
УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

УДК 62-40

МИНИМИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ
КВАДРАТИЧНОЙ ОЦЕНКИ УПРАВЛЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ
В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ¹

© 2024 г. Ю.Э. Плешивцева^a, *, Э.Я. Рапопорт^a, **

^aСамарский государственный технический ун-т, Самара, Россия

*e-mail: yulia_pl@mail.ru

**e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

Поступила в редакцию 30.05.2023 г.

После доработки 27.07.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Предлагается конструктивный метод решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления системой с распределенными параметрами параболического типа в условиях равномерной оценки целевых множеств с критерием оптимальности в форме интегральной квадратичной оценки управляемой функции состояния в пространственно-временной области ее определения. Приводится параметризованная форма представления с требуемой точностью управляющих воздействий на особых участках оптимального процесса, в пределах которых они не могут быть определены с помощью аналитических условий оптимальности первого порядка. Развиваемый подход базируется на разработанном ранее альтернативном методе построения параметризуемых алгоритмов программного управления, существенно использующем фундаментальные закономерности предметной области. Показывается, что уравнения оптимальных регуляторов сводятся на особых участках к линейным алгоритмам обратной связи по измеряемому состоянию объекта, которые дополняются переключениями в граничных точках на предельно допустимые управляющие воздействия при достижении соответствующих расчетных значений управляемой величины.

Ключевые слова: системы с распределенными параметрами, интегральная квадратичная оценка, особое управление, равномерная оптимизация, альтернативный метод, синтез оптимального управления

DOI: 10.31857/S0002338824010075, EDN: IUVGQV

MINIMIZATION OF INTEGRAL QUADRATIC ESTIMATE
OF CONTROLLED VARIABLE IN SYSTEMS WITH DISTRIBUTED
PARAMETERS

© 2024 Yu.E. Pleshivtseva^a, *, E.Ya. Rapoport^a, **

^aSamara State Technical University

*e-mail: yulia_pl@mail.ru

**e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

A constructive method for solving the linear-quadratic problem of optimal control of a parabolic-type system with distributed parameters is proposed under the condition of uniform estimation of target sets. The optimality criterion takes the form of an integral quadratic estimate of the controlled state function in the spatio-temporal domain of its definition. A parameterized representation of control inputs is given with the required accuracy within special intervals of the optimal process, where control inputs cannot be determined using first-order analytical optimality conditions. The suggested approach is based on a previously developed alternance method for constructing parameterized algorithms of programmed control, which heavily relies on fundamental regularities of the subject area. It is demonstrated that the equations of the optimal regulators within the special intervals are reduced to the linear feedback algorithms based on the measured states of the objects. These algorithms are supplemented with switches at boundary points to apply admissible control inputs corresponding to the calculated values of the controlled variable.

Keywords: systems with distributed parameters; integral quadratic estimate; special control; uniform optimization; alternance method; optimal control synthesis

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00180), <https://rscf.ru/project/22-29-00180>, ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет».

Введение. В типичном частном случае линейно-квадратичной задачи оптимального управления динамическими системами критерий оптимальности представляет собой интегральную квадратичную оценку (ИКО) управляемой функции состояния в области ее определения [1–3]. Подобные задачи оптимизации существенно усложняются наличием особых участков на протяжении процесса управления, в пределах которых оптимальные управляющие воздействия не могут быть найдены с помощью аналитических условий оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Понтрягина [4–7]. Начиная с определения особого управления и первого примера его отыскания Л.И. Розоноэром [4], к настоящему времени разработаны конструктивные методы вычисления особых управляющих воздействий, в том числе с помощью общего аппарата скобок Пуассона применительно к конечномерным системам с сосредоточенными параметрами [6, 7]. При этом возникает самостоятельная проблема компоновки алгоритмов программного оптимального управления из особых и неособых участков на достаточно широком множестве вариантов их сопряжения [6], которая усугубляется возможностью возникновения четтеринг-режимов с бесконечным числом переключений управляющих воздействий в точках стыкования [7–10].

Трудности решения задач оптимизации с особыми управлениями в бесконечномерных системах с распределенными параметрами (СРП) увеличиваются, приобретают принципиальный характер [10–12] и требуют дальнейшего развития способов их преодоления в целях разработки конструктивной технологии определения оптимальных управлений.

Известные работы в области оптимизации поведения динамических СРП с учетом особых участков управляемых процессов относятся, как правило, к задачам построения оптимальных программных управляющих воздействий и не предлагают способов синтеза алгоритмов обратной связи в замкнутых системах управления.

В настоящей работе рассматривается метод решения задачи оптимального по величине ИКО программного и позиционного управления для линейных моделей СРП параболического типа в типичных для приложений условиях оценки целевых множеств в равномерной метрике в форме допустимой точности равномерного приближения пространственного распределения управляемой величины к заданному состоянию в конце оптимального процесса [13, 14].

При этом решение задачи синтеза оптимального регулятора существенно усложняется неприменимостью классических условий трансверсальности на негладкой границе соответствующего целевого множества в бесконечномерном фазовом пространстве СРП. В целях опознания конечной точки оптимального процесса здесь могут быть использованы ее специальные альтернансные свойства, определяемые по схеме конструктивного альтернансного метода, который является распространением на задачи параметрической оптимизации теории нелинейных чебышевских приближений с учетом дополнительной информации о закономерностях предметной области [13–16].

Развиваемый подход существенно опирается на предлагаемый способ построения параметризуемых алгоритмов оптимального программного управления, содержащих особые участки, который базируется на альтернансных свойствах искомых экстремалей [13–16].

1. Постановка задачи. Пусть управляемая величина $Q(x, t)$ объекта с распределенными параметрами описывается одномерным линейным уравнением второго порядка в частных производных параболического типа в зависимости от пространственной координаты $x \in [x_0, x_1]$ и времени $t \in [0, t^*]$:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = b(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + c(x) \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + c_1(x) Q(x, t) + f_V(x) u_V(t) \quad (1.1)$$

с начальными

$$Q(x, 0) = Q_0(x) = Q_0 = \text{const} \geq 0 \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$\alpha_0 Q(x_0, t) + \beta_0 \frac{\partial Q(x_0, t)}{\partial x} = 0; \alpha_1 Q(x_1, t) + \beta_1 \frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} = u_S(t) \quad (1.3)$$

при сосредоточенном внутреннем $u_V(t)$ или граничном $u_S(t)$ кусочно-непрерывных управляющих воздействиях, заданных достаточно гладких функциях $f_V(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $c_1(x)$ и постоянных коэффициентах $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$; $\beta_0, \beta_1 > 0$.

Управляющие воздействия стесняются ограничениями

$$u_{V \min} \leq u_V(t) \leq u_{V \max}; u_{S \min} \leq u_S(t) \leq u_{S \max} \quad (1.4)$$

с известными предельно допустимыми величинами $u_{V \max}$, $u_{V \min}$ и $u_{S \max}$, $u_{S \min}$. Здесь и всюду далее используется обозначение $u(t) = u_V(t)$ или $u(t) = u_S(t)$, исключая для простоты случай одновременного использования внутреннего и граничного управлений.

Пусть необходимо обеспечить за заранее фиксируемое ограниченное время $t^* < \infty$ заданную точность $\varepsilon > 0$ равномерного приближения пространственного распределения управляемой величины $Q(x, t^*)$ к требуемому состоянию $Q^{**}(x) > Q_0 \forall x \in [x_0, x_1]$, согласно соотношению

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, t^*) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon, \quad (1.5)$$

определяющему оцениваемое в равномерной метрике целевое множество конечных состояний СРП [13–16]. Всюду далее предполагается, что заданное время t^* превышает его минимально возможное в условиях (1.4) значение t_{opt} , при котором выполняется требование (1.5) к конечному состоянию объекта.

Пусть далее эффективность процесса управления объектом (1.1)–(1.4) оценивается величиной интегральной квадратичной оценки

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} \int_{x_0}^{x_1} \rho(x) Q^2(x, t) dx dt \rightarrow \min_u \quad (1.6)$$

с весовым коэффициентом $\rho(x)$.

Применение к уравнениям объекта конечного интегрального преобразования по пространственному аргументу x с ядром, равным собственным функциям $\phi_n(\mu_n, x)$, $n = 1, 2, \dots$, начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), где μ_n^2 — собственные числа, приводит к представлению СРП бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для временных мод $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ разложения $Q(x, t)$ в сходящийся в среднем ряд по $\phi_n(\mu_n, x)$ [17, 18]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} &= -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + k_{Vn} u_V(t) + k_{Sn} u_S(t), n = 1, 2, \dots, \\ \bar{Q}_n(\mu_n, 0) &= \bar{Q}^{(0)}(\mu_n); \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t) \phi_n(\mu_n, x). \quad (1.8)$$

Здесь k_{Vn} , $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$ — моды конечных интегральных преобразований $f_V(x)$ и $Q_0(x)$ соответственно; k_{Sn} — известные постоянные коэффициенты [18].

При выполнении усиленных условий Коши—Липшица система уравнений (1.7) имеет единственное решение при заданном воздействии $u(t)$, которое с любой требуемой точностью при необходимости аппроксимируется решением “укороченной” системы, образуемой достаточно большим конечным числом N первых уравнений (1.7) при $\bar{Q}_n(\mu_n, t) = 0 \forall n > N$, т.е. оказывается допустимой конечномерная аппроксимация модели (1.7) при $n = \overline{1, N}$ [19]. Всюду далее на этом основании учитываются N_1 мод $\bar{Q}_n$, $n = \overline{1, N_1}$, в (1.7), где $N_1 = \infty$ или $N_1 = N < \infty$ в зависимости от используемой схемы анализа и возможностей реализации исследуемых алгоритмов управления.

Конкретный выбор числа N_1 должен производиться, исходя из требуемой точности описания модели объекта N_1 уравнениями (1.7).

Переход к модальному описанию СРП в форме (1.7), (1.8) приводит в силу ортонормированности семейства собственных функций при выборе коэффициента $\rho(x)$ в (1.6) равным весовой функции $r(x)$ конечного интегрального преобразования [18] к представлению критерия (1.6) в следующем виде:

$$I_1(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} \left[\sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) \right] dt \rightarrow \min_u, \quad (1.9)$$

а требования (1.5) к конечному состоянию объекта определяются на основании (1.8) выполнением условия

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\mu_n, t^*) \phi_n(\mu_n, x) - Q^{**}(x) \right| \leq \varepsilon. \quad (1.10)$$

Рассматриваемая задача оптимального управления сводится к определению программного управления $u^*(t)$ и алгоритма обратной связи $u^*(Q, t)$, обеспечивающих перевод объекта (1.7), (1.8) в требуемое конечное состояние (1.10) при минимально возможном в условиях (1.4) значении критерия оптимальности (1.9).

2. Программные оптимальные управляющие воздействия. 2.1. Структура оптимального управления. На бесконечномерную задачу оптимизации (1.4), (1.7)–(1.10) распространяется принцип максимума Понтрягина [14, 20]. Базовое условие

$$H(\bar{Q}^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) = \max_u H(\bar{Q}^*(t), u(t), \psi^*(t)), t \in [0, t^*] \quad (2.1)$$

достижения на соответствующих оптимальному процессу величинах $\bar{Q}^*(t)$, $u^*(t)$, $\psi^*(t)$ максимума функции Понтрягина H по переменной u

$$H(\bar{Q}(t), u(t), \psi(t)) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) + \sum_{n=1}^{N_1} \psi_n(t) (-\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + k_{Vn} u_V(t) + k_{Sn} u_S(t)), \quad (2.2)$$

где $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t))$, $n = \overline{1, N_1}$, и вектор сопряженных переменных $\psi(t) = (\psi_n(t))$, $n = \overline{1, N_1}$, описывается системой уравнений

$$\frac{d\psi_p}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{Q}_p} = \bar{Q}_p(\mu_p, t) + \mu_p^2 \psi_p(t), p = \overline{1, N_1}, \quad (2.3)$$

определяет в условиях (1.4) программное оптимальное управление

$$u^*(t) = \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} + \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2} \operatorname{sign} \sum_{n=1}^{N_1} k_n \psi_n^*(t) \quad (2.4)$$

для всех $t \in (0, t^*)$, для которых

$$\sum_{n=1}^{N_1} k_n \psi_n^*(t) \neq 0. \quad (2.5)$$

Здесь $k_n = k_{Vn}$, если $u(t) = u_V(t)$; $k_n = k_{Sn}$, если $u(t) = u_S(t)$.

При этом в общем случае заранее неизвестно, какое конкретно значение $u_{\max}$ или $u_{\min}$ принимает $u^*(t)$ при $t = 0$. В такой ситуации необходимо либо найти независимо друг от друга решение двух задач оптимального управления для обоих возможных вариантов с последующим выбором в качестве искомого решения того из них, на котором достигается меньшая величина критерия оптимальности, либо заранее произвести отбор единственного варианта, если это оказывается возможным, исходя из закономерностей предметной области конкретной рассматриваемой задачи.

В условиях $t^* > t_{opt}$ на протяжении оптимального процесса существуют интервалы $[t_n, t_k]$, $t_n < t_k$, в пределах которых

$$\sum_{n=1}^{N_1} k_n \psi_n^*(t) \equiv 0 \forall t \in [t_n, t_k]. \quad (2.6)$$

Оптимальное управление на каждом из таких интервалов не определяется из условия (2.4) и является особым [6, 7]. Заметим, что при $t^* \leq t_{opt}$ $u^*(t)$ находится для достижимых значений ε в (1.10) только в форме “релейных” алгоритмов вида (2.4), (2.5) [3, 13–15]. Таким образом, оптимальная программа $u^*(t)$ может содержать на протяжении процесса управления как неособые, согласно (2.4), (2.5), так и особые (в соответствии с (2.6)) участки. При этом возникает дальнейшая проблема вычисления управляющих воздействий на интервалах (2.6) и компоновки оптимальной программы из особых и неособых участков.

2.2. Особые оптимальные управления в открытой области определения управляющих воздействий. Рассмотрим сначала задачу (1.7)–(1.10), считая, что ограничения (1.4) не достигаются на всем протяжении оптимального процесса. В таком случае условие максимума в (2.1) заменяется условием стационарности функции Понтрягина на оптимальном управлении:

$$\left. \frac{\partial H(\bar{Q}^*(t), u(t), \psi^*(t))}{\partial u} \right|_{u=u^*(t)} = 0, \quad (2.7)$$

которое приводит, согласно (2.2), к равенствам (2.6), и, следовательно, оптимальное программное управляющее воздействие $u^*(t)$ является особым на всем интервале $[0, t^*] \ni t$.

Известный способ вычисления особого управления $u_{oc}(t)$ для конечномерных объектов путем последовательного дифференцирования тождества вида (2.6) вплоть до появления в явной форме искомого управляющего воздействия [6, 7] не распространяется на рассматриваемую СРП ввиду расходимости ряда для производных четного порядка в (2.6) при $N_1 = \infty$ [10].

В [10] показано, что $u_{oc}(t)$ следует искать в форме ряда экспонент

$$u_{oc}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-p_n t}, p_n > 0, \quad (2.8)$$

где значения p_n определяются из условия (2.6) как корни уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2}{\mu_n^4 - p^2} = 0. \quad (2.9)$$

Таким образом, особое управление находится с точностью до выбора бесконечномерного вектора весовых коэффициентов a_n в (2.8), который должен быть найден из условий (1.10) достижения требуемого конечного состояния управляемой величины.

В работах [13—16] предложен конструктивный способ последовательной параметризации подобных управляющих воздействий ($\Delta^{(M)}$ -параметризация) на конечномерных подмножествах векторов $\Delta^{(M)} = (\Delta_i)$, $i = \overline{1, M}$, где в рассматриваемой задаче

$$\Delta^{(M)} = (a_i), i = \overline{1, M}; a_i = 0, i = \overline{M+1, N_1}; 1 \leq M < N_1. \quad (2.10)$$

Применение процедуры $\Delta^{(M)}$ -параметризации приводит к параметрическому представлению $u_{oc}(t)$ в следующей форме, согласно (2.8), (2.10):

$$u_{oc}(\Delta^{(M)}, t) = \sum_{n=1}^M a_n e^{-p_n t}. \quad (2.11)$$

С возрастанием M обеспечивается попадание под действием управления $u_{oc}(\Delta^{(M)}, t)$ в сужающееся к требуемому состоянию $Q^{**}(x)$ в пространстве $(\bar{Q}_n)$ целевое множество, гарантируя выполнение условия (1.10) для достижимых значений $\varepsilon > 0$ при некотором конечном числе $M \geq 1$ [13—16].

Интегрирование уравнений модели объекта (1.7) с управляющим воздействием $u_{oc}(\Delta^{(M)}, t)$ в (2.11) позволяет получить зависимости $Q(x, \Delta^{(M)})$ управляемой величины $Q(x, t^*)$ в конце процесса управления и критерия оптимальности $I_1(\Delta^{(M)})$ в (1.8), (1.9) для каждого значения $\bar{Q}(0)$ в форме явных функций своих аргументов. Здесь $Q(x, \Delta^{(M)})$ представляется разложением в ряд (1.8), где $\bar{Q}_n(\mu_n, t^*) = \bar{Q}_n(\mu_n, \Delta^{(M)})$ находятся в результате интегрирования уравнений (1.7) с управлением $u_{oc}(\Delta^{(M)}, t)$. В результате осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [13—16, 21]:

$$I_1(\Delta^{(M)}) \rightarrow \min; \max_{\Delta^{(M)} \in [x_0, x_1]} |Q(x, \Delta^{(M)}) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon \quad (2.12)$$

на экстремум функции $I_1(\Delta^{(M)})$ конечного числа M переменных a_i , $i = \overline{1, M}$, с бесконечным числом ограничений, порождаемых требованием выполнения условия (1.10) для всех $x \in [x_0, x_1]$ и заменяемых одним ограничением на функцию максимума в (2.12). В соответствии с результатами, полученными в [13—16, 21], число M искомых параметров определяется для заданной величины ε в (1.10) соотношением

$$M = v \forall \varepsilon : \varepsilon_{\min}^{(v)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(v-1)}, \quad (2.13)$$

где

$$\varepsilon_{\min}^{(v)} = \min_{\Delta^{(v)}} \left[\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \Delta^{(v)}) - Q^{**}(x)| \right]. \quad (2.14)$$

Значения минимаксов $\varepsilon_{\min}^{(v)}$ образуют, как правило, убывающую цепочку неравенств с возрастанием v [13—16, 21], и задача (2.12) оказывается разрешимой, если $\varepsilon \geq \varepsilon_{\inf}$. Здесь точная нижняя грань $\varepsilon_{\inf}$ достижимых значений ε оказывается равной минимаксу $\varepsilon_{\min}^{(\rho)}$, где $\rho = \infty$ при $\varepsilon_{\inf} = 0$ и $\rho < \infty$ при $\varepsilon_{\inf} > 0$ соответственно для управляемых и неуправляемых относительно $Q^{**}(x)$ объектов [13].

Решение ЗПО (2.12) относительно вектора $\Delta^{(M)}$, а также априори неизвестной величины минимакса $\varepsilon_{\min}^{(M)}$ в случае $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$ в (2.12) может быть получено в условиях малостеснительных

допущений альтернансным методом параметрической оптимизации [13–16, 21]. Метод базируется на специальных альтернансных свойствах искомых значений $\Delta_*^{(M)} = (a_i^*)$, $i = \overline{1, M}$, соответствующих оптимальному процессу, которые являются аналогом условий экстремума в теории нелинейных чебышевских приближений, и на дополнительной информации о форме кривой пространственного распределения результирующего состояния $Q(x, \Delta_*^{(M)})$ на отрезке $[x_0, x_1] \ni x$, диктуемой закономерностями предметной области рассматриваемой задачи.

Согласно альтернансным свойствам, равные допустимой величине ε одинаковые значения максимальных отклонений $\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \Delta_*^{(M)}) - Q^{**}(x)|$ достигаются в некоторых точках x_g^0 , $g = \overline{1, R}$, на отрезке $[x_0, x_1]$. Число R этих точек оказывается равным числу искомых неизвестных в ЗПО (2.12)–(2.14), включая все компоненты $\Delta_*^{(M)}$ при заданной величине ε : $\varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}$ и наряду с ними неизвестную величину минимакса $\varepsilon_{\min}^{(M)}$, если значение ε в (2.13) должно совпадать с $\varepsilon_{\min}^{(M)}$:

$$R = \begin{cases} M, \varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}; \\ M + 1, \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Тем самым образуется замкнутая относительно этих неизвестных система соотношений

$$|Q(x_g^0, \Delta_*^{(M)}) - Q^{**}(x_g^0)| = \varepsilon, g = \overline{1, R}. \quad (2.16)$$

При наличии дополнительной информации из предметной области о форме кривой $Q(x, \Delta_*^{(M)})$ на отрезке $[x_0, x_1] \ni x$, позволяющей идентифицировать координаты x_g^0 и знаки $Q(x_g^0, \Delta_*^{(M)}) - Q^{**}(x_g^0)$, равенства (2.16), дополненные условиями существования экстремума функции $Q(x, \Delta_*^{(M)}) - Q^{**}(x)$ в точках $x_{g_p}^0 \in \text{int}[x_0, x_1]$, $p = \overline{1, R_1}$, где $R_1 \leq R$ и $x_{g_p}^0 \in \{x_p^0\}$, переводятся в систему $R + R_1$ уравнений:

$$\begin{aligned} Q(x_g^0, \Delta_*^{(M)}) - Q^{**}(x_g^0) &= \pm \varepsilon, g = \overline{1, R}; \\ \frac{\partial}{\partial x} [Q(x_{g_p}^0, \Delta_*^{(M)}) - Q^{**}(x_{g_p}^0)] &= 0, p = \overline{1, R_1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

с заведомо фиксируемым знаком ε в каждой точке x_g^0 , которая разрешается относительно a_i^* , $i = \overline{1, M}$; значений $x_{g_p}^0$, $p = \overline{1, R_1}$, а также $\varepsilon_{\min}^{(M)}$, если в (2.12) $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$. Найденные указанным образом значения $\Delta_*^{(M)p}$ полностью определяют искомый алгоритм оптимального особого управления в форме (2.11):

$$u_{oc}^*(\Delta_*^{(M)}, t) = \sum_{n=1}^M a_n^* e^{-p_n t}. \quad (2.18)$$

2.3. Оптимальное управление в замкнутой области определения управляющих воздействий. Перейдем теперь к рассмотрению задачи (1.7)–(1.10) с учетом ограничений (1.4). Сравнение значений $u_{oc}^*(\Delta_*^{(M)}, t)$, $t \in [0, t^*]$ с заданными предельно допустимыми

величинами $u_{\max}, u_{\min}$ в (1.4) позволяет определить структуру программного управляющего воздействия $u^*(t)$ в условиях (1.4) и способ его компоновки на всем протяжении оптимального процесса из чередующихся особых и неособых участков с точностью до выбора моментов $t_j, j = \overline{1, h}, h \geq 1, t_j < t_{j+1}$ их сопряжения в условиях конкретного выбора первого из них путем сравнения $u_{oc}^*(\Delta_*^{(M)}, 0)$ с пределами в (1.4).

Тем самым находится явная форма параметрического представления $u(T_h, t), T_h = (t_j), j = \overline{1, h}$, искомого программного управления с точностью до выбора h моментов сопряжения t_j при сохранении на особых участках управления в форме (2.18), которое, согласно его определению, минимизирует на их протяжении соответствующие составляющие критерия оптимальности (1.9). Интегрирование уравнений (1.7) с управляющим воздействием $u(T_h, t)$ позволяет получить зависимости конечного состояния управляемой величины $Q(x, T_h)$ и критерия оптимальности $I_1(T_h)$, согласно (1.8), (1.9), в виде явных функций своих аргументов с последующей редукцией, подобно (2.12), к задаче полубесконечной оптимизации:

$$I_1(T_h) \rightarrow \min; \max_{T_h} \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, T_h) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon. \quad (2.19)$$

Ограничимся далее ситуацией с числом $h = M$ точек $t_j, j = \overline{1, M}$, равным размерности вектора $\Delta_*^{(M)}$ в (2.18) при $T_h = T_M, \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)} \leq \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M-1)}$ в (2.19), где аналогично (2.14)

$$\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)} = \min_{T_M} \left[\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, T_M) - Q^{**}(x)| \right]. \quad (2.20)$$

При $T_h = T_M$, согласно альтернансным свойствам искомого значения T_M^* [13–16], выполняется базовая система правил вида (2.15), (2.16):

$$\tilde{R} = \begin{cases} M, \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M-1)}, \\ M+1, \varepsilon = \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)}, \end{cases} \quad (2.21)$$

$$|Q(\tilde{x}_g^0, T_M^*) - Q^{**}(\tilde{x}_g^0)| = \varepsilon, g = \overline{1, \tilde{R}}, \quad (2.22)$$

в $\tilde{R}$ точках альтернанса $\tilde{x}_g^0 \in [x_0, x_1]$ с последующей редукцией на основании закономерностей предметной области к подобной (2.17) системе $\tilde{R} + \tilde{R}_1$ уравнений:

$$\begin{aligned} Q(\tilde{x}_g^0, T_M^*) - Q^{**}(\tilde{x}_g^0) &= \pm \varepsilon, g = \overline{1, \tilde{R}}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[Q(\tilde{x}_{g_p}^0, T_M^*) - Q^{**}(\tilde{x}_{g_p}^0) \right] &= 0, p = \overline{1, \tilde{R}_1}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

разрешаемой относительно $\tilde{R} + \tilde{R}_1$ искомым величин $t_j^*, j = \overline{1, M}; \tilde{x}_{g_p}^0, p = \overline{1, \tilde{R}_1}$ и $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)}$, если $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)}$ в (2.22), (2.23).

В итоге определяемый описанным способом вектор T_M^* обеспечивает заданную точность равномерного приближения конечного состояния объекта к $Q^{**}(x)$ при $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M)} \leq \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(M-1)}$ в (1.10). При этом особые управления (2.18) не предъявляют дополнительных требований к поведению управляемой величины в точках сопряжения $t_j^*, j = \overline{1, M}$, при задании целевого

множества (1.10) и не сопровождаются появлением четтеринг — режимов с бесконечным числом переключения управляющих воздействий, которые возникают, в частности, при входе на особые участки в задачах управления СРП с целевым множеством $Q(x, t^*) = 0$ и критерием оптимальности вида (1.9), оцениваемым на бесконечном временном интервале $[0, t^*]$, $t^* \rightarrow \infty$ [10, 11].

3. Синтез оптимального управления. Рассмотрим далее задачу аналитического конструирования оптимальных регуляторов $u^*(Q, t)$ в рассматриваемой задаче (1.4), (1.7)—(1.10). Интегрирование уравнений объекта (1.7) с особым управлением (2.18) приводит, согласно [10], к следующим выражениям для модальных составляющих $Q(x, t)$:

$$\bar{Q}_n(\mu_n, t) = \sum_{j=1}^M \frac{k_n a_j^*}{\mu_n^2 - p_j} e^{-p_j t}, n = \overline{1, N_1}. \quad (3.1)$$

Первые M равенств в (3.1) образуют линейную систему M уравнений относительно M значений экспонент в каждый момент времени в зависимости от наблюдаемых величин $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$, $n = \overline{1, M}$. Решение такой системы находится по формулам Крамера:

$$e^{-p_j t} = \sum_{n=1}^M \frac{D_{jn}}{D} \bar{Q}_n(\mu_n, t), j = \overline{1, M}, \quad (3.2)$$

где D_{jn} — алгебраическое дополнение n -го элемента j -го столбца определителя

$$D = \det \left[\frac{k_n a_j^*}{\mu_n^2 - p_j} \right]_{n=1, M}^{j=1, M}.$$

Подстановка (3.2) в (2.18) приводит к линейному закону синтеза особого управления $u_{oc}^*(\bar{Q}, t)$ с постоянными коэффициентами η_n^* передачи обратных связей по неполному измерению состояния объекта $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t))$, $n = \overline{1, M}$:

$$u_{oc}^*(\bar{Q}, t) = \sum_{n=1}^M \eta_n^* \bar{Q}_n(\mu_n, t), \eta_n^* = \sum_{j=1}^M \frac{a_j^* D_{jn}}{D}. \quad (3.3)$$

Переход в (3.3) от $\bar{Q}(t)$ к измеряемому выходу объекта $Q_u(x_u, t) = (Q_u(x_{ui}, t))$ в r точках $x_{ui} \in [x_0, x_1]$, $i = \overline{1, r}$, определяется, согласно (1.8), векторно-матричным уравнением наблюдения

$$Q_u(x_u, t) = \Phi_u \bar{Q}(t); \Phi_u = [\phi_n(\mu_n, x_{ui})], n = \overline{1, N_1}; i = \overline{1, r}. \quad (3.4)$$

В условиях $r < M$ неполного измерения состояния для восстановления вектора $\bar{Q}(t)$ по значениям $Q(x_u, t)$ требуется построение наблюдателя полного или пониженного порядка [22, 23]. Если по условиям требуемой точности моделирования объекта (1.7), (1.8) можно ограничиться учетом только M составляющих $\bar{Q}(t)$, полагая $N_1 = r = M$, то $\bar{Q}(t)$ непосредственно определяется решением системы уравнений (3.4) при $r = M$:

$$\bar{Q}(t) = \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t). \quad (3.5)$$

Подстановка (3.3) в (3.5) приводит к линейному алгоритму синтеза особого управления с обратными связями по измеряемому выходу объекта:

$$u_{oc}^*(Q_u, t) = \eta^* \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t), \quad (3.6)$$

где $\eta^* = (\eta_n^*)$, $n = \overline{1, M}$ — матрица-строка и $\Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t) = \bar{Q}(t)$ — матрица-столбец.

Точное решение задачи синтеза в замкнутой области определения управляющих воздействий связано с серьезными затруднениями в условиях существования наряду с особыми участками интервалов изменения управляющих воздействий по алгоритму (2.4), (2.5) [24]. В большинстве случаев с приемлемой в приложениях точностью искомые алгоритмы обратной связи $\tilde{u}^*(\bar{Q}, t)$ и $\tilde{u}^*(Q_u, t)$ могут быть построены путем дополнения регуляторов (3.3) и (3.6) участками выхода управляющих воздействий на ограничения (1.4) [24, 25]:

$$\tilde{u}^*(\bar{Q}, t) = \begin{cases} u_{\min} & \text{на участках (2.4), (2.5), если } u^*(t) = u_{\min}, \\ u_{oc}^*(\bar{Q}, t) & \text{на особых участках (2.6),} \\ u_{\max} & \text{на участках (2.4), (2.5), если } u^*(t) = u_{\max}; \end{cases} \quad (3.7)$$

$$(3.8)$$

$$(3.9)$$

$$\tilde{u}^*(Q_u, t) = \begin{cases} u_{\min} & \text{на участках (2.4), (2.5), если } u^*(t) = u_{\min}, \\ u_{oc}^*(Q_u, t) & \text{на особых участках (2.6),} \\ u_{\max} & \text{на участках (2.4), (2.5), если } u^*(t) = u_{\max}; \end{cases} \quad (3.10)$$

$$(3.11)$$

$$(3.12)$$

где $u_{oc}^*(\bar{Q}, t)$ и $u_{oc}^*(Q_u, t)$ находятся, согласно (3.5) и (3.6).

Реализация законов управления $\tilde{u}^*(\bar{Q}, t)$, $\tilde{u}^*(Q_u, t)$ обеспечивается переходом к алгоритмам (3.7), (3.9) и (3.10), (3.12) в точках сопряжения t_j^* , $j = \overline{1, M}$, особых и неособых интервалов при достижении расчетных значений соответственно $\bar{Q}(t_j^*)$ и $Q_u(x_u, t_j^*)$, определяемых по результатам предварительного решения задачи программного управления.

4. Оптимальный регулятор для управления индукционным нагревом металлической пластины. В качестве примера рассмотрим задачу аналитического синтеза оптимального управления нестационарным процессом теплопроводности с внутренним тепловыделением.

Пусть температурное поле $Q(x, t)$ пластины в процессе индукционного нагрева описывается в зависимости от времени t и пространственной координаты x линейным неоднородным уравнением теплопроводности вида (1.1)–(1.3) в относительных единицах [15, 26]:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + W(x) u_V(t), x \in [0, 1], t \in [0, t^*] \quad (4.1)$$

с заданными начальными

$$Q(x, 0) = Q_0 = \text{const} \geq 0 \quad (4.2)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = 0; \frac{\partial Q(1, t)}{\partial x} + \alpha Q(1, t) = 0, \quad (4.3)$$

учитывающими тепловые потери в окружающую среду с нулевой температурой на поверхности пластины $x = 1$ по закону конвективной теплоотдачи с заданным значением α критерия Био.

Здесь $u_V(t)$ — внутреннее сосредоточенное управляющее воздействие по мощности электромагнитных источников тепла, удовлетворяющее ограничениям вида (1.4):

$$0 \leq u_{\min} \leq u_V(t) \leq u_{\max}, t \in [0, t^*]; \quad (4.4)$$

$W(x)$ — известная функция пространственного распределения мощности внутреннего тепловыделения:

$$W(x) = \sqrt{2\xi} \frac{ch(\sqrt{2\xi}x) - \cos(\sqrt{2\xi}x)}{sh(\sqrt{2\xi}) - \sin(\sqrt{2\xi})},$$

где ξ — характерный параметр, определяемый глубиной проникновения тока в металл при индукционном нагреве [15, 26].

В пространстве модальных переменных $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ объект управления (4.1)–(4.4) описывается бесконечной системой уравнений вида (1.7):

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \bar{W}_n u_V(t), \bar{Q}_n(\mu_n, 0) = \bar{Q}_n(0), n = 1, 2, \dots, \quad (4.5)$$

где $\bar{Q}_n(0)$ и $\bar{W}_n$ — соответственно моды начального температурного состояния Q_0 и конечного интегрального преобразования $W(x)$. Температурное поле $Q(x, t)$ представляется его разложением в ряд вида (1.8) по собственным функциям $\cos(\mu_n x)$ [15, 26]:

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t) \phi_n(\mu_n, x); \phi_n(\mu_n, x) = \frac{2\alpha^2 \cos(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha) \sin^2 \mu_n}. \quad (4.6)$$

Здесь $\mu_n, n = 1, 2, \dots$, — бесконечно возрастающая последовательность положительных корней трансцендентного уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu - \alpha = 0,$$

и в формуле (4.5)

$$\bar{W}_n = \int_0^1 W(x) \cos(\mu_n x) dx.$$

Пусть к конечному температурному состоянию $Q(x, t^*)$ предъявляется требование (1.10) равномерного нагрева пластины до заданной температуры $Q^{**}(x) = Q^{**} = \text{const} > Q_0, x \in [0, 1]$, с допустимой погрешностью ε :

$$\max_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \frac{2\alpha^2 \cos(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha) \sin^2 \mu_n} \bar{Q}_n(\mu_n, t^*) - Q^{**} \right| \leq \varepsilon. \quad (4.7)$$

Задача сводится к определению алгоритма обратной связи $u_V^*(Q, t)$, обеспечивающего перевод объекта (4.5), (4.6) в требуемое конечное состояние $Q^{**}(x)$ с заданной точностью ε , согласно (4.7), при минимально возможном в условиях (4.4) значении критерия оптимальности (1.9) за фиксируемое заранее время t^* , превышающее длительность t_{opt} оптимального по быстройдействию процесса управления с той же точностью ε приближения к $Q^{**}(x)$.

4.1. Вычисление особого управления в открытой области определения управляющих воздействий. Ограничимся здесь и всюду далее двухпараметрическим представлением особого управления при $M = 2$, $R = 3$ в (2.11)–(2.15) для типичного в приложениях случая, когда требуемая величина ε в (4.7) должна совпадать с заранее неизвестным значением $\varepsilon_{\min}^{(2)}$.

Замкнутая система соотношений (2.16) в трех точках x_g^0 , $g = 1, 2, 3$ при $M = 2$, $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ приводит с учетом физических закономерностей поведения температурных полей в процессе индукционного нагрева [15, 26] к системе четырех уравнений вида (2.17) с известной формой кривой распределения $Q(x, \Delta_*^{(2)})$ на отрезке $[0, 1]$, показанной на рис. 1:

$$\begin{aligned} Q(0, \Delta_*^{(2)}) - Q^{**} &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}, \\ Q(x_2^0, \Delta_*^{(2)}) - Q^{**} &= \varepsilon_{\min}^{(2)}, \\ Q(1, \Delta_*^{(2)}) - Q^{**} &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}, \\ \frac{\partial Q(x_2^0, \Delta_*^{(2)})}{\partial x} &= 0, 0 < x_2^0 < 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

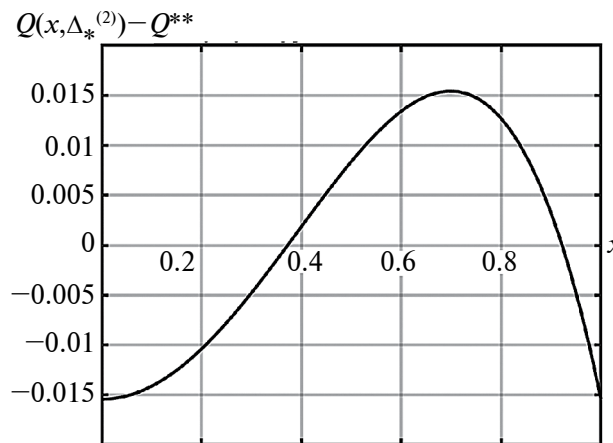


Рис. 1. Температурные распределения в конце оптимального процесса с неограничиваемым особым управлением при $M = 2$, $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)} = 0.0154$

Система (4.8) решается относительно четырех неизвестных $\Delta_*^{(2)} = (a_1^*, a_2^*)$, $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ и x_2^0 , первые два из которых полностью определяют оптимальное управление $u_{oc}^*(\Delta_*^{(2)}, t)$ в (2.18) после вычисления корней p_1 , p_2 уравнения (2.9), где $k_n = k_{Vn} = \bar{W}_n$. Конечное пространственное распределение $Q(x, t^*) = Q(x, \Delta_*^{(2)})$ температурного поля вычисляется в (4.8) в форме разложения в ряд (4.6) при $t = t^*$, где в результате интегрирования уравнений (4.5) с управлением $u_V(t) = u_{oc}^*(\Delta_*^{(2)}, t)$ вида (2.18) получаем следующие выражения для $\bar{Q}_n(\mu_n, t^*) = \bar{Q}_n(\mu_n, \Delta_*^{(2)}, t^*)$:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n(\mu_n, a_1^*, a_2^*, t^*) &= Q_0 \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} e^{-\mu_n^2 t^*} + \frac{\bar{W}_n a_1^*}{\mu_n^2 - p_1} \left(e^{-p_1 t^*} - e^{-\mu_n^2 t^*} \right) + \\ &+ \frac{\bar{W}_n a_2^*}{\mu_n^2 - p_2} \left(e^{-p_2 t^*} - e^{-\mu_n^2 t^*} \right), n = \overline{1, N_1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

На рис. 1, 2 представлены некоторые расчетные результаты, полученные при $\xi = 4$, $Q_0 = 0$, $Q^{**} = 0.5$; $\alpha = 0.5$, $t^* = 0.4$, $N_1 = 15$.

4.2. Программное управление с учетом ограничений на управляющее воздействие. Сравнение найденного особого управления $u_{oc}^*(\Delta_*^{(2)}, t)$ на всем протяжении оптимального процесса с заданными величинами $u_{\max}$, $u_{\min}$ в (4.4) определяет в условиях $u_{oc}^*(\Delta_*^{(2)}, 0) > u_{\max}$, $u_{oc}^*(\Delta_*^{(2)}, t^*) < u_{\min}$ (рис. 2) параметризованную структуру $u_V(t_1, t_2, t)$ программного управления в замкнутой области изменения u_V с точностью до выбора двух моментов сопряжения t_1, t_2 интервалов вида (2.4) с единственным особым участком:

$$u_V(t_1, t_2, t) = \begin{cases} u_{\max}, t \in [0, t_1), \\ u_{oc}^*(\Delta_*^{(2)}, t), t_1 < t < t_2, \\ u_{\min}, t \in (t_2, t^*]. \end{cases} \quad (4.10)$$

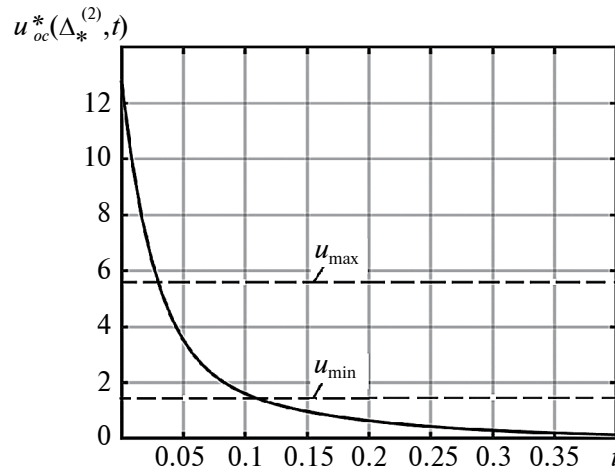


Рис. 2. Особое оптимальное управление в открытой области определения управляющих воздействий ($M = 2$, $a_1^* = 3.019$, $a_2^* = 9.792$, $p_1 = 7.855$, $p_2 = 37.754$)

В итоге задача программного оптимального управления сводится к подобной (2.19) ЗПО при $T_h = T_M = (t_1, t_2)$, $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)} \leq \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(1)}$. Здесь $Q(x, T_M)$ опять находится в форме ряда (4.6) при $t = t^*$, где теперь $\bar{Q}_n(\mu_n, t^*) = \bar{Q}_n(\mu_n, t_1, t_2, t^*)$ вычисляются после интегрирования уравнений (4.5) с управлением (4.10) по следующему выражению:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n(\mu_n, t_1, t_2, t^*) = & Q_0 \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} e^{-\mu_n^2 t^*} + \frac{\bar{W}_n}{\mu_n^2} u_{\max} \left(e^{-\mu_n^2 (t^* - t_1)} - e^{-\mu_n^2 t^*} \right) + \\ & + \frac{\bar{W}_n a_1^*}{\mu_n^2 - p_1} e^{-\mu_n^2 t^*} \left(e^{(\mu_n^2 - p_1) t_2} - e^{(\mu_n^2 - p_1) t_1} \right) + \frac{\bar{W}_n a_2^*}{\mu_n^2 - p_2} e^{-\mu_n^2 t^*} \left(e^{(\mu_n^2 - p_2) t_2} - e^{(\mu_n^2 - p_2) t_1} \right) + \\ & + \frac{\bar{W}_n}{\mu_n^2} u_{\min} \left(1 - e^{-\mu_n^2 (t^* - t_2)} \right), n = \overline{1, N_1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Альтернативные свойства (2.21), (2.22) искомого вектора параметров $T_M^* = (t_1^*, t_2^*)$ переводят замкнутую систему соотношений (2.22) при $R = 3$ опять с использованием физических закономерностей процесса индукционного нагрева [15, 26] в однозначно определяемую систему уравнений аналогичного (4.8) вида при $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)}$, соответствующую известной форме кривой $Q(x, T_M^*) - Q^{**}$ (рис. 3):

$$\begin{aligned} Q(0, T_M^*) - Q^{**} &= -\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)}, \\ Q(\tilde{x}_2^0, T_M^*) - Q^{**} &= \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)}, \\ Q(1, T_M^*) - Q^{**} &= -\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)}, \\ \frac{\partial Q(\tilde{x}_2^0, T_M^*)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

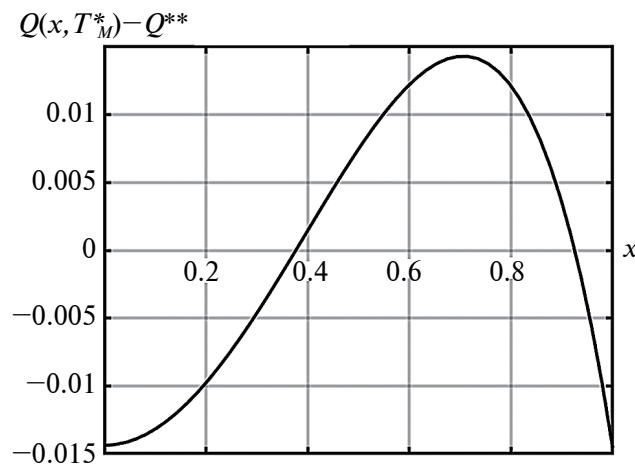


Рис. 3. Температурное распределение в конце оптимального процесса с замкнутой областью изменения управляющих воздействий ($M = 2$, $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)} = 0.0144$, $u_{\max} = 5.0$, $u_{\min} = 0.2$)

Система четырех уравнений (4.12) решается относительно четырех неизвестных t_1^* , t_2^* , $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)}$, $\tilde{x}_2^0$. Подстановка найденных значений t_1^* , t_2^* в (4.10) полностью определяет искомое программное управление $u_V^*(t_1^*, t_2^*, t)$.

4.3. Аналитическое конструирование оптимального регулятора. Алгоритм оптимального управления $\tilde{u}_V^*(Q_u, t)$ с линейными обратными связями по выходу объекта представляется, согласно (3.3)—(3.6), в форме (3.10)—(3.12) при синтезе особого управляющего воздействия в виде (3.6), где следует принять $N_1 = r = M = 2$ в (3.3)—(3.5) при наличии двух измерителей управляемой величины в точках $x_{u1}, x_{u2} \in [0, 1]$:

$$\tilde{u}_V^*(Q_u, t) = \begin{cases} u_{\max}, t \in [0, t_1^*), & (4.13) \\ \eta^* \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t), t_1^* < t < t_2^*, & (4.14) \\ u_{\min}, t \in (t_2^*, t^*]. & (4.15) \end{cases}$$

Реализация закона управления (4.13)—(4.15) обеспечивается путем перехода к алгоритмам (4.13), (4.15) в точках сопряжения t_1^* , t_2^* при достижении расчетных значений $Q_u(x_u, t)$ при $t = t_j^*$, $j = 1, 2$, определяемых предварительным решением задачи программного управления.

На рис. 3, 4 представлены некоторые расчетные результаты, полученные для исходных данных, указанных в разд. 4.1, при выборе $x_{u1} = 0$, $x_{u2} = 1$. На рис. 3 показано конечное распределение температуры по толщине пластины при точности $\tilde{\varepsilon}_{\min}^{(2)}$ равномерного приближения $Q(x, t_1^*, t_2^*)$ к Q^{**} .

На рис. 4 приведено оптимальное управление $\tilde{u}_V^*(Q_u, t)$, изменяющееся во времени по алгоритму (4.13)—(4.15) в зависимости от текущих значений измеряемых сигналов обратной связи по величинам $Q(0, t)$ и $Q(1, t)$ с автоматическим контролем точек сопряжения t_1^* и t_2^* по расчетным значениям $Q(0, t_j^*)$, $j = 1, 2$, которые находятся при расчете программного управления.

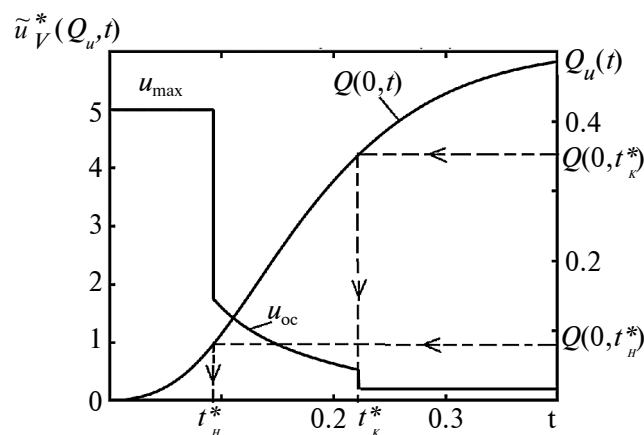


Рис. 4. Зависимость управляющего воздействия от изменяющихся во времени сигналов обратной связи ($t_1^* = 0.0927$, $t_2^* = 0.222$, $u_{\max} = 5.0$, $u_{\min} = 0.2$)

Заключение. Предлагаемый метод решения задачи минимизации интегральной квадратичной оценки управляемой величины в системах с распределенными параметрами параболического типа разработан применительно к оценкам целевых множеств в равномерной метрике. Найдены в явной параметризованной форме выражения для нестесняемых ограничениями особых оптимальных управляющих воздействий. Предложен базирующийся на этом результате способ определения структуры программного управляющего воздействия и метод его компоновки из особых и неособых участков с точностью до моментов их сопряжения, определяемых предварительным решением задачи программного управления. Полученные уравнения оптимальных регуляторов сводятся на особых участках к линейным алгоритмам обратной связи по наблюдаемому состоянию управляемой величины, которые дополняются переключениями на предельно допустимые управляющие воздействия при достижении в точках сопряжения расчетных значений измеряемого выхода объекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. СПб.: Профессия, 2003.
2. Ким Д. П. Теория автоматического управления. М.: Физматлит, 2007.
3. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
4. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. II // АиТ. 1959. № 11. С. 1441—1458.
5. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.
7. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.

8. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // Некоторые вопросы теории колебаний и теории оптимального управления. Тр. МИАН СССР, М197. М.: Наука, 1991. С. 85—166.
9. Сухинин Б. В., Сурков В. В., Филимонов Н. Б. Феномен Фуллера в задачах аналитического конструирования оптимальных регуляторов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. № 7. С. 339—348.
10. Берцанский Я. М. Релейные и особые участки оптимальных траекторий в задаче с уравнением параболического типа // АиТ. 2003. № 2. С. 3—10.
11. Зеликин М. И., Манита Л. А. Накопление переключений управления в задачах с распределенными параметрами // Современная математика. Фундаментальные направления. 2006. Т. 19. С. 78—113.
12. Сумин В. И. Сильное вырождение особых управлений принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестн. ТГУ. 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1452—1461.
13. Рапопорт Э. Я. Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000.
14. Рапопорт Э. Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2009.
15. Рапопорт Э. Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Metallurgia, 1993.
16. Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я. Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 3. С. 22—33.
17. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
18. Рапопорт Э. Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2003.
19. Коваль В. А. Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. Саратов: Саратовский гос. техн. ун-т, 1997.
20. Егоров Ю. В. Необходимые условия оптимальности в банаховом пространстве // Математический сборник (новая серия). 1964. Т. 64(106). № 1. С. 79—101.
21. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 2021.
22. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
23. Рапопорт Э. Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2005.
24. Летов А. М. Динамика полета и управления. М.: Наука, 1969.
25. Летов А. М. Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981.
26. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. М.: Наука, 2012.