
УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

УДК 62-40

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ
В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ
ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТА¹

© 2023 г. Ю. Э. Плешивцева^a, Э. Я. Рапопорт^{a,*}

^aСамарский государственный технический ун-т, Самара, Россия

*e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

Поступила в редакцию 04.07.2022 г.

После доработки 31.07.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Предлагается конструктивный метод решения линейно-квадратичной задачи робастной оптимизации пространственно-временных управляющих воздействий в системах с распределенными параметрами параболического типа в условиях интервальной неопределенности неизменных во времени параметрических характеристик объекта. В соответствии со стратегией управления по принципу наилучшего гарантированного результата оценка достижимых целевых множеств управляемой системы производится по точности равномерного приближения к требуемому конечному состоянию на расширенном множестве аргументов, включающем кроме пространственных переменных все допустимое множество неопределенных факторов. Развиваемый подход базируется на разработанном ранее альтернативном методе построения параметризуемых алгоритмов программного управления, распространяющем на широкий круг задач оптимизации результаты теории нелинейных чебышевских приближений и существенно использующем фундаментальные закономерности предметной области. Показывается, что предлагаемые уравнения оптимальных регуляторов, сводимые к линейным законам обратной связи по измеряемому состоянию объекта с нестационарными коэффициентами передачи, приводят к достижимым значениям критериев оптимальности, не превышающим их верхних оценок в рассматриваемых условиях неопределенности.

DOI: 10.31857/S0002338823010079, EDN: JANTJS

Введение. Задачи управления не полностью определенными динамическими объектами относятся в настоящее время к числу приоритетных и представляют значительный теоретический и прикладной интерес [1–8]. Большинство работ в этом направлении относится к системам с сосредоточенными параметрами (ССП), для которых известные результаты получены в основном с использованием аппарата функций Ляпунова и линейных матричных неравенств при ограниченной неопределенности модельных представлений [2–4] либо с помощью модифицированных аналогов принципа максимума Понтрягина [5, 6], главным образом, в линейно-квадратичных задачах оптимизации со свободным правым концом фазовой траектории процесса управления.

Применительно к системам с распределенными параметрами (СРП), в рамках моделей которых описывается широкий круг управляемых процессов самой различной физической природы [9], задачи управления в условиях неопределенности принципиально усложняются бесконечной размерностью пространственно распределенной управляемой величины [7, 8]. Их решение разработанными для СПП методами становится затруднительным, особенно при типичных для приложений равномерных оценках целевых множеств конечных состояний СРП, на негладкой границе которых неприменимы классические условия трансверсальности [7, 8, 10–13].

В настоящей работе предлагается конструктивный метод решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления СРП с заданной точностью равномерного приближения конеч-

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00180, <https://rscf.ru/project/22-29-00180>, ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет».

ного состояния системы к требуемому пространственному распределению управляемой величины в условиях интервальной неопределенности неизменных во времени параметрических характеристик объекта. Разработанный метод опирается на установленные ранее в этих условиях альтернативные свойства параметризуемых оптимальных программных управляющих воздействий, распространяющие на рассматриваемые задачи оптимального управления известные результаты теории нелинейных чебышевских приближений [7, 8, 10–13].

1. Постановка задачи. Пусть управляемая величина $Q(x, t)$ объекта с распределенными параметрами описывается в зависимости от пространственной координаты $x \in [x_0, x_1]$ и времени $t \in [0, t_1]$ линейным уравнением второго порядка в частных производных параболического типа:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + c(x) Q(x, t) + u(x, t) \quad (1.1)$$

с начальными

$$Q(x, 0) = Q_0(x) = Q_0 = \text{const} \geq 0 \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$\alpha_0 Q(x_0, t) + \beta_0 \frac{\partial Q(x_0, t)}{\partial x} = 0; \quad \alpha_1 Q(x_1, t) + \beta_1 \frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} = 0; \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (1.3)$$

при пространственно-временном кусочно-непрерывном [13] внутреннем управляющем воздействии $u(x, t)$, заданных достаточно гладких функциях $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и постоянных коэффициентах $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$; $\beta_0, \beta_1 > 0$.

Здесь для простоты без потери общности получаемых далее основных результатов предполагается равномерное распределение $Q(x, 0)$ по пространственной координате в (1.2) и управляющие воздействия не стесняются никакими дополнительными ограничениями.

Эквивалентное (1.1)–(1.3) представление модели объекта управления может быть получено в форме бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно коэффициентов (временных мод) $\bar{Q}_n(t)$ разложения $Q(x, t)$ в сходящийся в среднем ряд по ортонормированной с весом $r(x)$ системе собственных функций $\varphi_n(\mu_n, x)$, $n = 1, 2, \dots$, определяемых вместе с собственными числами μ_n^2 известными методами конечных интегральных преобразований [9, 13, 14]:

$$\frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(t) + \bar{u}_n(t), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.4)$$

$$\bar{Q}_n(0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n);$$

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t) \varphi_n(\mu_n, x). \quad (1.5)$$

Здесь $\bar{u}_n(t)$ – временные моды разложения $u(x, t)$ в ряд вида (1.5):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(t) \varphi_n(\mu_n, x), \quad (1.6)$$

рассматриваемые далее в качестве бесконечного числа автономных, независимых друг от друга и нестесняемых ограничениями сосредоточенных управляющих воздействий, и $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$ – моды $Q_0(x)$.

При этом поведение каждой из модальных составляющих $\bar{Q}_n$ управляемой величины определяется только “своим” управляющим воздействием $\bar{u}_n$, согласно решению каждого из уравнений (1.4) в отдельности независимо от других, обеспечивая в итоге требуемое состояние $Q(x, t)$, описываемое рядом (1.5).

Можно показать [15, 16], что в малостеснительных условиях выполнения усиленных условий Коши–Липшица система уравнений (1.4) имеет единственное решение при заданных воздействиях $\bar{u}_n(t)$, которое с любой требуемой точностью при необходимости аппроксимируется ре-

шением “укороченной” системы, образуемой достаточно большим конечным числом N первых уравнений (1.4) при $\bar{Q}_n(t) = 0$ для всех $n > N$. В итоге оказывается допустимой конечномерная аппроксимация модели (1.4) при $n = \overline{1, N}$, $N < \infty$. Всюду далее на этом основании учитывается N_1 мод $\bar{Q}_n$, $n = \overline{1, N_1}$, в (1.4), где $N_1 = \infty$ или $N_1 = N < \infty$ в зависимости от используемой схемы анализа и возможностей практической реализации исследуемых алгоритмов управления. Конкретный выбор числа N_1 должен производиться при проектировании системы управления, исходя из практически требуемой точности описания модели объекта N_1 уравнениями (1.4).

В характерных условиях интервальной неопределенности начального состояния объекта Q_0 и вектора w его неизменных во времени параметрических характеристик, с точностью до которых определены ограниченные в этих условиях своими заданными максимально и минимально возможными величинами значения $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ в (1.3), вся информация о величинах Q_0 и w исчерпывается сведениями об их принадлежности заданным компактными множествам Ω и W :

$$\begin{aligned} Q_0 \in \Omega; \quad w \in W, \quad w = \{\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1\}; \quad Q_{0\min} \leq Q_0 \leq Q_{0\max}; \\ \alpha_{0\min} \leq \alpha_0 \leq \alpha_{0\max}; \quad \alpha_{1\min} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1\max}; \\ \beta_{0\min} \leq \beta_0 \leq \beta_{0\max}; \quad \beta_{1\min} \leq \beta_1 \leq \beta_{1\max}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Поскольку собственные числа находятся в зависимости от коэффициентов α и β в граничных условиях (1.3) [14], то μ_n в (1.4), (1.5) также оказываются заданными с точностью до известного интервала их возможных изменений.

Каждой реализуемой, согласно (1.7), паре $y = (Q_0, w) \in Y = \Omega \times W$ значений неопределенных факторов при любом допустимом управлении $u(x, t)$ соответствует определяемая решением системы уравнений (1.4) траектория процесса $\bar{Q}(\bar{u}, t, y) = (\bar{Q}_n(\bar{u}_n, t, y))$, $\bar{u} = (\bar{u}_n)$, $n = \overline{1, N_1}$, $t \in [0, t_1]$. Их объединение по всем $y \in Y$ при одном и том же управляющем воздействии образует ансамбль траекторий [1]:

$$Z(t, \bar{u}) = \cup \{\bar{Q}(\bar{u}, t, y) | y \in Y\}, \quad (1.8)$$

описывающий поведение управляемой функции состояния вида (1.5) на множестве $Y \in y$ не полностью определенных параметрических характеристик объекта:

$$Q(x, \bar{u}, t, y) = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\bar{u}_n, t, y) \varphi_n(\mu_n(y), x). \quad (1.9)$$

Пусть необходимо обеспечить за фиксируемое априори время t_1 при управлении ансамблем (1.8) заданную точность ε равномерного приближения конечного пространственного распределения управляемой величины $Q(x, \bar{u}, t_1, y)$ к требуемому состоянию, описываемому кусочно-непрерывной функцией $Q^{**}(x) > Q_0$, $x \in [x_0, x_1]$, для всех $y \in Y$, согласно соотношению

$$\xi_\Sigma(\bar{u}) = \max_{y \in Y} \left[\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \bar{u}, t_1, y) - Q^{**}(x)| \right] \leq \varepsilon, \quad (1.10)$$

которое определяет оцениваемое в типичной для приложений равномерной метрике целевое множество конечных состояний распределенной системы [10–13].

Пусть далее эффективность процесса управления объектом (1.1)–(1.3) оценивается квадратичным функционалом качества

$$J(u, y) = \int_0^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [r(x) Q^2(x, u, t, y) + r(x) u^2(x, t)] dx dt \rightarrow \min_u. \quad (1.11)$$

Переход к описанию объекта в терминах модальных переменных приводит в силу ортонормированности семейства собственных функций к представлению критерия (1.11) в следующем виде [13]:

$$J_1(\bar{u}, y) = \int_0^{t_1} \left[\sum_{n=1}^{N_1} (\bar{Q}_n^2(\bar{u}_n, t, y) + \bar{u}_n^2(t)) \right] dt \rightarrow \min_{\bar{u}}, \quad (1.12)$$

а требования (1.10) к конечному состоянию объекта определяются в форме условия

$$\xi_{\Sigma}(\bar{u}) = \max_{y \in Y} \left[\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\bar{u}_n, t_1, y) \varphi_n(\mu_n(y), x) - Q^{**}(x) \right| \right] \leq \varepsilon. \quad (1.13)$$

В соответствии со стратегией управления по принципу наилучшего гарантированного результата рассмотрим следующую минимаксную задачу робастной оптимизации поведения ансамбля траекторий (1.8) [7]. Обозначим через $u(Q, x, t)$ управляющее воздействие с обратной связью по управляемой величине Q .

Требуется найти оптимальное управление $u^*(Q, x, t)$ обеспечивающее перевод не полностью определенного в условиях (1.7) объекта (1.4) в требуемое конечное состояний (1.13) при минимально возможном значении критерия оптимальности:

$$J_2(\bar{u}) = \max_{y \in Y} J_1(\bar{u}, y) \rightarrow \min_{\bar{u}}. \quad (1.14)$$

Решение сформулированной задачи существует при достижимых значениях ε в (1.13) [1].

2. Программное оптимальное управление ансамблем траекторий. 2.1. Структура оптимального управления для детерминированной модели объекта. При некотором фиксированном значении $y = \tilde{y} = \text{const} \in Y$ задача (1.13), (1.14) приводится к рассмотренному в [13] виду

$$\xi_{1\Sigma}(\bar{u}) = \max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\bar{u}_n, t_1, \tilde{y}) \varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x) - Q^{**}(x) \right| \leq \varepsilon; \quad (2.1)$$

$$J_2(\bar{u}) = J_1(\bar{u}, \tilde{y}) \quad (2.2)$$

для детерминированной модели объекта.

Как показано в [13], стандартные процедуры принципа максимума Понтрягина приводят к представлению оптимальных модальных управлений $\bar{u}_n^*(t)$ в форме явной функции от сопряженной переменной $\psi_n^*(t)$, соответствующей оптимальному процессу, независимо от других составляющих вектора $\bar{u}^* = (\bar{u}_n^*)$, $n = \overline{1, N_1}$:

$$\bar{u}_n^*(t) = \frac{1}{2} \psi_n^*(t), \quad n = \overline{1, N_1}. \quad (2.3)$$

2.2. Краевая задача принципа максимума для детерминированной модели объекта. Уравнения (1.4) с подстановкой управляющего воздействия в форме (2.3) образуют в рассматриваемом случае совместно с уравнениями для сопряженных переменных $\psi_n(t)$ линейную программно-управляемую систему второго порядка относительно двух переменных $\bar{Q}_n$, ψ_n для каждого $n = \overline{1, N_1}$ [13]:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_n}{dt} &= 2\bar{Q}_n + \mu_n^2 \psi_n; \\ \frac{d\bar{Q}_n}{dt} &= -\mu_n^2 \bar{Q}_n + \frac{1}{2} \psi_n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Система (2.4) замыкается требованиями к ее конечному состоянию, которые считаются определенными, исходя из общего для всех $n = \overline{1, N_1}$ условия (2.1).

Решение уравнений (2.4) может быть получено в векторно-матричной форме [13]:

$$\begin{bmatrix} \psi_n(t) \\ \bar{Q}_n(t) \end{bmatrix} = e^{A_n t} \begin{bmatrix} \psi_n(0) \\ \bar{Q}_n(0) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Здесь $A_n - 2 \times 2$ -матрица коэффициентов системы (2.4), $e^{A_n t} - 2 \times 2$ -матрица (матричная экспонента)

$$e^{A_n t} = \begin{bmatrix} A_{n11}(t) & A_{n12}(t) \\ A_{n21}(t) & A_{n22}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

где $A_{nij}(t)$; $i, j = 1, 2$ известные в соответствии со структурой системы уравнений (2.4) элементы $e^{A_n t}$ [13].

2.3. Параметризация управляющих воздействий при полном объеме информации о характеристиках объекта. Согласно (2.5), $\psi_n^*(t)$, а следовательно, и программное управление (2.3) определяются для каждой известной величины $\bar{Q}_n(0)$ с точностью до начальных значений $\psi_n^*(0)$, совокупность которых для всех $n = \overline{1, N_1}$ выступает таким образом, в роли параметрического представления $u^*(x, t)$ в соответствии с (1.6), (2.3), (2.4) [17, 18]. Однако для систем с распределенными параметрами такой подход оказывается неконструктивным, прежде всего, в силу бесконечной размерности вектора $\psi(0) = (\psi_n(0))$, $n = \overline{1, N_1}$ при $N_1 = \infty$. В работе [12] применительно к требованиям (2.1), предъявляемым к конечному состоянию объекта $\bar{Q}(t_1) = (\bar{Q}_n(t_1))$, $n = \overline{1, N_1}$, предложен конструктивный способ последовательной конечно-мерной параметризации управляющих воздействий (“ ψ – параметризация”) на множестве M -мерных векторов $\psi^{(M)} = (\tilde{\psi}_i)$, $i = \overline{1, M}$; $\tilde{\psi}_i = \psi_i(t_1)$, $M < N_1$, финишных значений $\tilde{\psi}_i$ первых M сопряженных функций в (2.4) при равных нулю всех остальных значениях $\psi_i(t_1)$:

$$\psi^{(M)} = (\psi_i(t_1)) = (\tilde{\psi}_i), \quad i = \overline{1, M}; \quad \psi_i(t_1) = 0, \quad i > M. \quad (2.7)$$

С возрастанием M обеспечивается попадание под действием параметризуемых на множестве параметров (2.7) управляющих воздействий вида (2.3) в сужающееся к началу координат в пространстве $\bar{Q}(t)$ целевое множество, гарантируя выполнение условий (2.1) для достижимых значений ϵ при некотором конечном значении $M \geq 1$ [12].

Явная форма ψ -параметризованного управления (2.3) может быть получена в результате прогонки начальных условий в (2.5) к моменту $t = t_1$ в виде следующей линейной зависимости от определяемого, согласно (2.7), конечного значения $\psi_n^*(t_1)$ в оптимальном процессе и начального состояния $\bar{Q}_n(0)$ объекта управления [13]:

$$\bar{u}_n^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[K_n(t, t_1)\tilde{\psi}_n^* + K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(0)], & n \leq M; \\ \frac{1}{2}K_{1n}\bar{Q}_n(0), & n > M, \end{cases} \quad (2.8)$$

где $\tilde{\psi}_n^*$ – значения $\tilde{\psi}_n$ в (2.7), соответствующие оптимальному процессу. Здесь [13]

$$\begin{aligned} K_n(t, t_1) &= \hat{A}_{n11}(t_1 - t) + \hat{A}_{n12}(t_1 - t)B_n(t_1); \\ K_{1n}(t, t_1) &= \hat{A}_{n12}(t_1 - t)B_{1n}(t_1); \end{aligned} \quad (2.9)$$

$\hat{A}_{nij}$, $i, j = 1, 2$, подобные (2.6) блоки обратной матрицы $e^{-A_n(t_1-t)}$ и

$$B_n(t_1) = A_{n21}(t_1)A_{n11}^{-1}(t_1); \quad B_{1n}(t_1) = A_{n22}(t_1) - A_{n21}(t_1)A_{n11}^{-1}(t_1)A_{n12}(t_1). \quad (2.10)$$

Последующая подстановка (2.8) в (1.6), где следует учесть $N_1 \leq \infty$ слагаемых бесконечной суммы, приводит к ψ -параметризованной форме оптимального программного управления $u^*(x, t)$:

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M K_n(t, t_1)\tilde{\psi}_n^* \varphi_n(\mu_n, x) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} K_{1n}(t, t_1)\bar{Q}_n(0) \varphi_n(\mu_n, x). \quad (2.11)$$

Таким образом, $u^*(x, t)$ находится, согласно (2.11), с точностью до выбора оптимального вектора параметров $\psi_*^{(M)} = (\tilde{\psi}_i^*)$, $i = \overline{1, M}$, в (2.7). К его определению применительно к задаче (1.13), (1.14) управления ансамблем траекторий (1.8) и сводится дальнейшая задача.

2.4. Редукция к не полностью определенной минимаксной задаче полубесконечной оптимизации. В зависимости от реализуемой величины $\tilde{y} \in Y$ оптимальное управление $\bar{u}_n^*(t, \tilde{y})$ определяется в форме (2.8)–(2.10):

$$\bar{u}_n^*(t, \tilde{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[K_n(t, t_1, \tilde{y}) \tilde{\psi}_n^* + K_{ln}(t, t_1, \tilde{y}) \bar{Q}_n(0) \right], & n \leq M; \\ \frac{1}{2} K_{ln}(t, t_1, \tilde{y}), & n > M; \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} K_n(t, t_1, \tilde{y}) &= \hat{A}_{n11}(t_1 - t, \tilde{y}) + \hat{A}_{n12}(t_1 - t, \tilde{y}) B_n(t_1, \tilde{y}); \\ K_{ln}(t, t_1, \tilde{y}) &= \hat{A}_{n12}(t_1 - t, \tilde{y}) B_{ln}(t_1, \tilde{y}); \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} B_n(t_1, \tilde{y}) &= A_{n21}(t_1, \tilde{y}) A_{n11}^{-1}(t_1, \tilde{y}); \\ B_{ln}(t_1, \tilde{y}) &= A_{n22}(t_1, \tilde{y}) - A_{n21}(t_1, \tilde{y}) A_{n11}^{-1}(t_1, \tilde{y}) A_{n12}(t_1, \tilde{y}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где A_{nij} , $\hat{A}_{nij}$, $i, j = 1, 2$, находятся в соответствии со структурой системы уравнений (2.4) при $\mu_n = \mu_n(\tilde{y})$. На этом основании, согласно (2.11),

$$u^*(x, t, \tilde{y}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M K_n(t, t_1, \tilde{y}) \tilde{\psi}_n^* \varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} K_{ln}(t, t_1, \tilde{y}) \bar{Q}_n(0) \varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x). \quad (2.15)$$

Интегрирование уравнений системы (1.4) с ψ -параметризованным управляющим воздействием вида (2.12)–(2.14) позволяет получить в форме (1.9) зависимости $Q(x, \psi^{(M)}, \tilde{y})$ управляемой величины в конце оптимального процесса и критерия оптимальности $J_1(\psi^{(M)}, \tilde{y})$ в (1.12) для каждого значения $\bar{Q}(0)$ в (2.12) в виде явных функций x , $\psi^{(M)}$ и $\tilde{y}$. В результате осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления (1.12)–(1.14) к минимаксной задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [10, 11]:

$$J_2(\psi^{(M)}) = \max_{\tilde{y} \in Y} J_1(\psi^{(M)}, \tilde{y}) \rightarrow \min_{\psi^{(M)}} \quad (2.16)$$

$$\xi_\Sigma(\psi^{(M)}) = \max_{\tilde{y} \in Y} \left[\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi^{(M)}, \tilde{y}) - Q^{**}(x)| \right] \leq \varepsilon \quad (2.17)$$

на экстремум функции $J_2(\psi^{(M)})$ конечного числа M переменных $\tilde{\psi}_i$, $i = \overline{1, M}$, в (2.7) с бесконечным числом ограничений (2.17). Эти ограничения порождаются требованиями выполнения условия (1.13), записываемого в форме (1.10), для всех $x \in [x_0, x_1]$, $\tilde{y} \in Y$ и заменяются одним эквивалентным ограничением на ошибку равномерного приближения $Q(x, \psi^{(M)}, \tilde{y})$ к $Q^{**}(x)$ в области $G = [x_0, x_1] \times Y$.

ЗПО (2.16), (2.17) существенно усложняется по сравнению с ее частным случаем для детерминированной модели объекта управления [13], во-первых, ограничением на функцию максимума в (2.17), определяемую на расширенном множестве аргументов, которое включает кроме пространственной переменной $x \in [x_0, x_1]$ все допустимые реализации неопределенных факторов $y \in Y$, и, во-вторых, вычислением $J_2(\psi^{(M)})$ в (2.16) по максимальной величине J_1 на множестве Y .

Аналогично детерминированному варианту вида (2.1), (2.2), к которому сводится задача (2.16), (2.17) с фиксируемыми значениями $\tilde{y}$, размерность M вектора $\psi_*^{(M)} = (\tilde{\psi}_n^*)$, $n = \overline{1, M}$, однозначно определяется в зависимости от заданной величины ε в (2.17) соотношением [10–13]

$$M = \omega \quad \text{для всех} \quad \varepsilon : \varepsilon_{\min}^{(\omega)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\omega-1)}, \quad (2.18)$$

где

$$\varepsilon_{\min}^{(\omega)} = \min_{\psi^{(\omega)}} \left[\max_{\substack{x \in [x_0, x_1] \\ \tilde{y} \in Y}} |Q(x, \psi^{(\omega)}, \tilde{y}) - Q^{**}(x)| \right]. \quad (2.19)$$

Значения $\varepsilon_{\min}^{(\omega)}$, $\omega = \overline{1, \rho}$, образуют, как правило, убывающую с возрастанием ω цепочку неравенств [10–13]. Задача (2.16), (2.17) оказывается разрешимой, если $\varepsilon \geq \varepsilon_{\inf}$. Здесь точная нижняя грань $\varepsilon_{\inf}$ достижимых значений ε становится равной минимаксу $\varepsilon_{\min}^{(\rho)}$, где $\rho = \infty$ при $\varepsilon_{\inf} = 0$ и $\rho < \infty$ при $\varepsilon_{\inf} > 0$ соответственно для управляемых и неуправляемых относительно $Q^{**}(x)$ объектов [10].

2.5. Решение минимаксной задачи полубесконечной оптимизации. Решение ЗПО (2.16), (2.17) относительно вектора параметров $\psi^{(M)}$, а также априори неизвестной величины $\varepsilon_{\min}^{(M)}$ в (2.18) в случае, когда по исходным условиям задачи должно быть выполнено равенство $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$ в (2.17), может быть получено альтернансным методом [10, 11, 13]. Метод базируется на специальных альтернансных свойствах искомого решения $\psi_*^{(M)} = (\tilde{\psi}_i^*)$, $i = \overline{1, M}$, задачи (2.16), (2.17) и диктуемой закономерностями предметной области дополнительной информации о характере и формах распределения результирующего состояния $Q(x, \psi^{(M)}, y) - Q^{**}(x)$ управляемой величины в области $G = [x_0, x_1] \times Y$, $(x, y) \in G$, и значения критерия оптимальности $J_1(\psi_*^{(M)}, y)$ в области $Y \ni y$. Можно показать [10], что в рассматриваемой ЗПО, согласно альтернансным свойствам $\psi_*^{(M)}$, в условиях малостеснительных допущений равные допустимой величине ε значения $\max_{x, \tilde{y}} |Q(x, \psi_*^{(M)}, \tilde{y}) - Q^{**}(x)|$ и совпадающие с $J_2(\psi_*^{(M)})$ в (2.16) значения $\max_{\tilde{y}} J_1(\psi_*^{(M)}, \tilde{y})$ достигаются соответственно в некоторых точках $(x_j^0, \tilde{y} = y_j^0) \in G$, $j = \overline{1, R_x}$, и $y_{ei}^0 \in Y$, $i = \overline{1, R_y}$:

$$|Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}, y_j^0) - Q^{**}(x_j^0)| = \varepsilon, \quad j = \overline{1, R_x}, \quad (2.20)$$

$$J_2(\psi_*^{(M)}) = J_1(\psi_*^{(M)}, y_{ei}^0), \quad i = \overline{1, R_y}. \quad (2.21)$$

В общем случае значения y_j^0 неопределенных факторов в (2.21) заранее не определены и процедура их поиска существенно затрудняет дальнейшее решение задачи [5, 6]. Ограничимся далее типичной для прикладных задач возможностью предварительной фиксации этих величин, как правило, на границе ∂Y области Y , которые считаются известными, исходя из физических закономерностей конкретных оптимизируемых процессов [7, 10, 19–22].

Числа R_x и R_y в (2.20), (2.21) определяются следующими соотношениями в зависимости от значения ε в (2.20), замыкающими систему равенств (2.20), (2.21) относительно искомым параметров оптимального процесса:

$$R_x + R_y = M + 1, \quad \text{если} \quad \varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \bar{\varepsilon}; \quad \text{если} \quad (2.22)$$

$$R_x = M + 1, \quad \text{если} \quad \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}; \quad (2.23)$$

$$R_y = M + 1, \quad \text{если} \quad \varepsilon \geq \bar{\varepsilon} = \max_{x, \tilde{y}} |Q(x, \bar{\psi}^{(M)}, \tilde{y}) - Q^{**}(x)|; \quad \bar{\psi}^{(M)} = \arg \min_{\psi^{(M)}} J_2(\psi^{(M)}), \quad (2.24)$$

где M находится по правилу (2.18). Вариант (2.24) исключается далее из рассмотрения, поскольку он отвечает решению $\bar{\psi}^{(M)}$ задачи (2.16) без учета ограничения (2.17).

При наличии информации из предметной области о форме распределений $Q(x, \psi_*^{(M)}, y)$ на $G \ni (x, y)$ и $J_1(\psi_*^{(M)}, y)$ на $Y \ni y$, которая позволяет идентифицировать точки x_j^0, y_j^0, y_{ei}^0 и знаки разности $Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}, y_j^0) - Q^{**}(x_j^0)$, равенства (2.20), (2.21), дополненные условиями существования экстремума функций $Q(x, \psi_*^{(M)}, y) - Q^{**}(x)$ и $J_1(\psi_*^{(M)}, y)$ соответственно в принадлежащих $\text{int}[x_0, x_1]$ точках $x_{jg}^0 \in \{x_j^0\}$ при $y = y_{jg}^0 \in \{y_j^0\}$, $g = \overline{1, R_{1x}}$, $R_{1x} \leq R_x$, и внутренних точках $y_{ei}^0 \in \{y_{ei}^0\}$ множества Y , $p = \overline{1, R_{1y}}$, $R_{1y} \leq R_y$, переводятся в случае (2.22) в замкнутую систему уравнений:

$$Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}, y_j^0) - Q^{**}(x_j^0) = \pm \varepsilon, \quad j = \overline{1, R_x}; \quad (2.25)$$

$$J_2(\Psi_*^{(M)}) = J_1(\Psi_*^{(M)}, y_{ei}^0), \quad i = \overline{1, R_y}; \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [Q(x_{jg}^0, \Psi_*^{(M)}, y_{jg}^0) - Q^{**}(x_{jg}^0)] = 0, \quad g = \overline{1, R_{lx}}; \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} J_1(\Psi_*^{(M)}, y_{eip}^0) = 0, \quad p = \overline{1, R_{ly}} \quad (2.28)$$

с известными числами R_{lx} , R_{ly} и однозначно определяемым знаком ε в (2.25) для каждой пары значений x_j^0 , y_j^0 .

Совместное решение в условиях (2.22) $R_x + R_y + R_{lx} + R_{ly} = M + 1 + R_{lx} + R_{ly}$ уравнений (2.25)–(2.28) относительно $M + 1 + R_{lx} + R_{ly}$ неизвестных $\Psi_*^{(M)} = (\Psi_i^*)$, $i = \overline{1, M}$; $J_2(\Psi_*^{(M)})$: x_{jg}^0 , $g = \overline{1, R_{lx}}$; y_{eip}^0 , $p = \overline{1, R_{ly}}$, при заданных величинах y_j^0 позволяет определить все искомые параметры в ЗПО (2.16), (2.17) применительно к варианту (2.22).

В случае (2.23) получаем систему $M + 1 + R_{lx}$ уравнений (2.25), (2.27), разрешаемую относительно $M + 1 + R_{lx}$ неизвестных $\Psi_*^{(M)} = (\Psi_i^*)$, $i = \overline{1, M}$; $\varepsilon_{\min}^{(M)}$; x_{jg}^0 , $g = \overline{1, R_{lx}}$.

Для выпуклого минимизируемого функционала качества (1.12) значения $\max_{\tilde{y}} J_1(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y})$ в (2.16) достигаются в точках $y_{ei}^0 \in \partial Y$, $i = \overline{1, R_y}$ [6]. Ограничимся далее типичным случаем наличия при $R_y = 1$ в (2.26) только одной такой заранее фиксируемой (подобно y_j^0) точки $y_{e1}^0 \in \partial Y$, соответствующей единственной “наихудшей” реализации значений неопределенных величин $y \in Y$, на которой достигается $\max_{\tilde{y}} J_1(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y})$. При этом точки $y_{eip}^0 \in \text{int } Y$ отсутствуют и уравнения (2.28) исключаются из системы (2.25)–(2.28), которая принимает в итоге следующий вид:

$$Q(x_j^0, \Psi_*^{(M)}, y_j^0) - Q^{**}(x_j^0) = \pm \varepsilon, \quad j = \overline{1, R_x}; \quad (2.29)$$

$$J_2(\Psi_*^{(M)}) = J_1(\Psi_*^{(M)}, y_{e1}^0); \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [Q(x_{jg}^0, \Psi_*^{(M)}, y_{jg}^0) - Q^{**}(x_{jg}^0)] = 0, \quad g = \overline{1, R_{lx}}, \quad R_{lx} \leq R_x, \quad (2.31)$$

где, как правило, $y_{e1}^0 \in \{y_j^0\}$ в (2.29). Согласно (2.22), при $R_y = 1$, $\varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}$ будем иметь $R_x = M$. Система $R_x + R_{lx} = M + R_{lx}$ уравнений (2.29), (2.31) может быть решена известными численными методами относительно $R_x + R_{lx}$ неизвестных $\Psi_*^{(M)} = (\tilde{\Psi}_i^*)$, $i = \overline{1, M}$; x_{jg}^0 , $g = \overline{1, R_{lx}}$, независимо от значений $J_1(\Psi_*^{(M)}, y_{e1}^0)$. По найденной таким образом величине $\Psi_*^{(M)}$ определяется $J_2(\Psi_*^{(M)})$ из уравнения (2.30).

Состояние управляемой величины $Q(x, \Psi_*^{(M)}, \tilde{y})$ в конце оптимального процесса при любом реализуемом значении $\tilde{y} \in Y$ описывается рядом вида (1.9):

$$Q(x, \Psi_*^{(M)}, \tilde{y}) = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y}) \varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x) \quad (2.32)$$

с вектором $\bar{Q}(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y}) = (\bar{Q}_n(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y}))$ конечных значений модальных переменных $\bar{Q}_n$. Здесь, подобно (2.12), можно получить следующее выражение для $\bar{Q}_n(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y})$ в форме линейной функции начального состояния объекта $\bar{Q}_n(0)$ и конечных значений $\Psi_n^*(t_1)$ вектора сопряженных переменных [13]:

$$\bar{Q}_n(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y}) = B_n(t_1, \tilde{y}) \Psi_n^*(t_1) + B_{ln}(t_1, \tilde{y}) \bar{Q}_n(0), \quad (2.33)$$

где $\psi_n^*(t_1)$ по-прежнему определяется, согласно (2.7), $B_n(t_1, \tilde{y})$, $B_{1n}(t_1, \tilde{y})$ вычисляются по формулам (2.14) и, следовательно, $Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}, y_j^0)$ в системе уравнений (2.29), (2.31) находится в форме (2.32), (2.33) с заменой $\tilde{y}$ на y_j^0 .

Таким образом, значения $\psi_*^{(M)}$ в задаче (2.16), (2.17) находятся в результате решения системы уравнений (2.29), (2.31), учитывающей конечное состояние всего ансамбля траекторий управляемой системы. Зависимость $J_1(\psi_*^{(M)}, \tilde{y})$ от $\tilde{y}$ создается за счет включения в подынтегральную функцию критерия (1.12) значений $\bar{Q}_n$ и $\bar{u}_n$, зависящих от y .

При заранее фиксируемом известными закономерностями предметной области значении y^* величины y_{el}^0 в (2.30) в силу соотношений (2.16), (2.17), (2.30) выполняются равенства для найденного вектора $\psi_*^{(M)}$:

$$\begin{aligned} \min_{\psi^{(M)}} J_2(\psi^{(M)}) = J_2(\psi_*^{(M)}) = \max_{y \in Y} J_1(\psi_*^{(M)}, y) = J_1(\psi_*^{(M)}, y_{el}^0) = J_1(\psi_*^{(M)}, y^*); \\ (\psi_*^{(M)}, y^*) = \arg \min_{\psi^{(M)} \in G_\Sigma} \max_{y \in Y} J_1(\psi^{(M)}, \tilde{y}), \quad G_\Sigma = \{\psi^{(M)} : \xi_\Sigma(\psi^{(M)}) \leq \varepsilon\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Отсюда в соответствии с представлением критерия оптимальности $J_1(\bar{u}, y)$ в форме (1.12) следует, что искомое ψ -параметризованное оптимальное программное управление $\bar{u}^*(t)$ ансамблем траекторий (1.8) совпадает с $\bar{u}^*(t, y^*) = (\bar{u}_n^*(t, y^*))$, $n = \overline{1, N_1}$, где $\bar{u}_n^*(t, y^*)$ определяется, согласно (2.12), при $\tilde{y} = y^*$.

В итоге программное оптимальное управление ансамблем (1.8) определяется в форме (2.15) с подстановкой (2.12)–(2.14), где $\tilde{\psi}_*^{(M)}$, $n = \overline{1, M}$, находятся в результате решения системы уравнений (2.29)–(2.31), а $\tilde{y}$ выбирается равным y^* .

2.6. Учет ограничений на характер пространственного распределения программного управления ансамблем траекторий. При характерных для приложений затруднениях в технической реализации пространственного распределения управлений $u^*(x, t)$ вида (2.15) они ищутся в форме взвешенной суммы заранее фиксируемых проектными решениями объекта и заведомо исполнимых стандартными инженерными средствами зависимостей (чаще всего, кусочно-постоянных) $F_m(x)$, $m = \overline{1, s}$; $s \geq 1$, от пространственной координаты с весовыми коэффициентами, в роли которых выступает искомые сосредоточенные управляющие воздействия $v_m(t)$ [13]:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^s F_m(x) v_m(t), \quad m = \overline{1, s}. \quad (2.35)$$

Конечное интегральное преобразование равенства (2.35) приводит к следующему выражению для модальных управляющих воздействий $\bar{u}_n(t)$ в (1.4) [13]:

$$\bar{u}_n(t) = \sum_{m=1}^s \bar{F}_{mn} v_m(t), \quad n = \overline{1, N_1}, \quad (2.36)$$

где $\bar{F}_{mn}$ – n -я мода разложения $F_m(x)$ в ряд вида (1.5) по собственным функциям начально-краевой задачи (1.1)–(1.3).

В типичной для приложений ситуации, когда можно ограничиться учетом только $N_1 = N$ мод $\bar{Q}_n$ в (1.5) и возможен выбор $s = N$ в (2.35), равенства (2.36) при $n = \overline{1, N}$, $N = s$ образуют линейную систему уравнений относительно $v_m^*(t)$, $m = \overline{1, s}$, для заданных значений $\bar{u}_n^*(t)$ в (2.8), решение которой определяется формулами Крамера непосредственно по решению задачи с автономными модальными управлениями:

$$v_m^*(t) = \sum_{n=1}^s \frac{D_{mn}}{D} \bar{u}_n^*(t), \quad m = \overline{1, s}. \quad (2.37)$$

Здесь $D = \det[\bar{F}_{mn}]$, $m, n = \overline{1, s}$; D_{mn} — алгебраическое дополнение n -го элемента m -го столбца D и $D \neq 0$ при линейно-независимых функциях $F(x)$.

В результате искомое программное управление ансамблем траектории $u^*(x, t)$ восстанавливается в виде (2.35) с подстановкой (2.37):

$$u^*(x, t) = \sum_{m=1}^s F_m(x) \sum_{n=1}^s \frac{D_{mn}}{D} \bar{u}_n^*(t), \quad (2.38)$$

где $\bar{u}_n^*(t)$ находятся по схеме (2.12)–(2.34) в форме (2.12) при $\tilde{y} = y^*$. В более общем случае $s < N_1 = N$ в (2.35) задача определения многоканального сосредоточенного управления $v_m^*(t)$, $m = \overline{1, s}$, решается распространением полученных в (2.3)–(2.9) результатов на подобную (2.4) программно-управляемую систему теперь уже N -го порядка путем, указанным в [13].

3. Синтез оптимального управления с модальными управляющими воздействиями. Применение известных процедур аналитического конструирования оптимальных регуляторов в рассматриваемой не полностью определенной линейно-квадратичной задаче оптимизации существенно усложняется трудностями реализации алгоритмов позиционного управления ансамблем траекторий движения объекта [1, 6] и отсутствием классических условий transversальности на негладкой границе целевого множества (1.10) [8, 13]. В настоящем разделе предлагается метод синтеза управляющих воздействий $u^*(Q, x, t)$ с обратной связью, осуществляемый по принципу наилучшего гарантированного результата с использованием, подобно [8, 13], в качестве условий transversальности на правом конце оптимальной траектории известных конечных значений управляемых и сопряженных переменных, которые определяются предварительным расчетом программного управления. Рассмотрим сначала задачу синтеза для детерминированной модели объекта при $\tilde{y} = y^*$ в (2.12)–(2.14), для которой управляющее воздействие $u^*(x, t)$ совпадает, как показано в разд. 2, с оптимальным программным управлением ансамблем траекторий (1.8) в форме (2.15) с заменой $\tilde{y}$ на y^* .

Перенос (прогонка) начальных значений $\psi_n(0)$, $Q_n(0)$ в (2.5) в конечный момент времени t_1 приводит при $\tilde{y} = y^*$ к решению системы уравнений (2.4) в следующем виде [13]:

$$\psi_n^*(t_1) = A_{n11}(t_1 - t, y^*) \psi_n^*(t) + A_{n12}(t_1 - t, y^*) \bar{Q}_n^*(t, y^*); \quad (3.1)$$

$$\bar{Q}_n^*(t_1, y^*) = A_{n21}(t_1 - t, y^*) \psi_n^*(t) + A_{n22}(t_1 - t, y^*) \bar{Q}_n^*(t, y^*), \quad (3.2)$$

где $\psi_n^*(t)$, $\bar{Q}_n^*(t, y^*)$ соответствуют оптимальному процессу и конечные значения $\psi_n^*(t_1)$, $\bar{Q}_n^*(t_1, y^*)$ фиксируются решением задачи программного управления описанным в разд. 2 способом. После умножения равенств (3.1), (3.2) соответственно на известные значения $\bar{Q}_n^*(t_1, y^*) = \bar{Q}_n^*(\psi_n^*(t_1), y^*)$ и $\psi_n^*(t_1)$ в (2.33) и (2.7) левые части соотношений (3.1), (3.2) становятся одинаковыми. Последующее вычитание этих уравнений приводит к зависимости сопряженных переменных от наблюдаемых мод $\bar{Q}_n^*(t, y^*)$ в случае, когда на множестве Y реализуется именно изначально фиксируемое значение $y = y^*$:

$$\begin{aligned} \psi_n^*(t, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(0), \bar{Q}_n^*(t, y^*)) &= T_{n1}(t, t_1, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(t_1, y^*)) \times \\ &\times T_{n2}(t, t_1, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(t_1, y^*)) \bar{Q}_n^*(t, y^*), \quad n = \overline{1, N_1}; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$T_{n1} = [\bar{Q}_n^*(t_1, y^*) A_{n11}(t_1 - t, y^*) - \psi_n^*(t_1) A_{n21}(t_1 - t, y^*)]^{-1}; \quad (3.4)$$

$$T_{n2} = \psi_n^*(t_1) A_{n22}(t_1 - t, y^*) - \bar{Q}_n^*(t_1, y^*) A_{n12}(t_1 - t, y^*). \quad (3.5)$$

Выражения (3.3)–(3.5) однозначным образом определяют зависимость ψ_n^* от своих аргументов. При этом зависимость ψ_n^* от $\bar{Q}_n^*(0)$ в (3.3) характеризуется представлением $\bar{Q}_n^*(t_1, y^*)$ в (3.4), (3.5) в виде (2.33).

Подстановка (3.3) в выражение (2.3) для модального управления приводит к линейному закону синтеза оптимального регулятора с нестационарными коэффициентами обратных связей по изменяемому состоянию $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(t))$, $n = \overline{1, N_1}$, в форме (1.6) в условиях реализации значения $y = y^*$:

$$u^*(\bar{Q}(t, y^*), y^*, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} T_{n1}(t, y^*) T_{n2}(t, y^*) \bar{Q}_n(t, y^*) \varphi_n(\mu_n(y^*), x). \quad (3.6)$$

Здесь значения T_{n1} , T_{n2} представляются, согласно (3.4), (3.5), известными функциями времени с фиксируемыми на протяжении процесса управления величинами $\bar{Q}_n(0)$ в (2.33), которые находятся по результатам наблюдения $\bar{Q}(t)$ в момент $t = 0$.

При наблюдении вектора $\bar{Q}(t, y)$ в условиях неопределенности величин $y \in Y$ при некотором заранее неизвестном значении $y = \tilde{y} = \text{const} \neq y^*$ реализуемый алгоритм обратной связи сохраняется в виде (3.6) с заменой $\bar{Q}(t, y^*)$ на $\bar{Q}(t, \tilde{y})$:

$$u(\bar{Q}(t, \tilde{y}), y^*, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} T_{n1}(t, y^*) T_{n2}(t, y^*) \bar{Q}_n(t, \tilde{y}) \varphi_n(\mu_n(y^*), x) \quad (3.7)$$

в отличие от оптимального

$$u^*(\bar{Q}(t, \tilde{y}), \tilde{y}, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} T_{n1}(t, \tilde{y}) T_{n2}(t, \tilde{y}) \bar{Q}_n(t, \tilde{y}) \varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x), \quad (3.8)$$

который определяется, подобно (3.6), для всех $\tilde{y} \in Y$. Однако оптимальный регулятор (3.8) нереализуем в рассматриваемой задаче робастной оптимизации, не предусматривающей использование идентификаторов значений $\tilde{y}$, из-за невозможности предварительного вычисления $T_{n1}(t, \tilde{y})$, $T_{n2}(t, \tilde{y})$ и $\varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x)$ для заведомо непредсказуемых величин $\tilde{y}$.

Поскольку алгоритму (3.6) соответствует оптимальное программное управление (2.15) ансамблем траекторий при $\tilde{y} = y^*$, то на основании (3.7), (3.8) и соотношений (2.34) выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} J_1(u^*(\bar{Q}(t, \tilde{y}), \tilde{y}, x, t), \tilde{y}) &\leq J_1(u(\bar{Q}(t, \tilde{y}), y^*, x, t), y^*) \leq \max_{\tilde{y} \in Y} J_1(u(\bar{Q}(t, \tilde{y}), y^*, x, t), y^*) = \\ &= J_1(u^*(\bar{Q}(t, y^*), y^*, x, t), y^*) = J_2(u^*(\bar{Q}(t, y^*), y^*, x, t)), \end{aligned} \quad (3.9)$$

согласно которым величина $J_1(u(\bar{Q}(t, \tilde{y}), y^*, x, t), y^*)$, определяемая законом обратной связи (3.7), не превышает верхней оценки достижимых значений J_2 при управлении (3.6) детерминированной моделью объекта. Отсюда следует, что синтез оптимального регулятора (3.7) можно считать гарантированным решением рассматриваемой задачи управления ансамблем траекторий управляемого процесса.

Переход в (3.7) от $\bar{Q}(t, \tilde{y})$ к измеряемому выходу объекта $Q_u(x_u, t, \tilde{y}) = (Q(x_{uj}, t, \tilde{y}))$ в r точках $x_{uj} \in [x_0, x_1]$, $j = \overline{1, r}$, определяется в соответствии с (1.5) векторно-матричным уравнением наблюдения

$$Q_u(x_u, t, \tilde{y}) = \Phi_u(\tilde{y}) \bar{Q}(t, \tilde{y}); \quad \Phi_u(\tilde{y}) = [\varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x_{uj})], \quad n = \overline{1, N_1}; \quad j = \overline{1, r}. \quad (3.10)$$

В условиях $r < N_1$ неполного измерения состояния для восстановления вектора $\bar{Q}(t, \tilde{y})$ по значениям $Q_u(x_u, t, \tilde{y})$ требуется построение наблюдателя точного или пониженного порядка [23]. Если по условиям требуемой точности моделирования объекта (1.4) можно ограничиться учетом только M первых слагаемых $\bar{Q}(t, \tilde{y}) = (\bar{Q}_n(t, \tilde{y}))$, $n = \overline{1, M}$, с минимальным их числом $M < N_1$, необходимым для решения системы уравнений (2.29), (2.31) относительно вектора $\Psi_*^{(M)}$, то $\bar{Q}(t, \tilde{y})$ непосредственно определяется решением уравнения (3.10) относительно $\bar{Q}(t, \tilde{y})$ при $r = M$, $N_1 = N = M$:

$$\bar{Q}(t, \tilde{y}) = \Phi^{-1}(\tilde{y}) Q_u(x_u, t, \tilde{y}). \quad (3.11)$$

Подстановка (3.11) в (3.7) приводит к линейному алгоритму синтеза с обратными связями по измеряемому выходу объекта:

$$\begin{aligned} u(Q_u(x_u, t, \tilde{y}), y^*, x, t) &= \frac{1}{2} \Phi_u^{-1}(\tilde{y}) Q_u(x_u, t, \tilde{y}) \varphi(y^*, x, t); \\ \varphi(y^*, x, t) &= (T_{n1}(t, y^*) T_{n2}(t, y^*) \varphi_n(\mu_n(y^*), x)), \quad n = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\Phi_u^{-1}(\tilde{y}) Q_u(x_u, t, \tilde{y})$ – матрица-строка; $\varphi(y^*, x, t)$ – матрица-столбец.

Аналогично (3.8) регулятор (3.12) нереализуем ввиду невозможности предварительного вычисления $\Phi_u^{-1}(\tilde{y})$ для непредсказуемых заранее конкретных значений $\tilde{y} \in Y$. Замена $\Phi_u^{-1}(\tilde{y})$ на $\Phi_u^{-1}(y^*)$ в (3.12) приводит в силу неравенств вида (3.9) к реализуемому гарантированному алгоритму управления

$$u(Q_u(x_u, t, \tilde{y}), y^*, x, t) = \frac{1}{2} \Phi_u^{-1}(y^*) Q_u(x_u, t, \tilde{y}) \varphi(y^*, x, t), \quad (3.13)$$

не превышающему верхней оценки критерия качества J_2 в (3.9).

В условиях (2.35)–(2.37) при $N_1 = N = s$ управление $u^*(x, t)$ представляется в форме (2.38). Подстановка $\bar{u}_n^*(t)$ в (2.38) в виде (2.3), (3.3)–(3.5) приводит в таком случае вместо (3.7) и (3.13) к следующим алгоритмам синтеза оптимального регулятора с обратными связями по $\bar{Q}(t, \tilde{y})$:

$$u^*(\bar{Q}(t, \tilde{y}), y^*, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s F_m(x) \sum_{n=1}^s \frac{D_{mn}}{D} T_{n1}(t, y^*) T_{n2}(t, y^*) \bar{Q}_n(t, \tilde{y}) \quad (3.14)$$

и по измеряемому выходу объекта:

$$\begin{aligned} u^*(Q_u(x_u, t, \tilde{y}), y^*, x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s F_m(x) [\Phi_u^{-1}(y^*) Q_u(x_u, t, \tilde{y}) \varphi_{om}(y^*, t)]; \\ \varphi_{om}(y^*, t) &= \left(T_{n1}(t, y^*) T_{n2}(t, y^*) \frac{D_{mn}}{D} \right), \quad n = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где аналогично (3.12) $\varphi_{om}(y^*, t)$ – матрица-столбец.

4. Синтез оптимального регулятора для не полностью определенного объекта технологической теплофизики. В качестве примера, представляющего самостоятельный интерес, рассмотрим задачу синтеза оптимального управления температурным режимом нагрева неограниченной пластины в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта [7, 10, 19–22].

Пусть температурное поле $Q(x, t)$ неограниченной пластины описывается в процессе ее нагрева в зависимости от пространственной координаты x и времени t линейным неоднородным уравнением теплопроводности вида (1.1)–(1.3) в относительных единицах [19–21]:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in [0, t_1]; \quad (4.1)$$

$$Q(x, 0) = Q_0 = \text{const} \geq 0; \quad \frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q(1, t)}{\partial x} + \alpha Q(1, t) = 0, \quad (4.2)$$

где граничные условия (4.2) учитывают тепловые потери в окружающую среду с нулевой температурой на границе пластины $x = 1$ по закону конвективной теплопередачи с заданным значением α критерия Био. Здесь $u(x, t)$ в (4.1) – нестесняемое дополнительными ограничениями кусочно-непрерывное пространственно-временное воздействие по мощности внутреннего тепловыделения.

В характерной ситуации, когда вся информация о неизменных во времени величинах Q_0 и α в (4.2) исчерпывается сведениями об их предельно допустимых значениях $Q_{0\min}, Q_{0\max}, \alpha_{\min}, \alpha_{\max}$, получаем следующий вектор y неопределенных факторов в (1.8), (1.9):

$$y = (Q_0, \alpha) \in Y = \{Q_0, \alpha : Q_{0\min} \leq Q_0 \leq Q_{0\max}; \alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}\}. \quad (4.3)$$

При этом управляемая величина $Q(x, \bar{u}, t, y)$ представляется в форме ее разложения в ряд (1.9) по собственным функциям $\varphi_n(x, y) = \cos(\mu_n(y), x)$ [19–21]:

$$Q(x, \bar{u}, t, y) = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{2\alpha^2 \cos(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha) \sin^2(\mu_n)} \bar{Q}_n(\bar{u}_n, t, y), \quad (4.4)$$

где μ_n — бесконечно возрастающая последовательность корней трансцендентного уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu - \alpha = 0, \quad (4.5)$$

вычисляемых в зависимости от заданного значения α в условиях (4.3), а $\bar{Q}_n(\bar{u}_n, t, y)$ определяется решением системы уравнений вида (1.4):

$$\frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n + \bar{u}_n(t); \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}^0(\mu_n), \quad n = \overline{1, N_1}, \quad (4.6)$$

где $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$ — моды Q_0 в (4.2).

Зависимости $\mu_n(\alpha)$ в (4.5) и $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n, Q_0)$ в (4.6) определяют $Q(x, \bar{u}, t, y)$ как сложную функцию y .

Требуется найти управление $u^*(Q, x, t)$ с обратной связью, являющееся решением минимаксной задачи оптимизации (1.12)–(1.14) при $Q^{**}(x) = Q^{**} = \text{const} > Q_0$.

4.1. Решение задачи программного управления. Процедура ψ -параметризации приводит к представлению $\psi^*(t_1)$ в форме (2.7). Для типичного в приложениях случая $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (2.17), (2.19) здесь следует принять $M = 2$, согласно (2.18), и тогда в соответствии с (2.7)

$$\psi^*(t_1) = (\tilde{\psi}_i^*), \quad i = 1, 2; \quad \psi_i^*(t_1) = 0, \quad i > 2.$$

Примем здесь и всюду далее для большей простоты и наглядности получаемых результатов $N_1 = N = 2$ в (4.4), ограничиваясь учетом только двух модальных переменных в сумме (4.4). При $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ получаем $R_x = M + 1 = 3$ в (2.29) в соответствии с правилом (2.23), образуя замкнутую систему равенств (2.29), (2.31) относительно неизвестных $\psi_*^{(M)}$; x_{jg}^0 , $j = 1, 2, 3$, $g = \overline{1, R_{1x}}$, при заданных величинах y_{jg}^0 в (2.31).

Физические закономерности поведения нестационарных температурных полей в оптимальном процессе нагрева пластины и альтернансные свойства $\psi_*^{(2)}$ однозначным образом определяют в рассматриваемом примере, подобно [19–21], при $M = 2$, $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$, $Q_0 = \text{const}$, $Q^{**} = \text{const}$ форму кривых результирующего распределения температуры $Q(x, \psi_*^{(M)}, y) - Q^{**}$ по пространственной координате (рис. 1) для всех значений $y = (Q_0, \alpha) \in Y$. Это позволяет заведомо идентифицировать в (2.29), (2.31) при $R_{1x} = 1$ координаты точек $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = x_{2g}^0 = x_{21}^0 \in (0, 1)$, $x_3^0 = 1$; значения $y_1^0 = (Q_{0\min}, \alpha_{\max})$, $y_2^0 = y_{2g}^0 = y_{21}^0 = (Q_{0\max}, \alpha_{\min})$; $y_3^0 = y_1^0$ и знаки $Q(x_j^0, \psi_*^{(2)}, y_j^0) - Q^{**}$, $j = \overline{1, 3}$. В результате равенства (2.29), (2.31) редуцируются к замкнутой системе линейных по $\tilde{\psi}_1^*$, $\tilde{\psi}_2^*$ уравнений:

$$\begin{aligned} Q(x_1^0, \psi_*^{(2)}, Q_{0\min}, \alpha_{\max}) - Q^{**} &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ Q(x_2^0, \psi_*^{(2)}, Q_{0\max}, \alpha_{\min}) - Q^{**} &= \varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ Q(x_3^0, \psi_*^{(2)}, Q_{0\min}, \alpha_{\max}) - Q^{**} &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ \frac{\partial Q(x_2^0, \psi_*^{(2)}, Q_{0\max}, \alpha_{\min})}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

разрешаемой относительно $\psi_*^{(2)} = (\tilde{\psi}_1^*, \tilde{\psi}_2^*)$ и x_2^0 при $x_1^0 = 0$, $x_3^0 = 1$. Здесь $Q(x, \psi_*^{(2)}, y)$ при $y = y_j^0$, $j = 1, 2, 3$, находится в форме (4.4) при $t = t_1$ с подстановкой $\bar{Q}_n(\bar{u}_n, t_1, y)$ в виде $\bar{Q}_n(\psi_*^{(2)}, y)$ в (2.33).

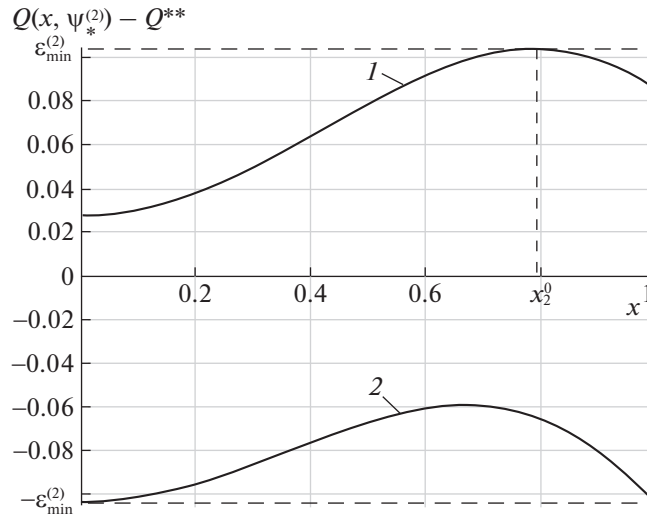


Рис. 1. Температурные распределения в конце оптимального процесса

Значения B_n и B_{1n} вычисляются по выражениям (2.14) в зависимости от блочных компонентов матричной экспоненты (2.6) системы уравнений (2.4), которые в свою очередь определяются по описанной в [13] схеме для $y = y_j^0$.

В силу базовых свойств температурного распределения $Q(x, \psi_*^{(2)}, y)$ значение y_{el}^0 в (2.30), на котором достигается оптимальная величина $J_2(\psi_*^{(2)})$ квадратичного критерия качества, оказывается равной, подобно [19–21], величине $y^* = y_2^0 = (Q_{0\max}, \alpha_{\min})$. В таком случае $J_2(\psi_*^{(2)})$ непосредственно находится из уравнения (2.30) при найденном значении $\psi_*^{(2)}$.

В итоге оптимальное программное управление определяется в виде (2.15) с подстановкой (2.13), (2.14) при $\tilde{y} = y^* = y_2^0 = (\alpha_{\min}, Q_{0\max})$ и известных значениях A_{nij} , $\hat{A}_{nij}$; $i, j = 1, 2$.

4.2. Аналитическое конструирование оптимального регулятора. Согласно (3.7), (4.3), получаем линейный с нестационарными коэффициентами алгоритм оптимального управления с обратными связями по реализуемому состоянию $\bar{Q}(t, \tilde{y}) = (\bar{Q}_n(t, \tilde{y}))$, $n = 1, 2$:

$$u(\bar{Q}(t, \tilde{y}), y^*, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 T_{n1}(t, y^*) T_{n2}(t, y^*) \bar{Q}_n(t, \tilde{y}) \varphi_n(\mu_n(y^*), x), \quad y^* = (Q_{0\max}, \alpha_{\min}) \quad (4.7)$$

с известными функциями $T_{n1}(y^*, t)$, $T_{n2}(y^*, t)$ в (3.4), (3.5); значениями $\psi_*^{(2)} = (\tilde{\psi}_1^*, \tilde{\psi}_2^*)$, найденными в условиях $N_1 = N = 2$ в (4.4), и собственными функциями $\varphi_n(\mu_n(y^*), x) = \varphi_n(\mu_n(\alpha_{\min}), x)$, определяемыми, согласно (4.4), (4.5), в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\mu_n(\alpha_{\min}), x) &= q_n(\alpha_{\min}) \cos(\mu_n(\alpha_{\min}), x), \quad n = 1, 2; \\ q_n(\alpha_{\min}) &= \frac{2\alpha_{\min}}{(\mu_n^2(\alpha_{\min}) + \alpha_{\min}^2 + \alpha_{\min}) \sin^2(\mu_n(\alpha_{\min}))}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\mu_n(\alpha_{\min})$ — корни уравнения (4.5) при $\alpha = \alpha_{\min}$.

При наличии двух измерителей выхода объекта в точках x_{u1} , $x_{u2} \in [0, 1]$ получаем систему двух линейных уравнений (3.10) при $\tilde{y} = y^*$:

$$\begin{aligned} Q_u(x_{u1}, t, y^*) &= \bar{Q}_1(t, y^*) \varphi_1(\mu_1(y^*), x_{u1}) + \bar{Q}_2(t, y^*) \varphi_2(\mu_2(y^*), x_{u1}); \\ Q_u(x_{u2}, t, y^*) &= \bar{Q}_1(t, y^*) \varphi_1(\mu_1(y^*), x_{u2}) + \bar{Q}_2(t, y^*) \varphi_2(\mu_2(y^*), x_{u2}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

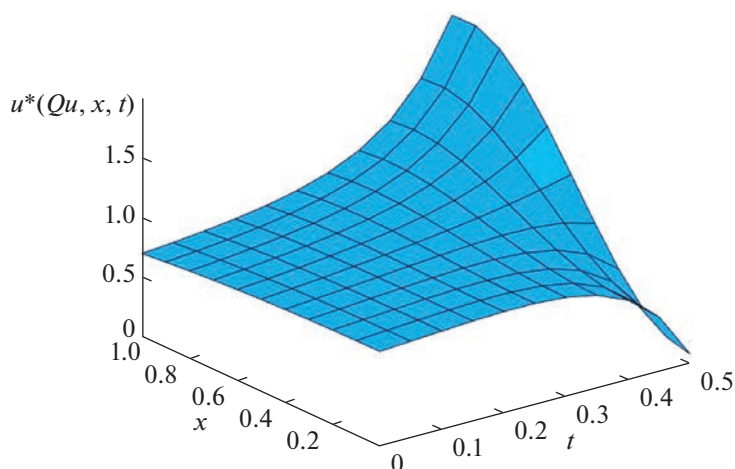


Рис. 2. Управляющее воздействие с обратными связями на пространственно-временной плоскости в условиях реализации значений $y = (\alpha_{\min}, Q_{0\max})$

разрешаемую относительно $\bar{Q}_1(t, y^*)$, $\bar{Q}_2(t, y^*)$ по известным значениям наблюдаемых величин $Q_u(x_u, t, y^*)$.

Подстановка решения системы уравнений (4.9) в (4.7) определяет искомый алгоритм синтеза оптимального регулятора с обратными связями по наблюдаемому выходу объекта в форме (3.13), где в данном примере $x_u = (x_{u1}, x_{u2})$, $\Phi_u^{-1}(y^*)$ – 2×2 -матрица и матрица-столбец $\varphi(y^*, x, t)$, состоит из двух элементов при $n = 1, 2$ в (3.12).

На рис. 1, 2 представлены некоторые расчетные результаты, полученные при $Q^{**} = 0.5$; $\alpha_{\min} = 0.3$; $\alpha_{\max} = 0.7$; $Q_{0\min} = 0$; $Q_{0\max} = 0.15$; $t_1 = 0.5$ при $x_{u1} = 1$, $x_{u2} = 0$.

На рис. 1 показано результирующее состояние ансамбля траекторий оптимального процесса ($1 - \alpha = \alpha_{\min}$; $Q_0 = Q_{0\max}$; $2 - \alpha = \alpha_{\max}$; $Q_0 = Q_{0\min}$; $\tilde{\Psi}_1^* = 2.12$; $\tilde{\Psi}_2^* = -1.40$; $\varepsilon_{\min}^{(2)} = 0.104$).

Рисунок 2 иллюстрирует в условиях реализации неизменных во времени значений $\tilde{y} = y^* = (\alpha_{\min}, Q_{0\max})$ поведение управляющих воздействий $u(Q_u(x_u, t, y^*), y^*, x, t)$ на пространственно-временной плоскости, изменяющихся во времени по алгоритму (3.13) в зависимости от текущих значений измеряемых сигналов обратной связи в точках $x_{u1} = 1$, $x_{u2} = 0$ с нестационарными коэффициентами передачи.

Заключение. Предлагаемые методы решения линейно-квадратичных задач робастной оптимизации пространственно-временного управления системами с распределенными параметрами параболического типа в условиях интервальной неопределенности параметрических характеристик объекта разработаны применительно к характерным для приложений оценкам целевых множеств конечных состояний ансамбля траекторий управляемой системы в равномерной метрике. Полученные уравнения субоптимальных регуляторов, сводимые к линейным алгоритмам обратной связи по измеряемому состоянию объекта с нестационарными коэффициентами передачи, характеризуются достигаемыми значениями критерия оптимальности, не превышающими их максимально возможные величины в исследуемых условиях неопределенности, и тем самым реализуют стратегию управления по принципу наилучшего гарантированного результата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
2. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
3. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
4. Афанасьев В.Н. Управление неопределенными динамическими объектами. М.: Физматлит, 2008.

5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974.
6. *Пантелеев А.В., Бортакровский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2003.
7. *Рапопорт Э.Я.* Робастная параметрическая оптимизация динамических систем в условиях ограниченной неопределенности // *АиТ.* 1995. № 3. С. 86–96.
8. *Рапопорт Э.Я.* Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в линейно-квадратичных задачах управления системами с распределенными параметрами при равномерных оценках целевых множеств // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2021. № 3. С. 23–38.
9. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
10. *Рапопорт Э.Я.* Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000.
11. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2009.
12. *Плешивецкая Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2009. № 3. С. 22–33.
13. *Плешивецкая Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Пространственно-временное управление системами с распределенными параметрами в линейно-квадратичных задачах оптимизации с равномерными оценками целевых множеств // *Изв. РАН ТиСУ.* 2022. № 4. С. 49–65.
14. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк. 2003.
15. *Валеев Г.К., Жаутыков О.А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1974.
16. *Коваль В.А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. Саратов: Саратовский гос. техн. ун-т, 1997.
17. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
18. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал-Пресс, 2002.
19. *Рапопорт Э.Я.* Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Metallurgy, 1993.
20. *Rapoport E., Pleshivtseva Yu.* Optimal Control of Induction Heating Processes. L., N.Y.: CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2007.
21. *Рапопорт Э.Я., Плешивецкая Ю.Э.* Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. М.: Наука, 2012.
22. *Рапопорт Э.Я., Плешивецкая Ю.Э.* Метод полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 2021.
23. *Рапопорт Э.Я.* Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2005.