

О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ В СРЕДЕ С КВАДРАТИЧНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ¹

© 2024 г. Т. А. Мосенков^{1, *}, Т. Ю. Фигурина^{2, **}

¹ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² ИПМех РАН, Москва, Россия

*e-mail: timofei.mosenkov@math.msu.ru

**e-mail: t_figurina@mail.ru

Поступила в редакцию 18.12.2023 г.

После доработки 26.01.2024 г.

Принята к публикации 13.05.2024 г.

Рассмотрено движение двух взаимодействующих тел вдоль прямой в среде с квадратичным сопротивлением. Сила взаимодействия тел является управляющим воздействием, ограничений на которое не накладывается. Решена задача о перемещении каждого из тел системы на заданное расстояние при условии, что тела покоятся в начале и конце движения. В построенном движении моменты времени, в которые сила взаимодействия мгновенно изменяет скорости тел, чередуются с интервалами времени, на которых сила взаимодействия либо равна нулю, либо обеспечивает движение системы с постоянным расстоянием между телами.

Ключевые слова: Система двух тел, управление, квадратичное трение, прямолинейное движение

DOI: 10.31857/S0002338824030055 EDN: UQALER

ON THE MOVEMENT OF TWO INTERACTING BODIES IN A MEDIUM WITH QUADRATIC RESISTANCE.

T. A. Mosenkov^{a, *}, T. Yu. Figurina^{b, **}

^a Lomonosov Moscow State University

^b Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS

*e-mail: timofei.mosenkov@math.msu.ru

**e-mail: t_figurina@mail.ru

The motion of two interacting bodies along a straight line in a medium with quadratic resistance is considered. The force of interaction between bodies is a control action, on which no restrictions are imposed. The problem of moving each of the bodies of the system over a given distance is solved, provided that the bodies are at rest at the beginning and at the end of the movement. In the constructed motion, moments of time at which the interaction force instantly changes the velocities of the bodies alternate with time intervals at which the interaction force is zero.

Keywords: System of two bodies, control, quadratic resistance, rectilinear motion

Введение. Системы с изменяемой конфигурацией могут двигаться в сопротивляющихся средах без наличия специальных движителей, таких как колеса, гусеницы, ноги, плавники. Принцип, позволяющий таким системам двигаться, состоит в том, что при изменении конфигурации изменяются скорости тел, входящих в систему, а вместе со скоростями — и силы сопротивления среды, являющиеся внешними по отношению к системе. Управляя конфигурацией системы, можно управлять внешними силами, действующими на систему, и, таким образом, движением системы. При этом точки системы, взаимодействующие со средой, в отличие от колесных и шагающих локомоционных систем, остаются неизменными.

Движение систем нескольких взаимодействующих тел вдоль прямой рассматривалось во множестве публикаций. Значительная часть этих публикаций была посвящена капсульным

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00128).

системам, в которых одно из тел (внутреннее) не взаимодействует со средой. В классе систем с изменяемой конфигурацией, таких, что все тела системы взаимодействуют с внешней средой, самой простой является система двух взаимодействующих тел. Вместе с тем система двух тел не будет достаточно простой в управлении, она лишена некоторых возможностей, присущих системам, состоящим из нескольких (трех и более) тел. Например, в случае сухого трения каждое из тел системы нескольких тел (возможно, за исключением самого массивного, если его масса слишком велика) может двигаться при покоящихся остальных телах, что позволяет управлять системой, перемещая тела по очереди. Изучению прямолинейных движений системы двух взаимодействующих тел, каждое из которых взаимодействует со средой, посвящено относительно небольшое количество статей. В работе [1] рассмотрено движение системы двух тел вдоль прямой с сухим Кулоновым трением. Предполагалось, что сила взаимодействия тел кусочно-постоянна, в начале движения тела покоятся и расстояние между телами ограничено. Построено движение, перемещающее каждое из тел системы на одинаковое расстояние и приводящее тела в состояние покоя (такое движение может быть периодически продолжено). Найденное движение оптимизировано по параметрам с целью максимизации средней скорости системы. В работе [2] изучено движение системы двух тел вдоль прямой с сухим анизотропным трением в предположении, что расстояние между телами ограничено, скорость их относительного движения имеет два интервала постоянства, причем одно из тел движется только в положительном направлении, а другое меняет направление своего движения. Решены задачи максимизации средней скорости движения системы и минимизации энергозатрат по параметрам системы: соотношению масс, коэффициентов трения, скоростям относительного движения тел. В работе [3] решена задача оптимального управления системой двух тел вдоль прямой с Кулоновым трением. Предполагалось, что в начале и конце движения система покоится, ограничений на силу взаимодействия не налагалось. Найдено движение, позволяющее переместить оба тела системы на заданное расстояние за минимальное время, в том числе в классе безреверсных движений, при котором тела не изменяют направления своего движения (такие движения доставляют также минимум энергозатрат).

Движение системы двух одинаковых тел вдоль прямой в среде с вязким кусочно-линейным трением рассмотрено в работе [4]. Предполагалось, что управление системой задается кинематически, расстояние между телами изменяется по гармоническому закону, а трение мало по сравнению с силами взаимодействия тел. Найдена средняя скорость стационарного движения системы, при котором скорость каждого из тел является периодической функцией времени. Движение системы двух тел вдоль прямой в предположении, что расстояние между телами изменяется по заданному закону, а силы сопротивления среды малы по сравнению с силами взаимодействия тел, исследовалось в работе [5] для различных законов трения, в том числе кусочно-линейного трения, степенного трения, Кулонова трения. Были найдены условия, позволяющие системе начать движение из состояния покоя. Для линейного сопротивления было показано, что система при любых начальных условиях и любых законах возбуждения не может покинуть ограниченной области. Был получен критерий возможности движения системы вдоль прямой для различных законов сопротивления среды. В частности, для случая сухого Кулонова трения этот критерий состоит в неравенстве друг другу масс тел системы и в неравенстве друг другу длительности времен сближения тел и их удаления друг от друга.

В данной работе изучается прямолинейное движение системы двух взаимодействующих тел в вязкой среде. Малости сил сопротивления среды не предполагается. Исследуется движение системы в изотропной среде; при этом система может двигаться в обоих направлениях за счет законов управления, а не только в направлении с меньшим сопротивлением, как в случае анизотропного трения. В качестве закона, описывающего вязкое сопротивление среды, был выбран квадратичный закон, являющийся наиболее простым и близким к реальному.

1. Постановка задачи. Рассматривается прямолинейное движение двух взаимодействующих тел A_1 и A_2 в среде с квадратичным сопротивлением (рисунок). Обозначим через m_1 и m_2 массы тел A_1 и A_2 , через x_1 и x_2 — координаты этих тел вдоль прямой их движения, через v_1 и v_2 — скорости тел. Пусть f — сила, действующая со стороны тела A_1 на тело A_2 . Действие силы f приводит к изменению скоростей тел, при этом изменяются действующие на эти тела силы сопротивления среды, являющиеся внешними по отношению к системе. Поэтому, управляя

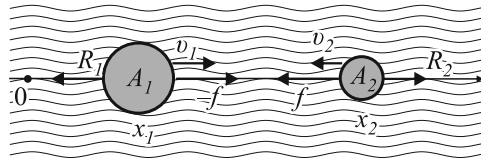


Рисунок. Система двух взаимодействующих тел в вязкой среде.

силой взаимодействия тел f , можно управлять движением системы как целого. Уравнения движения системы тел вдоль прямой имеют вид

$$\dot{x}_i = v_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} m_1 \dot{v}_1 &= -f + R_1(v_1), \\ m_2 \dot{v}_2 &= f + R_2(v_2), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где силы квадратичного сопротивления $R_i(v_i)$ определяются соотношениями

$$R_i(v_i) = -c_i v_i |v_i|, \quad i = 1, 2. \quad (1.3)$$

Здесь через c_1 и c_2 обозначены коэффициенты сопротивления среды движению тел A_1 и A_2 . Считаем, что в начальный момент времени тела покоятся и выполнены равенства

$$x_i(0) = 0, \quad v_i(0) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.4)$$

Будем искать движения, при которых каждое из тел системы перемещается на заданное расстояние L и приходит в состояние покоя в конце движения:

$$x_i(T) = L, \quad v_i(T) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.5)$$

где T — время движения, которое не задано заранее. Ограничений на силу взаимодействия тел f не налагается. Сформулируем следующую задачу.

З а д а ч а. Построить движение системы тел, определяемое соотношениями (1.1)–(1.4) и удовлетворяющее терминальному условию (1.5).

Обозначим через p суммарный импульс системы:

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (1.6)$$

Импульс системы, в силу (1.1)–(1.3), подчиняется уравнению

$$\dot{p} = -c_1 v_1 |v_1| - c_2 v_2 |v_2|. \quad (1.7)$$

Будем считать, что верно неравенство $m_1^2 c_2 \neq m_2^2 c_1$. Выполнение этого неравенства необходимо, в противном случае невозможно вывести центр масс системы из состояния покоя и соответственно решить поставленную задачу. Действительно, допустим, что $m_1^2 c_2 = m_2^2 c_1$ и система покоится в момент времени t_0 . В правой окрестности этого момента, если тела выведены из состояния покоя, скорость одного из них положительна, а другого отрицательна. Предполагая, что $v_1 > 0$, $v_2 < 0$ (другой случай рассматривается аналогично), получим, что $\dot{p} = -c_1 v_1^2 + c_2 v_2^2$. Преобразуем это равенство, выразив c_2 из равенства $m_1^2 c_2 = m_2^2 c_1$. Имеем

$$\dot{p} = \frac{c_1}{m_1^2} (m_2 v_2 - m_1 v_1) p.$$

При начальном условии $p(t_0) = 0$ решением (единственным) этого уравнения является $p \equiv 0$, т.е. центр масс системы не может быть выведен из состояния покоя. Поэтому допускаем, что

$m_1^2 c_2 \neq m_2^2 c_1$. Без ограничения общности положим за счет соответствующей нумерации тел, что

$$m_1^2 c_2 > m_2^2 c_1. \quad (1.8)$$

Поскольку ограничений на силу взаимодействия f не налагается, в том числе эта сила может быть выражена дельта-функцией Дирака, то возможно мгновенно перераспределять импульс системы между телами. При этом импульс $p(t)$ является непрерывной функцией времени, а скорости тел могут претерпевать скачки при условии, что в момент скачка t выполнено:

$$m_1 v_1(t-) + m_2 v_2(t-) = m_1 v_1(t+) + m_2 v_2(t+).$$

2. Решение задачи. Построим движение системы, решающее предложенную задачу. Это движение будет состоять из трех этапов, длительности которых обозначим через τ_1, τ_2, τ_3 .

Э т а п 1. В начальный момент времени перераспределим между телами нулевой импульс системы, так что тело A_1 приобретет положительную скорость, тело A_2 – отрицательную скорость, и скорости будут определяться равенствами:

$$v_1(0) = \frac{m_2}{m_1}, \quad v_2(0) = -1. \quad (2.1)$$

На этапе 1, при $t \in (0, \tau_1)$, тела движутся свободно, сила взаимодействия тождественно равна нулю, $f \equiv 0$, и уравнения движения системы (1.1)–(1.3) принимают вид

$$\dot{x}_i = v_i, \quad m_i \dot{v}_i = -c_i v_i |v_i|, \quad i = 1, 2. \quad (2.2)$$

Интегрируя эти уравнения, с учетом начальных условий (2.1) и равенств $x_i(0) = 0, i = 1, 2$, получаем выражения для скоростей и координат тел на этапе 1 движения системы:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{1}{\frac{c_1}{m_1}t + \frac{m_1}{m_2}}, \quad v_2(t) = -\frac{1}{\frac{c_2}{m_2}t + 1}, \quad t \in [0, \tau_1), \\ x_1(t) &= \frac{m_1}{c_1} \ln \left(\frac{c_1 m_2}{m_1^2} t + 1 \right), \quad x_2(t) = -\frac{m_2}{c_2} \ln \left(\frac{c_2}{m_2} t + 1 \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Импульс системы записывается как

$$p(t) = \frac{m_2 t (m_1^2 c_2 - m_2^2 c_1)}{(c_1 m_2 t + m_1^2)(c_2 t + m_2)}.$$

Импульс системы $p(t)$ монотонно возрастает в некоторой окрестности нуля и в силу (1.8) положителен на всем этапе 1 движения. Выбор скоростей $v_i(0)$, при котором скорость первого тела положительна, а второго – отрицательна (2.1), был обусловлен требованием положительности импульса при $t > 0$. Обозначим импульс в конце этапа 1 через $p^*, p^* = p(\tau_1) > 0$.

Э т а п 2. Мгновенно перераспределим импульс p^* между телами A_1 и A_2 так, что оба тела приобретут одинаковую положительную скорость:

$$v_1(\tau_1) = v_2(\tau_1) = v^* = \frac{p^*}{m_1 + m_2}. \quad (2.4)$$

Затем выберем силу взаимодействия между телами так, чтобы система двигалась как единое целое, т.е. чтобы скорости тел совпадали. Уравнение для импульса (1.7) при наложении условия $v_1 \equiv v_2$, в случае $v_i > 0$, $i = 1, 2$, преобразуется к виду

$$\dot{v}_i = -\frac{c_1 + c_2}{m_1 + m_2} v_i^2, \quad t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2), \quad i = 1, 2. \quad (2.5)$$

При совпадении начальных скоростей (2.4) и выполнении (2.5) скорости тел совпадают на всем этапе 2 движения:

$$v_1 \equiv v_2, \quad t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2).$$

Сила взаимодействия f , при которой движение каждого из тел подчиняется уравнению (2.5), определяется равенством

$$f(t) = -\frac{m_2 c_1 - m_1 c_2}{m_1 + m_2} v_i^2, \quad t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2), \quad i = 1, 2.$$

Скорости тел в конце этапа 2 вычисляются как

$$v_1(\tau_1 + \tau_2) = v_2(\tau_1 + \tau_2) = \frac{1}{\frac{c_1 + c_2}{m_1 + m_2} \tau_2 + \frac{1}{v^*}}.$$

Пути, пройденные телами на этапе 2, равны и определяются следующим образом:

$$x_i(\tau_1 + \tau_2) - x_i(\tau_1) = \frac{m_1 + m_2}{c_1 + c_2} \ln \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1 + m_2} v^* \tau_2 + 1 \right), \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Заметим, что правая часть этого равенства является монотонно растущей функцией аргумента τ_2 , равна нулю при $\tau_2 = 0$ и стремится к бесконечности при $\tau_2 \rightarrow \infty$. Из этого следует, что при любом заданном расстоянии $l > 0$ и любом значении величины $v^* > 0$ существует единственное значение $\tau_2 > 0$, при котором каждое из тел проходит расстояние l на этапе 2 движения,

$$x_i(\tau_1 + \tau_2) - x_i(\tau_1) = l, \quad i = 1, 2. \quad (2.7)$$

Импульс системы на этапе 2 подчиняется уравнению

$$\dot{p} = -(c_1 + c_2) \frac{p^2}{(m_1 + m_2)^2}, \quad t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2).$$

Обозначим через $\tilde{p}$ значение импульса системы в конце этапа 2, $\tilde{p} = p(\tau_1 + \tau_2) > 0$.

Э т а п 3. Построим такое движение системы, при котором в конце этапа тела покоятся, а расстояние между ними становится равным нулю. В момент времени $\tau_1 + \tau_2$ мгновенно перераспределим импульс системы $\tilde{p}$ между телами так, что тело A_1 приобретет отрицательную скорость $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_1 < 0$, а тело A_2 — положительную скорость $\tilde{v}_2$, $\tilde{v}_2 > 0$:

$$\tilde{p} = m_1 \tilde{v}_1 + m_2 \tilde{v}_2, \quad \tilde{v}_1 < 0, \quad \tilde{v}_2 > 0. \quad (2.8)$$

Поскольку импульс $\tilde{p}$ положителен, то из положительности правой части равенства (2.8), при его делении на $|\tilde{v}_1| \tilde{v}_2$, с учетом неравенств (2.8) получаем неравенство

$$\frac{m_2}{|\tilde{v}_1|} > \frac{m_1}{\tilde{v}_2}. \quad (2.9)$$

После перераспределения импульса в течение этапа 3 тела движутся свободно, сила взаимодействия тел равна нулю, $f \equiv 0$, движение подчиняется уравнениям (2.2). Скорости тел в конце этапа 3 определяются равенствами

$$v_1(T) = -\frac{1}{\frac{c_1}{m_1}\tau_3 + \frac{1}{|\tilde{v}_1|}}, \quad v_2(T) = \frac{1}{\frac{c_2}{m_2}\tau_3 + \frac{1}{\tilde{v}_2}}, \quad (2.10)$$

$$T = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3.$$

Найдем длительность τ_3 этапа 3, такую, что импульс в конце этапа будет равен нулю:

$$p(T) = 0. \quad (2.11)$$

Подставляя сюда, согласно определению импульса системы (1.6), выражения для скоростей тел (2.10), получаем

$$\left(\frac{m_1 c_2}{m_2} - \frac{m_2 c_1}{m_1} \right) \tau_3 = \frac{m_2}{|\tilde{v}_1|} - \frac{m_1}{\tilde{v}_2}. \quad (2.12)$$

Это уравнение имеет единственное положительное решение τ_3 , поскольку множитель перед τ_3 положителен по предположению (1.8), а правая часть положительна в силу (2.9). Таким образом, каким бы ни был импульс $\tilde{p} > 0$ и как бы он не перераспределялся между телами, согласно (2.8), в начале этапа 3, существует такая длительность этого этапа $\tau_3 > 0$, что в конце этапа импульс системы станет равным нулю и, следовательно, перераспределив импульс, возможно мгновенно остановить оба тела системы.

Исследуем вопрос: возможно ли так перераспределить импульс между телами в начале этапа 3 (2.8), чтобы к моменту окончания этапа, когда импульс системы станет равным нулю, координаты обоих тел стали равны друг другу? Выпишем смещения тел на этапе 3. Имеем

$$x_1(T) - x_1(\tau_1 + \tau_2) = -\frac{m_1}{c_1} \ln \left(\frac{c_1}{m_1} |\tilde{v}_1| \tau_3 + 1 \right),$$

$$x_2(T) - x_2(\tau_1 + \tau_2) = \frac{m_2}{c_2} \ln \left(\frac{c_2}{m_2} \tilde{v}_2 \tau_3 + 1 \right).$$

Подставляя в эти равенства величину τ_3 , определяемую из выражения (2.12), получаем

$$x_1(T) - x_1(\tau_1 + \tau_2) = -\frac{m_1}{c_1} \ln \frac{m_1(m_1 c_2 - m_2 c_1 \lambda)}{m_1^2 c_2 - m_2^2 c_1}, \quad (2.13)$$

$$x_2(T) - x_2(\tau_1 + \tau_2) = \frac{m_2}{c_2} \ln \frac{m_2(m_1 c_2 - m_2 c_1 \lambda)}{\lambda(m_1^2 c_2 - m_2^2 c_1)}. \quad (2.14)$$

Здесь введена переменная λ , равная отношению модулей скоростей тел в начале этапа 3:

$$\lambda = \frac{|\tilde{v}_1|}{\tilde{v}_2}. \quad (2.15)$$

Область допустимых значений λ , согласно (2.9), определяется включением

$$\lambda \in \left(0, \frac{m_2}{m_1}\right). \quad (2.16)$$

Поскольку на этапе 2 оба тела проходят одинаковое расстояние l , требование $x_1(T) = x_2(T)$ означает, что сумма расстояний, пройденных на этапах 1 и 3, должна быть одинакова для обоих тел. Иными словами, расстояние, на которое тела отдалились на этапе 1, должно быть равно расстоянию, на которое они сблизилась на этапе 3, т.е. должно быть выполнено равенство

$$x_2(T) - x_2(\tau_1 + \tau_2) - (x_1(T) - x_1(\tau_1 + \tau_2)) = x_1(\tau_1) - x_2(\tau_1). \quad (2.17)$$

Это равенство с учетом (2.13), (2.14) и соотношений (2.3) при $t = \tau_1$ записывается в виде

$$\frac{m_1}{c_1} \ln \frac{m_1(m_1 c_2 - m_2 c_1 \lambda)}{m_1^2 c_2 - m_2^2 c_1} + \frac{m_2}{c_2} \ln \frac{m_2(m_1 c_2 - m_2 c_1 \lambda)}{\lambda(m_1^2 c_2 - m_2^2 c_1)} = \frac{m_1}{c_1} \ln \left(\frac{c_1 m_2}{m_1^2} \tau_1 + 1 \right) + \frac{m_2}{c_2} \ln \left(\frac{c_2}{m_2} \tau_1 + 1 \right). \quad (2.18)$$

Левая часть этого уравнения монотонно убывает с ростом величины λ , при $\lambda \rightarrow 0$ стремится к бесконечности, при $\lambda \rightarrow m_2/m_1$ стремится к нулю. Величина в правой части уравнения (2.18) положительна. Поэтому существует единственное значение λ из интервала (2.16), при котором равенство (2.18) выполнено. Это значение λ не зависит от величины $\tilde{p}$. Разрешая уравнения (2.8) и (2.15) относительно $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$, получаем искомые значения скоростей в начале этапа 3, при которых импульс системы в конце движения равен нулю, т.е. выполнено равенство (2.11), и смещения тел за все время движения одинаковы, что обеспечивается равенством (2.17). Скорости $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$ пропорциональны значению $\tilde{p}$, однако смещения тел на этапе 3 (2.13), (2.14) не зависят от величины $\tilde{p}$.

Таким образом, показано, что при любом значении импульса $\tilde{p}$ (т.е. при любых длительностях этапов 1 и 2, τ_1 и τ_2) в начале этапа 3 импульс можно мгновенно перераспределить между телами так, что через некоторое время свободного движения обоих тел импульс системы станет равным нулю, а сумма расстояний, пройденных каждым телом на этапах 1 и 3, будет одинакова для обоих тел. Чтобы решить поставленную задачу, достаточно теперь показать, что существует такое расстояние l , на которое сдвигаются оба тела на этапе 2, чтобы на всех трех этапах тела прошли заданное расстояние L .

Действительно, при уменьшении длительности τ_1 этапа 1 смещения тел $x_1(\tau_1)$, $x_2(\tau_1)$ на этапе 1 уменьшаются. В силу формулы (2.17) смещения тел на этапе 3 также уменьшаются:

$$x_i(\tau_1) \xrightarrow{\tau_1 \rightarrow 0} 0, \quad x_i(T) - x_i(\tau_1 + \tau_2) \xrightarrow{\tau_1 \rightarrow 0} 0, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому можно выбрать такое τ_1 , что для каждого из тел сумма смещений на этапах 1 и 3 будет меньше, чем смещение L :

$$x_i(\tau_1) + x_i(T) - x_i(\tau_1 + \tau_2) = A, \quad i = 1, 2, \quad A < L.$$

Тогда смещение на этапе 2 задается как $l = L - A$. Длительность этапа 2 определяется из формул (2.6), (2.7).

Таким образом, задача решена. Ее решение не единственно, и существует целый интервал значений $\tau_1 \in (0, \tau_{\max}]$, решающих задачу. Кроме того, хотя в формуле (2.1) были зафиксированы начальные скорости $v_i(0)$, за счет пропорционального уменьшения этих величин можно было бы достигнуть малых сдвигов $x_i(\tau_1)$ на этапе 1, даже при фиксированной длительности τ_1 этапа 1. Еще одна возможность при фиксированной величине τ_1 и начальных скоростях, заданных (2.1), состоит в следующем. Если сумма сдвигов на этапах 1 и 3 превышает L , т.е. $x_1(\tau_1) + x_1(T) - x_1(\tau_1 + \tau_2) = L^* > L$, то можно сместить систему на расстояние $2L^*$, используя описанный выше алгоритм, а затем сместить ее на расстояние $2L^* - L > L$ в обратном направлении.

Заметим, что хотя в постановке задачи не накладывалось ограничений на расстояние $x_2 - x_1$ между телами в процессе движения, но за счет уменьшения времени τ_1 этапа 1 или за счет уменьшения скоростей тел в начале этапа 1 можно добиться того, что расстояние между телами не будет превышать заданной, сколь угодно малой величины на протяжении всего времени движения. Заметим еще, что время движения T , решающее задачу, может быть сколь угодно мало за счет выбора больших скоростей тел в начале этапа 1.

Заключение. Решена задача о перемещении вдоль прямой системы двух взаимодействующих тел в изотропной среде с квадратичным законом сопротивления. Предполагалось, что сила взаимодействия тел не ограничена и возможно мгновенно перераспределять импульс между телами. Показано, что можно перевести систему между двумя состояниями покоя так, что каждое из тел переместится на одинаковое заданное расстояние. В построенном движении моменты времени, в которые импульс системы перераспределяется между телами, чередуются с интервалами времени, на которых тела движутся, либо не взаимодействуя друг с другом, либо как единое целое. На этапе 1 после перераспределения нулевого импульса тела движутся, не взаимодействуя друг с другом, в противоположных направлениях, и импульс системы возрастает; на этапе 2 система движется как единое целое, так что скорости тел совпадают; в начале этапа 3 импульс системы перераспределяется, после чего тела сближаются, не взаимодействуя друг с другом. В конце движения импульс системы становится нулевым, и тела мгновенно останавливаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. Оптимальное прямолинейное движение двухмассовой системы // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 3–9.
2. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация прямолинейного движения двухмассовой системы // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 707–717.
3. Bolotnik N., Figurina T. Optimal Control of a Two-body Limbless Crawler Along a Rough Horizontal Straight Line // Nonlinear Dynamics. 2020. V. 102. № 3. P. 1627–1642.
4. Zimmermann K., Zeidis I., Pivovarov M., Behn C. Motion of Two Interconnected Mass Points Under Action of Non-symmetric Viscous Friction // Archive of Applied Mechanics. Arch Appl Mech. 2010. V. 80. P. 1317–1328.
5. Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K. The Motion of a Two-body Limbless Locomotor Along a Straight Line in a Resistive Medium // ZAMM. J. Applied Mathematics and Mechanics. 2016. V. 96. № 4. P. 429–452.