

УДК 519.853, 517.977.5

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ФИНАНСОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ ПРЕДПРИЯТИЯ¹

© 2024 г. Т. Г. Апалькова^{a, *}, О. А. Косоруков^{b, **}, А. В. Мищенко^{c, ***},
В. И. Цурков^{d, ****}

^aФинансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия

^bМГУ им. М.В.Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте РФ, Государственный университет по землеустройству, Москва, Россия

^cФинансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия

^dФедеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия

*e-mail: catinthereye1@gmail.com

**e-mail: kosorukovoa@mail.ru

***e-mail: alnex4957@rambler.ru

****e-mail: v.tsurkov@mail.ru

Поступила в редакцию 01.12.2023 г.

После доработки 16.12.2023 г.

Принята к публикации 29.01.2024 г.

Предложены оптимизационные модели производственно-финансовой деятельности предприятия, позволяющие повысить эффективность его функционирования в условиях современной рыночной среды. Новизна предлагаемого инструментария обусловлена учетом особенностей процессов потребления и хранения готовой продукции, а также кредитования и расширения производства. Для реализации предлагаемых моделей используется метод обобщенного приведенного градиента, встроенный в инструмент MS Excel (надстройка «Поиск решения»). Решение задач выбора производственной программы также возможно с помощью других методов данной надстройки, включая симплекс-метод.

Ключевые слова: оптимизационные модели производства, финансовая деятельность предприятий, расширение производства, производственная программа, оборотный капитал, динамические модели управления.

DOI: 10.31857/S0002338824020109, EDN: VOFKWM

MATHEMATICAL MODELS FOR MANAGEMENT OF PRODUCTION AND FINANCIAL ACTIVITIES OF AN ENTERPRISE

T. G. Apalkova^{a, *}, O. A. Kosorukov^{b, **}, A. V. Mishchenko^{c, ***}, V. I. Tsurkov^{d, ****}

^aFinancial University under the Government of the Russian Federation, Moscow

^bMoscow State University named after M.V.Lomonosov, Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of the Russian Federation, State University of Land Management, Moscow

^cFinancial University under the Government of the Russian Federation, Moscow

^dFederal Research Center "Informatics and Management" RAS, Moscow

*e-mail: catinthereye1@gmail.com,

**e-mail: kosorukovoa@mail.ru,

***e-mail: alnex4957@rambler.ru,

****e-mail: v.tsurkov@mail.ru

This paper proposes optimization models for the production and financial activities of an enterprise, which make it possible to increase the efficiency of its functioning in the modern market environment. The novelty of the

¹ Результаты исследований, представленные в разд. 3, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 22-71-10131).

proposed tools is due to taking into account the peculiarities of the processes of consumption and storage of finished products, as well as lending and expansion of production. To implement the proposed models, the generalized reduced gradient method is used, built into the MS Excel toolkit (the “Solver” add-on). Solving problems of choosing a production program is also possible using other methods of this add-on, including the simplex method.

Keywords: optimization models for the production, financial activities of an enterprise, expansion of production, production program, working capital, dynamic control model

Введение. Внешние экономические санкции, в условиях которых существует российская экономика, порождает ряд проблем для бизнеса, особенно предприятий реального сектора. Согласно аналитической записке, выпущенной в сентябре 2023 г. Центробанком РФ [1], у большинства предприятий появились проблемы с импортом сырья, комплектующих, машин и оборудования по причине полного прекращения импорта или перебоев и задержек поставок. Ввиду этого возрастает актуальность проблемы эффективного управления материальными и финансовыми ресурсами предприятий и издержками производства.

Решение рассмотренных в работе оптимизационных задач предполагает задание в MS Excel как целевого функционала (максимизация прибыли фокусной компании), так и перечня ограничений на располагаемые запасы материальных ресурсов, производственные мощности, размер заказа и величину спроса, а также объем финансовых средств, имеющихся у предприятия. В результате применения алгоритмов численной оптимизации определяется оптимальная производственная программа, задаваемая в виде вектора, физический смысл которого состоит в перечне необходимых товарных позиций и оптимального объема производства каждой из них.

1. Оптимизационные модели выбора производственной программы предприятия. Традиционная постановка задачи о выборе производственной программы предприятия состоит в том, чтобы в условиях ограниченных производственных и материальных ресурсов обеспечить выпуск продукции в объемах, не превышающих спрос и максимизировать прибыль предприятия [2–4]. Детерминированная математическая модель оптимизации производственной программы состоит в следующем:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n b_i x_i - Z_{\text{пост}} \rightarrow \max, \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} x_i \leq L_j, j = \overline{1, M}, \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} x_i \leq k_l \tau_l, l = \overline{1, K}, \quad (1.3)$$

$$x_i \leq P t_i, i = \overline{1, n}, \quad (1.4)$$

$$x_i \geq Z a k_i, \quad (1.5)$$

$$x_i \in Z_+. \quad (1.6)$$

Задача (1.1)–(1.6) является линейной. Здесь используются следующие обозначения: a_i – цена реализации продукции вида i , b_i – переменные издержки при производстве продукции вида i , $Z_{\text{пост}}$ – постоянные издержки предприятия, l_{ij} – нормы потребления продукции вида i при выпуске единицы продукции вида j , t_{il} – нормы времени обработки на оборудовании вида l при выпуске единицы продукции вида i , τ_l – эффективное время работы оборудования вида l на периоде планирования $(0; T)$, где τ_l – время загрузки оборудования вида l в производственном процессе на периоде $(0; T)$, k_l – количество единиц оборудования вида l , участвующего в производственном процессе, L_j – объем материальных ресурсов производства вида j , $P t_i$ – спрос на продукцию вида i , $Z a k_i$ – величина заказа на продукцию вида i . Таким образом, продукция вида i должна выпускаться в объемах не менее $Z a k_i$, Z_+ – множество целых неотрицательных чисел, n – количество видов продукции.

В модели (1.1)–(1.6) предполагается, что цена продукции a_i фиксирована. Если a_i можно менять в некотором диапазоне:

$$(a_i^1 \leq a_i \leq a_i^2), \quad (1.7)$$

то это оказывает влияние на величину спроса. В простейшем случае это влияние задается соотношением следующего вида:

$$x_i \leq Pt_i - \Delta_i, (a_i - a_i^1), i = \overline{1, n}. \quad (1.8)$$

Здесь a_i — цена реализации продукции вида i , a_i^1 — минимальная цена реализации, a_i^2 — максимальная цена реализации.

Таким образом, с учетом (1.7) и (1.8), в условиях недетерминированности цены на продукцию модель (1.1)–(1.8) является нелинейной. Решением данной оптимизационной задачи выступает вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, задающий объемы выпуска продукции, и вектор $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, задающий цены на продукцию в условиях ограничений.

Далее необходимо отметить, что в условиях фиксированных цен задача (1.1)–(1.6) не всегда имеет решение ввиду дефицита производственных мощностей и/или материальных ресурсов предприятия. Поэтому для того, чтобы объем производства удовлетворял ограничению (1.5), необходимо осуществить инвестиции как в закупку материальных ресурсов, так и в увеличение производственных мощностей предприятия. Для определения минимального объема таких инвестиций нужно решить следующую оптимизационную задачу:

$$\sum_{j=1}^m Z_j \beta_j + \sum_{l=1}^k y_l \gamma_l \rightarrow \min, \quad (1.9)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} x_i \leq Z_j + L_j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (1.10)$$

$$\sum_{i=1}^n \tau_{il} x_i \leq (k_l + y_l) \tau_l, \quad l = \overline{1, K}, \quad (1.11)$$

$$x_i \leq Pt_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.12)$$

$$x_i \geq Zak_i, \quad (1.13)$$

$$x_i \in Z_+, \quad (1.14)$$

$$y_l \in Z_+, \quad Z_j \geq 0, j = \overline{1, M}, \quad l = \overline{1, K}. \quad (1.15)$$

Здесь используются следующие обозначения: Z_j — дополнительный закупаемый объем материальных ресурсов j , β_j — цена единицы материального ресурса j , y_l — количество единиц дополнительно закупаемого оборудования вида l , γ_l — цена единицы дополнительно закупаемого оборудования вида l .

Дополнительно отметим, что решение задачи (1.9)–(1.15) дает не только объем дополнительных инвестиций, но и их структуру с учетом стоимости закупки как материальных ресурсов производства, так и дополнительного оборудования.

Кроме предложенной модели выбора оптимальной производственной программы предприятия (1.1)–(1.6) можно использовать динамическую модель оптимизации производственной программы с учетом влияния инфляции на маржинальный доход, получаемый от реализации выпускаемой продукции. Решение задачи в данном случае задается в виде вектор-функции $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, где $x_i(t)$ — интенсивности выпуска продукции вида i .

Таким образом, объем выпуска продукции вида i равен:

$$\int_0^T x_i(t) dt, \quad i = \overline{1, n}.$$

Математическая постановка задачи о выборе оптимальной производственной программы в этом случае принимает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T c_i(\xi(t)) x_i(t) dt \rightarrow \max, \quad (1.16)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} \int_0^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t L_j(t') dt', \quad j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0; T), \quad (1.17)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t) dt \leq \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \quad (1.18)$$

$$l = \overline{1, K}, \forall t_1, t_2 \in (0; T), t_2 > t_1,$$

$$\int_0^T x_i(t) dt \leq P t_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad x_i(t) \geq 0, \quad \forall t \in (0; T). \quad (1.19)$$

Здесь используются следующие обозначения: $c_i(\xi(t)) = a_i(\xi(t)) - b_i(\xi(t))$, $a_i(\xi(t))$ — цена за единицу продукции вида i в момент времени t при условии накопленной инфляции $(\xi(t))$, $b_i(\xi(t))$ — переменные издержки при выпуске единицы продукции вида i в момент времени/при уровне накопленной инфляции $\xi(t)$, $c_i(\xi(t))$ — маржинальный доход от выпуска единицы продукции вида i в момент времени t при уровне накопленной инфляции $\xi(t)$, $x_i(t)$ — интенсивность выпуска продукции вида i , $P t_i$ — спрос на продукцию вида i , $L_j(t')$ — интенсивность поступления материальных ресурсов вида j в момент t' , $t_2 - t_1$ — длина интервала $(t_1; t_2)$.

Соотношение (1.18) — ограничение на равномерность загрузки оборудования. Задача (1.16)–(1.19) — это задача оптимального управления, решением которой является вектор-функция $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Рассмотрим решение данной задачи на множестве кусочно-постоянных функций. Будем далее также считать функцию $c_i(\xi(t))$ кусочно-постоянной на конечном числе интервалов одинаковой длины, на которые разбивается период планирования $(0; T)$.

В этих условиях задачу (1.16)–(1.19) можно представить следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\tau=0}^T c_i(\xi_{\Delta}) x_i^{\tau} \Delta t_{\tau} \rightarrow \max, \quad (1.20)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\tau=0}^T x_i^{\tau} \Delta t_{\tau} l_{ij} \leq \sum_{\tau=0}^{\tau^*} L_j^{\tau} \Delta t_{\tau}, \quad \forall \tau = \overline{1, T}, j = \overline{1, M}, \quad (1.21)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} \sum_{\tau=\tau_k}^{\tau_p} x_i^{\tau} \Delta t_{\tau} \leq \frac{\tau_p - \tau_k}{T} k_l \theta_l, \quad l = \overline{1, K}, \quad (1.22)$$

$$\sum_{\tau=0}^T x_i^{\tau} \Delta t_{\tau} \leq P t_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.23)$$

$$x_i^{\tau} \geq 0, i = \overline{1, n}, \tau = \overline{1, T}. \quad (1.24)$$

Здесь используются следующие обозначения: $c_i(\xi_{\Delta})$ — маржинальный доход от продажи одной единицы продукции вида i на временном интервале с номером τ при уровне накопленной инфляции на интервале времени τ , равном ξ_{Δ} ; x_i^{τ} — интенсивность производства продукции вида i на интервале времени τ ; Δt_{τ} — продолжительность интервала с номером τ ; L_j^{τ} — интенсивность поступления материальных ресурсов вида j на интервале времени с номером τ .

Задача (1.20)–(1.24) является задачей линейного программирования, и ее решением будет матрица (x_i^{τ}) , $i = \overline{1, n}$, $\tau = \overline{1, T}$. С учетом того, что любая непрерывная функция может быть с любой точностью аппроксимирована кусочно-постоянными функциями, предложенный подход может успешно применяться для решения задач оптимального управления (1.16)–(1.19).

2. Модели управления оборотным капиталом производственного предприятия. Рассмотрим задачу выбора оптимальной производственной программы предприятия в ситуации, когда отсутствуют запасы материальных ресурсов или они недостаточны, но у предприятия есть собственные оборотные средства и/или возможность взять кредит для пополнения оборотных средств [5].

В этих условиях возникает вопрос: как наиболее эффективно использовать эти финансовые ресурсы при определении видов и объемов выпуска конечной продукции. В ситуации, если критерием эффективности является операционная прибыль предприятия, определить оптимальную производственную программу можно путем использования обобщенной модели (1.1)–(1.6):

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n b_i x_i - Z_{\text{пост}} \rightarrow \max, \quad (2.1)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} x_i \leq L_j + Z_j, j = \overline{1, M}, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} x_i \leq k_l \tau_l, l = \overline{1, K}, \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=1}^M \beta_j Z_j \leq F, \quad (2.4)$$

$$x_i \leq P t_i, i = \overline{1, n}, \quad (2.5)$$

$$x_i \geq Z a k_i, i = \overline{1, n}, \quad (2.6)$$

$$x_i \in Z_+, Z_j \geq 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, M}. \quad (2.7)$$

В модели (2.1)–(2.7) кроме использованных ранее присутствуют следующие обозначения: Z_j – объем закупаемых ресурсов вида j ; β_j – цена закупаемых материальных ресурсов вида j ; F – объем оборотных средств. Искомые переменными при решении линейной оптимизационной задачи (2.1)–(2.7) являются производственная программа $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и объем закупок $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$.

2.1. Анализ устойчивости решений. Рассмотрим ситуацию, когда цены на конечную продукцию, материальные ресурсы и переменные издержки производства растут с учетом накопленной инфляции $\xi(t)$. Здесь $\xi(t)$ – накопленная инфляция на момент t (в долях). В этом случае на момент времени t целевая функция (2.1) и ограничение (2.4) будут выглядеть следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i + \phi_i(\xi(t))) x_i^l - z_{\text{пост}} \rightarrow \max, \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^M (\beta_j + \Psi_j(\xi(t))) Z_j \leq F.$$

Здесь x^l – одна из допустимых производственных программ множества $\bar{X} = \{x^1, \dots, x^l, \dots, x^N\}$, $\phi_i(\xi(t))$ – непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция изменения маржинального дохода $c_i = a_i - b_i$ на момент времени t , $\Psi_j(\xi(t))$ – непрерывная неубывающая функция t , отражающая степень изменения цены на материальные ресурсы j в связи с накопленной инфляцией.

Обозначим через $F^j(\xi(t))$ значение целевой функции (2.8) с учетом изменения маржинального дохода, связанного с инфляцией на производственной программе x^j ($x^j \in \bar{X}$). Таким образом,

$$F^j(\xi(t)) = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i + \phi_i(\xi(t))) x_i^l - z_{\text{пост}}.$$

Пусть в момент времени t оптимальной является производственная программа $x^l \in \bar{X}$. Далее решим $N-1$ уравнение $F^l(\xi(t)) = F^j(\xi(t))$, $j = \overline{1, N}$, $j \neq l$. Выберем минимальные положительные решения для каждого из уравнений и упорядочим их в порядке возрастания: $t_1, \dots, t_Q$ ($Q \leq N-1$).

Пусть решение $t=t_l$ соответствует уравнению $F^l(\xi(t)) = F^k(\xi(t))$. Рассмотрим производные: $dF^l(\xi(t))/dt$ и $dF^k(\xi(t))/dt$. Если $dF^k(\xi(t))/dt|_{t=t_l} > dF^l(\xi(t))/dt|_{t=t_l}$, то это означает, что начиная с момента времени $t=t_l$ оптимальной становится производственная программа x^k . Таким образом, любой отрезок времени $(0, T)$ можно разбить на интервалы $(0, \tau_1), (\tau_1, \tau_2), \dots, (\tau_{M-1}, T)$, на каждом из которых оптимальной будет оставаться одна и та же производственная программа.

Рассмотрим ограничение (2.9). С учетом того, что функция $\Psi_j(\xi(t))$ является возрастающей относительно уровня накопленной инфляции $\xi(t)$, можно определить момент времени t_q , для которого будет верно равенство:

$$\sum_{j=1}^M (\beta_j + \Psi_j(\xi(t_q))) Z_j^l = F,$$

здесь $Z^l = (Z_1^l, \dots, Z_M^l)$ — объем закупок материальных ресурсов, который необходим для обеспечения выполнения производственной программы $x^l = (x_1^l, \dots, x_n^l)$, которая будет оптимальной для момента $t=0$. Очевидно, что для определения t_q необходимо решить следующее уравнение относительно t :

$$\sum_{j=1}^M \Psi_j(\xi(t_q)) Z_j^l = F - \sum_{j=1}^M \beta_j Z_j^l.$$

Учитывая, что $d\Psi_j(\xi(t))/dt > 0$, начиная с любого момента времени $t > t_q$, необходимый объем закупок материальных ресурсов для x^l обеспечен быть не может. Следовательно, необходимо снизить объем производства, т.е. перейти на другую производственную программу.

Таким образом, интервал времени $(0, T)$ может быть разбит на отрезки $(0, \tau_1), \dots, (\tau_k, T)$, на каждом из которых сохраняет оптимальность одна и та же производственная программа. Переход на новое решение может быть связан с тем, что прибыль на новой производственной программе становится выше, чем на предыдущей, либо с тем, что объем оборотных средств недостаточен для обеспечения закупок материальных ресурсов для прежней производственной программы.

2.2. Модель управления оборотным капиталом производственного предприятия с учетом переменных цен на конечную продукцию. В постановке (2.1)–(2.7) цены на конечную продукцию фиксированы. Если цены меняются в диапазоне

$$(a_1 \leq a_i \leq a_2), i = \overline{1, n}, \quad (2.10)$$

то это ограничение должно присутствовать в модели, и, следовательно, задача становится нелинейной. В этом случае ограничение (27) заменяется на следующее ограничение:

$$x_i \leq Pt_i - \Delta_i(a_i - a_i^1), i = \overline{1, n}. \quad (2.11)$$

Таким образом, в ситуации нефиксированных цен, кроме переменных x и z дополнительно определяются оптимальные цены, заданные вектором $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. В ситуации, когда модель (2.1)–(2.7) не имеет решения ввиду недостаточности оборотных средств для закупки материальных ресурсов и/или недостаточности производственных мощностей, можно рассчитать оптимальный объем инвестиций, позволяющий выполнить продукцию в количестве не менее Zak_i , аналогично тому, как это делалось в предыдущей задаче.

Рассмотрим ситуацию, когда лицо, принимающее решение (ЛПР) о закупке материальных ресурсов производства, может использовать не только собственные оборотные средства в объеме F , но и дополнительно привлечь кредит в объеме V под процент α (в долях).

Возникает вопрос: целесообразно ли привлекать этот кредит и если да, то в каком объеме следует привлекать финансовые средства? Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо решить две задачи. Первая — оценка прибыли предприятия, если кредит не привлекается, т.е. нужно найти оптимальное решение модели (2.1)–(2.7). Вторая состоит в оценке эффективности производственной программы, если кредит привлекается, иными словами, решается следующая оптимизационная задача:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n b_i x_i - Z_{\text{пост}} - \\ & - \alpha \left(\sum_{j=1}^M \beta_j Z_j - F \right) \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} x_i \leq L_j + Z_j, j = \overline{1, M}, \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} x_i \leq k_l \tau_l, l = \overline{1, K}, \quad (2.14)$$

$$F < \sum_{j=1}^M \beta_j Z_j \leq F + V, \quad (2.15)$$

$$x_i \leq P t_i, i = \overline{1, n}, \quad (2.16)$$

$$x_i \geq Z a k_i, i = \overline{1, n}, \quad (2.17)$$

$$x_i \in Z_+. \quad (2.18)$$

В модели (2.12)–(2.18) кредит обязательно используется, и слагаемое

$$\alpha \left(\sum_{j=1}^M \beta_j Z_j - F \right)$$

в целевой функции (2.12) — это процентный платеж по кредиту.

Сравнивая значение целевой функции (2.1) (без кредита) и целевой функции (2.12) (с кредитом), определяем оптимальную стратегию.

Далее рассмотрим динамическую модель управления оборотным капиталом предприятия, направленным на закупку материальных ресурсов производства. Ниже будем считать, что в общем случае интенсивность поступления оборотных средств на интервале $(0; T)$ задана функцией $f(t)$:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T c_i(\xi(t)) x_i(t) dt \rightarrow \max, \quad (2.19)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} \int_0^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t L_j(t') dt', \quad (2.20)$$

$$j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0; T),$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t) dt \leq \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \quad l = \overline{1, K}, \quad (2.21)$$

$$\forall t_1, t_2 \in (0; T), t_2 > t_1,$$

$$\sum_{j=1}^m \beta_j \int_0^t Z_j(t') dt' \leq \int_0^t f(t') dt', \forall t \in (0; T), \quad (2.22)$$

$$\int_0^T x_i(t) dt \leq P t_i, \quad (2.23)$$

$$\int_0^T x_i(t) dt \geq Z a k_i, \quad (2.24)$$

$$x_i(t) \geq 0, Z_j(t) \geq 0. \quad (2.25)$$

Решением задачи (2.19)–(2.25) является вектор-функция $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ и вектор-функция $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_n(t))$, задающие соответственно интенсивность производства продукции и интенсивность закупки материальных ресурсов. Соотношение (2.22) свидетельствует о том, что объем затрат на закупку материальных ресурсов не должен превышать объема поступивших оборотных средств в любой момент $t \in (0; T)$.

Решение задачи оптимального управления (2.19)–(2.25) можно свести к решению задачи линейного программирования, аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе.

3. Динамические модели оптимизации производства. 3.1. Динамическая модель расширения ассортимента продукции. Ниже будет рассмотрена ситуация перехода предприятия на выпуск расширенного ассортимента готовой продукции с привлечением дополнительных инвестиций как для закупки новых видов оборудования, так и приобретения дополнительных видов материальных ресурсов [6]. Введем дополнительные обозначения, а именно индексы новых видов продукции ($i = \overline{n+1, n_1}$), новых видов материальных ресурсов ($j = \overline{M+1, M+M_1}$) и новых видов оборудования ($l = \overline{K+1, K_1}$):

$$\sum_{i=1}^{n_1} \int_0^T c_i(\xi(t)) x_i(t) dt \rightarrow \max, \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} \int_0^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t L_j(t') dt', \quad j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0; T), \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} l_{ij} \int_0^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t Z_j(t') dt', \quad j = \overline{M+1, M+M_1}, \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} \int_{t_2}^{t_1} x_i(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \quad (3.4)$$

$$l = \overline{1, K}, \quad \forall t_1, t_2 \in (0; T), t_2 > t_1,$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} y_l \tau_l, \quad \forall t_1, t_2 \in (0; T), \quad (3.5)$$

$$\sum_{j=m+1}^{m_1} \beta_j \int_0^t Z_j(t') dt' \leq \int_0^t f_1(t) dt, \quad \forall t \in (0; T), \quad (3.6)$$

$$\sum_{l=K+1}^{K_1} y_l \gamma_l \leq F_2(t), \quad (3.7)$$

$$\int_0^T x_i(t) dt \leq P t_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.8)$$

Здесь $L_j(t')$ – интенсивность поступления материального ресурса вида j при производстве традиционных видов продукции, $Z_j(t')$ – интенсивность поступления материальных ресурсов для новых видов продукции, $f_1(t)$ – интенсивность поступления финансовых ресурсов для закупки новых видов материальных ресурсов, $F_2(t)$ – инвестиции, выделяемые на закупку

новых видов оборудования, y_l — количество единиц дополнительно закупаемого оборудования вида l .

3.2. Динамическая модель перепрофилирования предприятия. Рассмотрим ситуацию, когда традиционно выпускаемая продукция предприятия становится все менее востребованной потребителем, поэтому на складе предприятия скапливаются большие запасы нереализованной продукции, а само предприятие вместо прибыли получает убытки. В этом случае менеджмент предприятия может принять одно из решений: либо полностью закрыть предприятие, либо переориентировать его на выпуск других, более востребованных на рынке видов продукции. В качестве источников финансирования для реализации проекта перепрофилирования предприятия могут быть использованы: собственные инвестиции, привлеченный заемный капитал, средства, полученные от продажи оборудования, которое применялось для выпуска традиционной продукции, средства, полученные от продажи запасов материальных ресурсов, необходимых для производства традиционной продукции, средства, полученные от реализации запасов традиционно выпускаемой продукции по заниженной цене. Математическая модель оценки эффективности проекта перепрофилирования предприятия дана ниже.

Рассмотрим ситуацию, когда предприятие отказывается от выпуска традиционных видов продукции ($i = \overline{1, n}$) и переходит на выпуск новых видов продукции ($i = n + 1, n_1$). В этом случае модель оптимизации прибыли в условиях перепрофилирования предприятия может быть записана следующим образом:

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} \int_0^T c_i(\xi(t)) x_i(t) dt \rightarrow \max, \quad (3.9)$$

$$\sum_{j=m+1}^M l_{ij} \int_0^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t Z_j(t') dt', \quad j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0; T), \quad (3.10)$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} y_l \tau_l, \quad l = \overline{K+1, K_1}, \quad (3.11)$$

$$\sum_{j=m+1}^{m_1} \beta_j \int_0^t Z_j(t') dt' \leq \int_0^t f_1(t') dt', \quad (3.12)$$

$$\sum_{l=k+1}^{k_1} y_l \gamma_l \leq F_2(t) + \sum_{j=1}^m L_j \beta_j + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i x_i. \quad (3.13)$$

Здесь $F_2(t)$ — инвестиции, также выделяемые на закупку новых видов оборудования, L_j — запасы материальных ресурсов вида j для выпуска традиционных видов продукции, β_j — цена закупаемых материальных ресурсов вида j , a_i — стоимость продукции вида i , реализуемой по заниженной цене, x_i — количество единиц продукции вида i , $f_1(t)$ — интенсивность поступления финансовых ресурсов для закупки новых видов материальных ресурсов.

3.3. Динамическая модель выбора оптимальной производственной программы с учетом емкости склада. Ниже будет рассмотрена модель выбора оптимальной производственной программы, в которой в отличие от ранее приведенной модели учитывается ограничение на емкость склада для готовой продукции:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T c_i(\xi(t)) x_i(t) dt \rightarrow \max, \quad (3.14)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} \int_0^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t W_j(t') dt', \quad j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0; T), \quad (3.15)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_0^T x_i(t) dt \leq V, \quad (3.16)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \quad \forall t_1, t_2 (t_2 > t_1), l = \overline{1, K}, \quad (3.17)$$

$$\int_0^T x_i(t) dt \leq P t_i, \quad x_i(t) \geq 0, \forall t \in (0; T). \quad (3.18)$$

Здесь $W_j(t')$ — интенсивность поступления комплектующих вида j , V — объем склада, занимаемый одной единицей продукции вида i .

3.4. Динамическая модель управления оборотным капиталом сборочного производства с учетом закупки комплектующих. В этой модели, в отличие от предыдущей, можно пополнять запасы комплектующих за счет заданной интенсивности поступления оборотных средств. Математическая модель управления закупками комплектующих состоит в следующем:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T c_i(\xi(t)) x_i(t) dt \rightarrow \max, \quad (3.19)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} \int_0^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t W_j(t') dt' + \int_0^t Z_j(t') dt', \quad (3.20)$$

$$j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0; T),$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_0^T x_i(t) dt \leq V, \quad (3.21)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \quad \forall t_1, t_2 (t_2 > t_1), l = \overline{1, K}, \quad (3.22)$$

$$\sum_{j=1}^m \beta_j \int_0^t Z_j(t') dt' \leq \int_0^t f_1(t') dt', j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0; T), \quad (3.23)$$

$$\int_0^T x_i(t) dt \leq P t_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.24)$$

Здесь $Z_j(t)$ — интенсивность поступления закупаемых дополнительно комплектующих вида j , $f(t)$ — интенсивность поступления оборотных средств, β_j — цена закупаемых комплектующих вида j .

3.5. Динамическая модель управления оборотным капиталом сборочного производства с учетом дополнительной аренды склада. Рассматриваемая ниже модель управления оборотными средствами предприятия является обобщением производственной модели, в которой оборотные средства используются как для закупки комплектующих, так и для дополнительной аренды складских помещений для готовой продукции:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T c_i(\xi(t)) x_i(t) dt \rightarrow \max, \quad (3.25)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} \int_0^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t W_j(t') dt' + \int_0^t Z_j(t') dt', \quad (3.26)$$

$$j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0; T),$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \quad \forall t_1, t_2 (t_2 > t_1), l = \overline{1, K}, \quad (3.27)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_0^T x_i(t) dt \leq W + Y, \quad (3.28)$$

$$\sum_{j=1}^m \beta_j \int_0^t Z_j(t') dt' + dY \leq \int_0^t f_1(t') dt', j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0; T), \quad (3.29)$$

$$\int_0^T x_i(t) dt \leq P t_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.30)$$

Здесь Y — дополнительная емкость склада, достигаемая за счет аренды, d — цена аренды одной единицы складской площади.

3.6. Динамическая модель выбора оптимальной производственной программы с учетом ограничений на заказ. Рассмотрим модель (3.14)–(3.18) с учетом дополнительного ограничения:

$$\int_0^T x_i(t) dt \geq Z a k_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.31)$$

Ограничение (3.31) означает, что продукция вида i должна быть выпущена в объеме не менее $Z a k_i$. В этой ситуации оптимизационная модель (3.14)–(3.18), (3.31) не всегда имеет решение в силу следующих причин:

а) существует l , для которого выполняется

$$\sum_{i=1}^n t_{il} Z a k_i > k_l \tau_l, \quad l = \overline{1, K},$$

б) не выполняется ограничение на объем склада:

$$\sum_{i=1}^n v_i Z a k_i > V,$$

в) существует вид комплектующей j , для которой верно

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} Z a k_i > W_j, j = \overline{1, M}.$$

В этой ситуации для того, чтобы заказ был выполнен на заданном интервале $(0; T)$, необходимы дополнительные инвестиции по следующим направлениям: увеличение производственной мощности предприятия, дополнительная закупка комплектующих или дополнительная аренда склада. Также возможно, что инвестиции необходимы сразу по нескольким из перечисленных направлений.

Для того чтобы определить минимальный объем инвестиций и направления инвестирования, необходимо решить следующую оптимизационную задачу:

$$dY + \sum_{l=1}^K y_l \gamma_l + \sum_{j=1}^m Z_j \beta_j \rightarrow \min, \quad (3.32)$$

$$\sum_{l=1}^k t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t) dt \leq \frac{t_2 - t_1}{T} (k_l + y_l), \quad (3.33)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_0^T x_i(t) dt \leq V + Y, \quad (3.34)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} \int_0^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t L_j(t') dt' + Z_j, j = \overline{1, M}, \quad (3.35)$$

$$\int_0^T x_i(t) dt \leq P t_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.36)$$

$$\int_0^T x_i(t) dt \geq Z a k_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.37)$$

Здесь Y — дополнительная емкость склада, достигаемая за счет аренды, d — цена аренды одной единицы складской площади, y_l — дополнительно закупаемое множество единиц оборудования вида l , γ_l — цена за единицу закупаемого оборудования вида l , Z_j — количество единиц закупаемых дополнительно комплектующих вида j .

3.7. Динамическая модель управления закупками комплектующих с учетом привлечения кредита. Пусть в модели (3.19)–(3.24) для закупки комплектующих можно использовать кредит помимо собственных оборотных средств, причем кредит выдается предприятию под процент α (в долях).

Для того чтобы выяснить, целесообразно ли привлекать кредит для закупки комплектующих, необходимо рассмотреть две стратегии.

1. Кредит не привлекается. В этом случае решается оптимизационная задача (3.19)–(3.24) и находится объем прибыли, задаваемый целевым функционалом (3.19).

2. Кредит привлекается с учетом процента α и решается задача о закупке комплектующих с учетом этого требования. Тогда оптимизационная модель будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_0^T c_i(\xi(t)) x_i(t) dt - \\ & - \alpha \left(\sum_{j=1}^m \beta_j \int_0^T Z_j(t) dt - \int_0^T f(t) dt \right) \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} \int_0^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t W_j(t') dt' + \int_0^t Z_j(t') dt', \quad (3.39)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_0^T x_i(t) dt \leq V, \quad (3.40)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \quad (3.41)$$

$$l = \overline{1, K}, \quad \forall t_1, t_2 \in (0; T), t_2 > t_1,$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \beta_j \int_0^t Z_j(t') dt' &\leq \int_0^t f(t') dt' + \\ &+ \int_0^t f_{kp}(t') dt', \quad \forall t \in (0; T), \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\sum_{j=1}^m \beta_j \int_0^t Z_j(t') dt' > \int_0^t f(t') dt', \quad (3.43)$$

$$\int_0^T x_i(t) dt \leq P t_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.44)$$

$$x(t) \geq 0. \quad (3.45)$$

В модели (3.38)–(3.45) используются следующие обозначения: $\pm$ – кредитная ставка (в долях), $f_{kp}(t)$ – интенсивность поступления кредитных ресурсов.

Величина

$$\alpha \left(\sum_{j=1}^m \beta_j \int_0^T Z_j(t) dt - \int_0^T f(t) dt \right)$$

– это величина отчислений банку за пользование кредитными ресурсами.

Таким образом, решая задачу (3.19)–(3.24) без кредита и (3.38)–(3.45) с кредитом выбираем тот вариант, который соответствует большему значению прибыли (целевые функции (3.19) и (3.38)).

3.8. Динамическая модель сборочного производства с учетом оттока конечной продукции со склада. В этой модели предполагается, что в процессе производства на интервале $(0; T)$ на склад не только поступает готовая продукция, но и осуществляется ее вывоз клиентам (отток). В этой ситуации модель выбора оптимальной производственной программы может быть представлена следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T c_i(\xi(t)) x_i(t) dt \rightarrow \max, \quad (3.46)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} \int_0^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t W_j(t') dt', \quad \forall t \in (0; T), \quad j = \overline{1, M}, \quad (3.47)$$

$$V - \sum_{i=1}^n v_i \int_0^T x_i(t') dt' + \sum_{i=1}^n v_i \int_0^T q_i(t') dt' \geq 0, \quad \forall t \in (0; T), \quad (3.48)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \quad l = \overline{1, K}, \quad (3.49)$$

$$\forall t_1, t_2 \in (0; T), t_2 > t_1,$$

$$\int_0^T x_i(t) dt \leq Pt_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad x(t) \geq 0, \quad \forall t \in (0; T). \quad (3.50)$$

Здесь $q_i(t)$ — интенсивность оттока готовой продукции со склада в момент t , V — первоначальная емкость склада. Таким образом, ограничение (3.48) говорит о том, что в каждый момент времени $t \in (0; T)$ склад не должен быть переполнен.

3.9. Динамическая модель управления оборотными средствами группы предприятий, выпускающих однородную продукцию. Ниже будет рассмотрена ситуация, когда необходимо решить проблему оптимизации производственной программы нескольких предприятий в условиях ограничений на производственные мощности, объем оборотных средств, направляемых на закупку комплектующих, объем складских площадей, на которых хранятся комплектующие.

В этих условиях оптимизационная модель может быть сформирована следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_0^T x_{ij}(t) c_{ij}(\xi(t)) dt \rightarrow \max. \quad (3.51)$$

Здесь $x_{ij}(t)$ — интенсивность выпуска продукции вида i на предприятии вида j , $c_{ij}(\xi(t))$ — маржинальный доход от выпуска продукции вида i на предприятии вида j в момент времени t , при уровне накопленной инфляции $\xi(t)$:

$$\sum_{i=1}^n t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_i(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} \theta_{lj}, \quad l = \overline{1, K}, j = \overline{1, M},$$

$$\forall t_1, t_2 \in (0; T), t_2 > t_1, \quad (3.52)$$

где θ_{lj} — лимит эффективного времени работы оборудования вида l на предприятии вида j , t_{il} — время закупки оборудования вида l при выпуске одной единицы продукции вида j . Неравенство (3.52) — это ограничение на равномерность загрузки оборудования.

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_0^T x_{ij}(t) dt \leq W_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (3.53)$$

Здесь v_i — объем склада, занимаемый комплектующими для одной единицы продукции вида i , $\int_0^T x_{ij}(t) dt$ — объем выпуска продукции вида i на предприятии j , W_j — емкость склада предприятия j .

$$\sum_{i=1}^n l_{iq} \int_0^t x_{ij}(t') dt' \leq \int_0^t Z_{qj}(t') dt', \quad j = \overline{1, M}, q = \overline{1, L}. \quad (3.54)$$

Здесь $Z_{qj}(t)$ — интенсивность закупки комплектующих вида q на предприятии j , L — количество комплектующих вида q , необходимых для выпуска единицы продукции вида i .

$$\sum_{q=1}^L \beta_q \int_0^t Z_{qj}(t') dt' \leq \int_0^t f_j(t') dt', \quad j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0; T), \quad (3.55)$$

где β_q — цена комплектующих вида q , $f_j(t)$ — интенсивность поступления оборотных средств на предприятие j . Неравенство (3.55) — это ограничение на объем использования оборотных средств предприятия j . Также существует следующее ограничение на спрос:

$$\sum_{j=1}^M \int_0^T x_{ij}(t) dt \leq Pt_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad x(t) \geq 0 \forall t \in (0; T). \quad (3.56)$$

3.10. Динамическая модель управления оборотными средствами нескольких предприятий с учетом привлечения кредита. Рассмотрим обобщение предыдущей модели в условиях возможности привлечения кредита как для закупки комплектующих, так и для аренды дополнительных складских помещений. Далее будем считать, что кредит для закупки комплектующих привлекается под процент $\pm_1$ (в долях), а кредит для аренды склада — под процент $\pm_2$ (в долях).

Целесообразность привлечения кредитных ресурсов можно оценить, если рассмотреть следующие возможности его использования:

- а) кредит не привлекается;
- б) кредит привлекается для закупки комплектующих;
- в) кредит привлекается для дополнительной аренды складских помещений;
- г) кредит привлекается и для закупки комплектующих, и для дополнительной аренды склада.

Ситуация а), когда кредит не привлекается, рассмотрена в модели (3.51)–(3.56). Далее она будет называться задачей 1.

Рассмотрим ситуацию б), далее будем называть ее задачей 2. Модель оптимизации прибыли в этом случае может быть следующей:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_0^T x_{ij}(t) c_{ij}(\xi(t)) dt - \alpha_1 \left(\sum_{j=1}^M \sum_{q=1}^L \beta_q \int_0^t Z_{qj}(t') dt' - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^M \int_0^t f_j(t') dt' \right) \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_{ij}(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} \theta_{lj}, \quad l = \overline{1, K}, j = \overline{1, M}, \quad (3.58)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_0^T x_{ij}(t) dt \leq W_j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (3.59)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{iq} \int_0^t x_{ij}(t') dt' \leq \int_0^t Z_{qj}(t') dt', \quad j = \overline{1, M}, q = \overline{1, L}, \quad (3.60)$$

$$\sum_{q=1}^L \beta_q \int_0^t Z_{qj}(t') dt' \leq \int_0^t f_j(t') dt' + \int_0^t f_j^{kp}(t') dt', \quad j = \overline{1, M}. \quad (3.61)$$

Здесь $f_j^{kp}(t)$ — интенсивность поступления кредитных средств на предприятие j .

$$\sum_{q=1}^L \beta_q \int_0^t Z_{qj}(t') dt' > \int_0^t f_j(t') dt', \quad j = \overline{1, M}, \quad (0, t) \subseteq (0; T). \quad (3.62)$$

Ограничение (3.62) означает, что существует интервал времени $(0, t) \subseteq (0; T)$, на котором затраты на закупку комплектующих превышают имеющиеся у предприятия оборотные средства на отрезке времени $(0, t)$, и поэтому недостаток оборотных средств компенсируется за счет привлечения кредита под процент $\pm_1$.

$$\sum_{j=1}^M \int_0^T x_{ij}(t) dt \leq Pt_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, M} \quad (3.63)$$

Отметим, что в целевой функции (3.55) отрицательное слагаемое задает объем дополнительных затрат, связанных с привлечением кредита.

Рассмотрим ситуацию, когда кредит привлекается для дополнительной аренды склада (задача 3).

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_0^T x_{ij}(t) c_{ij}(\xi(t)) dt - (1 + \alpha_2) \sum_{j=1}^M W_j y_j \rightarrow \max, \quad (3.64)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_{ij}(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} \theta_{lj}, \quad l = \overline{1, K}, j = \overline{1, M}, \quad (3.65)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_0^T x_{ij}(t) dt \leq W_j + w_j y_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (3.66)$$

Здесь w_j — емкость дополнительно арендованных складских помещений, y_j — стоимость аренды одной единицы складского пространства.

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_0^T x_{ij}(t) dt > W_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (3.67)$$

Из ограничения (3.67) следует, что объем комплектующих при выпуске конечной продукции на предприятии j выше емкости склада, на котором хранятся данные комплектующие.

$$\sum_{i=1}^n t_{iq} \int_0^t x_{ij}(t') dt' \leq \int_0^t Z_{qj}(t') dt', \quad j = \overline{1, M}, q = \overline{1, L}, \quad (3.68)$$

$$\sum_{q=1}^L \beta_q \int_0^t Z_{qj}(t') dt' \leq \int_0^t f_j(t') dt', \quad j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0; T), \quad (3.69)$$

$$\sum_{j=1}^M \int_0^T x_{ij}(t') dt' \leq P t_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (3.70)$$

Отметим, что в целевой функции (3.64) слагаемое

$$(1 + \alpha_2) \sum_{j=1}^M W_j y_j$$

— это затраты на дополнительную аренду склада.

Рассмотрим ситуацию, когда кредит привлекается и с целью закупки комплектующих, и с целью аренды дополнительных складских площадей (задача 4).

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_0^T x_{ij}(t) c_{ij}(\xi(t)) dt - \alpha_2 \left(\sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^L \beta_q \int_0^T Z_{qj}(t') dt' - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^M \int_0^T f_j(t') dt' \right) - (1 + \alpha_2) \sum_{j=1}^M W_j y_j \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} \int_{t_1}^{t_2} x_{ij}(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} \theta_{lj}, \quad l = \overline{1, K}, j = \overline{1, M}, \quad (3.72)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_0^T x_{ij}(t) dt \leq W_j + w_j y_j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (3.73)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i \int_0^T x_{ij}(t) dt > W_j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (3.74)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{iq} \int_0^t x_{ij}(t') dt' \leq \int_0^t Z_{qj}(t') dt', \quad (3.75)$$

$$j = \overline{1, M}, q = \overline{1, L}, \forall t \in (0; T),$$

$$\sum_{q=1}^L \beta_q \int_0^t Z_{qj}(t') dt' \leq \int_0^t f_j(t') dt' + \int_0^t f_j^{kp}(t') dt', \quad (3.76)$$

$$j = \overline{1, M},$$

$$\sum_{q=1}^L \beta_q \int_0^t Z_{qj}(t') dt' > \int_0^t f_j(t') dt', \quad (3.77)$$

$$\sum_{j=1}^M \int_0^T x_{ij}(t) dt \leq P t_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (3.78)$$

Таким образом, были рассмотрены различные варианты привлечения кредита. Для оценки эффективности каждого варианта решается соответствующая оптимизационная задача (задачи 1–4). В итоге выбирается та стратегия, которая дает более высокое значение маржинального дохода (целевых функционалов (3.51), (3.57), (3.64), (3.71)).

4. Компьютерные расчеты по выбору оптимальной производственной программы на примере металлургического предприятия. Рассмотрим металлургическое предприятие, специализирующееся на производстве сортового и листового проката для реализации на российском строительном рынке. Ассортимент строительного проката, производимого на российском рынке, насчитывает сотни товарных позиций, включая различные виды арматуры, балок и швеллеров, гнутых металлических профилей из тонкого листа, металлические бруски и пр. Все эти виды продукции не являются взаимозаменяемыми и необходимы при реализации большинства строительных проектов как в сфере жилищного строительства, так и в секторе коммерческой недвижимости. Стоимость изделий, реализуемых металлургическими предприятиями, постоянно меняется на фоне динамики котировок мирового рынка стали и чугуна, каменного угля и кокса, а также железорудного сырья, лома и стальной заготовки.

В настоящее время российские производители металлических изделий функционируют в условиях неблагоприятной рыночной конъюнктуры: в частности, по данным Росстата, объем строительных работ в России в 2016 г. сократился на 5%. При этом на фоне сокращения предложения коксующегося угля со стороны Китая более чем в 1,5 раза выросли цены на кокс, используемый при выплавке чугуна доменным способом. Это привело к удорожанию черных металлов и росту цен на готовую продукцию, что еще сильнее отталкивает покупателей находящейся в кризисе строительной отрасли.

Основным сегментом рынка, потребляющим металлические изделия вышеописанного типа, являются частные строительные компании. В работе не рассматриваются ситуации государственных закупок или поставок крупным потребителям (например, холдингам ОАО «РЖД» или ПАО «Газпром», закупающим данные изделия для внутренних нужд), поскольку для участия в процедуре тендера фокусная компания принимает решение о формировании производственной программы исходя из запросов крупного заказчика, имеющего большее влияние на рынке. В случае же реализации продукции большому перечню небольших компаний по

краткосрочным контрактам у производителя есть возможность более гибко организовать производственный процесс.

Исходя из вышеописанного можно сделать вывод, что применение оптимизационных моделей выбора производственной программы предприятий целесообразно для предприятий-производителей строительного проката в условиях нестабильности рыночной ситуации и необходимости сокращать затраты предприятия с целью повышения рентабельности бизнеса.

4.1. Описание фокусной компании-производителя металлических изделий. Рассмотрим в качестве примера предприятие, которое является одним из ключевых производителей металлургической продукции строительного сортамента в своем регионе. Его деятельность в условиях нестабильности спроса и общего снижения объемов строительных работ требует максимальной эффективности управления финансовыми ресурсами. В связи с этим необходимо привести информацию об ассортименте готовой продукции (ГП) данного предприятия, потребляемых при ее производстве материальных ресурсах (МР), а также об имеющемся оборудовании, которое используется для изготовления металлических изделий.

Также есть информация о ценах, по которым продукция должна будет реализовываться в течение периода (при этом цены могут и изменяться при существенном изменении рыночной конъюнктуры). Для расчетов цены видов продукции, измеряемой в тоннах, квадратных метрах и иных единицах, приведены к руб/т. Объемы продукции также приведены к тоннам (табл. 1).

Рассматривается ситуация определения производственной программы предприятия на один плановый период (квартал). Компания располагает прогнозом спроса на этот период по всем ранее обращавшимся к ней клиентам (суммарный спрос по ним учитывается как величина спроса на один вид продукции), при этом есть некий минимальный объем реализации (заказ), также суммируемый по клиентам компании. Максимальный объем реализации вычисляется исходя из обмена информацией с контрагентами и статистики продаж в предыдущих периодах (отношение объемов продаж к предварительно размещенным заказам). Также в него закладывается возможный дополнительный объем реализации новым покупателям, ранее не обращавшимся к фокусной компании (их спрос вычисляется как разность между долями уже существующих клиентов и общей емкостью рыночного сегмента).

Имеются следующие данные о потребляемых для различных видов продукции ресурсах. Помимо этого, нужно дать описание запасам предприятия, хранящимся на складах вблизи производственной площадки (данные об остатках приведены на начало периода) (табл. 2).

Таблица 1. Перечень выпускаемой продукции, цена и величина спроса на ГП

Продукция	Цена реализации, руб/т	Размер заказа	Максимальная величина спроса
			т
Швеллер №10	17 685.5	12.7	15.6
Арматура для ж/б конструкций 6 мм гл.	25 173.2	11.2	14.9
Арматура для ж/б конструкций 12 мм гл.	25 393.9	12.6	16.1
Брусok металлический 5х50 мм	20 281.7	13.3	16.7
Швеллер № 16	23 762.7	13.4	16.6
Балка 20х16 мм	16 825.3	12.5	16.6
Балка 25х25 мм	19 669.7	12.4	15.1
Балка 20х20 мм	19 848.4	12.4	14.7
Арматура 20 мм гл.	24 228.4	13.0	16.8
Профиль квадратный 23х23х1,5	19 715.5	12.8	15.7
Профиль квадратный 10х10х1,5	19 810.9	14.1	16.9
Профиль металлический 140 ЗСП5	18 339.6	12.7	16.9
Уголок 80х80х2	18 096.8	13.1	17.5
Шестигранник стальной 14 мм	20 008.4	13.9	15.8
Труба профильная 5х5х3	23 781.7	11.9	15.5
Труба профильная 5х5х2	22 402.5	12.2	15.0
Труба профильная 6х6х3	24 528.6	11.1	14.5
Профиль потолочный П60х27-3000	20 619.8	14.3	17.2
Профиль перфорированный 08ПС	24 435.4	11.9	13.4
Тавр тепличный 32х25х3	23 730.5	11.5	13.2

Таблица 2. Нормы расхода МР (на тонну ГП) для различных видов продукции

Катанка 6/12/20	Лист стальной 1,5/2/3/5	Заготовка квадратная	Цинковое покрытие	Краска	Электроэнергия для питания станков	ФОТ производственного персонала
мм, т		т			руб.	
		1.01			56.5	848.0
1.16					66.1	836.0
1.18					65.2	965.0
		1.15		.	55.7	991.0
1.1					51.7	808.0
		0.96		0.004	89.2	804.0
		1.07		0.006	92.1	945.0
		1.1		0.005	79.7	806.0
1.11					64.0	857.0
		1.08	0.005		78.2	836.0
		1.12	0.006		86.8	872.0
		1.03	0.005		82.7	844.0
		1.02			48.7	864.0
		1.2			29.5	970.0
	1.1		0.007	0.007	108.5	880.0
	1.02		0.007	0.008	111.6	971.0
	1.13		0.007	0.006	97.5	859.0
	0.95		0.003		61.4	964.0
	1.16		0.003		56.1	818.0
	1.11		0.002		64.6	947.0

В табл. 2 указаны нормы расхода электроэнергии из расчета стоимости одного кВт*ч, равной 2 руб., и мощности эксплуатируемого оборудования. В переменные издержки входит фонд оплаты труда (ФОТ) производственного персонала со сдельной системой оплаты труда. Данные виды затрат сразу переведены в денежный эквивалент и суммируются в модели без повторного умножения на стоимость их приобретения. Часть материальных ресурсов используется только для некоторых видов продукции (в случае, если материальный ресурс какого-либо вида не применяется при производстве определенной номенклатурной позиции, в таблице не указана норма его расхода). Это дополнительно усложняет процесс принятия управленческих решений, поскольку от грамотного определения производственной программы будет зависеть, надо ли будет отделу снабжения приобретать все возможные МР или же только их часть.

Предприятие располагает двумя производственными линиями, каждая из которых включает в себя по одному виду вышеперечисленного оборудования. Загрузка производственных мощностей в штатной ситуации достигает 70% при условии трехсменного графика работы по 30 дней/мес (табл. 3).

Стоит отметить, что поскольку все объемы и затраты приводятся на тонну, в рамках решения данной задачи нет принципиальной разницы в цене закупки стальных листов и катанки различного сортамента, так как их различие для предприятия обусловлено в первую очередь габаритными, а не весовыми или иными качественными характеристиками.

Данные о стоимости закупки МР и объемах располагаемых запасов представлены в табл. 4. Также предприятие имеет данные о своих постоянных издержках и располагаемых финансовых средствах на банковском счете, которые можно использовать как для закупки недостающих МР, так и для приобретения нового оборудования и аренды складских мощностей в случае необходимости. В постоянные издержки предприятия входят затраты на электроэнергию для освещения и вентиляции, отопление, МР, используемые вне производства ключевой продукции компании, включая канцелярские товары и расходные материалы для обслуживаю-

Таблица 3. Нормы расходы времени при производстве готовой продукции, мин

Прокатный стан			Нож для резки		Установка	
№1	№2	№3	проката	стали	для оцинковки	для покраски
		112	194	166		
162			159	174		
143			170	183		
		104	169	187		
119			144	131		
		153	186	185		153
		172	189	138		191
		138	195	146		134
137			177	176		
		149	113	190	163	
		185	131	192	176	
		197	151	173	137	
		110	196	108		
			127	126		
	128		177	172	167	197
	187		198	135	188	180
	200		168	199	126	104
	174		128	130	104	
	107		102	129	135	
	157		148	116	140	

Таблица 4. Данные о стоимости закупки МР и объемах располагаемых запасов

Вид материального ресурса	Катанка 6/12/20	Лист стальной 1,5/2/3/5	Заготовка квадратная	Цинковое покрытие	Краска
	мм				
Стоимость закупки МР, руб/т	19500	18800	15570	14000	18000
Объем запаса МР на складах предприятия, т	60.2	82.6	147.7	0.6	0.5

щих хозяйств, оплата труда менеджеров и другого персонала с повременной системой оплаты труда и ряд других затрат. Для фокусной компании примем, что общая величина таких издержек составит 400 000 руб. за период. При этом предприятие располагает дополнительным объемом денежных средств в размере 900 000 руб. для обеспечения деятельности в будущем.

Используя имеющиеся данные, управленческому персоналу необходимо найти оптимальную производственную программу предприятия при помощи наиболее подходящей для рассматриваемой ситуации модели выбора производственной программы.

4.2. Математическая постановка задачи выбора оптимальной производственной программы предприятия. На основании вышеперечисленных данных и табл. 5 сформируем постановку задачи выбора производственной программы предприятия.

В рамках представленных условий сформируем в Excel модели целевой функционал (1.1) и его ограничения (1.2)–(1.6), включая ограничения на целочисленность решения, его неотрицательность и соответствие объему спроса на производимую продукцию. В результате применения надстройки «Поиск решения» была определена следующая производственная программа, задаваемая вектором в крайнем правом столбце табл. 6 (данные приведены с округ-

Таблица 5. Данные о стоимости реализации ГП и переменных издержках, руб/т

Продукция	Цена реализации	Переменные издержки на единицу продукции
Швеллер № 10	17 685.5	16630.2
Арматура для ж/б конструкций 6 мм гл.	25 173.2	23522.1
Арматура для ж/б конструкций 12 мм гл.	25 393.9	24040.2
Брусok металлический 5х50 мм	20 281.7	18952.2
Швеллер № 16	23 762.7	22309.7
Балка 20х16 мм	16 825.3	15912.4
Балка 25х25 мм	19 669.7	17805.0
Балка 20х20 мм	19 848.4	18102.7
Арматура 20 мм гл.	24 228.4	22566.0
Профиль квадратный 23х23х1,5	19 715.5	17799.8
Профиль квадратный 10х10х1,5	19 810.9	18481.2
Профиль металлический 140 ЗСП5	18 339.6	17033.8
Уголок 80х80х2	18 096.8	16794.1
Шестигранник стальной 14 мм	20 008.4	19683.5
Труба профильная 5х5х3	23 781.7	21892.5
Труба профильная 5х5х2	22 402.5	20500.6
Труба профильная 6х6х3	24 528.6	22406.5
Профиль потолочный П60х27-3000	20 619.8	18927.4
Профиль перфорированный 08ПС	24 435.4	22724.1
Тавр тепличный 32х25х3	23 730.5	21907.6

Таблица 6. Оптимальная производственная программа рассматриваемого предприятия

Продукция	Количество производимой продукции, т
Швеллер № 10	12.684
Арматура для ж/б конструкций 6 мм гл.	11.166
Арматура для ж/б конструкций 12 мм гл.	12.617
Брусok металлический 5х50 мм	13.327
Швеллер № 16	13.359
Балка 20х16 мм	12.518
Балка 25х25 мм	15.136
Балка 20х20 мм	13.189
Арматура 20 мм гл.	15.881
Профиль квадратный 23х23х1,5	15.690
Профиль квадратный 10х10х1,5	14.085
Профиль металлический 140 ЗСП5	12.687
Уголок 80х80х2	13.136
Шестигранник стальной 14 мм	15.787
Труба профильная 5х5х3	11.928
Труба профильная 5х5х2	12.159
Труба профильная 6х6х3	11.795
Профиль потолочный П60х27-3000	17.188
Профиль перфорированный 08ПС	11.857
Тавр тепличный 32х25х3	12.298

Таблица 7. Оптимальная производственная программа рассматриваемого предприятия с учетом дополнительной закупки материальных ресурсов

№ п.п.	Продукция	Количество производимой продукции, т
1	Швеллер № 10	12.684
2	Арматура для ж/б конструкций 6 мм гл.	11.166
3	Арматура для ж/б конструкций 12 мм гл.	12.617
4	Брусok железный 5х50 мм	13.327
5	Швеллер № 16	13.359
6	Балка 20х16 мм	12.518
7	Балка 25х25 мм	12.384
8	Балка 20х20 мм	12.444
9	Арматура 20 мм гл.	13.029
10	Профиль квадратный 23х23х1,5	12.837
11	Профиль квадратный 10х10х1,5	14.085
12	Профиль металлический 140 ЗСП5	12.687
13	Уголок 80х80х2	13.136
14	Шестигранник стальной 14 мм	13.930
15	Труба профильная 5х5х3	11.928
16	Труба профильная 5х5х2	12.159
17	Труба профильная 6х6х3	11.146
18	Профиль потолочный П60х27-3000	14.323
19	Профиль перфорированный 08ПС	11.857
20	Тавр тепличный 32х25х3	11.494

Таблица 8. Вектор закупки дополнительных материальных ресурсов

Наименование ресурса	Величина закупки, т
Катанка 6/12/20 мм	11.874
Лист стальной 1,5/2/3/5 мм	16.300
Заготовка квадратная	42.382
Цинковое покрытие	0.117
Краска	0.090

лением до третьего знака после запятой по причине того, что ограничение на целочисленность решения распространяется на килограммы, а не на тонны).

Таким образом, в условиях практического примера было проиллюстрировано решение оптимизационной задачи (1.1)–(1.6). Исходные данные были таковы, что у предприятия хватало запасов для производства продукции в рамках ограничения на размер заказа. Однако если размер заказа увеличится в связи с ростом спроса на продукцию металлургической отрасли в целом по региону, где функционирует рассматриваемое предприятие, данная задача в определенный момент времени не будет иметь допустимых решений. В таком случае предприятию будет необходимо использовать свои финансовые ресурсы для закупки дополнительного объема запасов, для чего в модели присутствуют ограничения (1.9)–(1.15). Если собственных финансовых ресурсов по-прежнему недостаточно для выполнения всех ограничений, то предприятие следует рассмотреть модель выбора оптимальной производственной программы с условием привлечения кредита (2.12)–(2.18).

Рассмотрим решение задачи с учетом формул (1.9)–(1.15). Пусть в данной задаче на 20% уменьшится объем располагаемых запасов предприятия. Тогда ему будет необходимо привлечь дополнительный объем МР за счет собственных финансовых средств. В данном случае

постановка задачи в MS Excel несколько изменится. При этом необходимо создать дополнительный целевой функционал, в который добавится слагаемое (1.9), однако для расчета прибыли предприятия продолжим использовать формулу (1.1). Стоит отметить, что в данный момент предприятие не планирует закупать дополнительное оборудование, в связи с чем ограничения на эти затраты и не влияют на поиск решения. Также следует учесть неотрицательность объемов дополнительно закупаемых МР, что задается при помощи заново создаваемого ограничения на ячейки, содержащие значения Z_j .

В результате применения надстройки “поиск решения” была определена следующая оптимальная производственная программа предприятия (табл. 7). В сравнении с предыдущей моделью изменилось решение для товарных позиций № 7–10, 14, 17, 18 и 20. Для остальных позиций решение осталось неизменно.

С помощью модификации модели с учетом дополнительных закупок МР была получена другая производственная программа (табл. 7, 8). По мере усложнения задачи решение приближается к наилучшему для рассматриваемого предприятия, поэтому целесообразно более углубленно изучить особенности процесса снабжения предприятия, хранения ГП, ее потребления и иных характеристик, влияющих на выбор модели.

Заключение. Предложенные в работе модели выбора оптимальной производственной программы предприятия сокращают издержки производства и увеличивают прибыль предприятия при сохранении требуемого уровня обслуживания клиентов с точки зрения полноты и своевременности поставок ГП. В современных условиях производственным предприятиям необходимо использовать все имеющиеся резервы повышения доходности активов, поэтому применение математических методов при принятии решений становится все более актуальным.

В работе были рассмотрены модели, позволяющие оптимизировать производственную программу предприятия в зависимости от объема располагаемых материальных и финансовых ресурсов, а также в условиях изменяющихся цен, что дает возможность использовать данные модели любым предприятиям вне зависимости от их текущего финансового положения и степени неопределенности внешней среды. Решение поставленных задач средствами MS Excel также делает предложенные модели доступными для всех сфер бизнеса, в том числе для малых предприятий. Применение предложенных моделей оптимизирует работу производственного предприятия с учетом имеющихся складских мощностей и интенсивности потребления производимой продукции. Особенности производственного процесса и хранения ГП позволяют применять все доступные предприятию резервы повышения прибыли за счет оптимизации использования имеющихся ресурсов.

Для наиболее эффективной организации функционирования всей цепи поставок необходимо не только оптимизировать производственную программу предприятия путем формирования графика производства с помощью предложенных моделей, но и согласовать планы снабжения и производства, чтобы избежать формирования излишних запасов на складе. Высвобождение финансовых средств за счет повышения оборачиваемости запасов МР даст возможность при необходимости увеличивать объемы инвестиций в закупку нового оборудования, в том числе для расширения узких мест производства и дальнейшего повышения его эффективности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карлова Н., Пузанова Е. Российская обрабатывающая промышленность в условиях санкций: результаты опроса предприятий. Аналитическая записка. Центральный банк Российской Федерации, 2023.
2. Данилин Н.Н. Реструктуризация системы управления предприятием в условиях кризиса. Стратегии бизнеса. 2014 № 2, С. 82–87. <https://doi.org/10.17747/2311-7184-2014-2-82-87>
3. Mishchenko A.V., Solodovnikov V.V., Apalkova T.G. Dynamic Models of Production -finance Activity of Enterprises in Conditions of Uncertainties and Risk // Intern. J. of Logistics Systems and Management. 2022. V. 43. No. 1. Pp. 86–111.
4. Апалькова Т.Г., Мищенко А.В. Методы и модели оценки эффективности управления производственно-финансовой деятельностью в промышленной логистике // Логистика и управление цепями поставок. 2016. № 2 (73). С. 8–27.
5. Мищенко А.В., Андреева М.В. Модели управления производственной деятельностью предприятия в условиях привлечения заемных средств // Финансы и кредит. 2009. № 2 (338). С. 12–21.
6. Мищенко А.В., Виноградова Е.В. Оптимизационные модели управления финансовыми ресурсами предприятия, М.: ИНФРА-М, 2015.