

УДК 62-50

ГЛОБАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАТОРА 2-ГО ПОРЯДКА ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ В ВИДЕ ВЛОЖЕННЫХ СИГМОИД

© 2024 г. Ю. В. Морозов^{1,*}, А. В. Пестерев^{1,**}

¹ИПУ РАН, Москва, Россия

* e-mail: tot1983@inbox.ru

** e-mail: alexanderpesterev.ap@gmail.com

Поступила в редакцию 06.02.2024 г.

После доработки 05.04.2024 г.

Принята к публикации 13.05.2024 г.

Рассматривается задача стабилизации цепочки двух интеграторов с помощью обратной связи в виде двух вложенных сигмоид. Использование такой обратной связи позволяет легко учесть ограниченность ресурса управления и обеспечить выполнение желаемых характеристик переходного процесса, таких как заданная скорость экспоненциального убывания отклонения вблизи положения равновесия и ограничение на максимальную скорость приближения к положению равновесия. Построена функция Ляпунова замкнутой системы, с помощью которой доказана ее глобальная асимптотическая устойчивость при любых положительных коэффициентах обратной связи.

Ключевые слова: стабилизация цепочки двух интеграторов, глобальная асимптотическая устойчивость, вложенные сатураторы, функция Ляпунова

DOI: 10.31857/S0002338824030016 EDN: URCEUP

GLOBAL STABILIZATION OF A CHAIN OF TWO INTEGRATORS BY A FEEDBACK IN THE FORM OF NESTED SIGMOIDS

Yu. V. Morozov^{a,*}, A. V. Pesterev^{a,**}

^aV. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

* e-mail: tot1983@inbox.ru

** e-mail: alexanderpesterev.ap@gmail.com

The problem of stabilizing a chain of two integrators by a feedback in the form of nested sigmoids is considered. Such a feedback allows one to easily take into account boundedness of the control resource and ensure the fulfillment of desired characteristics of the transient process, such as a given exponential rate of the deviation decrease near the equilibrium state and the constraint on the maximum velocity. Global stability of the closed-loop system is proved by constructing its Lyapunov function.

Keywords: stabilization of a second-order integrator, nested sigmoids, global asymptotic stability, Lyapunov function

Введение. Задача стабилизации цепочек интеграторов широко обсуждалась в литературе по управлению в течение нескольких последних десятилетий (см. [1–8] и приведенные там ссылки). Интерес к данной проблематике объясняется тем, что во многих приложениях исходные модели (например, модели механических и планарных систем) заданы в виде цепочек интеграторов. Кроме того, управления, разработанные для цепочек интеграторов, легко обобщаются на более широкие классы систем. С другой стороны, в последнее время широкое распространение в задачах стабилизации различных систем, и в частности цепочек интеграторов, получили обратные связи в виде вложенных как гладких, так и негладких функций насыщения. Интерес к обратным связям такого рода обусловлен тем, что они позволяют автоматически учесть ограниченность ресурса управления и при этом обеспечить выполнение определенных фазовых ограничений, что особенно важно вдали от положения равновесия,

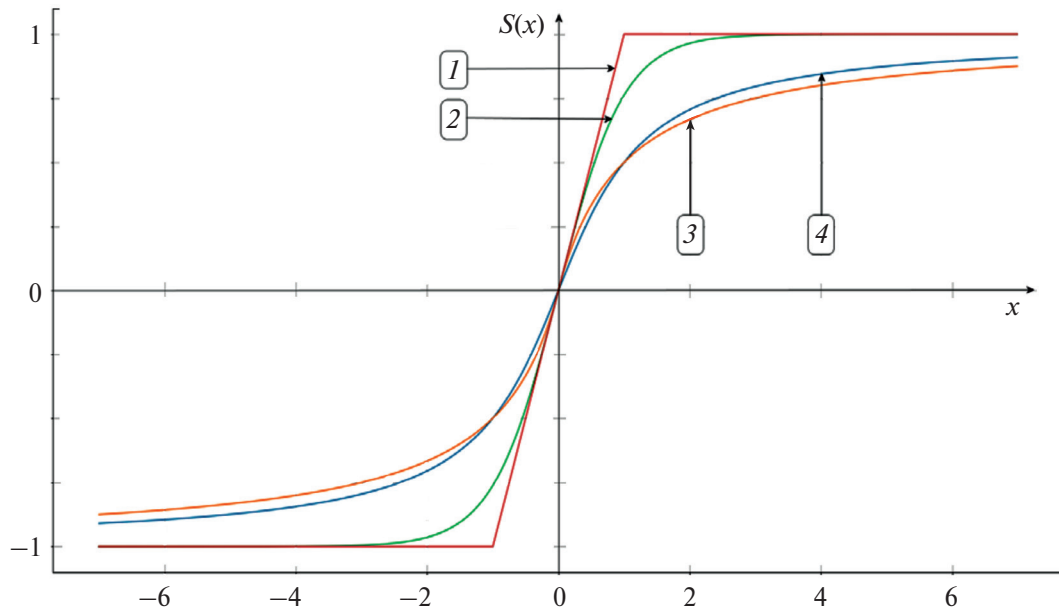


Рис. 1. Примеры функций насыщения: $\text{sat}(x)$ (1); $\tanh(x)$ (2); $2\arctg(x)/\pi$ (3); $x/(1+|x|)$ (4).

а также гарантируют экспоненциальную скорость убывания отклонения вблизи положения равновесия [2–10]. Функцией насыщения называют непрерывную монотонно неубывающую функцию $S(x)$ скалярной переменной, такую, что $S(x) \rightarrow 1$ ($S(x) \rightarrow -1$), когда $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow -\infty$). Гладкие, строго возрастающие функции насыщения, удовлетворяющие условию $S(0)=0$, принято называть сигмоидами (сигмоидными функциями). В семейство функций класса сигмоид входят такие функции, как функция ошибок, арктангенс, гиперболический тангенс и другие функции подобного вида. Предельным случаем сигмоиды является негладкая функция насыщения – сатуратор: $\text{sat}(s)=s$, когда $|s| \leq 1$, и $\text{sat}(s)=\text{sign}(s)$ при $|s| > 1$. Примеры функций насыщения – три сигмоиды и сатуратор – приведены на рис. 1.

В большинстве работ об устойчивости систем с обратными связями в виде вложенных функций насыщения в качестве последних рассматриваются сатураторы [2–10]. Несомненным преимуществом использования сигмоид, по сравнению с сатураторами, в рассматриваемых обратных связях с точки зрения практики является гладкость полученной замкнутой системы. Однако исследование устойчивости в этом случае представляет большую трудность, так как приходится иметь дело с нелинейной системой. Вообще говоря, достаточно общего вида, в то время как при замыкании обратной связью в виде вложенных сатураторов получаем нелинейную систему специального вида, а именно линейную систему с переключениями. Авторам не известны публикации, где бы исследовалась глобальная устойчивость систем с обратными связями в виде вложенных сигмоид произвольного вида.

Цель настоящего исследования – доказать глобальную асимптотическую устойчивость цепочки двух интеграторов, замкнутых обратной связью в виде любых вложенных сигмоид для любых положительных коэффициентов обратной связи.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача стабилизации интегратора 2-го порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = U(x), \quad x \equiv [x_1, x_2]^T \quad (1)$$

с помощью гладкой обратной связи в виде вложенных сигмоид:

$$U(x_1, x_2) = -k_4 \text{sigm}\left(k_3 \left(x_2 + k_2 \text{sigm}(k_1 x_1)\right)\right), \quad (2)$$

где $\text{sigm}(s)$ – произвольная гладкая функция насыщения (сигмоида), k_4 – ресурс управления и k_2 – ограничение на диапазон изменения переменной x_2 : при любом начальном отклонении $x_1(0)$, $x_2(t) \leq k_2$ коль скоро $x_2(0) \leq k_2$ [8]. Коэффициенты k_2 и k_4 считаются заданными, а k_1 и k_3

выбираются так, чтобы обеспечить желаемые характеристики переходного процесса. В общем случае внутренняя и внешняя сигмиды могут быть разными функциями; здесь, однако, для упрощения записи используется одно обозначение для обеих.

Преимущества обратной связи в виде вложенных сатураторов обсуждаются в работах [2–10]. Применительно к рассматриваемой здесь системе 2-го порядка — это автоматическое выполнение вышеупомянутых ограничений на управление и максимальную скорость приближения к положению равновесия [7, 8, 10]. Указанные свойства справедливы и для обратных связей в виде вложенных сигмид. Как и в случае сатураторов, соответствующим выбором коэффициентов k_1 и k_3 легко обеспечить любое желаемое значение экспоненциальной скорости убывания отклонения линеаризованной в окрестности нуля системы:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_3 k_4 x_2 - k_1 k_2 k_3 k_4 x_1,$$

а также желаемый тип положения равновесия (узел или фокус) [8, 10]: если $k_3 k_4 < 4k_1 k_2$, то $x = 0$ — фокус, иначе — устойчивый узел. В работе [4] доказана глобальная устойчивость системы (1) с обратной связью в виде вложенных сатураторов в частном случае выбора коэффициентов k_1 и k_3 из однопараметрического семейства. Доказательство существенно опирается на свойства сатуратора $\text{sat}(s)$, а также использует тот факт, что коэффициенты k_1 и k_3 выбираются из однопараметрического семейства неприменимо к случаю гладких функций насыщения.

Цель настоящей работы — доказать глобальную асимптотическую устойчивость системы (1), (2) для любых гладких функций насыщения (сигмид) и любых положительных коэффициентов обратной связи.

2. Доказательство глобальной устойчивости системы (1), (2). В общем случае любая функция насыщения задается двумя параметрами: предельным значением и коэффициентом при аргументе функции, определяющим скорость ее изменения. Для двух вложенных функций насыщения имеем четыре коэффициента в (2). Как и в случае негладкой функции насыщения, переход к безразмерным переменным $\tilde{x}_1 = k_4 x_1 / k_2^2$, $\tilde{x}_2 = x_2 / k_2$ и времени $\tilde{t} = k_4 t / k_2$ [10] позволяет избавиться от двух параметров. Непосредственной проверкой убеждаемся, что в безразмерной модели ресурс управления и максимальная скорость равны единице: $\tilde{k}_4 = \tilde{k}_2 = 1$, а два других коэффициента определены формулами $\tilde{k}_1 = k_1 k_2^2 / k_4$ и $\tilde{k}_3 = k_2 k_3 / k_4$. Всюду далее будем полагать все переменные и константы безразмерными и использовать для них прежнее обозначение (без тильды). В безразмерном виде система (1), (2) принимает вид:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\text{sigm}\left(k_3 \left(x_2 + \text{sigm}\left(k_1 x_1\right)\right)\right). \quad (3)$$

Таким образом, исследование исходной, зависящей от четырех параметров системы (1), (2) сводится к исследованию двухпараметрической системы (3).

Прежде чем сформулировать основной результат работы, приведем используемые в доказательстве теоремы свойства сигмид, следующие непосредственно из их строгой монотонности:

- $\text{sigm}(\alpha s) s > 0 \quad \forall s \neq 0, \forall \alpha > 0$;
- $\text{sigm}(\alpha \text{sigm}(s))$ — монотонно возрастающая функция s при любых $\alpha > 0$;
- $[\text{sigm}(s + s_0) - \text{sigm}(s_0)] s > 0 \quad \forall s \neq 0, \forall s_0$.

Очевидно, что свойство (ii) имеет место независимо от того, какие функции применяются в качестве внутренней и внешней сигмид.

ТЕОРЕМА. Нулевое решение системы (3) глобально асимптотически устойчиво при любых положительных коэффициентах.

Доказательство теоремы. Рассмотрим функцию

$$V(x) = \frac{1}{2} x_2^2 + \int_0^{x_1} \text{sigm}(k_3 \text{sigm}(k_1 s)) ds \quad (4)$$

и докажем, что она является функцией Ляпунова системы (3). Функция $V(x)$, очевидно, положительно определена во всем R в силу свойств (i) и (ii) и стремится к бесконечности при $\|x\| \rightarrow \infty$. Дифференцируя $V(x)$ в силу системы (3), получим:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -x_2 \operatorname{sigm}\left(k_3\left(x_2 + \operatorname{sigm}(k_1 x_1)\right)\right) + \operatorname{sigm}\left(k_3 \operatorname{sigm}(k_1 x_1)\right) x_2 = \\ &= -\left[\operatorname{sigm}\left(k_3\left(x_2 + \operatorname{sigm}(k_1 x_1)\right)\right) - \operatorname{sigm}\left(k_3 \operatorname{sigm}(k_1 x_1)\right)\right] x_2 < 0.\end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из свойств (ii) и (iii). Наконец, $\dot{V}=0$ только на множестве $x_2=0$, которое не содержит ни одной целой траектории, кроме $x=0$. Таким образом, функция $V(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Барбашина—Красовского [11] и, следовательно, начало координат является асимптотически устойчивым положением равновесия системы (3) в целом. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Из доказательства теоремы видно, что свойство строгой монотонности внутренней сигмоиды нигде не используется, так что ее можно заменить на любую неубывающую функцию насыщения (например, из класса гладких функций, предложенных в [6]), в том числе на сатуратор.

З а м е ч а н и е. Заметим, что функции Ляпунова для более простых систем вида (3) с одной функцией насыщения (т.е. без внутренней или внешней сигмоиды) получаются из функции Ляпунова рассматриваемой системы убираанием соответствующей сигмоиды из интегрального члена. Действительно, непосредственной проверкой легко убедиться, что функции

$$V_1(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \operatorname{sigm}(k_1 s) ds$$

и

$$V_2(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_2 + k_1 x_1} \operatorname{sigm}(k_3 s) ds$$

являются функциями Ляпунова систем

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_3(x_2 + \operatorname{sigm}(k_1 x_1))$$

и

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\operatorname{sigm}(k_3(x_2 + k_1 x_1))$$

соответственно.

3. Численный пример. В качестве численной иллюстрации представим результаты стабилизации интегратора 2-го порядка с начальными условиями $x_1(0)=0.6$, $x_2(0)=1.0$ с помощью обратной связи в виде вложенных гиперболических тангенсов:

$$U(x_1, x_2) = -\tanh\left(k_3\left(x_2 + \tanh(k_1 x_1)\right)\right),$$

где $k_1=5$ и $k_3=20$.

На рис. 2 показаны графики зависимости от времени отклонения от положения равновесия, скорости и управления, демонстрирующие эффективность стабилизации. Большое значение коэффициента k_1 обеспечивает высокую скорость экспоненциальной сходимости в окрестности нуля ($x_1(t) = c \exp((-2k_1 t)) = c \exp((-10t))$) и вместе с тем не приводит к значительному перегулированию. На рис. 3 изображены четыре фазовые траектории с начальными точками $(-1.5, -1.0)$, $(-0.75, -1.0)$, $(0.75, 1.0)$ и $(1.5, 1.0)$. Как видно из рисунков, в процессе стабилизации выполняются фазовое ограничение $|x_2(t)| \leq 1$ и ограничение на управление.

Заключение. Рассмотрена задача стабилизации цепочки двух интеграторов с использованием обратной связи в виде двух вложенных сигмоид. Показано, что переход к безразмерным переменным сводит исходную, зависящую от четырех коэффициентов обратной связи задачу к исследованию двухпараметрической системы. Для рассматриваемой системы построена функция Ляпунова, с помощью которой доказана глобальная асимптотическая устойчивость замкнутой системы при любых положительных коэффициентах обратной связи.

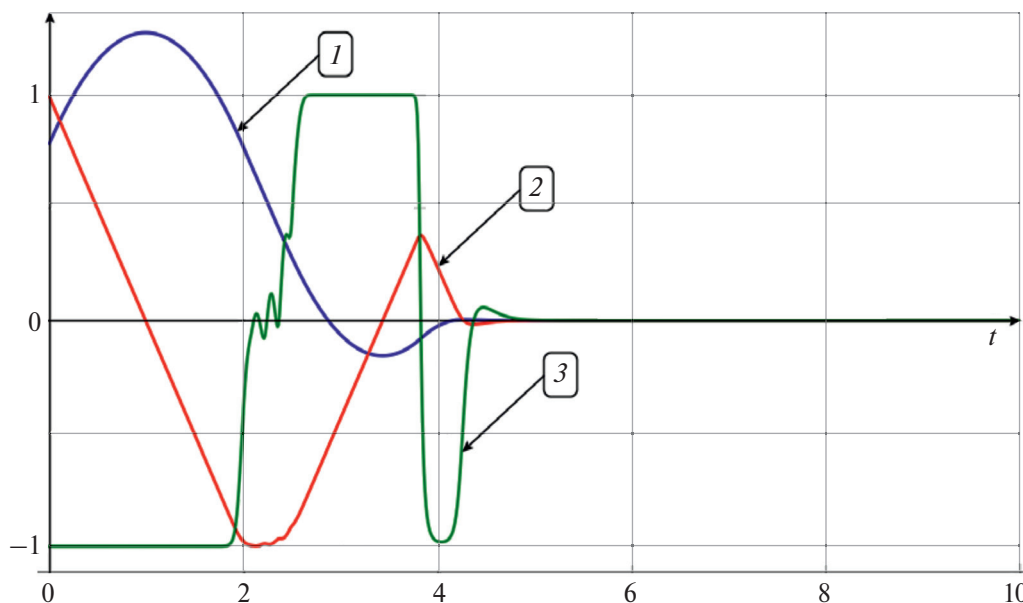


Рис. 2. Графики отклонения $x_1(t)$ (1), скорости $x_2(t)$ (2) и управления $U(t)$ (3).

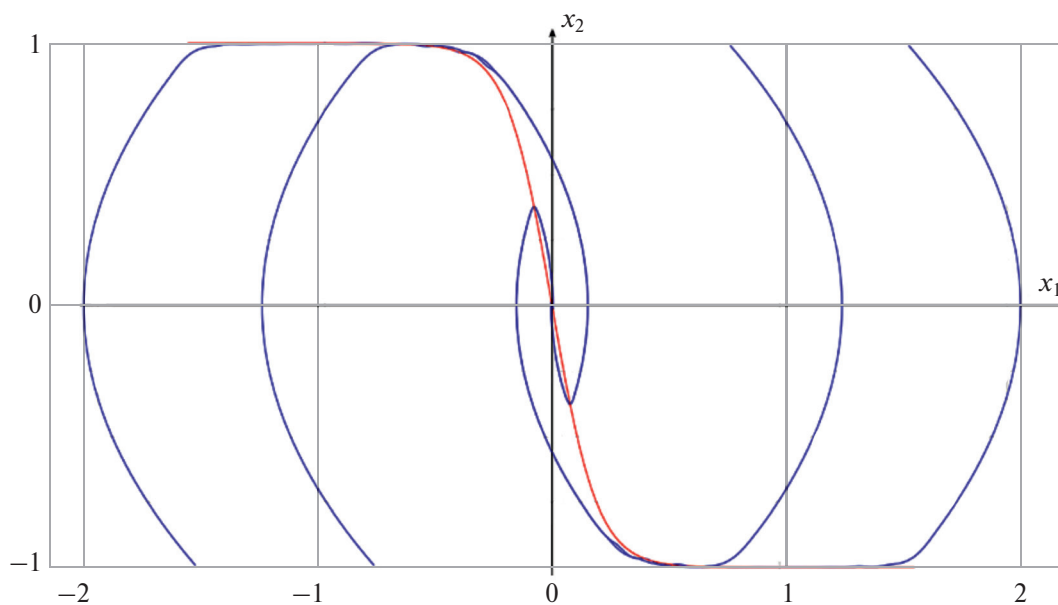


Рис. 3. Фазовые траектории системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurzanski A.B., Varaiya P. Solution Examples on Ellipsoidal Methods: Computation in High Dimensions. Cham, Switzerland: Springer, 2014.
2. Teel A.R. Global Stabilization and Restricted Tracking for Multiple Integrators with Bounded Controls // Sys. & Cont. Lett. 1992. V. 18. № 3. P. 165–171.
3. Teel A.R. A Nonlinear Small Gain Theorem for the Analysis of Control Systems with Saturation // Trans. Autom. Contr., IEEE, 1996. V. 41. № 9. P. 1256–1270.
4. Morozov Yu.V., Pesterev A.V. Глобальная устойчивость гибридной аффинной системы 4-го порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 5. С. 3–15.
5. Hua M.-D., Samson C. Time Sub-optimal Nonlinear Pi and Pid Controllers applied to Longitudinal Headway Car Control // Int. J. Control. 2011. V. 84. P. 1717–1728.
6. Olfati-Saber R. Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles, Ph.D. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 2001.

7. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V., Matrosov I.V.* On Optimal Selection of Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // *Communicat. Comput. Inform. Sci. (CCIS)*. 2020. V. 1340. P. 236–249.
8. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* Optimizing Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // *Lect. Notes Comput. Sci.* 2021. V. 13078. P. 191–202.
9. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* The Best Ellipsoidal Estimates of Invariant Sets for a Third-Order Switched Affine System // *Lect. Notes Comput. Sci.* 2022. V. 13781. P. 66–78.
10. *Пестерев А.В.* Глобальная устойчивость аффинной системы второго порядка с переключениями // *АиТ*. 2023. № 9. С. 95–105.
11. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. Серия: Физико-математическая библиотека инженера. М.: Наука, 1967.