

УДК 62-40

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ИЗ ИМПУЛЬСНОЙ ТЕХНИКИ

© 2024 г. Р. В. Хачатуров^{а, *}

^аФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: rv_khach@yahoo.ie

Поступила в редакцию 17.06.2023 г.

После доработки 21.06.2023 г.

Принята к публикации 31.08.2023 г.

Рассмотрена обратная задача с распределенными параметрами для процесса самофокусировки цилиндрических рентгеновских импульсов в плазме, описана математическая модель исследуемого процесса в цилиндрической системе координат, учитывающая симметрию импульса относительно направления его распространения. Проведено сравнение с аналогичным процессом в случае “плоских” импульсов, представлен вычислительный метод решения прямой задачи взаимодействия плазмы и импульса при заданных значениях параметров, доказан второй порядок аппроксимации и асимптотическая устойчивость построенной разностной схемы. Предложено использование метода множества эквивалентности для решения обратной задачи определения начальных параметров плазмы и импульса по форме прошедшего через нее цилиндрического рентгеновского импульса и динамике его максимальной интенсивности. На примере данной задачи описан алгоритм применения метода множества эквивалентности для решения обратных задач.

Ключевые слова: обратные задачи, метод множества эквивалентности (ММЭ), математическое моделирование, цилиндрические рентгеновские импульсы в плазме, самофокусировка.

DOI: 10.31857 / S0002338823060069, EDN: GQJTL P

INVERSE PROBLEM FOR A DISTRIBUTED SYSTEM FROM PULSE TECHNOLOGY

R. V. Khachaturov^{а, *}

^аFederal Research Center “Computer Science and Control”,

Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia

*e-mail: rv_khach@yahoo.ie

An inverse problem with distributed parameters for the process of the self-focusing of cylindrical X-ray pulses in a plasma is considered, and a mathematical model of the studied process in a cylindrical coordinate system is described, taking into account the symmetry of the pulse relative to the direction of its propagation. A similar process in the case of plane pulses is compared, a computational method for solving the direct problem of interaction between the plasma and pulse for the given parameter values is presented, the second order of approximation and the asymptotic stability of the constructed difference scheme are proved. It is proposed to use the equivalence set method to solve the inverse problem of determining the initial parameters of the plasma and pulse from the shape of a cylindrical X-ray pulse passing through it and the dynamics of its maximum intensity. Using this problem as an example, an algorithm for using the equivalence set method to solve inverse problems is described.

Keywords: inverse problems, set of equivalence method (SEM), mathematical modeling, cylindrical X-ray pulses in plasma, self-focusing

Введение. Изучается обратная задача с распределенными параметрами для процесса самофокусировки цилиндрических рентгеновских импульсов в плазме. Обратные задачи подробно рассматривались различными авторами в работах [1–20]. В этой статье описывается применение метода множества эквивалентности для решения обратных задач на примере задачи о самофокусировке цилиндрических рентгеновских импульсов в плазме. Кратко изложим физи-

ческую суть исследуемого процесса. Самофокусировка импульсов рентгеновского излучения в плазме происходит вследствие действия пондеромоторных сил, вытесняющих свободные электроны плазмы из области высокой интенсивности импульса в область меньшей интенсивности, в сочетании с отрицательной диэлектрической проницаемостью плазмы для рентгеновского излучения, так как его несущая частота больше плазменной [21–23]. Рентгеновские лазеры и другие источники сверхкоротких рентгеновских импульсов высокой интенсивности [21–23] получают все большее распространение в различных областях науки и технологии, поэтому математическое моделирование сложных процессов их взаимодействия с веществом становится все более необходимым. Для теоретического исследования этих процессов необходимо разрабатывать математические модели, учитывающие нелинейные эффекты взаимодействия рентгеновского импульса с плазмой, в том числе динамику электронной компоненты плазмы. Для этого целесообразно использовать накопленный опыт математического моделирования различных физических, химических, космологических и других явлений и процессов [24–64]. Одной из наиболее важных характеристик импульса является его пространственная форма. В работах [24–26] рассматривались плоские импульсы, т.е. предполагалось, что интенсивность импульса вдоль одной из ортогональных поперечных координат Y изменяется существенно медленнее, чем вдоль другой поперечной координаты X . Поэтому производными по Y можно было пренебречь, и задача становилась одномерной по поперечной координате X , а в целом — трехмерной (с учетом продольной координаты Z , вдоль которой распространяется импульс, и времени T). Такая модель вполне соответствует некоторым реальным физическим задачам и практическим экспериментам, однако на практике нередко используются импульсы, не обладающие указанным свойством, но осесимметричные относительно направления своего распространения. Более того, в любой фиксированный момент времени T_0 для любой точки Z_0 на оси OZ на равном расстоянии от оси OZ в плоскости XZ_0Y интенсивность таких импульсов является постоянной величиной, т.е. не зависит от угла в цилиндрической системе координат. Импульсы, обладающие указанным свойством, будем в дальнейшем называть цилиндрическими. Данная работа посвящена математическому моделированию самофокусировки цилиндрических импульсов в плазме, сравнению со случаем плоских импульсов и применению метода множества эквивалентности для решения соответствующих некорректных обратных задач.

1. Физическая постановка задачи и математическая модель. В соответствии с уравнениями Максвелла векторы напряженностей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и векторный потенциал $\mathbf{A}$ переменного электромагнитного поля, распространяющегося в непроводящей среде, удовлетворяют следующему волновому уравнению:

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

где $\Delta = \nabla^2 = \text{div grad}$ — оператор Лапласа (лапласиан), $v = c / \sqrt{\epsilon \mu}$ — фазовая скорость электромагнитной волны в среде, c — скорость света в вакууме, ϵ и μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

В декартовых координатах проекции векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{A}$ на оси OX , OY , OZ также удовлетворяют уравнению (1.1). Для всех сред, кроме ферромагнитных, $\mu = 1$ и $v = c / \sqrt{\epsilon}$. Поэтому уравнение для амплитуды $A_0(x, y, z, t)$ падающего на плазму рентгеновского импульса в декартовых координатах будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} = 0. \quad (1.2)$$

Представим комплексную функцию амплитуды падающего на плазму рентгеновского импульса в виде

$$A_0(x, y, z, t) = A(x, y, z, t) \exp[i(kz - \omega t)], \quad (1.3)$$

где $A_0(x, y, z, t)$ — медленно меняющаяся амплитуда импульса, ω — несущая частота импульса, $k = \omega / c$ — проекция волнового вектора на ось OZ , i — мнимая единица.

Подставляя выражение (1.3) в уравнение (1.2) и полагая из физики процесса, что медленно меняющаяся амплитуда $A_0(x, y, z, t)$ удовлетворяет условиям

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \ll \kappa \left| \frac{\partial A}{\partial z} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right| \ll \omega \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right|,$$

получаем для нее следующее уравнение:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial z} - i \frac{c^2}{2\omega} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \kappa^2 (\epsilon - 1) A \right] = 0, \quad (1.4)$$

где диэлектрическая проницаемость ϵ определяется выражением

$$\epsilon = \epsilon(x, y, z, t) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega(\omega - 2i\delta_e)} n(x, y, z, t).$$

Здесь используются следующие обозначения: $n(x, y, z, t)$ — концентрация свободных электронов плазмы, e и m — заряд и масса покоя электрона, $\delta_e = 1/\tau_e$ — эффективная частота соударений, τ_e — средняя продолжительность свободного пробега электронов в плазме.

Важно отметить, что для рентгеновского излучения его несущая частота $\omega \gg \delta_e$ и диэлектрическая проницаемость $|\epsilon| < 1$, вследствие чего фазовая скорость распространения волн рентгеновского излучения в плазме $v > c$.

Считая, что продольный пространственный размер импульса $L_p = c\tau_p$ (τ_p — длительность импульса) много больше его поперечного размера $d \ll L_p$, будем описывать движение свободных электронов плазмы в двумерном квазигазодинамическом приближении в плоскости OXY , перпендикулярной направлению распространения импульса OZ . Движением ионов плазмы при коротких длительностях рентгеновского импульса можно пренебречь. В этом случае уравнения движения плазмы имеют следующий вид:

$$m \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \text{grad } \mathbf{V} \right) = - \frac{2kT}{n} \text{grad}(n) - e\mathbf{E} - \frac{e^2}{4mc^2} \text{grad}|A|^2, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{V}) = 0, \quad (1.6)$$

$$\text{div}\mathbf{E} = - \frac{4\pi e}{\epsilon_0} (n - n_0), \quad (1.7)$$

где n и $\mathbf{V}$ — концентрация и скорость свободных электронов плазмы, $\mathbf{E}$ — вектор напряженности кулоновского электрического поля, n_0 — равновесное значение концентрации электронов, ϵ_0 — низкочастотная диэлектрическая проницаемость.

Операторы grad и div в уравнениях (1.5) — (1.7) действуют в плоскости независимых переменных x и y , перпендикулярной направлению распространения импульса, и соответственно не содержат производных по продольной координате z .

Уравнение (1.5) было выведено в предположении, что электронная температура T остается постоянной, а давление P совпадает с давлением идеального газа электронов: $P = 2kTn$. Последний член в правой части (1.5) есть пондеромоторная сила $\mathbf{F} = -\text{grad}(U)$, где пондеромоторный потенциал $U(x, y, z, t)$ определяется выражением

$$U(x, y, z, t) = \frac{e^2}{4mc^2} |A(x, y, z, t)|^2.$$

Уравнение (1.6) следует из закона сохранения массы и заряда свободных электронов плазмы в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(p\mathbf{V}) = 0, \quad p = p(x, y, z, t) = n(x, y, z, t)e,$$

где p (не путать с ρ) — плотность зарядов свободных электронов плазмы.

Выражение (1.7) выводится из уравнений Максвелла для вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, возникающего в результате нарушения квазинейтральности плазмы в процессе прохождения импульса:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon_0} p_0, \quad p_0 = -e(n - n_0).$$

Уравнения (1.4)–(1.7) представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для четырех функций

$$(E, C, z, t), V(x, C, z, t), n(E, C, z, t), E(E, C, z, t).$$

Эта система описывает процесс самофокусировки объемного рентгеновского импульса в плазме с учетом динамики электронной компоненты плазмы в квазигазодинамическом приближении.

Перейдем в системе (1.4)–(1.7) к цилиндрическим координатам, тогда

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad t = t.$$

По определению, интенсивность цилиндрического импульса

$$I(\rho, z, t) = |A(\rho, z, t)|^2 = (\operatorname{Re} A)^2 + (\operatorname{Im} A)^2$$

и медленно меняющаяся амплитуда $A(\rho, z, t)$ обладают описанными выше свойствами симметрии относительно направления распространения импульса OZ , вследствие чего и весь исследуемый процесс приобретает указанные свойства, включая независимость от угла φ . Поэтому для цилиндрических импульсов первые и вторые частные производные функций

$$A(\rho, z, t), V(\rho, z, t), n(\rho, z, t), E(\rho, z, t)$$

по углу φ будут тождественно равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \equiv 0.$$

Учитывая сказанное, после проведения необходимых преобразований по переходу в системе уравнений (1.4)–(1.7) к цилиндрической системе координат и безразмерным нормированным величинам окончательно получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} - i\delta \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \rho} - \nu n A \right) = 0, \quad (1.8)$$

$$n \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \alpha V \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = -\alpha \frac{\partial n}{\partial \rho} - n \left(\beta E + \gamma \frac{\partial |A|^2}{\partial \rho} \right), \quad (1.9)$$

$$\rho \frac{\partial n}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial (nV\rho)}{\partial \rho} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial (E\rho)}{\partial \rho} = \rho(1-n) \quad (1.11)$$

где $A(\rho, z, t)$, $V(\rho, z, t)$, $n(\rho, z, t)$, $E(\rho, z, t)$ определены выше, α , β , γ , δ , ν — параметры модели, приведенные ниже в размерном виде, i — мнимая единица.

Система уравнений (1.8)–(1.11) дополняется следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} A(\rho, z > 0, t = 0) &= 0, \quad V(\rho, z > 0, t = 0) = 0, \\ E(\rho, z > 0, t = 0) &= 0, \quad n(\rho, z > 0, t = 0) = 1, \\ A(\rho, z = 0, t) &= \frac{1}{\cosh \rho} \exp\left[-(t - t_0)^2 / 2\right], \\ \left. \frac{\partial A}{\partial \rho}(\rho, z, t) \right|_{\rho=0, \rho \rightarrow \infty} &= 0, \quad \left. \frac{\partial n}{\partial \rho}(\rho, z, t) \right|_{\rho=0, \rho \rightarrow \infty} = 0, \\ V(\rho, z, t) \Big|_{\rho=0, \rho \rightarrow \infty} &= 0, \quad E(\rho, z, t) \Big|_{\rho=0, \rho \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

В системе (1.8)–(1.12) используется следующая нормировка независимых переменных и неизвестных функций:

$$t' = t / \tau_p, \quad z' = z / c\tau_p, \quad \rho' = \rho / d,$$

где τ_p — длительность падающего импульса, а d — его поперечный размер. При этом

$$A' = A / A_0, \quad V' = V / V_0, \quad n' = n / n_0, \quad E' = E / E_0,$$

где

$$A_0 = \sqrt{4\pi c I_0 / \omega^2}, \quad V_0 = \sqrt{2kT / m}, \quad n_0 = n(\rho, z, 0), \quad E_0 = 4\pi e n_0 d / \epsilon_0.$$

Система уравнений (1.8)–(1.12) записана в безразмерных нормированных величинах. Штрихи над ними опущены для простоты изложения:

$$\alpha = \frac{V_0 \tau_p}{d}, \quad \beta = \frac{4\pi e^2 n_0 d \tau_p}{m V_0 \epsilon_0}, \quad \gamma = \frac{\pi e^2 \tau_p I_0}{m^2 \omega^2 c V_0 d}, \quad (1.13)$$

$$\delta = \frac{c^2 \tau_p}{2d^2 \omega}, \quad \nu = \frac{\omega_p^2 d^2}{c^2},$$

где $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$ — плазменная частота, e и m — заряд и масса покоя электрона, n_0 — начальное значение концентрации свободных электронов плазмы, ϵ_0 — низкочастотная диэлектрическая проницаемость, I_0 — максимальная интенсивность входного импульса.

2. Вычислительный метод решения. Система (1.8)–(1.12) решалась разностным методом, аналогичным описанному в [25, 26]. Важным достоинством предложенных в этих работах метода и алгоритма является возможность проведения прямых (безытерационных) вычислений по симметричной и, вообще говоря, неявной разностной схеме с весами второго порядка аппроксимации. Другими словами, приведенные разностная схема и алгоритм вычислений по ней позволяют находить значения всех неизвестных функций на каждом слое по z и по t , не прибегая к итерационному процессу. Это существенно сокращает время вычислений, сохраняя при этом второй порядок аппроксимации по шагам схемы.

В пространстве независимых переменных ρ, z, t были введены сетки с шагами h, h_z, τ соответственно и построена разностная схема. Для каждого из уравнений системы (1.8)–(1.11) были составлены соответствующие симметричные разностные уравнения второго порядка аппроксимации по h, h_z, τ . Начальные и граничные условия (1.12) также были аппроксимированы не менее чем со вторым порядком.

Рассмотрим построенную разностную схему на примере наиболее сложного уравнения (1.8) для медленно меняющейся амплитуды импульса $A(\rho, z, t)$, в которое в цилиндрической системе координат по сравнению со случаем плоских импульсов вошел дополнительный оператор

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \rho}.$$

Оно было аппроксимировано разностным уравнением

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\delta} \left(\frac{B_i^j - A_i^j + B_i^{j-1} - A_i^{j-1}}{\tau} + \frac{B_i^j - B_i^{j-1} + A_i^j - A_i^{j-1}}{h} \right) = \\ & = \frac{1}{2} \Lambda \left((B_i^j + A_i^{j-1}) \right) + \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{B_{i+1}^j - B_{i-1}^j + A_{i+1}^{j-1} - A_{i-1}^{j-1}}{4h_z} \right) - \\ & - \frac{\nu}{4} \left(\overline{B_i^j + A_i^{j-1}} \right) \left(\widehat{n_i^j} + \overline{n_i^{j-1}} \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где используются следующие обозначения: A_i^j — значение сеточной функции $A(i, j, k)$ в узле (ρ_i, z_i, t_i) сетки

$$\begin{aligned} \omega_{h, h_z, \tau} &= \omega_h \times \omega_{h_z} \times \omega_\tau = \\ &= \{ (ih, jh_z, k\tau), i = \overline{0, N_\rho}, j = \overline{0, N_z}, k = \overline{0, 1, 2, 3, \dots} \}, \end{aligned}$$

$\widehat{A_i^j}$ — значение этой функции на следующем слое по времени в узле (ρ_i, z_i, t_{k+1}) ; $\overline{A_i^j} = \sigma A_{i+1}^j + (1 - 2\sigma) A_i^j + \sigma A_{i-1}^j$, где σ — вес схемы; разностный оператор Λ определяется следующим образом:

$$\Lambda(A_i^j) = (A_{i+1}^j - 2A_i^j + A_{i-1}^j) / h^2.$$

Значения веса схемы σ брались из отрезка $0 \leq \sigma \leq 1/3$. Например, при линейной интерполяции функции (ρ, z, t) на отрезке $\rho \in [\rho_{i-1}, \rho_{i+1}]$ по значениям сеточной функции A_i^j в узлах $(i-1, j, k)$, (i, j, k) , $(i+1, j, k)$ получим значение веса схемы $\sigma = 1/4$. Квадратичная интерполяция дает значение веса $\sigma = 1/6$. Как показали многочисленные вычислительные эксперименты, выбор различных значений веса схемы в диапазоне $1/6 \leq \sigma \leq 1/4$ не оказывает существенного влияния на поведение решения задачи.

Уравнения (1.9)–(1.11) были аппроксимированы аналогичным образом. Подобные разностные уравнения и безытерационный метод решения для случая плоских импульсов подробно описаны в работах [25, 26]. Таким образом, была построена нелинейная симметричная разностная схема с весами, аппроксимирующая систему (1.8)–(1.12) со вторым порядком по шагам h, h_z, τ .

В конструкции рассмотренной на примере уравнения (2.1) разностной схемы часто используется аппроксимация различных функций и их производных в промежуточных точках в виде средних арифметических их значений в симметричных относительно этих точек узлах сетки. Второй порядок аппроксимации схемы вытекает из следующей теоремы, которая для общности сформулирована в применении к многомерным сеткам в пространстве R^n .

Т е о р е м а (о втором порядке аппроксимации в средней точке). Пусть даны сетки

$$\omega_{h_1} = \{x_1^{i_1} = i_1 h_1, i_1 = 0, 1, 2, \dots\}, \dots, \omega_{h_n} = \{x_n^{i_n} = i_n h_n, i_n = 0, 1, 2, \dots\}$$

и общая сетка в пространстве R^n :

$$\omega_{h_1, \dots, h_n} = \omega_{h_1} \times \dots \times \omega_{h_n} = \{(i_1 h_1, \dots, i_n h_n)\}.$$

Тогда если сеточные функции $y_1(i_1, \dots, i_n)$ аппроксимируют функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ со вторым или бóльшим порядком по шагам $h_1, \dots, h_n$ сетки $\omega_{h_1, \dots, h_n}$ в узлах $(i_1, \dots, i_n)$ и $(i_1 + S_1, \dots, i_n + S_n)$ соответственно, где $S_1, \dots, S_n$ — целые числа, то сеточная функция $g(i_1, \dots, i_n)$, определяемая уравнением

$$g(i_1, \dots, i_n) = [y_1(i_1, \dots, i_n) + y_2(i_1 + S_1, \dots, i_n + S_n)] / 2,$$

будет аппроксимировать функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ со вторым порядком по шагам $h_1, \dots, h_n$ сетки $\omega_{h_1, \dots, h_n}$ в средней точке

$$M = (h_1(i_1 + S_1/2), \dots, h_n(i_n + S_n/2)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим прямую $l \in R^n$, определяемую следующим параметрическим уравнением:

$$l(t) = t \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_{n-1} \\ i_n \end{pmatrix} (h_1, \dots, h_n), \quad t \in R^1.$$

Введем на этой прямой вспомогательную сетку ω_τ :

$$\omega_\tau = \left\{ \begin{array}{l} x_1^j = (jS_1 + i_1)h_1 \\ x_2^j = (jS_2 + i_2)h_2 \\ \circ \circ \circ \\ x_n^j = (jS_n + i_n)h_n, \\ |l(0), l(j)| = \tau j, j = 0, 1, \dots \end{array} \right\},$$

где шаг сетки $\tau = \sqrt{(h_1 S_1)^2 + \dots + (h_n S_n)^2}$.

Отметим, что узлы $(i_1, \dots, i_n)$ общей сетки $\omega_{h_1, \dots, h_n}$ совпадают с узлами $j = 0$ и $j = 1$ вспомогательной сетки ω_τ и множество всех узлов сетки ω_τ принадлежит множеству узлов сетки $\omega_{h_1, \dots, h_n}$ ($\omega_\tau \in \omega_{h_1, \dots, h_n}$).

Разложим в ряд Тейлора функцию $g(i_1, \dots, i_n)$ в точке $M = (h_1(i_1 + S_1/2), \dots, h_n(i_n + S_n/2)) = l(1/2)$ вдоль прямой $l(t)$. По условию теоремы

$$\begin{aligned}
g(i_1, \dots, i_n) &= [y_1(i_1, \dots, i_n) + y_2(i_1 + S_1, \dots, i_n + S_n)] / 2 = \\
&= [f(h_1 i_1, \dots, h_n i_n) + f(h_1(i_1 + S_1), \dots, h_n(i_n + S_n)) + O(h_1^2, \dots, h_n^2)] / 2 = \\
&= [f(l(0)) + f(l(1))] / 2 + O(h_1^2, \dots, h_n^2) = \\
&= \frac{1}{2} [f(l(1/2)) - [f(l(1/2))]_l' \tau / 2 + [f(l(1/2))]_{ll}'' \tau^2 / 8 + o(\tau^2)] + \\
&+ \frac{1}{2} [f(l(1/2)) + [f(l(1/2))]_l' \tau / 2 + [f(l(1/2))]_{ll}'' \tau^2 / 8 + o(\tau^2)] + \\
&+ O(h_1^2, \dots, h_n^2) = \\
&= f(l(1/2)) + [f(l(1/2))]_{ll}'' \tau^2 / 8 + o(\tau^2) + O(h_1^2, \dots, h_n^2) = \\
&= f(M) + O((h_1 S_1)^2 + \dots + (h_n S_n)^2) + \\
&+ O(h_1^2, \dots, h_n^2) = f(M) + O(h_1^2, \dots, h_n^2).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Анализ результатов вычислительных экспериментов. В результате проведенных расчетов по построенной разностной схеме было исследовано поведение решения задачи (1.8)–(1.12) в зависимости от параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ что позволило найти физически достижимые значения параметров, при которых интенсивность как плоских (рис. 1), так и цилиндрических (рис. 2) импульсов существенно возрастает. Подробное описание зависимости поведения решения от параметров задачи в случае плоских импульсов приведено в работах [25, 26]. Проведенные вычислительные эксперименты для цилиндрических импульсов при различных значениях шагов схемы h, h_z, τ , размерах сеток по осям ρ и z и значениях параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ подтвердили на практике устойчивость и сходимость предложенной разностной схемы, а также надежность и эффективность разработанного безытерационного алгоритма вычислений.

Сравнение полученных результатов с реальными физическими экспериментами показало высокую точность предлагаемой математической модели и метода решения соответствующей прямой задачи. В данной работе исследовались пикосекундные рентгеновские импульсы. В ходе многочисленных вычислительных экспериментов были рассмотрены различные значения обобщенных параметров задачи $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$. В абсолютных величинах длительность импульса τ_p выбиралась в диапазоне от 0,5 до 10 пс (10^{-12} с), линейная несущая частота рентгеновского импульса ν — в диапазоне от $5 \cdot 10^{17}$ до $5 \cdot 10^{19}$, что соответствует диапазону изменения циклической частоты $\omega = 2\pi\nu$ от $\pi \cdot 10^{18}$ до $\pi \cdot 10^{20}$. Таким образом, длительность импульса была больше времени одного колебания волны рентгеновского излучения приблизительно в 10000 — 10000000 раз.

Результаты вычислений представлены на рис. 1 и 2, иллюстрирующих процесс самофокусировки плоских и цилиндрических импульсов соответственно. Кривые в нижней части графиков показывают значения интенсивности вдоль оси импульса в направлении его распространения OZ . Максимальные значения интенсивности достигаются, как правило, на этой прямой.

На рис. 1 показана пространственная динамика интенсивности плоского импульса $I(x, z, t)$ по мере его продвижения в плазме в различные моменты времени:

$t = t_0 = 2.0$ (рис. 1, а, максимальная интенсивность на входе в плазму $\max I(x, z, t_0) = I_0 = 1.0$),

$t = t_1 = 2.9$ (рис. 1, б),

$t = t_2 = 3.1$ (рис. 1, в),

$t = t_3 = 3.4$ (рис. 1, д),

$t = t_4 = 3.85$ (рис. 1, е, максимальная интенсивность, достигнутая в результате самофокусировки, $\max_{x,z} I(x, z, t_4) = I_{\max} \approx 10.5$).

Как видно из графиков, максимальная интенсивность импульса на выходе из плазмы увеличилась в 10.5 раз. При этом брались следующие значения параметров задачи:

$$\alpha = 1.0, \beta = 1.0, \gamma = 0.25, \delta = 0.1, \nu = 300. \quad (3.1)$$

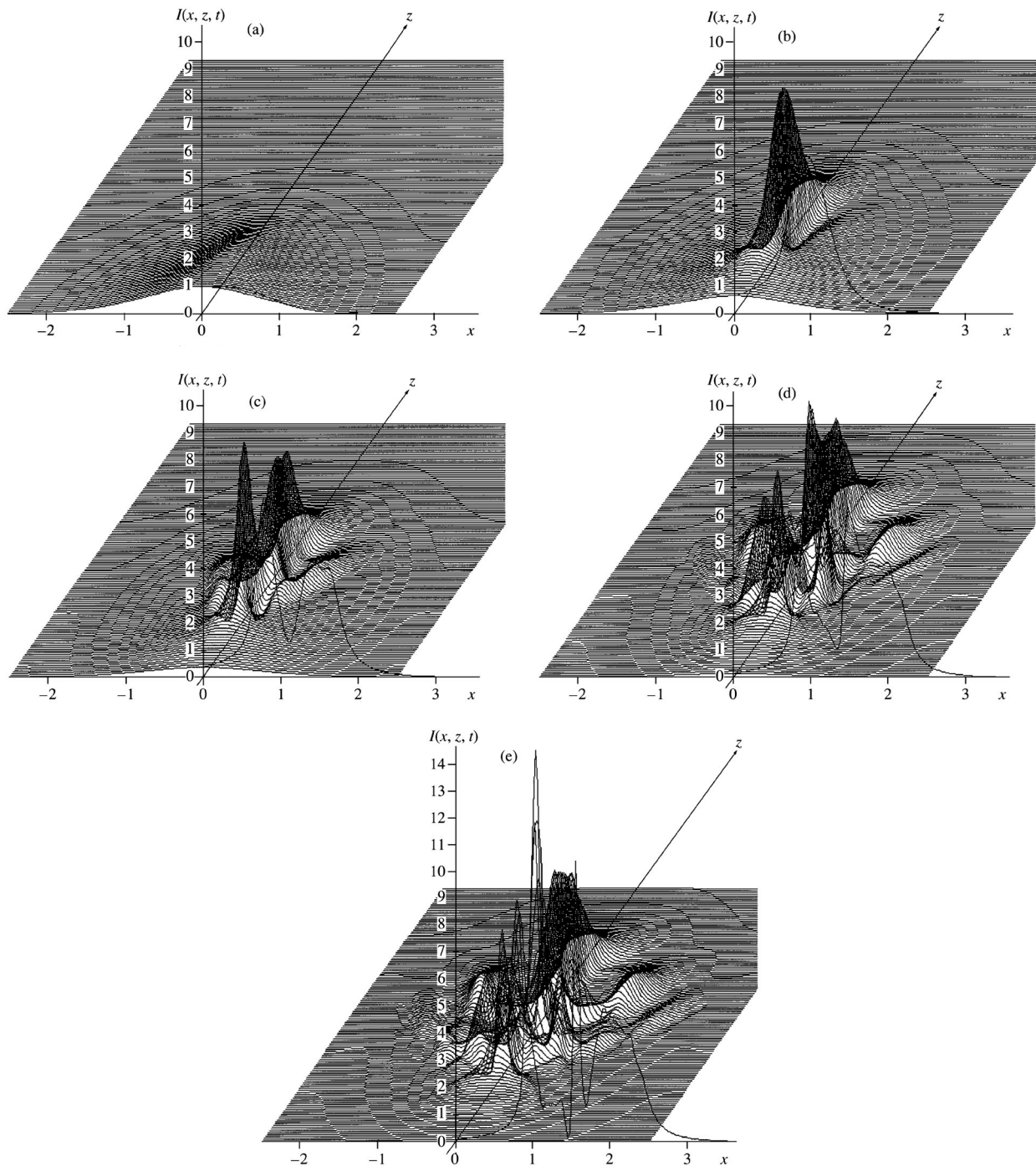


Рис. 1. Иллюстрация динамики интенсивности «плоского» импульса $I(x, z, t)$ при одинаковых значениях параметров задачи $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ в разные моменты времени: $t = t_0 = 2.0$ (a), $t = t_1 = 2.9$ (b), $t = t_2 = 3.1$ (c), $t = t_3 = 3.4$ (d), $t = t_4 = 3.85$ (e)

Рисунок 2 иллюстрирует исследуемый процесс в случае объемных, цилиндрических импульсов. Трехмерные графики интенсивности цилиндрического импульса $I(\rho, z, t)$ соответствуют следующим моментам времени:

$t = t_0 = 2.0$ (рис. 2, а), максимальная интенсивность на входе в плазму $\max_{\rho, z} I(\rho, z, t_0) = I_0 = 1.0$,

$t = t_1 = 2.9$ (рис. 2, б),

$t = t_2 = 3.1$ (рис. 2, в),

$t = t_3 = 3.4$ (рис. 2, г),

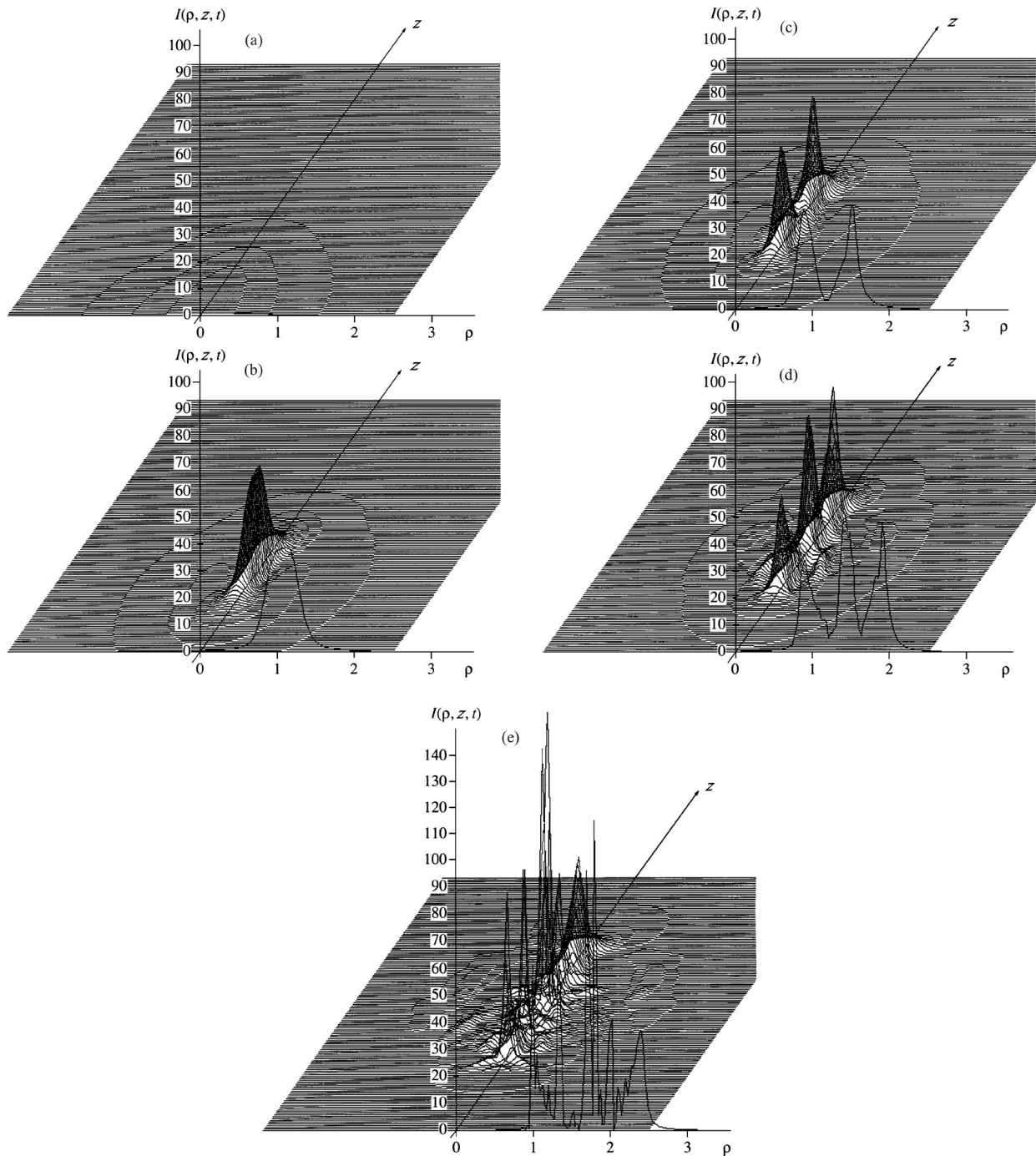


Рис. 2. Иллюстрация динамики интенсивности цилиндрического импульса $I(x, z, t)$ при одинаковых значениях параметров задачи $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ в разные моменты времени: $t = t_0 = 2.0$ (a), $t = t_1 = 2.9$ (b), $t = t_2 = 3.1$ (c), $t = t_3 = 3.4$ (d), $t = t_4 = 3.85$ (e)

$t = t_4 = 3.85$ (рис. 2, e, максимальная интенсивность, достигнутая в результате самофокусировки, $\max I(\rho, z, t_4) = I_{\max} \approx 115$).

На этих пяти графиках тонкой линией вдоль оси ρ показан график интенсивности центральной части импульса $I(\rho = 0, z, t = t_{i=0,\dots,4})$. Из графиков видно, что в различные моменты времени максимальная интенсивность центральной части импульса достигает следующих значений:

$$\begin{aligned} I_{\max}(\rho = 0, z, t = t_0 = 2.0) &= 1.0, \\ I_{\max}(\rho = 0, z, t = t_1 = 2.9) &\approx 37, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\max}(\rho = 0, z, t = t_2 = 3.1) &\approx 40, \\ I_{\max}(\rho = 0, z, t = t_3 = 3.4) &\approx 50, \\ I_{\max}(\rho = 0, z, t = t_4 = 3.85) &\approx 115. \end{aligned}$$

Итак, в случае цилиндрического импульса его максимальная интенсивность возросла в 115 раз. Значения параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ те же самые (3.1), что и в случае плоского импульса из рис. 1. Для вычисления функций, изображенных на рис. 1 и 2, брались следующие шаги разностных схем: $h = h_z = \tau = 0.025$.

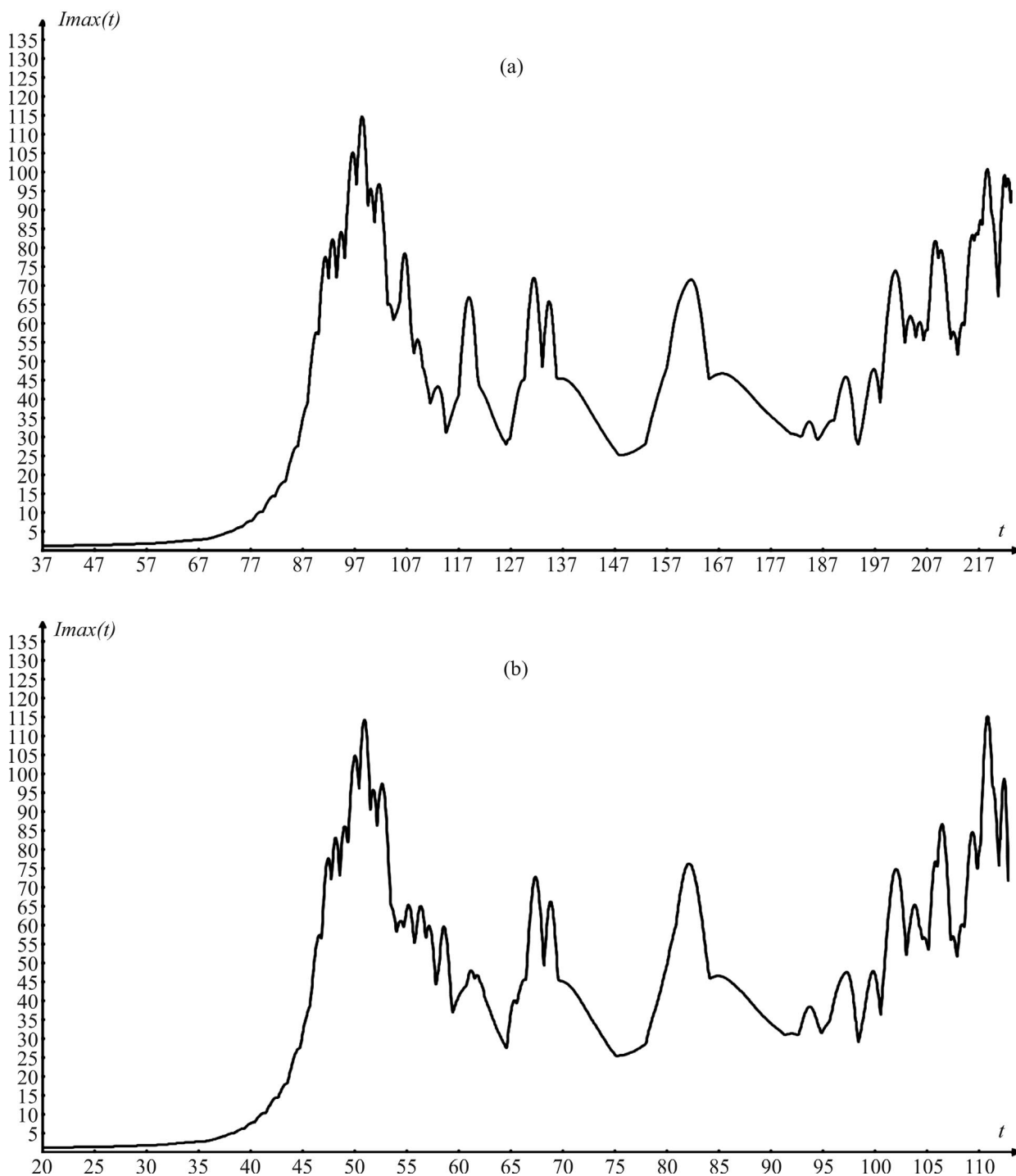


Рис. 3. Динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса при δ равном: 0.001 (a), 0.002 (b),

4. Асимптотическая устойчивость разностной схемы. Приведем пример, экспериментально подтверждающий асимптотическую устойчивость используемой разностной схемы в случае цилиндрических импульсов. Как и в случае плоских импульсов, параметр δ определяет дифракционное распыление пучка, и поэтому из физических соображений обратно пропорционален длине фокусировки, т.е. длине, на которой наступает максимальное сжатие пучка. После этого начинается режим насыщения, во время которого максимальная интенсивность импульса циклически изменяется, как это видно из графиков на рис. 3,а-j, полученных

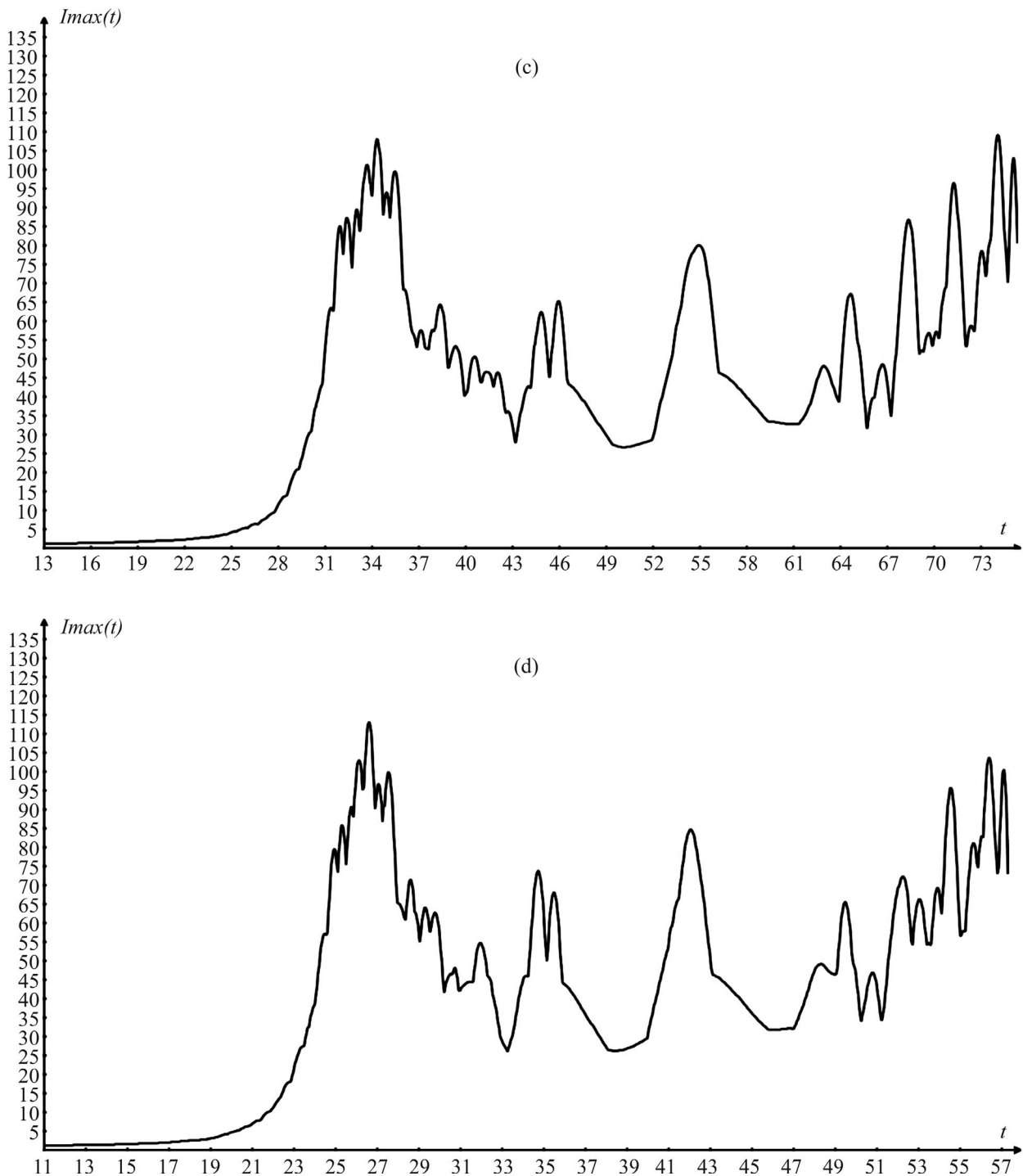


Рис. 3 (продолжение). Динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса при δ равном: 0.003 (c), 0.004 (d)

в результате вычислений. На этих графиках показана динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса на дальних дистанциях при различных значениях параметра δ , отвечающего за длину фокусировки.

Из графиков на рис. 3, а-ж видно, что при увеличении значения параметра δ длина фокусировки пропорционально уменьшается. Такое поведение решения свидетельствует также об асимптотической устойчивости построенной разностной схемы, так как все остальные параметры, кроме δ , остаются неизменными, при том что график на рис. 3, а рассчитывается

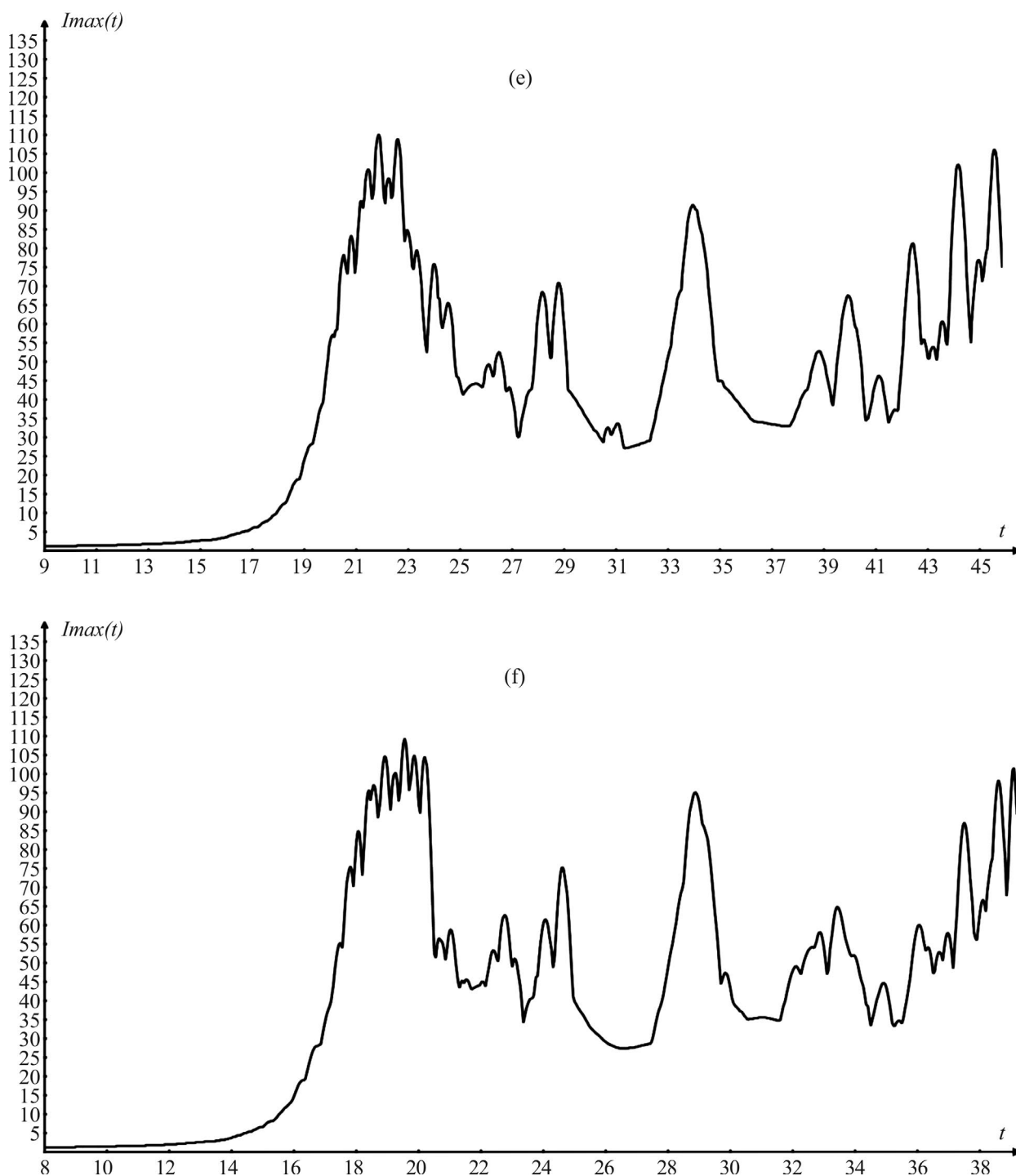


Рис. 3 (продолжение). Динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса при δ равном: 0.005 (е), 0.006 (ф)

в 10 раз дольше, чем на рис. 3, j, т.е. для его вычисления надо сделать в 10 раз больше шагов по времени t и глубине z . Некоторые отличия графиков на рис. 3, a-j при различных значениях параметра δ связаны с существенной нелинейностью процесса самофокусировки цилиндрических импульсов в плазме, а также с тем, что (как и в случае плоских импульсов) чем больше параметр δ , тем меньше длина фокусировки и тем менее плавно свободные электроны плазмы «отслеживают» изменения формы импульса.

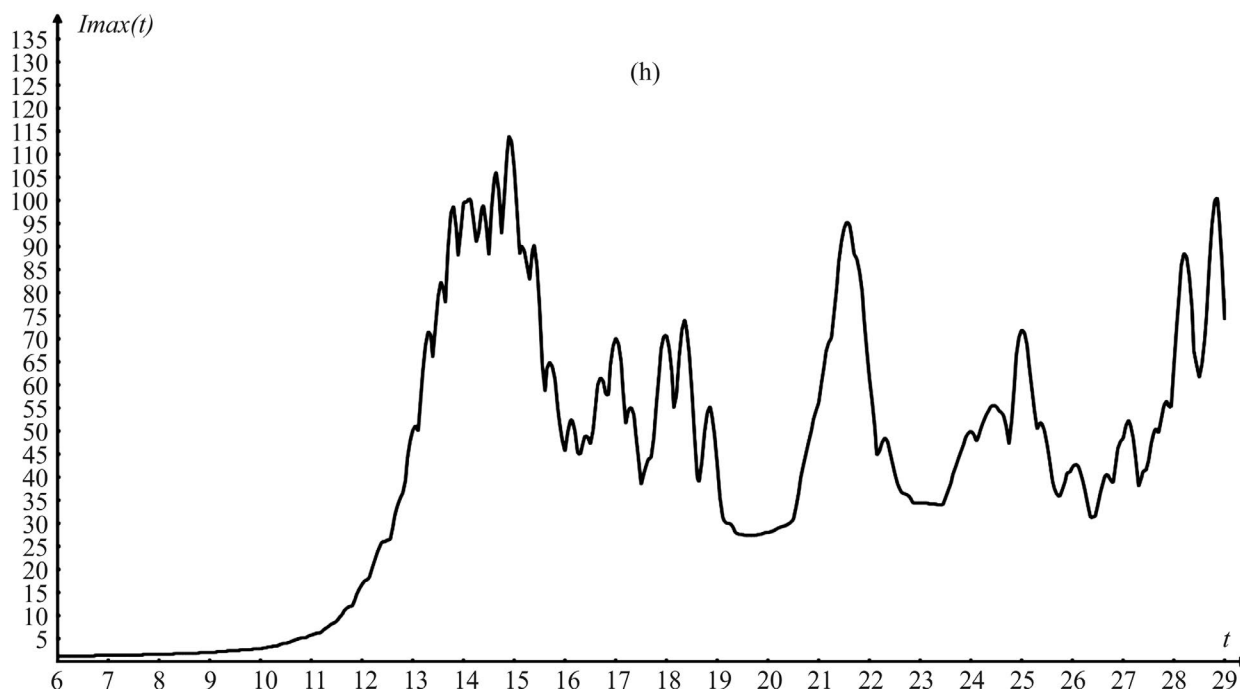
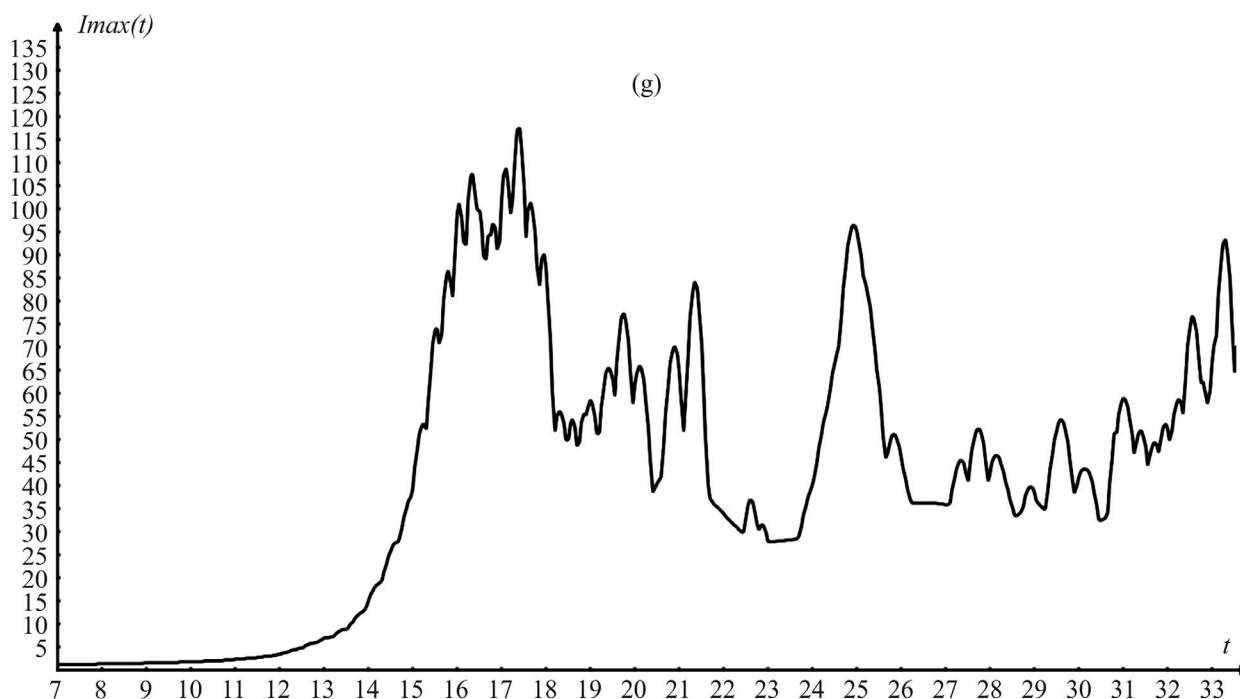


Рис. 3 (продолжение). Динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса при δ равном: 0.007 (g), 0.008 (h)

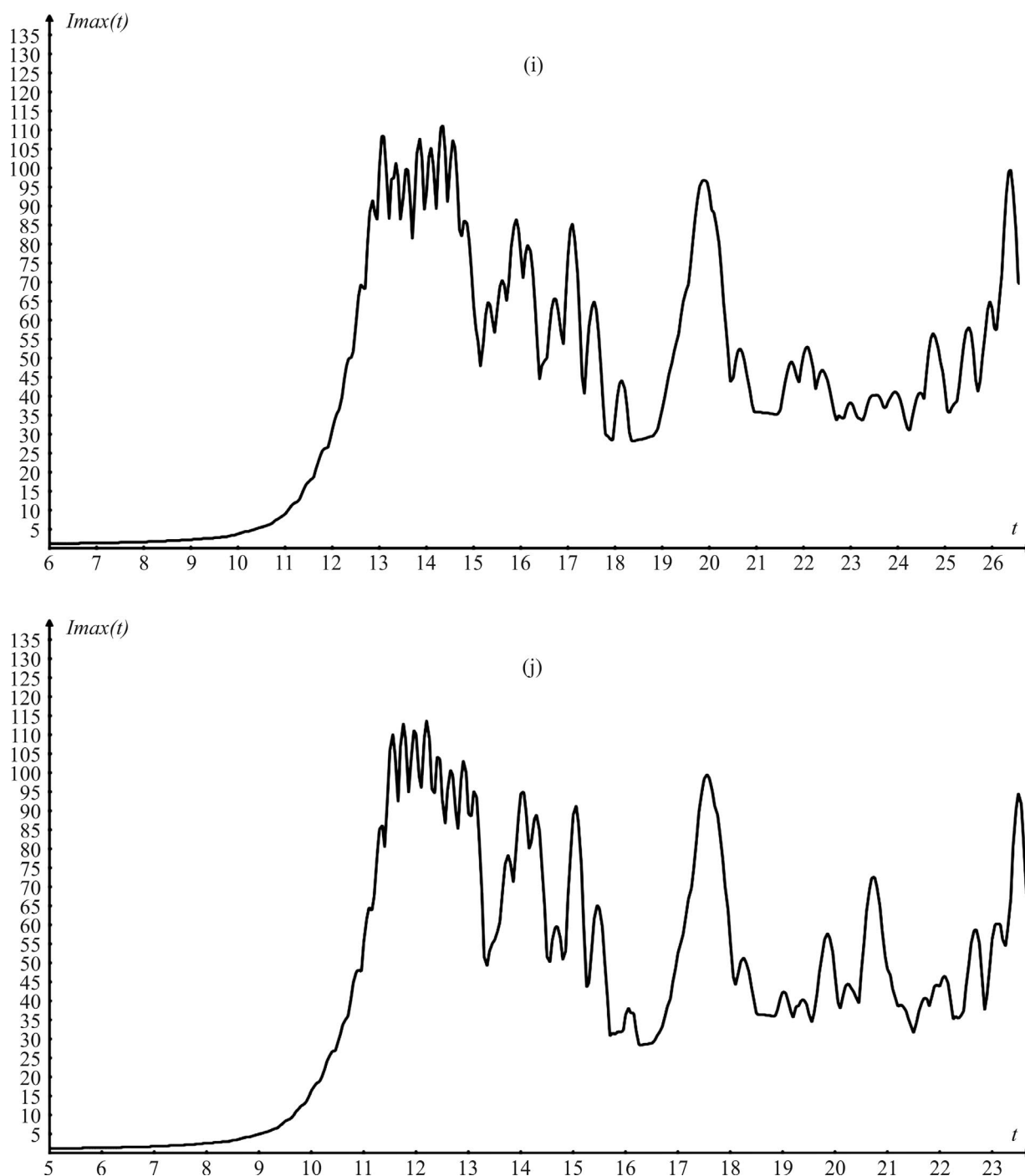


Рис. 3 (окончание). Динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса при δ равном: 0.009 (i), 0.010 (j)

5. Аналитическое обоснование усиления эффекта самофокусировки цилиндрических импульсов по сравнению с плоскими. Из рис. 1 и 2 видно, что при одинаковых значениях параметров задачи в результате самофокусировки интенсивность цилиндрического импульса увеличивается на порядок больше, чем интенсивность плоского.

Как показали многочисленные вычислительные эксперименты, это является весьма характерным при сравнении процессов самофокусировки плоских и цилиндрических рентгеновских импульсов в плазме. В результате такого сравнения была выявлена следующая закономерность:

Если в процессе самофокусировки интенсивность плоского импульса увеличилась в M раз, то при тех же значениях параметров задачи интенсивность цилиндрического импульса увеличится приблизительно в M^2 раз.

Этот результат на качественном уровне объясняется тем, что по физическому смыслу задачи в процессе самофокусировки должен выполняться закон сохранения энергии рентгеновского импульса. В цилиндрическом случае по сравнению с плоским появляется дополнительная поперечная координата, вдоль которой происходит сжатие. В связи с этим, согласно закону сохранения энергии, если при одинаковом уменьшении поперечного размера интенсивность плоского импульса увеличилась в M раз, то интенсивность цилиндрического должна увеличиться в M^2 раз, что проиллюстрировано на рис. 4.

К тем же выводам приводит сравнительный анализ уравнения для амплитуды импульса (1.8) в плоском и цилиндрическом случаях. Запишем его в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)A = i\delta \begin{cases} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \nu n A & \text{(плоский случай),} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) - \nu n A & \text{(цилиндрический случай).} \end{cases} \quad (5.1)$$

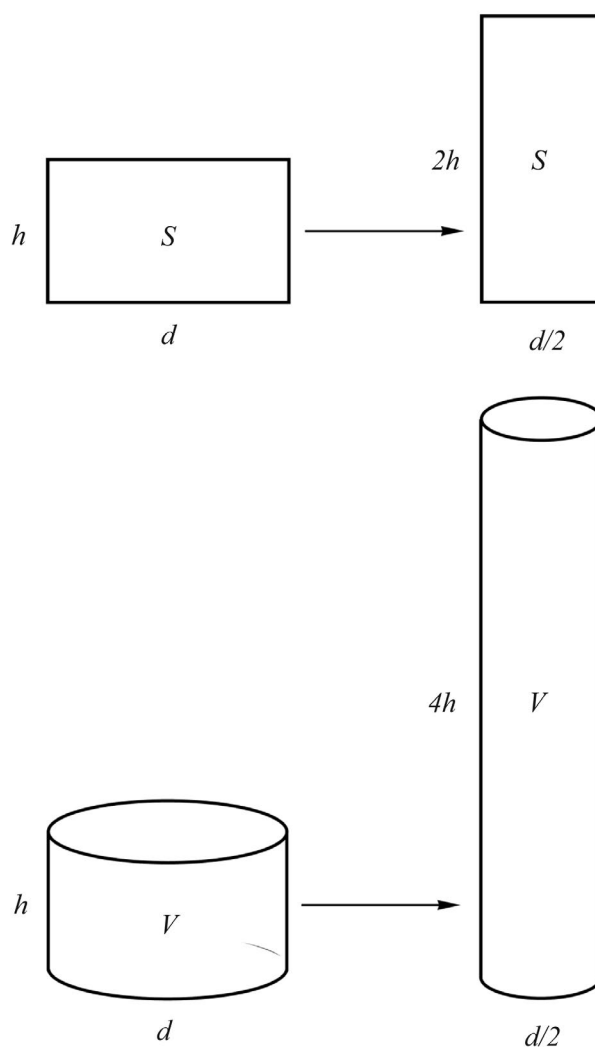


Рис. 4. Сравнение самофокусировки плоских и цилиндрических импульсов

Упростим уравнение (5.1), полагая, что функции амплитуды импульса A и концентрации свободных электронов плазмы n являются ступенчатыми по поперечным координатам и определяются следующим образом:

$$A = \begin{cases} A_1(z, t), & |x| \leq d/2 \quad (\rho \leq d/2), \\ 0, & |x| > d/2 \quad (\rho > d/2), \end{cases} \quad (5.2)$$

$$n = \begin{cases} 0, & |x| \leq d/2 \quad (\rho \leq d/2), \\ n_1(z, t), & |x| > d/2 \quad (\rho > d/2), \end{cases}$$

где $d = d(z, t)$ — поперечный размер импульса. Здесь использовался тот факт, что, как показали вычислительные эксперименты, по мере продвижения импульса пространственное распределение концентрации свободных электронов плазмы повторяет форму импульса: локальные максимумы интенсивности соответствуют локальным минимумам концентрации и наоборот. Более того, в областях достаточно высокой интенсивности импульса концентрация свободных электронов плазмы может понижаться до нуля.

Из (5.2) следует, что для любых x или ρ и значений параметра v последнее слагаемое в правой части (5.1) будет равно нулю: $vnA = 0$. Интегрируя (5.1) по x в плоском случае и по ρ в цилиндрическом, с учетом (1.1) получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \int_{-d/2}^{d/2} A dx = 0 \quad (\text{плоский случай}), \quad (5.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \int_0^{d/2} A \rho d\rho = 0 \quad (\text{цилиндрический случай}).$$

Из (5.3) вытекает, что вдоль характеристики $z = t$ выполняются следующие законы сохранения:

$$\int_{-d/2}^{d/2} A dx = C_1 = \text{const} \quad (\text{плоский случай}), \quad (5.4)$$

$$\int_0^{d/2} A \rho d\rho = C_2 = \text{const} \quad (\text{цилиндрический случай}).$$

Подставив выражение для функции A из (5.2) в (5.4), после интегрирования окончательно получим

$$A_1(z = t) = C_1/d(z = t) \quad \text{для плоских импульсов}, \quad (5.5)$$

$$A_1(z = t) = 8C_2/d^2(z = t) \quad \text{для цилиндрических импульсов}.$$

Итак, из (5.5) видно, что при уменьшении поперечного размера импульса d в N раз амплитуда импульса A_1 должна увеличиться вдоль характеристики $z = t$ в плоском случае в N раз, а в цилиндрическом — в N^2 раз, как это схематически показано на рис. 4.

Аналогичное соотношение справедливо и для интенсивностей плоского и цилиндрического импульсов. В самом деле, интенсивность в данном случае определяется просто как квадрат амплитуды $I = A^2$, поэтому если амплитуды плоского и цилиндрического импульсов увели-

чилились в N и N^2 раз соответственно, то их интенсивности увеличатся соответственно в N^2 и N^4 раз. Вводя обозначение $M = N^2$, получаем искомое соотношение для интенсивностей в плоском и цилиндрическом случаях.

Разумеется, пространственная форма реального импульса может быть весьма сложной и изменяться по нелинейным законам в процессе прохождения импульса через плазму, в том числе и вдоль направления его распространения (OZ), как это видно на рис. 1 и 2. Поэтому приведенные выше рассуждения имеют приближенный характер, хотя и достаточно хорошо с качественной точки зрения поясняют полученную в результате вычислительных экспериментов закономерность.

Кроме того, сравнительный анализ рис. 1 и 2 показывает, что процесс самофокусировки цилиндрических импульсов имеет более сложный нелинейный характер по сравнению со случаем плоских импульсов: импульс разбивается на большее количество частей вдоль оси OZ , существенно больше разброс максимальных значений интенсивности различных частей импульса, получившихся в результате его взаимодействия с плазмой. При этом основная часть энергии цилиндрического импульса продолжает оставаться в его середине (рис. 2,е), энергия же плоского импульса значительно быстрее рассеивается в плазме (рис. 1,е).

Из всего сказанного выше можно сделать вывод, что эффект самофокусировки рентгеновских импульсов в плазме существенно более ярко проявляется для объемных цилиндрических импульсов. В этом случае при реально достижимых значениях параметров плазмы и начальной интенсивности импульса возможно увеличение его интенсивности более чем на два порядка. Кроме того, следует отметить, что многочисленные вычислительные эксперименты подтвердили возможность использования предложенной математической модели и разработанного численного метода для изучения достаточно тонких закономерностей исследуемого процесса.

6. Применение метода множества эквивалентности для решения обратных задач с распределенными параметрами в случае цилиндрических импульсов. Высокая точность разработанной математической модели и вычислительного метода позволяет использовать полученные результаты решения прямой задачи при различных значениях входных параметров для решения обратных задач определения начальных параметров плазмы и импульса по характеристикам прошедшего через нее цилиндрического рентгеновского импульса. Можно выделить две основные цели решения такого рода обратных задач:

- 1) определить значения начальных параметров плазмы при условии, что цилиндрический рентгеновский импульс на выходе из нее имеет определенные (измеренные) характеристики;
- 2) найти значения начальных параметров плазмы и импульса, при которых цилиндрический рентгеновский импульс на выходе из плазмы будет иметь желаемые характеристики.

Для решения этих задач целесообразно использовать обобщенный метод множества эквивалентности решения многокритериальных задач в псевдометрическом пространстве критериев [55–60]. Для определения этих критериев могут быть использованы следующие характеристики выходного импульса:

- 1) объемная форма цилиндрического импульса (по интенсивности) на выходе из плазмы в определенный момент времени;
- 2) объемная форма цилиндрического импульса (по интенсивности) на выходе из плазмы в несколько различных моментов времени;
- 3) динамика максимальной интенсивности цилиндрического импульса на выходе из плазмы за определенный промежуток времени.

Формально соответствующие критерии, по которым будет решаться обратная многокритериальная задача, в случае цилиндрических импульсов имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 F_1(I(P, \rho, z, t_1)) &= \sum_{\rho, z \in E} \left| I(P, \rho, z, t_1) - I^0(P^0, \rho, z, t_1) \right|, \\
 F_2(I(P, \rho, z, t_2)) &= \sum_{\rho, z \in E} \left| I(P, \rho, z, t_2) - I^0(P^0, \rho, z, t_2) \right|, \\
 &\quad \circ \quad \circ \quad \circ \\
 F_n(I(P, \rho, z, t_n)) &= \sum_{\rho, z \in E} \left| I(P, \rho, z, t_n) - I^0(P^0, \rho, z, t_n) \right|, \\
 F_{n+1}(Imax(P, t)) &= \sum_{t \in T} \left| Imax(P, t) - Imax^0(P^0, t) \right|,
 \end{aligned}$$

где $P = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ — набор из s интересующих нас исходных параметров плазмы и импульса. Например, это могут быть все пять обобщенных параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$. Тогда $P = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu)$. Или в него могут входить, например, начальная концентрация свободных электронов плазмы n_0 , низкочастотная диэлектрическая проницаемость плазмы ϵ_0 и несущая частота входного импульса ω . В этом случае $P = (n_0, \epsilon_0, \omega)$, а значения обобщенных параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ системы будут вычислены в соответствии со значениями n_0, ϵ_0, ω ; $P^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_s^0)$ — искомый набор из s значений интересующих нас исходных параметров плазмы и импульса; E — пространственная область определения (вычисления и измерения) функции интенсивности импульса $I(P, \rho, z, t_n)$ в момент времени $t = t_n$; $I(P, \rho, z, t_n)$ — вычисляемая в результате решения прямой задачи для каждого набора значений параметров P функция интенсивности импульса в области $\rho, z \in E$ в момент времени $t = t_n$ (рис. 3); $I^0(P^0, \rho, z, t_n)$ — эталонная (измеренная или желаемая) функция интенсивности импульса для искомого набора значений параметров P^0 в области $\rho, z \in E$ в момент времени $t = t_n$; T — промежуток времени, на котором определяется (измеряется) максимальная интенсивность рентгеновского импульса; $I_{\max}(P, t)$ — вычисляемая в результате решения прямой задачи для каждого набора значений параметров P функция максимальной интенсивности цилиндрического импульса в области $t \in T$ (рис. 3); $I_{\max}^0(P^0, t)$ — эталонная (измеренная или желаемая) функция максимальной интенсивности цилиндрического импульса для искомого набора значений параметров P^0 в области $t \in T$.

Как и в случае плоских импульсов [24–26], для решения обратной задачи определения начальных параметров плазмы и цилиндрического импульса необходимо минимизировать все эти $n + 1$ функционала. Другими словами, решить многокритериальную задачу минимизации по $n + 1$ критерию. Как было сказано выше, решать эту задачу будем обобщенным методом множества эквивалентности [56–60]. Кратко опишем этот метод.

1. По каждому из интересующих нас начальных параметров плазмы и импульса (на отрезке от минимально возможного значения этого параметра a_i до максимально возможного значения b_i) вводим регулярную сетку

$$\omega_i = \left\{ p_i^{j_i} = a_i + j_i h_i : j_i = \overline{0, L_i}; h_i = \frac{(b_i - a_i)}{L_i} \right\},$$

где L_i — число точек сетки для i -го входного параметра, h_i — соответствующий шаг этой сетки, $i = \overline{1, s}$, и общую сетку в s -мерном пространстве всех рассматриваемых параметров

$$\omega_{1, \dots, s} = \omega_1 \times \omega_2 \times \dots \times \omega_s = \left\{ (a_1 + j_1 h_1, a_2 + j_2 h_2, \dots, a_s + j_s h_s) : j_i = \overline{0, L_i} \right\}.$$

2. В каждом узле этой сетки решаем прямую задачу (1.1)(1.3) описанным разностным методом и вычисляем соответствующие значения $I(P, x, z, t_n)$.

3. Для каждого критерия F_l , $l = \overline{1, n+1}$ решаем задачу минимизации и находим соответствующий набор начальных параметров P^0 .

4. Для каждого из этих критериев находим не только оптимальные решения, но и множество решений, близких к оптимальному (т.е. отличающихся от оптимального значения не более чем на заданное число $R_l \geq 0$, $l = \overline{1, n+1}$). Для каждого значения l определяем множество $\Omega_l(R_l)$, которое является множеством всех оптимальных и близких к оптимальному решений $P^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_s^0) \in \Omega_l(R_l)$ по критерию F_l .

5. Находим множество, представляющее собой пересечение всех множеств $\Omega_l(R_l)$

$$\Omega_0(R_1, \dots, R_{n+1}) = \bigcap_{l=1}^{n+1} \Omega_l(R_l).$$

Множество $\Omega_0(R_1, \dots, R_{n+1})$ называется множеством эквивалентности с точки зрения всех критериев, так как все его элементы принадлежат одновременно всем множествам $\Omega_l(R_l)$ и являются оптимальными и близкими к оптимальным решениями по всем критериям. Любой набор начальных параметров, принадлежащий этому множеству,

$$P^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_s^0) \in \Omega_0(R_1, \dots, R_{n+1})$$

является решением задачи.

Оценка точности решения по каждому критерию F_l , $l = \overline{1, n+1}$, определяется компонентами вектора $(R_1, \dots, R_{n+1})$.

В работах [55–60] указаны способы автоматического получения заведомо непустого множества эквивалентности. Методы нахождения множества эквивалентности $\Omega_0(R_1, \dots, R_{n+1}) \neq \emptyset$ являются методами регуляризации [1] для некорректных обратных задач в псевдометрическом пространстве критериев [53–60] (даже при наличии у эксперта, принимающего решение, любого количества неформализованных критериев), а каждое решение $P^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_s^0) \in \Omega_0(R_1, \dots, R_{n+1})$ — решением такой некорректной задачи.

В самом деле, наличие $n+1$ формализованного критерия $F_l(P)$, $P \in D$, $l = \overline{1, n+1}$, позволяет на множестве D определить $n+1$ функцию расстояния между двумя элементами $P' \in D$ и $P'' \in D$:

$$R_l(P', P'') = |F_l(P') - F_l(P'')|, \quad l = \overline{1, n+1}.$$

Эти функции обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} R_l(X, X) &= 0, \quad R_l(X, Y) \geq 0, \quad R_l(X, Y) = R_l(Y, X), \\ R_l(X, Y) + R_l(Y, Z) &\geq R_l(X, Z), \quad X, Y, Z \in D, \quad l = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

Введенные нами функции являются псевдометриками, а множество D с такой метрикой называется псевдометрическим пространством. В отличие от метрического пространства, условие $R_l(X, Y) = 0$ может выполняться также и для некоторых $X \neq Y$. Поэтому в нашем случае для любых $P', P'' \in \Omega_0(R_1, \dots, R_{n+1})$ будут выполняться условия устойчивости типа Тихоновских условий для устойчивых задач [1]:

$$R_l(P', P'') \leq R_l, \quad l = \overline{1, n+1}.$$

Это означает, что расстояние $R_l(P', P'')$ между любыми двумя элементами $P', P'' \in \Omega_0(R_1, \dots, R_{n+1}) \subset D$ не превосходит заранее заданной величины R_l . Следовательно, метод множества эквивалентности $\Omega_0(R_1, \dots, R_{n+1})$ является методом, обобщающим метод регуляризации Тихонова [1] для некорректных задач, так как позволяет отказаться от метричности пространства D . Это дает возможность применять метод множества эквивалентности как для решения задач многокритериальной оптимизации, так и для решения обратных задач математической физики, как показано в этой статье.

Описанный метод не имеет недостатка метода нахождения множества эффективных по Парето решений, поскольку при добавлении дополнительного критерия множество эквивалентности не растёт, а наоборот сужается (рис. 5).

Поэтому при решении реальных задач из полученного этим методом множества эквивалентности могут выбираться решения, удовлетворяющие не только формализованным критериям, но и неформализованным, основанным на опыте и интуиции эксперта-исследователя, при этом гарантированно не упуская наилучшее решение, которое при любом количестве критериев всегда будет находиться внутри найденного множества:

$$\Omega_0(R_1, \dots, R_{n+1}) = \bigcap_{l=1}^{n+1} \Omega_l(R_l)$$

Выбор конечного решения из множества эквивалентности может быть сделан автоматически [55–60], или его может сделать эксперт-исследователь, исходя из своего научного опыта, неформализованных критериев и конкретных целей. Нередко бывает, что эксперт выбирает сразу несколько наборов значений начальных параметров из полученного множества эквивалентных решений. Важно отметить, что число критериев зависит от конкретных целей исследования процесса самофокусировки. Например, если цель заключается не в том, чтобы восстановить значения начальных параметров плазмы по измеренным характеристикам прошедшего через нее рентгеновского импульса, а только в том, чтобы определить такие значения начальных параметров плазмы, при которых импульс в результате процесса самофокусировки достигнет желаемой интенсивности, то достаточно найти множество решений,

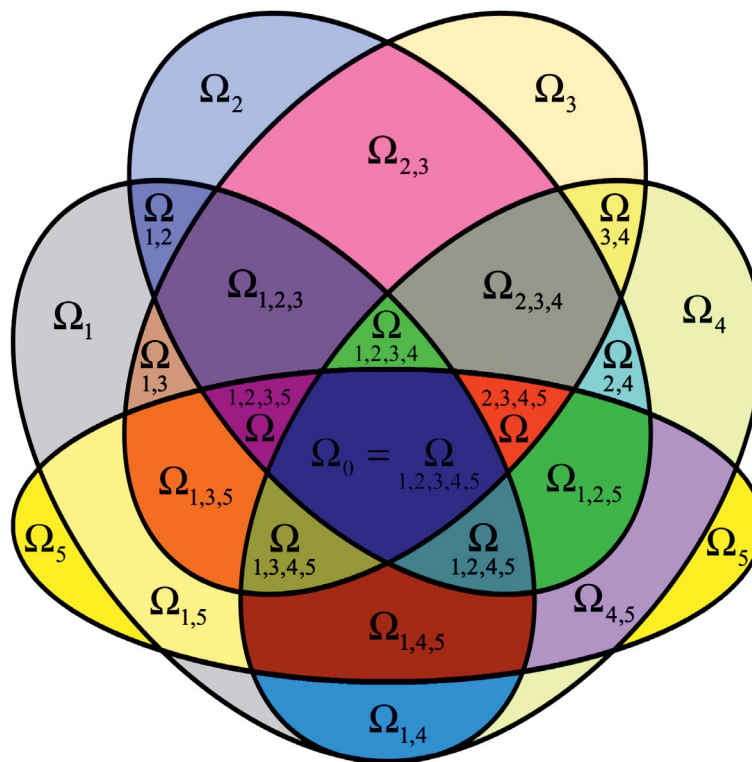


Рис. 5. Иллюстрация множества эквивалентности $\Omega_0(R_1, \dots, R_{n+1})$ и его сужения при увеличении количества критериев для $n = 4$

удовлетворяющее хотя бы одному из $n + 1$ критериев. В этом случае нет необходимости искать пересечение $n + 1$ множества эквивалентных решений для всех критериев. При этом всегда есть возможность найти несколько разных наборов значений начальных параметров плазмы и импульса (решив методом множества эквивалентности обратную задачу по одному или нескольким критериям), при которых достигается желаемая интенсивность и/или пространственная форма цилиндрического импульса после самофокусировки, и выбрать из них наиболее подходящие с точки зрения имеющихся на данный момент возможностей и удобства их реализации на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
4. Ким А.В., Короткий А.И., Осипов Ю.С. Обратные задачи динамики параболических систем // ПММ. 1990. Т. 54. № 5. С. 754-759.
5. Осипов Ю.С., Кряжмский А.В., Максимов В.И. Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами. Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1991.
6. Osipov Yu.S., Kryazhinskiy A.V. Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
7. Осипов Ю.С., Кряжмский А.В., Максимов В.И. Динамические обратные задачи для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 579-597.
8. Kryazhinskiy A.V., Maksimov V.I. On Exact Stabilization of an Uncertain Dynamical System // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. V. 12. № 2. P. 145-182.
9. Осипов Ю.С., Кряжмский А.В. Задачи динамического обращения // Вестник Российской академии наук. 2006. Т. 76. № 7. С. 615-624.
10. Пелюхов Р.В. Решение одной обратной задачи группового анализа // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2001. № 2. С. 26-31.

11. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
12. Belov Yu. Ya. Inverse Problems for Parabolic Equations // J. Inverse Ill-Posed Problems. 1993. V. 1. № 4. P. 283–301.
13. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шилин С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск, 1980.
14. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Berlin: Springer, 1998.
15. Kozhanov A. I. Composite-Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999.
16. Kryazhimskiy A.V., Maksimov V.I. On Rough Inversion of a Dynamical System with a Disturbance // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. V. 16. № 6. P. 587–600.
17. Дякин В.В., Раевский В.Я. О прямой и обратной задаче электродинамики // ЖВМ и МФ, 2000. Т. 40. № 4. С. 598–605.
18. Belov Yu. Ya., Shipina T. N. The Problem of Determining a Coefficient in the Parabolic Equation and Some Properties of its Solution // J. Inverse Ill-Posed Problems. 2001. V. 9. № 1. P. 31–48.
19. Дякин В.В., Раевский В.Я. Об обратной задаче электродинамики // ЖВМ и МФ. 2005. Т. 45, № 11. С. 2052–2060.
20. Пятков С.Г. Некоторые обратные задачи для параболических уравнений // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12. № 4. С. 187–202.
21. Elton R. C. X-ray lasers. N.Y.: Acad. Press, 1990.
22. Ахманов С. А. Сверхсильные световые поля в нелинейной оптике, физике плазмы и технике рентгеновских источников // Итоги науки и техники. Современные проблемы лазерной физики. 1991. Т. 4. С. 15–18.
23. Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики. М.: Наука, 1985.
24. Андреев А.В., Хачатуров Р.В. Самофокусировка импульсного рентгеновского излучения в плазме // Вестник Московского университета. Сер. 3: Физика. Астрономия. 1995. Т. 36. № 3. С. 25–33. EDN: UHYLRB.
25. Хачатуров Р.В. Вычислительный метод исследования процесса самофокусировки рентгеновского излучения в плазме // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36. № 1. С. 103–111.
26. Хачатуров Р.В. Математическое моделирование процессов взаимодействия рентгеновского излучения с плазмой и многослойными наноструктурами: Диссертация канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ РАН, 1996.
27. Хачатуров Р.В. Математическое моделирование и методы определения параметров многослойных наноструктур по угловому спектру интенсивности отраженного рентгеновского излучения // Математическое моделирование композиционных объектов: сб. статей. Т. Вып. 3. М.: ВЦ РАН, 2007. С. 115–130. EDN: BZIOHS.
28. Хачатуров Р.В. Пятимерная модель Гипервселенной и возможные этапы освоения космического пространства // Актуальные проблемы российской космонавтики. Тр. XXXV академических чтений по космонавтике. М.: Комиссия РАН, 2011. С. 277–278. EDN: RUSPAR.
29. Хачатуров Р.В. Математическая модель Гипервселенной и ее применение для оценки возможностей освоения космического пространства // Гагаринский сборник. Матер. XXXVIII Междунар. общественно-научных чтений, посвященных памяти Ю.А. Гагарина. Воронеж: Научная книга, 2011. С. 414–425. EDN: SWABBU.
30. Хачатуров Р.В. Динамика пятимерного тора Гипервселенной в трехмерном времени // Актуальные проблемы российской космонавтики. Тр. XXXIX академических чтений по космонавтике, посвященных памяти акад. С.П. Королева. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. С. 187–190. EDN: ZFINWR.
31. Хачатуров Р.В. Теория пятимерной тороидальной Гипервселенной // Прикл. математика и мат. физика. 2015. Т. 1. № 1. С. 129–146. EDN: WCKJIN.
32. Хачатуров Р.В. Черные дыры — трансвселенские торнадо // К.Э. Циолковский и этапы развития космонавтики. Матер. 50-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга: Эйдос, 2015. С. 280–281. EDN: UIDOQD.
33. Хачатуров Р.В. Объяснение природы гравитации и черных дыр с помощью теории Гипервселенной // XL Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти акад. С.П. Королева: сб. тезисов. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. С. 153–155. EDN: VMVXYD.
34. Хачатуров Р.В. Объяснение особенностей крупномасштабного расположения квазаров во Вселенной теорией Гипервселенной // Идеи К.Э. Циолковского в инновациях науки и техники. Матер. 51-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга: Эйдос, 2016. С. 264–266. EDN: XHBQTN.
35. Хачатуров Р.В. Закономерности расположения квазаров в крупномасштабной структуре Гипервселенной // XLI Академические чтения по космонавтике. Сб. тезисов чтений, посвященных памяти акад. С.П. Королева. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. С. 192–194. EDN: XOFBQL.
36. Хачатуров Р.В. Обмен материей и энергией между параллельными Вселенными с точки зрения теории Гипервселенной // Гагаринский сборник. Матер. XLIV междунар. общественно-научных чтений, посвященных памяти Ю.А. Гагарина. Гагарин: СОГБУК «Музей Ю.А. Гагарина», 2017. С. 426–451. EDN: DKBEGR.
37. Хачатуров Р.В. Динамика изменения размера Вселенной и природа гравитации в соответствии с математической моделью и теорией Гипервселенной // Тр. Всероссийской научной конференции «Моделирование коэволюции природы и общества: проблемы и опыт. К 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Моисеева (Моисеев–100)». М.: ФИЦ ИУ РАН, 2017. С. 93–102. EDN: YRVYCX.
38. Khachaturov R.V. Theoretical Possibility of Transferring Matter between Parallel Universes in Accordance with the Hyperuniverse Theory // AIP Conf. Proc. 2019. V. 2171. P. 090001(1)-090001(6). EDN: ZSDEXW.

39. *Хачатуров Р.В.* Теория Гипервселенной о структуре многомерного замкнутого времени // XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти акад. С.П. Королева. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020. С. 449–451. EDN: SWIEXK.
40. *Khachaturov R.V.* General Structure of Multidimensional Closed Time from the Hyperuniverse Theory Point of View // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2318. P. 080003(1)–080003(5). EDN: WDSCZC.
41. *Khachaturov R.V.* Modeling of with Axially Symmetric Self-Focusing X-Ray Pulses in Plasma // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1999. V. 39. № 12. P. 2003–2014. EDN: LFRMGN.
42. *Fedotov P.S., Khachaturov R.V.* A new Approach to Describing the Regularities of Stationary Phase Retention in Countercurrent Chromatography // J. Liquid Chromatography and Related Technologies. 2000. V. 23. № 5. P. 655–667. EDN: LGAWOV.
43. *Oleschko K., Korvin G., Balankin A.S., Khachaturov R.V., Flores L., Figueroa B., Urrutia J., Brambila F.* Fractal Scattering of Microwaves from Soils // Physical Review Letters. 2002. V. 89. № 18. P. 188501. EDN: RBZTAR.
44. *Khachaturov V.R., Khachaturov R.V., Khachaturov R.V.* Supermodular Programming on Lattices // Computer Science J. Moldova. 2003. V. 11. № 1. P. 43–72. EDN: VMUTYC.
45. *Mandujano J.J., Khachaturov R.V., Tolson G., Keppie J.D.* Curvature Analysis Applied to the Cantarell Structure, Southern Gulf of Mexico: Implications for Hydrocarbon Exploration // Computers & Geosciences. 2005. V. 31. № 5. P. 641–647. EDN: LJHFTN.
46. *Khachaturov V.R., Khachaturov R.V.* Supermodular Programming on Finite Lattices // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012. V. 52. № 6. P. 855–878. DOI: 10.1134/S0965542512060097. EDN: RGAEAR.
47. *Korvin G., Khachaturov R.V., Oleschko K., García J.J., Ronquillo G., Correa López M.D.J.* Computer Simulation of Microwave Propagation in Heterogeneous and Fractal Media // Computers & Geosciences. 2017. V. 100. P. 156–165. EDN: YUKLFJ.
48. *Khachaturov R.V.* Generalized Equivalence Set Method for Solving Multiobjective Optimization Problems // J. Computer and Systems Sciences International. 2019. V. 58. № 6. P. 922–931. DOI 10.1134/S1064230719060091. EDN: TGAWUA.
49. *Хачатуров В.Р., Хачатуров Р.В.* Решетка кубов и супермодулярная оптимизация // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тр. Третьей междунар. конф. М.: МФТИ, 2008. С. 248–257. EDN: SEOFDX.
50. *Хачатуров В.Р., Хачатуров Р.В.* Решетка кубов // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 1. С. 45–51. EDN: ICECRL.
51. *Хачатуров В.Р., Хачатуров Р.В., Хачатуров Р.В.* Оптимизация супермодулярных функций (супермодулярное программирование) // ЖВМ и МФ. 2012. Т. 52. № 6. С. 999–1000. EDN: OYIOTF.
52. *Хачатуров Р.В.* Основные свойства решеток кубов, алгоритмы их построения и возможности применения в дискретной оптимизации // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55. № 1. С. 121–134. EDN: THNYLB.
53. *Хачатуров Р.В.* Прямая и обратная задачи определения параметров многослойных наноструктур по угловому спектру интенсивности отраженного рентгеновского излучения // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49. № 10. С. 1860–1867. EDN: KWIVAN.
54. *Хачатуров Р.В.* Прямая и обратная задачи исследования свойств многослойных наноструктур по двумерной математической модели отражения и рассеяния рентгеновского излучения // ЖВМ и МФ. 2014. Т. 54. № 6. С. 977–987.
55. *Хачатуров Р.В.* Многокритериальная оптимизация в псевдометрическом пространстве критериев на примере общей модели деятельности предприятия // ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56. № 9. С. 1602–1613. EDN: WHWHMT.
56. *Хачатуров Р.В.* Однокритериальная и многокритериальная оптимизация на решетке кубов // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 89–98. EDN: YSBCTR.
57. *Хачатуров Р.В.* Применение метода множества эквивалентности для решения задач многокритериальной оптимизации и обратных задач математической физики // Проблемы информатики. 2019. № 4(45). С. 7–32. EDN: QHMTKL.
58. *Хачатуров Р.В.* Прямая и обратная задачи исследования процесса самофокусировки рентгеновских импульсов в плазме // ЖВМ и МФ. 2020. Т. 60. № 2. С. 323–337. EDN: LBPFDV.
59. *Хачатуров Р.В.* Обобщенный метод множества эквивалентности для решения задач многокритериальной оптимизации // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 1. С. 109–118. EDN: CCEWSC.
60. *Хачатуров Р.В.* О возможностях применения метода множества эквивалентности при освоении космического пространства для решения различных возникающих задач // Никита Моисеев и современный мир: докл. и матер. конф. М.: Российская академия наук, 2023. С. 141–150. EDN: XWYHCl.
61. *Хачатуров Р.В.* Математическая модель Гипервселенной и её применение для оценки перспектив освоения космического пространства // Человек – Земля – Космос: диалектика взаимосвязи стратегических социальных и технических проектов. М.: Культурная революция, 2011. С. 165–169. EDN: AHLOHl.
62. *Хачатуров Р.В.* Перспективы изучения дальнего Космоса: математическая модель Гипервселенной // Актуальные проблемы российской космонавтики. Труды XXXVI Академических чтений по космонавтике. М.: Комиссия РАН, 2012. С. 255–258. EDN: PGXRWP.
63. *Хачатуров Р.В.* Периодический закон изменения ускорения расширения Вселенной, вытекающий из математической модели Гипервселенной // Идеи К.Э. Циолковского: прошлое, настоящее, будущее. Материалы XLVII научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга: Эйдос, 2012. С. 300–302. EDN: IISWLK.
64. *Khachaturov R.V.* The Galaxies Life Cycle According to the Hyperuniverse Theory // AIP Conf. Proc. 2023. V. 2549. P. 090003(1)–090003(9).