

УДК 517.938

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ ПУТЕМ ПРИВЕДЕНИЯ К МОДАЛЬНОМУ НАБЛЮДЕНИЮ С МЕНЬШИМ ЧИСЛОМ ВХОДОВ

© 2024 г. Н. Е. Зубов^{1, *}, А. В. Лапин¹

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*e-mail: nik.zubov@gmail.com

Поступила в редакцию 27.11.2023 г.

После доработки 24.12.2023 г.

Принята к публикации 29.01.2024 г.

Предложен эффективный аналитический метод решения задачи модального управления по выходу для широкого класса линейных стационарных систем, у которых сумма входов и выходов может быть не только больше или равна, но и меньше размерности вектора состояния. Метод основан на приведении модального управления по выходу к модальному наблюдению с меньшим числом входов. При этом не требуется дополнительно обеспечивать разрешимость уравнения связи между матрицей наблюдателя и искомой матрицей регулятора по выходу. Приведение осуществляется путем построения обобщенной дуальной канонической формы по управлению с помощью операций блочного транспонирования и скелетного разложения матриц. Метод существенно расширяет класс систем, для которых существует аналитическое решение, по сравнению с предложенными ранее подходами, поскольку не привязан жестко к размерности системы управления, а также не требует обязательного обнуления столбца и получения системы со скалярным входом. На основе предложенного метода сформирован строгий алгоритм аналитического решения задач из рассматриваемого класса. Также получено простое и удобное необходимое условие приводимости модального управления по выходу к модальному наблюдению с меньшим числом входов, позволяющее по виду исходной задачи оценить возможность ее аналитического решения. В символьном виде рассмотрены примеры задач модального управления по выходу различного порядка, в которых сумма входов и выходов меньше или равна размерности вектора состояния. Подробное аналитическое решение предложенных примеров демонстрирует эффективность практического применения предлагаемого подхода.

Ключевые слова: блочное транспонирование, дуальный подход модального управления, индекс управляемости, модальный наблюдатель, модальное управление по выходу, обобщенная каноническая форма по управлению, скелетное разложение матриц

DOI: 10.31857/S0002338824030043, EDN: UQFBTC

ANALYTIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF MODAL CONTROL BY OUTPUT BY MEANS OF BRINGING TO MODAL OBSERVATION WITH FEWER INPUTS

N. E. Zubov^{a, *}, A. V. Lapin^a

^aBauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*e-mail: nik.zubov@gmail.com

We propose an effective analytic method for solving the problem of modal control by output for a wide class of linear stationary systems in which the sum of inputs and outputs can be not only greater than or equal to, but also less than the dimension of state vector. The method is based on bringing modal control by output to modal observation with fewer inputs. At the same time, it is not necessary to additionally ensure the solvability of the connecting equation between the matrix of observer and the desired matrix of controller by output. The reduction is performed by constructing a generalized dual canonical form of control using the operations of block transposing and rank decomposition of matrices. The method significantly expands the class of systems for which an analytic solution exists, compared to the previously proposed approaches, since it

is not rigidly tied to the control system dimension and also does not require mandatory zeroing of the column and obtaining a system with a single input. Based on the proposed method, a strict algorithm for analytic solution of problems from the considering class is formed. A simple and convenient necessary condition for the reducibility of modal control by output to modal observation with fewer inputs is also obtained, which allows evaluating the possibility of its analytic solution only by the form of original task. Examples of various order tasks of modal control by output in which the sum of inputs and outputs is less than or equal to the dimension of state vector are considered in symbolic form. A detailed analytic solution of the proposed examples demonstrates the effectiveness of the proposed approach practical application.

Keywords: block transposing, controllability index, dual approach of modal control, generalized canonical form of control, modal control by output, modal observer, rank decomposition of matrices

Введение. Задача управления по выходу является одной из ключевых задач при неполной информации о векторе состояния [1]. Она актуальна в штатном режиме управления в качестве альтернативы оцениванию вектора состояния с помощью наблюдателей [2], а также при отказах измерительных устройств [3]. Для законов управления, работающих в реальном времени, важно иметь аналитическое решение данной задачи [4].

Существующие аналитические методы модального управления по выходу существенно ограничены в применении соотношениями между количеством входов и выходов и размерностью вектора состояния. Так, наиболее распространенный аналитический метод на основе подхода Ван дер Воуда [5] применяется, только когда сумма входов и выходов превышает размерность вектора состояния. В силу использования многоуровневой декомпозиции и расчета управления по выходу только на нулевом уровне этот метод не позволяет определить полное множество решений рассматриваемой задачи [6].

Известны также несколько методов [7, 8] решения узкого класса задач, где сумма входов и выходов равна размерности вектора состояния. Эти методы имеют дело только с системами четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами, подразумевают полное обнуление одного из столбцов определенной матрицы и используют приведение только к системе со скалярным входом (SIMO – Single Input Multi Output).

В настоящей работе рассматривается широкий класс систем с векторным входом (MIMO – Multi Input Multi Output), не ограниченный по размерностям. Предлагается аналитический метод решения задачи модального управления по выходу путем приведения к системе с меньшим числом входов, но не обязательно к SIMO-системе. А используемое в методе условие потери ранга не требует неперенного обнуления столбца. Все эти аспекты существенно расширяют класс систем, для которых возможен аналитический синтез модального управления по выходу.

1. Постановка задачи. Пусть задана линейная стационарная система управления, описываемая уравнениями состояния и наблюдения [1]:

$$\begin{cases} \sigma \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

где σ – оператор, соответствующий дифференцированию по времени t в непрерывном случае $t \in \mathbb{R}$ или сдвигу на шаг вперед $t + 1$ в дискретном случае $t \in \mathbb{Z}$; $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$ – векторы состояния, управления (входов) и наблюдения (выходов); $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ – соответствующие им постоянные матрицы; запись вида $\mathbb{R}^{p \times q}$ обозначает множество вещественных матриц, имеющих размерность $p \times q$. Далее очевидная зависимость векторов от времени опускается.

Рассматривается задача модального управления по выходу [1]. Требуется построить закон управления (определить матрицу регулятора по выходу $\mathbf{F}$)

$$\mathbf{u} = -\mathbf{F}\mathbf{y}, \quad (1.2)$$

обеспечивающий матрице замкнутой (close-loop) системы управления (1.1)–(1.2)

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{C} \quad (1.3)$$

заданный спектр (множество собственных значений)

$$\Lambda^* = \{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\} \quad (1.4)$$

или соответствующий характеристический полином

$$p^*(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*). \quad (1.5)$$

Для систем вида (1.1) с одним входом $m = 1$ (SIMO-систем по управлению) решение задачи модального управления по выходу хорошо известно [9]. Оно получается на основе единственного решения соответствующей задачи модального управления по состоянию. При этом используются формулы Басса–Гура [10] или Аккермана [11]. Вместе с тем в работах [12, 13] показано, что существует класс систем со многими входами $m \geq 2$ (MIMO-систем), которые в блочном представлении с помощью операции блочного транспонирования [14] могут рассматриваться как обобщенный аналог SIMO-систем по управлению. Имеются в виду такие MIMO-системы (1.1), где размерность вектора состояния кратна размерности вектора управления, а индекс управляемости i_B равен частному k от деления указанных размерностей, т.е.

$$n = km, \quad \det \mathbf{B}_{[k]} \neq 0. \quad (1.6)$$

Здесь $\mathbf{B}_{[k]}$ — матрица, состоящая из k блочных столбцов матрицы управляемости Калмана:

$$\mathbf{B}_{[k]} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{k-2}\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]. \quad (1.7)$$

Для систем (1.1) из класса (1.6) ранее были доказаны обобщенные формулы Басса–Гура [12] и Аккермана [13], позволяющие получать полное множество решений соответствующей задачи модального управления *по состоянию*. В основе вывода этих формул лежит приведение исходной системы (1.1) с помощью преобразований подобия к обобщенной канонической форме по управлению, аналогичной канонической форме Люенбергера [15], но представленной блочными коэффициентами и операцией блочного транспонирования. Операция блочного транспонирования, обозначаемая верхним индексом $T_{p \times q}$, подразумевает перемещение блоков заданной размерности $p \times q$ в позиции, соответствующие транспонированию, в неизменном виде — без перемещения элементов внутри каждого блока.

В настоящей работе описанный подход распространяется на управление *по выходу*.

2. Обобщенная каноническая форма по управлению. Пусть имеется система (1.1) из класса (1.6). Приведем матрицу замкнутой системы управления (1.3) к *обобщенной канонической форме по управлению* [12]. Для этого последовательно выполним два преобразования подобия.

Первое преобразование выполняется с помощью матрицы $\mathbf{B}_{[k]}$ (1.7) и имеет вид

$$\tilde{\mathbf{A}}_{cl} = \mathbf{B}_{[k]}^{-1} \mathbf{A}_{cl} \mathbf{B}_{[k]} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,k} \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,k-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & -\mathbf{P}_{B,1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\mathbf{F} \mathbf{C} \mathbf{B}_{[k]}}_{\mathbf{K}}.$$

Здесь $\mathbf{I}_m$ — единичная матрица порядка m , $\mathbf{0}$ — нулевая матрица подходящей размерности, а блочные коэффициенты $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $i = \overline{1, k}$ находятся из блочного столбца (*column*):

$$\mathbf{P}_{B,col} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,k} \\ \mathbf{P}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{P}_{B,1} \end{bmatrix} = -\mathbf{B}_{[k]}^{-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B}. \quad (2.1)$$

Второе преобразование выполняется с помощью квадратной блочно-треугольной, а значит, неособенной [16] матрицы:

$$\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,k-1} & \mathbf{P}_{B,k-2} & \cdots & \mathbf{P}_{B,1} & \mathbf{I}_m \\ \mathbf{P}_{B,k-2} & \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{P}_{B,1} & \mathbf{I}_m & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{B,1} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

и имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{cl} &= \mathbf{T}_B^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{cl} \mathbf{T}_B = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{P}_{B,k} & -\mathbf{P}_{B,k-1} & \cdots & -\mathbf{P}_{B,2} & -\mathbf{P}_{B,1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{FQ}_{B,k} & \mathbf{FQ}_{B,k-1} & \cdots & \mathbf{FQ}_{B,2} & \mathbf{FQ}_{B,1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{FCB}_{[k]} \mathbf{T}_B$, а блочные коэффициенты $\mathbf{Q}_{B,i} \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $i = \overline{1, k}$ записываются в виде блочного столбца (*column*):

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{B,k} \\ \mathbf{Q}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{B,2} \\ \mathbf{Q}_{B,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \cdots & \mathbf{M}_{k-2} & \mathbf{M}_{k-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \cdots & \mathbf{M}_{k-2} \\ \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,k-1} \\ \mathbf{P}_{B,k-2} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{B,1} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

где

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{CA}^i \mathbf{B}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Запись (2.2) представляет собой обобщенную каноническую форму по управлению [12]. С помощью формул Шура об определителе блочных матриц [16] можно показать, что в форме матрица разомкнутой системы $\tilde{\mathbf{A}}$ (и $\mathbf{A}$) имеет характеристический полином

$$|\mathbf{P}_B(\lambda)| = p(\lambda) = |\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}|, \quad (2.5)$$

а матрица замкнутой системы $\tilde{\mathbf{A}}_{cl}$ (и $\mathbf{A}_{cl}$) — характеристический полином $|\mathbf{P}_B(\lambda) + \mathbf{FQ}_B(\lambda)|$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_B(\lambda) &= \sum_{i=0}^k (\lambda^{k-i} \mathbf{P}_{B,i}), \\ \mathbf{Q}_B(\lambda) &= \sum_{i=1}^k (\lambda^{k-i} \mathbf{Q}_{B,i}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть в канонической форме (2.2) предварительно определено полное множество регуляторов по состоянию [12] (*row* — строка)

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}_{B,row}^* - \mathbf{P}_{B,row},$$

где $\mathbf{P}_{B,row} = \mathbf{P}_{B,col}^{T_{m \times m}} \in \mathbb{R}^{m \times km}$, а блочные коэффициенты $\mathbf{P}_{B,i}^* \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $i = \overline{1, k}$, матрицы $\mathbf{P}_{B,row}^* = [\mathbf{P}_{B,k}^* \mid \mathbf{P}_{B,k-1}^* \mid \dots \mid \mathbf{P}_{B,2}^* \mid \mathbf{P}_{B,1}^*]$ и обобщенного желаемого характеристического полинома

$$\mathbf{P}_B^*(\lambda) = \sum_{i=0}^k (\lambda^{k-i} \mathbf{P}_{B,i}^*)$$

таковы, что

$$|\mathbf{P}_B^*(\lambda)| = p^*(\lambda). \quad (2.7)$$

Тогда блочно-транспонированное уравнение связи

$$\mathbf{FQ}_{B,row} = \tilde{\mathbf{K}}, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{Q}_{B,row} = \mathbf{Q}_{B,col}^{T_{l \times km}} \in \mathbb{R}^{l \times km}$, по сути, представляет собой обобщенную формулу Басса–Гура [12] для регулятора по выходу. Ее практическое применение затруднено тем, что ранг строчной матрицы коэффициентов $\mathbf{Q}_{B,row}$ оказывается меньше количества ее столбцов. Поэтому необходимо дополнительно обеспечивать условие разрешимости [17] уравнения (2.8) относительно матрицы регулятора по выходу $\mathbf{F}$. Аналитических методов обеспечения этого условия не через матрицы с желаемыми спектрами, как, например, в работах [5, 6], а через суммы и произведения этих матриц (обобщенные коэффициенты Виета $\mathbf{P}_i^*$), в настоящее время не существует.

Однако существуют такие случаи, что в задаче можно уменьшить число входов m до некоторого значения r , когда аналогичная матрица $\mathbf{Q}_{B,row} \in \mathbb{R}^{l \times kr}$ будет иметь полный ранг, равный количеству столбцов, и уравнение связи, аналогичное уравнению (2.8), разрешится автоматически без дополнительных условий.

3. Метод приведения к модальному наблюдению с меньшим числом входов. Выполним блочное $m \times m$ транспонирование обобщенной канонической формы по управлению (2.2):

$$\mathbf{A}_B^* = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,k} \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,k-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & -\mathbf{P}_{B,1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_B} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{FQ}_{B,k} \\ \mathbf{FQ}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{FQ}_{B,2} \\ \mathbf{FQ}_{B,1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_B} \underbrace{[\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \dots \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{I}_m]}_{\mathbf{C}_B}, \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{A}_B^* = \tilde{\mathbf{A}}_{cl}^{T_{m \times m}}$, $\mathbf{A}_B = \tilde{\mathbf{A}}^{T_{m \times m}}$, $\mathbf{C}_B = \tilde{\mathbf{B}}^{T_{m \times m}}$, $\mathbf{L}_B = \tilde{\mathbf{K}}^{T_{m \times m}}$. Назовем полученную форму (3.1) *обобщенной дуальной канонической формой по управлению*.

С помощью формул Шура [16] можно доказать инвариантность полиномов (2.5) и (2.7) по отношению к выполненной операции блочного транспонирования: матрицы состояния разомкнутой $\mathbf{A}_B$ и замкнутой $\mathbf{A}_B - \mathbf{L}_B \mathbf{C}_B$ систем в форме (3.1) имеют соответственно характеристические полиномы (2.5) и (2.7). Таким образом, указанные матрицы подобны матрицам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_{cl}$ соответственно.

Если у МИМО-системы (1.1) из класса (1.6) в обобщенной дуальной канонической форме по управлению (3.1) ранг матрицы коэффициентов $\mathbf{Q}_{B,col} \in \mathbb{R}^{kl \times m}$, равный r , меньше количества ее столбцов, т.е.

$$\text{rank } \mathbf{Q}_{B,col} < m, \quad (3.2)$$

то после скелетного разложения

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \hat{\mathbf{Q}}_{B,col} \mathbf{S}_B, \quad (3.3)$$

где $\hat{\mathbf{Q}}_{B,col} \in \mathbb{R}^{kl \times r}$, $\mathbf{S}_B \in \mathbb{R}^{r \times m}$, задача модального управления по выходу приводится к задаче *модального наблюдения* для пары матриц:

$$\mathbf{A}_B, \quad \widehat{\mathbf{C}}_B = \mathbf{S}_B \mathbf{C}_B.$$

Матрицу наблюдателя $\widehat{\mathbf{L}}_B \in \mathbb{R}^{km \times r}$, обеспечивающую желаемый спектр (1.4)

$$\text{eig}(\mathbf{A}_B - \widehat{\mathbf{L}}_B \widehat{\mathbf{C}}_B) = \Lambda^*,$$

всегда можно определить аналитически, используя дуальный декомпозиционный метод модального управления по состоянию [18].

Для искомой матрицы регулятора по выходу справедливо *блочно-транспонированное уравнение связи*

$$\mathbf{F} \widehat{\mathbf{Q}}_{B, \text{row}} = \widehat{\mathbf{K}}_B, \quad (3.4)$$

где $\widehat{\mathbf{Q}}_{B, \text{row}} = \widehat{\mathbf{Q}}_{B, \text{col}}^{T_{l \times r}} \in \mathbb{R}^{l \times kr}$, $\widehat{\mathbf{K}}_B = \widehat{\mathbf{L}}_B^{T_{m \times r}} \in \mathbb{R}^{m \times kr}$. Уравнение (3.4) оказывается эффективным (в плане получения аналитического решения), когда в нем не требуется дополнительно обеспечивать условие разрешимости [17], т.е. когда не существует правого аннулятора ($\widehat{\mathbf{Q}}_{B, \text{row}}^R = \mathbf{0}_{kr \times 0}$). Это может иметь место, только если число столбцов матрицы $\widehat{\mathbf{Q}}_{B, \text{row}}$ не превышает числа ее строк, т.е.

$$r \leq \frac{ml}{n}. \quad (3.5)$$

Тогда множество матриц регулятора по выходу, решений уравнения (3.4) имеет вид [17]

$$\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{K}}_B \widehat{\mathbf{Q}}_{B, \text{row}}^+ + \boldsymbol{\Omega}_B \widehat{\mathbf{Q}}_{B, \text{row}}^L, \quad (3.6)$$

где $\widehat{\mathbf{Q}}_{B, \text{row}}^+$ и $\widehat{\mathbf{Q}}_{B, \text{row}}^L$ — соответственно псевдообратная матрица [16] и левый аннулятор максимального ранга матрицы $\widehat{\mathbf{Q}}_{B, \text{row}}$, а $\boldsymbol{\Omega}_B$ — произвольная матрица подходящей размерности.

Условие приводимости (3.2) аналогично представленному в статье [7] условию обнуления столбца. Но теперь это более широкое условие, включающее в себя не только случаи обнуления столбцов, но и любые другие случаи потери ранга без обнуления.

Предлагаемый метод приведения к задаче модального наблюдения с меньшим числом входов $r < m$ применяется к системам не только четвертого порядка [8], но и более высоких порядков. Сумма входов и выходов не обязательно должна быть больше количества состояний, как в работе [5], или равна ему, как в работах [7, 8], но может быть и меньше (лишь бы произведение количества входов и выходов не оказалось меньше количества состояний). А само приведение осуществляется не обязательно к SIMO-системе [19].

4. Алгоритм приведения к модальному наблюдению с меньшим числом входов. Решение задачи модального управления по выходу методом приведения к модальному наблюдению с меньшим числом входов состоит в выполнении следующих пошаговых операций.

1. Проверяется условие принадлежности заданной MIMO-системы (1.1) к классу (1.6):

$$n = km, \quad \det \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{k-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{[k]}} \neq 0.$$

2. Строится обобщенная дуальная каноническая форма по управлению (3.1):

$$\mathbf{A}_B^* = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,k} \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,k-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & -\mathbf{P}_{B,1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_B} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}\mathbf{Q}_{B,k} \\ \mathbf{F}\mathbf{Q}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}\mathbf{Q}_{B,2} \\ \mathbf{F}\mathbf{Q}_{B,1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_B} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_B},$$

где, согласно формулам (2.1), (2.3) и (2.4), блочные коэффициенты $\mathbf{P}_{B,i} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $\mathbf{Q}_{B,i} \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $i = \overline{1, k}$, соответственно определяются из соотношений:

$$\mathbf{P}_{B,col} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,k} \\ \mathbf{P}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{P}_{B,1} \end{bmatrix} = -\mathbf{B}_{[k]}^{-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B}, \quad [\mathbf{M}_0 \mid \mathbf{M}_1 \mid \dots \mid \mathbf{M}_{k-2} \mid \mathbf{M}_{k-1}] = \mathbf{C} \mathbf{B}_{[k]},$$

$$\mathbf{M}_j \in \mathbb{R}^{l \times m}, \quad j = \overline{0, k-1};$$

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{B,k} \\ \mathbf{Q}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{B,2} \\ \mathbf{Q}_{B,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \dots & \mathbf{M}_{k-2} & \mathbf{M}_{k-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \dots & \mathbf{M}_{k-2} \\ \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,k-1} \\ \mathbf{P}_{B,k-2} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{B,1} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}.$$

3. Вычисляется ранг $r = \text{rank}(\mathbf{Q}_{B,col} \in \mathbb{R}^{kl \times m})$, и проверяется условие (3.2) приводимости к задаче модального наблюдения с меньшим числом входов $r < m$, после чего выполняется скелетное разложение (3.3):

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \hat{\mathbf{Q}}_{B,col} \mathbf{S}_B,$$

где $\hat{\mathbf{Q}}_{B,col} \in \mathbb{R}^{kl \times r}$, $\mathbf{S}_B \in \mathbb{R}^{r \times m}$.

4. Определяется матрица наблюдателя в системе с меньшим числом входов:

$$\hat{\mathbf{L}}_B \in \mathbb{R}^{km \times r} : \quad \text{eig} \left(\mathbf{A}_B - \underbrace{\hat{\mathbf{L}}_B \mathbf{S}_B \mathbf{C}_B}_{\hat{\mathbf{C}}_B} \right) = \Lambda^*.$$

5. Записывается блочно-транспонированное уравнение связи (3.4):

$$\mathbf{F} \hat{\mathbf{Q}}_{B,row} = \hat{\mathbf{K}}_B,$$

где $\hat{\mathbf{Q}}_{B,row} = \hat{\mathbf{Q}}_{B,col}^T \in \mathbb{R}^{l \times kr}$, $\hat{\mathbf{K}}_B = \hat{\mathbf{L}}_B^T \in \mathbb{R}^{m \times kr}$.

6. Определяется искомая матрица регулятора по выходу (3.6):

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{K}}_B \hat{\mathbf{Q}}_{B,row}^+ + \mathbf{\Omega}_B \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_{B,row}^L,$$

где $\mathbf{\Omega}_B$ — произвольная матрица подходящей размерности.

5. Необходимое условие приводимости к модальному наблюдению с меньшим числом входов.

Представленное выше *необходимое и достаточное* условие приводимости модального управления по выходу к модальному наблюдению с меньшим числом входов предполагает построение обобщенной канонической формы по управлению (3.1). Таким образом, данное условие не может быть проверено до решения задачи, т.е. только по виду системы (1.1). Однако можно доказать более простое *необходимое* условие.

Теорема. Модальное управление по выходу для МИМО-системы (1.1) из класса (1.6) приводится к модальному наблюдению с меньшим числом входов $r < m$, только если индекс наблюдаемости i_C этой системы удовлетворяет неравенству

$$\frac{n}{r} - \frac{n}{m} \leq i_C - 1 \leq n - l. \quad (5.1)$$

Доказательство. Правое соотношение в двойном неравенстве (5.1) хорошо известно — это верхняя граница индекса наблюдаемости [1]. Докажем левое соотношение.

Наряду с матрицей $\mathbf{B}_{[k]}$ рассмотрим матрицы $\mathbf{C}_{[i]}$, состоящие из $i = \overline{1, n-l+1}$ первых блочных строк матрицы наблюдаемости Калмана:

$$\mathbf{C}_{[i]} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы $\mathbf{C}_{[i]}$ не изменится после ее умножения на квадратную и неособенную, в соответствии с условием , матрицу $\mathbf{B}_{[k]}$, т.е.

$$\text{rank } \mathbf{C}_{[i]} = \text{rank } \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \dots & \mathbf{M}_{k-1} \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \dots & \mathbf{M}_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{M}_{i-1} & \mathbf{M}_i & \dots & \mathbf{M}_{k+i-2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{[i]} \mathbf{B}_{[k]}}.$$

Ранг не уменьшится, если к матрице добавить слева несколько блочных столбцов, образующих в данном случае блочную матрицу нижнетреугольного вида:

$$\text{rank } \mathbf{C}_{[i]} \leq \text{rank } \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \dots & \mathbf{M}_{k-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \dots & \mathbf{M}_k \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \dots & \mathbf{M}_{i-1} & \mathbf{M}_i & \dots & \mathbf{M}_{k+i-2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}}.$$

Используя блочные коэффициенты (2.1) обобщенного характеристического полинома (2.6), составим еще одну квадратную и неособенную матрицу, имеющую блочный верхнетреугольный вид, по $k + i - 1$ блоков в каждой строке и в каждом столбце:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{B,k} & \dots & \mathbf{P}_{B,1} & \mathbf{I}_m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{B,k} & & \mathbf{P}_{B,1} & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ \mathbf{P}_{B,k} & \vdots & \ddots & \mathbf{I}_m & \ddots & \vdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{P}_{B,1} & \ddots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{B,1} & \mathbf{I}_m & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что равенство (2.1)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{[k]} & \mathbf{A}^k \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,col} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

приводит к тождеству

$$\mathbf{CA}^j \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{[k]} & \mathbf{A}^k \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,col} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{M}_j & \mathbf{M}_{j+1} & \dots & \mathbf{M}_{j+k-1} & \mathbf{M}_{j+k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,k} \\ \mathbf{P}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{B,1} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.2)$$

справедливого для любого целого неотрицательного числа j . Перемножив матрицы $\tilde{\mathbf{M}}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$, на основании равенств (2.3) и (5.2) получим неравенство

$$\text{rank } \mathbf{C}_{[i]} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{B,k} & \mathbf{Q}_{B,k-1} & \cdots & \mathbf{Q}_{B,k-i+1} & \cdots & \mathbf{Q}_{B,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{B,k} & \mathbf{Q}_{B,k-1} & \cdots & \mathbf{Q}_{B,k-i+1} & \cdots & \mathbf{Q}_{B,1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{B,k} & \mathbf{Q}_{B,k-1} & \cdots & \mathbf{Q}_{B,k-i+1} & \cdots & \mathbf{Q}_{B,1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}\tilde{\mathbf{P}}}.$$

В правой части данного неравенства стоит матрица, каждый блочный столбец которой имеет ранг не более $\text{rank } \mathbf{Q}_{B,col} = r$. Всего блочных столбцов $k + i - 1$. Поэтому

$$\text{rank } \mathbf{C}_{[i]} \leq r(k + i - 1).$$

В силу того, что $\text{rank } \mathbf{C}_{[i_C]} = n$, для индекса наблюдаемости справедливо неравенство

$$n \leq r(k + i_C - 1),$$

где $k = n/m$. Отсюда и следует требуемое соотношение (5.1).

Теорема доказана.

Из неравенства (5.1) вытекает, что для систем (1.1) из класса (1.6) индекс наблюдаемости не обязательно должен быть строго больше индекса управляемости, как в статье [7]. Для систем четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами [8] неравенство между индексами $i_C > i_B$ действительно строгое: при $n = 4$, $m = 2$ ($i_B = 2$) и $r = 1$ из неравенства (5.1) следует $i_C \geq 3$. Но, например, при $n = 9$, $m = 3$ ($i_B = 3$), $l = 6$ и допустимом в силу неравенства (3.5) меньшем числе входов $r = 2$ из неравенства (5.1) получаем $i_C \geq 3$, т.е. возможно равенство индексов $i_C = i_B = 3$.

Необходимое условие приводимости (5.1) и необходимое условие эффективности (наличия аналитического решения) (3.5) в ряде случаев позволяют сразу определить целесообразность применения предлагаемого метода — только по размерностям векторов состояния, управления и наблюдения. Так, например, задача управления по выходу с размерностями состояния $n = 9$, управления $m = 3$ и наблюдения $l = 5$ никогда не может быть решена путем приведения к задаче модального наблюдения с меньшим числом входов. Действительно, единственно допустимое неравенством (3.5) меньшее число входов $r = 1$ приводит к требуемому соотношением (5.1) индексу наблюдаемости $7 \leq i_C \leq 5$, что невозможно.

6. Примеры решения задач. В первом примере рассмотрим задачу управления по выходу, в которой сумма входов и выходов меньше размерности вектора состояния.

Пример 1. Задан линейный стационарный объект шестого порядка с двумя входами и тремя выходами, описываемый матрицами состояния и управления:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,5} & 0 \\ 0 & a_{5,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{6,3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{6,1} & 0 \end{bmatrix},$$

а также матрицей наблюдения:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Требуется определить множество матриц регулятора по выходу $\mathbf{F}$, обеспечивающих матрице замкнутой системы $\mathbf{A} - \mathbf{BFC}$ заданный характеристический полином (1.5).

Задача решается в соответствии с изложенным выше алгоритмом приведения к модальному наблюдению с одним входом.

1. Размерность вектора состояния 6 кратна размерности вектора управления 2 (частное равно трем), а матрица

$$\mathbf{B}_{[3]} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1,3}a_{3,6}b_{6,1} & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,6}b_{6,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,5}a_{5,2}b_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,2}b_{2,2} & 0 & 0 \\ b_{6,1} & 0 & 0 & 0 & a_{6,3}a_{3,6}b_{6,1} & 0 \end{bmatrix}$$

имеет ненулевой определитель

$$\det \mathbf{B}_{[3]} = -a_{1,3}a_{4,5}(a_{3,6}a_{5,2})^2(b_{2,2}b_{6,1})^3.$$

Индекс управляемости равен трем: $i_B = n/m = 3$.

2. Рассчитаем блоки обобщенного характеристического полинома по управлению:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_3 \\ \bar{\mathbf{P}}_2 \\ \bar{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix} = -\mathbf{B}_{[3]}^{-1}\mathbf{A}^3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\tilde{b}_{6,1}b_{2,2}^{-1} & 0 \\ -\tilde{a}_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\tilde{a}_{3,1} = a_{1,3}a_{3,1} + a_{3,6}a_{6,3}$, $\tilde{b}_{6,1} = a_{1,3}a_{2,1}a_{3,6}b_{6,1}$. Через вспомогательные блоки

$$[\mathbf{M}_0 \mid \mathbf{M}_1 \mid \mathbf{M}_2] = \mathbf{CB}_{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,5}a_{5,2}b_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,2}b_{2,2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

рассчитаем блочные коэффициенты при матрице регулятора по выходу:

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{B,3} \\ \mathbf{Q}_{B,2} \\ \mathbf{Q}_{B,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{P}_{B,1} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = b_{2,2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{4,5}a_{5,2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_{5,2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Построим обобщенную дуальную каноническую форму по управлению:

$$\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_3 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & -\mathbf{P}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{6,1}b_{2,2}^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a}_{3,1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_B = [\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{I}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Ранг матрицы $\mathbf{Q}_{B,col}$ меньше числа столбцов: $1 < 2$. Выполним скелетное разложение:

$$\mathbf{Q}_{B,col} = b_{2,2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ a_{4,5}a_{5,2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_{5,2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_{B,col}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_B}.$$

4. Определим матрицу наблюдателя для пары $(\mathbf{A}_B, \hat{\mathbf{C}}_B)$ и полинома $p^*(\lambda)$, где

$$\hat{\mathbf{C}}_B = \mathbf{S}_B \mathbf{C}_B = [0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 1],$$

с помощью дуальной формулы Аккермана:

$$\hat{\mathbf{L}}_B = \sum_{i=0}^6 \left(p_i^* \mathbf{A}_B^{6-i} \right) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_B \\ \hat{\mathbf{C}}_B \mathbf{A}_B \\ \hat{\mathbf{C}}_B \mathbf{A}_B^2 \\ \hat{\mathbf{C}}_B \mathbf{A}_B^3 \\ \hat{\mathbf{C}}_B \mathbf{A}_B^4 \\ \hat{\mathbf{C}}_B \mathbf{A}_B^5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa p_6^* \\ p_1^* \tilde{a}_{3,1} + p_3^* \\ \kappa \left(p_1^* \tilde{a}_{3,1}^2 + p_3^* \tilde{a}_{3,1} + p_5^* \right) \\ \tilde{a}_{3,1} + p_2^* \\ \kappa \left(\tilde{a}_{3,1}^2 + p_2^* \tilde{a}_{3,1} + p_4^* \right) \\ p_1^* \end{bmatrix}.$$

Здесь введено обозначение $\kappa = b_{2,2} \tilde{b}_{6,1}^{-1}$.

5. Запишем блочно-транспонированное уравнение связи $\mathbf{F} \hat{\mathbf{Q}}_{B,row} = \hat{\mathbf{K}}_B$:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{B,row} = \hat{\mathbf{Q}}_{B,col}^{T_{3 \times 1}} = b_{2,2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{4,5}a_{5,2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{5,2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_B = \widehat{\mathbf{L}}_B^{T_2 \times 1} = \begin{bmatrix} b_{2,2} \tilde{b}_{6,1}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_6^* & p_1^* \tilde{a}_{3,1}^2 + p_3^* \tilde{a}_{3,1} + p_5^* & \tilde{a}_{3,1}^2 + p_2^* \tilde{a}_{3,1} + p_4^* \\ p_1^* \tilde{a}_{3,1} + p_3^* & \tilde{a}_{3,1} + p_2^* & p_1^* \end{bmatrix}.$$

6. Определим искомую матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{K}}_B \widehat{\mathbf{Q}}_{B,row}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{6,1} & 0 \\ 0 & b_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{3,1}^2 + p_2^* \tilde{a}_{3,1} + p_4^* & p_6^* & p_1^* \tilde{a}_{3,1}^2 + p_3^* \tilde{a}_{3,1} + p_5^* \\ p_1^* & p_1^* \tilde{a}_{3,1} + p_3^* & \tilde{a}_{3,1} + p_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,5} a_{5,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{5,2} \end{bmatrix}^{-1}.$$

После решения задачи была выполнена проверка, которая подтвердила, что полученная матрица $\mathbf{F}$ обеспечивает желаемый характеристический полином (и спектр):

$$\det(\lambda \mathbf{I}_6 - \mathbf{A} + \mathbf{BFC}) = p^*(\lambda).$$

Далее рассмотрим задачу, в которой сумма входов и выходов *равна* размерности вектора состояния, но порядок системы выше четвертого. Имеет место потеря ранга матрицы $\mathbf{Q}_{B,col}$ без обнуления столбцов. Задача управления по выходу приводится к задаче наблюдения *не со скалярным* входом (SIMO), а с векторным входом (MIMO).

Пример 2. Задан линейный стационарный объект девятого порядка с тремя входами и шестью выходами, описываемый матрицами состояния и управления:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2,9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{8,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,8} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,2} \\ 0 & 0 & b_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а также матрицей наблюдения:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Требуется определить множество матриц регулятора по выходу $\mathbf{F}$, обеспечивающих матрице замкнутой системы $\mathbf{A} - \mathbf{BFC}$ заданный спектр (1.4).

Задача решается в соответствии с изложенным выше алгоритмом приведения к модальному наблюдению с меньшим числом входов.

1. Размерность вектора состояния 9 кратна размерности вектора управления 3 (частное равно трем), а матрица

$$\mathbf{B}_{[3]} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,2}b_{2,2} & a_{4,2}b_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{2,2} & \tilde{b}_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{6,1}b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,3}b_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{3,3} \end{bmatrix},$$

где $\tilde{b}_{1,1} = a_{6,1}a_{7,6}b_{1,1}$, $\tilde{b}_{2,2} = a_{4,2}a_{5,4}b_{2,2}$, $\tilde{b}_{3,3} = a_{8,3}a_{9,8}b_{3,3}$, имеет ненулевой определитель:

$$\det \mathbf{B}_{[3]} = -a_{4,2}a_{6,1}a_{8,3}\tilde{b}_{1,1}\tilde{b}_{2,2}\tilde{b}_{3,3}(b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3})^2.$$

Индекс управляемости равен трем: $i_B = n/m = 3$.

2. Рассчитаем блоки обобщенного характеристического полинома по управлению:

$$\mathbf{P}_{B,col} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,3} \\ \mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{P}_{B,1} \end{bmatrix} = -\mathbf{B}_{[3]}^{-1}\mathbf{A}^3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\kappa = a_{2,9}\tilde{b}_{3,3}/b_{2,2}$. Через вспомогательные блоки

$$[\mathbf{M}_0 \mid \mathbf{M}_1 \mid \mathbf{M}_2] = \mathbf{CB}_{[3]} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,2}b_{2,2} & a_{4,2}b_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{2,2} & \tilde{b}_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{6,1}b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{1,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

рассчитаем блочные коэффициенты при матрице регулятора по выходу:

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{B,3} \\ \mathbf{Q}_{B,2} \\ \mathbf{Q}_{B,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{P}_{B,1} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_{B,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{2,2} & \tilde{b}_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{b}_{1,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{B,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2}b_{2,2} & a_{4,2}b_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{6,1}b_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{B,1} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Построим обобщенную дуальную каноническую форму по управлению:

$$\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,3} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & -\mathbf{P}_{B,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_B = [\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{I}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Ранг матрицы $\mathbf{Q}_{B,col}$ меньше числа столбцов: $2 < 3$. Выполним скелетное разложение:

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_{B,3} \\ \hat{\mathbf{Q}}_{B,2} \\ \hat{\mathbf{Q}}_{B,1} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{Q}}_{B,col}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_B},$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_{B,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{2,2} \\ 0 & 0 \\ \tilde{b}_{1,1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{Q}}_{B,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2}b_{2,2} \\ 0 & 0 \\ a_{6,1}b_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{Q}}_{B,1} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 \\ 0 & b_{2,2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Определим матрицу наблюдателя для пары $(\mathbf{A}_B, \hat{\mathbf{C}}_B)$ и спектра Λ^* , где

$$\hat{\mathbf{C}}_B = \mathbf{S}_B \mathbf{C}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

с помощью дуального декомпозиционного метода модального управления по состоянию.
Нулевой уровень декомпозиции:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_B, \quad \mathbf{C}_0 = \hat{\mathbf{C}}_B;$$

$$\bar{\mathbf{C}}_0^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}}_0^{R+} = (\bar{\mathbf{C}}_0^{RT} \bar{\mathbf{C}}_0^R)^{-1} \bar{\mathbf{C}}_0^{RT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Первый уровень декомпозиции:

$$\mathbf{A}_1 = \bar{\mathbf{C}}_0^{R+} \mathbf{A}_0 \bar{\mathbf{C}}_0^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \bar{\mathbf{C}}_0 \mathbf{A}_0 \bar{\mathbf{C}}_0^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{C}}_1^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}}_1^{R+} = (\bar{\mathbf{C}}_1^{RT} \bar{\mathbf{C}}_1^R)^{-1} \bar{\mathbf{C}}_1^{RT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Второй уровень декомпозиции:

$$\mathbf{A}_2 = \bar{\mathbf{C}}_1^{R+} \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{C}}_1^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \bar{\mathbf{C}}_1 \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{C}}_1^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{C}}_2^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}}_2^{R+} = (\bar{\mathbf{C}}_2^{RT} \bar{\mathbf{C}}_2^R)^{-1} \bar{\mathbf{C}}_2^{RT} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Третий уровень декомпозиции (с модификацией):

$$\mathbf{A}_3 = \bar{\mathbf{C}}_2^{R+} \mathbf{A}_2 \bar{\mathbf{C}}_2^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\kappa/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_3 = \bar{\mathbf{C}}_2 \mathbf{A}_2 \bar{\mathbf{C}}_2^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}_3}.$$

Наблюдатель на третьем уровне декомпозиции (с модификацией и без):

$$\hat{\mathbf{L}}_3 = \left(\mathbf{A}_3^3 + \tilde{p}_1^* \mathbf{A}_3^2 + \tilde{p}_2^* \mathbf{A}_3 + \tilde{p}_3^* \mathbf{I}_3 \right) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_3 \\ \hat{\mathbf{C}}_3 \mathbf{A}_3 \\ \hat{\mathbf{C}}_3 \mathbf{A}_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{3\kappa}^* - 1/2 \\ \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{bmatrix},$$

где $\begin{bmatrix} \tilde{p}_{1\kappa}^* & \tilde{p}_{2\kappa}^* & \tilde{p}_{3\kappa}^* \end{bmatrix} = \kappa^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{p}_1^* & \tilde{p}_2^* & \tilde{p}_3^* \end{bmatrix} = \kappa^{-1} \begin{bmatrix} -\lambda_9^* - \lambda_8^* - \lambda_7^* & \lambda_9^* \lambda_8^* + \lambda_9^* \lambda_7^* + \lambda_8^* \lambda_7^* & -\lambda_9^* \lambda_8^* \lambda_7^* \end{bmatrix}$ и применена дуальная формула Аккермана;

$$\mathbf{L}_3 = \hat{\mathbf{L}}_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_3^+} + \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_2 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{S}}_3^T} = \begin{bmatrix} \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* - 1/2 \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{bmatrix}.$$

Здесь ω_1 , ω_2 и ω_3 — произвольные вещественные параметры.

Наблюдатель на втором уровне декомпозиции:

$$\mathbf{C}_2^- = \underbrace{\mathbf{C}_2^T (\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2^T)^{-1}}_{\mathbf{C}_2^+} + \bar{\mathbf{C}}_2^R \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{C}_2^- - \mathbf{C}_2^- \Psi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \kappa \omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* - 1/2 \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{bmatrix} \Psi_2,$$

где Ψ_2 — матрица с желаемым спектром $\text{eig } \Psi_2 = \{\lambda_6^*, \lambda_5^*\}$.

Наблюдатель на первом уровне декомпозиции:

$$\mathbf{C}_1^- = \underbrace{\mathbf{C}_1^T (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1^T)^{-1}}_{\mathbf{C}_1^+} + \bar{\mathbf{C}}_1^R \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \kappa \omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_2 & -\tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{bmatrix} \Psi_2,$$

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_1^- - \mathbf{C}_1^- \mathbf{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \kappa\omega_2 & \tilde{p}_2^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* - 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,1}^* + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_2 & -\tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,2}^*,$$

где $\mathbf{\Psi}_1$ – матрица с желаемым спектром $\text{eig } \mathbf{\Psi}_1 = \{\lambda_4^*, \lambda_3^*\}$; $\tilde{\mathbf{P}}_{2,1}^* = -\mathbf{\Psi}_2 - \mathbf{\Psi}_1$, $\tilde{\mathbf{P}}_{2,2}^* = \mathbf{\Psi}_2 \mathbf{\Psi}_1$.
Наблюдатель на нулевом уровне декомпозиции:

$$\mathbf{C}_0^- = \underbrace{\mathbf{C}_0^T (\mathbf{C}_0 \mathbf{C}_0^T)^{-1}}_{\mathbf{C}_0^+} + \bar{\mathbf{C}}_0^R \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \kappa\omega_2 & \tilde{p}_2^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_2 & -\tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,1}^* + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_2 & -\tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_1 & -\tilde{p}_{1\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{2,2}^*,$$

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{A}_0 \mathbf{C}_0^- - \mathbf{C}_0^- \mathbf{\Psi}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \kappa\omega_3 & \tilde{p}_3^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \kappa\omega_2 & \tilde{p}_2^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \kappa\omega_2 & \tilde{p}_2^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{3,1}^* + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_2 & -\tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{3,2}^* + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_2 & -\tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_1 & -\tilde{p}_{1\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{3,3}^*,$$

где $\mathbf{\Psi}_0$ – матрица с желаемым спектром $\text{eig } \mathbf{\Psi}_0 = \{\lambda_2^*, \lambda_1^*\}$; $\tilde{\mathbf{P}}_{3,1}^* = -\mathbf{\Psi}_2 - \mathbf{\Psi}_1 - \mathbf{\Psi}_0$, $\tilde{\mathbf{P}}_{3,2}^* = \mathbf{\Psi}_2 \mathbf{\Psi}_1 + \mathbf{\Psi}_2 \mathbf{\Psi}_0 + \mathbf{\Psi}_1 \mathbf{\Psi}_0$, $\tilde{\mathbf{P}}_{3,3}^* = -\mathbf{\Psi}_2 \mathbf{\Psi}_1 \mathbf{\Psi}_0$. Матрица наблюдателя $\hat{\mathbf{L}}_B = \mathbf{L}_0$ – искомая.

5. Запишем блочно-транспонированное уравнение связи $\mathbf{F} \hat{\mathbf{Q}}_{B, \text{row}} = \hat{\mathbf{K}}_B$:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{B, \text{row}} = \hat{\mathbf{Q}}_{B, \text{col}}^{T_{6 \times 2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,2} b_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{6,1} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{b}_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_B = \widehat{\mathbf{L}}_B^{T_{3 \times 2}} = \left[\sum_{i=0}^3 (\mathbf{v}_{i+1} \tilde{\mathbf{P}}_{3,i}^*) \mid \sum_{i=0}^3 (\mathbf{v}_{i+2} \tilde{\mathbf{P}}_{3,i}^*) \mid \sum_{i=0}^3 (\mathbf{v}_{i+3} \tilde{\mathbf{P}}_{3,i}^*) \right],$$

где

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \omega_3 & \tilde{p}_3^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \omega_2 & \tilde{p}_2^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \omega_1 & \tilde{p}_1^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{bmatrix},$$

и, кроме того, введены обозначения

$$\tilde{\mathbf{P}}_{3,0}^* = \mathbf{I}_2, \quad \tilde{\mathbf{P}}_{3,1}^* = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}}_{3,2}^* = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}}_{3,3}^* = \begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{bmatrix}.$$

6. Определим искомую матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{K}}_B \widehat{\mathbf{Q}}_{B,row}^{-1} = [\mathbf{f}_1 \mid \mathbf{f}_2 \mid \mathbf{f}_3 \mid \mathbf{f}_4 \mid \mathbf{f}_5 \mid \mathbf{f}_6],$$

где $\mathbf{p}_\omega^* = [1 \mid \tilde{p}_1^* \mid \tilde{p}_2^* \mid \tilde{p}_3^* \mid \omega_1 \mid \omega_2 \mid \omega_3]^T$ и

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{b_{1,1}} \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{2,1} & -\gamma_{2,1}/\kappa & -\beta_{2,1}/\kappa & -\alpha_{2,1}/\kappa & \kappa - \gamma_{1,1} & -\beta_{1,1} & -\alpha_{1,1} \\ 0 & \gamma_{2,1}/\kappa & \beta_{2,1}/\kappa & \alpha_{2,1}/\kappa & \gamma_{1,1} & \beta_{1,1} & \alpha_{1,1} \end{bmatrix} \mathbf{p}_\omega^*,$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{b_{2,2}} \begin{bmatrix} \alpha_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{2,2} & 1 - \gamma_{2,2}/\kappa & -\beta_{2,2}/\kappa & -\alpha_{2,2}/\kappa & -\gamma_{1,2} & -\beta_{1,2} & -\alpha_{1,2} \\ 0 & \gamma_{2,2}/\kappa & \beta_{2,2}/\kappa & \alpha_{2,2}/\kappa & \gamma_{1,2} & \beta_{1,2} & \alpha_{1,2} \end{bmatrix} \mathbf{p}_\omega^*,$$

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{a_{4,2} b_{2,2}} \begin{bmatrix} \beta_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{2,2} & \alpha_{2,2} & 1 - \gamma_{2,2}/\kappa & -\beta_{2,2}/\kappa & \alpha_{1,2}\kappa & -\gamma_{1,2} & -\beta_{1,2} \\ 0 & 0 & \gamma_{2,2}/\kappa & \beta_{2,2}/\kappa & 0 & \gamma_{1,2} & \beta_{1,2} \end{bmatrix} \mathbf{p}_\omega^*,$$

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{a_{4,2} a_{5,4} b_{2,2}} \begin{bmatrix} \gamma_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{2,2} & \beta_{2,2} & \alpha_{2,2} & 1 - \gamma_{2,2}/\kappa & \beta_{1,2}\kappa & \alpha_{1,2}\kappa & -\gamma_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{2,2}/\kappa & 0 & 0 & \gamma_{1,2} \end{bmatrix} \mathbf{p}_\omega^*,$$

$$\mathbf{f}_5 = \frac{1}{a_{6,1} b_{1,1}} \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{2,1} & \alpha_{2,1} & -\gamma_{2,1}/\kappa & -\beta_{2,1}/\kappa & \alpha_{1,1}\kappa & \kappa - \gamma_{1,1} & -\beta_{1,1} \\ 0 & 0 & \gamma_{2,1}/\kappa & \beta_{2,1}/\kappa & 0 & \gamma_{1,1} & \beta_{1,1} \end{bmatrix} \mathbf{p}_\omega^*,$$

$$\mathbf{f}_6 = \frac{1}{a_{6,1}a_{7,6}b_{1,1}} \begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{2,1} & \beta_{2,1} & \alpha_{2,1} & -\gamma_{2,1}/\kappa & \beta_{1,1}\kappa & \alpha_{1,1}\kappa & \kappa - \gamma_{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{2,1}/\kappa & 0 & 0 & \gamma_{1,1} \end{bmatrix} \mathbf{p}_\omega^*.$$

После решения задачи была выполнена проверка, которая подтвердила, что полученная матрица $\mathbf{F}$ обеспечивает желаемый характеристический полином (и спектр):

$$\det(\lambda \mathbf{I}_9 - \mathbf{A} + \mathbf{BFC}) = (\lambda^3 + \lambda^2 \tilde{p}_1^* + \lambda \tilde{p}_2^* + \tilde{p}_3^*) \det(\lambda^3 \mathbf{I}_2 + \lambda^2 \tilde{\mathbf{P}}_{3,1}^* + \lambda \tilde{\mathbf{P}}_{3,2}^* + \tilde{\mathbf{P}}_{3,3}^*) = \prod_{i=1}^9 (\lambda - \lambda_i^*).$$

Заключение. Показано, что для МІМО-систем, у которых размерность вектора состояния кратна размерности вектора управления, а индекс управляемости равен частному от этого деления, появляется возможность аналитически строить модальное управление по выходу в тех случаях, когда это невозможно сделать с помощью существующих аналитических методов. Это случаи, когда сумма входов и выходов не только равна, но и меньше размерности вектора состояния.

В основе предлагаемого подхода лежит получение обобщенной дуальной канонической формы по управлению. Подход может применяться, если в этой форме блочные коэффициенты перед матрицей регулятора по выходу образуют матрицу неполного ранга. Тогда модальное управление по выходу приводится к модальному наблюдению с меньшим числом входов. Уравнение связи между матрицей наблюдателя и матрицей регулятора по выходу решается с использованием операции блочного транспонирования. При этом не требуется дополнительно обеспечивать разрешимость уравнения связи.

Подход не ограничен в применении порядком систем управления, не требует обязательного обнуления столбца в канонической форме и не сводится к получению только СИМО-систем. Таким образом, существенно расширен класс МІМО-систем, для которых модальное управление по выходу может быть построено аналитически.

Эффективность подхода подтверждена решением задач в символьном виде. Рассмотренные задачи подобраны таким образом, чтобы охватить случаи расширения класса МІМО-систем с аналитическими регуляторами по выходу. Также показана возможность получать параметризованные множества решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016.
2. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* Аналитический алгоритм построения орбитальной ориентации космического аппарата при неполном измерении компонент вектора состояния // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 128–138. <https://doi.org/10.1134/S0002338819040176>
3. *Lapin A.V., Zubov N.E., Poklad M.N.* Stabilizing the Orbital Orientation of a Spacecraft at the Absence of Angles Measurements // AIP Conf. Proceedings. 2023. V. 2549. Iss. 1, 150016. P. 1–7. <https://doi.org/10.1063/5.0108421>
4. *Лапин А.В., Зубов Н.Е.* Реализация в среде MATLAB аналитических алгоритмов модального управления по состоянию и выходу // Инженерный журнал: наука и инновации. 2020. № 1 (97). С. 1–16. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-1-1950>
5. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван дер Воуда // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476. № 3. С. 260–263.
6. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* О связи модальной управляемости по выходу динамической МІМО-системы и вида матриц с желаемыми спектрами // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2021. № 2. С. 1–12.
7. *Зубов Н.Е., Лапин А.В.* Приведение модального управления по выходу для стационарных систем четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами к управлению по состоянию системой с одним входом // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 2. С. 26–43. <https://doi.org/10.31857/S0002338823010122>
8. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Лапин А.В.* Аналитический синтез управления по выходу боковым движением воздушного судна при отсутствии измерений углов скольжения и крена // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 3. С. 133–140. <https://doi.org/10.31857/S0002338823020191>
9. *Van der Woude J.W.* A Note on Pole Placement by Static Output Feedback for Single-Input Systems // Systems & Control Letters. 1988. V. 11. Iss. 4. P. 285–287. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(88\)90072-2](https://doi.org/10.1016/0167-6911(88)90072-2)
10. *Bass R.W., Gura I.* High Order System Design via State-Space Considerations // Joint Autom. Control Conf. 1965. V. 3. P. 311–318.

11. *Ackermann J.* Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum // *Regeltech, Proz.-Datenverarb.* 1972. V. 20. Iss. 1–12. P. 297–300. <https://doi.org/10.1524/auto.1972.20.112.297>
12. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Generalization of Bass – Gura Formula for Linear Dynamic Systems with Vector Control // *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences.* 2020. V. 89. Iss. 2. P. 41–64. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-41-64>
13. *Лапин А.В., Zubov Н.Е., Пролетарский А.В.* Обобщение формулы Аккермана для некоторого класса многомерных динамических систем с векторным входом // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2023. № 4 (109). С. 18–38. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-18-38>
14. *Mackey D.S.* Structured Linearizations for Matrix Polynomials // *Doctoral Thesis, Univ. of Manchester*, 2006.
15. *Luenberger D.G.* Canonical Form for Linear Multivariable Systems // *IEEE Transactions on Autom. Control.* 1967. V. 12. Iss. 3. P. 290–293. <https://doi.org/10.1109/TAC.1967.1098584>
16. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.
17. *Kosyanchuk V.V., Zybin E.Yu., Glasov V.V. et al.* High-Speed Rotorcraft Flight Control System Fault Tolerance Under Parametric Uncertainty // *XX Technical Scientific Conf. on Aviation Dedicated to the Memory of N. E. Zhukovsky, Moscow*, 2023. P. 18–25. <https://doi.org/10.1109/TSCZh58792.2023.10233650>
18. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* Аналитический синтез модального регулятора по выходу для управления ориентацией спускаемого аппарата при спуске в атмосфере Земли // *Изв. вузов. Авиационная техника.* 2019. № 3. С. 46–59.
19. *Микрин Е.А., Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* Аналитическая формула вычисления регулятора для линейных СИМО-систем // *Дифференциальные уравнения и процессы управления.* 2020. № 1. С. 1–11.