ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, № 1, с. 82–105

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519:301

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ОРГАНИЗАЦИИ И ЭФФЕКТИВНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ОЛИГОПОЛИИ КУРНО[1]

© 2023 г. А. В. Королёв[a,]*, М. А. Котова[a,]**, Г. А. Угольницкий[b,]***
[a]Филиал НИУ Высшая школа экономики, Санкт-Петербург, Россия
[b]Южный федеральный ун-т, Ростов-на-Дону, Россия
*e-mail: danitschi@gmail.com,
**e-mail: makotova_2@edu.hse.ru
***e-mail: ougoln@mail.ru

Поступила в редакцию 26.07.2022 г.
После доработки 23.09.2022 г.
Принята к публикации 26.09.2022 г.

Аналитически найдены равновесия Нэша и Штакельберга, а также кооперативные решения для динамических теоретико-игровых моделей олигополии Курно в нормальной форме с неоднородными агентами. Построены и исследованы кооперативные теоретико-игровые модели олигополии Курно трех лиц в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна и Громовой–Петросяна, включая вычисление вектора Шепли. Проведен сравнительный анализ выигрышей агентов, согласно полученным решениям, для игр в нормальной форме и в форме характеристической функции.

DOI: 10.31857/S0002338823010043, **EDN:** HENZDJ

Введение. Проблема (не)эффективности равновесий хорошо известна в теоретико-игровом моделировании конфликтно-управляемых социально-экономических систем [1–5]. Ее смысл состоит в том, что суммарный выигрыш всех игроков (утилитаристское общественное благосостояние) при независимом поведении или даже иерархической организации оказывается меньше, чем при кооперации. Наиболее популярная количественная мера (не)эффективности – цена анархии, которая определяется как отношение суммарного выигрыша всех игроков в наихудшем из равновесий Нэша к максимальному суммарному выигрышу, который достигается при полной кооперации игроков [6].

Однако представляется целесообразным рассматривать проблему (не)эффективности равновесий в более общем виде. Чрезвычайно важно проводить сравнение не только общественного благосостояния, но и индивидуальных выигрышей. Действительно, совсем не очевидно, что лучший с точки зрения всего общества исход игры окажется таким же для каждого игрока в отдельности. Например, выигрыш ведущего в иерархической игре или даже какого-то игрока в равновесии Нэша может оказаться больше выигрыша, который получается при равном распределении суммарного кооперативного выигрыша или при некотором принципе оптимальности для игры в форме характеристической функции. Тогда такой игрок не согласится участвовать в кооперации и предпочтет сохранять независимость или бороться за лидерство. Авторская методология сравнительного анализа в указанном выше смысле описана в статье [7].

Удобной моделью для проведения сравнительного анализа служит олигополия Курно, описывающая конкуренцию фирм по выпускам на рынке однородного продукта [8–10]. Для построения динамических моделей конфликтно-управляемых систем (в частности, олигополии Курно) используются дифференциальные или разностные игры в нормальной форме, содержащие явное описание изменения переменной состояния. В качестве решения при независимом поведении равноправных игроков принимается равновесие Нэша, а при иерархическом управлении

[1] Работа поддержана грантом ЮФУ "Цифровой атлас политических и социально-экономических угроз и рисков развития Южнороссийского приграничья: национальный и региональный контекст ("Цифровой Юг") № СП-14-22-06.

без обратной связи – равновесие Штакельберга [11, 12]. При кооперации дифференциальная игра сводится к задаче оптимального управления, которая решается обычным образом [13].

Другой способ описания кооперации – игры в форме характеристической функции. В этом случае главную роль играют не отдельные игроки, а их подмножества (коалиции). Каждая коалиция характеризуется своим значением характеристической функции, отображающей множество всех коалиций в множество действительных чисел. Главная проблема этого класса игр – распределение выигрыша максимальной коалиции (множества всех игроков) между отдельными игроками. Имеются различные принципы оптимальности (решения) игр в форме характеристической функции: ядро, решение по Нейману–Моргенштерну, вектор Шепли, нуклеолус и др. [14–16].

В течение долгого времени для построения кооперативных игр использовалась только характеристическая функция фон Неймана–Моргенштерна [17]. В этом случае характеристика любой коалиции равна ее значению в антагонистической игре против дополнительной коалиции (антикоалиции). Однако это определение не лишено недостатков. Во-первых, данную функцию часто сложно вычислять. Во-вторых, совсем не очевидно, что в экономических и иных приложениях антикоалиция должна играть строго против некоторой коалиции. Поэтому были предложены другие характеристические функции, например функция Петросяна–Заккура или Громовой–Петросяна [18, 19]. Обсуждение можно найти в [20].

Численное решение динамических игр на основе имитационного моделирования описано в работах [21–23]. В настоящей статье применяется другой подход, апробированный, например, в [24], а именно ищется явное решение игры с помощью уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана. Полученные аналитические решения весьма громоздки, поэтому для сравнения выигрышей все же используется численное моделирование для конкретных значений параметров.

Вклад настоящей статьи заключается в следующем:

построены динамические модели олигополии Курно в нормальной форме и в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна и Громовой–Петросяна;

найдены аналитические решения указанных игр при различных способах организации и методах управления: равновесия Нэша и Штакельберга, кооперативное решение, вектор Шепли;

проведено численное сравнение коллективных и индивидуальных выигрышей для конкретных значений модельных параметров.

Полученные результаты можно использовать в практике управления экономическими и организационными системами.

1. Постановка задачи. Независимое поведение игроков. В работе рассматривается динамическое обобщение модели Курно с линейным уравнением динамики:

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t}\left[\left(a - c_i - \overline{x}(t)\right) x_i(t) - y(t)\right] dt \to \max, \quad \overline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t), \tag{1.1}$$

$$0 \le x_i(t) \le \frac{a}{n}, \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^{n} k\, x_i(t) - my(t), \quad y(0) = y_0, \tag{1.3}$$

$$a > n\left(c_i + \frac{k}{\rho + m}\right), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.4}$$

$$0 < c_1 < \ldots < c_i < \ldots < c_n < \frac{a}{n}. \tag{1.5}$$

Здесь $x_i(t)$ – управляющие переменные игроков (объем выпуска товаров у i-й фирмы); $y(t)$ – переменная состояния (количество загрязняющих веществ (ЗВ) в окружающей среде); k – коэффициент выброса ЗВ в производстве i-й фирмы; a – максимальный объем суммарного выпуска продукции; c_i – коэффициент затрат i-й фирмы; m – коэффициент амортизации; n – количество фирм; ρ – коэффициент дисконтирования; T – длина игры. Таким образом, взаимодействие игроков (конкурирующих фирм) описывается через их управления. Предполагается также, что игроки имеют полную информацию о действиях конкурента. В модели Курно продукт предполагается однородным и является нумерером, т.е. в его (безразмерных) единицах выражаются все стоимостные величины. Таким образом, переменные a, x_i, c_i имеют размерность (руб/с)$^{1/2}$, $[y]$ = руб/с, $[k]$ = руб$^{1/2}$/с$^{3/2}$, $[m]$ = с$^{-1}$, $[\rho]$ = с$^{-1}$. При независимом поведении игроков каждая фирма решает оптимизационную задачу (1.1)–(1.5). Заметим, что возможны и другие варианты построения модели (1.1)–(1.5). Например, объемы выпуска могут рассматриваться как переменные состояния, а управляющими переменными тогда становятся темпы выпуска (переменные издержки). Однако в статье исследуется влияние выпуска продукции на окружающую среду.

Л е м м а 1. Решение уравнения

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1 \tag{1.6}$$

с граничным условием $\alpha(T) = 0$ имеет вид

$$\alpha(t) = \frac{1}{\rho + m}(e^{(\rho+m)(t-T)} - 1). \tag{1.7}$$

Решение уравнения

$$\beta' - \rho\beta = F(t) \tag{1.8}$$

с граничным условием $\beta(T) = 0$, где

$$F(t) = A(\alpha k)^2 + B\alpha k + D,$$

$$A, B, D, k \in R, \quad \alpha(t) = \frac{1}{\rho + m}(e^{(\rho+m)(t-T)} - 1), \quad t \in [0, T],$$

имеет вид

$$\begin{gathered}\beta(t) = -\frac{Ak^2}{(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) + \left(\frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m} - \frac{Bk}{(\rho+m)m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) - \\ -\left(\frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).\end{gathered} \tag{1.9}$$

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

П р е д л о ж е н и е 1. При выполнении условия

$$\bar{c} - (n+1)c_i \le \frac{a}{n}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \bar{c} = \sum_{i=1}^{n} c_i, \tag{1.10}$$

где $n \ge 2$, выигрыш i-го игрока в задаче (1.1)–(1.5) равен

$$\begin{gathered}J_i^{\max} = \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{n^2k^2}{(n+1)^2(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) + \\ + \left(\frac{[(n^2+1)a - 2n\bar{c} + (n^2-1)c_i]k}{(n+1)^2(\rho+m)m} - \frac{2n^2k^2}{(n+1)^2(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ + \left(\frac{n^2k^2}{(n+1)^2(\rho+m)^2\rho} - \frac{[(n^2+1)a - 2n\bar{c} + (n^2-1)c_i]k}{(n+1)^2(\rho+m)\rho} + \frac{[a + \bar{c} - (n+1)c_i]^2}{(n+1)^2\rho}\right)(1 - e^{-\rho T}).\end{gathered} \tag{1.11}$$

Заметим, что если $n = 3$, то для выполнения условия (1.10) достаточно, чтобы $c_2/c_1 \le 3$, потому что тогда $c_2 - 3c_1 \le 0$, а значит, $c_1 + c_2 + c_3 - 4c_1 \le a/3$, так как $c_1 < c_2 < c_3 < a/3$, и условие $\bar{c} - 4c_i = c_1 + c_2 + c_3 - 4c_i \le a/3$, т.е. (1.10) при $n = 3$, верно для c_1 и тем более верно для c_2 и c_3.

Доказательство предложения 1 приведено в Приложении.

2. Кооперативное поведение игроков. 2.1. О б щ и й с л у ч а й п р о и з в о л ь н о г о ч и с л а и г р о к о в. Все фирмы вместе решают задачу оптимального управления

$$J_c = \int_0^T e^{-\rho t}\left[\sum_{i=1}^{n}(a - c_i - \bar{x}(t))x_i(t) - y(t)\right]dt \to \max \tag{2.1}$$

при ограничениях (1.2)–(1.5).

Л е м м а 2. В задаче (2.1), (1.2)–(1.5) максимум при любом t может достигаться только на одном из ребер n-мерного куба (1.2). При этом номер ребра, на котором достигается максимум, – это такое натуральное число $l = l(n,t)$, для которого

$$n\alpha k + (n - 2l)a - nc_l \le 0, \tag{2.2}$$

$$0 \le n\alpha k + [n - 2(l-1)]a - nc_l, \tag{2.3}$$

где $\alpha(t)$ определено (1.7).

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении.

З а м е ч а н и е. Поскольку величина α является функцией времени и за период $[0,T]$ растет от величины

$$\frac{1}{\rho + m}(e^{-(\rho+m)T} - 1)$$

до 0, то число l, определяемое условием (2.2)–(2.3), в некоторые моменты времени может увеличиваться на единицу.

П р е д л о ж е н и е 2. Если величина l не меняется на всем промежутке $[0, T]$, то суммарный выигрыш коалиции в (2.1), (1.2)–(1.5) равен

$$\begin{aligned} J_c^{\max} &= \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) + \\ &+ \left(\frac{(a-c_l)k}{2(\rho+m)m} - \frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ &+ \left(\frac{(a-c_l)^2}{4\rho} - \frac{a\left[\sum_{i=1}^{l-1} c_i - (l-1)c_l\right]}{n\rho} - \frac{(a-c_l)k}{2(\rho+m)\rho} + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho}\right)(1 - e^{-\rho T}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Доказательство предложения 2 приведено в Приложении.

2.2. К о о п е р а т и в н о е п о в е д е н и е и г р о к о в в с л у ч а е $n = 3$. П р е д л о ж е н и е 3. В задаче (2.1), (1.2)–(1.5) при $n = 3$ при любом $t \in [0,T]$ верно, что $l(3,t) = 2$, т.е. максимум достигается на втором ребре.

Доказательство предложения 3 приведено в Приложении.

С л е д с т в и е 1. При $n = 3$ общий выигрыш коалиции равен

$$\begin{aligned} J_c^{\max} &= \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) + \\ &+ \left(\frac{k(a-c_2)}{2(\rho+m)m} - \frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ &+ \left(\frac{3a^2 - 2ac_2 - 4ac_1 + 3c_2^2}{12\rho} + \frac{k(a-c_2)}{2(\rho+m)\rho} - \frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho}\right)(1 - e^{-\rho T}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Иерархическая модель поведения игроков. Пусть первый игрок – ведущий, а все остальные игроки $i = \overline{2,n}$ – ведомые, которым известна стратегия $x_1(t)$, $t \in [0,T]$ первого игрока. Каждая фирма-ведомый решает оптимизационную задачу (1.1)–(1.5) при заданной стратегии первого игрока. Обозначим

$$\tilde{x} = \sum_{j=2}^{n} x_j.$$

Зная зависимость $\tilde{x}$ от x_1, первый игрок (ведущий) решает свою оптимизационную задачу:

$$J_1 = \int_0^T e^{-\rho t}\left[(a - c_1 - x_1(t) + \tilde{x}(t))\,x_1(t) - y(t)\right]dt \to \max \tag{3.1}$$

при ограничениях (1.2)–(1.5).

Предложение 4. Выигрыши игроков в иерархической игре (3.1), (1.1)–(1.5) равны

$$\begin{aligned} J_1^{\max} &= \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) + \frac{k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2(\rho+2m)}\times \\ &\times(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) + \left(\frac{(n^2-2n+2)k}{n^2(\rho+m)m}a - \frac{\tilde{c}k}{n(\rho+m)m} - \frac{2k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2 m}\right)\cdot(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) + \\ &+\left[\frac{k}{(\rho+m)\rho}\left(\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-2n+2}{n^2}a\right) + \left(\frac{n-1}{n^2}a - \frac{nc_1-\tilde{c}}{n}\right)\frac{a}{n\rho} - \frac{(n-1)k^2}{n(\rho+m)^2\rho}\right](1-e^{-\rho T}), \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} J_i^{\max} &= \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{(n-1)^2k^2}{n^2(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) - \left\{\frac{2(n-1)^2k^2}{n^2(\rho+m)^2 m} + \frac{k}{(\rho+m)m}\times\right. \\ &\left.-\left[\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-n+1}{n^2}a + \frac{n-2}{n}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)\right]\right\}(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) + \left\{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)^2 + \right. \\ &\left.+\frac{k}{(\rho+m)\rho}\left[\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-n+1}{n^2}a + \frac{n-2}{n}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)\right] + \frac{(n-1)^2k^2}{n^2(\rho+m)^2\rho}\right\}(1-e^{-\rho T}), \quad i = \overline{2,n}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Доказательство предложения 4 приведено в Приложении.

Следствие 2. В случае $n = 3$ получаем

$$\begin{aligned} J_1^{\max} &= \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{2k^2}{3(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) + \\ &+\left(\frac{5k}{9(\rho+m)m}a - \frac{\tilde{c}k}{3(\rho+m)m} - \frac{4k^2}{3(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) + \\ &+\left[\frac{k}{(\rho+m)\rho}\left(\frac{\tilde{c}}{3} - \frac{5}{9}a\right) + \left(\frac{2}{9}a - \frac{3c_1-\tilde{c}}{3}\right)\frac{a}{3\rho} - \frac{2k^2}{3(\rho+m)^2\rho}\right](1-e^{-\rho T}), \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} J_i^{\max} &= \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{4k^2}{9(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) - \\ &-\left\{\frac{8k^2}{9(\rho+m)^2 m} + \frac{k}{(\rho+m)m}\left[\frac{\tilde{c}}{3} - \frac{7}{9}a + \frac{1}{3}\left(\frac{\tilde{c}-3c_i}{3} + \frac{2}{9}a\right)\right]\right\}(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) + \\ &+\left[\frac{(3\tilde{c}-9c_i+2a)^2}{81\rho} + \frac{(12\tilde{c}-19a-9c_i)k}{27(\rho+m)\rho} + \frac{4k^2}{9(\rho+m)^2\rho}\right](1-e^{-\rho T}), \quad i = 2,3. \end{aligned} \tag{3.5}$$

4. Кооперативная игра в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна для случая $n = 3$. Напомним, что кооперативной игрой в форме характеристической функции называется пара $\langle N, V\rangle$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество игроков, а $V(S)$, $S \subseteq N$ – характеристическая функция. Характеристической функцией называется отображение $V: 2^N \to R$, $V(\varnothing) = 0$, ставящее в соответствие каждой коалиции S величину выигрыша, который игроки данной коалиции могут себе обеспечить. Вопрос построения характеристических функций является одним из основных в теории кооперативных игр. Характеристическая функция фон Неймана–Моргенштерна [17] вычисляется на базе вспомогательной антагонистической игры $\Gamma_{S,N\setminus S}$ между коалицией S и антикоалицией $N\setminus S$. Характеристическая функция Петросяна–Заккура [18] строится в два этапа. Сначала находят равновесные по Нэшу стратегии $\left\{u_i^{NE}\right\}$ всех игроков $i \in N$, а затем “замораживают” равновесные по Нэшу стратегии u_j^{NE} игроков $j \in N \backslash S$, а для игроков коалиции S находят максимум их суммарного выигрыша

$$u_S = \sum_{i \in S} u_i.$$

Характеристическая функция Громовой—Петросяна [19] строится также в два этапа. На первом этапе находят набор оптимальных стратегий всех n игроков, максимизирующий выигрыш большой коалиции. На втором этапе игроки, входящие в коалицию K, применяют полученные на первом этапе оптимальные стратегии, в то время как игроки из множества $N \backslash K$ минимизируют выигрыш коалиции K.

Пусть коалиция состоит из одного i-го игрока: $K = \{i\}$, антикоалиция тогда состоит из двух остальных игроков $N \backslash K = \{j, k\}$, причем $c_j < c_k$.

П р е д л о ж е н и е 5. Характеристическая функция Неймана—Моргенштерна для коалиции, состоящей из одного игрока, имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} v^{NM}(i) = \frac{1}{\rho + m}(e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) - \\ - \left(\frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m} - \frac{(5a - 3c_i)k}{6(\rho+m)m}\right)(e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ + \left(\frac{k^2}{4(\rho+m)^2 \rho} - \frac{(5a - 3c_i)k}{6(\rho+m)\rho} + \frac{(a - 3c_i)^2}{36\rho}\right)(1 - e^{-\rho T}), \quad i = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Доказательство предложения 5 приведено в Приложении.

Пусть теперь коалиция состоит из двух игроков: $K = \{i, j\}$, причем $c_i < c_j$, антикоалиция тогда состоит из одного игрока $N \backslash K = \{k\}$.

П р е д л о ж е н и е 6. Характеристическая функция Неймана—Моргенштерна для коалиции, состоящей из двух игроков: $K = \{i, j\}$, причем $c_i < c_j$, имеет вид:

$$\begin{gathered} v^{NM}(i, j) = \frac{1}{\rho + m}(e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) - \\ - \left(\frac{(3c_i - 5a)k}{6(\rho+m)m} + \frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ + \left(\frac{k^2}{4(\rho+m)^2 \rho} + \frac{(3c_i - 5a)k}{6(\rho+m)\rho} - \frac{(2a - 3c_i)(3c_i - 4a)}{36\rho}\right)(1 - e^{-\rho T}). \end{gathered} \tag{4.2}$$

Доказательство предложения 6 приведено в Приложении.

5. Кооперативная игра в форме характеристической функции Громовой—Петросяна для случая n = 3. При вычислении характеристической функции Громовой—Петросяна все игроки из антикоалиции делают максимально возможные инвестиции

$$x_j = \frac{a}{3}, \quad j \in N \backslash K,$$

в то время как все игроки из K ведут себя как в максимальной коалиции, т.е. $\left(x_1 = \frac{a}{3},\ x_2 = \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6},\ x_3 = 0\right)$.

Таким образом, в данном случае формулы для выигрышей разных коалиций с одним и тем же числом игроков будут различаться не только индексами этих игроков.

П р е д л о ж е н и е 7. Характеристическая функция Громовой–Петросяна имеет вид:

$$v^{PG}(1,2)=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+\frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T})-$$
$$-\left(\frac{2k^2}{(\rho+m)^2 m}+\frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)m}\right)(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})+ \tag{5.1}$$
$$+\left(\frac{3a^2-12ac_1+9c_2^2}{36\rho}+\frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho}+\frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)\rho}\right)(1-e^{-\rho T}),$$

$$v^{PG}(2,3)=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+\frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T})-$$
$$-\left(\frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m}+\frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)m}\right)(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})+ \tag{5.2}$$
$$+\left(\frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho}+\frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)\rho}+\frac{a^2-4ac_2+3c_2^2}{12\rho}\right)(1-e^{-\rho T}),$$

$$v^{PG}(1,3)=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+\frac{2ak}{3(\rho+m)m}(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})+$$
$$+\left(\frac{(a-3c_1)a}{9\rho}-\frac{2ak}{3(\rho+m)\rho}\right)(1-e^{-\rho T}), \tag{5.3}$$

$$v^{PG}(1)=V_K(0,y(0))=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+$$
$$=\frac{ak}{(\rho+m)m}(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})-\left(\frac{ak}{(\rho+m)\rho}+\frac{ac_1}{3\rho}\right)(1-e^{-\rho T}), \tag{5.4}$$

$$v^{PG}(2)=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+\frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T})-$$
$$-\left(\frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m}+\frac{(3c_2-5a)k}{6(\rho+m)m}\right)(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})+ \tag{5.5}$$
$$+\left(\frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho}+\frac{(3c_2-5a)k}{6(\rho+m)\rho}+\frac{(a-3c_2)^2}{36\rho}\right)(1-e^{-\rho T}),$$

$$v^{PG}(3)=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+\frac{2ak}{3(\rho+m)m}(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})-\frac{2ak}{3(\rho+m)\rho}(1-e^{-\rho T}). \tag{5.6}$$

Доказательство предложения 7 приведено в Приложении.

6. Сравнительный анализ. Главная задача состоит в сравнении выигрышей, полученных игроками в кооперативных играх с различными принципами оптимальности и в играх в нормальной форме. Для случая $n = 3$ зададимся значениями параметров так, чтобы выполнялись соотношения (1.4), (1.5), (1.10).

Из (1.11) следует, что выигрыши игроков в равновесии Нэша равны

$$u_i^{NE}=\frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0+\frac{9k^2}{16(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T})+$$
$$+\left(\frac{(10a-6\overline{c}+8c_i)k}{16(\rho+m)m}-\frac{18k^2}{16(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T})+$$
$$+\left(\frac{9k^2}{16(\rho+m)^2\rho}-\frac{(10a-6\overline{c}+8c_i)k}{16(\rho+m)\rho}+\frac{(a+\overline{c}-4c_i)^2}{16\rho}\right)(1-e^{-\rho T}),\quad i=1,2,3.$$

Из (2.5) вытекает, что выигрыш каждого игрока при кооперации равен

$$u_1^c = u_2^c = u_3^c = \frac{1}{3(\rho+m)}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{k^2}{12(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) +$$
$$+\left(\frac{(a-c_2)k}{6(\rho+m)m}-\frac{k^2}{6(\rho+m)^2 m}\right)(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) +$$
$$+\left(\frac{3a^2-4ac_1-2ac_2+3c_2^2}{36\rho}-\frac{k^2}{12(\rho+m)^2\rho}+\frac{(a-c_2)k}{6(\rho+m)\rho}\right)(1-e^{-\rho T}).$$

Выигрыши игроков в иерархической игре определяются выражениями (3.4)–(3.5). Выигрыши коалиций в кооперативной игре в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна определяются выражениями (4.1)–(4.2). Выигрыш большой коалиции в любой кооперативной игре в форме любой характеристической функции задается выражением (2.5). Выигрыши остальных коалиций кооперативной игре в форме характеристической функции Громовой–Петросяна определяются выражениями (5.1)–(5.6). Компоненты вектора Шепли вычисляются следующим образом:

$$\Phi_1(v^{NM}) = \frac{1}{3}\nu^{NM}(1) + \frac{1}{6}\left(\nu^{NM}(1,2)-\nu^{NM}(2)\right) + \frac{1}{6}\left(\nu^{NM}(1,3)-\nu^{NM}(3)\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\left(\nu^{NM}(1,2,3)-\nu^{NM}(2,3)\right),$$

$$\Phi_2(v^{NM}) = \frac{1}{3}\nu^{NM}(2) + \frac{1}{6}\left(\nu^{NM}(1,2)-\nu^{NM}(1)\right) + \frac{1}{6}\left(\nu^{NM}(2,3)-\nu^{NM}(3)\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\left(\nu^{NM}(1,2,3)-\nu^{NM}(1,3)\right),$$

$$\Phi_3(v^{NM}) = \frac{1}{3}\nu^{NM}(3) + \frac{1}{6}\left(\nu^{NM}(1,3)-\nu^{NM}(1)\right) + \frac{1}{6}\left(\nu^{NM}(2,3)-\nu^{NM}(2)\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\left(\nu^{NM}(1,2,3)-\nu^{NM}(1,2)\right),$$

$$\Phi_1(v^{PG}) = \frac{1}{3}\nu^{PG}(1) + \frac{1}{6}\left(\nu^{PG}(1,2)-\nu^{PG}(2)\right) + \frac{1}{6}\left(\nu^{PG}(1,3)-\nu^{PG}(3)\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\left(\nu^{PG}(1,2,3)-\nu^{PG}(2,3)\right),$$

$$\Phi_2(v^{PG}) = \frac{1}{3}\nu^{PG}(2) + \frac{1}{6}\left(\nu^{PG}(1,2)-\nu^{PG}(1)\right) + \frac{1}{6}\left(\nu^{PG}(2,3)-\nu^{PG}(3)\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\left(\nu^{PG}(1,2,3)-\nu^{PG}(1,3)\right),$$

$$\Phi_3(v^{PG}) = \frac{1}{3}\nu^{PG}(3) + \frac{1}{6}\left(\nu^{PG}(1,3)-\nu^{PG}(1)\right) + \frac{1}{6}\left(\nu^{PG}(2,3)-\nu^{PG}(2)\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\left(\nu^{PG}(1,2,3)-\nu^{PG}(1,2)\right).$$

Хотя решения игр получены аналитически, для сравнения выигрышей приходится использовать численные расчеты при конкретных значениях параметров. Задавая случайным образом параметры модели k, ρ, m, c_1, c_2, c_3, а от датчика случайных чисел с соблюдением условий (1.4), (1.5) и (1.10) и полагая $y_0 = 0$ и $T \to \infty$, получаем результаты, приведенные в табл. 1–3.

Заключение. Как следует из примеров, выигрыш при кооперации всегда значительно (иногда в несколько раз) превосходит суммарный выигрыш при независимом поведении и при иерархии. Суммарный выигрыш при свободной конкуренции, как правило, превосходит суммарный выигрыш при иерархии, однако в некоторых примерах суммарный выигрыш при иерархии немного больше суммарного выигрыша при свободной конкуренции.

Выигрыш наиболее эффективной фирмы в условиях иерархии, когда она является ведущей, в большинстве случаев больше, чем ее выигрыш при независимом поведении фирм. Доля

Таблица 1. Входные данные

a	c_1	c_2	c_3	k	ρ	m	y_0
3.102	0.090	0.243	0.931	0.022	0.081	0.535	0
6.914	0.521	1.275	1.757	0.286	0.256	0.719	0
8.954	0.862	1.665	2.524	0.345	0.998	0.760	0
3.088	0.105	0.186	0.419	0.614	0.314	0.812	0
7.117	0.372	1.087	2.040	0.039	0.934	0.303	0
5.006	0.195	0.583	1.194	0.053	0.082	0.269	0
4.362	0.168	0.398	0.958	0.395	0.863	0.597	0
8.074	0.738	1.160	1.748	0.652	0.573	0.141	0
6.215	0.109	0.267	1.197	0.748	0.281	0.908	0
9.036	0.795	1.303	1.971	0.988	0.956	0.000	0
3.383	0.070	0.134	0.825	0.392	0.737	0.907	0
4.805	0.822	1.401	1.428	0.178	0.865	0.729	0
8.228	0.465	1.202	1.976	0.142	0.011	0.258	0
10.669	0.956	1.912	2.714	0.646	0.062	0.851	0
6.620	0.731	1.236	1.565	0.462	0.152	0.854	0
5.282	0.063	0.084	0.693	0.570	0.611	0.145	0
2.693	0.216	0.268	0.555	0.173	0.817	0.154	0
3.215	0.219	0.243	0.781	0.460	0.813	0.797	0
7.460	0.809	0.962	1.667	0.944	0.798	0.808	0
8.437	0.941	1.121	1.919	0.828	0.818	0.164	0
10.790	0.633	1.521	2.494	0.821	0.965	0.077	0
5.824	0.097	0.280	1.269	0.444	0.900	0.318	0
6.604	0.568	0.985	1.445	0.871	0.897	0.332	0
1.603	0.052	0.128	0.219	0.166	0.727	0.830	0
4.627	0.814	1.031	1.113	0.263	0.527	0.782	0
6.846	0.690	1.062	1.739	0.438	0.747	0.144	0
3.918	0.071	0.122	1.119	0.081	0.886	0.785	0
4.224	0.105	0.154	1.107	0.109	0.766	0.017	0
5.977	0.544	1.523	1.616	0.200	0.074	0.499	0
2.280	0.266	0.558	0.598	0.169	0.408	0.713	0
9.636	0.836	1.592	2.115	0.238	0.136	0.118	0
4.188	0.420	0.913	1.039	0.200	0.823	0.109	0
8.560	0.439	0.919	1.526	0.812	0/307	0.319	0
8.591	0.422	1.135	1.863	0.492	0.056	0.527	0
2.162	0.060	0.176	0.224	0.463	0.893	0.793	0
5.227	0.347	0.916	1.569	0.049	0.170	0.860	0
7.052	0.163	0.427	1.426	0.570	0.724	0.009	0
6.972	0.533	0.654	1.626	0.070	0.040	0.077	0
5.358	0.868	0.948	1.321	0.367	0.704	0.723	0
2.698	0.057	0.141	0.593	0.154	0.674	0.293	0

Таблица 2. Выигрыши игроков при разных информационных регламентах

u_1^{NE}	u_2^{NE}	u_3^{NE}	u_1^{C}	u_2^{C}	u_3^{C}	u_1^{ST}	u_2^{ST}	u_3^{ST}
11.704	8.166	−0.536	9.260	9.260	9.260	12.025	7.870	−0.597
13.617	3.060	−1.363	13.660	13.660	13.660	14.765	1.947	−2.122
6.189	2.509	0.001	5.474	5.474	5.474	6.820	2.003	−0.278
5.466	2.505	0.264	3.885	3.885	3.885	5.623	2.395	0.221
24.929	11.675	−1.700	23.960	23.960	23.960	26.583	10.072.3	−2.519
6.286	2.603	0.604	4.578	4.578	4.578	6.736	2.298	0.448
1.314	0.645	−0.472	1.847	1.847	1.847	1.436	0.436	−0.587
2.749	−0.504	−4.001	9.329	9.329	9.329	2.935	−2.481	−5.480
5.320	3.160	−5.906	12.961	12.961	12.961	5.405	1.231	−6.976
2.188	−0.458	−3.109	7.048	7.048	7.048	2.274	−1.897	−4.181
0.921	0.737	−0.544	1.394	1.394	1.394	0.977	0.580	−0.604
1.675	0.295	0.249	1.546	1.546	1.546	1.970	0.102	0.063
400.798	89.795	−127.95	501.024	501.024	501.024	428.809	41.364	−158.52
101.907	15.973	−33.622	136.496	136.496	136.496	113.962	−1.291	−45.508
12.643	1.562	−3.860	20.931	20.931	20.931	15.067	−1.964	−6.642
0.322	0.209	−2.445	4.699	4.699	4.699	0.022	−0.807	−3.141
0.346	0.252	−0.145	0.703	0.703	0.703	0.430	0.112	−0.232
0.462	0.406	−0.486	1.082	1.082	1.082	0.528	0.193	−0.589
2.059	1.296	−1.451	5.326	5.326	5.326	2.680	0.048	−2.277
1.827	0.823	−2.683	6.848	6.848	6.848	2.325	−0.911	−3.858
6.810	1.323	−2.810	9.732	9.732	9.732	7.336	0.212	−3.539
2.321	1.600	−1.002	3.339	3.339	3.339	2.495	1.248	−1.162
1.463	−0.213	−1.610	3.968	3.968	3.968	1.565	−0.966	−2.176
0.156	0.065	−0.024	0.303	0.303	0.303	0.184	0.020	−0.059
1.433	0.587	0.317	2.478	2.478	2.478	1.962	−0.013	−0.230
2.805	0.977	−1.388	4.719	4.719	4.719	3.288	0.155	−1.903
1.618	1.476	−0.095	1.414	1.414	1.414	1.690	1.402	−0.108
1.798	1.633	−0.362	1.952	1.952	1.952	1.937	1.460	−0.410
36.059	−3.076	−5.441	34.715	34.715	34.715	37.672	−5.191	−7.380
0.719	−0.071	−0.146	0.889	0.889	0.889	0.804	−0.174	−0.240
24.931	−3.549	−18.310	54.192	54.192	54.192	27.329	−12.681	−25.558
1.336	0.104	−0.116	1.503	1.503	1.503	1.496	−0.054	−0.251
3.242	−4.583	−12.334	22.221	22.221	22.221	0.903	−9.148	−15.904
61.325	−0.665	−45.214	112.471	112.471	112.471	61.821	−14.865	−55.139
0.073	−0.085	−0.140	0.494	0.494	0.494	0.063	−0.179	−0.228
15.700	6.353	0.337	11.252	11.252	11.252	16.244	5.975	0.179
2.570	0.994	−3.245	6.455	6.455	6.455	2.457	0.038	−3.795
43.067	31.010	−39.109	99.606	99.606	99.606	50.591	11.179	−49.955
1.338	1.048	−0.068	2.630	2.630	2.630	1.861	0.333	−0.573
0.671	0.469	−0.263	0.943	0.943	0.943	0.728	0.367	−0.309

Таблица 3. Компоненты векторов Шепли для разных характеристических функций

$\Phi_1(\nu^{NM})$	$\Phi_2(\nu^{NM})$	$\Phi_3(\nu^{NM})$	$\Phi_1(\nu^{PG})$	$\Phi_2(\nu^{PG})$	$\Phi_3(\nu^{PG})$
10.412	8.645	8.724	15.538	14.879	−2.636
15.225	10.193	15.562	24.561	23.763	−7.345
6.326	4.512	5.584	9.565	9.041	−2.183
4.913	3.387	3.355	7.199	6.410	−1.952
26.560	19.912	25.408	41.054	40.380	−9.554
5.823	3.938	3.972	8.110	7.605	−1.983
1.753	1.440	2.348	3.199	3.028	−0.687
7.109	5.813	15.065	13.620	17.045	−2.679
10.372	9.434	19.076	21.307	21.652	−4.076
5.409	4.361	11.373	10.898	12.690	−2.445
1.222	1.139	1.821	2.353	2.217	−0.387
1.847	1.184	1.608	2.543	2.736	−0.640
503.016	361.525	638.532	819.673	899.294	−215.894
133.962	95.899	179.626	227.768	241.171	−59.451
19.508	14.579	28.707	33.221	36.747	−7.175
3.111	3.065	7.921	6.910	8.267	−1.079
0.599	0.555	0.955	1.027	1.158	−0.076
0.845	0.821	1.580	1.715	1.727	−0.198
4.273	3.937	7.768	8.124	8.605	−0.747
5.070	4.658	10.815	9.511	1.812	−0.779
9.326	6.873	12.997	16.802	16.915	−4.522
3.068	2.729	4.219	5.544	5.447	−0.975
1.173	2.495	6.235	6.530	6.990	−1.616
0.275	0.230	0.402	0.527	0.493	−0.112
2.333	1.928	3.174	3.283	4.117	0.035
4.219	3.421	6.517	7.147	8.148	−1.137
1.472	1.401	1.369	2.55	2.204	−0.217
1.893	1.812	2.151	2.994	3.121	−0.259
39.652	22.330	42.163	65.241	66.598	−27.694
0.920	0.577	1.168	1.576	1.642	−0.551
46.268	12.358	81.904	79.092	102.300	−18.817
1.629	1.057	1.824	2.646	2.695	−0.831
15.272	12.358	39.032	33.308	42.105	−8.750
99.209	73.081	165.124	183.262	205.724	−51.573
0.368	0.299	0.816	0.917	0.828	−0.262
14.195	9.496	10.066	20.841	18.828	−5.913
5.118	4.458	9.787	10.059	11.329	−2.025
79.686	74.476	144.657	127.292	176.091	−4.565
2.274	2.138	3.477	3.349	4.185	0.354
0.874	0.778	1.177	1.523	1.552	−0.246

наиболее эффективной фирмы в случае кооперации при равномерном распределении выигрыша может оказаться и больше, и меньше, чем ее выигрыш при независимом поведении фирм и при иерархии, когда данная фирма ведущая. Что касается компоненты вектора Шепли для данной фирмы, здесь также возможны различные соотношения в кооперативной игре в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна. В то же время в кооперативной игре в форме характеристической функции Громовой–Петросяна компонента вектора Шепли для самой эффективной фирмы всегда больше, чем ее выигрыш при свободной конкуренции, в иерархической игре, где она ведущая, и при кооперации в случае равномерного распределения дохода между игроками.

Что касается менее эффективной фирмы, ее выигрыш при кооперации всегда больше ее выигрыша при независимом поведении, который в свою очередь больше ее выигрыша при иерархии, где она является ведомой. Компонента вектора Шепли для такой фирмы в игре в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна всегда меньше, чем выигрыш данной фирмы при кооперации. Компонента вектора Шепли в характеристической функции в форме Громовой–Петросяна всегда больше, чем выигрыши данной фирмы при кооперации или в равновесии Нэша или Штакельберга.

Что касается самой неэффективной фирмы, ее выигрыш при кооперации также всегда больше ее выигрыша при независимом поведении, который в свою очередь больше ее выигрыша при иерархии, в которой она является ведомой. Компонента вектора Шепли для такой фирмы в игре в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна также велика и в большинстве случаев даже больше, чем выигрыш данной фирмы при кооперации в случае равномерного распределения выигрышей. Компонента вектора Шепли в характеристической функции в форме Громовой–Петросяна для такой фирмы всегда мала, в некоторых случаях даже меньше, чем выигрыш при свободной конкуренции, а иногда даже меньше, чем выигрыш при иерархии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Решая уравнение (1.6), находим

$$\alpha(t) = Ce^{(\rho+m)t} - \frac{1}{\rho+m}.$$

Постоянную C определим из граничных условий:

$$\alpha(T) = Ce^{(\rho+m)T} - \frac{1}{\rho+m} = 0, \quad C = \frac{1}{\rho+m}e^{-(\rho+m)T},$$

поэтому окончательно получаем выражение (1.7)

Решая уравнение (1.8) методом вариации произвольной постоянной, имеем

$$\beta(t) = C(t)e^{\rho t},$$

где

$$C(t) = \int e^{-\rho t}F(t)\,dt.$$

Подставляя выражение для $\alpha(t)$ в $F(t)$, получаем

$$F(t) = \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2}(e^{2(\rho+m)(t-T)} - 2e^{(\rho+m)(t-T)} + 1) + \frac{Bk}{\rho+m}(e^{(\rho+m)(t-T)} - 1) + D =$$

$$= \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2}e^{2(\rho+m)(t-T)} + \left(\frac{Bk}{\rho+m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2}\right)e^{(\rho+m)(t-T)} + D - \frac{Bk}{\rho+m} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2}.$$

Тогда

$$C(t) = \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2(\rho+2m)}e^{(\rho+2m)t-2(\rho+m)T} + \left(\frac{Bk}{(\rho+m)m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m}\right)e^{mt-(\rho+m)T} -$$

$$-\left(\frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2\rho}\right)e^{-\rho t} + C.$$

Следовательно,

$$\beta(t) = \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2(\rho+2m)}e^{2(\rho+m)(t-T)} + \left(\frac{Bk}{(\rho+m)m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m}\right)e^{(\rho+m)(t-T)} - \\ - \left(\frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2\rho}\right) + Ce^{\rho t}.$$

Постоянную интегрирования C определим из граничного условия

$$\beta(T) = \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2(\rho+2m)} + \left(\frac{Bk}{(\rho+m)m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m}\right) - \\ - \left(\frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2\rho}\right) + Ce^{\rho T} = 0.$$

Значит,

$$C = -\frac{Ak^2}{(\rho+m)^2(\rho+2m)}e^{-\rho T} - \left(\frac{Bk}{(\rho+m)m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m}\right)e^{-\rho T} + \\ + \left(\frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2\rho}\right)e^{-\rho T}.$$

Окончательно получаем выражение (1.9). Лемма 1 доказана.

Доказательство предложения 1. Введем функцию Беллмана

$$V_i(y,t) = \max_{\substack{x_i(s),\\ t\le s\le T}} \int_t^T e^{-\rho(s-t)}\left[(a - c_i - \overline{x}(s))\,x_i(s) - y(s)\right]ds.$$

Выпишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ t\le s\le T}}\left\{\frac{\partial V_i}{\partial y}\left(\sum_{j=1}^n k\,x_j - my\right) + (a - c_i - \overline{x})\,x_i - y\right\}. \qquad (\text{П.1})$$

Функцию Беллмана считаем линейной:

$$V_i(y,t) = \alpha(t)\,y + \beta(t).$$

Оптимизируя по $x_i(s)$ выражение, стоящее в фигурных скобках в (П.1), видим, что

$$\alpha k + a - c_i - \sum_{j\ne i} x_j - 2x_i = 0,$$

так как

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \alpha, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^n k\,x_j = k,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a - c_i - \overline{x})\,x_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(a - c_i - \sum_{j\ne i} x_j\right)x_i - x_i^2\right] = a - c_i - \sum_{j\ne i} x_j - 2x_i.$$

Таким образом, имеем

$$\alpha k + a - c_i - \overline{x} - x_i = 0. \qquad (\text{П.2})$$

Выписав условие (П.2) для каждого $i = \overline{1,n}$ и просуммировав по i, получаем

$$\alpha nk + na - \overline{c} - n\overline{x} - \overline{x} = 0,$$

откуда находим

$$\overline{x} = \frac{1}{n+1}(\alpha nk + na - \overline{c}), \qquad (\text{П.3})$$

$$x_i = \alpha k + a - c_i - \overline{x} = \frac{1}{n+1}(\alpha k + a + \overline{c} - (n+1)c_i). \tag{П.4}$$

С учетом (П.3) и (П.4), из (П.1) находим:

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha k\,\overline{x} - \alpha m y + (a - c_i - \overline{x})x_i - y. \tag{П.5}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y в левой и правой частях уравнения (П.5), получаем дифференциальные уравнения для $\alpha(t)$ и $\beta(t)$:

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \tag{П.6}$$

$$\beta' - \rho\beta = -\alpha k\,\overline{x} - (a - c_i - \overline{x})x_i, \quad \beta(T) = 0. \tag{П.7}$$

Согласно лемме 1, решение уравнения (П.6) имеет вид (1.7). Проверим, принадлежит ли найденная величина $x_i(t)$ промежутку $\left[0, \frac{a}{n}\right]$ при $t \in [0, t]$. Из (1.7) следует, что для $t \in [0, T]$ выполнено соотношение

$$-\frac{1}{\rho + m} < \frac{1}{\rho + m}(e^{-(\rho+m)T} - 1) \le \alpha(t) \le 0.$$

Из (П.4) с учетом (1.4) и (1.5) вытекает, что

$$x_i = \frac{1}{n+1}(\alpha k + a + \overline{c} - (n+1)c_i) > \frac{1}{n+1}\left(-\frac{k}{\rho + m} + nc_i + \frac{nk}{\rho + m} + \overline{c} - (n+1)c_i\right) > 0.$$

Условие

$$x_i = \frac{1}{n+1}(\alpha k + a + \overline{c} - (n+1)c_i) \le \frac{1}{n+1}(a + \overline{c} - (n+1)c_i) \le \frac{a}{n},$$

т.е. $\overline{c} \le \frac{a}{n} + (n+1)c_i$, при $n = 3$ всегда выполняется, если $c_2/c_1 \le 3$.

Вычислим правую часть уравнения (П.7), подставляя в него (П.3), (П.4):

$$\begin{aligned} F(t) = -\alpha k\,\overline{x} - (a - c_i - \overline{x})x_i = -(\alpha k)^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 - \\ -\frac{\alpha k}{(n+1)^2}[(n^2+1)a - 2n\overline{c} + (n^2-1)c_i] - \frac{[a + \overline{c} - (n+1)c_i]^2}{(n+1)^2}. \end{aligned} \tag{П.8}$$

Тогда, согласно лемме 1,

$$\begin{aligned} \beta(t) = \frac{n^2k^2}{(n+1)^2(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) + \\ + \left(\frac{[(n^2+1)a - 2n\overline{c} + (n^2-1)c_i]k}{(n+1)^2(\rho+m)m} - \frac{2n^2k^2}{(n+1)^2(\rho+m)^2 m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \\ + \left(\frac{n^2k^2}{(n+1)^2(\rho+m)^2\rho} - \frac{[(n^2+1)a - 2n\overline{c} + (n^2-1)c_i]k}{(n+1)^2(\rho+m)\rho} + \frac{[a + \overline{c} - (n+1)c_i]^2}{(n+1)^2\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}). \end{aligned}$$

Таким образом, $J_i^{\max} = V_i(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (1.11). Предложение 1 доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. Введем функцию Беллмана

$$V_c(y,t) = \max_{\substack{x_i(s),\\ i=\overline{1,n},\\ t\le s\le T}} \int_t^T e^{-\rho(s-t)}\left[\sum_{i=1}^n (a - c_i - \overline{x}(s))x_i(s) - y(s)\right] ds.$$

Выпишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho V_c - \frac{\partial V_c}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ i=\overline{1,n},\\ t\le s\le T}} \left\{ \frac{\partial V_c}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^{n} k\, x_j - my \right) + \sum_{i=1}^{n} (a - c_i - \overline{x})\, x_i - y \right\}. \tag{П.9}$$

Функцию Беллмана считаем линейной:

$$V_c(y,t) = \alpha(t)\, y + \beta(t).$$

Оптимизируя (П.10) по $x_i(s)$, $i = \overline{1,n}$, получаем систему уравнений

$$\alpha k + a - c_i - \sum_{j\ne i} x_j - 2x_i - \sum_{j\ne i} x_j = \alpha k + a - c_i - 2\overline{x} = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Данная система уравнений при сделанном предположении $c_1 \ne c_2$ не имеет решений. Максимальное значение функции выигрыша лежит на границе области допустимых значений параметров $x_i(s)$.

Введем обозначение:

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial V_c}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^{n} k\, x_j - my \right) + \sum_{i=1}^{n} (a - c_i - \overline{x})\, x_i - y. \tag{П.10}$$

Тогда (П.9) принимает вид

$$\rho V_c - \frac{\partial V_c}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ i=\overline{1,n},\\ t\le s\le T}} U(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

В любой момент времени максимум может находиться только на границе области определения управляющих переменных. В рассматриваемом случае строгого неравенства (2.5) максимум может лежать только на многообразии размерности 1 по тем же причинам, по которым он не может находиться внутри области, а именно максимум может быть только на ребре n-мерного куба.

Из начала координат будем двигаться вдоль того ребра n-мерного куба, для которого целевая функция быстрее всего растет (т.е. вдоль оси x_1). Если на данном ребре мы не встретили локального максимума, то, дойдя до вершины $(a/n, 0, \ldots, 0)$, изменим направление движения и будем теперь двигаться вдоль того ребра, вдоль которого целевая функция быстрее всего растет (т.е. вдоль оси x_2). И т.д. вплоть до точки, в которой производная по выбранному направлению обратится в 0. В этой точке, очевидно, целевая функция достигает локального максимума. Пусть это произойдет на l-м по счету ребре. В точке максимума имеем

$$\alpha k + a - c_l - 2\overline{x} = \alpha k + a - c_l - \frac{2(l-1)a}{n} - 2x_l = 0,$$

откуда

$$x_l = \frac{n\alpha k + na - nc_l - 2(l-1)a}{2n} = \frac{n\alpha k + [n - 2(l-1)]a - nc_l}{2n}. \tag{П.11}$$

Таким образом, точка максимума имеет координаты

$$\left(x_1 = \frac{a}{n}, \ldots, x_{l-1} = \frac{a}{n}, x_l = \frac{n\alpha k + [n - 2(l-1)]a - nc_l}{2n}, x_{l+1} = 0, \ldots, x_n = 0 \right). \tag{П.12}$$

При этом

$$0 \le \frac{n\alpha k + [n - 2(l-1)]a - nc_l}{2n} \le \frac{a}{n},$$

или

$$0 \le n\alpha k + (n - 2l + 2)a - nc_l \le 2a,$$

т.е. l — такое натуральное число, для которого

$$n\alpha k + (n - 2l)\,a - nc_l \le 0,$$

$$0 \le n\alpha k + [n - 2(l-1)]\,a - nc_l.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство предложения 2. Предположим, что величина l не меняется на всем промежутке $[0, T]$. Заметим, что

$$\overline{x} = \frac{(l-1)\,a}{n} + \frac{n\alpha k + [n - 2(l-1)]\,a - nc_l}{2n} = \frac{n\alpha k + na - nc_l}{2n} = \frac{\alpha k + a - c_l}{2}. \tag{П.13}$$

Подставляя (П.11), (П.12) и (П.13) в (П.9), запишем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha k\,\overline{x} - \alpha m y + \sum_{i=1}^{l-1}(a - c_i - \overline{x})\frac{a}{n} + (a - c_l - \overline{x})\,x_l - y. \tag{П.14}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y в левой и правой частях уравнения (П.14), получаем дифференциальные уравнения для $\alpha(t)$ и $\beta(t)$:

$$\alpha' - (\rho + m)\,\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \tag{П.15}$$

$$\beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \tag{П.16}$$

где

$$F(t) = -\frac{1}{4}(\alpha k)^2 - \frac{(a - c_l)}{2}\alpha k - \frac{(a - c_l)^2}{4} + \frac{a\left[\sum_{i=1}^{l-1} c_i - (l-1)\,c_l\right]}{n}.$$

Решая уравнение (П.15)–(П16), согласно лемме 1, находим

$$\beta(t) = \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) + \left(\frac{(a - c_l)\,k}{2(\rho + m)\,m} - \frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) +$$
$$+\left(\frac{(a - c_l)^2}{4\rho} - \frac{a\left[\sum_{i=1}^{l-1} c_i - (l-1)\,c_l\right]}{n\rho} - \frac{(a - c_l)\,k}{2(\rho + m)\,\rho} + \frac{k^2}{4(\rho + m)^2\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Таким образом, $J_c^{\max} = V_c(0, y(0)) = \alpha(0)\,y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (2.7). Предложение 2 доказано.

Доказательство предложения 3. Максимум функции U в (П.10) находится на первом ребре, если полученное из условия равенства нулю на первом ребре производной по направлению первого ребра

$$\alpha k + a - c_1 - 2x_1 = 0$$

значение переменной x_1

$$x_1 = \frac{\alpha k + a - c_1}{2}$$

для случая $n = 3$ окажется меньше $a/3$, т.е. если при некотором t_1 верно, что

$$\frac{\alpha k + a - c_1}{2} < \frac{a}{3},$$
$$\frac{3k}{\rho + m}(e^{(\rho+m)(t_1-T)} - 1) < 3c_1 - a. \tag{П.17}$$

В этом случае при $t \in [0, t_1]$ максимум находится на первом ребре, а при $t \in [t_1, T]$ максимум находится на втором ребре, поскольку условие равенства нулю на втором ребре производной целевой функции по направлению второго ребра имеет вид

$$\alpha k + a - c_2 - \frac{2a}{3} - 2x_2 = 0,$$

откуда

$$x_2 = \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6} = \frac{k}{2(\rho + m)}(e^{(\rho+m)(t-T)} - 1) + \frac{a - 3c_2}{6} < \frac{a}{3}$$

при $t \le T$. Однако из (1.4) следует, что условие (П.17) всегда нарушено. Таким образом, для любого $t \in [t_1, T]$ максимум достигается на втором ребре в точке

$$\left(\frac{a}{3}, x_2(t), 0\right).$$

Предложение 3 доказано.

Доказательство предложения 4. Введем функцию Беллмана

$$V_i(y,t) = \max_{\substack{x_i(s),\\ t \le s \le T}} \int_t^T e^{-\rho(s-t)} \left[(a - c_i - x_1(s) - \tilde{x}(s)) x_i(s) - y(s) \right] ds,$$

которую мы считаем линейной:

$$V_i(y,t) = \alpha(t) y + \beta(t).$$

Выпишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ t \le s \le T}} \{\alpha(k(x_1 + \tilde{x}) - my) + (a - c_i - x_1 - \tilde{x}) x_i - y\}, \quad \tilde{x} = \sum_{j=2}^{n} x_j. \tag{П.18}$$

Оптимизируя (П.18) по $x_i(s)$, находим

$$\alpha k + a - c_i - x_1 - \sum_{\substack{j=2,\\ j \ne i}}^{n} x_j - 2x_i = 0,$$

или

$$x_i = \alpha k + a - c_i - x_1 - \tilde{x}. \tag{П.19}$$

Суммируя по i от 2 до n, получаем

$$\tilde{x} = \alpha(n-1)k + (n-1)a - \tilde{c} - (n-1)x_1 - (n-1)\tilde{x},,$$

откуда

$$\tilde{x} = \frac{(n-1)}{n}\alpha k + \frac{(n-1)}{n} a - \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n-1}{n} x_1, \quad \tilde{c} = \sum_{j=2}^{n} c_j. \tag{П.20}$$

Зная зависимость $\tilde{x}$ от x_1 (П.20), первый игрок (ведущий) решает свою оптимизационную задачу (3.1) при ограничениях (1.2)–(1.5). Введем функцию Беллмана

$$V_1(y,t) = \max_{\substack{x_1(s),\\ t \le s \le T}} \int_t^T e^{-\rho(s-t)} \left[(a - c_1 - x_1(s) + \tilde{x}(s)) x_1(s) - y(s) \right] ds,$$

которую считаем линейной: $V_1(y,t) = \alpha_1(t) y + \beta(t)$. Выпишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для первого игрока:

$$\rho V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial t} = \max_{\substack{x_1(s),\\ t \le s \le T}} \{\alpha_1(k(x_1 + \tilde{x}) - my) + (a - c_1 - x_1 - \tilde{x}) x_1 - y\}. \tag{П.21}$$

Из (П.20) получаем

$$x_1 + \tilde{x} = \frac{(n-1)}{n}\alpha_1 k + \frac{(n-1)}{n}a - \frac{\tilde{c}}{n} + \frac{x_1}{n}.$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для первого игрока принимает вид

$$\rho V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial t} = \max_{\substack{x_1(s),\\ t\le s\le T}}\left\{\alpha_1\left(k\left(\frac{(n-1)}{n}\alpha_1 k + \frac{(n-1)}{n}a - \frac{\tilde{c}}{n} + \frac{x_1}{n}\right) - my\right) + \right.$$
$$\left. + \left(a - c_1 - \frac{(n-1)}{n}\alpha_1 k - \frac{(n-1)}{n}a + \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{x_1}{n}\right)x_1 - y\right\}. \qquad (\text{П}.22)$$

Оптимизируя (П.22) по $x_1(s)$, находим

$$\frac{\alpha_1 k}{n} + a - c_1 - \frac{n-1}{n}\alpha_1 k - \frac{n-1}{n}a + \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{2x_1}{n} = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{2-n}{2}\alpha_1 k + \frac{a}{2} + \frac{\tilde{c} - nc_1}{2}.$$

Из (П.22) находим

$$\rho\alpha_1 y + \rho\beta - \alpha_1' y - \beta' = \alpha_1 k\,(x_1 + \tilde{x}) - \alpha_1 m\, y + (a - c_1 - x_1 - \tilde{x})\,x_1 - y. \qquad (\text{П}.23)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y в левой и правой частях уравнения (П.23), определяем дифференциальные уравнения для $\alpha_1(t)$ и $\beta(t)$:

$$\alpha_1' - (\rho + m)\alpha_1 = 1, \quad \alpha_1(T) = 0, \qquad (\text{П}.24)$$

$$\beta' - \rho\beta = -\alpha_1 k\,(x_1 + \tilde{x}) - (a - c_1 - x_1 - \tilde{x})\,x_1, \quad \beta(T) = 0. \qquad (\text{П}.25)$$

Решая уравнение (П.24), согласно лемме1, находим

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\rho + m}(e^{(\rho+m)(t-T)} - 1) = \alpha(t).$$

Заметим, что при $n \ge 3$

$$x_1 = \frac{n-2}{2}\cdot\frac{k}{\rho + m}(1 - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \frac{a + \tilde{c} - nc_1}{2} > \frac{a}{n},$$

поскольку при ограничениях (1.2)–(1.5) очевидно, что

$$(n-2)a + n\tilde{c} - n^2 c_1 > 0.$$

Поэтому

$$x_1 = \frac{a}{n}, \quad \tilde{x} + x_1 = \frac{(n-1)}{n}\alpha k + \frac{(n-1)}{n}a - \frac{\tilde{c}}{n} + \frac{a}{n^2} = \frac{(n-1)}{n}\alpha k - \frac{\tilde{c}}{n} + \frac{n^2 - n + 1}{n^2}a. \qquad (\text{П}.26)$$

Обозначим правую часть уравнения (П.25) $F(t)$. Подставляя (П.26) в (П.25), получаем

$$F(t) = -\frac{n-1}{n}(\alpha k)^2 + \alpha k\left(\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2 - 2n + 2}{n^2}a\right) + \left(\frac{nc_1 - \tilde{c}}{n} - \frac{n-1}{n^2}a\right)\frac{a}{n}.$$

Согласно лемме 1, решение уравнения (П.25) имеет вид

$$\beta(t) = \frac{k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) +$$

$$+\left(\frac{(n^2-2n+2)k}{n^2(\rho+m)m}a - \frac{\tilde{c}k}{n(\rho+m)m} - \frac{2k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2 m}\right)\cdot(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) +$$

$$+\left[\frac{k}{(\rho+m)\rho}\left(\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-2n+2}{n^2}a\right) + \left(\frac{n-1}{n^2}a - \frac{nc_1-\tilde{c}}{n}\right)\frac{a}{n\rho} - \frac{(n-1)k^2}{n(\rho+m)^2\rho}\right](1-e^{\rho(t-T)}).$$

Таким образом, $J_1 = V_1(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (3.2).

Вернемся к решению задачи i-й фирмы-ведомого, $i = \overline{2,n}$. Из (П.18) следует

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha k(x_1 + \tilde{x}) - \alpha m y + (a - c_i - x_1 - \tilde{x})x_i - y. \quad (\text{П}.27)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y в левой и правой частях уравнения (П.27), находим дифференциальные уравнения для $\alpha(t)$ и $\beta(t)$:

$$\alpha' - (\rho+m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \quad (\text{П}.28)$$

$$\beta' - \rho\beta = -\alpha k(x_1+\tilde{x}) - (a - c_i - x_1 - \tilde{x})x_i, \quad \beta(T) = 0. \quad (\text{П}.29)$$

Решая уравнение (П.28), получим

$$\alpha(t) = \frac{1}{\rho+m}(e^{(\rho+m)(t-T)} - 1).$$

Обозначим правую часть уравнения (П.29) через $F(t)$. Подставим (П.19) и (П.26) в (П.29), тогда

$$F(t) = -\left(\frac{n-1}{n}\right)^2(\alpha k)^2 + \alpha k\left[\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-n+1}{n^2}a + \frac{n-2}{n}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)\right] - \left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)^2.$$

Решение уравнения (П.29), согласно лемме 1, равно

$$\beta(t) = \frac{(n-1)^2k^2}{n^2(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left\{\frac{2(n-1)^2k^2}{n^2(\rho+m)^2 m} + \frac{k}{(\rho+m)m}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-n+1}{n^2}a + \frac{n-2}{n}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)\right]\right\}(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \left\{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)^2 +\right.$$

$$\left.+\frac{k}{(\rho+m)\rho}\left[\frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-n+1}{n^2}a + \frac{n-2}{n}\left(\frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a\right)\right] + \frac{(n-1)^2k^2}{n^2(\rho+m)^2\rho}\right\}(1-e^{\rho(t-T)}).$$

Таким образом, $J_i = V_i(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (3.3). Предложение 4 доказано.

Доказательство предложения 5. При вычислении характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна, очевидно, $x_j = a/3$, $x_k = a/3$. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в этом случае принимает вид

$$\rho V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ t\le s\le T}}\left\{\frac{\partial V_i}{\partial y}\left(k\left(x_i + \frac{2a}{3}\right) - my\right) + \left(a - c_i - x_i - \frac{2a}{3}\right)x_i - y\right\}. \quad (\text{П}.30)$$

Считаем функцию Беллмана линейной

$$V_i(t,y) = \alpha(t)y + \beta(t).$$

Максимизируя (П.30) по x_i, находим

$$\alpha k + a - c_i - 2x_i - \frac{2a}{3} = 0,$$

поэтому

$$x_i = \frac{3\alpha k + a - 3c_i}{6}. \tag{П.31}$$

Ясно, что в любой момент времени $0 < x_i < a/3$. Подставляя (П.31) в (П.30), получаем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha k x_i + \alpha k \frac{2a}{3} - \alpha m y + \left(\frac{a}{3} - c_i\right) x_i - x_i^2 - y. \tag{П.32}$$

Приравнивая коэффициенты при переменной y и свободные члены в левой и правой частях равенства (П.32), находим уравнения

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \quad \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \tag{П.33}$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} - \frac{5a - 3c_i}{6}\alpha k - \frac{(a - 3c_i)^2}{36}.$$

Решение (П.33), согласно лемме 1, имеет вид

$$\beta(t) = \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left(\frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m} - \frac{(5a - 3c_i)k}{6(\rho + m)m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) +$$
$$+ \left(\frac{k^2}{4(\rho + m)^2 \rho} - \frac{(5a - 3c_i)k}{6(\rho + m)\rho} + \frac{(a - 3c_i)^2}{36\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{NM}(i) = V_i(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (4.1). Предложение 5 доказано.

Доказательство предложения 6. При вычислении характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна, очевидно, $x_k = a/3$. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в этом случае принимает вид

$$\rho V_K - \frac{\partial V_K}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ t \le s \le T}} \left\{\frac{\partial V_K}{\partial y}\left(k\left(x_i + \frac{a}{3}\right) - my\right) + \left(a - c_i - x_i - \frac{a}{3}\right)x_i - y\right\}, \tag{П.34}$$

поскольку из условия максимума

$$\alpha k + \frac{2a}{3} - c_i - 2x_i = 0$$

следует

$$0 < x_i = \frac{3\alpha k + 2a - 3c_i}{6} < \frac{a}{3},$$

т.е. максимум выигрыша коалиции достигается в точке

$$\left(x_i = \frac{3\alpha k + 2a - 3c_i}{6},\ x_j = 0,\ x_k = \frac{a}{3}\right). \tag{П.35}$$

Подставляя (П.35) в (П.34), получаем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha\left[k\left(x_i + \frac{a}{3}\right) - my\right] + (a - c_i - x_i)x_i - y. \tag{П.36}$$

Приравнивая в (П.36) коэффициенты при переменной y и свободные члены в левой и правой частях равенства, находим уравнения

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \quad \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \tag{П.37}$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} + \frac{\alpha k(3c_i - 5a)}{6} + \frac{(2a - 3c_i)(3c_i - 4a)}{36}.$$

Решаем уравнение (П.37) с помощью леммы 1:

$$\beta(t) = \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left(\frac{(3c_i-5a)k}{6(\rho+m)m} + \frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) +$$
$$+\left(\frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho} + \frac{(3c_i-5a)k}{6(\rho+m)\rho} - \frac{(2a-3c_i)(3c_i-4a)}{36\rho}\right)(1-e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{NM}(i,j) = V_K(0,y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (4.2). Предложение 6 доказано.

Доказательство предложения 7. 1) Пусть $K = \{1,2\}$, $N\backslash K = \{3\}$. Тогда инвестиции игроков равны

$$\left(x_1 = \frac{a}{3},\ x_2 = \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6},\ x_3 = \frac{a}{3}\right). \tag{П.38}$$

Заметим, что

$$\bar{x} = \frac{2a}{3} + \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6} = \frac{3\alpha k + 5a - 3c_2}{6}. \tag{П.39}$$

Функцию Беллмана считаем линейной по переменной y:

$$V(t,y) = \alpha(t)y + \beta(t).$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в этом случае принимает вид

$$\rho V_K - \frac{\partial V_K}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ i=1,2,\\ t\le s\le T}}\{\alpha(k\bar{x} - my) + (a - c_1 - \bar{x})x_1 + (a - c_2 - \bar{x})x_2 - y\}. \tag{П.40}$$

Подставляя значения переменных (П.38) и (П.39) в уравнение (П.40), получаем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha k\bar{x} - \alpha m y + (a - c_1 - \bar{x})\frac{a}{3} - (a - c_2 - \bar{x})x_2 - y,,$$

откуда

$$\alpha' - (\rho+m)\alpha = 1,\quad \alpha(T) = 0,\quad \beta' - \rho\beta = F(t),\quad \beta(T) = 0, \tag{П.41}$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} + \frac{3c_2 - 4a}{6}\alpha k - \frac{3a^2 - 12ac_1 + 9c_2^2}{36}.$$

Решаем уравнение (П.41), согласно лемме 1:

$$\beta(t) = \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left(\frac{2k^2}{(\rho+m)^2 m} + \frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) +$$
$$+\left(\frac{3a^2 - 12ac_1 + 9c_2^2}{36\rho} + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho} + \frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)\rho}\right)(1-e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{PG}(1,2) = V_K(0,y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (5.1).

2) Пусть $K = \{2,3\}$, $N\backslash K = \{1\}$. Тогда инвестиции игроков равны

$$\left(x_1 = \frac{a}{3},\ x_2 = \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6},\ x_3 = 0\right). \tag{П.42}$$

Заметим, что

$$\bar{x} = \frac{a}{3} + \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6} = \frac{3\alpha k + 3a - 3c_2}{6} = \frac{\alpha k + a - c_2}{2}. \tag{П.43}$$

Функцию Беллмана считаем линейной по переменной y:

$$V(t,y) = \alpha(t)y + \beta(t).$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в этом случае принимает вид

$$\rho V_K - \frac{\partial V_K}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s),\\ i=2,3,\\ t\le s\le T}} \{\alpha(k\,\bar{x} - my) + (a - c_2 - \bar{x})\,x_2 - y\}. \tag{П.44}$$

Подставляя значения переменных (П.42) и (П.43) в уравнение (П.44), получаем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha(k\,\bar{x} - my) + (a - c_2 - \bar{x})\,x_2 - y,$$

откуда

$$\begin{gathered} \alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \\ \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \end{gathered} \tag{П.45}$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} + \frac{3c_2 - 4a}{6}\alpha k - \frac{a^2 - 4ac_2 + 3c_2^2}{12}.$$

Решая уравнение (П.45), согласно лемме 1, находим

$$\beta(t) = \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left(\frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m} + \frac{(3c_2 - 4a)k}{6(\rho+m)m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) +$$
$$+ \left(\frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho} + \frac{(3c_2 - 4a)k}{6(\rho+m)\rho} + \frac{(a - c_2)(a - 3c_2)}{12\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{PG}(2,3) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)\,y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (5.2).

3) Пусть $K = \{1,3\}$, $N\backslash K = \{2\}$. Тогда инвестиции игроков равны

$$\left(x_1 = \frac{a}{3},\ x_2 = \frac{a}{3},\ x_3 = 0\right). \tag{П.46}$$

Подставляя значения переменных (П.46) в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, находим

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha(k\,\bar{x} - my) + (a - c_1 - \bar{x})\,x_1 - y,$$

откуда

$$\begin{gathered} \alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \\ \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \end{gathered} \tag{П.47}$$

где

$$F(t) = -\frac{2a}{3}\alpha k - \frac{(a - 3c_1)a}{9}.$$

Решаем уравнение (П.47):

$$\beta(t) = \frac{2ak}{3(\rho+m)m}(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \left(\frac{(a - 3c_1)a}{9\rho} - \frac{2ak}{3(\rho+m)\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{PG}(1,3) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)\,y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (5.3).

4) Пусть $K = \{1\}$, $N\backslash K = \{2,3\}$. Тогда инвестиции игроков равны

$$\left(x_1 = \frac{a}{3},\ x_2 = \frac{a}{3},\ x_3 = \frac{a}{3}\right). \tag{П.48}$$

Подставляем значения переменных (П.48) в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha(k\,\bar{x} - my) + (a - c_1 - \bar{x})\,x_1 - y,$$

откуда

$$\begin{gathered}\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0,\\ \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0,\end{gathered} \tag{П.49}$$

где

$$F(t) = -a\alpha k + \frac{ac_1}{3}.$$

Решая уравнение (П.49), находим

$$\beta(t) = \frac{ak}{(\rho + m)m}(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) - \left(\frac{ak}{(\rho + m)\rho} + \frac{ac_1}{3\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{PG}(1) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (5.4).

5) Пусть $K = \{2\}$, $N \backslash K = \{1,3\}$. Тогда инвестиции игроков равны

$$\left(x_1 = \frac{a}{3},\ x_2 = \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6},\ x_3 = \frac{a}{3}\right). \tag{П.50}$$

Заметим, что

$$\begin{gathered}\overline{x} = \frac{2a}{3} + \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6} = \frac{3\alpha k + 5a - 3c_2}{6},\\ a - c_2 - \overline{x} = a - c_2 - \frac{3\alpha k + 5a - 3c_2}{6} = \frac{a - 3c_2 - 3\alpha k}{6}.\end{gathered}$$

Подставляя значения переменных (П.50) в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, получаем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha(k\,\overline{x} - my) + (a - c_2 - \overline{x})x_2 - y,$$

откуда

$$\begin{gathered}\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0,\\ \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \beta(T) = 0,\end{gathered} \tag{П.51}$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} + \frac{3c_2 - 5a}{6}\alpha k - \frac{(a - 3c_2)^2}{36}.$$

Решая уравнение (П.51), находим

$$\begin{gathered}\beta(t) = \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left(\frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m} + \frac{(3c_2 - 5a)k}{6(\rho + m)m}\right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) +\\ + \left(\frac{k^2}{4(\rho + m)^2\rho} + \frac{(3c_2 - 5a)k}{6(\rho + m)\rho} + \frac{(a - 3c_2)^2}{36\rho}\right)(1 - e^{\rho(t-T)}).\end{gathered}$$

Тогда $v^{PG}(2) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (5.5).

6) Пусть $K = \{3\}$, $N \backslash K = \{1,2\}$. Тогда инвестиции игроков в равновесии равны

$$\left(x_1 = \frac{a}{3},\ x_2 = \frac{a}{3},\ x_3 = 0\right). \tag{П.52}$$

Подставляем значения переменных (П.52) в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha' y - \beta' = \alpha(k\,\overline{x} - my) - y,$$

откуда

$$\begin{gathered}\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0,\\ \beta' - \rho\beta = -\frac{2a}{3}\alpha k, \quad \beta(T) = 0,\end{gathered} \tag{П.53}$$

Решая уравнение (П.53), находим

$$\beta(t) = \frac{2ak}{3(\rho + m)m}(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) - \frac{2ak}{3(\rho + m)\rho}(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда $v^{PG}(2) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$, окончательно получаем (5.6). Предложение 7 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Algorithmic Game Theory. Eds *N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirany*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
2. *Dubey P.* Inefficiency of Nash equilibria // Math. Operations Research, 1986. V. 11(1). P. 1–8.
3. *Johari R., Tsitsiklis J.N.* Efficiency Loss in a Network Resource Allocation Game // Math. Oper. Res. 2004. V. 29(3). P. 407–435.
4. *Moulin H., Shenker S.* Strategy Proof Sharing of Submodular Costs: Budget Balance Versus Efficiency // Econ. Theory. 2001. V. 18(3). P. 511–533.
5. *Roughgarden T.* Selfish Routing and the Price of Anarchy. Cambridge: MIT Press, 2005.
6. *Papadimitriou C.H.* Algorithms, Games, and the Internet // Proc. 33rd Sympos. Theory of Computing. Cambridge: 2001. P. 749–753.
7. *Угольницкий Г.А.* Методика сравнительного анализа эффективности способов организации активных агентов и методов управления // Проблемы управления. 2022. Т. 3. С. 29–39.
8. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985. 200 с.
9. *Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R.* Microeconomic Theory. Oxford: Oxford University Press, 1995.
10. *Vives X.* Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools. Cambridge: MIT Press, 1999.
11. *Basar T., Olsder G.Y.* Dynamic Non-Cooperative Game Theory. Philadelphia: SIAM, 1999. 506 p.
12. *Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G.* Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 382 p.
13. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
14. *Petrosjan L.A., Zenkevich N.A.* Game Theory. Basel: World Scientific Publishing, 1996.
15. *Petrosyan L.A., Yeung D.W.K.* Shapley Value for Differential Network Games: Theory and Application // J. Dynamics and Games. 2021. V. 8(2). P. 151–166.
16. *Shapley L.* A Value for *n*-person Games // Contributions to the Theory of Games. Vol. II Eds H.W. Kuhn, A.W. Tucker. Princeton: 1953.
17. *Neumann J. von, Morgenstern O.* Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton University Press, 1953.
18. *Petrosjan L., Zaccour G.* Time-consistent Shapley Value Allocation of Pollution Cost Reduction // J. Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27(3). P. 381–398.
19. *Gromova E.V., Petrosyan L.A.* On an Approach to Constructing a Characteristic Function in Cooperative Differential Games // Automation and Remote Control. 2017. V. 78. P. 1680–1692.
20. *Gromova E., Marova E., Gromov D.* A Substitute for the Classical Neumann–Morgenstern Characteristic Function in Cooperative Differential Games // J. Dynamics and Games. 2020. V. 7(2). P. 105–122.
21. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Исследование дифференциальных моделей иерархических систем управления путем их дискретизации // АиТ. 2013. № 2. С.109–122.
22. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Динамические модели коррупции в иерархических системах управления при эксплуатации биоресурсов // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 6. С. 168–176.
23. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Алгоритмы решения дифференциальных моделей иерархических систем управления // АиТ. 2016. № 5. С. 148–158.
24. *Korolev A.V., Ougolnitsky G.A.* Optimal Resource Allocation in the Difference and Differential Stackelberg Games on Marketing Network // J. Dynamics and Games. 2020. V. 7(2). P. 141–162.