

УДК 62-50

СРАВНЕНИЕ НАИХУДШЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ ИЗ ДВУХ МГНОВЕННЫХ УДАРОВ С ВОЗМУЩЕНИЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА¹

© 2024 г. В. А. Корнеев¹

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
e-mail: korneev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 04.10.2023 г.

После доработки 23.02.2024 г.

Принята к публикации 13.05.2024 г.

Осциллятор с квадратичным демпфированием подвержен воздействию двух последовательных однонаправленных ударов заданной суммарной интенсивности. Максимизируемым критерием качества служит значение максимума модуля смещения (по времени) тела осциллятора. Найдены параметры мгновенных ударов, обеспечивающие наибольшее значение критерия качества. Проведено сравнение по критерию качества наихудшего воздействия из двух мгновенных ударов с наихудшим возмущением, полученным для множества возмущений прямоугольного профиля с заданным импульсом. Показано, что наихудшее возмущение прямоугольного профиля обеспечивает большее смещение осциллятора, чем наихудшее воздействие из двух мгновенных ударов.

Ключевые слова: оптимальное управление, осциллятор с квадратичным демпфированием, наихудшие возмущения

DOI: 10.31857/S0002338824030084 EDN: UPTKYY

COMPARISON OF THE RESPONSES OF A NONLINEAR OSCILLATOR TO THE WORST-CASE DISTURBANCE CONSISTING OF TWO INSTANTANEOUS IMPACTS AND THE WORST-CASE RECTANGULAR PULSE DISTURBANCE²

V. A. Korneev^a

^aIshlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

*E-mail: korneev@ipmnet.ru

An oscillator with quadratic-law damping subjected to two successive instantaneous impacts is considered; the impacts have the same directions and their total impulse is given. The worst-case disturbance that maximizes the peak absolute value of the displacement of the oscillator's body from the equilibrium position (taken as a performance index) is sought. The parameters of the two-impact disturbance that provides a maximum for the performance index are determined. A comparison of the worst-case two-impact disturbance with the worst-case rectangular pulse disturbance in terms of the value of the performance index is performed; both disturbances have the same impulse. It is shown that the worst-case rectangular pulse provides a larger value for the peak absolute value of the displacement of the oscillator than the two-impact disturbance does.

Keywords and phrases: oscillator with a quadratic-law damper, optimal control, worst-case disturbance

Введение. Рассмотрение задач об оптимальной противоударной гарантированной защите объектов, расположенных на подвижном подверженном ударам основании, приводит к необходимости решать задачу о наихудшем возмущении. Различные методы и подходы к решению проблемы противоударной изоляции достаточно полно изложены в работах [1–6]. В [3, 4]

¹ Работа выполнена по теме госзадания (госрегистрация № 124012500443-0).

² The present work was supported by the Ministry of Science and Higher Education within the framework of the Russian State Assignment under contract no. 124012500443-0

рассматриваются пассивные изоляторы, для которых движение изолируемого объекта относительно основания задается уравнением:

$$m\ddot{x} + k|\dot{x}|^n \operatorname{sign} \dot{x} + cx = v(t), \quad v = -mw_1(t), \quad n = 1, 2. \quad (0.1)$$

Здесь $n = 1, 2$ соответствует линейному и квадратичному демпфированию соответственно, m — масса защищаемого объекта, w_1 — ускорение основания относительно неподвижной системы координат, x — координата объекта относительно основания, k — коэффициент демпфирования, c — коэффициент жесткости. Величина $-mw_1$ играет роль внешнего возмущения, а величина $u(x, \dot{x}, t) = -k|\dot{x}|^n \operatorname{sign} \dot{x} - cx$ предполагается ограниченной по абсолютной величине, т.е. $|u(x, \dot{x}, t)| \leq A$, $A > 0$. Определяется множество V знакопостоянных функций $v(t)$ с ограниченным интегралом по времени:

$$V = \{v(t) : v(t) \geq 0, \int_0^\infty v(\tau) d\tau \leq v_0\}, \quad (0.2)$$

где v_0 — заданная положительная величина. В качестве критерия качества для рассматриваемого изолятора (0.1) выбирается максимальная величина смещения объекта относительно основания, обозначим ее $J_1(v)$. Вводится величина $J_2(v)$ — абсолютное наибольшее значение по времени величины $u(x, \dot{x}, t)$. Требуется определить параметры k и c , обеспечивающие минимум величине $J_1(v)$ при условии $|u(x, \dot{x}, t)| \leq A$.

Случай мгновенного удара, определяемого функцией Дирака $v = v_0\delta(t)$, подробно изучен в [3, 4] как для линейного осциллятора, так и для осциллятора с квадратичным демпфированием. В указанных работах показано, что для линейного осциллятора дельта-удар $v = v_0\delta(t)$ представляет собой наихудшее возмущение из множества (0.2) по отношению к обеим величинам $J_1(v)$ и $J_2(v)$. Для осциллятора с квадратичным демпфированием в [3, 4] для случая мгновенного удара получены значения коэффициентов $k = m^2 A / v_0^2$, $c = 2mA^2 / v_0^2$, доставляющие минимум величине $J_1(v)$ при условии $|u(x, \dot{x}, t)| \leq A$. Эти значения k и c обеспечивают возможность реализации предельных возможностей защиты объекта от мгновенного удара $v(t) = v_0\delta(t)$. Представляет интерес сравнить значение функционала $J_1(v)$ для мгновенного удара со значениями $J_1(v)$ для других воздействий. Для этой цели построим наихудшее возмущение для двух множеств возмущений, содержащих мгновенный удар.

1. Постановка задачи и свойства ее решения. Рассмотрим множество возмущений V_a , в котором возмущения состоят из двух последовательных однонаправленных дельта-ударов суммарной интенсивности v_0 и удовлетворяют соотношениям:

$$v(t) = a\delta(t) + (v_0 - a)\delta(t - t_a), \quad 0 \leq a \leq v_0, \quad 0 \leq t_a \leq t_a^*. \quad (1.1)$$

Здесь t_a^* — первый момент обращения скорости в 0 после действия возмущения $v(t) = a\delta(t)$. Далее рассматриваем механическую колебательную систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + k|\dot{x}|\dot{x} + cx = v(t), \quad m > 0, \quad k > 0, \quad c > 0 \quad (1.2)$$

с нулевыми начальными условиями:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (1.3)$$

Задача 1. Для механической колебательной системы, определяемой дифференциальным уравнением (1.2) с нулевыми начальными условиями (1.3), найти функцию $v_a(t)$, которая принадлежит множеству (1.1) и максимизирует функционал:

$$J_1(v_a) = \max_{t \in [0, \infty)} |x_a(t)|.$$

Здесь $v_a(t)$ — решение уравнения (1.2) при начальных условиях (1.3) и заданном возмущении $v_a(t)$.

Задача 2. Для механической колебательной системы (осциллятора), описываемой дифференциальным уравнением (1.2) с нулевыми начальными условиями (1.3), найти функцию $v(t) = v_b(t)$ из однопараметрического множества V_b возмущений прямоугольного профиля вида

$$v_b(t) = \begin{cases} b, & t \in [0, v_0/b], \\ 0, & t > v_0/b, \end{cases} \quad b > 0, \quad (1.4)$$

которая максимизирует функционал:

$$J_1(v_b) = \max_{t \in [0, \infty)} |x_b(t)|. \quad (1.5)$$

Здесь b — параметр, определяемый из условия максимизации функционала J_1 , v_0 — заданный импульс внешнего воздействия, $x_b(t)$ — решение уравнения (1.2) при начальных условиях (1.3) и возмущении $v(t) = v_b(t)$.

Введение безразмерных (штрихованных) переменных

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{mc}}{v_0} x, \quad t' = \sqrt{\frac{c}{m}} t, \quad v'(t') = \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{m}{c}} v \left(\sqrt{\frac{m}{c}} t' \right), \\ k' &= \frac{v_0}{m\sqrt{mc}} k, \quad a' = \frac{a}{v_0}, \quad b' = b \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{m}{c}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

приводит к уменьшению количества определяющих параметров. Замена переменных (1.6) в формулах (1.1)–(1.5) позволяет получить формулы того же вида, в которых $m = 1$, $c = 1$, $v_0 = 1$. Далее изложение проводится в безразмерных переменных.

Рассмотрим уравнение с начальными условиями

$$\begin{aligned} \ddot{x} + k|\dot{x}|\dot{x} + x &= 0, \\ x(t_0) &= x_0, \quad x_0 \geq 0, \quad \dot{x}(t_0) = u_0, \quad u_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

на интервале времени $[t_0, t_*]$, где t_* — момент первого после начала движения обращения переменной $\dot{x}$ в нуль.

Утверждение 1. Максимум по времени модуля отклонения $|x(t)|$ решения уравнения (1.7) достигается в момент первого после начала движения обращения в нуль его скорости, т.е.

$$\begin{aligned} J &= \max_{t \in [0, \infty)} |x(t)| = x(t_*), \\ \dot{x}(t_*) &= 0, \quad \dot{x}(t) > 0 \quad \text{при } t \in (0, t_*). \end{aligned}$$

Утверждение 1 вытекает из факта, что $|x(t)| \leq x(t_*)$ при $t \in (0, t_*)$, и диссипативности рассматриваемой колебательной системы. Из утверждения 1 следует, что задача Коши (1.7) на интервале времени $[t_0, t_*]$ приобретает вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + k\dot{x}^2 + x &= 0, \\ x(t_0) &= x_0, \quad x_0 \geq 0, \quad \dot{x}(t_0) = u_0, \quad u_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Поскольку дельта-возмущения, входящие в правую часть равенства из (1.1), влияют лишь на скорость осциллятора и увеличивают ее на положительные значения в моменты $t = 0$ и $t = t_a$, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Для возмущений множества V_a максимум по времени модуля отклонения осциллятора достигается в момент первого после начала движения обращения в нуль его скорости, т.е.

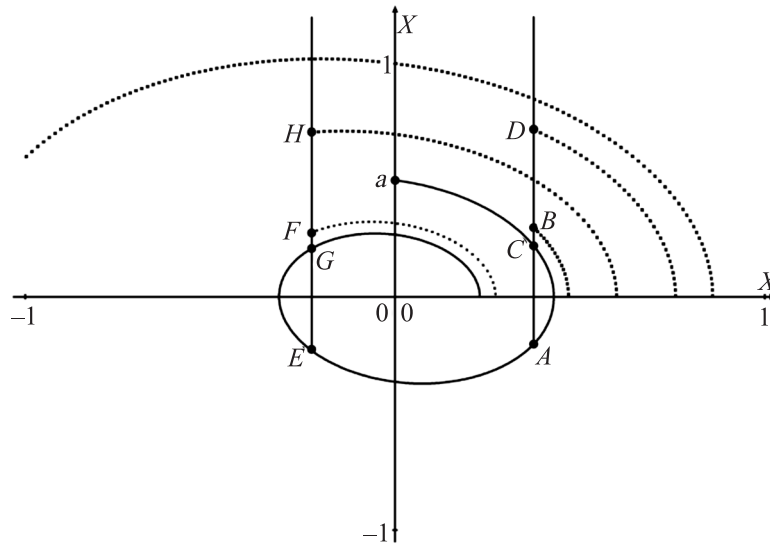


Рис. 1. Траектории движения механической колебательной системы (1.2) на фазовой плоскости при $v(t) \equiv 0$ и различных начальных условиях.

$$J_1 = \max_{t \in [0, \infty)} |x_v(t)| = x_v(t_*), \dot{x}_v(t_*) = 0,$$

$$\dot{x}_v(t) > 0 \text{ при } t \in (0, t_*).$$

Из утверждения 2 следует, что для решения поставленной задачи 1 о наихудшем возмущении достаточно ограничиться решением уравнения (1.2) с начальными условиями (1.3) при $v(t)$, заданном выражением (1.1), на интервале времени $[0, t_*]$, где $t_* > 0$ — момент первого после начала движения обращения в нуль скорости осциллятора. На этом интервале скорость $\dot{x}$ неотрицательна, и уравнение (1.2) упрощается, принимая в безразмерных переменных вид $\ddot{x} + k\dot{x}^2 + x = v(t)$.

Заметим, что постановка задачи 1 предполагает, что расположение ударов только на первом полуразмахе приводит к максимальному отклонению от положения равновесия по сравнению со всеми другими допустимыми расположениями второго удара. Покажем, что это так. На рис. 1 изображены траектории механической колебательной системы (1.2) на фазовой плоскости при $v(t) \equiv 0$ и различных начальных условиях: сплошная линия — траектория системы (1.2) после первого удара, в результате которого тело осциллятора приобрело скорость a . Фазовая траектория этого движения представляет собой закручивающуюся по часовой стрелке спираль. Согласно нашему предположению, второй удар интенсивности $1 - a$ нужно подавать в первом квадранте рисунка.

Предположим, что второй удар мы подаем во втором квадранте, в точке A , после которого система попадает в точку B . Но второй удар можно подать в точке C , лежащей на сплошной кривой в первом квадранте и располагающейся на перпендикуляре к оси абсцисс, опущенном из точки A . После второго удара в точке C система попадает в точку D , которая тоже лежит на этом же перпендикуляре и располагается выше точки B . Поскольку фазовые траектории автономной системы не пересекаются между собой, траектория, исходящая из точки D , пересекает ось абсцисс правее траектории, исходящей из точки B . Тем самым мы построили точку в первом квадранте, обеспечивающую большее смещение.

Предположим теперь, что второй удар подаем в третьем или четвертом квадрантах в точках E или G соответственно, после которого система попадает в точки F или H . Точка H лежит в четвертом квадранте ниже траектории, которая проходит через точку $(1, 0)$ и соответствует единичному дельта-удару. Поэтому эта дельта-траектория пересекает ось абсцисс правее траектории, исходящей из точки H , поскольку фазовые траектории автономной системы не пересекаются. Единичный дельта-удар принадлежит множеству V_a , подается в первом квадранте и обеспечивает большее смещение, чем могут обеспечить два удара, подаваемые из точек 0 и H . Поэтому второй удар, подаваемый в четвертом квадрантах, не может быть оптимальным.

Точка F может лежать в третьем или четвертом квадрантах. Если точка F лежит в четвертом квадранте, как изображено на рис. 1, то для нее справедливы те же рассуждения, что и для точки H . Если точка F расположена в третьем квадранте, то из фазового портрета следует, что первое пересечение фазовой кривой, исходящей из точки F , с осью абсцисс происходит правее точки пересечения с осью абсцисс сплошной фазовой траектории. Отсюда и из диссипативности системы следует, что максимальное отклонение осциллятора после второго удара меньше максимального отклонения после первого удара. Таким образом, подача второго удара в третьем или четвертом квадрантах не оптимальна.

Утверждение 3. Для возмущений множества V_b и возмущения в виде дельта-функции $v(t) = \delta(t)$ максимум по времени модуля отклонения осциллятора достигается в момент первого после начала движения обнуления его скорости, т.е.

$$J_1 = \max_{t \in [0, \infty)} |x_v(t)| = x_v(t_*), \quad \dot{x}_v(t_*) = 0, \\ \dot{x}_v(t) > 0 \text{ при } t \in (0, t_*).$$

Справедливость утверждения 3 также следует из диссипативности рассматриваемой системы.

Решение задачи Коши (1.8) на интервале времени $[t_0, t_*]$. Функция $x(t)$ имеет положительную производную и монотонно возрастает на интервале (t_0, t_*) . Переходя в уравнении из (1.8) к независимой переменной x , получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\frac{dw}{dx} + 2kw + 2x = 0, \quad w(x_0) = u_0^2; \quad w = \dot{x}^2. \quad (1.9)$$

Решение задачи Коши (1.9) определяется выражениями:

$$w(x) = C_0 e^{-(2kx-1)} - \frac{1}{2k^2} (2kx - 1), \\ C_0 = \left[u_0^2 + \frac{1}{2k^2} (2kx_0 - 1) \right] e^{2kx_0-1}. \quad (1.10)$$

Для нахождения функции $x(t)$ необходимо численно решать нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{C_0 e^{-(2kx-1)} - \frac{1}{2k^2} (2kx - 1)}, \quad x(t_0) = x_0,$$

поскольку его решение не выражается в элементарных функциях или известных специальных функциях.

Соотношения (1.10) из условия $w(x) = 0$ позволяют вычислить максимальное значение переменной $x = x_* = x(t_*)$ без нахождения самого момента времени t_* :

$$x_* = \frac{1 + W_+(2k^2 C_0)}{2k}, \quad (1.11)$$

где $W_+(\xi)$ — “верхняя” ветвь функции Ламберта $W(\xi)$, обратной функции $x(z) = ze^z$, $z \in (-\infty, +\infty)$. Область определения $D[W]$ функции $W(\xi)$ совпадает с областью $R[\xi] = [-1/e, +\infty)$ значений функции $\xi(z)$ [7]. Для верхней ветви функции Ламберта W_+ в современных версиях Matlab существует встроенная процедура ее подсчета `lambertw(x)` [8].

Значение функционала J при дельта возмущении. Возмущение, отвечающее мгновенному удару с импульсом a , $0 \leq a \leq 1$, происходящему в начальный момент времени $t = 0$, моделируется дельта-функцией Дирака $v(t) = a\delta(t)$. При мгновенном ударе тело осциллятора приобретает им-

пульс a , $0 \leq a \leq 1$, в начальный момент времени, и движение осциллятора, подвергнувшегося мгновенному удару, описывается уравнением (1.8) с начальными условиями $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=a$. Величина J определяется формулой (1.11), где $2k^2 C_0 = (2k^2 a^2 - 1)/e$. Наибольшее отклонение тела осциллятора $J_{a\delta}(k)$ дается формулой:

$$J_{a\delta}(k) = \frac{1 + W_+((2k^2 a^2 - 1)e^{-1})}{2k}. \quad (1.12)$$

Для значения $J_{a\delta}(k)$ будем также использовать обозначение x_1 , т.е. $x_1 = J_{a\delta}(k)$. Анализ выражения (1.12) показывает, что $J_{a\delta}(k) \equiv 0$ при $a = 0$, а при $a > 0$ функция $J_{a\delta}(k)$ монотонно убывает при $k \in (0, +\infty)$, и выполняются предельные соотношения:

$$\lim_{k \rightarrow 0} J_{a\delta}(k) = a, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} J_{a\delta}(k) = 0.$$

Предел при $k \rightarrow 0$ отвечает наибольшему отклонению линейного недемпфированного осциллятора при мгновенном ударе.

Значение функционала J при возмущении из множества V_a . Движение между первым и вторым ударами. При первом ударе возмущение имеет вид $v_1 = a\delta(t)$. В начальных условиях формулы (1.10) полагаем $u_0 = a, x_0 = 0$. Для этих условий выражение C_0 из (1.10) принимает вид:

$$C_0 = \left(a^2 - \frac{1}{2k^2}\right) \frac{1}{e}.$$

Функция $w(x)$ из (1.10) между первым и вторым ударами вычисляется по формуле

$$w(x) = w_1(x) = \dot{x}^2 = \left(a^2 - \frac{1}{2k^2}\right) e^{-2kx} - \frac{1}{2k^2} (2kx - 1),$$

$$x \in [0, x_1], \quad x_1 = J_{a\delta}(k), \quad w(x_1) = 0,$$

т.е. x_1 — значение координаты x , при котором скорость осциллятора обращается в 0.

Когда координата x принимает значение $x_{a0} = x(t_a)$, происходит второй удар, имеющий импульс $1 - a$.

Движение после второго удара. Начальная координата: x_{a0} . Начальная скорость:

$$u_a = \sqrt{\left(a^2 - \frac{1}{2k^2}\right) e^{-2kx_{a0}} - \frac{1}{2k^2} (2kx_{a0} - 1) + 1 - a}.$$

Снова воспользуемся формулой (1.10), в которой положим $u_0 = u_a$. Тогда

$$C_0 = \left[u_a^2 + \frac{1}{2k^2} (2kx_{a0} - 1)\right] e^{2kx_{a0} - 1}.$$

Квадрат скорости $w = \dot{x}^2$ после второго удара задается формулой

$$w(x) = w_2(x) = \left[u_a^2 + \frac{1}{2k^2} (2kx_{a0} - 1)\right] e^{-2k(x-x_{a0})} - \frac{1}{2k^2} (2kx - 1).$$

Максимум отклонения x_a после второго удара достигается, когда $w_2(x_a) = 0$, при этом

$$x_a = \frac{1}{2k} (1 + W_+([2k^2 u_a^2 + 2kx_{a0} - 1] e^{2kx_{a0} - 1})).$$

Таким образом, решение задачи 2 сводится к поиску максимума функции $x_a(a, x_{a0})$:

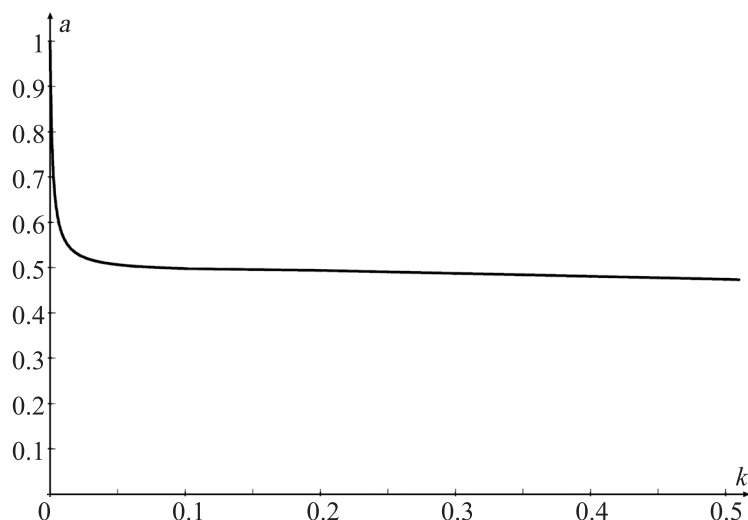


Рис. 2. Зависимость амплитуды первого дельта-удара a от параметра k в случае v_a -возмущения.

$$x_a(a, x_{a0}) = \frac{1}{2k} (1 + W_+([2k^2 u_a^2 + 2kx_{a0} - 1]e^{2kx_{a0}-1})),$$

$$u_a = \sqrt{\left(a^2 - \frac{1}{2k^2}\right)e^{-2kx_{a0}} - \frac{1}{2k^2}(2kx_{a0} - 1) + 1 - a}$$

по переменным a, x_0 в области

$$G_k = \{a, x_{a0} : 0 \leq a \leq 1, 0 \leq x_{a0} \leq x_1(a)\},$$

$$x_1(a) = \frac{1 + W_+((2k^2 a^2 - 1)e^{-1})}{2k}.$$

Здесь индекс k указывает на зависимость области от параметра k .

Случай $k = 0$:

$$x_a(a, x_{a0}) = \sqrt{2a^2 + 1 - 2a + 2(1-a)\sqrt{a^2 - x_{a0}^2}},$$

$$x_1(a) = a, G_0 = \{a, x_{a0} : 0 \leq a \leq 1, 0 \leq x_{a0} \leq a\}.$$

2. Результаты расчета. На языке Matlab были созданы две программы, максимизирующие наибольшее смещение для задач 1 и 2. Первая программа для задачи 1 вычисляет смещение $x_a(a, x_{a0})$ по величинам a, x_{a0} при заданном k и вычисляет зависимости $a(k), x_{a0}(k), x_f(k)$, описывающие значения параметров удара и смещение при наихудшем возмущении. Величина $x_f(k) = x_a(a(k), x_{a0}(k))$ задает наибольшее смещение.

Вторая программа для задачи 2 вычисляет смещение $J(k, b)$ для заданных величин b, k , затем максимизирует смещение по величине b при заданном k и строит зависимость $b(k)$, которая позволила вычислить соответствующие значения наибольшего отклонения $x(k)$ и времени его достижения $t(k)$. Тем самым были численно получены зависимости $x(k), b(k)$ и $t(k)$, характеризующие поведение изучаемого осциллятора при наихудшем возмущении. Эти зависимости приведены в работе [9].

На рис. 2, 3 приведены зависимости $a(k), x_1(a(k)), x_f(k)$, найденные из расчетов первой программы. На рис. 4 нижний график x_δ представляет смещение при дельта-возмущении, даваемое формулой (1.12) при $a = 1$. Средний график x_f представляет смещение $x(k)$ для наихудшего возмущения $v_a(t)$. Верхний график представляет смещение $x_{opt} = J(k, b(k))$ для наихудшего возмущения $v_b(t)$.

Заключение. Для осциллятора с квадратичным демпфированием поставлена задача о выборе параметра однонаправленной внешней силы, обеспечивающего наибольшее смещение

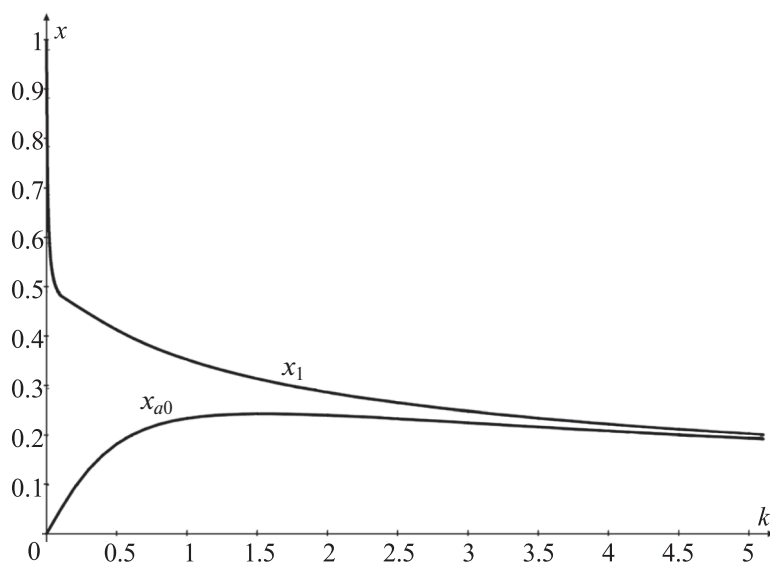


Рис. 3. Зависимость величин x_{a0} , x_1 для второго дельта-удара от параметра k в случае v_a -возмущения.

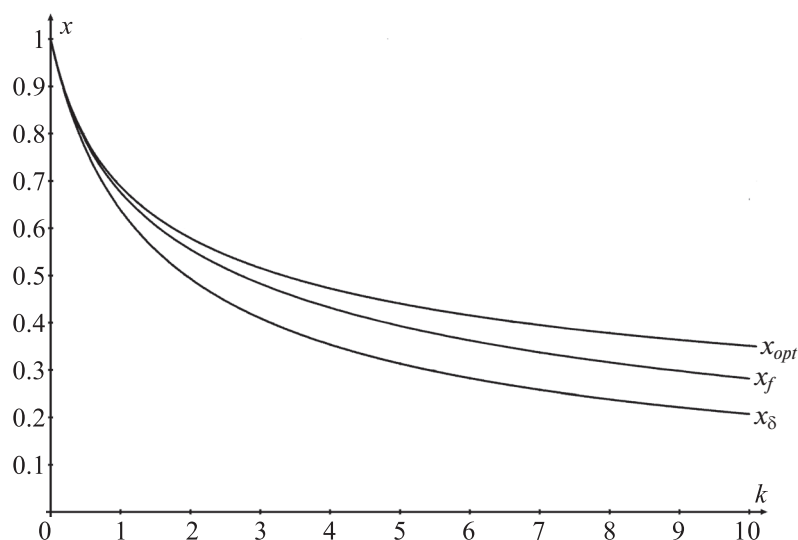


Рис. 4. Зависимости наибольших смещений x_{δ} , x_f , x_{opt} для дельта-удара, двух дельта-ударов и возмущения прямоугольного типа соответственно от параметра k .

осциллятора от положения равновесия. Выбор параметра осуществляется для двух множеств внешних воздействий. Первое множество возмущений состоит из двух последовательных однонаправленных мгновенных ударов заданной суммарной интенсивности. Второе множество возмущений состоит из постоянных возмущений ограниченной длительности. Численно получены оптимальные значения параметра внешней силы для обоих множеств возмущений, обеспечивающей наибольшее смещение и зависящей от параметров осциллятора. По величине наибольшего смещения осциллятора от положения равновесия проведено сравнение указанных возмущений между собой, а также с возмущением, состоящим из одного мгновенного удара. Показано, что наибольшее смещение осциллятора обеспечивается наихудшим возмущением из множества возмущений постоянной ограниченной длительности, а самое меньшее смещение — одиночным мгновенным ударом заданной интенсивности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sevin E., Pilkey W.. Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971. 162 p.
2. Колосовский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.

3. Болотник *Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 256 с.
4. Balandin *D. V.*, Bolotnik *N. N.* and Pilkey *W. D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 2001. 436 p.
5. Pilkey *W.D.*, Balandin *D.V.*, Bolotnik *N.N.*, Crandal *J.R.* and Purtsezov *S.V.* Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact. Hoboken (NJ): Wiley and Sons, Inc., 2010. 286 p.
6. Ledezma-Ramirez *D.F.*, Tapia-Gonzalez *P.E.*, Ferguson *N.*, Brennan *M.*, Tang *B.*. Recent Advances in Shock Vibration Isolation: An Overview and Future Possibilities // Applied Mechanics Reviews. 2019. V. 71, № 6; <https://doi.org/10.1115/1.4044190>.
7. Mezo *I.* The Lambert W Function: Its Generalizations and Applications. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2022. 252 p. <https://doi.org/10.1201/9781003168102>
8. Lambert W function. URL: <https://www.mathworks.com/help/symbolic/lambertw.html>.
9. Болотник *Н.Н.*, Корнеев *В.А.* О наихудшем возмущении осциллятора с квадратичным демпфированием внешней силой с заданным интегралом // Изв. РАН. МТТ. 2024. № 1. С. 96–109.