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^*(\gamma_{ik}, \tau) = & \exp\left(\frac{\tau - \gamma_{ik}}{1 - \beta^2}\right) \exp\left(\frac{\gamma_{ik}(\beta - 1)}{2\beta(\beta + 1)}\right) + \frac{\gamma_{ik}}{2\beta} \exp\left(\frac{\tau}{1 - \beta^2}\right) \times \\ & \times \int_{\gamma_{ik}/2\beta}^{\tau/2\beta^2} \exp\left(-x \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}\right) \frac{I_1\left(\sqrt{x^2 - \left(\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right)^2}\right)}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right)^2}} dx. \end{aligned}$$

Профиль напряжения (53) в фиксированном сечении  $\xi = 0.5$  при  $\xi_0 = 1$  для  $\beta = 2.157$  (что соответствует слою из алюминия, для которого  $v_p = 6320$  м/с,  $v_T = 2930$  м/с) показан графиком на рис. 1. Принципиальной особенностью приведенного на рисунке графика напряжения для мгновенного теплового удара является крутой передний фронт термоупругой волны в отличие от плавного уменьшения в известных ранее работах [21], обусловленный введением бесконечной скорости распространения теплоты. К этому следует добавить, что решение (53) ( $1/Bi^* \rightarrow 0$ ) описывает падающие и многократно отраженные от обеих границ слоя плоские температурные волны. Сумма в решении (как и в других приведенных случаях) — математическое следствие принципа суперпозиции, который имеет место в силу линейности задачи. На рис. 2 приведена типичная кривая (для данного класса задач) распределения температуры  $W_2(\xi, \tau)$  по текущей толщине стержня в различные моменты времени (при тех же данных, что и на рис. 1). На графике отчетливо проявляется влияние времени на изменение температуры вдоль текущей толщины.

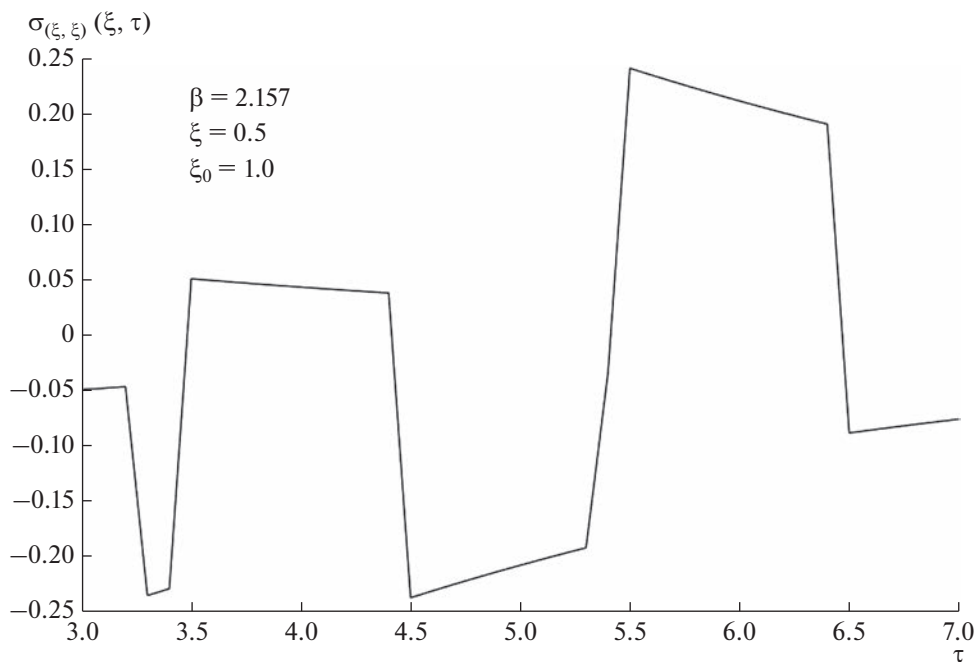


Рис. 1. Температурные напряжения (54) в фиксированном сечении  $\xi = 0.5$  при  $\xi_0 = 1$ ,  $\beta = 2.157$ .

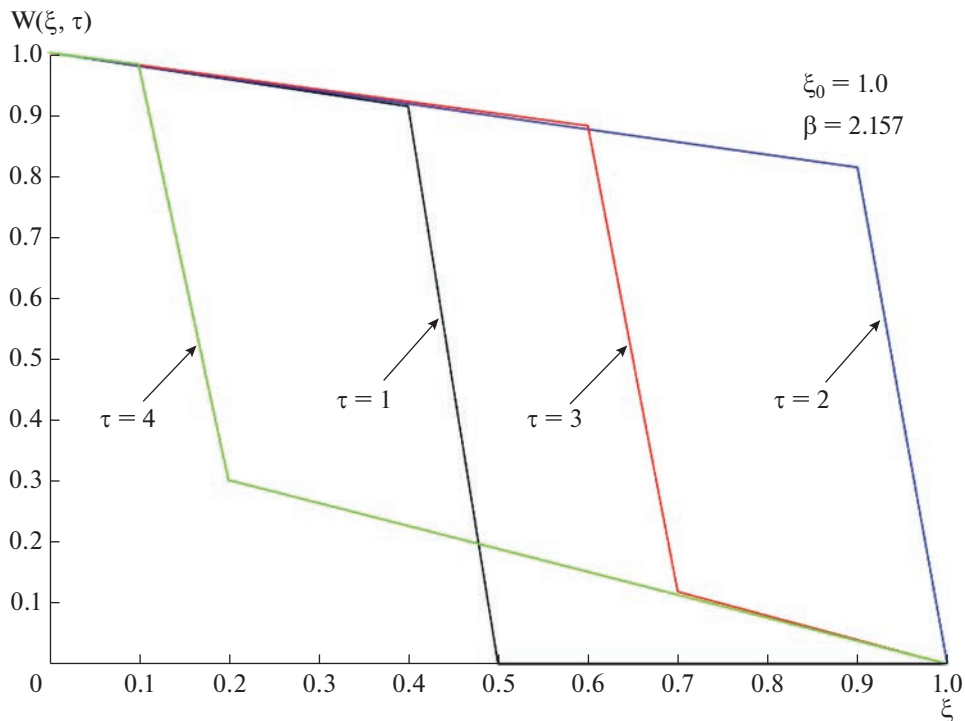


Рис. 2. Распределение температуры  $W_2(\xi, \tau)$  по текущей толщине слоя  $0 < \xi < 1$  в различные моменты времени при  $\beta = 2.157$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены оригиналы нестандартных операционных изображений (по Лапласу), входящие в операционные решения широкого класса задач локально-неравновесных процессов переноса (теплоты, массы, импульса), электрических цепей, гидродинамики, теории колебаний, термомеханики и других областей. Приведены иллюстративные примеры и показана возможность построения аналитических решений математических моделей теории теплового удара в ограниченной области в виде различных функциональных конструкций, для которых доказана эквивалентность. Представленные аналитические решения в областях канонического типа являются новыми в аналитической теплофизике и термомеханике.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карташов Э.М.* Новые операционные соотношения для математических моделей локально-неравновесного теплообмена // Российский технологический журнал. 2022. 10(1). С. 7–18.
2. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа. 2001. 540 с.
3. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М.: URSS. 2012. 1080 с.
4. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа. 1967. 600 с.
5. *Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат. 1983. 328 с.
6. *Формалев В.Ф.* Уравнения математической физики. М.: URAA. 2021. 648 с.
7. *Кудинов И.В., Кудинов И.А.* Математическая модель локально-неравновесного теплопереноса с учетом пространственно-временной нелокальности // Инженерно-физич. журнал. 2015. 88(2), 393–408.
8. *Herwig H., Beckert K.* Experimental evidence about controversy concerning Fourier or non-Fourier heat conduction in materials with nonhomogeneous inner structure // Heat and Mass Transfer. 2000. V. 36. P. 387.
9. *Mitra K., Kumar S., Vedavars A., Mjalleli M.K.* Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat // Heat Transfer, Trans. ASME. V. 117. № 3. P. 568.
10. *Кирсанов Ю.А., Кирсанов А.Ю.* Об измерении времени тепловой релаксации твердого тела // Изв. РАН. Энергетика. 2015. № 1. С. 113.
11. *Maxwell J.C.* On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. of the Royal Soc. of London. 1967. V. 157. Part. 1. P. 49.
12. *Лыков А.В.* Теплопроводность и диффузия в производстве кожи, заменителей и других материалов. М.: Гизлегпром. 1941. 196 с.
13. *Cattaneo C.* Sulla Conduzione de Calore // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell. Universita di Modena. 1948. V. 3. P. 83.
14. *Vernotte P.* Les paradoxes de la theorie continue de l' equation de la chaleur // Compte Rendus. Acad. Sci. Paris. 1958. V. 246. № 22. P. 3154.
15. *Карташов Э.М.* Аналитические решения гиперболических моделей теплопроводности. // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 5. С. 1072.
16. *Фок И.А.* Решение задачи теории диффузии методом конечных разностей и приложение его к диффузии света. М.: Труды государственного оптического института. 1926. 4(34). 32 с.
17. *Давыдов Б.И.* Диффузионное уравнение с учетом молекулярной скорости. ДАН СССР. 1935. 2. 474–475.
18. *Предводителев А.С.* Учение о теплоте и римановы многообразия. В кн. Проблемы тепло- и массопереноса. М.: Энергия. 1970. С. 151–192.
19. *Демирчан К.С., Бутырин П.А.* Моделирование и машинный расчет электрических цепей. М.: Высшая школа. 1983. 335 с.
20. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочные по операционному исчислению. М.: Высшая школа. 1966. 446 с.
21. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS. 2012. 651 с.
22. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели термомеханики. М.: Физматлит. 2002. 168 с.

## **New Analytical Solutions of Mathematical Models of Heat Shock of Local Non-Equilibrium Heat Transfer**

**E. M. Kartashov<sup>a, b, \*</sup> and S. S. Krylov<sup>b, \*\*</sup>**

<sup>a</sup>*MIREA – Russian Technological University (Institute of Fine Chemical Technologies  
named after M.V. Lomonosov), Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: professor.kartashov@gmail.com*

<sup>\*\*</sup>*e-mail: compgra@yandex.ru*

The article is devoted to practically new model representations of locally nonequilibrium heat transfer in terms of nonstationary heat conduction for hyperbolic type equations (wave equations), as well as dynamic models of heat shock based on wave equations. The results presented in the article practically open up an independent scientific direction in analytical thermal physics and in the theory of thermal shock, namely: the study of the thermal response of solids of a canonical form of finite sizes to intense heating and cooling under conditions of a locally nonequilibrium heat transfer process. This direction required the development of a special apparatus of operational calculus due to the appearance in analytical solutions of model problems in the image space according to Laplace of non-standard operational images, the originals of which are unknown and are not available in reference books on operational calculus. The presented images are typical for operational solutions of a wide class of generalized boundary value problems for equations of hyperbolic type in the theory of heat conduction, diffusion, hydrodynamics, vibrations, propagation of electricity, thermomechanics and other areas of science and technology. Illustrative examples of analytical solutions of specific model problems of locally nonequilibrium heat transfer and the theory of thermal shock for a finite region are given in both classical and generalized formulations (the latter taking into account the finite rate of heat propagation). The characteristic features of functional structures as analytical solutions of the considered mathematical models are revealed.

**Keywords:** local non-equilibrium heat transfer, heatstroke, new apparatus of operational calculus, analytical solutions