

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМИ ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ¹

© 2024 г. С. В. Борзунов¹, П. А. Мелешенко¹, В. А. Нестеров²,
М. Е. Семенов^{1,3,4,*}, А. М. Соловьев⁵

¹ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», Воронеж, Россия

² ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т),
Москва, Россия

³ ФГБОУ ВО Воронежский государственный технический ун-т, Воронеж, Россия

⁴ ФГБУН Федеральный исследовательский центр «Единая геофизическая служба
Российской академии наук», Обнинск, Россия

⁵ АО «Концерн «Созвездие», Воронеж, Россия

*e-mail: mkl150@mail.ru

Поступила в редакцию 19.04.2022 г.

После доработки 30.01.2024 г.

Принята к публикации 13.05.2024 г.

Рассматривается неклассическая задача оптимального управления, в которой динамика объекта описывается системой дифференциально-операторных уравнений с гистерезисным преобразователем в правой части. Гистерезисная зависимость формализуется посредством аналога преобразователя Прейзаха с инвертированными пороговыми числами, что отражает нелинейную и неоднозначную зависимость покупательского спроса от цены товаров. Это позволяет учитывать «историю» потребительских отношений на конечном временном интервале. Поставлена и решена задача об оптимальном производстве, хранении и сбыте продукции на монотоварном рынке в условиях гистерезисной функции спроса. Указанная задача решалась с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. Описаны условия, при которых решение единственно. Демонстрируются результаты вычислительных экспериментов, в рамках которых идентифицируются оптимальные управляющие воздействия для модельного случая.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума, гистерезисная модель спроса, преобразователь Прейзаха

DOI: 10.31857/S0002338824030032 EDN: UQMJKW

A NON-CLASSICAL OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH OPERATOR HYSTERESIS NONLINEARITIES

S. V. Borzunov^a, P. A. Meleshenko^a, V. A. Nesterov^b,
M. E. Semenov^{a, c, d, *}, A. M. Solovyov^e

^aVoronezh State University, Voronezh, Russia

^bMoscow Aviation Institute (National Research University),

^cVoronezh State Technical University, Voronezh, Russia

^dFederal State Budgetary Educational Institution Federal Research Center

“Geophysical Survey of Russia Academy of Sciences, Obninsk, Russia

^eJSC Concern Sozvezdie, Voronezh, Russia

*e-mail: mkl150@mail.ru

This article considers a non-classical optimal control problem, in which the dynamics of an object is described by a system of differential operator equations with a hysteresis converter on the right side. The hysteresis dependence is formalized using an analogue of the Preisach converter with inverted threshold numbers, which reflects the nonlinear and multivalued dependence of consumer demand on the price of goods. This allows to take into account the “history” of consumer relations over a finite time interval. The problem of optimal

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-29-00696).

production, storage and sales of products on a mono-commodity market under conditions of a hysteresis demand function has been set and solved. The conditions of solvability of the problem under the conditions of applicability of the maximum principle of L. S. Pontryagin are given. The conditions under which the solution is unique are given. The article also presents the results of computational experiments in which optimal control actions for the model case are identified.

Keywords: optimal control, maximum principle, hysteresis demand model, Preisach operator

Введение. Хорошо известно, что в задачах управления важную роль играет корректность математической модели управляемого объекта или процесса, подразумевающая в том числе структурную устойчивость модели по отношению к малым изменениям параметров. Это свойство особенно важно в ситуации, когда малые изменения соответствующих параметров подразумеваются физической постановкой задачи. Более того, в этом случае предполагается естественным моделировать параметры в рамках стохастического подхода.

Как хорошо известно, важным инструментом теории оптимального управления является принцип максимума Л.С. Понтрягина [1]. При этом особый интерес представляют неклассические задачи оптимального управления, в том числе и с операторными (гистерезисными) нелинейностями. Отметим, что публикаций, посвященных этим задачам, совсем немного [2–5].

Как известно, гистерезис возникает в самых различных областях физики, химии, экономики, биологии. Он имеет место, если состояние системы в некоторый момент времени определяется внешними условиями, а также динамикой входного воздействия в предшествующие моменты времени. Следует подчеркнуть, что описание динамики таких систем существенно затруднено за счет сложности фазового пространства, а также недифференцируемости операторов, выступающих моделями гистерезисных преобразователей. Отметим несколько работ, связанных с оптимизацией в ситуации, когда отдельные составляющие технических систем демонстрировали гистерезисные свойства: [6–9]. Из недавних результатов отметим также работы [10–13]. Модели гистерезиса условно можно разбить на два класса: феноменологические и конструктивные, из которых выделим модель Пре́йзаха [14, 15]. Эта модель — одна из самых «популярных» и в настоящее время интенсивно развивается, в том числе и на случай стохастических возмущений параметров элементарных носителей гистерезисных свойств — неидеальных реле [16]. В работе [17] исследуется отклик нелинейной системы на стохастическое внешнее воздействие, а в работе [18] проведена модификация указанной модели на случай пороговых чисел, характеризующихся не детерминированными, а случайными величинами.

Еще один интересный способ использования гистерезисных нелинейностей в задачах управления предложен в работе [19]. Здесь гистерезисное слагаемое вводится как решение вариационного неравенства эволюции на замкнутом подмножестве многомерного вещественного арифметического пространства. В этом случае существуют оптимальные решения, а также необходимые условия оптимальности первого порядка. В частности, при определенных предположениях о регулярности детально описано поведение решений сопряженной системы.

В работах [20–24] было предложено дополнить динамические модели социально-экономических процессов, включив в них гистерезисные звенья. Так, в работе [23] дается исчерпывающее обоснование введения гистерезисных слагаемых в динамические модели, возникающих как обобщение, суммирование индивидуального вклада каждого участника товарно-рыночных отношений. Влияние гистерезисных нелинейностей на уровень безработицы изучается в работе [25].

В настоящей статье рассматривается задача оптимального производства, хранения и сбыта продукции в условиях гистерезисного характера функции спроса, а именно для функции спроса, определенной с помощью преобразователя Пре́йзаха с инвертированными индивидуальными реле.

1. Неидеальное реле. Для описания нелинейностей гистерезисного типа введем функциональные операторы специального вида. Такой подход к заданию гистерезисного поведения систем был предложен и в дальнейшем широко развит М.А. Красносельским и А.В. Покровским [26]. Модели гистерезисных операторов определены на пространстве непрерывных функций, динамика таких преобразователей описывается соотношениями “вход—состояние” и “состояние—выход”.

Обозначим через $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$ гистерезисный преобразователь, отвечающий неидеальному реле с пороговыми числами α и β , где $x_0 \in \{0, 1\}$ — начальное состояние преобразователя, — начальный момент времени. Пространством состояний неидеального реле является двухэлементное множество, входом системы — непрерывная при $[t_0, t]$ функция $u(t)$, выходом — ступенчатая функция, определяемая операторным соотношением:

$$x(t) = R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(t). \quad (1.1)$$

При этом начальное состояние x_0 преобразователя должно удовлетворять условию:

$$x_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } u(0) \leq \alpha, \\ 1, & \text{если } u(0) \geq \beta. \end{cases} \quad (1.2)$$

В случае выполнения неравенств величина может принимать любое значение из множества $\{0, 1\}$. Значения выхода при непрерывном входе для при каждом $t = \tau$ определяются согласно правилу:

$$R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(\tau) = \begin{cases} x_0, & \text{если } \forall t \in [t_0, \tau] : [\alpha < u(t) < \beta], \\ 1, & \text{если } \exists t' \in [t_0, \tau] : [u(t') \geq \beta] \wedge \forall t \in [t', \tau] : [u(t) > \alpha], \\ 0, & \text{если } \exists t' \in [t_0, \tau] : [u(t') \leq \alpha] \wedge \forall t \in [t', \tau] : [u(t) < \beta]. \end{cases} \quad (1.3)$$

Таким образом, выход принимает постоянное значение на $[t_1, t_2]$, если либо $x(t_1) = 0$ и $u(t) < \beta$ при $t \in [t_1, t_2]$, либо $x(t_1) = 1$ и $u(t) > \alpha$ при $t \in [t_1, t_2]$. Будем говорить, что реле включено, если выход равен единице, и что реле находится в выключенном состоянии в противном случае. Детальное описание преобразователя неидеального реле, а также его свойств приведено в работе [26].

Преобразователь Прейзаха является континуальным аналогом семейства неидеальных реле, соединенных параллельно.

Обозначим через Ψ множество ограниченных функций, заданных на $[0, \infty]$ и удовлетворяющих условию Липшица с константой, равной единице. Множество Ω_Ψ функций $z(\alpha, \beta)$, где $\alpha < \beta$, определенных с помощью правила:

$$z(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha + \beta > \psi(\beta - \alpha), \\ 1, & \text{если } \alpha + \beta \leq \psi(\beta - \alpha), \end{cases}$$

где $\psi \in \Psi$, называется пространством состояний преобразователя Прейзаха. Другими словами, $z(\alpha, \beta)$ — характеристическая функция подмножества полуплоскости $\alpha < \beta$. Один из типичных элементов этого пространства изображен на рис. 1.

Соотношение “вход–переменное состояние” преобразователя Прейзаха задается оператором Γ :

$$z(\alpha, \beta, t) = \Gamma[z_0(\gamma)]u(t) = R[z_0(\alpha, \beta), \alpha(\gamma), \beta(\gamma)]u(t),$$

где $\gamma \in \{(\alpha, \beta), \alpha < \beta\}$.

Выходом преобразователя Прейзаха является мера μ множества тех точек (α, β) указанной полуплоскости, для которых состояние равно единице:

$$x(t) = \int_{\alpha < \beta} z(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta = \mu\left(\{(\alpha, \beta) : R[z_0(\alpha, \beta), \alpha, \beta]u(t) = 1\}\right). \quad (1.4)$$

2. Моделирование функции спроса. Как уже отмечалось во Введении, существует достаточно много моделей, описывающих с различной детализацией отношение потребителей к определенному товару (группе товаров). При этом предыстория не всегда явным образом учитывается на модельном уровне. В этой связи отметим работы [20, 25, 27], где убедительно доказана

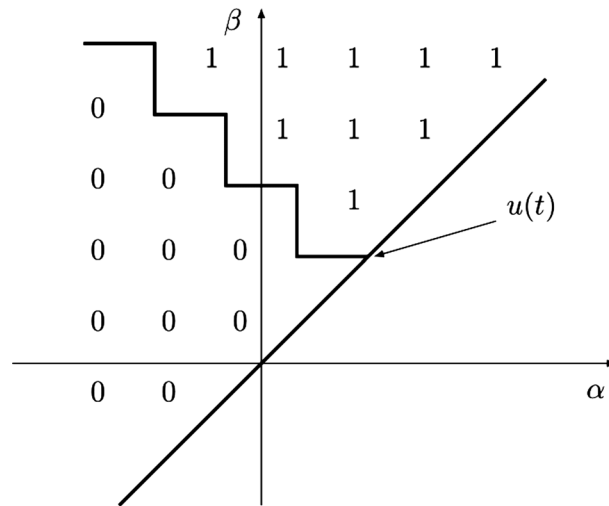


Рис. 1. Пример элемента пространства состояний набора неидеальных реле.

необходимость учета неоднозначности экономических процессов. В настоящей статье предлагается модель потребительского спроса, по определению содержащая в себе зависимость текущего состояния от всей предыстории.

Пусть темп продаж $P(t)$ (т.е. количество товара, проданного за единицу времени) зависит в каждый фиксированный момент времени только от цены этого товара и ее значений в предыдущие моменты времени. Заметим, что отношение потребителя к товару может меняться со временем. Отношение индивидуального потребителя к товару определим функцией $R[c(t)]$, принимающей значения из множества $\{0,1\}$ в соответствии с правилом:

$$R[c(t)] = \begin{cases} x_0, & \text{если } \forall t \in [t_0, \tau] : [\alpha < u(t) < \beta], \\ 0, & \text{если } \exists t' \in [t_0, \tau] : [u(t') \geq \beta] \wedge \forall t \in [t', \tau] : [u(t) > \alpha], \\ 1, & \text{если } \exists t' \in [t_0, \tau] : [u(t') \leq \alpha] \wedge \forall t \in [t', \tau] : [u(t) < \beta]. \end{cases} \quad (2.1)$$

Согласно (2.1), функция $R[c(t)]$ принимает значение, равное единице, если потребитель в момент времени t приобретает товар, и нуль — в противном случае. Будем трактовать $R[c(t)]$ как выход некоторого преобразователя, аналогичного неидеальному реле с инверсией роли пороговых чисел α, β , на вход которого подается сигнал $c(t)$ при $t \in [0, T]$, где R_0 — начальное состояние преобразователя.

Схематично взаимосвязь между входом и выходом преобразователя $R[\alpha, \beta, R_0]$ представлена на рис. 2. Обратим внимание на обратное направление “петли гистерезиса” (а именно по часовой стрелке) по сравнению с классическим определением неидеального реле.

Обозначим через γ_i темп покупок i -го потребителя, $i = 1, \dots, n$. Для системы из n потребителей функция продаж будет иметь вид

$$P(c(t)) = \sum_{i=1}^n \gamma_i R[\alpha_i, \beta_i, R_{0(i)}]c(t). \quad (2.2)$$

Практически значимым является случай достаточно большого количества индивидуальных потребителей, $n \rightarrow \infty$ при выполнении условия $\gamma_i \rightarrow \infty$ малости вклада одного участника товарно-рыночных отношений. Функция продаж в этом случае должна быть равна континуальному пределу суммы (2.2):

$$P(c(t)) = \int_{\alpha < \beta} z(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta, \quad (2.3)$$

где введены обозначения

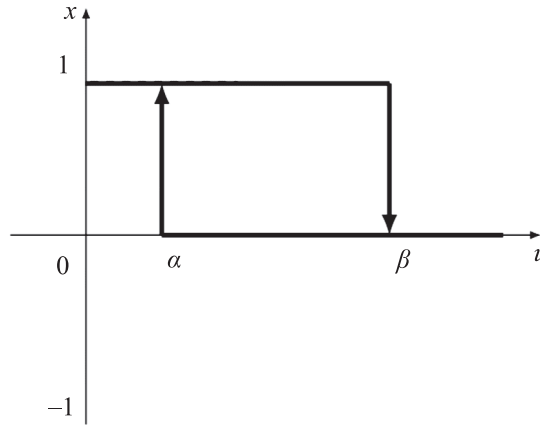


Рис. 2. Взаимосвязь между входом и выходом преобразователя $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$ с пороговыми числами α и β .

$$z(\alpha, \beta, t) = \Gamma[z_0(\alpha, \beta)]c(t) = R[z(\alpha, \beta), \alpha(\gamma), \beta(\gamma)]c(t) \quad (2.4)$$

и $\gamma \in \{(\alpha, \beta): \alpha < \beta\}$.

Обратим внимание, что преобразователь (2.3) аналогичен преобразователю Прейзаха [26, 28] с инверсией нулей и единиц.

3. Модель производственной деятельности. Ниже предполагается, что носитель меры μ сосредоточен в треугольнике полуплоскости $\beta > \alpha$, выделяемом неравенствами $\alpha > 0$, $\beta < \alpha$.

В простейшем случае задача максимизации прибыли в текущий момент времени формулируется следующим образом: определить функцию цены $c^*(t)$ на промежутке времени $[0, T]$, такую, что в момент $t = t_1$ прибыль

$$c(t)P(t)\big|_{t_1} \rightarrow \max. \quad (3.1)$$

Будем считать, что $\forall t \in [0, T]: 0 < c(t) \leq a$, т.е. цена товара неотрицательна и ограничена сверху величиной a . Покажем, что решение этой задачи достигается с помощью следующей функции:

$$c^*(t) = \begin{cases} \frac{a}{\tau}(\tau - t), & \text{если } 0 \leq t < \tau, \\ \frac{a}{2(t_1 - \tau)}(t - \tau), & \text{если } \tau \leq t < t_1. \end{cases} \quad (3.2)$$

График функции приведен на рис. 3, а.

В самом деле, в момент времени $t = \tau$ цена товара достигла максимального значения $c(\tau) = a$, все индивидуальные реле выключены, что соответствует отсутствию спроса. На промежутке $[\tau, t_1]$ имеет место монотонное убывание цены, потребители проявляют спрос $P(c(t)) = (a^2 - c^2)/2$ (на рис. 3, б сплошной заливкой цветом выделена область на плоскости (α, β) , где элементарные реле находятся во включенном состоянии). Легко видеть, что при $t = t_1$ достигается максимальное значение прибыли, поскольку производная

$$\frac{d(cP(c))}{dc} = \frac{d}{dc} \left(c \left(\frac{a^2}{2} - \frac{c^2}{2} \right) \right) = \frac{1}{2}(a^2 - 4c^2) \quad (3.3)$$

равна нулю при $c = a/2$, а вторая производная $d^2(cP(c))/dc^2 = -4c < 0$, поскольку цена товара неотрицательна.

Таким образом, для очень простой экономической модели производства максимизация прибыли достигается за счет понижения цены до минимального значения, а затем моно-

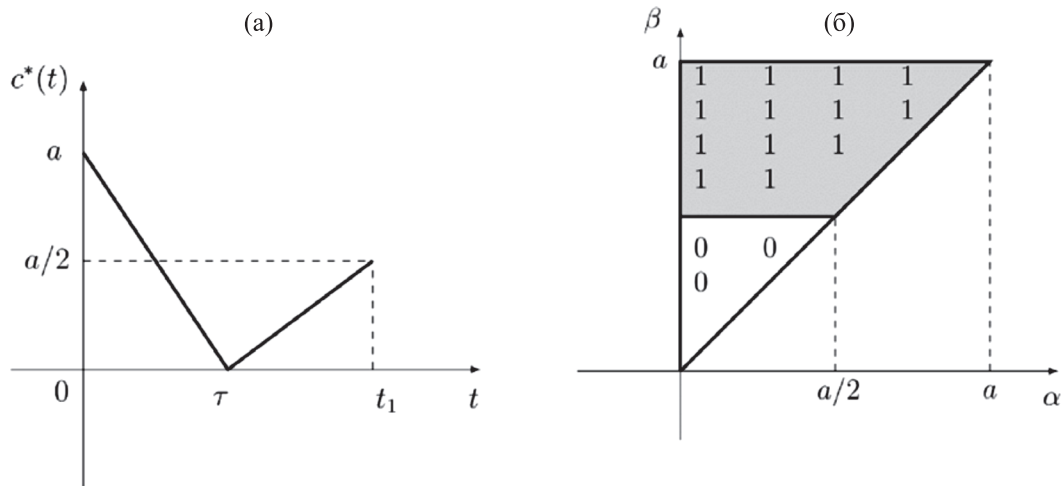


Рис. 3. а – график функции $c^*(t)$, демонстрирующей максимизацию прибыли $c(t)P(t)$ в момент времени $t_1 > 0$; б – состояние оператора Прейзаха в момент времени $t = t_1$.

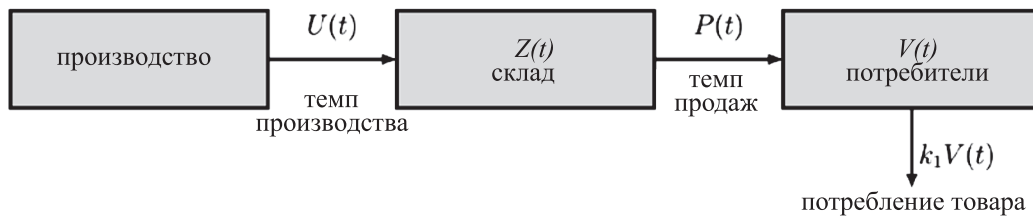


Рис. 4. Модель производства и потребления товара.

тонного увеличения ее до значения $a/2$. Тем не менее детальный анализ более реалистичной модели производственной деятельности с необходимостью требует привлечения аппарата методов оптимального управления [1, 29].

Рассмотрим задачу оптимального планирования производственной деятельности с учетом гистерезисной функции спроса. Введем следующие обозначения (см. рис. 4): $Z(t)$ – количество товара на складе у производителя, $V(t)$ – количество товара у потребителя, $U(t)$ – темп производства, т.е. количество товара, поступающего на склад в единицу времени, $P(t)$ – темп продаж, т.е. количество проданного за единицу времени товара, k_1 – коэффициент потребления, k_2 – коэффициент, характеризующий затраты на хранение единицы товара, $c(t)$ – цена единицы товара.

Предположим, что себестоимость производства товара равна единице. Запишем интегродифференциальную систему уравнений, моделирующую задачу о производстве, хранении и сбыте товара:

$$\dot{Z} = U - P, \quad (3.4)$$

$$\dot{V} = P - k_1 V, \quad (3.5)$$

$$P(t) = Z(t) \int_{\alpha < \beta} z(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta, \quad (3.6)$$

$$z(\alpha, \beta, t) = \Gamma[z_0(\alpha, \beta)]c(t), \quad (3.7)$$

$$Z(0) = V(0) = 0. \quad (3.8)$$

Задачу оптимизации производственной деятельности будем решать при следующих дополнительных предположениях:

1) $0 \leq U(t) \leq U_0$ — существование порога U_0 — максимально возможного темпа производства;

2) $0 < c(t) \leq a$ — цена товара неотрицательна и ограничена величиной a ;

3) себестоимость производства товара равна единице (процедурой переопределения единицы измерения количества товара себестоимость можно устанавливать произвольно, но, разумеется, равной положительному числу).

Рассмотрим функционал, равный общему доходу за конечное время T , взятому с обратным знаком [30–32]:

$$I(T) = \int_0^T [-c(t)P(t) + U(t) + k_2 Z(t)] dt. \quad (3.9)$$

Цель настоящего раздела — нахождение условий, при которых достигается минимум функционала $I(T)$.

Правые части системы (3.4)–(3.8) и ядро функционала (3.9) являются дифференцируемыми по фазовым переменным, управляющие воздействия — темп производства и цена, транслируемая в систему посредством гистерезисного оператора (непрерывного в пространстве непрерывных функций на всяком конечном временном отрезке), принадлежат пространству кусочно-непрерывных функций, что отвечает достаточным условиям применимости принципа максимума Л.С. Понтрягина [1, 29]. Согласно этому принципу, минимум функционала (3.9) достигается при условии максимума функции $H(p_1, p_2, Z, V, P, U, c)$, называемой гамильтонианом системы (3.4)–(3.8):

$$\begin{aligned} H(p_1, p_2, Z, V, P, U, c) &= p_1(U - P) + p_2(P - k_1 V) - (-cP + U + k_2 Z) = \\ &= (p_1 - 1)U + (p_2 - p_1 + c)P - k_1 p_2 V - k_2 Z. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Поскольку функция H является линейной по аргументу U , то $\max H(p_1, p_2, Z, V, P, U, c) = H(p_1, p_2, Z, V, P, U^*, c^*)$ достигается при

$$U^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_1(t) < 1, \\ U_0, & \text{если } p_1(t) > 1, \\ \forall U, & \text{если } p_1(t) = 1. \end{cases} \quad (3.11)$$

Запишем условия, при которых слагаемое $A(c) \equiv (p_2 - p_1 + c)P(c)$ дает экстремальный вклад в гамильтониан (3.10).

1. Пусть выполняется условие $p_2 - p_1 + c > 0$. Тогда $A \rightarrow \max$ при $P = (a^2 - c(t)^2)/2$ (см. рис. 5, а):

$$\frac{dA(c)}{dc} = \frac{3}{2}c^2 - c(p_1 - p_2) - \frac{1}{2}a^2. \quad (3.12)$$

Производная равна нулю при

$$c_{\pm} = \frac{1}{3} \left[p_1 - p_2 \pm \sqrt{(p_2 - p_1)^2 + 3a^2} \right]. \quad (3.13)$$

В рамках модели цена должна принадлежать промежутку $(0, a]$, тогда следует оставить только положительный корень $c_+ = (p_1 - p_2 + \sqrt{(p_2 - p_1)^2 + 3a^2})/3$. Заметим, что при всех возможных значениях этот корень принадлежит промежутку $(0, a]$ и соответствует максимуму функции $A(c_+)$, поскольку $d^2A(c)/dc^2|_{c=c_+} < 0$.

2. Пусть имеет место неравенство $p_2 - p_1 + c < 0$. Следовательно, как видно из рис. 5, б, $A \rightarrow \max$ при $P = (a - c(t))^2/2$:

$$A(t) = (p_2 - p_1 + c) \frac{(a - c(t))^2}{2}, \quad (3.14)$$

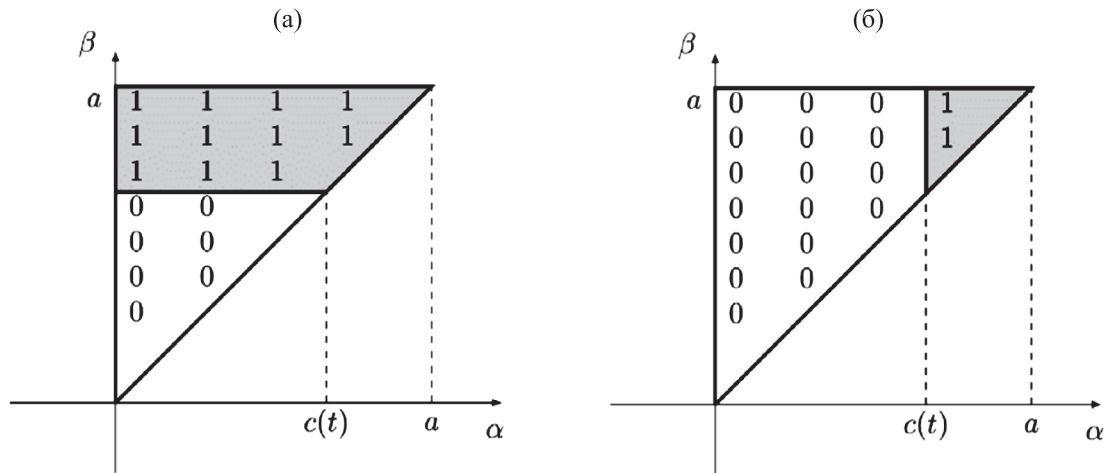


Рис. 5. а – экстремальное значение величины $A(c)$ при условии $p_2 - p_1 + c > 0$; б – экстремальное значение величины $A(c)$ при условии $p_2 - p_1 + c < 0$.

$$\frac{dA(c)}{dc} = \frac{1}{2}(a - c)^2 - (a - c)(p_2 - p_1 + c). \quad (3.15)$$

Производная равна нулю при двух значениях цены: если $c = a$ или если

$$c = \frac{1}{3}[a - 2(p_2 - p_1)]. \quad (3.16)$$

В итоге максимум гамильтониана достигается при некотором $c^* \in [0, a]$, удовлетворяющем условию:

$$c^* = \begin{cases} \frac{1}{3}[p_1 - p_2 + \sqrt{(p_2 - p_1)^2 + 3a^2}], & \text{если } p_2 - p_1 + c^* > 0, \\ \frac{1}{3}[a - 2(p_2 - p_1)], & \text{если } p_2 - p_1 + c^* < 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

С учетом найденного значения c^* получаем

$$\max_{\{p_1, p_2, Z, V, P, U, c\}} H = H^*(p_1, p_2, Z, V) \Big|_{c(t)=c^*} = (p_1 - 1)U^* + (p_2 - p_1 + c^*)P - k_1 p_2 V - k_2 Z. \quad (3.18)$$

Как следует из принципа максимума Понтрягина, неизвестные функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial Z} = k_2 - (p_2 - p_1 + c^*) \int_{\alpha < \beta} z(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta, \quad (3.19)$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial V} = k_1 p_2(t) \quad (3.20)$$

при $t \in [0, T]$ с граничными условиями $p_1(T) = p_2(T) = 0$.

Легко видеть, что для функции $p_2(t)$ решение является тривиальным: $p_2(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0, T]$. Таким образом, динамика интегродифференциальной системы (3.4)–(3.8) определяется эволюцией во времени функции $p_1(t)$, которая в свою очередь существенно зависит от значений выхода гистерезисного преобразователя.

Уравнение относительно принимает вид

$$\dot{p}_1(t) = k_2 - (c^* - p_1) \int_{\alpha < \beta} z(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta. \quad (3.21)$$

Введем предположение, что расходы на хранение товара малы по сравнению с затратами на его производство и доходами от продаж: $k_2 = 0$. В таком случае зависимость от времени параметра p_1 на временном интервале $[0, T]$ определяется дифференциальным уравнением:

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = (p_1(t) - c^*(t)) \int_{\alpha < \beta} z(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta, \\ p_1(T) = 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

где

$$c^* = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(p_1 + \sqrt{p_1 + 3a^2} \right), & \text{если } p_1 < c^*, \\ \frac{1}{3} (a + 2p_1), & \text{если } p_1 > c^*. \end{cases} \quad (3.23)$$

Согласно (3.11), начальное условие при $t = 0$ должно удовлетворять неравенству $p_1(0) \geq 1$. В самом деле, в противном случае имело бы место равенство $U^*(0) = 0$ и по смыслу модели производство товара не включалось. Поскольку начало отсчета времени в рассматриваемой модели отвечает моменту запуска производственного процесса, то в момент начала производства справедливо неравенство $p_1(0) \geq 1$.

Полученное неравенство в свою очередь накладывает важное ограничение на соотношение (3.23): на промежутке времени реализуется только случай $p_1 < c^*$. Докажем это.

Предположим противное: $\exists t' \in [0, T]: p_1(t') > c^*(t')$. Тогда в этой точке $c^*(t') = (a + 2p_1) / 3$ или

$$\frac{1}{3}(a - c(t')) + \frac{2}{3}(p_1(t') - c(t')) = 0. \quad (3.24)$$

В (3.24) второе слагаемое положительно, следовательно, первое слагаемое $(a - c(t')) / 3 < 0$, что противоречит смыслу цены $c(t)$ в рассматриваемой модели, так как цена на всем диапазоне наблюдения ограничена: $\forall t \in [0, T]: 0 < c(t) \leq a$. Отсюда делаем вывод: в рамках нашей модели в (3.23) реализуется только первое равенство, а именно:

$$c^* = \frac{1}{3} \left(p_1 + \sqrt{p_1 + 3a^2} \right), \quad (3.25)$$

что после подстановки в (3.22) приводит к

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = \frac{1}{3} \left(2p_1(t) - \sqrt{p_1^2(t) + 3a^2} \right) \int_{\alpha < \beta} z(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta, \\ p_1(T) = 0, \\ 1 < p_1(0) < a. \end{cases} \quad (3.26)$$

В результате получаем следующий вывод: в модели производственного процесса (3.4)–(3.8) для любого конечного момента времени T на промежутке $[0, T]$ существует единственное решение $c^*(t)$ системы (3.26), которое обладает свойством строгой монотонности на $[0, T]$.

В самом деле, легко видеть, что $(\forall p_1 < a): 2p_1 - \sqrt{p_1^2 + 3a^2} < 0$. Это позволяет сделать следующий вывод: экстремальное значение функционала $I(T)$ реализует функция $p(t)$, для которой $\dot{p}_1(t) < 0$ и $p(T) = 0$. Ясно, что такая функция строго монотонно убывает от некоторого начального значения $p_1(0) < a$ до нуля. Из (3.23) непосредственно следует, что значению p_1 на правой границе отвечает цена в конечный момент времени: $c(T) = a/\sqrt{3}$.

Таким образом, доказано существование и монотонность в строгом смысле функции $p_1(t)$ на $[0, T]$. Далее, согласно (3.25), цена является строго монотонной функцией от $p_1(t)$, что и до-

казывает существование c^* и ее монотонность в строгом смысле. Единственность c^* вытекает из единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения (3.26) [33, 34]. Следовательно, для любого конечного момента времени существует единственное решение $c^*(t)$ системы (3.26).

4. Численные результаты. Обратим внимание, что система (3.26) имеет граничное условие, соответствующее окончанию времени моделирования T . Таким образом, значение $p_1(0)$ неизвестно. К сожалению, численно решить систему (3.26) с помощью обратного хода по оси времени не представляется возможным в силу несимметричности преобразователя Прейзаха по параметру t .

Тем не менее удовлетворить граничному условию при $t = T$ можно с помощью следующего приема: выберем в соответствии с (3.26) начальное значение $m \equiv p_1(0) \in [1, a]$ и решим систему. Рассмотрим проекцию оператора сдвига по траектории $U^T : p^{(0)} \equiv p_1(0) \rightarrow p_1(T)$ (определение и свойства таких операторов детально представлены в работе [35]). Поскольку $\exists p^{(-)} : (U^T p^{(-)} < 0)$ и $\exists p^{(+)} : (U^T p^{(+)} > 0)$, то вследствие непрерывности отображения $U^T \exists p^{(*)} : (U^T p^{(*)} = 0)$ [33, 34].

В силу монотонности $p_1(t)$ на всем анализируемом промежутке с помощью отдельной процедуры двоичного поиска (или, как говорят, методом дихотомии) найдем единственный корень уравнения:

$$p_1(T)|_m = 0. \quad (4.1)$$

Соответствующий корень m определяет начальное значение исследуемой функции в момент $t=0$, согласованное с правой границей. Как легко видеть, начальное значение $p_1(0)$ зависит от параметров задачи, в частности от состояния преобразователя Прейзаха. Для численных экспериментов выберем следующие значения динамической системы: $a=10$, $U_0=1$, $k_1=1.0$, $T \in \{10, 50\}$.

На рис. 6, 7 представлены начальное состояние гистерезисного преобразователя, отвечающее величине спроса в момент времени $t=0$, и функции $p_1(t)$, $c^*(t)$, $U(t)$, $Z(t)$, $V(t)$ и $P(t)$. На рис. 6 приведены значения параметров динамической системы: $a=10$, $U_0=1$, $T=15$, $k_1=1.0$, $k_2=1.0$, на рис. 7 — значения параметров: $a=10$, $U_0=1$, $T=50$, $k_1=1.0$, $k_2=0.05$. Количество элементарных гистеронов $N=840$. Из графиков видно, что $p_1(t)$ в заключительный момент времени обращается в нуль, а $c^*(T)$ принимает предельное значение $a/\sqrt{3}$. Изображены функции $U(t)$ (темп производства), $Z(t)$ (количество товара на складе), $V(t)$ (количество товара у потребителя), $P(t)$ (темп продаж).

Количество элементарных реле в аналоге преобразователя Прейзаха в численных расчетах выбиралось равным $N=840$. Монотонное уменьшение цены ростом t приводит к монотонному увеличению $P(c(t))$, в силу конечности N в некоторых точках происходит быстрое изменение $P(c(t))$ и, как следствие, быстрое изменение $P(t)=Z(t)P(c(t))$. Указанное поведение $P(c(t))$ возникает при “активации” очередной строки индивидуальных реле в преобразователе (см. рис. 5, 6).

Из рис. 6, 7 видно, что в период производства товара ($\{t: U(t) > 0\}$) количество товара на складе и у потребителей растет, после выключения производства производная функции $Z(t)$ становится отрицательной, а $V(t)$ продолжает расти, но через небольшое время $V(t)$ достигает максимума, после чего начинается монотонное убывание за счет отрицательного вклада потребления товара $k_1 V(t)$ в (3.5).

Введем величину $Q(T) = -I(T)/T$, отражающую прибыль производителя в единицу времени. Зависимость этой величины от длительности периода продаж представлена на рис. 8. Монотонная зависимость свидетельствует о том, что относительная прибыль растет с увеличением периода активной производственной деятельности.

Начальное состояние гистерезисного преобразователя, изображенное на рис. 3, б, приводит к решению системы (3.4)–(3.8), которому отвечают графики на рис. 9, 10. На рис. 9 представлены значения параметров динамической системы: $a=10$, $U_0=1$, $T=10$, $k_1=1.0$, $k_2=0.05$, на рис. 10 — значения параметров динамической системы: $a=10$, $U_0=1$, $T=50$, $k_1=1.0$, $k_2=0.05$. Количество элементарных гистеронов $N=840$. Прибыль производителя в единицу времени в этом случае представлена на рис. 11.

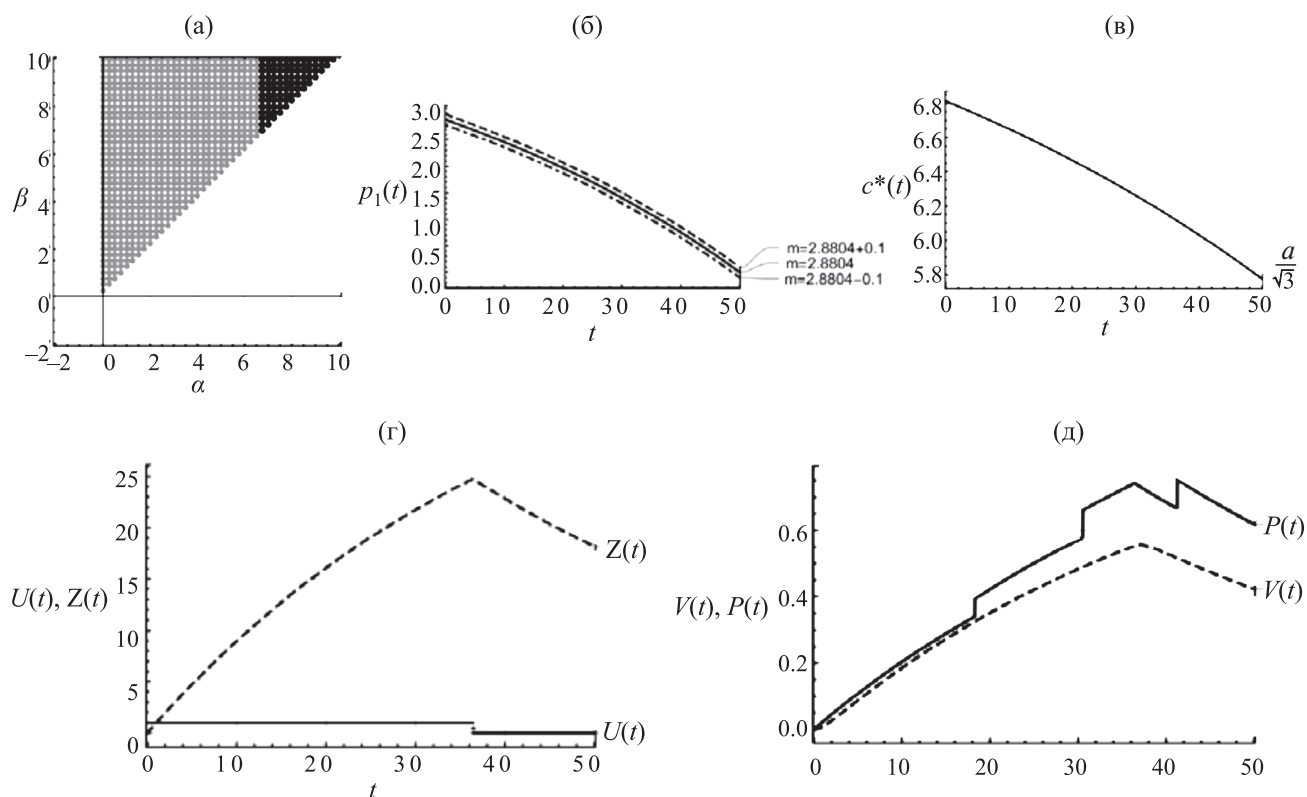


Рис. 6. а – начальное состояние; б – зависимость $p_1(t)$, для наглядности на панели приведены также графики функций $p_1(t) \pm 0.1$; в – функция цены в зависимости от времени; г – функции U, Z в зависимости от времени; д – функции V, P в зависимости от времени.

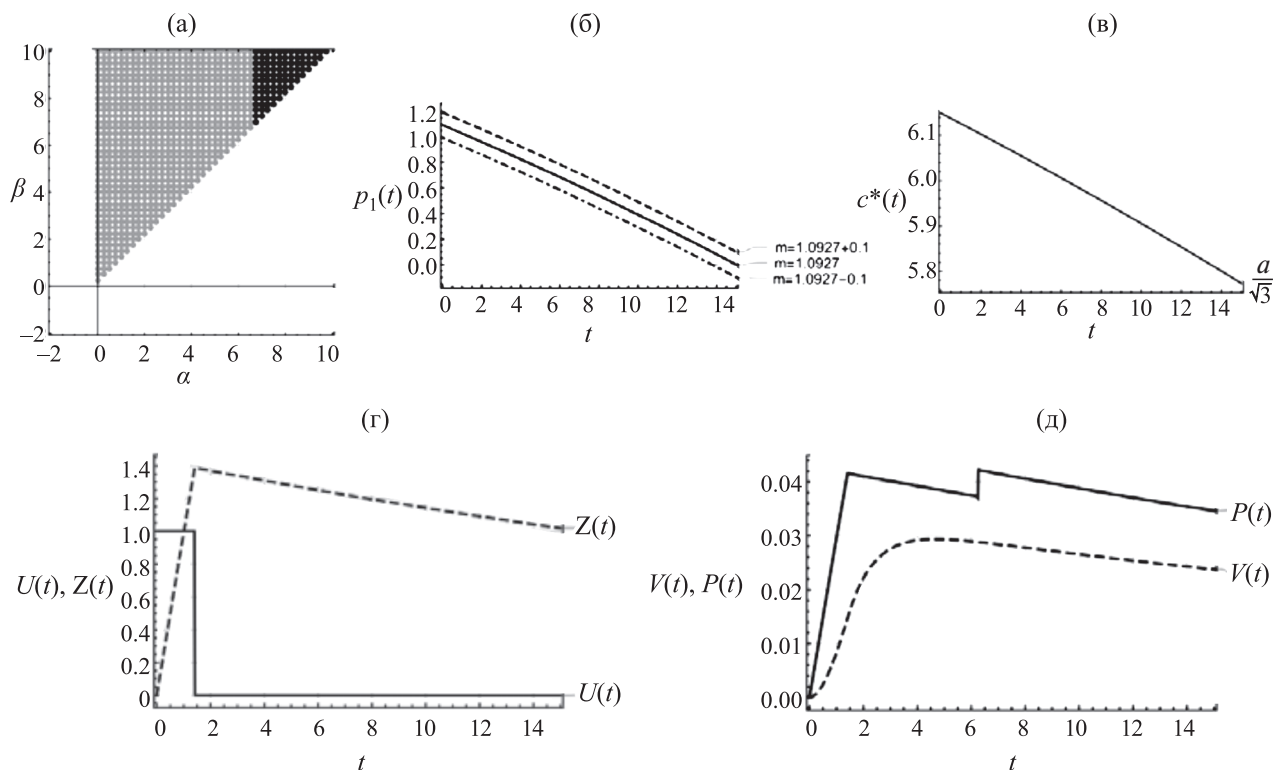


Рис. 7. а – начальное состояние; б – зависимость $p_1(t)$, для наглядности на панели приведены также графики функций $p_1(t) \pm 0.1$; в – функция цены в зависимости от времени; г – функции U, Z в зависимости от времени; д – функции V, P в зависимости от времени.

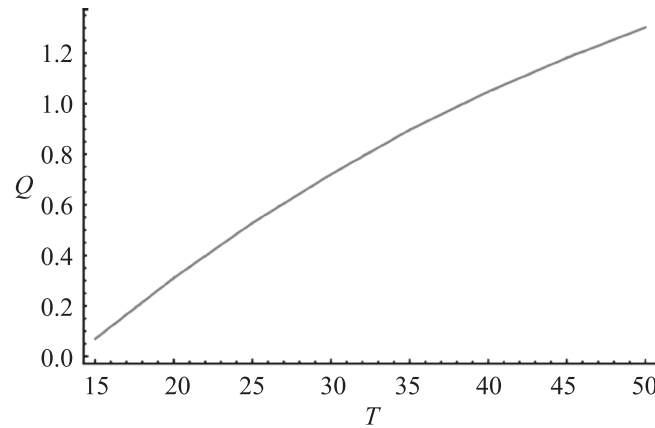


Рис. 8. Зависимость Q от длительности периода продаж T . Начальное состояние выбрано, как на рис. 6, а. Значения параметров динамической системы: $a = 10$, $U_0 = 1$, $k_1 = 1.0$, $k_2 = 0.05$. Количество элементарных гистеронов $N = 840$.

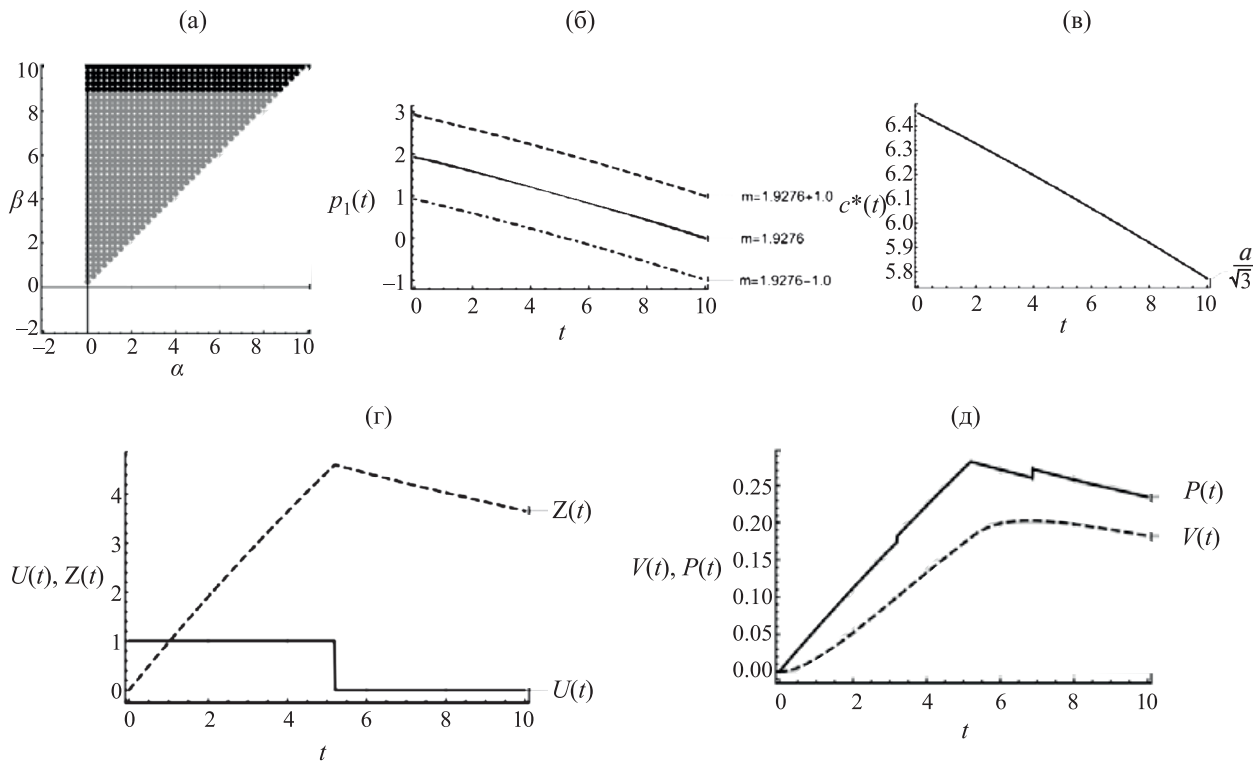


Рис. 9. а – начальное состояние; б – зависимость $p_1(t)$, для наглядности на панели приведены также графики функций $p_1(t) \pm 0.1$; в – функция цены в зависимости от времени; г – функции U , Z в зависимости от времени; д – функции V , P в зависимости от времени.

Условие отрицательности правой части уравнения (3.21) является необходимым условием существования оптимального решения:

$$k_2 - (c^* - p_1) \int_{\alpha < \beta} z(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta < 0. \quad (4.2)$$

Принимая значение гистерезисного слагаемого, согласно рис. 5, б, получаем нелинейное неравенство

$$k_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{p_1^2 + a^2} - 2p_1}{3} \right) \left(a^2 - \frac{1}{9} (2p_1^2 + 2p_1 \sqrt{p_1^2 + 3a^2} + 3a^2) \right) < 0 \quad (4.3)$$

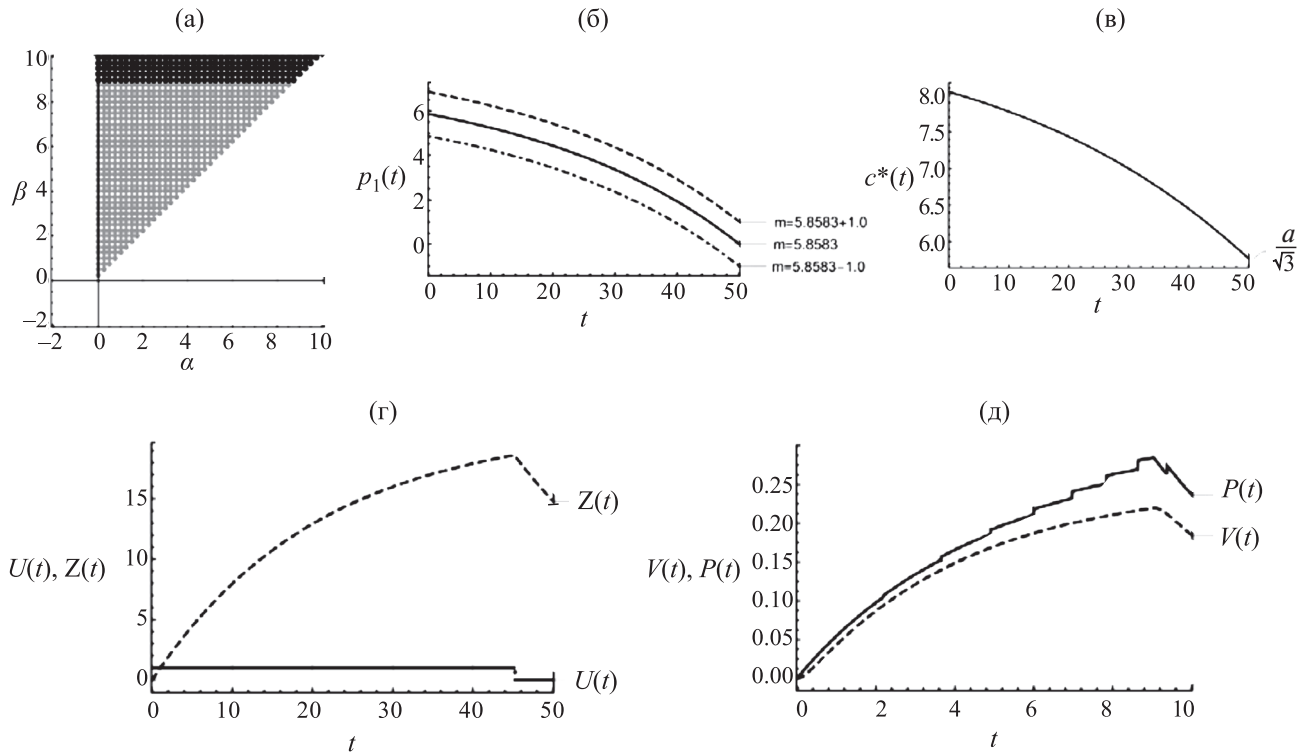


Рис. 10. а — начальное состояние; б — зависимость $p_1(t)$, для наглядности на панели приведены также графики функций $p_1(t) \pm 0.1$; в — функция цены в зависимости от времени; г — функции U, Z в зависимости от времени; д — функции V, P в зависимости от времени.

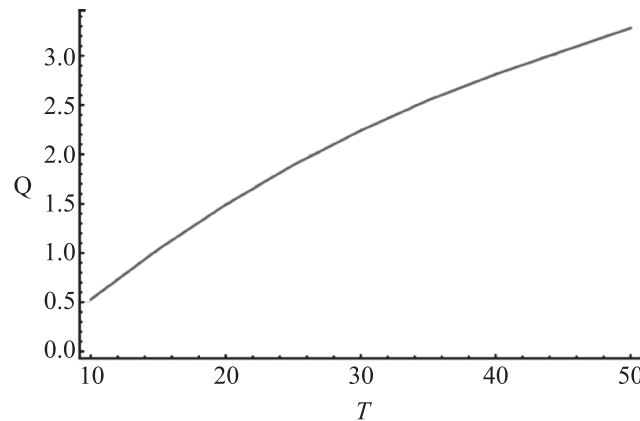


Рис. 11. Зависимость Q от длительности периода продаж T . Начальное состояние выбрано как на рис. 9, а. Значения параметров динамической системы: $a = 10$, $U_0 = 1$, $k_1 = 1.0$, $k_2 = 0.05$. Количество элементарных гистеронов $N = 840$.

относительно переменных p_1 и a . Решение этого неравенства в координатной плоскости (p_1, a) приведено на рис. 12.

Из рис. 12 видно, что оптимальное решение существует в квадрате $[0, a] \times [0, a]$, за исключением “диагональной области”, где $|p_1 - a| < \delta$ для некоторой величины δ (зависящей от k_2). Иными словами, решения рассматриваемой задачи не существует, если начальная цена столь высока, что ни один из потенциальных потребителей (моделируемых неидеальным реле) не в состоянии приобрести товар. Правое пороговое число, соответствующее максимальной цене, при которой товар покупается, оказывается меньше изначальной стоимости товара.

Заключение. Рассмотрена неклассическая задача оптимального управления, в которой динамика объекта описывается системой дифференциально-операторных уравнений с гистерезисным преобразователем в правой части. При этом целевой функционал также содержит

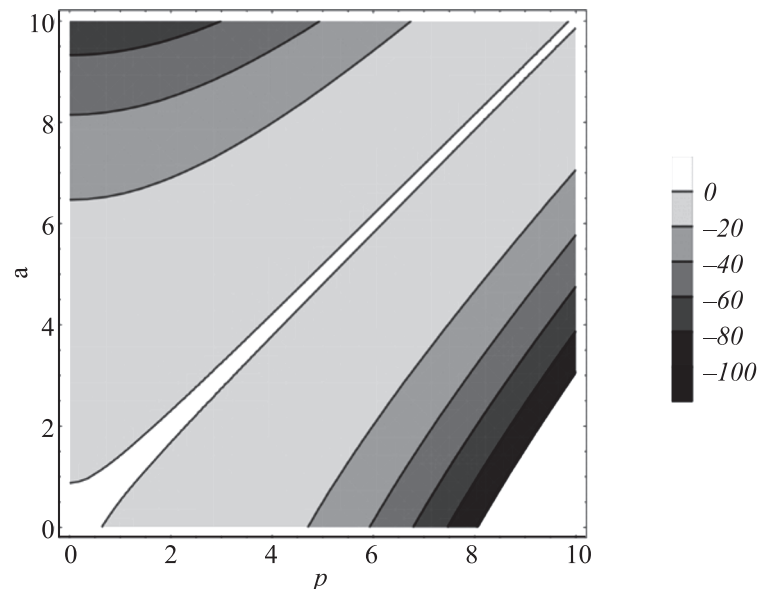


Рис. 12. Решение неравенства (4.3) в координатной плоскости (p_1, a) для $k_2 = 0.05$.

нелинейность гистерезисной природы. Представлены условия разрешимости поставленной задачи, формализуемые в виде неравенств, накладываемых на начальное состояние объекта управления. Приведенная в работе система является моделью формирования спроса в задаче об оптимальном производстве, сбыте и хранении продукции на монотоварных рынках.

Отношение потребителя к товару моделировалось оператором, аналогичным оператору неидеального реле с инверсией пороговых чисел. Эта модель по своей природе позволяет учитывать “историю” потребительских отношений на конечном временном интервале. Предельным аналогом указанной модели для конечного числа потребителей (когда их число стремится к бесконечности) является преобразователь Прејзаха, пространство состояний которого состоит из характеристических функций полуплоскости $\{(\alpha, \beta): \alpha < \beta\}$ неклассического вида и определяет направление обхода петли гистерезиса по часовой стрелке. Демонстрируются модельные примеры, иллюстрирующие поиск оптимального решения рассматриваемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. М.: Наука, 1983. 392 с.
2. Bagagiolo F. Dynamic Programming for Some Optimal Control Problems with Hysteresis // *Nonlinear Differential Equations and Applications*. 2002. V. 9. P. 149–174.
3. Bagagiolo F. Viscosity Solutions for an Optimal Control Problem with Preisach Hysteresis Nonlinearities // *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*. 2004. V. 10. P. 271–294.
4. Belbas S.A., Mayergoyz I.D. Dynamic Programming for Systems with Hysteresis // *Physica B*. 2001. V. 306. P. 200–205.
5. Belbas S.A., Mayergoyz I.D. Optimal Control of Dynamical Systems with Preisach Hysteresis // *Intern. J. Non-Linear Mechanics*. 2002. V. 37. P. 1351–1361.
6. Carboni B., Lacarbonara W., Brewick P.T., Masri S.F. Dynamical Response Identification of a Class of Nonlinear Hysteretic Systems // *J. Intelligent Material Systems and Structures*. 2018. V. 29 № 13. P. 2795–2810.
7. Lacarbonara W., Vestroni F. Nonclassical Responses of Oscillators with Hysteresis // *Nonlinear Dynamics*. 2003. V. 32. P. 235–258.
8. Li Y., Zhou S., Litak G. Robust Design Optimization of a Nonlinear Monostable Energy Harvester with Uncertainties // *Meccanica*. 2020. V. 55. P. 1753–1762.
9. Медведский А.Л., Мелещенко П.А., Нестеров В.А., Решетова О.О., Семенов М.Е., Соловьев А.М. Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2020. № 4. С. 58–82.
10. Pei J.S., Carboni B., Lacarbonara W. Mem-models as Building Blocks for Simulation and Identification of Hysteretic Systems // *Nonlinear Dynamics*. 2020. V. 100. № 2. P. 973–998.
11. Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshchenko P.A., Reshetova O.O. Efficiency of Hysteretic Damper in Oscillating Systems // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2020. V. 15. P. 43–1–43–14.

12. *Semenov M.E., Reshetova O.O., Borzunov S.V., Meleshenko P.A.* Self-oscillations in a System with Hysteresis: the Small Parameter Approach // *The European Physical Journal: Special Topics*. 2021. V. 230. P. 3565–3571.
13. *Медведский А.Л., Мелешенко П.А., Нестеров В.А., Решетова О.О., Семенов М.Е.* Динамика гистерезисно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля: метод малого параметра // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2021. № 4. С. 7–26.
14. *Mayergoyz I.D.* Mathematical Models of Hysteresis // *Physical Review Letters*, 1986. V. 56. № 15. P. 1518–1521.
15. *Borzunov S.V., Semenov M.E., Sel'vesyuk N.I., Meleshenko P.A.* Hysteretic Converters with Stochastic Parameters // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2020. V. 12. № 2. P. 164–175.
16. *Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A.* A New Way to Compute the Lyapunov Characteristic Exponents for Non-smooth and Discontinuous Dynamical Systems // *Nonlinear Dynamics*. 2022. V. 109. P. 1805–1821.
17. *Mayergoyz I., Dimian M.* Analysis of Spectral Noise Density of Hysteretic Systems Driven by Stochastic Processes // *J. Applied Physics*. 2003. V. 93. № 10. P. 6826–6828.
18. *Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A.* Stochastic Preisach Operator: Definition within the Design Approach // *Nonlinear Dynamics*. 2020. V. 101. P. 2599–2614.
19. *Brokate M., Krejčí P.* Optimal Control of ODE Systems Involving a Rate Independent Variational Inequality // *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*. 2013. V. 18. № 2. P. 331–348.
20. *Cross R., McNamara H., Pokrovskii A.V., Rachinskii D.* A New Paradigm for Modelling Hysteresis in Macroeconomic Flows // *Physica B: Condensed Matter*. 2008. V. 403. P. 231–236.
21. *Darby J., Cross R., Piscitelli L.* Hysteresis and Unemployment: a Preliminary Investigation // *The Science of Hysteresis / Eds G. Bertotti and I.D. Mayergoyz*. Oxford: Academic Press. 2005. V. 1, Ch. 8. P. 667–699.
22. *Rios L., Rachinskii D., Cross R.* A Model of Hysteresis Arising from Social Interaction Within a Firm // *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. V. 811. № 1. P. 012011-1–012011-12.
23. *Rios L., Rachinskii D., Cross R.* On the Rationale for Hysteresis in Economic Decisions // *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. V. 811. № 1. P. 012012-1–012012-9.
24. *Borzunov S.V., Semenov M.E., Sel'vesyuk N.I., Meleshenko P.A., Solovyov A.M.* Stochastic Model of the Hysteresis Converter with a Domain Structure // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2022. V. 14. № 2. P. 304–320.
25. *Cross R.* Unemployment: Natural Rate Epicycles or Hysteresis? // *Europ. J. Economics and Economic Policies: Intervention*, Edward Elgar Publishing. 2014. V. 11. № 2. P. 136–148.
26. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 272 с.
27. *Blanchard O., Wolfers J.* The Roles of Shocks and Institutions in the Rise of European Unemployment: the Aggregate Evidence // *Econ. J.* 2000. V. 110. P. C1–C33.
28. *Mayergoyz I.D.* The Classical Preisach Model of Hysteresis. In: *Mathematical Models of Hysteresis*. N.Y.: Springer, 1991. P. 1–63.
29. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory. Malabar, Florida, 1986. 576 p.
30. *Горский А.А., Колпакова И.Г., Локишин Б.Я.* Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товаров повседневного спроса // *Изв. РАН. ТиСУ*. 1998. № 1. С. 144–148.
31. *Параев Ю.И.* Решение задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2000. № 2. С. 103–107.
32. *Параев Ю.И.* Двухкритериальная задача оптимального производства и сбыта товара // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2003. № 1. С. 138–141.
33. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. (Серия: Классические направления в математике). М.: МЦНМО, 2014. 341 с.
34. *Fedoryuk M.V.* Asymptotic Analysis: Linear Ordinary Differential Equations. Springer, 2012. 363 p.
35. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Серия: Современные проблемы математики. М.: Наука, 1966. 331 с.