ISSN 0002-3388

Номер 3

Май-Июнь 2024

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

НАУКА
1727

СОДЕРЖАНИЕ

Номер 3, 2024 г.

К юбилею академика Евгения Александровича Федосова 3

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Глобальная стабилизация интегратора 2-го порядка обратной связью в виде вложенных сигмоид
Ю. В. Морозов, А. В. Пестерев 5

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Наискорейшее успокоение линейного обратного маятника с помощью динамического гасителя
И. М. Ананьевский, И. А. Дунаев 11

Неклассическая задача оптимального управления с операторными гистерезисными нелинейностями
С. В. Борзунов, П. А. Мелешенко, В. А. Нестеров, М. Е. Семенов, А. М. Соловьев 26

Аналитическое решение задачи модального управления по выходу путем приведения к модальному наблюдению с меньшим числом входов
Н. Е. Зубов, А. В. Лапин 41

О перемещении двух взаимодействующих тел в среде с квадратичным сопротивлением
Т. А. Мосенков, Т. Ю. Фигурина 61

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

Идентификация тяги двигателя и силы аэродиннамического сопротивления по данным летных испытаний со сглаживанием случайных погрешностей измерений
О. Н. Корсун, Б. К. Поплавский, А. В. Стуловский, Моунг Хтанг Ом 69

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Сравнение наихудшего возмущения из двух мгновенных ударов с возмущением прямоугольного профиля для нелинейного осциллятора
В. А. Корнеев 85

О приближенном решении задачи оптимального скалярного управления с терминально-фазовыми ограничениями на основе эволюционных вычислений
А. Ф. Антипин, Е. В. Антипина, С. А. Мустафина 94

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Оптимальные движения упругого стержня, управляемого пьезоэлектрическим актюатором ХА
Г. В. Костин 104

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

Автоматизация тестирования систематических ошибок зрительного восприятия
А. Т. Костоев, В. И. Цурков 117

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Метрические оценки узловых мультипотоков в многопользовательской сетевой системе
Ю. Е. Малашенко, И. А. Назарова 137

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Метод выделения области хориоидеи и ее количественного анализа на изображениях оптической когерентной томографии для диагностики заболеваний глаза
Н. С. Демин, Н. Ю. Ильясова, Р. Т. Самигуллин 150

НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Методы,средства и информационные технологии совершенствования характеристик ГЛОНАСС
М. Н. Красильщиков, Д. М. Кружков, Е. А. Мартынов 157

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

Оперативное управление беспилотным вертолетом для обеспечения экстренной безопасной посадки на необорудованную площадку
В. Н. Евдокименков, П. Г. Ермаков, А. А. Гоголев 169

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 3–4

ЮБИЛЕЙ

К ЮБИЛЕЮ АКАДЕМИКА ЕВГЕНИЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА ФЕДОСОВА

Выдающемуся ученому, главному редактору нашего журнала «Известия РАН. Теория и системы управления», заслуженному деятелю науки РФ, академику Российской академии наук Евгению Александровичу Федосову 14 мая 2024 г. исполнилось 95 лет.

Научная и трудовая деятельность Евгения Александровича Федосова началась после окончания в 1956 г. аспирантуры Московского высшего технического училища им. Баумана (МВТУ) и протекала в Государственном научно-исследовательском институте авиационных систем (ГосНИИАС). Работая в ГосНИИАС с момента окончания аспирантуры и по настоящее время, Евгений Александрович прошел путь от старшего инженера до генерального директора института (1970). В настоящее время Евгений Александрович Федосов является научным руководителем ГосНИИАС.

С именем Е.А. Федосова связаны разработка и создание практически всей военной авиации страны, становление и развитие отечественной авиационно-ракетной техники. В 1966 г. за создание первой отечественной самонаводящейся ракеты класса «воздух-воздух» Е.А. Федосов был награжден орденом «Знак почета», а в 1971 г. за работы по управляемому авиационному оружию – орденом Ленина.

Большой личный вклад в 70-е гг. Евгений Александрович внес в разработку принципов построения самонаводящегося высокоточного авиационного оружия с лазерным наведением. За цикл работ по этому направлению в 1976 г. Е.А. Федосову в составе группы ученых и конструкторов была присуждена Ленинская премия.

В 80-е гг. ученый принял самое активное участие в разработке и создании отечественных стратегических самолетов-носителей и крылатых ракет стратегического назначения. На созданных в ГосНИИАС по инициативе Евгения Александровича уникальных моделирующих комплексах, реализующих эффективнейшую технологию математического и полунатурного моделирования, была осуществлена интеграция бортовых комплексов самолета-носителя и крылатых ракет. За цикл этих работ ученому в 1983 г. было присвоено звание Героя Социалистического Труда.

В последние годы академик Е.А. Федосов вносит большой вклад в разработку и создание перспективных образцов гражданской и военной авиации России. Деятельность Евгения Александровича в этот период отмечена правительственными наградами – орденами «За заслуги перед Отечеством» третьей, второй и первой степеней.

В научных кругах нашей страны и за рубежом Евгений Александрович известен как признанный лидер, талантливый ученый, чьи фундаментальные и прикладные исследования в области создания новых наукоемких технологий обеспечили передовой уровень отечественной авиации. Лично Е.А. Федосову и созданной им школе ученых принадлежит ведущая роль в области навигации и наведения летательных аппаратов. Под его руководством развивались такие важнейшие научные направления, как теории самонаведения, теории систем со случайными параметрами, теории нестационарных систем управления летательных аппаратов.

В 1979 г. Е.А. Федосов был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, а в 1984 г. – действительным членом Академии наук СССР (ныне – Российская академия наук) по отделению проблем механики, машиностроения и процессов управления.

За выдающиеся работы в области моделирования сложных технических систем Е.А. Федосов в 1989 г. Президиумом АН СССР был награжден «Большой золотой медалью им. академика Б.Н. Петрова».

И сегодня академик Е.А.Федосов полон творческих планов и играет исключительно важную роль в развитии отечественной авиации.

Редколлегия, редакция и читатели журнала «Известия РАН. Теория и системы управления» сердечно поздравляют с 95-летием замечательного ученого, действительного члена Российской академии наук, главного редактора нашего журнала Евгения Александровича Федосова и желают ему крепкого здоровья, плодотворной научной деятельности и всего самого доброго.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 5–10

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62-50

ГЛОБАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАТОРА 2-ГО ПОРЯДКА ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ В ВИДЕ ВЛОЖЕННЫХ СИГМОИД

© 2024 г. Ю. В. Морозов[1,*], А. В. Пестерев[1,]**

[1]ИПУ РАН, Москва, Россия

** e-mail: tot1983@inbox.ru*

*** e-mail: alexanderpesterev.ap@gmail.com*

Поступила в редакцию 06.02.2024 г.
После доработки 05.04.2024 г.
Принята к публикации 13.05.2024 г.

Рассматривается задача стабилизации цепочки двух интеграторов с помощью обратной связи в виде двух вложенных сигмоид. Использование такой обратной связи позволяет легко учесть ограниченность ресурса управления и обеспечить выполнение желаемых характеристик переходного процесса, таких как заданная скорость экспоненциального убывания отклонения вблизи положения равновесия и ограничение на максимальную скорость приближения к положению равновесия. Построена функция Ляпунова замкнутой системы, с помощью которой доказана ее глобальная асимптотическая устойчивость при любых положительных коэффициентах обратной связи.

Ключевые слова: стабилизация цепочки двух интеграторов, глобальная асимптотическая устойчивость, вложенные сатураторы, функция Ляпунова

DOI: 10.31857/S0002338824030016 **EDN:** URCEUP

GLOBAL STABILIZATION OF A CHAIN OF TWO INTEGRATORS BY A FEEDBACK IN THE FORM OF NESTED SIGMOIDS

Yu. V. Morozov[a,*], A. V. Pesterev[a,]**

[a]V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

** e-mail: tot1983@inbox.ru*

*** e-mail: alexanderpesterev.ap@gmail.com*

The problem of stabilizing a chain of two integrators by a feedback in the form of nested sigmoids is considered. Such a feedback allows one to easily take into account boundedness of the control resource and ensure the fulfillment of desired characteristics of the transient process, such as a given exponential rate of the deviation decrease near the equilibrium state and the constraint on the maximum velocity. Global stability of the closed-loop system is proved by constructing its Lyapunov function.

Keywords: stabilization of a second-order integrator, nested sigmoids, global asymptotic stability, Lyapunov function

Введение. Задача стабилизации цепочек интеграторов широко обсуждалась в литературе по управлению в течение нескольких последних десятилетий (см. [1–8] и приведенные там ссылки). Интерес к данной проблематике объясняется тем, что во многих приложениях исходные модели (например, модели механических и планарных систем) заданы в виде цепочек интеграторов. Кроме того, управления, разработанные для цепочек интеграторов, легко обобщаются на более широкие классы систем. С другой стороны, в последнее время широкое распространение в задачах стабилизации различных систем, и в частности цепочек интеграторов, получили обратные связи в виде вложенных как гладких, так и негладких функций насыщения. Интерес к обратным связям такого рода обусловлен тем, что они позволяют автоматически учесть ограниченность ресурса управления и при этом обеспечить выполнение определенных фазовых ограничений, что особенно важно вдали от положения равновесия,

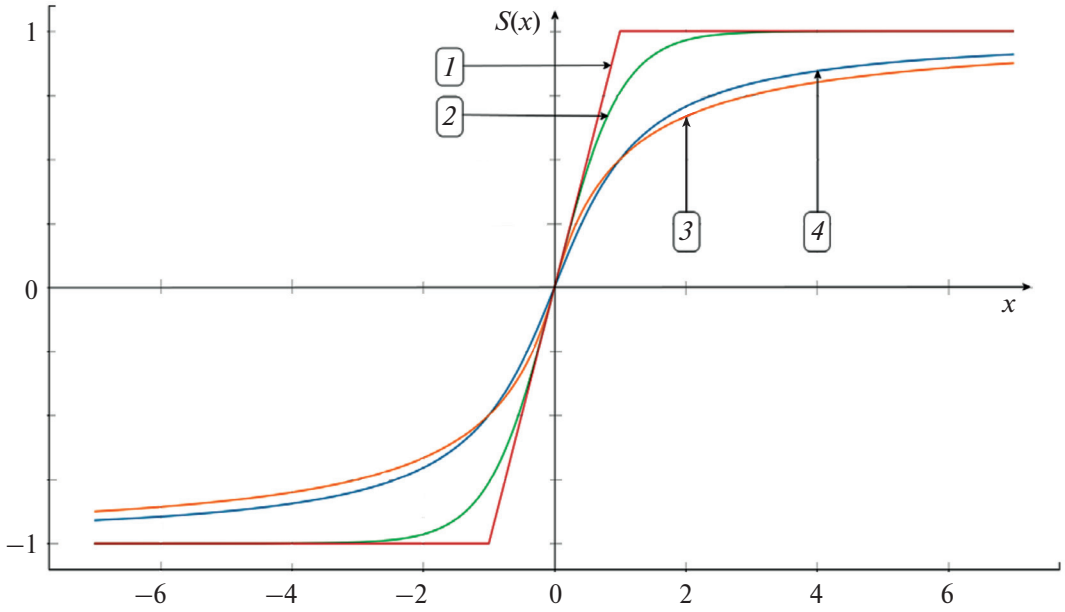


Рис. 1. Примеры функций насыщения: sat(x) (*1*); tanh(x) (*2*); 2arctg(x)/π (*3*); $x/(1+|x|)$ (*4*).

а также гарантируют экспоненциальную скорость убывания отклонения вблизи положения равновесия [2–10]. Функцией насыщения называют непрерывную монотонно неубывающую функцию $S(x)$ скалярной переменной, такую, что $S(x)\to 1$ ($S(x)\to -1$), когда $x\to\infty$ ($x\to-\infty$). Гладкие, строго возрастающие функции насыщения, удовлетворяющие условию $S(0)=0$, принято называть сигмоидами (сигмоидными функциями). В семейство функций класса сигмоид входят такие функции, как функция ошибок, арктангенс, гиперболический тангенс и другие функции подобного вида. Предельным случаем сигмоиды является негладкая функция насыщения – сатуратор: $\mathrm{sat}(s)=s$, когда $|s|\le 1$, и $\mathrm{sat}(s)=\mathrm{sign}(s)$ при $|s|>1$. Примеры функций насыщения – три сигмоиды и сатуратор – приведены на рис. 1.

В большинстве работ об устойчивости систем с обратными связями в виде вложенных функций насыщения в качестве последних рассматриваются сатураторы [2–10]. Несомненным преимуществом использования сигмоид, по сравнению с сатураторами, в рассматриваемых обратных связях с точки зрения практики является гладкость полученной замкнутой системы. Однако исследование устойчивости в этом случае представляет большую трудность, так как приходится иметь дело с нелинейной системой. Вообще говоря, достаточно общего вида, в то время как при замыкании обратной связью в виде вложенных сатураторов получаем нелинейную систему специального вида, а именно линейную систему с переключениями. Авторам не известны публикации, где бы исследовалась глобальная устойчивость систем с обратными связями в виде вложенных сигмоид произвольного вида.

Цель настоящего исследования – доказать глобальную асимптотическую устойчивость цепочки двух интеграторов, замкнутых обратной связью в виде любых вложенных сигмоид для любых положительных коэффициентов обратной связи.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача стабилизации интегратора 2-го порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = U(x),\ x \equiv [x_1, x_2]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

с помощью гладкой обратной связи в виде вложенных сигмоид:

$$U(x_1, x_2) = -k_4 \mathrm{sigm}\Big(k_3\big(x_2 + k_2 \mathrm{sigm}(k_1 x_1)\big)\Big), \tag{2}$$

где $\mathrm{sigm}(s)$ – произвольная гладкая функция насыщения (сигмоида), k_4 – ресурс управления и k_2 – ограничение на диапазон изменения переменной x_2: при любом начальном отклонении $x_1(0)$, $x_2(t)\le k_2$ коль скоро $x_2(0)\le k_2$ [8]. Коэффициенты k_2 и k_4 считаются заданными, а k_1 и k_3

выбираются так, чтобы обеспечить желаемые характеристики переходного процесса. В общем случае внутренняя и внешняя сигмоиды могут быть разными функциями; здесь, однако, для упрощения записи используется одно обозначение для обеих.

Преимущества обратной связи в виде вложенных сатураторов обсуждаются в работах [2–10]. Применительно к рассматриваемой здесь системе 2-го порядка – это автоматическое выполнение вышеупомянутых ограничений на управление и максимальную скорость приближения к положению равновесия [7, 8, 10]. Указанные свойства справедливы и для обратных связей в виде вложенных сигмоид. Как и в случае сатураторов, соответствующим выбором коэффициентов k_1 и k_3 легко обеспечить любое желаемое значение экспоненциальной скорости убывания отклонения линеаризованной в окрестности нуля системы:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -k_3k_4x_2 - k_1k_2k_3k_4x_1,$$

а также желаемый тип положения равновесия (узел или фокус) [8, 10]: если $k_3k_4 < 4k_1k_2$, то $x = 0$ – фокус, иначе – устойчивый узел. В работе [4] доказана глобальная устойчивость системы (1) с обратной связью в виде вложенных сатураторов в частном случае выбора коэффициентов k_1 и k_3 из однопараметрического семейства. Доказательство существенно опирается на свойства сатуратора sat(s), а также использует тот факт, что коэффициенты k_1 и k_3 выбираются из однопараметрического семейства неприменимо к случаю гладких функций насыщения.

Цель настоящей работы – доказать глобальную асимптотическую устойчивость системы (1), (2) для любых гладких функций насыщения (сигмоид) и любых положительных коэффициентов обратной связи.

2. Доказательство глобальной устойчивости системы (1), (2). В общем случае любая функция насыщения задается двумя параметрами: предельным значением и коэффициентом при аргументе функции, определяющим скорость ее изменения. Для двух вложенных функций насыщения имеем четыре коэффициента в (2). Как и в случае негладкой функции насыщения, переход к безразмерным переменным $\tilde{x}_1 = k_4x_1/k_2^2$, $\tilde{x}_2 = x_2/k_2$ и времени $\tilde{t} = k_4t/k_2$ [10] позволяет избавиться от двух параметров. Непосредственной проверкой убеждаемся, что в безразмерной модели ресурс управления и максимальная скорость равны единице: $\tilde{k}_4 = \tilde{k}_2 = 1$, а два других коэффициента определены формулами $\tilde{k}_1 = k_1k_2^2/k_4$ и $\tilde{k}_3 = k_2k_3/k_4$. Всюду далее будем полагать все переменные и константы безразмерными и использовать для них прежнее обозначение (без тильды). В безразмерном виде система (1), (2) принимает вид:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -\mathrm{sigm}\Big(k_3\big(x_2 + \mathrm{sigm}\big(k_1x_1\big)\big)\Big). \tag{3}$$

Таким образом, исследование исходной, зависящей от четырех параметров системы (1), (2) сводится к исследованию двухпараметрической системы (3).

Прежде чем сформулировать основной результат работы, приведем используемые в доказательстве теоремы свойства сигмоид, следующие непосредственно из их строгой монотонности:

- $\mathrm{sigm}\big(\alpha s\big)s > 0\ \forall s \neq 0,\ \forall\alpha > 0$;
- $\mathrm{sigm}\big(\alpha\mathrm{sigm}(s)\big)$ – монотонно возрастающая функция s при любых $\alpha > 0$;
- $\big[\mathrm{sigm}(s + s_0) - \mathrm{sigm}(s_0)\big]s > 0\ \ \forall s \neq 0,\ \forall s_0$.

Очевидно, что свойство (ii) имеет место независимо от того, какие функции применяются в качестве внутренней и внешней сигмоид.

Т е о р е м а . Нулевое решение системы (3) глобально асимптотически устойчиво при любых положительных коэффициентах.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы . Рассмотрим функцию

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int\limits_0^{x_1}\mathrm{sigm}\big(k_3\mathrm{sigm}(k_1s)\big)ds \tag{4}$$

и докажем, что она является функцией Ляпунова системы (3). Функция $V(x)$, очевидно, положительно определена во всем R в силу свойств (i) и (ii) и стремится к бесконечности при $\|x\| \to \infty$. Дифференцируя $V(x)$ в силу системы (3), получим:

$$\dot{V} = -x_2\mathrm{sigm}\Big(k_3\big(x_2 + \mathrm{sigm}\big(k_1x_1\big)\big)\Big) + \mathrm{sigm}\Big(k_3\mathrm{sigm}\big(k_1x_1\big)\Big)x_2 =$$
$$= -\Big[\mathrm{sigm}\Big(k_3\big(x_2 + \mathrm{sigm}\big(k_1x_1\big)\big)\Big) - \mathrm{sigm}\Big(k_3\mathrm{sigm}\big(k_1x_1\big)\Big)\Big]x_2 < 0.$$

Последнее неравенство следует из свойств (ii) и (iii). Наконец, $\dot{V}=0$ только на множестве $x_2=0$, которое не содержит ни одной целой траектории, кроме $x=0$. Таким образом, функция $V(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Барбашина–Красовского [11] и, следовательно, начало координат является асимптотически устойчивым положением равновесия системы (3) в целом. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Из доказательства теоремы видно, что свойство строгой монотонности внутренней сигмоиды нигде не используется, так что ее можно заменить на любую неубывающую функцию насыщения (например, из класса гладких функций, предложенных в [6]), в том числе на сатуратор.

З а м е ч а н и е. Заметим, что функции Ляпунова для более простых систем вида (3) с одной функцией насыщения (т.е. без внутренней или внешней сигмоиды) получаются из функции Ляпунова рассматриваемой системы убиранием соответствующей сигмоиды из интегрального члена. Действительно, непосредственной проверкой легко убедиться, что функции

$$V_1\big(x\big) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1}\mathrm{sigm}\big(k_1s\big)ds$$

и

$$V_2\big(x\big) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_2+k_1x_1}\mathrm{sigm}\big(k_3s\big)ds$$

являются функциями Ляпунова систем

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -k_3\big(x_2 + \mathrm{sigm}\big(k_1x_1\big)\big)$$

и

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -\mathrm{sigm}\Big(k_3\big(x_2 + k_1x_1\big)\Big)$$

соответственно.

3. Численный пример. В качестве численной иллюстрации представим результаты стабилизации интегратора 2-го порядка с начальными условиями $x_1(0)=0.6$, $x_2(0)=1.0$ с помощью обратной связи в виде вложенных гиперболических тангенсов:

$$U\big(x_1,x_2\big) = -\tanh\Big(k_3\big(x_2 + \tanh\big(k_1x_1\big)\big)\Big),$$

где $k_1=5$ и $k_3=20$.

На рис. 2 показаны графики зависимости от времени отклонения от положения равновесия, скорости и управления, демонстрирующие эффективность стабилизации. Большое значение коэффициента k_1 обеспечивает высокую скорость экспоненциальной сходимости в окрестности нуля ($x_1(t)=c\exp((-2k_1t)=c\exp((-10t))$ и вместе с тем не приводит к значительному перерегулированию. На рис. 3 изображены четыре фазовые траектории с начальными точками (–1.5,–1.0), (–0.75,–1.0), (0.75,1.0) и (1.5,1.0). Как видно из рисунков, в процессе стабилизации выполняются фазовое ограничение $|x_2(t)|\le 1$ и ограничение на управление.

Заключение. Рассмотрена задача стабилизации цепочки двух интеграторов с использованием обратной связи в виде двух вложенных сигмоид. Показано, что переход к безразмерным переменным сводит исходную, зависящую от четырех коэффициентов обратной связи задачу к исследованию двухпараметрической системы. Для рассматриваемой системы построена функция Ляпунова, с помощью которой доказана глобальная асимптотическая устойчивость замкнутой системы при любых положительных коэффициентах обратной связи.

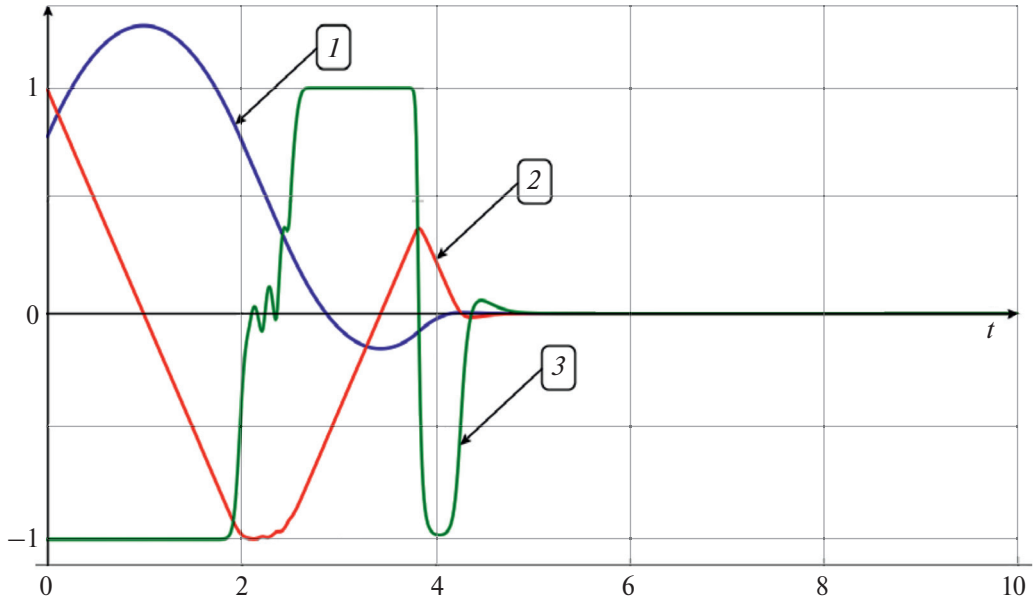


Рис. 2. Графики отклонения $x_1(t)$ (*1*), скорости $x_2(t)$ (*2*) и управления $U(t)$ (*3*).

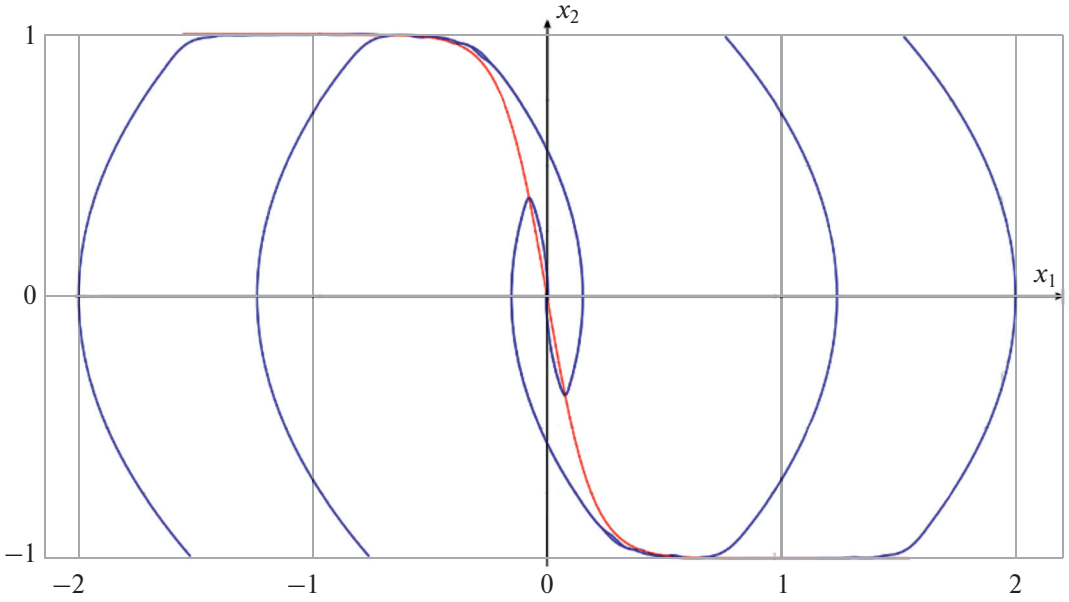


Рис. 3. Фазовые траектории системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Solution Examples on Ellipsoidal Methods: Computation in High Dimensions. Cham, Switzerland: Springer, 2014.
2. *Teel A.R.* Global Stabilization and Restricted Tracking for Multiple Integrators with Bounded Controls // Sys. & Cont. Lett. 1992. V. 18. № 3. P. 165–171.
3. *Teel A.R.* A Nonlinear Small Gain Theorem for the Analysis of Control Systems with Saturation // Trans. Autom. Contr., IEEE, 1996. V. 41. № 9. P. 1256–1270.
4. *Morozov Yu.V., Pesterev A.V.* Глобальная устойчивость гибридной аффинной системы 4-го порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 5. С. 3–15.
5. *Hua M.-D., Samson C.* Time Sub-optimal Nonlinear Pi and Pid Controllers applied to Longitudinal Headway Car Control // Int. J. Control. 2011. V. 84. P. 1717–1728.
6. *Olfati-Saber R.* Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles, Ph.D. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 2001.

7. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V., Matrosov I.V.* On Optimal Selection of Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // Communicat. Comput. Inform. Sci. (CCIS). 2020. V. 1340. P. 236–249.
8. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* Optimizing Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // Lect. Notes Comput. Sci. 2021. V. 13078. P. 191–202.
9. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* The Best Ellipsoidal Estimates of Invariant Sets for a Third-Order Switched Affine System // Lect. Notes Comput. Sci. 2022. V. 13781. P. 66–78.
10. *Пестерев А.В.* Глобальная устойчивость аффинной системы второго порядка с переключениями // АиТ. 2023. № 9. С. 95–105.
11. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. Серия: Физико-математическая библиотека инженера. М.: Наука, 1967.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 11–25

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 531.36; 62-50

НАИСКОРЕЙШЕЕ УСПОКОЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОБРАТНОГО МАЯТНИКА С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКОГО ГАСИТЕЛЯ[1]

© 2024 г. И. М. Ананьевский[1],*, И. А. Дунаев[2],**

[1]ИПМех РАН, Москва, Россия

[2]МФТИ, Москва, Россия

**e-mail: anan@ipmnet.ru*

***e-mail: dunaev.ia@phystech.edu*

Поступила в редакцию 08.12.23 г.
После доработки 17.01.2024 г.
Принята к публикации 13.05.2024 г.

Рассматривается линейная управляемая механическая система третьего порядка, матрица которой имеет одно положительное собственное число. Система может служить математической моделью линеаризованного обратного маятника, управляемого с помощью активного динамического гасителя. На величину управляющей переменной наложено ограничение по модулю. С использованием принципа максимума Понтрягина решена задача синтеза оптимального управления, приводящего систему в состояние покоя за минимальное время.

Ключевые слова: линейная управляемая система, перевернутый маятник, оптимальное быстродействие, принцип максимума Понтрягина

DOI: 10.31857/S0002338824030028 **EDN:** UQTECE

THE FASTEST DAMPING OF A LINEAR INVERTED PENDULUM USING A DYNAMIC ABSORBER

I. M. Ananievski[a],*, I. A. Dunaev[b],**

[a]IPMech RAS, Moscow, Russia

[b]MIPT, Moscow, Russia

**e-mail: anan@ipmnet.ru*

***e-mail: dunaev.ia@phystech.edu*

We consider a linear controllable third-order mechanical system whose matrix has one positive eigenvalue. The system can serve as a mathematical model of a linearized inverse pendulum controlled by an active dynamic damper. A modulus constraint is imposed on the value of the control variable. Using Pontryagin's maximum principle, the problem of synthesizing an optimal control that brings the system to a state of rest in a minimum time is solved.

Keywords. Inverted pendulum, bounded control, active dynamic absorber, time-optimal control, maximum principle

Введение. Изучается задача управления механической системой, представляющей собой перевернутый маятник с активным динамическим гасителем. Конструкция состоит из вертикально стоящего невесомого жесткого стержня с закрепленным на конце грузом m_1 и массы m_2, которая может поступательно перемещаться вдоль горизонтальной направляющей (рис. 1). В качестве управляющей переменной выступает сила взаимодействия между грузом m_1 и массой m_2 гасителя, которая предполагается ограниченной по модулю. Отклонения маятника от вертикального состояния предполагаются малыми, поэтому динамика системы рассматривается в линейном приближении. Требуется за минимальное время привести маятник в вертикальное положении и остановить массу гасителя m_2. Конечное положения массы гасителя несущественно.

[1] Работа выполнена в рамках госзадания 123021700055-6.

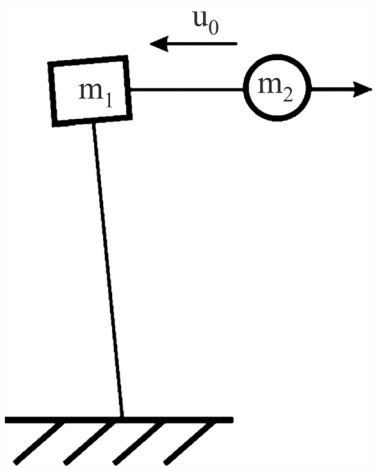


Рис. 1. Обратный маятник с динамическим гасителем

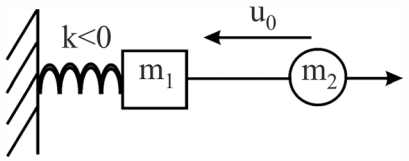


Рис. 2. Упрощенная двухмассовая система.

Эквивалентной моделью описанной конструкции может служить следующая управляемая двухмассовая механическая система (рис. 2). Два тела массами m_1 и m_2 перемещаются вдоль горизонтальной прямой. Первое тело соединено с неподвижным основанием пружиной отрицательной жесткости $k < 0$. Второе тело соединено с первым посредством привода, который генерирует силу u_0.

Одной из особенностей рассматриваемой системы является ее неустойчивость, обусловленная наличием положительного собственного числа у матрицы линеаризованных уравнений движения системы. Задачи управления движением неустойчивых объектов, в том числе движением обратного маятника, изучались в работе [1], где получены оценки множеств управляемости некоторых объектов такого рода, а также исследовался ряд задач оптимального управления. Оптимальное по быстродействию управление для механических систем, включающих в себя перевернутый маятник, предложено в работах [2, 3].

Изучаемая ниже задача представляет собой классическую задачу оптимального управления понтрягинского типа, эффективным инструментом решения которой служит принцип максимума Понтрягина [4, 5]. Аналогичная задача оптимального быстродействия рассмотрена в работе [6] для системы, изображенной на рис. 2, для случая $k > 0$, т.е. для обычного линейного маятника. Найдены оптимальные режимы движения системы при перемещении ее из одного состояния покоя в другое. В работе [7] исследована задача оптимального быстродействия для линейной системы шестого порядка, описывающей динамику управляемого перемещения вдоль горизонтальной прямой тележки, несущей два линейных осциллятора. Система переводится из одного состояния покоя в другое с помощью ограниченной по модулю управляющей силы, приложенной к несущему телу. Изучено поведение функции оптимального управления.

Методы управления маятниковыми системами с помощью активного динамического гасителя без минимизации времени движения предложены в работах [8, 9].

1. Постановка задачи и уравнения движения. Уравнения движения такой системы имеют вид

$$m_1\ddot{\xi}_1 + k\xi_1 = -u_0, \quad m_2\dot{\xi}_2 = u_0. \tag{1.1}$$

Здесь ξ_1 – смещение массы m_1 от нулевого состояния покоя, ξ_2 – скорость массы m_2. На управляющую силу наложено ограничение

$$|u_0| \le U, \quad U = \text{const} > 0. \tag{1.2}$$

З а д а ч а 1. Требуется найти управление в форме обратной связи, т.е. как функцию фазовых переменных, приводящее систему в начало координат из любой точки фазового пространства за минимальное время.

Введем безразмерные переменные:

$$\eta_1 = -\frac{k}{U}\xi_1, \quad t' = t\sqrt{\frac{-k}{m_1}}, \quad \eta_2 = \frac{d\eta_1}{dt'},$$
$$z = m_2\sqrt{\frac{-k}{m_1}}\xi_2, \quad u = \frac{u_0}{U}. \tag{1.3}$$

Запишем уравнения (1.1) в новых переменных в нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot\eta_1 &= \eta_2, \\ \dot\eta_2 &= \eta_1 - u, \\ \dot z &= u. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь и ниже точками обозначены производные по новому времени t'. В дальнейшем штрихи у величины t' будут опущены.

Ограничение (1.2) примет вид

$$|u| \le 1. \tag{1.5}$$

Сделаем еще одну замену переменных

$$\begin{aligned} x &= \eta_2 - \eta_1, \\ y &= \eta_1 + \eta_2 \end{aligned} \tag{1.6}$$

и преобразуем уравнения (1.4) :

$$\begin{aligned} \dot x &= -x - u, \\ \dot y &= y - u, \\ \dot z &= u. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Исходная задача 1 теперь может быть сформулирована следующим образом.

З а д а ч а 2. Найти управление в форме обратной связи, т.е. как функцию $u(x, y, z)$, которое удовлетворяет условию (1.5) и обеспечивает приведение системы (1.7) в начало координат за минимальное время.

Нетрудно видеть, что система (1.7) удовлетворяет условию управляемости Калмана [10]. Ниже представлено решение задачи 2 в переменных x, y, z. Решение в исходных переменных ξ_1,ξ_2 может быть получено путем обратных замен с использованием формул (1.3) и (1.6).

2. Редуцированная система. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу управления для редуцированной системы, состоящей только из первых двух уравнений системы (1.7) :

$$\begin{aligned} \dot x &= -x - u, \\ \dot y &= y - u. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Найдем оптимальное по быстродействию управление $u(x, y)$, приводящее систему (2.1) в начало координат и удовлетворяющее условию (1.5). Воспользуемся для этого принципом максимума Понтрягина.

Выпишем гамильтониан редуцированной системы

$$H_1(p_1, p_2, x, y) = -p_1 x + p_2 y - u(p_1 + p_2)$$

и уравнения для сопряженных переменных

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_1, \\ \dot{p}_2 &= -p_2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Решение системы (2.2) имеет вид

$$p_1(t) = d_1 e^t, \quad p_2(t) = d_2 e^{-t}. \tag{2.3}$$

Здесь d_1 и d_2 – произвольные постоянные. В силу ограничения (1.5) гамильтониан H_1 достигает максимума по u, если

$$u = -\mathrm{sign}(p_1 + p_2), \tag{2.4}$$

и в соответствии с принципом максимума на оптимальной траектории имеет место равенство (2.4) , т.е. $u = \pm 1$. При таких значениях управляющей функции решение системы (2.1) имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + 1,\ y(t) = c_2 e^t - 1, \text{если } u = -1; \\ x(t) = c_1 e^{-t} - 1,\ y(t) = c_2 e^t + 1, \text{если } u = 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Найдем число перемен знака функции $p_1(t) + p_2(t)$. Подставим для этого в уравнение $p_1(t) + p_2(t) = 0$ выражения (2.3) для сопряженных переменных. Получим

$$d_1 e^t + d_2 e^{-t} = 0$$

или

$$e^{2t} = -\frac{d_2}{d_1}.$$

Отсюда видно, что непрерывная функция $p_1(t) + p_2(t)$ обращается в нуль не более одного раза и, следовательно, не более одного раза меняет знак.

Таким образом, существует два основных сценария оптимального по быстродействию приведения системы (2.1) в начало координат. Каждый состоит из двух этапов. При первом сценарии на первом этапе $u = -1$, а на втором $u = 1$, при втором – наоборот, сначала $u = 1$, затем $u = -1$.

На рис. 3 изображен фазовый портрет системы (2.1) при $u = 1$, а на рис. 4 – фазовый портрет при $u = -1$. Отметим, что при $u = 1$ точка $x = -1$, $y = 1$ является седлом системы (2.1), сепаратрисы которого лежат на прямых $x = -1$ и $y = 1$. При $u = -1$ седлом является точка $x = 1$, $y = -1$, его сепаратрисы лежат на прямых $x = 1$ и $y = -1$.

З а м е ч а н и е 1. Преобразование центральной симметрии относительно начала координат, т.е. одновременная смена знака у переменных x, y и управления u, переводит один фазовый портрет в другой.

Обозначим через G полосу, заключенную между прямыми $y = -1$ и $y = 1$:

$$G = \left\{ (x, y) \in R^2 : |y| < 1 \right\}.$$

Поскольку система (2.1) неустойчива по переменной y, так как соответствующее y собственное число равно 1, то при ограничении (1.5) вне полосы G имеет место неравенство

$$\frac{d}{dt}\frac{y^2}{2} = \dot{y}y = y^2 - uy \geq y^2 - |y| \geq 0.$$

Следовательно, величина y^2 вне полосы G не убывает и множество начальных состояний, из которых возможно приведение системы в начало координат, лежит в G.

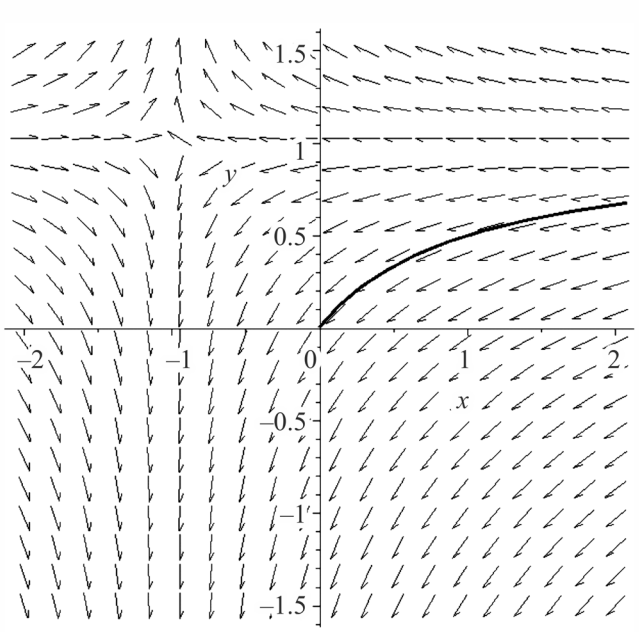


Рис. 3. Фазовый портрет системы при $u = 1$.

Предположим, что в момент времени $s > 0$ система (2.1) приходит в начало координат под действием управления $u = -1$, т.е. в соответствии с (2.5) – вдоль траектории

$$x(t) = c_1 e^{-t} + 1,\ y(t) = c_2 e^{t} - 1.$$

Тогда $x(s) = y(s) = 0$ и $c_1 = -e^{s}$, $c_2 = e^{-s}$. Очевидно, что все такие траектории лежат на кривой γ_-, которая может быть описана параметрически с помощью s следующим образом:

$$x(s) = 1 - e^{s},\quad y(s) = e^{-s} - 1,\quad s \geq 0. \tag{2.6}$$

На рис. 4 кривая γ_- изображена сплошной линией. Все точки фазовой плоскости, из которых система приходит в начало координат под действием управления $u = -1$, лежат на этой кривой, а параметр s равняется времени движения из точки $(x(s), y(s)) \in \gamma_-$ до нуля. Из соотношений (2.6) вытекает, что в декартовых координатах уравнение кривой γ_- имеет вид

$$x = \frac{y}{1 + y},\quad y \leq 0. \tag{2.7}$$

Если же система (2.1) приходит в начало координат под действием управления $u = 1$ в момент времени $s > 0$, т.е. в соответствии с (2.5) – вдоль траектории

$$x(t) = c_1 e^{-t} - 1,\ y(t) = c_2 e^{t} + 1,$$

то $c_1 = e^{s}$, $c_2 = -e^{-s}$. Такие траектории лежат на кривой γ_+, которая задается параметрически соотношениями

$$x(s) = e^{s} - 1,\quad y(s) = 1 - e^{-s},\quad s \geq 0. \tag{2.8}$$

Здесь также параметр s равняется времени движения из точки $(x(s), y(s) \in \gamma_+)$ до нуля. Учитывая (2.8), в декартовых координатах уравнение кривой γ_+ можно записать в виде

$$x = \frac{y}{1 - y},\quad y \geq 0. \tag{2.9}$$

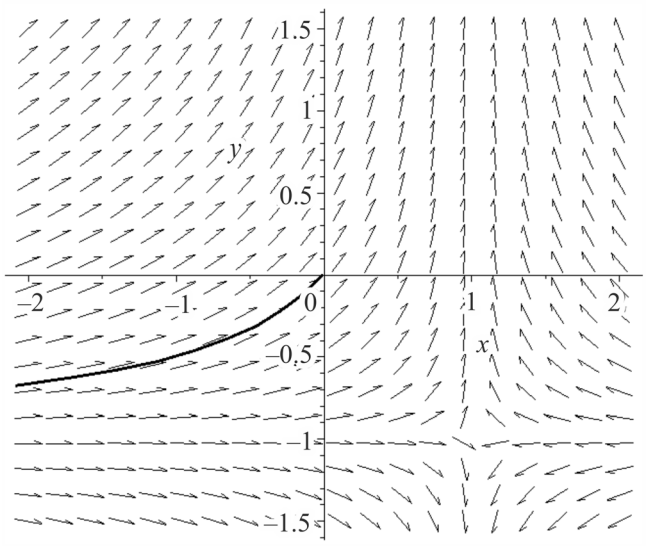


Рис. 4. Фазовый портрет при $u=-1$.

На рис. 3 эта кривая изображена сплошной линией.

При первом сценарии приведения сначала система (2.1) под действием управления $u=-1$ приходит на кривую γ_+, а затем вдоль этой кривой под действием управления $u=1$ – в начало координат. При втором сценарии сначала система (2.1) под действием управления $u=1$ приходит на кривую γ_-, а затем вдоль этой кривой под действием управления $u=-1$ – в начало координат. Таким образом, управляющая функция меняет знак на составленной из γ_+ и γ_- кривой $\gamma=\gamma_-\cup\gamma_+$, которую будем называть кривой переключений. Из соотношений (2.7) и (2.9) следует, что в декартовых координатах эта кривая задается уравнением

$$x=\frac{y}{1-|y|}. \tag{2.10}$$

Рассмотрим первый сценарий приведения. В рамках этого сценария на первом этапе начинающаяся в точке (x_1,y_1) траектория системы под действием управления $u=-1$ приходит на кривую γ_+. Из рис. 3 видно, что множество начальных состояний (x_1,y_1), из которых можно попасть на кривую γ_+ при $u=-1$, составляет область, заключенная между прямой $y=-1$ и кривой γ. Обозначим эту область через G_-, а область, заключенную между кривой γ и прямой $y=1$, – через G_+.

В соответствии с (2.5) решение системы (2.1) при $u=-1$, начинающееся в момент времени $t=0$ в точке (x_1,y_1), имеет вид

$$x(t)=(x_1-1)e^{-t}+1,\quad y(t)=(y_1+1)e^{t}-1 \tag{2.11}$$

и, следовательно, проходит по гиперболе

$$(x-1)(y+1)=C_-. \tag{2.12}$$

Здесь использовано обозначение

$$C_-=(x_1-1)(y_1+1). \tag{2.13}$$

Уравнение (2.12) при $C_-\neq 0$ задает семейство гипербол. Если $C_->0$, то соответствующая гипербола лежит в квадранте $x>1$, $y>-1$, если $C_-<0$, то она лежит в квадранте $x<1$, $y>-1$, причем при $C_-=-1$ кривая γ_- является ветвью этой гиперболы.

Так как точка (x_1,y_1) лежит в области G_-, то величина C_- может принимать следующие значения:

$$\begin{cases} -1 < C_- < 0, \text{если } x_1 < 1; \\ C_- = 0, \text{если } x_1 = 1; \\ C_- > 0, \text{если } x_1 > 1. \end{cases} \tag{2.14}$$

Отметим, что индексы в обозначениях, используемых при решении редуцированной задачи, выбраны с учетом применения этих же обозначений в дальнейшем при решении полной задачи.

Пусть в момент времени $t_2 > 0$ решение (2.11) попадает на кривую γ_+. Положим $x_2 = x(t_2)$, $y_2 = y(t_2)$. Соотношения (2.9) и (2.12) приводят к следующим уравнениям на координаты точки пересечения этого решения с кривой γ_+:

$$x_2 = \frac{y_2}{1 - y_2}, \quad (x_2 - 1)(y_2 + 1) = C_-. \tag{2.15}$$

Подставляя x_2 во второе уравнение (2.15) , после некоторых преобразований получим

$$2y_2^2 + (C_- + 1)y_2 - (C_- + 1) = 0. \tag{2.16}$$

Для дискриминанта этого уравнения введем обозначение

$$D_- = (C_- + 1)^2 + 8(C_- + 1) = (C_- + 1)(C_- + 9). \tag{2.17}$$

Так как $C_- + 1 > 0$, согласно (2.14), то дискриминант удовлетворяет неравенству $D_- > 0$.

Точка (x_2, y_2) лежит на кривой γ_+, поэтому ордината этой точки равна единственному положительному корню уравнения (2.16), т.е.

$$y_2 = \frac{-(C_- + 1) + \sqrt{D_-}}{4} > 0. \tag{2.18}$$

Подставляя $t = t_2$ во второе равенство (2.11) и используя соотношения (2.13) и (2.18), находим время движения системы из начального состояния (x_1, y_1) до кривой переключений γ:

$$t_2 = \ln\frac{y_2 + 1}{y_1 + 1} = \ln\frac{3 - C_- + \sqrt{D_-}}{4(y_1 + 1)}. \tag{2.19}$$

В момент прихода траектории системы (2.1) в точку $(x_2, y_2) \in \gamma_+$ происходит переключение управления с $u = -1$ на $u = 1$. Время движения t_3 из точки (x_2, y_2) до начала координат вдоль кривой γ_+ находится из второго соотношения (2.8) с помощью подстановок $y(s) = y_2$, $s = t_3$ и с учетом выражения (2.18) :

$$\begin{aligned} t_3 &= -\ln(1 - y_2) = -\ln\frac{C_- + 5 - \sqrt{D_-}}{4} = \ln\frac{4}{C_- + 5 - \sqrt{D_-}} = \\ &= \ln\frac{4(C_- + 5 + \sqrt{D_-})}{(C_- + 5 - \sqrt{D_-})(C_- + 5 + \sqrt{D_-})} = \ln\frac{C_- + 5 + \sqrt{D_-}}{4}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

С использованием обозначений (2.13) и (2.17) времена t_2 и t_3 могут быть выражены через координаты x_1 и y_1. Полное время движения $T = t_2 + t_3$ из точки $(x_1, y_1) \in G_-$ в начало координат представляет собой функцию начального состояния:

$$T_-(x_1, y_1) = \ln \frac{(3 - C_- + \sqrt{D_-})(C_- + 5 + \sqrt{D_-})}{16(y_1 + 1)}. \tag{2.21}$$

Таким образом, если начальное состояние (x_1, y_1) лежит в области G_- или на кривой γ_-, то применяется первый сценарий приведения. При $(x_1, y_1) \in G_-$ сначала траектория системы под действием управления $u = -1$ приходит в точку $(x_1, y_1) \in \gamma_+$ за время t_2. Затем, на втором этапе, она движется вдоль кривой γ_+ под действием управления $u = 1$ в начало координат в течение времени t_3. При $(x_1, y_1) \in \gamma_-$ система приходит в начало координат вдоль кривой γ_- под действием управления $u = -1$. В этом случае $C_- = -1$, $D_- = 0$, и формула (2.19) для времени движения t_2 остается справедливой, а второй этап отсутствует и $t_3 = 0$.

Если же начальное состояние (x_1, y_1) лежит в области G_+ или на кривой γ_+, то применяется второй сценарий. В этом случае $(-x_1, -y_1) \in G_- \cup \gamma_-$ и с учетом замечания 1 можно заключить, что сначала траектория системы под действием управления $u = 1$ приходит в точку $(x_2, y_2) \in \gamma_-$ за время, равное времени движения из состояния $(-x_1, -y_1)$ до кривой γ_+ по первому сценарию:

$$t_2(-x_1, -y_1) = \ln \frac{3 - C_+ + \sqrt{D_+}}{4(1 - y_1)}. \tag{2.22}$$

Здесь

$$C_+(x_1, y_1) = C_-(-x_1, -y_1) = (x_1 + 1)(y_1 - 1),$$
$$D_+ = (C_+ + 1)(C_+ + 9).$$

Затем траектория движется вдоль кривой γ_- под действием управления $u = -1$ в начало координат в течение времени

$$t_3(-x_1, -y_1) = \ln \frac{C_+ + 5 + \sqrt{D_+}}{4}. \tag{2.23}$$

Если начальное состояние (x_1, y_1) находится на кривой γ_+, то система приходит в начало координат вдоль этой кривой под действием управления $u = 1$ за время $t_2(-x_1, -y_1)$, а второй этап отсутствует.

Полное время движения задается соотношением

$$T_+(x_1, y_1) = T_-(-x_1, -y_1), \quad (x_1, y_1) \in G_+ \cup \gamma_+.$$

График полного времени движения как функции начального состояния, определенной на всей области G, приведен на рис. 5. Лежащая в плоскости x, y кривая переключений γ здесь изображена сплошной линией.

3. Задача быстродействия для полной системы. 3.1. Принцип максимума. Выпишем теперь гамильтониан для системы (1.7)

$$H(p_1, p_2, p_3, x, y, z) = -p_1 x + p_2 y - u(p_1 + p_2 - p_3)$$

и систему уравнений для сопряженных переменных

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_1, \\ \dot{p}_2 &= -p_2, \\ \dot{p}_3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Решение системы (3.1) имеет вид

$$p_1(t) = d_1 e^t, \quad p_2(t) = d_2 e^{-t}, \quad p_3 = d_3. \tag{3.2}$$

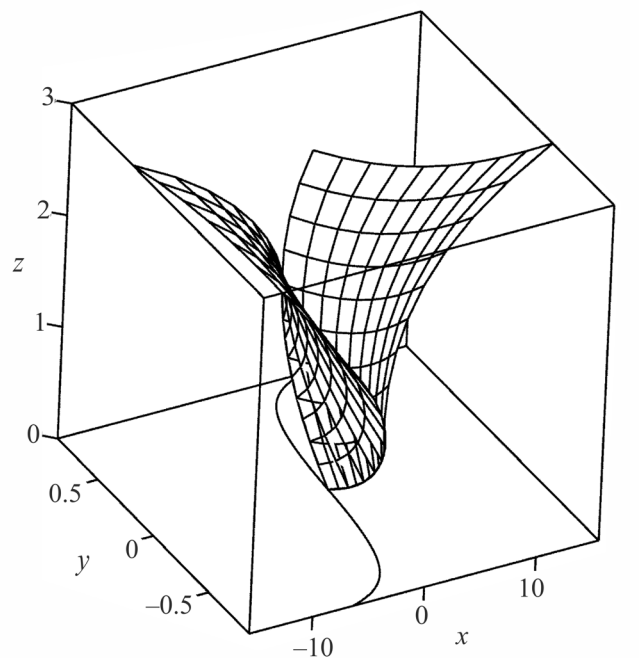


Рис. 5. Время движения $T(x, y)$.

При ограничении (1.5) гамильтониан H достигает максимума по u, если

$$u = -\text{sign}(p_1 + p_2 - p_3), \tag{3.3}$$

и в соответствии с принципом максимума на оптимальной траектории выполнено равенство (3.3) , т.е. $u = \pm 1$. При таких значениях управляющей функции решение системы (1.7) может быть записано как

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + 1,\ y(t) = c_2 e^{t} - 1,\ z(t) = -t + c_3, \text{если } u = -1; \\ x(t) = c_1 e^{-t} - 1,\ y(t) = c_2 e^{t} + 1,\ z(t) = t + c_3, \text{если } u = 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

З а м е ч а н и е 2. Первые два уравнения движения полной системы совпадают с уравнениями движения редуцированной системы, поэтому выражения для $x(t), y(t)$ в (2.5) и (3.4) совпадают, т.е. траектории движения редуцированной системы представляют собой проекции на плоскость x, y траекторий полной системы.

Для определения числа перемен знака функции $\psi(t) = p_1(t) + p_2(t) - p_3(t)$ подставим в уравнение $\psi(t) = 0$ выражения (3.2) для сопряженных переменных:

$$d_1 e^{t} + d_2 e^{-t} - d_3 = 0.$$

Продифференцировав это равенство по t, получим

$$e^{2t} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Отсюда видно, что производная функции $\psi(t)$ обращается в нуль не более одного раза. Следовательно, сама функция $\psi(t)$ обращается в нуль не более двух раз, поэтому она не более двух раз меняет знак.

З а м е ч а н и е 3. То, что оптимальное управление для редуцированной системы имеет не более одного переключения, а оптимальное управление для полной системы – не более двух, следует из вещественности собственных чисел матриц этих систем. Известно [4], что для

системы порядка n, все собственные числа которой вещественны, оптимальное по быстродействию управление имеет не более $n-1$ переключений.

Таким образом, в задаче управления полной системой также существует два основных сценария оптимального по быстродействию приведения системы (1.7) в начало координат, однако теперь каждый сценарий состоит из трех этапов. При первом сценарии на первом этапе $u=1$, на втором $u=-1$ и на третьем вновь $u=1$. При втором сценарии сначала $u=-1$, затем $u=1$, а на заключительном этапе снова $u=-1$.

В дальнейшем будем называть траектории движения системы (1.7) с постоянным управлением $u=1$ положительными, а траектории движения с постоянным управлением $u=-1$ – отрицательными.

З а м е ч а н и е 4. Преобразование центральной симметрии относительно начала координат, т.е. одновременная смена знака у переменных x, y, z и управления u, переводит положительные траектории в отрицательные и наоборот.

3.2. П о в е д е н и е т р а е к т о р и й. Рассмотрим подробно первый сценарий. Пусть (x_0, y_0, z_0) – начальное состояние системы, (x_1, y_1, z_1) – точка, в которой заканчивается первый этап и происходит переключение управления с $u=1$ на $u=-1$, (x_2, y_2, z_2) – точка, в которой заканчивается второй этап и происходит переключение управления с $u=-1$ на $u=1$, $t_i \geq 0$ – время движения на i-м этапе, $i=1, 2, 3$.

Начнем с третьего, заключительного, этапа. На этом этапе система (1.7) приходит в начало координат под действием управления $u=1$, т.е. в соответствии с (3.4) – вдоль положительной траектории

$$x(t) = c_1 e^{-t} - 1,\ y(t) = c_2 e^{t} + 1,\ z(t) = t + c_3.$$

Все такие траектории лежат на кривой Γ_+, которая задается параметрически соотношениями

$$x(s) = e^{s} - 1, \quad y(s) = 1 - e^{-s}, \quad z(s) = -s, \tag{3.5}$$

причем параметр s равняется времени движения из точки $(x(s), y(s), z(s)) \in \Gamma_+$ до нуля. Из (3.5) вытекает следующее описание кривой Γ_+ с помощью уравнений в декартовых координатах:

$$x = \frac{y}{1-y}, \quad z = \ln(1-y), \quad y \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Нетрудно видеть, что кривая γ_+, которая фигурировала ранее в редуцированной задаче, представляет собой проекцию кривой Γ_+ на плоскость $z=0$.

Поскольку на третьем этапе система (1.7) переходит из точки (x_2, y_2, z_2) в начало координат вдоль положительной траектории за время t_3, то эта траектория удовлетворяет условиям $x(0)=x_2$, $y(0)=y_2$, $z(0)=z_2$, $x(t_3)=y(t_3)=z(t_3)=0$, т.е.

$$\begin{aligned} x(t_3) &= (x_2+1)e^{-t_3} - 1 = 0, \\ y(t_3) &= (y_2-1)e^{t_3} + 1 = 0, \\ z(t_3) &= z_2 + t_3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_2 = e^{t_3} - 1, \quad y_2 = 1 - e^{-t_3}, \quad z_2 = -t_3. \tag{3.7}$$

На втором этапе система переходит под действием управления $u=-1$ из точки (x_1, y_1, z_1) в точку (x_2, y_2, z_2) за время t_2 вдоль отрицательной траектории

$$x(t) = c_1 e^{-t} + 1, \quad y(t) = c_2 e^{t} - 1, \quad z(t) = -t + c_3,$$

поэтому

$$x_2 = (x_1 - 1)e^{-t_2} + 1, \quad y_2 = (y_1 + 1)e^{t_2} - 1, \quad z_2 = -t_2 + z_1. \tag{3.8}$$

Опишем множество точек (x_1, y_1, z_1), из которых можно попасть на кривую (3.6) вдоль отрицательных траекторий. Это множество представляет собой поверхность, образованную семейством полутраекторий системы (1.7) с управлением $u = -1$, заканчивающихся на кривой Γ_+. Обозначим данную поверхность через S_-. Из соотношений (3.7) и (3.8) получаем следующее представление поверхности S_- в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x_1(t_2, t_3) &= e^{t_2 + t_3} - 2e^{t_2} + 1, \\ y_1(t_2, t_3) &= -e^{-(t_2 + t_3)} + 2e^{-t_2} - 1, \\ z_1(t_2, t_3) &= t_2 - t_3, \quad t_2 > 0, t_3 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для описания поверхности S_- в декартовых координатах воспользуемся результатами решения редуцированной задачи. Точка (x_2, y_2, z_2) лежит на кривой Γ_+, а ее проекция на плоскость $z = 0$ – точка (x_2, y_2) – на кривой γ_+. Следовательно, точка (x_1, y_1), из которой траектория редуцированной системы приходит в точку (x_2, y_2), лежит во множестве $G_- \cup \gamma_-$. В соответствии с замечанием 2 времена движения t_2 и t_3 полной системы на втором и третьем этапах движения совпадают с временами движения редуцированной системы на первом и втором этапах соответственно, т. е. задаются равенствами (2.19),(2.20). Поэтому координата z_1 точки, принадлежащей поверхности S_-, может быть выражена как функция координат x_1, y_1 с помощью равенств (2.19),(2.20) и третьего соотношения в (3.9) следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1 &= f_-(x_1, y_1) = \ln \frac{3 - C_- + \sqrt{D_-}}{4(y_1 + 1)} - \ln \frac{C_- + 5 + \sqrt{D_-}}{4} = \\ &= \ln \frac{3 - C_- + \sqrt{D_-}}{(C_- + 5 + \sqrt{D_-})(y_1 + 1)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь величины C_- и D_- задаются формулами (2.13) и (2.17) и выступают как функции переменных x_1, y_1.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 1. Поверхность S_- представляет собой график функции $f_-(x_1, y_1)$, заданной на множестве $G_- \cup \gamma_-$ с помощью выражения (3.10).

Все траектории системы (1.7), которые приходят в начало координат под действием управления $u = -1$, лежат на кривой Γ_-, которая задается уравнением

$$x = \frac{y}{1 + y}, \quad z = -\ln(1 + y), \quad y \leqslant 0.$$

Обозначим через S_+ поверхность, образованную семейством полутраекторий системы (1.7) с управлением $u = 1$, заканчивающихся на кривой Γ_-. Эта поверхность представляет собой множество точек (x_1, y_1, z_1), из которых можно попасть на кривую Γ_- вдоль положительных траекторий. В соответствии с замечанием 4 эта поверхность расположена симметрично поверхности S_- относительно начала координат и представляет собой график функции f_+, заданной на множестве $G_+ \cup \gamma_+$ следующим образом:

$$f_+(x_1, y_1) = -f_-(-x_1, -y_1).$$

Составим поверхность $S = S_- \cup S_+$. В дальнейшем будем называть ее поверхностью переключений. Она изображена на рис. 6 и представляет собой график функции f, заданной на множестве G формулами:

$$f(x_1, y_1) = \begin{cases} f_-(x_1, y_1), \text{если } (x_1, y_1) \in G_- \cup \gamma_-; \\ f_+(x_1, y_1), \text{если } (x_1, y_1) \in G_+ \cup \gamma_+. \end{cases} \tag{3.11}$$

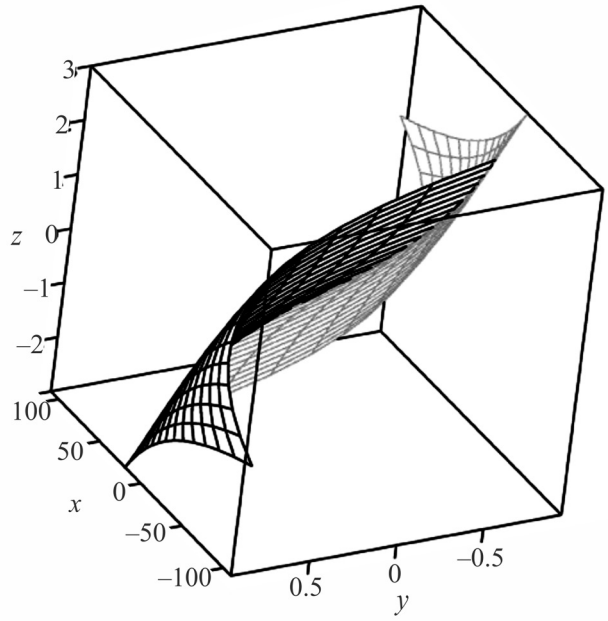


Рис. 6. Поверхность переключений S.

Поскольку кривые Γ_- и Γ_+ расположены симметрично относительно начала координат, то функция f непрерывна. На рис. 6 более темная часть отвечает поверхности S_+, а более светлая – поверхности S_-.

3.3. Свойства поверхности переключений. Заметим, что множество начальных состояний, из которых возможно приведение системы в начало координат, составляет область

$$Q = G \times R^1 = \{(x_0, y_0, z_0) :- \infty < x_0, z_0 < \infty, \mid y_0 \mid < 1\},$$

а график заданной на G непрерывной функции f разбивает это множество на две подобласти. Обозначим через Q_- ту, что лежит ниже S, а через Q_+ – ту, что лежит выше.

Выясним, как ведут себя решения, которые начинаются в области Q, но вне поверхности S. Поскольку поверхность S_+ образована из полутраекторий положительных траекторий, то в силу единственности решений другие положительные траектории с поверхностью S_+ не пересекаются. Соответственно, не лежащие на поверхности S_- отрицательные траектории не пересекают поверхность S_-. Следовательно, всякая траектория системы (1.7) может пересекать поверхность S только на участке «другого знака».

Утверждение 2. Положительные траектории системы (1.7) пересекают поверхность S сверху вниз, т.е. из области Q_+ в область Q_-, а отрицательные – снизу вверх.

Доказательство. В соответствии с замечанием 4 достаточно изучить пересечение положительных траекторий с поверхностью S_-. Используя параметрическое представление (3.9) поверхности S_-, выпишем координаты (ненормированного) вектора нормали n к поверхности S_-:

$$\begin{aligned} n_x(t_2, t_3) &= 2e^{-t_2}(1 - e^{-t_3}), \\ n_y(t_2, t_3) &= 2e^{t_2}(e^{t_3} - 1), \\ n_z(t_2, t_3) &= 2(e^{t_3} - e^{-t_3}). \end{aligned}$$

Векторное поле v системы (1.7) в точке (x_1, y_1, z_1) пересечения траектории с поверхностью при $u = 1$ в соответствии с (3.9) задается выражениями

$$v_x = -x_1(t_2,t_3) - 1 = -e^{t_2+t_3} + 2e^{t_2} - 2,$$
$$v_y = y_1(t_2,t_3) - 1 = -e^{-(t_2+t_3)} + 2e^{-t_2} - 2,$$
$$v_z = 1.$$

Покажем, что скалярное произведение (n, v) векторов n и v при $t_2, t_3 > 0$ отрицательно. Введем обозначение

$$\varphi(t_2,t_3) = \frac{1}{4}(n,v) = e^{t_2} - e^{-t_2} + e^{t_3} - e^{-t_3} - e^{t_2+t_3} + e^{-(t_2+t_3)}.$$

Убедимся, что частная производная функции φ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_3} = e^{t_3} + e^{-t_3} - e^{t_2+t_3} - e^{-(t_2+t_3)}$$

отрицательна при $t_2, t_3 > 0$. Так как $\varphi(t_2, 0) = 0$, то отсюда будет следовать, что $\varphi(t_2, t_3) < 0$ при $t_2, t_3 > 0$.

Введем в рассмотрение скалярную функцию

$$h(\xi) = \xi + \frac{1}{\xi}, \quad \xi \geq 1.$$

Эта функция строго возрастает, так как ее производная положительна:

$$h'(\xi) = 1 - \frac{1}{\xi^2} > 0, \quad \xi \geq 1.$$

Поскольку $e^{t_2} < e^{t_2+t_3}$ при $t_3 > 0$, то выполнено соотношение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_3} = h(e^{t_3}) - h(e^{t_2+t_3}) < 0,$$

из которого вытекает неравенство $\varphi(t_2, t_3) < 0$. Следовательно, траектория системы (1.7) при $u = 1$ пересекают поверхность S_- сверху вниз. Утверждение 2 доказано.

Покажем теперь, что при оптимальном по быстродействию приведении системы в начало координат на первом этапе необходимо выбирать $u = 1$, если начальное состояние находится выше поверхности S, и $u = -1$, если ниже.

Пусть начальное состояние (x_0, y_0, z_0) лежит в области Q_+, т.е. находится выше поверхности S. Это означает, что

$$z_0 > f(x_0, y_0). \tag{3.12}$$

Из приведенных выше рассуждений вытекает, что при $u = -1$ траектория $x(t), y(t), z(t)$ с начальным состоянием $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ не попадет на поверхность S.

Изучим поведение траектории с таким начальным состоянием при $u = 1$. В этом случае в соответствии с (3.4) имеем

$$y(t) = (y_0 - 1)e^t + 1 \leq -1, \quad t \geq t_* = \ln\frac{2}{1 - y_0}.$$

Проекция траектории на плоскость x, y покидает полосу G, пересекая прямую $y = -1$ в момент времени $t = t_*$. При $t \to t_*$ справедливы соотношения

$$C_- \to 0, \quad f_-(x(t), y(t)) \to \infty, \quad z(t) \to z_0 + t_*.$$

Отсюда и из (3.12) вытекает, что найдется момент времени $t < t_*$, когда будет выполнено равенство $z(t) = f_-(x(t), y(t))$, т.е. рассматриваемая траектория пересечет поверхность S_-, которая является графиком функции f_- и частью поверхности S. В этот момент происходит переключение управления.

3.4. Алгоритм управления и время движения. Сформулируем теперь алгоритм оптимального по быстродействию приведения полной системы в начало координат. Пусть (x_0, y_0, z_0) – начальное состояние системы. Если $z_0 > f(x_0, y_0)$, где функция f определена в (3.11) , то начальное состояние лежит выше поверхности переключений и на первом этапе следует выбирать $u = 1$. Если $z_0 < f(x_0, y_0)$, то начальное состояние лежит ниже поверхности переключений и на первом этапе должно быть $u = -1$. В случае $z_0 = f(x_0, y_0)$ первый этап отсутствует. Когда траектория системы попадет на поверхность переключений S, управление меняет знак и движение продолжается по этой поверхности до достижения траекторией кривой переключений $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+$. Здесь управление вновь меняет знак, и система приходит в начало координат вдоль кривой Γ.

Если $z_0 > f(x_0, y_0)$, то на первом этапе в соответствии с (3.4) решение системы (1.7) имеет вид

$$x(t) = (x_0 + 1)e^{-t} - 1, \; y(t) = (y_0 - 1)e^{t} + 1, \; z(t) = z_0 + t.$$

Подставив в (3.10) соотношения

$$x_1 = (x_0 + 1)e^{-t_1} - 1, \; y_1 = (y_0 - 1)e^{t_1} + 1, \; z_1 = z_0 + t_1, \tag{3.13}$$

получим следующее уравнение для нахождения времени движения на первом этапе $t_1(x_0, y_0, z_0)$:

$$z_0 + t_1 = \ln \frac{3 - C_0 + \sqrt{D_0}}{(C_0 + 5 + \sqrt{D_0})\Big((y_0 + 1)e^{t_1} + 2\Big)}.$$

Здесь

$$C_0 = \Big((x_0 + 1)e^{-t_1} - 2\Big)\Big((y_0 - 1)e^{t_1} + 2\Big), \quad D_0 = (C_0 + 1)(C_0 + 9).$$

Время движения на втором и третьем этапах как функция начального состояния (x_0, y_0, z_0) находится путем подстановки в выражение (2.21) величин x_1, y_1, вычисляемых по формулам (3.13) .

Время движения для случая $z_0 < f(x_0, y_0)$ может быть рассчитано с учетом симметрии системы в соответствии с замечанием 4.

4. Заключение. С использованием принципа максимума Понтрягина решена задача синтеза оптимального по быстродействию управления линейной системой третьего порядка с одним положительным собственным числом. Система описывает в линейном приближении динамику перевернутого маятника, управляемого с помощью активного динамического гасителя. Особенность рассмотренной задачи состоит в том, что третья фазовая переменная не входит в первые два уравнения движения. Это обстоятельство позволяет сначала решить задачу оптимального управления для редуцированной системы, состоящей из первых двух уравнений, а затем применить полученные результаты для решения полной задачи. В явной форме построены множества, на которых происходит переключение управления, описано поведение траекторий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2014. 229 с.
2. *Лавровский Э.К.* О быстродействии в задаче управления вертикальным положением маятника с помощью перемещения его основания // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 42–51.

3. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 3. С. 51-62.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
5. *Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.* Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во мехмата МГУ, 2004. 168 с.
6. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
7. *Каюмов О.Р.* Оптимальное по быстродействию перемещение платформы с осцилляторами // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 699-718.
8. *Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A.* Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 396 p.
9. *Ананьевский И.М.* Управление линейной системой четвертого порядка при смешанных ограничениях // ПММ. 2000. Т. 64. Вып 6. С. 901–908.
10. *Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.* Topics in Mathematical System Theory. N.Y.: McGraw-Hill, 1969. 358 p.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 26–40

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.9

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМИ ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ[1]

© 2024 г. С. В. Борзунов[1], П. А. Мелешенко[1], В. А. Нестеров[2], М. Е. Семенов[1,3,4,*], А. М. Соловьев[5]

[1] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», Воронеж, Россия
[2] ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия
[3] ФГБОУ ВО Воронежский государственный технический ун-т, Воронеж, Россия
[4] ФГБУН Федеральный исследовательский центр «Единая геофизическая служба Российской академии наук», Обнинск, Россия
[5] АО «Концерн «Созвездие», Воронеж, Россия
**e-mail: mkl150@mail.ru*

Поступила в редакцию 19.04.2022 г.
После доработки 30.01.2024 г.
Принята к публикации 13.05.2024 г.

Рассматривается неклассическая задача оптимального управления, в которой динамика объекта описывается системой дифференциально-операторных уравнений с гистерезисным преобразователем в правой части. Гистерезисная зависимость формализуется посредством аналога преобразователя Прейзаха с инвертированными пороговыми числами, что отражает нелинейную и неоднозначную зависимость покупательского спроса от цены товаров. Это позволяет учитывать "историю" потребительских отношений на конечном временном интервале. Поставлена и решена задача об оптимальном производстве, хранении и сбыте продукции на монотоварном рынке в условиях гистерезисной функции спроса. Указанная задача решалась с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. Описаны условия, при которых решение единственно. Демонстрируются результаты вычислительных экспериментов, в рамках которых идентифицируются оптимальные управляющие воздействия для модельного случая.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума, гистерезисная модель спроса, преобразователь Прейзаха

DOI: 10.31857/S0002338824030032 **EDN:** UQMJKW

A NON-CLASSICAL OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH OPERATOR HYSTERESIS NONLINEARITIES

S. V. Borzunov[a], P. A. Meleshenko[a], V. A. Nesterov[b], M. E. Semenov[a, c, d, *], A. M. Solovyov[e]

[a] Voronezh State University, Voronezh, Russia
[b] Moscow Aviation Institute (National Research University),
[c] Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia
[d] Federal State Budgetary Educational Institution Federal Research Center "Geophysical Survey of Russia Academy of Sciences, Obninsk, Russia
[e] JSC Concern Sozvezdie, Voronezh, Russia
**e-mail: mkl150@mail.ru*

This article considers a non-classical optimal control problem, in which the dynamics of an object is described by a system of differential operator equations with a hysteresis converter on the right side. The hysteresis dependence is formalized using an analogue of the Preisach converter with inverted threshold numbers, which reflects the nonlinear and multivalued dependence of consumer demand on the price of goods. This allows to take into account the "history" of consumer relations over a finite time interval. The problem of optimal

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-29-00696).

production, storage and sales of products on a mono-commodity market under conditions of a hysteresis demand function has been set and solved. The conditions of solvability of the problem under the conditions of applicability of the maximum principle of L. S. Pontryagin are given. The conditions under which the solution is unique are given. The article also presents the results of computational experiments in which optimal control actions for the model case are identified.

Keywords: optimal control, maximum principle, hysteresis demand model, Preisach operator

Введение. Хорошо известно, что в задачах управления важную роль играет корректность математической модели управляемого объекта или процесса, подразумевающая в том числе структурную устойчивость модели по отношению к малым изменениям параметров. Это свойство особенно важно в ситуации, когда малые изменения соответствующих параметров подразумеваются физической постановкой задачи. Более того, в этом случае предполагается естественным моделировать параметры в рамках стохастического подхода.

Как хорошо известно, важным инструментом теории оптимального управления является принцип максимума Л.С. Понтрягина [1]. При этом особый интерес представляют неклассические задачи оптимального управления, в том числе и с операторными (гистерезисными) нелинейностями. Отметим, что публикаций, посвященных этим задачам, совсем немного [2–5].

Как известно, гистерезис возникает в самых различных областях физики, химии, экономики, биологии. Он имеет место, если состояние системы в некоторый момент времени определяется внешними условиями, а также динамикой входного воздействия в предшествующие моменты времени. Следует подчеркнуть, что описание динамики таких систем существенно затруднено за счет сложности фазового пространства, а также недифференцируемости операторов, выступающих моделями гистерезисных преобразователей. Отметим несколько работ, связанных с оптимизацией в ситуации, когда отдельные составляющие технических систем демонстрировали гистерезисные свойства: [6–9]. Из недавних результатов отметим также работы[10–13]. Модели гистерезиса условно можно разбить на два класса: феноменологические и конструктивные, из которых выделим модель Прейзаха [14, 15]. Эта модель — одна из самых «популярных» и в настоящее время интенсивно развивается, в том числе и на случай стохастических возмущений параметров элементарных носителей гистерезисных свойств – неидеальных реле [16]. В работе [17] исследуется отклик нелинейной системы на стохастическое внешнее воздействие, а в работе [18] проведена модификация указанной модели на случай пороговых чисел, характеризуемых не детерминированными, а случайными величинами.

Еще один интересный способ использования гистерезисных нелинейностей в задачах управления предложен в работе [19]. Здесь гистерезисное слагаемое вводится как решение вариационного неравенства эволюции на замкнутом подмножестве многомерного вещественного арифметического пространства. В этом случае существуют оптимальные решения, а также необходимые условия оптимальности первого порядка. В частности, при определенных предположениях о регулярности детально описано поведение решений сопряженной системы.

В работах [20–24] было предложено дополнить динамические модели социально-экономических процессов, включив в них гистерезисные звенья. Так, в работе [23] дается исчерпывающее обоснование введения гистерезисных слагаемых в динамические модели, возникающих как обобщение, суммирование индивидуального вклада каждого участника товарно-рыночных отношений. Влияние гистерезисных нелинейностей на уровень безработицы изучается в работе [25].

В настоящей статье рассматривается задача оптимального производства, хранения и сбыта продукции в условиях гистерезисного характера функции спроса, а именно для функции спроса, определенной с помощью преобразователя Прейзаха с инвертированными индивидуальными реле.

1. Неидеальное реле. Для описания нелинейностей гистерезисного типа введем функциональные операторы специального вида. Такой подход к заданию гистерезисного поведения систем был предложен и в дальнейшем широко развит М.А. Красносельским и А.В. Покровским [26]. Модели гистерезисных операторов определены на пространстве непрерывных функций, динамика таких преобразователей описывается соотношениями “вход–состояние” и “состояние–выход”.

Обозначим через $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$ гистерезисный преобразователь, отвечающий неидеальному реле с пороговыми числами α и β, где $x_0 \in \{0, 1\}$ – начальное состояние преобразователя, – начальный момент времени. Пространством состояний неидеального реле является двухэлементное множество, входом системы — непрерывная при $[t_0,t]$ функция $u(t)$, выходом – ступенчатая функция, определяемая операторным соотношением:

$$x(t) = R[\alpha,\beta,x_0,t_0]u(t). \tag{1.1}$$

При этом начальное состояние x_0 преобразователя должно удовлетворять условию:

$$x_0 = \begin{cases} 0, \text{ если } u(0) \le \alpha, \\ 1, \text{ если } u(0) \ge \beta. \end{cases} \tag{1.2}$$

В случае выполнения неравенств величина может принимать любое значение из множества $\{0,1\}$. Значения выхода при непрерывном входе для при каждом $t = \tau$ определяются согласно правилу:

$$R[\alpha,\beta,x_0,t_0]u(\tau) = \begin{cases} x_0, \text{ если } \forall t \in [t_0,\tau] : [\alpha < u(t) < \beta], \\ 1, \text{ если } \exists t' \in [t_0,\tau) : [u(t') \ge \beta] \wedge \{\forall t \in [t',\tau] : [u(t) > \alpha]\}, \\ 0, \text{ если } \exists t' \in [t_0,\tau) : [u(t') \le \alpha] \wedge \{\forall t \in [t',\tau] : [u(t) < \beta]\}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Таким образом, выход принимает постоянное значение на $[t_1, t_2]$, если либо $x(t_1) = 0$ и $u(t) < \beta$ при $t \in [t_1, t_2]$, либо $x(t_1) = 1$ и $u(t) > \alpha$ при $t \in [t_1, t_2]$. Будем говорить, что реле включено, если выход равен единице, и что реле находится в выключенном состоянии в противном случае. Детальное описание преобразователя неидеального реле, а также его свойств приведено в работе [26].

Преобразователь Прейзаха является континуальным аналогом семейства неидеальных реле, соединенных параллельно.

Обозначим через Ψ множество ограниченных функций, заданных на $[0,\infty]$ и удовлетворяющих условию Липшица с константой, равной единице. Множество Ω_Ψ функций $z(\alpha,\beta)$, где $\alpha < \beta$, определенных с помощью правила:

$$z(\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha + \beta > \psi(\beta - \alpha), \\ 1, \text{ если } \alpha + \beta \le \psi(\beta - \alpha), \end{cases}$$

где $\psi \in \Psi$, называется пространством состояний преобразователя Прейзаха. Другими словами, $z(\alpha,\beta)$ – характеристическая функция подмножества полуплоскости $\alpha < \beta$. Один из типичных элементов этого пространства изображен на рис. 1.

Соотношение “вход–переменное состояние” преобразователя Прейзаха задается оператором Γ:

$$z(\alpha,\beta,t) = \Gamma[z_0(\gamma)]u(t) = R[z_0(\alpha,\beta),\alpha(\gamma),\beta(\gamma)]u(t),$$

где $\gamma \in \{(\alpha,\beta), \alpha < \beta\}$.

Выходом преобразователя Прейзаха является мера μ множества тех точек (α,β) указанной полуплоскости, для которых состояние равно единице:

$$x(t) = \int\limits_{\alpha<\beta} z(\alpha,\beta,t)d\alpha d\beta = \mu\left(\left\{(\alpha,\beta) : R[z_0(\alpha,\beta),\alpha,\beta]u(t) = 1\right\}\right). \tag{1.4}$$

2. Моделирование функции спроса. Как уже отмечалось во Введении, существует достаточно много моделей, описывающих с различной детализацией отношение потребителей к определенному товару (группе товаров). При этом предыстория не всегда явным образом учитывается на модельном уровне. В этой связи отметим работы [20, 25, 27], где убедительно доказана

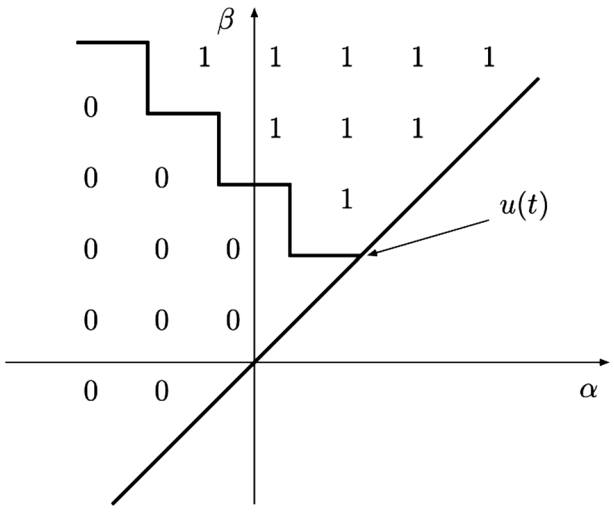


Рис. 1. Пример элемента пространства состояний набора неидеальных реле.

необходимость учета неоднозначности экономических процессов. В настоящей статье предлагается модель потребительского спроса, по определению содержащая в себе зависимость текущего состояния от всей предыстории.

Пусть темп продаж $P(t)$ (т.е. количество товара, проданного за единицу времени) зависит в каждый фиксированный момент времени только от цены этого товара и ее значений в предыдущие моменты времени. Заметим, что отношение потребителя к товару может меняться со временем. Отношение индивидуального потребителя к товару определим функцией $\mathrm{R}[c(t)]$, принимающей значения из множества $\{0,1\}$ в соответствии с правилом:

$$\mathrm{R}[c(\tau)] = \begin{cases} x_0, \text{ если } \forall t \in [t_0,\tau] : [\alpha < u(t) < \beta], \\ 0, \text{ если } \exists t' \in [t_0,\tau) : [u(t') \geq \beta] \wedge \{\forall t \in [t',\tau] : [u(t) > \alpha]\}, \\ 1, \text{ если } \exists t' \in [t_0,\tau) : [u(t') \leq \alpha] \wedge \{\forall t \in [t',\tau] : [u(t) < \beta]\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Согласно (2.1), функция $\mathrm{R}[c(t)]$ принимает значение, равное единице, если потребитель в момент времени t приобретает товар, и нуль – в противном случае. Будем трактовать $\mathrm{R}[c(t)]$ как выход некоторого преобразователя, аналогичного неидеальному реле с инверсией роли пороговых чисел α, β, на вход которого подается сигнал $c(t)$ при $t \in [0,T]$, где R_0 – начальное состояние преобразователя.

Схематично взаимосвязь между входом и выходом преобразователя $R[\alpha,\beta,R_0]$ представлена на рис. 2. Обратим внимание на обратное направление "петли гистерезиса" (а именно по часовой стрелке) по сравнению с классическим определением неидеального реле.

Обозначим через γ_i темп покупок i-го потребителя, $i = 1, \ldots, n$. Для системы из n потребителей функция продаж будет иметь вид

$$\mathrm{P}(c(t)) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i R[\alpha_i,\beta_i,R_{0,(i)}]c(t). \tag{2.2}$$

Практически значимым является случай достаточно большого количества индивидуальных потребителей, $n \to \infty$ при выполнении условия $\gamma_i \to \infty$ малости вклада одного участника товарно-рыночных отношений. Функция продаж в этом случае должна быть равна континуальному пределу суммы (2.2):

$$\mathrm{P}(c(t)) = \int\limits_{\alpha<\beta} z(\alpha\beta,t)\,d\alpha\,db, \tag{2.3}$$

где введены обозначения

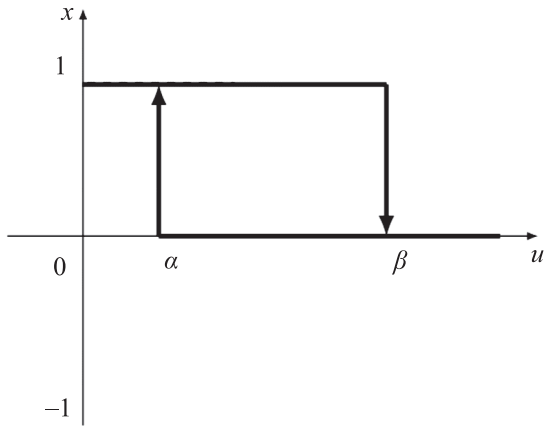


Рис. 2. Взаимосвязь между входом и выходом преобразователя $R[\alpha,\beta,x_0,t_0]$ с пороговыми числами α и β.

$$z(\alpha,\beta,t) = \Gamma[z_0(\alpha,\beta)]c(t) = R[z(\alpha,\beta),\alpha(\gamma),\beta(\gamma)]c(t) \tag{2.4}$$

и $\gamma \in \{(\alpha,\beta)\colon \alpha < \beta\}$.

Обратим внимание, что преобразователь (2.3) аналогичен преобразователю Прейзаха [26, 28] с инверсией нулей и единиц.

3. Модель производственной деятельности. Ниже предполагается, что носитель меры μ сосредоточен в треугольнике полуплоскости $\beta > \alpha$, выделяемом неравенствами $\alpha > 0$, $\beta < \alpha$.

В простейшем случае задача максимизации прибыли в текущий момент времени формулируется следующим образом: определить функцию цены $c^*(t)$ на промежутке времени $[0, T]$, такую, что в момент $t = t_1$ прибыль

$$c(t)\mathrm{P}(t)\big|_{t_1} \to \max. \tag{3.1}$$

Будем считать, что $\forall t \in [0,T]$: $0 < c(t) \le a$, т.е. цена товара неотрицательна и ограничена сверху величиной a. Покажем, что решение этой задачи достигается с помощью следующей функции:

$$c^*(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{\tau}(\tau - t), \text{ если } 0 \le t < \tau, \\ \dfrac{a}{2(t_1 - \tau)}(t - \tau), \text{ если } \tau \le t < t_1. \end{cases} \tag{3.2}$$

График функции приведен на рис. 3, *а*.

В самом деле, в момент времени $t = \tau$ цена товара достигла максимального значения $c(\tau) = a$, все индивидуальные реле выключены, что соответствует отсутствию спроса. На промежутке $[\tau, t_1]$ имеет место монотонное убывание цены, потребители проявляют спрос $\mathrm{P}(c(t)) = (a^2 - c^2)/2$ (на рис. 3, б сплошной заливкой цветом выделена область на плоскости (α,β), где элементарные реле находятся во включенном состоянии). Легко видеть, что при $t = t_1$ достигается максимальное значение прибыли, поскольку производная

$$\frac{d(c\mathrm{P}(c))}{dc} = \frac{d}{dc}\left(c\left(\frac{a^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(a^2 - 4c^2) \tag{3.3}$$

равна нулю при $c = a/2$, а вторая производная $d^2(c\mathrm{P}(c))/dc^2 = -4c < 0$, поскольку цена товара неотрицательна.

Таким образом, для очень простой экономической модели производства максимизация прибыли достигается за счет понижения цены до минимального значения, а затем моно-

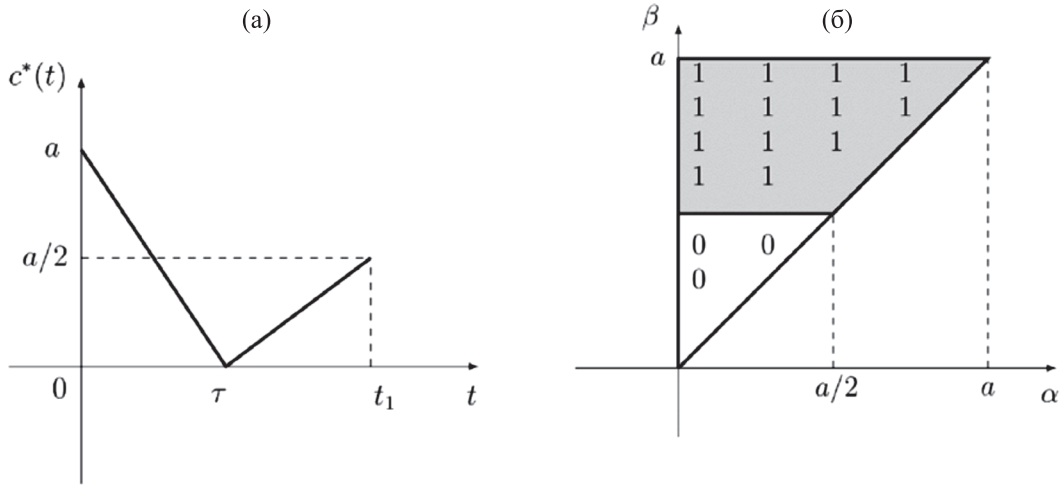


Рис. 3. а – график функции $c^*(t)$, демонстрирующей максимизацию прибыли $c(t)\mathrm{P}(t)$ в момент времени $t_1>0$; б – состояние оператора Прейзаха в момент времени $t=t_1$.

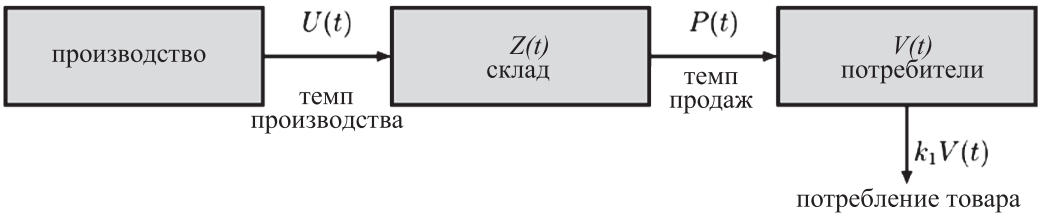


Рис. 4. Модель производства и потребления товара.

тонного увеличения ее до значения $a/2$. Тем не менее детальный анализ более реалистичной модели производственной деятельности с необходимостью требует привлечения аппарата методов оптимального управления [1, 29].

Рассмотрим задачу оптимального планирования производственной деятельности с учетом гистерезисной функции спроса. Введем следующие обозначения (см. рис. 4): $Z(t)$ – количество товара на складе у производителя, $V(t)$ – количество товара у потребителя, $U(t)$ – темп производства, т.е. количество товара, поступающего на склад в единицу времени, $P(t)$ – темп продаж, т.е. количество проданного за единицу времени товара, k_1 – коэффициент потребления, k_2 – коэффициент, характеризующий затраты на хранение единицы товара, $c(t)$ – цена единицы товара.

Предположим, что себестоимость производства товара равна единице. Запишем интегро-дифференциальную систему уравнений, моделирующую задачу о производстве, хранении и сбыте товара:

$$\dot{Z} = U - P, \tag{3.4}$$

$$\dot{V} = P - k_1V, \tag{3.5}$$

$$P(t) = Z(t) \int\limits_{\alpha<\beta} z(\alpha,\beta,t)\,d\alpha\,d\beta, \tag{3.6}$$

$$z(\alpha,\beta,t) = \Gamma[z_0(\alpha,\beta)]c(t), \tag{3.7}$$

$$Z(0) = V(0) = 0. \tag{3.8}$$

Задачу оптимизации производственной деятельности будем решать при следующих дополнительных предположениях:

1) $0 \le U(t) \le U_0$ – существование порога U_0 – максимально возможного темпа производства;

2) $0 < c(t) \le a$ – цена товара неотрицательна и ограничена величиной a;

3) себестоимость производства товара равна единице (процедурой переопределения единицы измерения количества товара себестоимость можно устанавливать произвольно, но, разумеется, равной положительному числу).

Рассмотрим функционал, равный общему доходу за конечное время T, взятому с обратным знаком [30–32]:

$$\mathrm{I}(T) = \int_0^T \left[-c(t)P(t) + U(t) + k_2 Z(t)\right] dt. \tag{3.9}$$

Цель настоящего раздела — нахождение условий, при которых достигается минимум функционала $\mathrm{I}(T)$.

Правые части системы (3.4)–(3.8) и ядро функционала (3.9) являются дифференцируемыми по фазовым переменным, управляющие воздействия — темп производства и цена, транслируемая в систему посредством гистерезисного оператора (непрерывного в пространстве непрерывных функций на всяком конечном временном отрезке), принадлежат пространству кусочно-непрерывных функций, что отвечает достаточным условиям применимости принципа максимума Л.С. Понтрягина [1, 29]. Согласно этому принципу, минимум функционала (3.9) достигается при условии максимума функции $H(p_1, p_2, Z, V, P, U, c)$, называемой гамильтонианом системы (3.4)–(3.8):

$$\begin{aligned} H(p_1, p_2, Z, V, P, U, c) &= p_1(U - P) + p_2(P - k_1 V) - (-cP + U + k_2 Z) = \\ &= (p_1 - 1)U + (p_2 - p_1 + c)P - k_1 p_2 V - k_2 Z. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Поскольку функция H является линейной по аргументу U, то $\max H(p_1, p_2, Z, V, P, U, c) = H(p_1, p_2, Z, V, P, U^*, c^*)$ достигается при

$$U^*(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } p_1(t) < 1, \\ U_0, \text{ если } p_1(t) > 1, \\ \forall U, \text{ если } p_1(t) = 1. \end{cases} \tag{3.11}$$

Запишем условия, при которых слагаемое $A(c) \equiv (p_2 - p_1 + c)P(c)$ дает экстремальный вклад в гамильтониан (3.10).

1. Пусть выполняется условие $p_2 - p_1 + c > 0$. Тогда $A \to \max$ при $P = (a^2 - c(t)^2)/2$ (см. рис. 5, а):

$$\frac{dA(c)}{dc} = \frac{3}{2}c^2 - c(p_1 - p_2) - \frac{1}{2}a^2. \tag{3.12}$$

Производная равна нулю при

$$c_{\pm} = \frac{1}{3}\left[p_1 - p_2 \pm \sqrt{(p_2 - p_1)^2 + 3a^2}\right]. \tag{3.13}$$

В рамках модели цена должна принадлежать промежутку $(0,a]$, тогда следует оставить только положительный корень $c_+ = (p_1 - p_2 + \sqrt{(p_2 - p_1)^2 + 3a^2})/3$. Заметим, что при всех возможных значениях этот корень принадлежит промежутку $(0,a]$ и соответствует максимуму функции $A(c_+)$, поскольку $d^2A(c)/dc^2|_{c=c_+} < 0$.

2. Пусть имеет место неравенство $p_2 - p_1 + c < 0$. Следовательно, как видно из рис. 5, б, $A \to \max$ при $P = (a - c)^2/2$:

$$A(t) = (p_2 - p_1 + c)\frac{(a - c(t))^2}{2}, \tag{3.14}$$

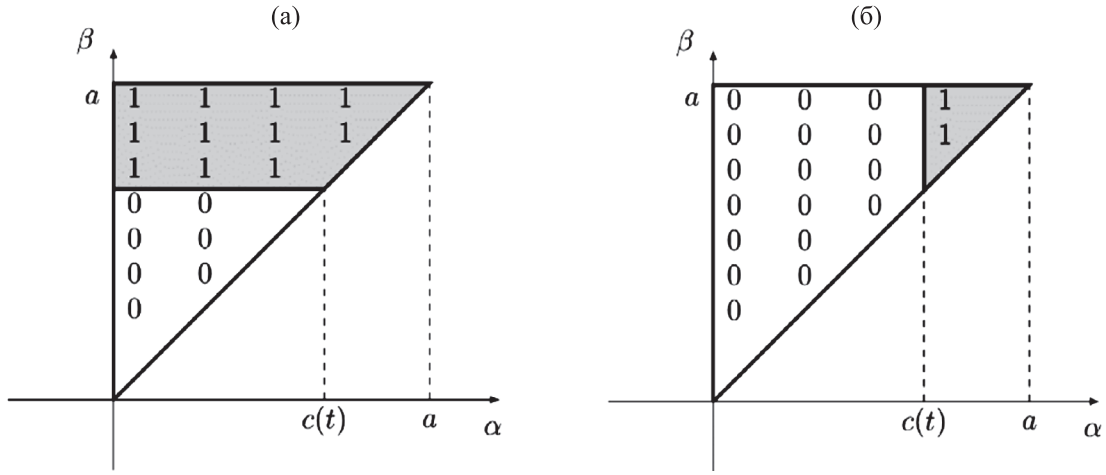


Рис. 5. а – экстремальное значение величины $A(c)$ при условии $p_2 - p_1 + c > 0$; б – экстремальное значение величины $A(c)$ при условии $p_2 - p_1 + c < 0$.

$$\frac{dA(c)}{dc} = \frac{1}{2}(a-c)^2 - (a-c)(p_2 - p_1 + c). \tag{3.15}$$

Производная равна нулю при двух значениях цены: если $c = a$ или если

$$c = \frac{1}{3}\left[a - 2(p_2 - p_1)\right]. \tag{3.16}$$

В итоге максимум гамильтониана достигается при некотором $c^* \in [0,a]$, удовлетворяющем условию:

$$c^* = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\left[p_1 - p_2 + \sqrt{(p_2 - p_1)^2 + 3a^2}\right], \text{если } p_2 - p_1 + c^* > 0, \\ \dfrac{1}{3}\left[a - 2(p_2 - p_1)\right], \text{если } p_2 - p_1 + c^* < 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

С учетом найденного значения c^* получаем

$$\max_{\{p_1,p_2,Z,V,P,U,c\}} H = H^*(p_1,p_2,Z,V)\Big|_{c(t)=c^*} = (p_1 - 1)U^* + (p_2 - p_1 + c^*)P - k_1 p_2 V - k_2 Z. \tag{3.18}$$

Как следует из принципа максимума Понтрягина, неизвестные функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial Z} = k_2 - (p_2 - p_1 + c^*) \int\limits_{\alpha<\beta} z(\alpha,\beta,t)\,d\alpha\,d\beta, \tag{3.19}$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial V} = k_1 p_2(t) \tag{3.20}$$

при $t \in [0,T]$ с граничными условиями $p_1(T) = p_2(T) = 0$.

Легко видеть, что для функции $p_2(t)$ решение является тривиальным: $p_2(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0,T]$. Таким образом, динамика интегродифференциальной системы (3.4)–(3.8) определяется эволюцией во времени функции $p_1(t)$, которая в свою очередь существенно зависит от значений выхода гистерезисного преобразователя.

Уравнение относительно принимает вид

$$\dot{p}_1(t) = k_2 - (c^* - p_1) \int\limits_{\alpha<\beta} z(\alpha,\beta,t)\,d\alpha\,d\beta. \tag{3.21}$$

Введем предположение, что расходы на хранение товара малы по сравнению с затратами на его производство и доходами от продаж: $k_2 = 0$. В таком случае зависимость от времени параметра p_1 на временном интервале $[0, T]$ определяется дифференциальным уравнением:

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = (p_1(t) - c^*(t)) \int\limits_{\alpha<\beta} z(\alpha,\beta,t)\,d\alpha\,d\beta, \\ p_1(T) = 0, \end{cases} \tag{3.22}$$

где

$$c^* = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(p_1 + \sqrt{p_1 + 3a^2}\right), \text{если } p_1 < c^*, \\ \frac{1}{3}\left(a + 2p_1\right), \text{если } p_1 > c^*. \end{cases} \tag{3.23}$$

Согласно (3.11), начальное условие при $t = 0$ должно удовлетворять неравенству $p_1(0) \geq 1$. В самом деле, в противном случае имело бы место равенство $U^*(0) = 0$ и по смыслу модели производство товара не включалось. Поскольку начало отсчета времени в рассматриваемой модели отвечает моменту запуска производственного процесса, то в момент начала производства справедливо неравенство $p_1(0) \geq 1$.

Полученное неравенство в свою очередь накладывает важное ограничение на соотношение (3.23): на промежутке времени реализуется только случай $p_1 < c^*$. Докажем это.

Предположим противное: $\exists t' \in [0,T]$: $p_1(t') > c^*(t')$. Тогда в этой точке $c^*(t') = \left(a + 2p_1\right)/3$ или

$$\frac{1}{3}\left(a - c(t')\right) + \frac{2}{3}\left(p_1(t') - c(t')\right) = 0. \tag{3.24}$$

В (3.24) второе слагаемое положительно, следовательно, первое слагаемое $(a - c(t'))/3 < 0$, что противоречит смыслу цены $c(t)$ в рассматриваемой модели, так как цена на всем диапазоне наблюдения ограничена: $\forall t \in [0,T] : 0 < c(t) \leq a$. Отсюда делаем вывод: в рамках нашей модели в (3.23) реализуется только первое равенство, а именно:

$$c^* = \frac{1}{3}\left(p_1 + \sqrt{p_1 + 3a^2}\right), \tag{3.25}$$

что после подстановки в (3.22) приводит к

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = \frac{1}{3}\left(2p_1(t) - \sqrt{p_1^2(t) + 3a^2}\right) \int\limits_{\alpha<\beta} z(\alpha,\beta,t)\,d\alpha\,d\beta, \\ p_1(T) = 0, \\ 1 < p_1(0) < a. \end{cases} \tag{3.26}$$

В результате получаем следующий вывод: в модели производственного процесса (3.4)-(3.8) для любого конечного момента времени T на промежутке $[0,T]$ существует единственное решение $c^*(t)$ системы (3.26), которое обладает свойством строгой монотонности на $[0, T]$.

В самом деле, легко видеть, что $\left(\forall p_1 < a\right) : 2p_1 - \sqrt{p_1^2(t) + 3a^2} < 0$. Это позволяет сделать следующий вывод: экстремальное значение функционала $\mathrm{I}(T)$ реализует функция $p(t)$, для которой $\dot{p}_1(t) < 0$ и $p(T) = 0$. Ясно, что такая функция строго монотонно убывает от некоторого начального значения $p_1(0) < a$ до нуля. Из (3.23) непосредственно следует, что значению p_1 на правой границе отвечает цена в конечный момент времени: $c(T) = a/\sqrt{3}$.

Таким образом, доказано существование и монотонность в строгом смысле функции $p_1(t)$ на $[0,T]$. Далее, согласно (3.25), цена является строго монотонной функцией от $p_1(t)$, что и до-

казывает существование c^* и ее монотонность в строгом смысле. Единственность c^* вытекает из единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения (3.26) [33, 34]. Следовательно, для любого конечного момента времени существует единственное решение $c^*(t)$ системы (3.26).

4. Численные результаты. Обратим внимание, что система (3.26) имеет граничное условие, соответствующее окончанию времени моделирования T. Таким образом, значение $p_1(0)$ неизвестно. К сожалению, численно решить систему (3.26) с помощью обратного хода по оси времени не представляется возможным в силу несимметричности преобразователя Прейзаха по параметру t.

Тем не менее удовлетворить граничному условию при $t = T$ можно с помощью следующего приема: выберем в соответствии с (3.26) начальное значение $m \equiv p_1(0) \in [1, a]$ и решим систему. Рассмотрим проекцию оператора сдвига по траектории $U^T : p^{(0)} \equiv p_1(0) \to p_1(T)$ (определение и свойства таких операторов детально представлены в работе [35]). Поскольку $\exists p^{(-)} : (U^T p^{(-)} < 0)$ и $\exists p^{(+)} : (U^T p^{(+)} > 0)$, то вследствие непрерывности отображения U^T $\exists p^{(*)} : (U^T p^{(*)} = 0)$ [33, 34].

В силу монотонности $p_1(t)$ на всем анализируемом промежутке с помощью отдельной процедуры двоичного поиска (или, как говорят, методом дихотомии) найдем единственный корень уравнения:

$$p_1(T)\big|_m = 0. \tag{4.1}$$

Соответствующий корень m определяет начальное значение исследуемой функции в момент $t = 0$, согласованное с правой границей. Как легко видеть, начальное значение $p_1(0)$ зависит от параметров задачи, в частности от состояния преобразователя Прейзаха. Для численных экспериментов выберем следующие значения динамической системы: $a = 10$, $U_0 = 1$, $k_1 = 1.0$, $T \in \{10, 50\}$.

На рис. 6, 7 представлены начальное состояние гистерезисного преобразователя, отвечающее величине спроса в момент времени $t = 0$, и функции $p_1(t)$, $c^*(t)$, $U(t)$, $Z(t)$, $V(t)$ и $P(t)$. На рис. 6 приведены значения параметров динамической системы: $a = 10$, $U_0 = 1$, $T = 15$, $k_1 = 1.0$, $k_2 = 1.0$, на рис. 7 — значения параметров: $a = 10$, $U_0 = 1$, $T = 50$, $k_1 = 1.0$, $k_2 = 0.05$. Количество элементарных гистеронов $N = 840$. Из графиков видно, что $p_1(t)$ в заключительный момент времени обращается в нуль, а $c^*(T)$ принимает предельное значение $a/\sqrt{3}$. Изображены функции $U(t)$ (темп производства), $Z(t)$ (количество товара на складе), $V(t)$ (количество товара у потребителя), $P(t)$ (темп продаж).

Количество элементарных реле в аналоге преобразователя Прейзаха в численных расчетах выбиралось равным $N = 840$. Монотонное уменьшение цены ростом t приводит к монотонному увеличению $\mathrm{P}(c(t))$, в силу конечности N в некоторых точках происходит быстрое изменение $\mathrm{P}(c(t))$ и, как следствие, быстрое изменение $P(t) = Z(t)\mathrm{P}(c(t))$. Указанное поведение $\mathrm{P}(c(t))$ возникает при “активации” очередной строки индивидуальных реле в преобразователе (см. рис. 5, б).

Из рис. 6, 7 видно, что в период производства товара ($\{t: U(t) > 0\}$) количество товара на складе и у потребителей растет, после выключения производства производная функции $Z(t)$ становится отрицательной, а $V(t)$ продолжает расти, но через небольшое время $V(t)$ достигает максимума, после чего начинается монотонное убывание за счет отрицательного вклада потребления товара $k_1 V(t)$ в (3.5).

Введем величину $Q(T) = -\mathrm{I}(T)/T$, отражающую прибыль производителя в единицу времени. Зависимость этой величины от длительности периода продаж представлена на рис. 8. Монотонная зависимость свидетельствует о том, что относительная прибыль растет с увеличением периода активной производственной деятельности.

Начальное состояние гистерезисного преобразователя, изображенное на рис. 3, б, приводит к решению системы (3.4)–(3.8), которому отвечают графики на рис. 9, 10. На рис. 9 представлены значения параметров динамической системы: $a = 10$, $U_0 = 1$, $T = 10$, $k_1 = 1.0$, $k_2 = 0.05$, на рис. 10 — значения параметров динамической системы: $a = 10$, $U_0 = 1$, $T = 50$, $k_1 = 1.0$, $k_2 = 0.05$. Количество элементарных гистеронов $N = 840$. Прибыль производителя в единицу времени в этом случае представлена на рис. 11.

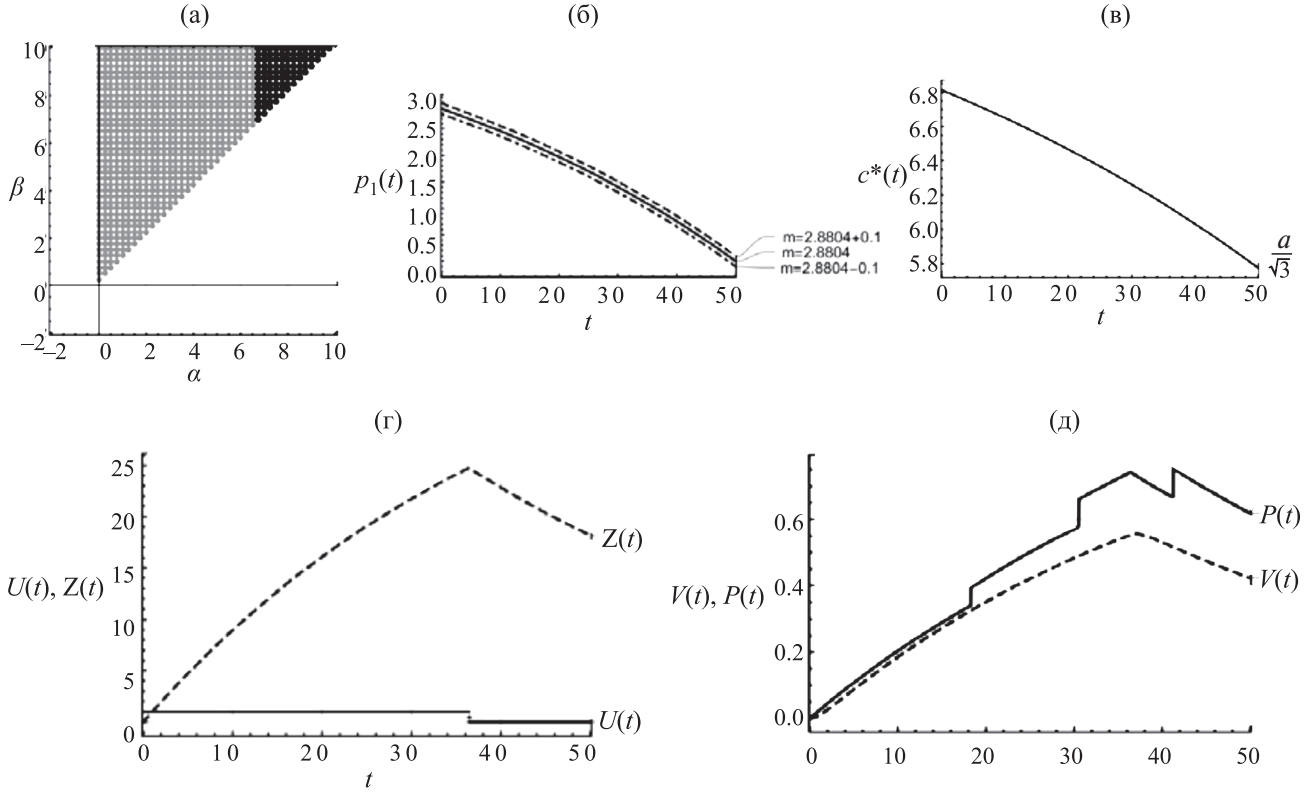


Рис. 6. а – начальное состояние; б – зависимость $p_1(t)$, для наглядности на панели приведены также графики функций $p_1(t) \pm 0.1$; в – функция цены в зависимости от времени; г – функции U, Z в зависимости от времени; д – функции V, P в зависимости от времени.

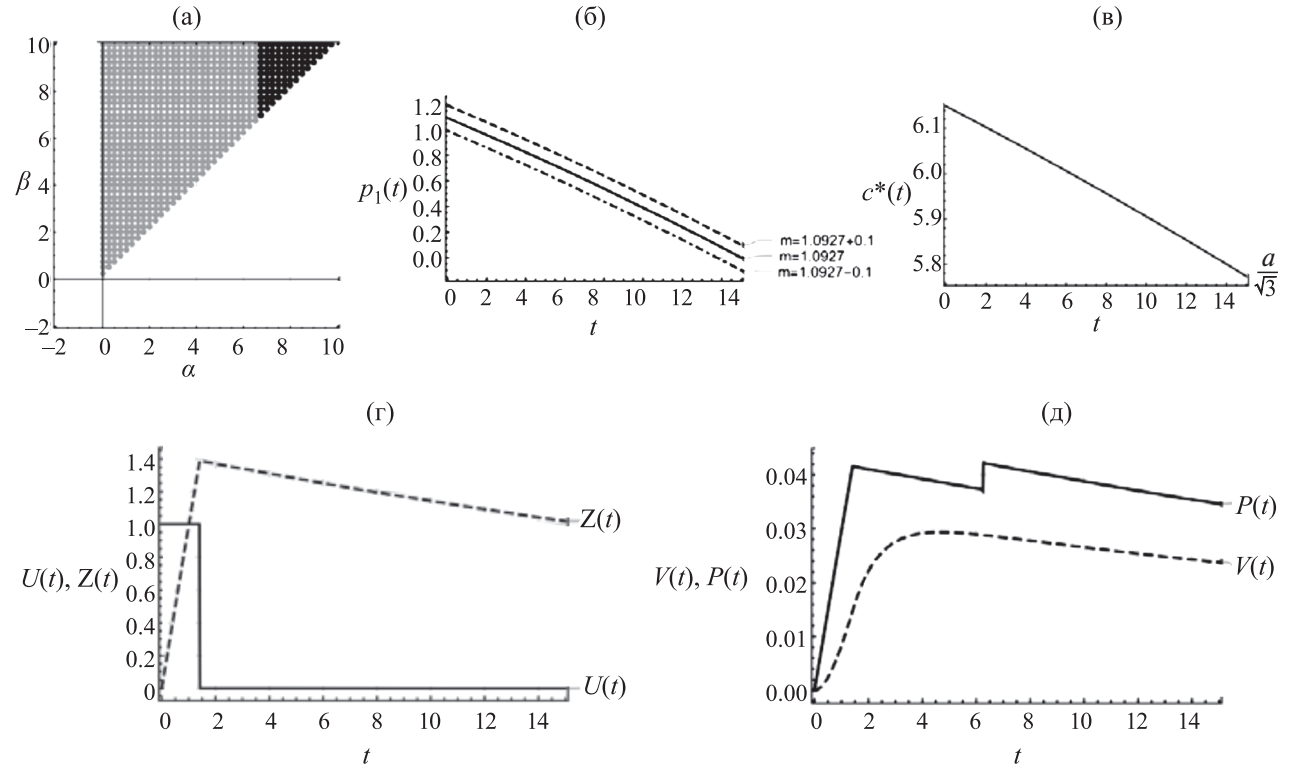


Рис. 7. а – начальное состояние; б – зависимость $p_1(t)$, для наглядности на панели приведены также графики функций $p_1(t) \pm 0.1$; в – функция цены в зависимости от времени; г – функции U, Z в зависимости от времени; д – функции V, P в зависимости от времени.

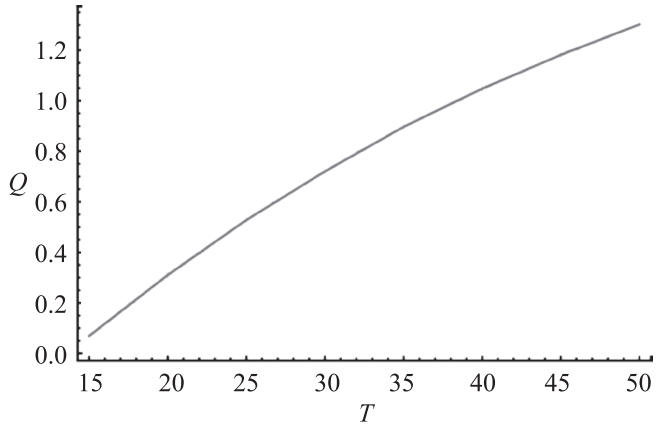


Рис. 8. Зависимость Q от длительности периода продаж T. Начальное состояние выбрано, как на рис. 6, а. Значения параметров динамической системы: $a = 10$, $U_0 = 1$, $k_1 = 1.0$, $k_2 = 0.05$. Количество элементарных гистеронов $N = 840$.

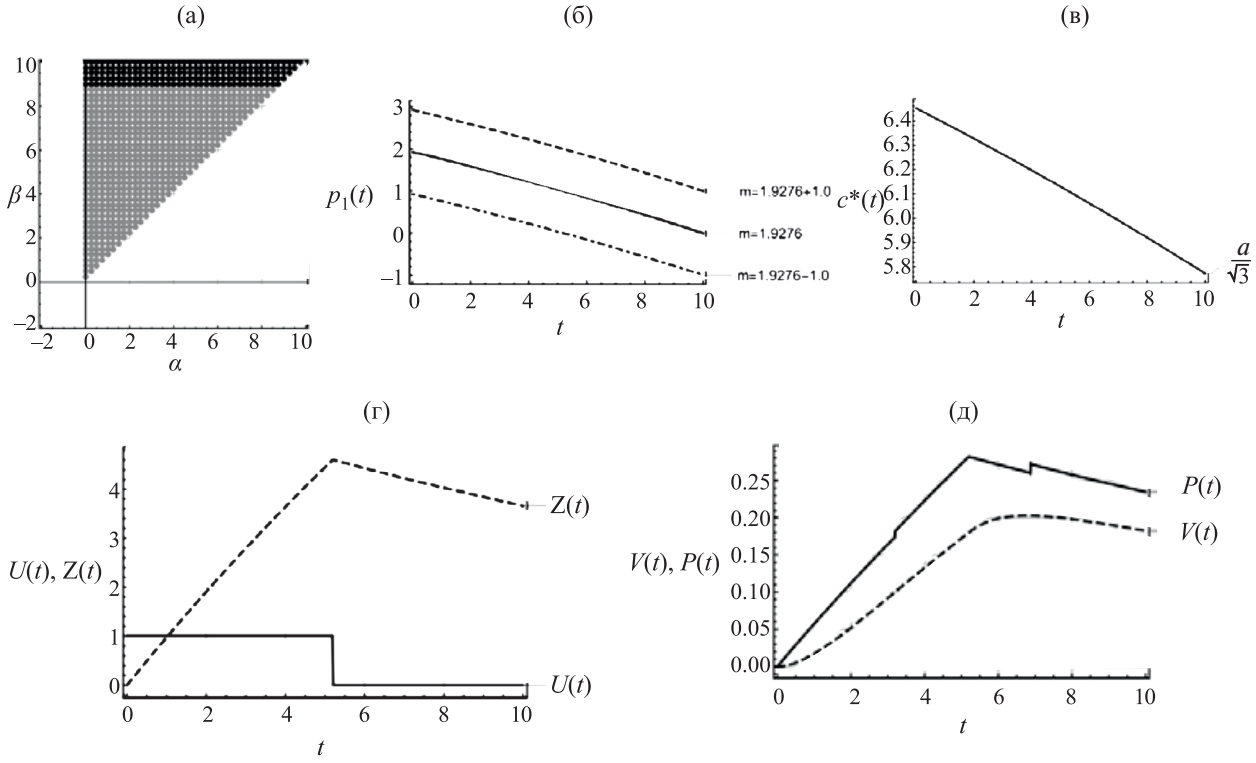


Рис. 9. а – начальное состояние; б – зависимость $p_1(t)$, для наглядности на панели приведены также графики функций $p_1(t) \pm 0.1$; в – функция цены в зависимости от времени; г – функции U, Z в зависимости от времени; д – функции V, P в зависимости от времени.

Условие отрицательности правой части уравнения (3.21) является необходимым условием существование оптимального решения:

$$k_2 - (c^* - p_1) \int\limits_{\alpha<\beta} z(\alpha,\beta,t)d\alpha d\beta < 0. \tag{4.2}$$

Принимая значение гистерезисного слагаемого, согласно рис. 5, б, получаем нелинейное неравенство

$$k_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{p_1^2 + a^2} - 2p_1}{3}\right)\left(a^2 - \frac{1}{9}\left(2p_1^2 + 2p_1\sqrt{p_1^2 + 3a^2} + 3a^2\right)\right) < 0 \tag{4.3}$$

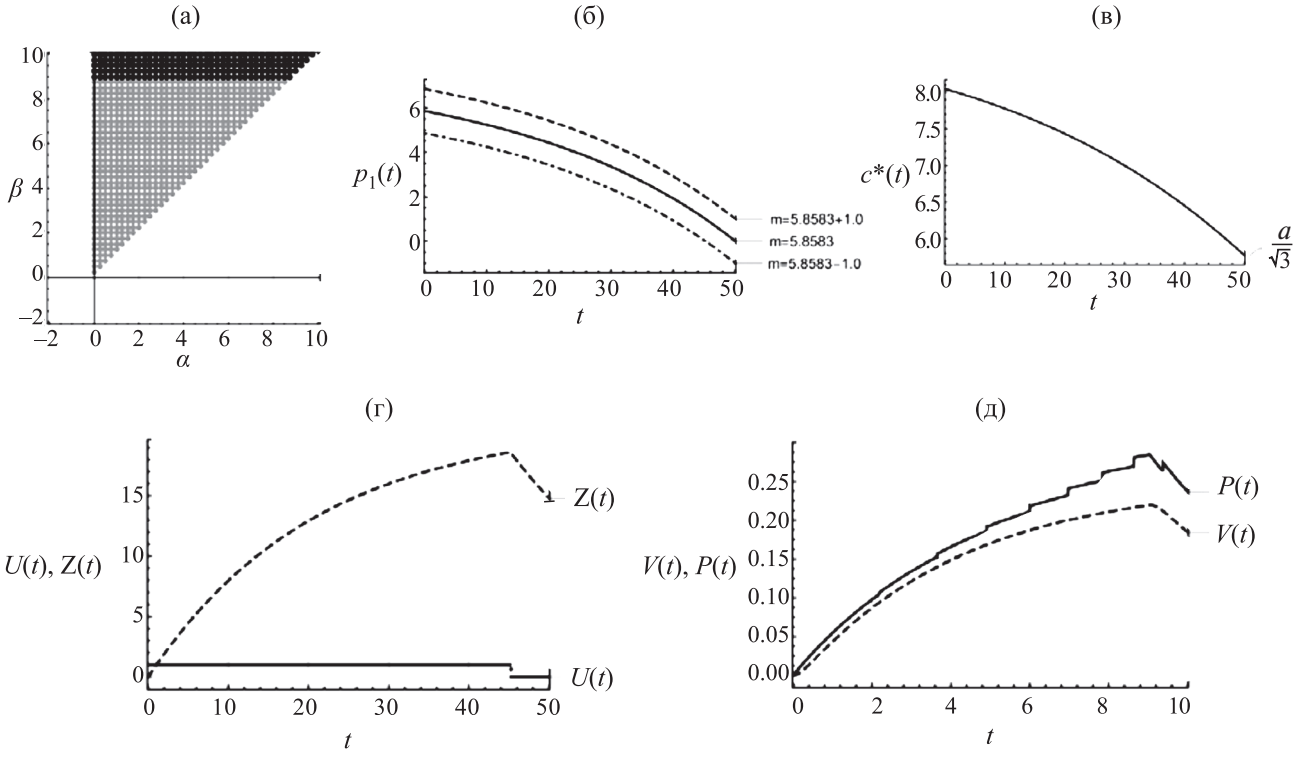


Рис. 10. а – начальное состояние; б – зависимость $p_1(t)$, для наглядности на панели приведены также графики функций $p_1(t) \pm 0.1$; в – функция цены в зависимости от времени; г – функции U, Z в зависимости от времени; д – функции V, P в зависимости от времени.

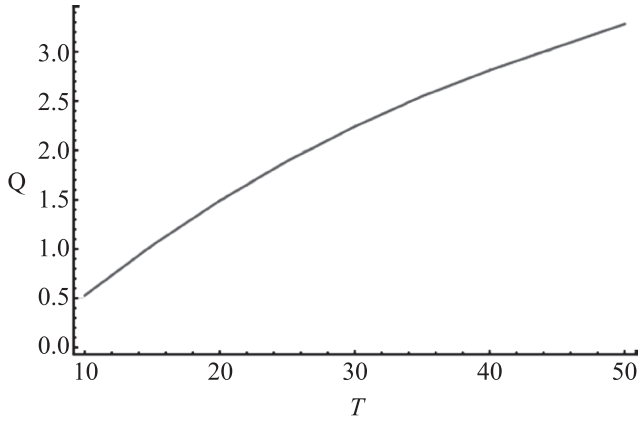


Рис. 11. Зависимость Q от длительности периода продаж T. Начальное состояние выбрано как на рис. 9, а. Значения параметров динамической системы: $a = 10$, $U_0 = 1$, $k_1 = 1.0$, $k_2 = 0.05$. Количество элементарных гистеронов $N = 840$.

относительно переменных p_1 и a. Решение этого неравенства в координатной плоскости (p_1, a) приведено на рис. 12.

Из рис. 12 видно, что оптимальное решение существует в квадрате $[0, a] \times [0, a]$, за исключением “диагональной области”, где $|p_1 - a| < \delta$ для некоторой величины δ (зависящей от k_2). Иными словами, решения рассматриваемой задачи не существует, если начальная цена столь высока, что ни один из потенциальных потребителей (моделируемых неидеальным реле) не в состоянии приобрести товар. Правое пороговое число, соответствующее максимальной цене, при которой товар покупается, оказывается меньше изначальной стоимости товара.

Заключение. Рассмотрена неклассическая задача оптимального управления, в которой динамика объекта описывается системой дифференциально-операторных уравнений с гистерезисным преобразователем в правой части. При этом целевой функционал также содержит

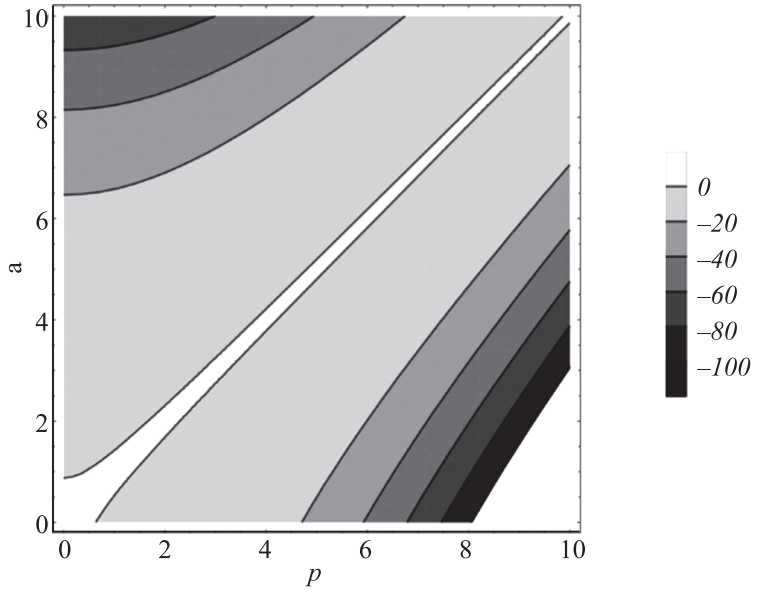


Рис. 12. Решение неравенства (4.3) в координатной плоскости (p_1,a) для $k_2=0.05$.

нелинейность гистерезисной природы. Представлены условия разрешимости поставленной задачи, формализуемые в виде неравенств, накладываемых на начальное состояние объекта управления. Приведенная в работе система является моделью формирования спроса в задаче об оптимальном производстве, сбыте и хранении продукции на монотоварных рынках.

Отношение потребителя к товару моделировалось оператором, аналогичным оператору неидеального реле с инверсией пороговых чисел. Эта модель по своей природе позволяет учитывать "историю" потребительских отношений на конечном временном интервале. Предельным аналогом указанной модели для конечного числа потребителей (когда их число стремится к бесконечности) является преобразователь Прейзаха, пространство состояний которого состоит из характеристических функций полуплоскости $\{(\alpha, \beta)\colon \alpha<\beta\}$ неклассического вида и определяет направление обхода петли гистерезиса по часовой стрелке. Демонстрируются модельные примеры, иллюстрирующие поиск оптимального решения рассматриваемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. М.: Наука, 1983. 392 с.
2. *Bagagiolo F.* Dynamic Programming for Some Optimal Control Problems with Hysteresis // Nonlinear Differential Equations and Applications. 2002. V. 9. P. 149–174.
3. *Bagagiolo F.* Viscosity Solutions for an Optimal Control Problem with Preisach Hysteresis Nonlinearities // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2004. V. 10. P. 271–294.
4. *Belbas S.A., Mayergoyz I.D.* Dynamic Programming for Systems with Hysteresis // Physica B. 2001. V. 306. P. 200–205.
5. *Belbas S.A., Mayergoyz I.D.* Optimal Control of Dynamical Systems with Preisach Hysteresis // Intern. J. Non-Linear Mechanics. 2002. V. 37. P. 1351–1361.
6. *Carboni B., Lacarbonara W., Brewick P.T., Masri S.F.* Dynamical Response Identification of a Class of Nonlinear Hysteretic Systems // J. Intelligent Material Systems and Structures. 2018. V. 29 № 13. P. 2795–2810.
7. *Lacarbonara W., Vestroni F.* Nonclassical Responses of Oscillators with Hysteresis // Nonlinear Dynamics. 2003. V. 32. P. 235–258.
8. *Li Y., Zhou S., Litak G.* Robust Design Optimization of a Nonlinear Monostable Energy Harvester with Uncertainties // Meccanica. 2020. V. 55. P. 1753–1762.
9. *Медведский А.Л., Мелешенко П.А., Нестеров В.А., Решетова О.О., Семенов М.Е., Соловьев А.М.* Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 4. С. 58–82.
10. *Pei J.S., Carboni B., Lacarbonara W.* Mem-models as Building Blocks for Simulation and Identification of Hysteretic Systems // Nonlinear Dynamics. 2020. V. 100. № 2. P. 973–998.
11. *Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A., Reshetova O.O.* Efficiency of Hysteretic Damper in Oscillating Systems // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2020. V. 15. P. 43-1–43-14.

12. *Semenov M.E., Reshetova O.O., Borzunov S.V., Meleshenko P.A.* Self-oscillations in a System with Hysteresis: the Small Parameter Approach // The European Physical Journal: Special Topics. 2021. V. 230. P. 3565–3571.
13. *Медведский А.Л., Мелешенко П.А., Нестеров В.А., Решетова О.О., Семенов М.Е.* Динамика гистерезисно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля: метод малого параметра // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 4. С. 7–26.
14. *Mayergoyz I.D.* Mathematical Models of Hysteresis // Physical Review Letters, 1986. V. 56. № 15. P. 1518–1521.
15. *Borzunov S.V., Semenov M.E., Sel'vesyuk N.I., Meleshenko P.A.* Hysteretic Converters with Stochastic Parameters // Mathematical Models and Computer Simulations. 2020. V. 12. № 2. P. 164-175.
16. *Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A.* A New Way to Compute the Lyapunov Characteristic Exponents for Non-smooth and Discontinues Dynamical Systems // Nonlinear Dynamics. 2022. V. 109. P. 1805–1821.
17. *Mayergoyz I., Dimian M.* Analysis of Spectral Noise Density of Hysteretic Systems Driven by Stochastic Processes // J. Applied Physics. 2003. V. 93. № 10. P. 6826–6828.
18. *Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A.* Stochastic Preisach Operator: Definition within the Design Approach // Nonlinear Dynamics. 2020. V. 101. P. 2599–2614.
19. *Brokate M., Krejčí P.* Optimal Control of ODE Systems Involving a Rate Independent Variational Inequality // Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B. 2013. V. 18. № 2. P. 331–348.
20. *Cross R., McNamara H., Pokrovskii A.V., Rachinskii D.* A New Paradigm for Modelling Hysteresis in Macroeconomic Flows // Physica B: Condensed Matter. 2008. V. 403. P. 231–236.
21. *Darby J., Cross R., Piscitelli L.* Hysteresis and Unemployment: a Preliminary Investigation // The Science of Hysteresis / Eds G. Bertotti and I.D. Mayergoyz. Oxford: Academic Press. 2005. V. 1, Ch. 8. P. 667–699.
22. *Rios L., Rachinskii D., Cross R.* A Model of Hysteresis Arising from Social Interaction Within a Firm // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 811. № 1. P. 012011-1–012011-12.
23. *Rios L., Rachinskii D., Cross R.* On the Rationale for Hysteresis in Economic Decisions // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 811. № 1. P. 012012-1–012012-9.
24. *Borzunov S.V., Semenov M.E., Sel'vesyuk N.I., Meleshenko P.A., Solovyov A.M.* Stochastic Model of the Hysteresis Converter with a Domain Structure // Mathematical Models and Computer Simulations. 2022. V. 14. № 2. P. 304–320.
25. Cross R. Unemployment: Natural Rate Epicycles or Hysteresis? // Europ. J. Economics and Economic Policies: Intervention, Edward Elgar Publishing. 2014. V. 11. № 2. P. 136–148.
26. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 272 с.
27. *Blanchard O., Wolfers J.* The Roles of Shocks and Institutions in the Rise of European Unemployment: the Aggregate Evidence // Econ. J. 2000. V. 110. P. C1–C33.
28. *Mayergoyz I.D.* The Classical Preisach Model of Hysteresis. In: Mathematical Models of Hysteresis. N.Y.: Springer, 1991. P. 1–63.
29. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory. Malabar, Florida, 1986. 576 p.
30. *Горский А.А., Колпакова И.Г., Локшин Б.Я.* Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товаров повседневного спроса // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 1. С. 144-148.
31. *Параев Ю.И.* Решение задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // Изв. РАН. ТиСУ. 2000. № 2. С. 103–107.
32. *Параев Ю.И.* Двухкритериальная задача оптимального производства и сбыта товара // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 1. С. 138-141.
33. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. (Серия: Классические направления в математике). М.: МЦНМО, 2014. 341 с.
34. *Fedoryuk M.V.* Asymptotic Analysis: Linear Ordinary Differential Equations. Springer, 2012. 363 p.
35. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Серия: Современные проблемы математики. М.: Наука, 1966. 331 с.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 41–60

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.938

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ ПУТЕМ ПРИВЕДЕНИЯ К МОДАЛЬНОМУ НАБЛЮДЕНИЮ С МЕНЬШИМ ЧИСЛОМ ВХОДОВ

© 2024 г. Н. Е. Зубов[1], *, А. В. Лапин[1]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

**e-mail: nik.zubov@gmail.com*

Поступила в редакцию 27.11.2023 г.
После доработки 24.12.2023 г.
Принята к публикации 29.01.2024 г.

Предложен эффективный аналитический метод решения задачи модального управления по выходу для широкого класса линейных стационарных систем, у которых сумма входов и выходов может быть не только больше или равна, но и меньше размерности вектора состояния. Метод основан на приведении модального управления по выходу к модальному наблюдению с меньшим числом входов. При этом не требуется дополнительно обеспечивать разрешимость уравнения связи между матрицей наблюдателя и искомой матрицей регулятора по выходу. Приведение осуществляется путем построения обобщенной дуальной канонической формы по управлению с помощью операций блочного транспонирования и скелетного разложения матриц. Метод существенно расширяет класс систем, для которых существует аналитическое решение, по сравнению с предложенными ранее подходами, поскольку не привязан жестко к размерности системы управления, а также не требует обязательного обнуления столбца и получения системы со скалярным входом. На основе предложенного метода сформирован строгий алгоритм аналитического решения задач из рассматриваемого класса. Также получено простое и удобное необходимое условие приводимости модального управления по выходу к модальному наблюдению с меньшим числом входов, позволяющее по виду исходной задачи оценить возможность ее аналитического решения. В символьном виде рассмотрены примеры задач модального управления по выходу различного порядка, в которых сумма входов и выходов меньше или равна размерности вектора состояния. Подробное аналитическое решение предложенных примеров демонстрирует эффективность практического применения предлагаемого подхода.

Ключевые слова: блочное транспонирование, дуальный подход модального управления, индекс управляемости, модальный наблюдатель, модальное управление по выходу, обобщенная каноническая форма по управлению, скелетное разложение матриц

DOI: 10.31857/S0002338824030043, **EDN:** UQFBTC

ANALYTIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF MODAL CONTROL BY OUTPUT BY MEANS OF BRINGING TO MODAL OBSERVATION WITH FEWER INPUTS

N. E. Zubov[a], *, A. V. Lapin[a]

[a]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

**e-mail: nik.zubov@gmail.com*

We propose an effective analytic method for solving the problem of modal control by output for a wide class of linear stationary systems in which the sum of inputs and outputs can be not only greater than or equal to, but also less than the dimension of state vector. The method is based on bringing modal control by output to modal observation with fewer inputs. At the same time, it is not necessary to additionally ensure the solvability of the connecting equation between the matrix of observer and the desired matrix of controller by output. The reduction is performed by constructing a generalized dual canonical form of control using the operations of block transposing and rank decomposition of matrices. The method significantly expands the class of systems for which an analytic solution exists, compared to the previously proposed approaches, since it

is not rigidly tied to the control system dimension and also does not require mandatory zeroing of the column and obtaining a system with a single input. Based on the proposed method, a strict algorithm for analytic solution of problems from the considering class is formed. A simple and convenient necessary condition for the reducibility of modal control by output to modal observation with fewer inputs is also obtained, which allows evaluating the possibility of its analytic solution only by the form of original task. Examples of various order tasks of modal control by output in which the sum of inputs and outputs is less than or equal to the dimension of state vector are considered in symbolic form. A detailed analytic solution of the proposed examples demonstrates the effectiveness of the proposed approach practical application.

Keywords: block transposing, controllability index, dual approach of modal control, generalized canonical form of control, modal control by output, modal observer, rank decomposition of matrices

Введение. Задача управления по выходу является одной из ключевых задач при неполной информации о векторе состояния [1]. Она актуальна в штатном режиме управления в качестве альтернативы оцениванию вектора состояния с помощью наблюдателей [2], а также при отказах измерительных устройств [3]. Для законов управления, работающих в реальном времени, важно иметь аналитическое решение данной задачи [4].

Существующие аналитические методы модального управления по выходу существенно ограничены в применении соотношениями между количеством входов и выходов и размерностью вектора состояния. Так, наиболее распространенный аналитический метод на основе подхода Ван дер Воуда [5] применяется, только когда сумма входов и выходов превышает размерность вектора состояния. В силу использования многоуровневой декомпозиции и расчета управления по выходу только на нулевом уровне этот метод не позволяет определить полное множество решений рассматриваемой задачи [6].

Известны также несколько методов [7, 8] решения узкого класса задач, где сумма входов и выходов равна размерности вектора состояния. Эти методы имеют дело только с системами четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами, подразумевают полное обнуление одного из столбцов определенной матрицы и используют приведение только к системе со скалярным входом (SIMO – Single Input Multi Output).

В настоящей работе рассматривается широкий класс систем с векторным входом (MIMO – Multi Input Multi Output), не ограниченный по размерностям. Предлагается аналитический метод решения задачи модального управления по выходу путем приведения к системе с меньшим числом входов, но не обязательно к SIMO-системе. А используемое в методе условие потери ранга не требует непременного обнуления столбца. Все эти аспекты существенно расширяют класс систем, для которых возможен аналитический синтез модального управления по выходу.

1. Постановка задачи. Пусть задана линейная стационарная система управления, описываемая уравнениями состояния и наблюдения [1]:

$$\begin{cases} \sigma\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

где σ – оператор, соответствующий дифференцированию по времени t в непрерывном случае $t \in \mathbb{R}$ или сдвигу на шаг вперед $t+1$ в дискретном случае $t \in \mathbb{Z}$; $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$ – векторы состояния, управления (входов) и наблюдения (выходов); $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l\times n}$ – соответствующие им постоянные матрицы; запись вида $\mathbb{R}^{p\times q}$ обозначает множество вещественных матриц, имеющих размерность $p \times q$. Далее очевидная зависимость векторов от времени опускается.

Рассматривается задача модального управления по выходу [1]. Требуется построить закон управления (определить матрицу регулятора по выходу $\mathbf{F}$)

$$\mathbf{u} = -\mathbf{F}\mathbf{y}, \tag{1.2}$$

обеспечивающий матрице замкнутой (close-loop) системы управления (1.1)–(1.2)

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{BFC} \tag{1.3}$$

заданный спектр (множество собственных значений)

$$\Lambda^* = \left\{\lambda_1^*, \quad \lambda_2^*, \quad \ldots, \quad \lambda_n^*\right\} \tag{1.4}$$

или соответствующий характеристический полином

$$p^*(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda - \lambda_i^*\right). \tag{1.5}$$

Для систем вида (1.1) с одним входом $m = 1$ (SIMO-систем по управлению) решение задачи модального управления по выходу хорошо известно [9]. Оно получается на основе единственного решения соответствующей задачи модального управления по состоянию. При этом используются формулы Басса–Гура [10] или Аккермана [11]. Вместе с тем в работах [12, 13] показано, что существует класс систем со многими входами $m \geq 2$ (MIMO-систем), которые в блочном представлении с помощью операции блочного транспонирования [14] могут рассматриваться как обобщенный аналог SIMO-систем по управлению. Имеются в виду такие MIMO-системы (1.1), где размерность вектора состояния кратна размерности вектора управления, а индекс управляемости i_B равен частному k от деления указанных размерностей, т.е.

$$n = km, \quad \det \mathbf{B}_{[k]} \neq 0. \tag{1.6}$$

Здесь $\mathbf{B}_{[k]}$ – матрица, состоящая из k блочных столбцов матрицы управляемости Калмана:

$$\mathbf{B}_{[k]} = \left[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{A}^{k-2}\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\right]. \tag{1.7}$$

Для систем (1.1) из класса (1.6) ранее были доказаны обобщенные формулы Басса–Гура [12] и Аккермана [13], позволяющие получать полное множество решений соответствующей задачи модального управления *по состоянию*. В основе вывода этих формул лежит приведение исходной системы (1.1) с помощью преобразований подобия к обобщенной канонической форме по управлению, аналогичной канонической форме Люенбергера [15], но представленной блочными коэффициентами и операцией блочного транспонирования. Операция блочного транспонирования, обозначаемая верхним индексом $T_{p\times q}$, подразумевает перемещение блоков заданной размерности $p \times q$ в позиции, соответствующие транспонированию, в неизменном виде – без перемещения элементов внутри каждого блока.

В настоящей работе описанный подход распространяется на управление *по выходу*.

2. Обобщенная каноническая форма по управлению. Пусть имеется система (1.1) из класса (1.6). Приведем матрицу замкнутой системы управления (1.3) к *обобщенной канонической форме по управлению* [12]. Для этого последовательно выполним два преобразования подобия.

Первое преобразование выполняется с помощью матрицы $\mathbf{B}_{[k]}$ (1.7) и имеет вид

$$\tilde{\mathbf{A}}_{cl} = \mathbf{B}_{[k]}^{-1}\mathbf{A}_{cl}\mathbf{B}_{[k]} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,k} \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,k-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & -\mathbf{P}_{B,1} \end{array}\right]}_{\tilde{\mathbf{A}}} - \underbrace{\left[\begin{array}{c} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\tilde{\mathbf{B}}} \underbrace{\mathbf{FCB}_{[k]}}_{\tilde{\mathbf{K}}}.$$

Здесь $\mathbf{I}_m$ – единичная матрица порядка m, $\mathbf{0}$ – нулевая матрица подходящей размерности, а блочные коэффициенты $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $i = \overline{1,k}$ находятся из блочного столбца (*column*):

$$\mathbf{P}_{B,col} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{B,k} \\ \mathbf{P}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{P}_{B,1} \end{array}\right] = -\mathbf{B}_{[k]}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{B}. \tag{2.1}$$

Второе преобразование выполняется с помощью квадратной блочно-треугольной, а значит, неособенной [16] матрицы:

$$\mathbf{T}_B = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{P}_{B,k-1} & \mathbf{P}_{B,k-2} & \cdots & \mathbf{P}_{B,1} & \mathbf{I}_m \\ \mathbf{P}_{B,k-2} & \vdots & \iddots & \iddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{P}_{B,1} & \mathbf{I}_m & \iddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{B,1} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \iddots & \vdots \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

и имеет вид

$$\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_{cl} = \mathbf{T}_B^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_{cl}\mathbf{T}_B =$$

$$= \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{P}_{B,k} & -\mathbf{P}_{B,k-1} & \cdots & -\mathbf{P}_{B,2} & -\mathbf{P}_{B,1} \end{array}\right]}_{\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}} - \underbrace{\left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \end{array}\right]}_{\tilde{\tilde{\mathbf{B}}}} \underbrace{\left[\mathbf{FQ}_{B,k} \mid \mathbf{FQ}_{B,k-1} \mid \cdots \mid \mathbf{FQ}_{B,2} \mid \mathbf{FQ}_{B,1}\right]}_{\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}}. \qquad (2.2)$$

Здесь $\tilde{\tilde{\mathbf{K}}} = \mathbf{FCB}_{[k]}\mathbf{T}_B$, а блочные коэффициенты $\mathbf{Q}_{B,i} \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $i = \overline{1,k}$ записываются в виде блочного столбца (*column*):

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{Q}_{B,k} \\ \mathbf{Q}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{B,2} \\ \mathbf{Q}_{B,1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \cdots & \mathbf{M}_{k-2} & \mathbf{M}_{k-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \cdots & \mathbf{M}_{k-2} \\ \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{B,k-1} \\ \mathbf{P}_{B,k-2} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{B,1} \\ \mathbf{I}_m \end{array}\right], \qquad (2.3)$$

где

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{CA}^i\mathbf{B}, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (2.4)$$

Запись (2.2) представляет собой обобщенную каноническую форму по управлению [12]. С помощью формул Шура об определителе блочных матриц [16] можно показать, что в форме матрица разомкнутой системы $\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}$ (и $\mathbf{A}$) имеет характеристический полином

$$\left|\mathbf{P}_B(\lambda)\right| = p(\lambda) = \left|\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right|, \qquad (2.5)$$

а матрица замкнутой системы $\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_{cl}$ (и $\mathbf{A}_{cl}$) – характеристический полином $\left|\mathbf{P}_B(\lambda) + \mathbf{FQ}_B(\lambda)\right|$, где

$$\mathbf{P}_B(\lambda) = \sum_{i=0}^{k}\left(\lambda^{k-i}\mathbf{P}_{B,i}\right), \qquad (2.6)$$

$$\mathbf{Q}_B(\lambda) = \sum_{i=1}^{k}\left(\lambda^{k-i}\mathbf{Q}_{B,i}\right).$$

Пусть в канонической форме (2.2) предварительно определено полное множество регуляторов по состоянию [12] (*row* – строка)

$$\tilde{\tilde{\mathbf{K}}} = \mathbf{P}^*_{B,row} - \mathbf{P}_{B,row},$$

где $\mathbf{P}_{B,row} = \mathbf{P}^{T_{m\times m}}_{B,col} \in \mathbb{R}^{m\times km}$, а блочные коэффициенты $\mathbf{P}^*_{B,i} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $i = \overline{1,k}$, матрицы $\mathbf{P}^*_{B,row} = \left[\mathbf{P}^*_{B,k} \,\vdots\, \mathbf{P}^*_{B,k-1} \,\vdots\, \dots \,\vdots\, \mathbf{P}^*_{B,2} \,\vdots\, \mathbf{P}^*_{B,1}\right]$ и обобщенного желаемого характеристического полинома

$$\mathbf{P}^*_B(\lambda) = \sum_{i=0}^{k}\left(\lambda^{k-i}\mathbf{P}^*_{B,i}\right)$$

таковы, что

$$\left|\mathbf{P}^*_B(\lambda)\right| = p^*(\lambda). \tag{2.7}$$

Тогда *блочно-транспонированное уравнение связи*

$$\mathbf{FQ}_{B,row} = \tilde{\tilde{\mathbf{K}}}, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{Q}_{B,row} = \mathbf{Q}^{T_{l\times m}}_{B,col} \in \mathbb{R}^{l\times km}$, по сути, представляет собой обобщенную формулу Басса–Гура [12] для регулятора по выходу. Ее практическое применение затруднено тем, что ранг строчной матрицы коэффициентов $\mathbf{Q}_{B,row}$ оказывается меньше количества ее столбцов. Поэтому необходимо дополнительно обеспечивать условие разрешимости [17] уравнения (2.8) относительно матрицы регулятора по выходу $\mathbf{F}$. Аналитических методов обеспечения этого условия не через матрицы с желаемыми спектрами, как, например, в работах [5, 6], а через суммы и произведения этих матриц (обобщенные коэффициенты Виета $\mathbf{P}^*_i$), в настоящее время не существует.

Однако существуют такие случаи, что в задаче можно уменьшить число входов m до некоторого значения r, когда аналогичная матрица $\hat{\mathbf{Q}}_{B,row} \in \mathbb{R}^{l\times kr}$ будет иметь полный ранг, равный количеству столбцов, и уравнение связи, аналогичное уравнению (2.8), разрешится автоматически без дополнительных условий.

3. Метод приведения к модальному наблюдению с меньшим числом входов. Выполним блочное $m\times m$ транспонирование обобщенной канонической формы по управлению (2.2):

$$\mathbf{A}^*_B = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,k} \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,k-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & -\mathbf{P}_{B,1} \end{array}\right]}_{\mathbf{A}_B} - \underbrace{\left[\begin{array}{c} \mathbf{FQ}_{B,k} \\ \mathbf{FQ}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{FQ}_{B,2} \\ \mathbf{FQ}_{B,1} \end{array}\right]}_{\mathbf{L}_B} \underbrace{\left[\mathbf{0} \,\vdots\, \mathbf{0} \,\vdots\, \dots \,\vdots\, \mathbf{0} \,\vdots\, \mathbf{I}_m\right]}_{\mathbf{C}_B}, \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{A}^*_B = \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}^{T_{m\times m}}_{cl}$, $\mathbf{A}_B = \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}^{T_{m\times m}}$, $\mathbf{C}_B = \tilde{\tilde{\mathbf{B}}}^{T_{m\times m}}$, $\mathbf{L}_B = \tilde{\tilde{\mathbf{K}}}^{T_{m\times m}}$. Назовем полученную форму (3.1) *обобщенной дуальной канонической формой по управлению*.

С помощью формул Шура [16] можно доказать инвариантность полиномов (2.5) и (2.7) по отношению к выполненной операции блочного транспонирования: матрицы состояния разомкнутой $\mathbf{A}_B$ и замкнутой $\mathbf{A}_B - \mathbf{L}_B\mathbf{C}_B$ систем в форме (3.1) имеют соответственно характеристические полиномы (2.5) и (2.7). Таким образом, указанные матрицы подобны матрицам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_{cl}$ соответственно.

Если у MIMO-системы (1.1) из класса (1.6) в обобщенной дуальной канонической форме по управлению (3.1) ранг матрицы коэффициентов $\mathbf{Q}_{B,col} \in \mathbb{R}^{kl\times m}$, равный r, меньше количества ее столбцов, т.е.

$$\operatorname{rank}\mathbf{Q}_{B,col} < m, \tag{3.2}$$

то после скелетного разложения

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \hat{\mathbf{Q}}_{B,col}\mathbf{S}_B, \tag{3.3}$$

где $\hat{\mathbf{Q}}_{B,col} \in \mathbb{R}^{kl\times r}$, $\mathbf{S}_B \in \mathbb{R}^{r\times m}$, задача модального управления по выходу приводится к задаче *модального наблюдения* для пары матриц:

$$\mathbf{A}_B, \quad \widehat{\mathbf{C}}_B = \mathbf{S}_B\mathbf{C}_B.$$

Матрицу наблюдателя $\widehat{\mathbf{L}}_B \in \mathbb{R}^{km\times r}$, обеспечивающую желаемый спектр (1.4)

$$\operatorname{eig}\left(\mathbf{A}_B - \widehat{\mathbf{L}}_B\widehat{\mathbf{C}}_B\right) = \Lambda^*,$$

всегда можно определить аналитически, используя дуальный декомпозиционный метод модального управления по состоянию [18].

Для искомой матрицы регулятора по выходу справедливо *блочно-транспонированное уравнение связи*

$$\mathbf{F}\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row} = \widehat{\mathbf{K}}_B, \tag{3.4}$$

где $\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row} = \widehat{\mathbf{Q}}_{B,col}^{T_{l\times r}} \in \mathbb{R}^{l\times kr}$, $\widehat{\mathbf{K}}_B = \widehat{\mathbf{L}}_B^{T_{m\times r}} \in \mathbb{R}^{m\times kr}$. Уравнение (3.4) оказывается эффективным (в плане получения аналитического решения), когда в нем не требуется дополнительно обеспечивать условие разрешимости [17], т.е. когда не существует правого аннулятора ($\overline{\widehat{\mathbf{Q}}}_{B,row}^{R} = \mathbf{0}_{kr\times 0}$). Это может иметь место, только если число столбцов матрицы $\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row}$ не превышает числа ее строк, т.е.

$$r \le \frac{ml}{n}. \tag{3.5}$$

Тогда множество матриц регулятора по выходу, решений уравнения (3.4) имеет вид [17]

$$\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{K}}_B\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row}^{+} + \mathbf{\Omega}_B\overline{\widehat{\mathbf{Q}}}_{B,row}^{L}, \tag{3.6}$$

где $\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row}^{+}$ и $\overline{\widehat{\mathbf{Q}}}_{B,row}^{L}$ – соответственно псевдообратная матрица [16] и левый аннулятор максимального ранга матрицы $\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row}$, а $\mathbf{\Omega}_B$ – произвольная матрица подходящей размерности.

Условие приводимости (3.2) аналогично представленному в статье [7] условию обнуления столбца. Но теперь это более широкое условие, включающее в себя не только случаи обнуления столбцов, но и любые другие случаи потери ранга без обнуления.

Предлагаемый метод приведения к задаче модального наблюдения с меньшим числом входов $r < m$ применяется к системам не только четвертого порядка [8], но и более высоких порядков. Сумма входов и выходов не обязательно должна быть больше количества состояний, как в работе [5], или равна ему, как в работах [7, 8], но может быть и меньше (лишь бы произведение количества входов и выходов не оказалось меньше количества состояний). А само приведение осуществляется не обязательно к SIMO-системе [19].

4. Алгоритм приведения к модальному наблюдению с меньшим числом входов. Решение задачи модального управления по выходу методом приведения к модальному наблюдению с меньшим числом входов состоит в выполнении следующих пошаговых операций.

1. Проверяется условие принадлежности заданной MIMO-системы (1.1) к классу (1.6):

$$n = km, \quad \det\underbrace{\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{k-2}\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\right]}_{\mathbf{B}_{[k]}} \neq 0.$$

2. Строится обобщенная дуальная каноническая форма по управлению (3.1):

$$\mathbf{A}_B^* = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,k} \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,k-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & -\mathbf{P}_{B,1} \end{array}\right]}_{\mathbf{A}_B} - \underbrace{\left[\begin{array}{c} \mathbf{FQ}_{B,k} \\ \mathbf{FQ}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{FQ}_{B,2} \\ \mathbf{FQ}_{B,1} \end{array}\right]}_{\mathbf{L}_B} \underbrace{\left[\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \ldots \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{I}_m\right]}_{\mathbf{C}_B},$$

где, согласно формулам (2.1), (2.3) и (2.4), блочные коэффициенты $\mathbf{P}_{B,i} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $\mathbf{Q}_{B,i} \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $i=\overline{1,k}$, соответственно определяются из соотношений:

$$\mathbf{P}_{B,col} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,k} \\ \mathbf{P}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{P}_{B,1} \end{bmatrix} = -\mathbf{B}_{[k]}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{B}, \quad \begin{array}{c} \left[\mathbf{M}_0 \,\vdots\, \mathbf{M}_1 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{M}_{k-2} \,\vdots\, \mathbf{M}_{k-1}\right] = \mathbf{C}\mathbf{B}_{[k]}, \\ \mathbf{M}_j \in \mathbb{R}^{l\times m}, \quad j = \overline{0,k-1}; \end{array}$$

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{B,k} \\ \mathbf{Q}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{B,2} \\ \mathbf{Q}_{B,1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \ldots & \mathbf{M}_{k-2} & \mathbf{M}_{k-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \ldots & \mathbf{M}_{k-2} \\ \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,k-1} \\ \mathbf{P}_{B,k-2} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{B,1} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}.$$

3. Вычисляется ранг $r = \operatorname{rank}\left(\mathbf{Q}_{B,col} \in \mathbb{R}^{kl\times m}\right)$, и проверяется условие (3.2) приводимости к задаче модального наблюдения с меньшим числом входов $r < m$, после чего выполняется скелетное разложение (3.3):

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \widehat{\mathbf{Q}}_{B,col}\mathbf{S}_B,$$

где $\widehat{\mathbf{Q}}_{B,col} \in \mathbb{R}^{kl\times r}$, $\mathbf{S}_B \in \mathbb{R}^{r\times m}$.

4. Определяется матрица наблюдателя в системе с меньшим числом входов:

$$\widehat{\mathbf{L}}_B \in \mathbb{R}^{km\times r}: \quad \operatorname{eig}\left(\mathbf{A}_B - \widehat{\mathbf{L}}_B \underbrace{\mathbf{S}_B\mathbf{C}_B}_{\widehat{\mathbf{C}}_B}\right) = \Lambda^*.$$

5. Записывается блочно-транспонированное уравнение связи (3.4):

$$\mathbf{F}\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row} = \widehat{\mathbf{K}}_B,$$

где $\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row} = \widehat{\mathbf{Q}}_{B,col}^{T_{l\times r}} \in \mathbb{R}^{l\times kr}$, $\widehat{\mathbf{K}}_B = \widehat{\mathbf{L}}_B^{T_{m\times r}} \in \mathbb{R}^{m\times kr}$.

6. Определяется искомая матрица регулятора по выходу (3.6):

$$\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{K}}_B\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row}^{+} + \boldsymbol{\Omega}_B\bar{\widehat{\mathbf{Q}}}_{B,row}^{L},$$

где $\boldsymbol{\Omega}_B$ – произвольная матрица подходящей размерности.

5. Необходимое условие приводимости к модальному наблюдению с меньшим числом входов. Представленное выше *необходимое и достаточное* условие приводимости модального управления по выходу к модальному наблюдению с меньшим числом входов предполагает построение обобщенной канонической формы по управлению (3.1). Таким образом, данное условие не может быть проверено до решения задачи, т.е. только по виду системы (1.1). Однако можно доказать более простое *необходимое* условие.

Теорема. Модальное управление по выходу для MIMO-системы (1.1) из класса (1.6) приводится к модальному наблюдению с меньшим числом входов $r < m$, только если индекс наблюдаемости i_C этой системы удовлетворяет неравенству

$$\frac{n}{r} - \frac{n}{m} \le i_C - 1 \le n - l. \tag{5.1}$$

Доказательство. Правое соотношение в двойном неравенстве (5.1) хорошо известно – это верхняя граница индекса наблюдаемости [1]. Докажем левое соотношение.

Наряду с матрицей $\mathbf{B}_{[k]}$ рассмотрим матрицы $\mathbf{C}_{[i]}$, состоящие из $i = \overline{1,n-l+1}$ первых блочных строк матрицы наблюдаемости Калмана:

$$\mathbf{C}_{[i]} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы $\mathbf{C}_{[i]}$ не изменится после ее умножения на квадратную и неособенную, в соответствии с условием , матрицу $\mathbf{B}_{[k]}$, т.е.

$$\operatorname{rank}\mathbf{C}_{[i]} = \operatorname{rank}\underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \dots & \mathbf{M}_{k-1} \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \dots & \mathbf{M}_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{M}_{i-1} & \mathbf{M}_i & \dots & \mathbf{M}_{k+i-2} \end{array}\right]}_{\mathbf{C}_{[i]}\mathbf{B}_{[k]}}.$$

Ранг не уменьшится, если к матрице добавить слева несколько блочных столбцов, образующих в данном случае блочную матрицу нижнетреугольного вида:

$$\operatorname{rank}\mathbf{C}_{[i]} \le \operatorname{rank}\underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \dots & \mathbf{M}_{k-1} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \dots & \mathbf{M}_k \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \iddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \dots & \mathbf{M}_{i-1} & \mathbf{M}_i & \dots & \mathbf{M}_{k+i-2} \end{array}\right]}_{\tilde{\mathbf{M}}}.$$

Используя блочные коэффициенты (2.1) обобщенного характеристического полинома (2.6), составим еще одну квадратную и неособенную матрицу, имеющую блочный верхнетреугольный вид, по $k+i-1$ блоков в каждой строке и в каждом столбце:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{B,k} & \dots & \mathbf{P}_{B,1} & \mathbf{I}_m \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \iddots & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{B,k} & & \mathbf{P}_{B,1} & \iddots & \mathbf{0} & \vdots \\ \mathbf{P}_{B,k} & \vdots & \iddots & \mathbf{I}_m & \iddots & \vdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{P}_{B,1} & \iddots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{B,1} & \mathbf{I}_m & \iddots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{array}\right].$$

Заметим, что равенство (2.1)

$$\left[\mathbf{B}_{[k]} \,\middle|\, \mathbf{A}^k\mathbf{B}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,col} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

приводит к тождеству

$$\mathbf{CA}^j\left[\mathbf{B}_{[k]} \,\middle|\, \mathbf{A}^k\mathbf{B}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,col} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \left[\mathbf{M}_j \,\middle|\, \mathbf{M}_{j+1} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \mathbf{M}_{j+k-1} \,\middle|\, \mathbf{M}_{j+k}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,k} \\ \mathbf{P}_{B,k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{B,1} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \qquad (5.2)$$

справедливому для любого целого неотрицательного числа j. Перемножив матрицы $\tilde{\mathbf{M}}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$, на основании равенств (2.3) и (5.2) получим неравенство

$$\operatorname{rank}\mathbf{C}_{[i]} \le \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} \mathbf{Q}_{B,k} & \mathbf{Q}_{B,k-1} & \cdots & \mathbf{Q}_{B,k-i+1} & \cdots & \mathbf{Q}_{B,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{B,k} & \mathbf{Q}_{B,k-1} & \cdots & \mathbf{Q}_{B,k-i+1} & \cdots & \mathbf{Q}_{B,1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{B,k} & \mathbf{Q}_{B,k-1} & \cdots & \mathbf{Q}_{B,k-i+1} & \cdots & \mathbf{Q}_{B,1} \end{array}\right]}_{\tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{P}}}.$$

В правой части данного неравенства стоит матрица, каждый блочный столбец которой имеет ранг не более $\operatorname{rank}\mathbf{Q}_{B,col} = r$. Всего блочных столбцов $k+i-1$. Поэтому

$$\operatorname{rank}\mathbf{C}_{[i]} \le r\big(k+i-1\big).$$

В силу того, что $\operatorname{rank}\mathbf{C}_{[i_C]} = n$, для индекса наблюдаемости справедливо неравенство

$$n \le r\big(k+i_C-1\big),$$

где $k = n/m$. Отсюда и следует требуемое соотношение (5.1).

Теорема доказана.

Из неравенства (5.1) вытекает, что для систем (1.1) из класса (1.6) индекс наблюдаемости не обязательно должен быть строго больше индекса управляемости, как в статье [7]. Для систем четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами [8] неравенство между индексами $i_C > i_B$ действительно строгое: при $n=4$, $m=2$ $(i_B=2)$ и $r=1$ из неравенства (5.1) следует $i_C \ge 3$. Но, например, при $n=9$, $m=3$ $(i_B=3)$, $l=6$ и допустимом в силу неравенства (3.5) меньшем числе входов $r=2$ из неравенства (5.1) получаем $i_C \ge 3$, т.е. возможно равенство индексов $i_C = i_B = 3$.

Необходимое условие приводимости (5.1) и необходимое условие эффективности (наличия аналитического решения) (3.5) в ряде случаев позволяют сразу определить целесообразность применения предлагаемого метода – только по размерностям векторов состояния, управления и наблюдения. Так, например, задача управления по выходу с размерностями состояния $n=9$, управления $m=3$ и наблюдения $l=5$ никогда не может быть решена путем приведения к задаче модального наблюдения с меньшим числом входов. Действительно, единственно допустимое неравенством (3.5) меньшее число входов $r=1$ приводит к требуемому соотношением (5.1) индексу наблюдаемости $7 \le i_C \le 5$, что невозможно.

6. Примеры решения задач. В первом примере рассмотрим задачу управления по выходу, в которой сумма входов и выходов меньше размерности вектора состояния.

Пример 1. Задан линейный стационарный объект шестого порядка с двумя входами и тремя выходами, описываемый матрицами состояния и управления:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,5} & 0 \\ 0 & a_{5,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{6,3} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{6,1} & 0 \end{array}\right],$$

а также матрицей наблюдения:

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Требуется определить множество матриц регулятора по выходу $\mathbf{F}$, обеспечивающих матрице замкнутой системы $\mathbf{A}$–$\mathbf{BFC}$ заданный характеристический полином (1.5).

Задача решается в соответствии с изложенным выше алгоритмом приведения к модальному наблюдению с одним входом.

1. Размерность вектора состояния 6 кратна размерности вектора управления 2 (частное равно трем), а матрица

$$\mathbf{B}_{[3]} = \left[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \mathbf{A}^2\mathbf{B}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1,3}a_{3,6}b_{6,1} & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,6}b_{6,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & a_{4,5}a_{5,2}b_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,2}b_{2,2} & 0 & 0 \\ b_{6,1} & 0 & 0 & 0 & a_{6,3}a_{3,6}b_{6,1} & 0 \end{array}\right]$$

имеет ненулевой определитель

$$\det \mathbf{B}_{[3]} = -a_{1,3}a_{4,5}\left(a_{3,6}a_{5,2}\right)^2\left(b_{2,2}b_{6,1}\right)^3.$$

Индекс управляемости равен трем: $i_B = n/m = 3$.

2. Рассчитаем блоки обобщенного характеристического полинома по управлению:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_3 \\ \hdashline \mathbf{P}_2 \\ \hdashline \mathbf{P}_1 \end{array}\right] = -\mathbf{B}_{[3]}^{-1}\mathbf{A}^3\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ -\tilde{b}_{6,1}b_{2,2}^{-1} & 0 \\ \hdashline -\tilde{a}_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 \end{array}\right].$$

Здесь $\tilde{a}_{3,1} = a_{1,3}a_{3,1} + a_{3,6}a_{6,3}$, $\tilde{b}_{6,1} = a_{1,3}a_{2,1}a_{3,6}b_{6,1}$. Через вспомогательные блоки

$$\left[\mathbf{M}_0 \,\vdots\, \mathbf{M}_1 \,\vdots\, \mathbf{M}_2\right] = \mathbf{CB}_{[3]} = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} 0 & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,5}a_{5,2}b_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,2}b_{2,2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

рассчитаем блочные коэффициенты при матрице регулятора по выходу:

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{Q}_{B,3} \\ \hdashline \mathbf{Q}_{B,2} \\ \hdashline \mathbf{Q}_{B,1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{P}_{B,1} \\ \mathbf{I}_2 \end{array}\right] = b_{2,2}\left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ 0 & a_{4,5}a_{5,2} \\ 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_{5,2} \\ \hdashline 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right].$$

Построим обобщенную дуальную каноническую форму по управлению:

$$\mathbf{A}_B = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_3 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & -\mathbf{P}_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{6,1}b_{2,2}^{-1} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a}_{3,1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{C}_B = \left[\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{I}_2\right] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

3. Ранг матрицы $\mathbf{Q}_{B,col}$ меньше числа столбцов: $1 < 2$. Выполним скелетное разложение:

$$\mathbf{Q}_{B,col} = b_{2,2}\underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ a_{4,5}a_{5,2} \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ a_{5,2} \\ \hline 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]}_{\widehat{\mathbf{Q}}_{B,col}} \underbrace{\left[0 \mid 1\right]}_{\mathbf{S}_B}.$$

4. Определим матрицу наблюдателя для пары $\left(\mathbf{A}_B,\ \widehat{\mathbf{C}}_B\right)$ и полинома $p^*(\lambda)$, где

$$\widehat{\mathbf{C}}_B = \mathbf{S}_B\mathbf{C}_B = \left[0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 1\right],$$

с помощью дуальной формулы Аккермана:

$$\widehat{\mathbf{L}}_B = \sum_{i=0}^{6}\left(p_i^*\mathbf{A}_B^{6-i}\right)\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{C}}_B \\ \widehat{\mathbf{C}}_B\mathbf{A}_B \\ \widehat{\mathbf{C}}_B\mathbf{A}_B^2 \\ \widehat{\mathbf{C}}_B\mathbf{A}_B^3 \\ \widehat{\mathbf{C}}_B\mathbf{A}_B^4 \\ \widehat{\mathbf{C}}_B\mathbf{A}_B^5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa p_6^* \\ p_1^*\tilde{a}_{3,1} + p_3^* \\ \kappa\left(p_1^*\tilde{a}_{3,1}^2 + p_3^*\tilde{a}_{3,1} + p_5^*\right) \\ \tilde{a}_{3,1} + p_2^* \\ \kappa\left(\tilde{a}_{3,1}^2 + p_2^*\tilde{a}_{3,1} + p_4^*\right) \\ p_1^* \end{bmatrix}.$$

Здесь введено обозначение $\kappa = b_{2,2}\tilde{b}_{6,1}^{-1}$.

5. Запишем блочно-транспонированное уравнение связи $\mathbf{F}\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row} = \widehat{\mathbf{K}}_B$:

$$\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row} = \widehat{\mathbf{Q}}_{B,col}^{T_{3\times 1}} = b_{2,2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{4,5}a_{5,2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{5,2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_B = \widehat{\mathbf{L}}_B^{T_{2\times 1}} = \left[\begin{array}{c:c} b_{2,2}\tilde{b}_{6,1}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c:c} p_6^* & p_1^*\tilde{a}_{3,1}^2 + p_3^*\tilde{a}_{3,1} + p_5^* & \tilde{a}_{3,1}^2 + p_2^*\tilde{a}_{3,1} + p_4^* \\ p_1^*\tilde{a}_{3,1} + p_3^* & \tilde{a}_{3,1} + p_2^* & p_1^* \end{array}\right].$$

6. Определим искомую матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{K}}_B\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row}^{-1} =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \tilde{b}_{6,1} & 0 \\ 0 & b_{2,2} \end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c:c:c} \tilde{a}_{3,1}^2 + p_2^*\tilde{a}_{3,1} + p_4^* & p_6^* & p_1^*\tilde{a}_{3,1}^2 + p_3^*\tilde{a}_{3,1} + p_5^* \\ p_1^* & p_1^*\tilde{a}_{3,1} + p_3^* & \tilde{a}_{3,1} + p_2^* \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,5}a_{5,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{5,2} \end{array}\right]^{-1}.$$

После решения задачи была выполнена проверка, которая подтвердила, что полученная матрица $\mathbf{F}$ обеспечивает желаемый характеристический полином (и спектр):

$$\det\left(\lambda\mathbf{I}_6 - \mathbf{A} + \mathbf{BFC}\right) = p^*(\lambda).$$

Далее рассмотрим задачу, в которой сумма входов и выходов *равна* размерности вектора состояния, но порядок системы выше четвертого. Имеет место потеря ранга матрицы $\mathbf{Q}_{B,col}$ *без обнуления* столбцов. Задача управления по выходу приводится к задаче наблюдения *не со скалярным* входом (SIMO), а с векторным входом (MIMO).

Пример 2. Задан линейный стационарный объект девятого порядка с тремя входами и шестью выходами, описываемый матрицами состояния и управления:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2,9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{8,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,8} & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc} b_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,2} \\ 0 & 0 & b_{3,3} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

а также матрицей наблюдения:

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Требуется определить множество матриц регулятора по выходу $\mathbf{F}$, обеспечивающих матрице замкнутой системы $\mathbf{A}-\mathbf{BFC}$ заданный спектр (1.4).

Задача решается в соответствии с изложенным выше алгоритмом приведения к модальному наблюдению с меньшим числом входов.

1. Размерность вектора состояния 9 кратна размерности вектора управления 3 (частное равно трем), а матрица

$$\mathbf{B}_{[3]} = \left[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \mathbf{A}^2\mathbf{B}\right] = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,2}b_{2,2} & a_{4,2}b_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{2,2} & \tilde{b}_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{6,1}b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,3}b_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{3,3} \end{array}\right],$$

где $\tilde{b}_{1,1} = a_{6,1}a_{7,6}b_{1,1}$, $\tilde{b}_{2,2} = a_{4,2}a_{5,4}b_{2,2}$, $\tilde{b}_{3,3} = a_{8,3}a_{9,8}b_{3,3}$, имеет ненулевой определитель:

$$\det \mathbf{B}_{[3]} = -a_{4,2}a_{6,1}a_{8,3}\tilde{b}_{1,1}\tilde{b}_{2,2}\tilde{b}_{3,3}\left(b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3}\right)^2.$$

Индекс управляемости равен трем: $i_B = n/m = 3$.

2. Рассчитаем блоки обобщенного характеристического полинома по управлению:

$$\mathbf{P}_{B,col} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{P}_{B,3} \\ \hdashline \mathbf{P}_{B,2} \\ \hdashline \mathbf{P}_{B,1} \end{array}\right] = -\mathbf{B}_{[3]}^{-1}\mathbf{A}^3\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Здесь $\kappa = a_{2,9}\,\tilde{b}_{3,3}/b_{2,2}$. Через вспомогательные блоки

$$\left[\mathbf{M}_0 \,\vdots\, \mathbf{M}_1 \,\vdots\, \mathbf{M}_2\right] = \mathbf{CB}_{[3]} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,2}b_{2,2} & a_{4,2}b_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{2,2} & \tilde{b}_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{6,1}b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{1,1} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

рассчитаем блочные коэффициенты при матрице регулятора по выходу:

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{B,3} \\ \mathbf{Q}_{B,2} \\ \mathbf{Q}_{B,1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{P}_{B,1} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_{B,3} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{2,2} & \tilde{b}_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{b}_{1,1} & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{Q}_{B,2} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2}b_{2,2} & a_{4,2}b_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{6,1}b_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{Q}_{B,1} = \left[\begin{array}{c|c|c} b_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Построим обобщенную дуальную каноническую форму по управлению:

$$\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,3} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{B,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & -\mathbf{P}_{B,1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\kappa} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{C}_B = \left[\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{I}_3\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

3. Ранг матрицы $\mathbf{Q}_{B,col}$ меньше числа столбцов: $2 < 3$. Выполним скелетное разложение:

$$\mathbf{Q}_{B,col} = \underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{Q}}_{B,3} \\ \widehat{\mathbf{Q}}_{B,2} \\ \widehat{\mathbf{Q}}_{B,1} \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathbf{Q}}_{B,col}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_B},$$

$$\widehat{\mathbf{Q}}_{B,3} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{2,2} \\ 0 & 0 \\ \tilde{b}_{1,1} & 0 \end{array}\right], \quad \widehat{\mathbf{Q}}_{B,2} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2}b_{2,2} \\ 0 & 0 \\ a_{6,1}b_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right], \quad \widehat{\mathbf{Q}}_{B,1} = \left[\begin{array}{c|c} b_{1,1} & 0 \\ 0 & b_{2,2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right].$$

4. Определим матрицу наблюдателя для пары $\left(\mathbf{A}_B, \ \widehat{\mathbf{C}}_B\right)$ и спектра Λ^*, где

$$\widehat{\mathbf{C}}_B = \mathbf{S}_B\mathbf{C}_B = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

с помощью дуального декомпозиционного метода модального управления по состоянию.

Нулевой уровень декомпозиции:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_B, \quad \mathbf{C}_0 = \widehat{\mathbf{C}}_B;$$

$$\bar{\mathbf{C}}_0^R = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \bar{\mathbf{C}}_0^{R+} = \left(\bar{\mathbf{C}}_0^{RT}\bar{\mathbf{C}}_0^R\right)^{-1}\bar{\mathbf{C}}_0^{RT} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Первый уровень декомпозиции:

$$\mathbf{A}_1 = \bar{\mathbf{C}}_0^{R+}\mathbf{A}_0\bar{\mathbf{C}}_0^R = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{C}_1 = \bar{\mathbf{C}}_0\mathbf{A}_0\bar{\mathbf{C}}_0^R = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right];$$

$$\bar{\mathbf{C}}_1^R = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \bar{\mathbf{C}}_1^{R+} = \left(\bar{\mathbf{C}}_1^{RT}\bar{\mathbf{C}}_1^R\right)^{-1}\bar{\mathbf{C}}_1^{RT} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Второй уровень декомпозиции:

$$\mathbf{A}_2 = \bar{\mathbf{C}}_1^{R+}\mathbf{A}_1\bar{\mathbf{C}}_1^R = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{C}_2 = \bar{\mathbf{C}}_1\mathbf{A}_1\bar{\mathbf{C}}_1^R = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right];$$

$$\bar{\mathbf{C}}_2^R = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \bar{\mathbf{C}}_2^{R+} = \left(\bar{\mathbf{C}}_2^{RT}\bar{\mathbf{C}}_2^R\right)^{-1}\bar{\mathbf{C}}_2^{RT} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Третий уровень декомпозиции (с модификацией):

$$\mathbf{A}_3 = \bar{\mathbf{C}}_2^{R+}\mathbf{A}_2\bar{\mathbf{C}}_2^{R} = \left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & -\kappa/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{C}_3 = \bar{\mathbf{C}}_2\mathbf{A}_2\bar{\mathbf{C}}_2^{R} = \left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{array}\right] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_3}\underbrace{\left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & \kappa \end{array}\right]}_{\widehat{\mathbf{C}}_3}.$$

Наблюдатель на третьем уровне декомпозиции (с модификацией и без):

$$\widehat{\mathbf{L}}_3 = \left(\mathbf{A}_3^3 + \tilde{p}_1^*\mathbf{A}_3^2 + \tilde{p}_2^*\mathbf{A}_3 + \tilde{p}_3^*\mathbf{I}_3\right)\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{C}}_3 \\ \widehat{\mathbf{C}}_3\mathbf{A}_3 \\ \widehat{\mathbf{C}}_3\mathbf{A}_3^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{3\kappa}^* - 1/2 \\ \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{bmatrix},$$

где $\left[\begin{array}{c:c:c} \tilde{p}_{1\kappa}^* & \tilde{p}_{2\kappa}^* & \tilde{p}_{3\kappa}^* \end{array}\right] = \kappa^{-1}\left[\begin{array}{c:c:c} \tilde{p}_1^* & \tilde{p}_2^* & \tilde{p}_3^* \end{array}\right] = \kappa^{-1}\left[\begin{array}{c:c:c} -\lambda_9^* - \lambda_8^* - \lambda_7^* & \lambda_9^*\lambda_8^* + \lambda_9^*\lambda_7^* + \lambda_8^*\lambda_7^* & -\lambda_9^*\lambda_8^*\lambda_7^* \end{array}\right]$ и применена дуальная формула Аккермана;

$$\mathbf{L}_3 = \widehat{\mathbf{L}}_3\underbrace{\left[\begin{array}{c:c} 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{S}_3^+} + \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_2 \\ \omega_1 \end{bmatrix}\underbrace{\left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \end{array}\right]}_{\bar{\mathbf{S}}_3^L} = \left[\begin{array}{c:c} \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* - 1/2 \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{array}\right].$$

Здесь ω_1, ω_2 и ω_3 – произвольные вещественные параметры.

Наблюдатель на втором уровне декомпозиции:

$$\mathbf{C}_2^- = \underbrace{\mathbf{C}_2^T\left(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2^T\right)^{-1}}_{\mathbf{C}_2^+} + \bar{\mathbf{C}}_2^R\mathbf{L}_3 = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{array}\right],$$

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{C}_2^- - \mathbf{C}_2^-\boldsymbol{\Psi}_2 = \left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* - 1/2 \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{array}\right]\boldsymbol{\Psi}_2,$$

где $\boldsymbol{\Psi}_2$ – матрица с желаемым спектром $\operatorname{eig}\boldsymbol{\Psi}_2 = \left\{\lambda_6^*, \quad \lambda_5^*\right\}$.

Наблюдатель на первом уровне декомпозиции:

$$\mathbf{C}_1^- = \underbrace{\mathbf{C}_1^T\left(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1^T\right)^{-1}}_{\mathbf{C}_1^+} + \bar{\mathbf{C}}_1^R\mathbf{L}_2 = \left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1 - \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_2 & -\tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{array}\right]\boldsymbol{\Psi}_2,$$

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{C}_1^- - \mathbf{C}_1^-\boldsymbol{\Psi}_1 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \kappa\omega_2 & \tilde{p}_2^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* - 1/2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1-\tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \end{array}\right]\tilde{\mathbf{P}}_{2,1}^* + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1-\tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_2 & -\tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{array}\right]\tilde{\mathbf{P}}_{2,2}^*,$$

где $\boldsymbol{\Psi}_1$ – матрица с желаемым спектром $\operatorname{eig}\boldsymbol{\Psi}_1 = \left\{\lambda_4^*,\ \lambda_3^*\right\}$; $\tilde{\mathbf{P}}_{2,1}^* = -\boldsymbol{\Psi}_2 - \boldsymbol{\Psi}_1$, $\tilde{\mathbf{P}}_{2,2}^* = \boldsymbol{\Psi}_2\boldsymbol{\Psi}_1$.

Наблюдатель на нулевом уровне декомпозиции:

$$\mathbf{C}_0^- = \underbrace{\mathbf{C}_0^T\left(\mathbf{C}_0\mathbf{C}_0^T\right)^{-1}}_{\mathbf{C}_0^+} + \bar{\mathbf{C}}_0^R\mathbf{L}_1 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \kappa\omega_2 & \tilde{p}_2^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1-\tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1-\tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_2 & -\tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \end{array}\right]\tilde{\mathbf{P}}_{2,1}^* + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1-\tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_2 & -\tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_1 & -\tilde{p}_{1\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{array}\right]\tilde{\mathbf{P}}_{2,2}^*,$$

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{A}_0\mathbf{C}_0^- - \mathbf{C}_0^-\boldsymbol{\Psi}_0 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \kappa\omega_3 & \tilde{p}_3^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \kappa\omega_2 & \tilde{p}_2^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \kappa\omega_2 & \tilde{p}_2^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1-\tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \end{array}\right]\tilde{\mathbf{P}}_{3,1}^* + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \kappa\omega_1 & \tilde{p}_1^* \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1-\tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_2 & -\tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \end{array}\right]\tilde{\mathbf{P}}_{3,2}^* + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ -\omega_3 & 1-\tilde{p}_{3\kappa}^* \\ \omega_3 & \tilde{p}_{3\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_2 & -\tilde{p}_{2\kappa}^* \\ \omega_2 & \tilde{p}_{2\kappa}^* \\ 0 & 0 \\ -\omega_1 & -\tilde{p}_{1\kappa}^* \\ \omega_1 & \tilde{p}_{1\kappa}^* \end{array}\right]\tilde{\mathbf{P}}_{3,3}^*,$$

где $\boldsymbol{\Psi}_0$ – матрица с желаемым спектром $\operatorname{eig}\boldsymbol{\Psi}_0 = \left\{\lambda_2^*,\ \lambda_1^*\right\}$; $\tilde{\mathbf{P}}_{3,1}^* = -\boldsymbol{\Psi}_2 - \boldsymbol{\Psi}_1 - \boldsymbol{\Psi}_0$, $\tilde{\mathbf{P}}_{3,2}^* = \boldsymbol{\Psi}_2\boldsymbol{\Psi}_1 + \boldsymbol{\Psi}_2\boldsymbol{\Psi}_0 + \boldsymbol{\Psi}_1\boldsymbol{\Psi}_0$, $\tilde{\mathbf{P}}_{3,3}^* = -\boldsymbol{\Psi}_2\boldsymbol{\Psi}_1\boldsymbol{\Psi}_0$. Матрица наблюдателя $\widehat{\mathbf{L}}_B = \mathbf{L}_0$ – искомая.

5. Запишем блочно-транспонированное уравнение связи $\mathbf{F}\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row} = \widehat{\mathbf{K}}_B$:

$$\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row} = \widehat{\mathbf{Q}}_{B,col}^{T_{6\times 2}} = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & b_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,2}b_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{6,1}b_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{b}_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_B = \widehat{\mathbf{L}}_B^{T_{3\times 2}} = \left[\sum_{i=0}^{3}\left(\mathbf{V}_{i+1}\tilde{\mathbf{P}}_{3,i}^*\right) \vdots \sum_{i=0}^{3}\left(\mathbf{V}_{i+2}\tilde{\mathbf{P}}_{3,i}^*\right) \vdots \sum_{i=0}^{3}\left(\mathbf{V}_{i+3}\tilde{\mathbf{P}}_{3,i}^*\right)\right],$$

где

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\left[\kappa\omega_3 \vdots \tilde{p}_3^*\right], \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\left[\kappa\omega_2 \vdots \tilde{p}_2^*\right], \quad \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\left[\kappa\omega_1 \vdots \tilde{p}_1^*\right],$$

$$\mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\left[\omega_3 \vdots \tilde{p}_{3\kappa}^*\right] + \left[\begin{array}{c:c}1&0\\0&1\\0&0\end{array}\right], \quad \mathbf{V}_5 = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\left[\omega_2 \vdots \tilde{p}_{2\kappa}^*\right], \quad \mathbf{V}_6 = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\left[\omega_1 \vdots \tilde{p}_{1\kappa}^*\right],$$

и, кроме того, введены обозначения

$$\tilde{\mathbf{P}}_{3,0}^* = \mathbf{I}_2, \quad \tilde{\mathbf{P}}_{3,1}^* = \left[\begin{array}{c:c}\alpha_{1,1}&\alpha_{1,2}\\ \alpha_{2,1}&\alpha_{2,2}\end{array}\right], \quad \tilde{\mathbf{P}}_{3,2}^* = \left[\begin{array}{c:c}\beta_{1,1}&\beta_{1,2}\\ \beta_{2,1}&\beta_{2,2}\end{array}\right], \quad \tilde{\mathbf{P}}_{3,3}^* = \left[\begin{array}{c:c}\gamma_{1,1}&\gamma_{1,2}\\ \gamma_{2,1}&\gamma_{2,2}\end{array}\right].$$

6. Определим искомую матрицу регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{K}}_B\widehat{\mathbf{Q}}_{B,row}^{-1} = \left[\mathbf{f}_1 \vdots \mathbf{f}_2 \vdots \mathbf{f}_3 \vdots \mathbf{f}_4 \vdots \mathbf{f}_5 \vdots \mathbf{f}_6\right],$$

где $\mathbf{p}_\omega^* = \left[1 \vdots \tilde{p}_1^* \vdots \tilde{p}_2^* \vdots \tilde{p}_3^* \vdots \omega_1 \vdots \omega_2 \vdots \omega_3\right]^T$ и

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{b_{1,1}}\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c}\alpha_{1,1}&0&0&0&0&0&0\\ \alpha_{2,1}&-\gamma_{2,1}/\kappa&-\beta_{2,1}/\kappa&-\alpha_{2,1}/\kappa&\kappa-\gamma_{1,1}&-\beta_{1,1}&-\alpha_{1,1}\\ 0&\gamma_{2,1}/\kappa&\beta_{2,1}/\kappa&\alpha_{2,1}/\kappa&\gamma_{1,1}&\beta_{1,1}&\alpha_{1,1}\end{array}\right]\mathbf{p}_\omega^*,$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{b_{2,2}}\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c}\alpha_{1,2}&0&0&0&0&0&0\\ \alpha_{2,2}&1-\gamma_{2,2}/\kappa&-\beta_{2,2}/\kappa&-\alpha_{2,2}/\kappa&-\gamma_{1,2}&-\beta_{1,2}&-\alpha_{1,2}\\ 0&\gamma_{2,2}/\kappa&\beta_{2,2}/\kappa&\alpha_{2,2}/\kappa&\gamma_{1,2}&\beta_{1,2}&\alpha_{1,2}\end{array}\right]\mathbf{p}_\omega^*,$$

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{a_{4,2}b_{2,2}}\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c}\beta_{1,2}&0&0&0&0&0&0\\ \beta_{2,2}&\alpha_{2,2}&1-\gamma_{2,2}/\kappa&-\beta_{2,2}/\kappa&\alpha_{1,2}\kappa&-\gamma_{1,2}&-\beta_{1,2}\\ 0&0&\gamma_{2,2}/\kappa&\beta_{2,2}/\kappa&0&\gamma_{1,2}&\beta_{1,2}\end{array}\right]\mathbf{p}_\omega^*,$$

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{a_{4,2}a_{5,4}b_{2,2}}\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c}\gamma_{1,2}&0&0&0&0&0&0\\ \gamma_{2,2}&\beta_{2,2}&\alpha_{2,2}&1-\gamma_{2,2}/\kappa&\beta_{1,2}\kappa&\alpha_{1,2}\kappa&-\gamma_{1,2}\\ 0&0&0&\gamma_{2,2}/\kappa&0&0&\gamma_{1,2}\end{array}\right]\mathbf{p}_\omega^*,$$

$$\mathbf{f}_5 = \frac{1}{a_{6,1}b_{1,1}}\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c}\beta_{1,1}&0&0&0&0&0&0\\ \beta_{2,1}&\alpha_{2,1}&-\gamma_{2,1}/\kappa&-\beta_{2,1}/\kappa&\alpha_{1,1}\kappa&\kappa-\gamma_{1,1}&-\beta_{1,1}\\ 0&0&\gamma_{2,1}/\kappa&\beta_{2,1}/\kappa&0&\gamma_{1,1}&\beta_{1,1}\end{array}\right]\mathbf{p}_\omega^*,$$

$$\mathbf{f}_6 = \frac{1}{a_{6,1}a_{7,6}b_{1,1}}\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \gamma_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{2,1} & \beta_{2,1} & \alpha_{2,1} & -\gamma_{2,1}/\kappa & \beta_{1,1}\kappa & \alpha_{1,1}\kappa & \kappa-\gamma_{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{2,1}/\kappa & 0 & 0 & \gamma_{1,1} \end{array}\right]\mathbf{p}_\omega^*.$$

После решения задачи была выполнена проверка, которая подтвердила, что полученная матрица $\mathbf{F}$ обеспечивает желаемый характеристический полином (и спектр):

$$\det\left(\lambda\mathbf{I}_9 - \mathbf{A} + \mathbf{BFC}\right) = \left(\lambda^3 + \lambda^2\tilde{p}_1^* + \lambda\tilde{p}_2^* + \tilde{p}_3^*\right)\det\left(\lambda^3\mathbf{I}_2 + \lambda^2\tilde{\mathbf{P}}_{3,1}^* + \lambda\tilde{\mathbf{P}}_{3,2}^* + \tilde{\mathbf{P}}_{3,3}^*\right) = \prod_{i=1}^{9}\left(\lambda - \lambda_i^*\right).$$

Заключение. Показано, что для MIMO-систем, у которых размерность вектора состояния кратна размерности вектора управления, а индекс управляемости равен частному от этого деления, появляется возможность аналитически строить модальное управление по выходу в тех случаях, когда это невозможно сделать с помощью существующих аналитических методов. Это случаи, когда сумма входов и выходов не только равна, но и меньше размерности вектора состояния.

В основе предлагаемого подхода лежит получение обобщенной дуальной канонической формы по управлению. Подход может применяться, если в этой форме блочные коэффициенты перед матрицей регулятора по выходу образуют матрицу неполного ранга. Тогда модальное управление по выходу приводится к модальному наблюдению с меньшим числом входов. Уравнение связи между матрицей наблюдателя и матрицей регулятора по выходу решается с использованием операции блочного транспонирования. При этом не требуется дополнительно обеспечивать разрешимость уравнения связи.

Подход не ограничен в применении порядком систем управления, не требует обязательного обнуления столбца в канонической форме и не сводится к получению только SIMO-систем. Таким образом, существенно расширен класс MIMO-систем, для которых модальное управление по выходу может быть построено аналитически.

Эффективность подхода подтверждена решением задач в символьном виде. Рассмотренные задачи подобраны таким образом, чтобы охватить случаи расширения класса MIMO-систем с аналитическими регуляторами по выходу. Также показана возможность получать параметризованные множества решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016.
2. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* Аналитический алгоритм построения орбитальной ориентации космического аппарата при неполном измерении компонент вектора состояния // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 128–138. https://doi.org/10.1134/S0002338819040176
3. *Lapin A.V., Zubov N.E., Poklad M.N.* Stabilizing the Orbital Orientation of a Spacecraft at the Absence of Angles Measurements // AIP Conf. Proceedings. 2023. V. 2549. Iss. 1, 150016. P. 1–7. https://doi.org/10.1063/5.0108421
4. *Лапин А.В., Зубов Н.Е.* Реализация в среде MATLAB аналитических алгоритмов модального управления по состоянию и выходу // Инженерный журнал: наука и инновации. 2020. № 1 (97). С. 1–16. https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-1-1950
5. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван дер Воуда // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476. № 3. С. 260–263.
6. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* О связи модальной управляемости по выходу динамической MIMO-системы и вида матриц с желаемыми спектрами // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2021. № 2. С. 1–12.
7. *Зубов Н.Е., Лапин А.В.* Приведение модального управления по выходу для стационарных систем четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами к управлению по состоянию системой с одним входом // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 2. С. 26–43. https://doi.org/10.31857/S0002338823010122
8. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Лапин А.В.* Аналитический синтез управления по выходу боковым движением воздушного судна при отсутствии измерений углов скольжения и крена // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 3. С. 133–140. https://doi.org/10.31857/S0002338823020191
9. *Van der Woude J.W.* A Note on Pole Placement by Static Output Feedback for Single-Input Systems // Systems & Control Letters. 1988. V. 11. Iss. 4. P. 285–287. https://doi.org/10.1016/0167-6911(88)90072-2
10. *Bass R.W., Gura I.* High Order System Design via State-Space Considerations // Joint Autom. Control Conf. 1965. V. 3. P. 311–318.

11. *Ackermann J.* Der Entwurf linearer Regelungsysteme im Zustandraum // Regeltech, Proz.-Datenverarb. 1972. V. 20. Iss. 1–12. P. 297–300. https://doi.org/10.1524/auto.1972.20.112.297
12. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Generalization of Bass – Gura Formula for Linear Dynamic Systems with Vector Control // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2020. V. 89. Iss. 2. P. 41–64. https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-41-64
13. *Лапин А.В., Зубов Н.Е., Пролетарский А.В.* Обобщение формулы Аккермана для некоторого класса многомерных динамических систем с векторным входом // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2023. № 4 (109). С. 18–38. https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-18-38
14. *Mackey D.S.* Structured Linearizations for Matrix Polynomials // Doctoral Thesis, Univ. of Manchester, 2006.
15. *Luenberger D.G.* Canonical Form for Linear Multivariable Systems // IEEE Transactions on Autom. Control. 1967. V. 12. Iss. 3. P. 290–293. https://doi.org/10.1109/TAC.1967.1098584
16. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.
17. *Kosyanchuk V.V., Zybin E.Yu., Glasov V.V. et al.* High-Speed Rotorcraft Flight Control System Fault Tolerance Under Parametric Uncertainty // XX Technical Scientific Conf. on Aviation Dedicated to the Memory of N. E. Zhukovsky, Moscow, 2023. P. 18–25. https://doi.org/10.1109/TSCZh58792.2023.10233650
18. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* Аналитический синтез модального регулятора по выходу для управления ориентацией спускаемого аппарата при спуске в атмосфере Земли // Изв. вузов. Авиационная техника. 2019. № 3. С. 46–59.
19. *Микрин Е.А., Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н.* Аналитическая формула вычисления регулятора для линейных SIMO-систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 1. С. 1–11.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 61–68

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 62-50

О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ В СРЕДЕ С КВАДРАТИЧНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ[1]

© 2024 г. Т. А. Мосенков[1, *], Т. Ю. Фигурина[2,]**

[1] МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

[2] ИПМех РАН, Москва, Россия

**e-mail: timofei.mosenkov@math.msu.ru*

***e-mail: t_figurina@mail.ru*

Поступила в редакцию 18.12.2023 г.
После доработки 26.01.2024 г.
Принята к публикации 13.05.2024 г.

Рассмотрено движение двух взаимодействующих тел вдоль прямой в среде с квадратичным сопротивлением. Сила взаимодействия тел является управляющим воздействием, ограничений на которое не накладывается. Решена задача о перемещении каждого из тел системы на заданное расстояние при условии, что тела покоятся в начале и конце движения. В построенном движении моменты времени, в которые сила взаимодействия мгновенно изменяет скорости тел, чередуются с интервалами времени, на которых сила взаимодействия либо равна нулю, либо обеспечивает движение системы с постоянным расстоянием между телами.

Ключевые слова: Система двух тел, управление, квадратичное трение, прямолинейное движение

DOI: 10.31857/S0002338824030055 **EDN:** UQALER

ON THE MOVEMENT OF TWO INTERACTING BODIES IN A MEDIUM WITH QUADRATIC RESISTANCE.

T. A. Mosenkov[a, *], T. Yu. Figurina[b, **]

[a] Lomonosov Moscow State University

[b] Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS

**e-mail: timofei.mosenkov@math.msu.ru*

***e-mail: t_figurina@mail.ru*

The motion of two interacting bodies along a straight line in a medium with quadratic resistance is considered. The force of interaction between bodies is a control action, on which no restrictions are imposed. The problem of moving each of the bodies of the system over a given distance is solved, provided that the bodies are at rest at the beginning and at the end of the movement. In the constructed motion, moments of time at which the interaction force instantly changes the velocities of the bodies alternate with time intervals at which the interaction force is zero.

Keywords: System of two bodies, control, quadratic resistance, rectilinear motion

Введение. Системы с изменяемой конфигурацией могут двигаться в сопротивляющихся средах без наличия специальных движителей, таких как колеса, гусеницы, ноги, плавники. Принцип, позволяющий таким системам двигаться, состоит в том, что при изменении конфигурации изменяются скорости тел, входящих в систему, а вместе со скоростями – и силы сопротивления среды, являющиеся внешними по отношению к системе. Управляя конфигурацией системы, можно управлять внешними силами, действующими на систему, и, таким образом, движением системы. При этом точки системы, взаимодействующие со средой, в отличие от колесных и шагающих локомоционных систем, остаются неизменными.

Движение систем нескольких взаимодействующих тел вдоль прямой рассматривалось во множестве публикаций. Значительная часть этих публикаций была посвящена капсульным

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00128).

системам, в которых одно из тел (внутреннее) не взаимодействует со средой. В классе систем с изменяемой конфигурацией, таких, что все тела системы взаимодействуют с внешней средой, самой простой является система двух взаимодействующих тел. Вместе с тем система двух тел не будет достаточно простой в управлении, она лишена некоторых возможностей, присущих системам, состоящим из нескольких (трех и более) тел. Например, в случае сухого трения каждое из тел системы нескольких тел (возможно, за исключением самого массивного, если его масса слишком велика) может двигаться при покоящихся остальных телах, что позволяет управлять системой, перемещая тела по очереди. Изучению прямолинейных движений системы двух взаимодействующих тел, каждое из которых взаимодействует со средой, посвящено относительно небольшое количество статей. В работе [1] рассмотрено движение системы двух тел вдоль прямой с сухим Кулоновым трением. Предполагалось, что сила взаимодействия тел кусочно-постоянна, в начале движения тела покоятся и расстояние между телами ограничено. Построено движение, перемещающее каждое из тел системы на одинаковое расстояние и приводящее тела в состояние покоя (такое движение может быть периодически продолжено). Найденное движение оптимизировано по параметрам с целью максимизации средней скорости системы. В работе [2] изучено движение системы двух тел вдоль прямой с сухим анизотропным трением в предположении, что расстояние между телами ограничено, скорость их относительного движения имеет два интервала постоянства, причем одно из тел движется только в положительном направлении, а другое меняет направление своего движения. Решены задачи максимизации средней скорости движения системы и минимизации энергозатрат по параметрам системы: соотношению масс, коэффициентов трения, скоростям относительного движения тел. В работе [3] решена задача оптимального управления системой двух тел вдоль прямой с Кулоновым трением. Предполагалось, что в начале и конце движения система покоится, ограничений на силу взаимодействия не налагалось. Найдено движение, позволяющее переместить оба тела системы на заданное расстояние за минимальное время, в том числе в классе безреверсных движений, при котором тела не изменяют направления своего движения (такие движения доставляют также минимум энергозатрат).

Движение системы двух одинаковых тел вдоль прямой в среде с вязким кусочно-линейным трением рассмотрено в работе [4]. Предполагалось, что управление системой задается кинематически, расстояние между телами изменяется по гармоническому закону, а трение мало по сравнению с силами взаимодействия тел. Найдена средняя скорость стационарного движения системы, при котором скорость каждого из тел является периодической функцией времени. Движение системы двух тел вдоль прямой в предположении, что расстояние между телами изменяется по заданному закону, а силы сопротивления среды малы по сравнению с силами взаимодействия тел, исследовалось в рабое [5] для различных законов трения, в том числе кусочно-линейного трения, степенного трения, Кулонова трения. Были найдены условия, позволяющие системе начать движение из состояния покоя. Для линейного сопротивления было показано, что система при любых начальных условиях и любых законах возбуждения не может покинуть ограниченной области. Был получен критерий возможности движения системы вдоль прямой для различных законов сопротивления среды. В частности, для случая сухого Кулонова трения этот критерий состоит в неравенстве друг другу масс тел системы и в неравенстве друг другу длительности времен сближения тел и их удаления друг от друга.

В данной работе изучается прямолинейное движение системы двух взаимодействующих тел в вязкой среде. Малости сил сопротивления среды не предполагается. Исследуется движение системы в изотропной среде; при этом система может двигаться в обоих направлениях за счет законов управления, а не только в направлении с меньшим сопротивлением, как в случае анизотропного трения. В качестве закона, описывающего вязкое сопротивление среды, был выбран квадратичный закон, являющийся наиболее простым и близким к реальному.

1. Постановка задачи. Рассматривается прямолинейное движение двух взаимодействующих тел A_1 и A_2 в среде с квадратичным сопротивлением (рисунок). Обозначим через m_1 и m_2 массы тел A_1 и A_2, через x_1 и x_2 – координаты этих тел вдоль прямой их движения, через v_1 и v_2 – скорости тел. Пусть f – сила, действующая со стороны тела A_1 на тело A_2. Действие силы f приводит к изменению скоростей тел, при этом изменяются действующие на эти тела силы сопротивления среды, являющиеся внешними по отношению к системе. Поэтому, управляя

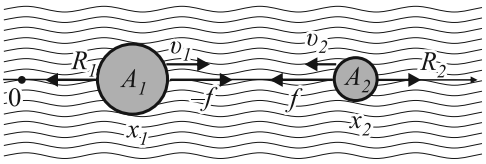


Рисунок. Система двух взаимодействующих тел в вязкой среде.

силой взаимодействия тел f, можно управлять движением системы как целого. Уравнения движения системы тел вдоль прямой имеют вид

$$\dot{x}_i = v_i, \quad i = 1,2, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} m_1\dot{v}_1 &= -f + R_1(v_1), \\ m_2\dot{v}_2 &= f + R_2(v_2), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где силы квадратичного сопротивления $R_i(v_i)$ определяются соотношениями

$$R_i(v_i) = -c_i v_i|v_i|, \quad i = 1,2. \tag{1.3}$$

Здесь через c_1 и c_2 обозначены коэффициенты сопротивления среды движению тел A_1 и A_2. Считаем, что в начальный момент времени тела покоятся и выполнены равенства

$$x_i(0) = 0, \;\; v_i(0) = 0, \quad i = 1,2. \tag{1.4}$$

Будем искать движения, при которых каждое из тел системы перемещается на заданное расстояние L и приходит в состояние покоя в конце движения:

$$x_i(T) = L, \quad v_i(T) = 0, \quad i = 1,2, \tag{1.5}$$

где T – время движения, которое не задано заранее. Ограничений на силу взаимодействия тел f не налагается. Сформулируем следующую задачу.

З а д а ч а. Построить движение системы тел, определяемое соотношениями (1.1)–(1.4) и удовлетворяющее терминальному условию (1.5).

Обозначим через p суммарный импульс системы:

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2. \tag{1.6}$$

Импульс системы, в силу (1.1)–(1.3), подчиняется уравнению

$$\dot{p} = -c_1 v_1|v_1| - c_2 v_2|v_2|. \tag{1.7}$$

Будем считать, что верно неравенство $m_1^2 c_2 \neq m_2^2 c_1$. Выполнение этого неравенства необходимо, в противном случае невозможно вывести центр масс системы из состояния покоя и соответственно решить поставленную задачу. Действительно, допустим, что $m_1^2 c_2 = m_2^2 c_1$ и система покоится в момент времени t_0. В правой окрестности этого момента, если тела выведены из состояния покоя, скорость одного из них положительна, а другого отрицательна. Предполагая, что $v_1 > 0, \;\; v_2 < 0$ (другой случай рассматривается аналогично), получим, что $\dot{p} = -c_1 v_1^2 + c_2 v_2^2$. Преобразуем это равенство, выразив c_2 из равенства $m_1^2 c_2 = m_2^2 c_1$. Имеем

$$\dot{p} = \frac{c_1}{m_1^2}(m_2 v_2 - m_1 v_1)\, p.$$

При начальном условии $p(t_0) = 0$ решением (единственным) этого уравнения является $p \equiv 0$, т.е. центр масс системы не может быть выведен из состояния покоя. Поэтому допускаем, что

$m_1^2 c_2 \neq m_2^2 c_1$. Без ограничения общности положим за счет соответствующей нумерации тел, что

$$m_1^2 c_2 > m_2^2 c_1. \tag{1.8}$$

Поскольку ограничений на силу взаимодействия f не налагается, в том числе эта сила может быть выражена дельта-функцией Дирака, то возможно мгновенно перераспределять импульс системы между телами. При этом импульс $p(t)$ является непрерывной функцией времени, а скорости тел могут претерпевать скачки при условии, что в момент скачка t выполнено:

$$m_1 v_1(t-) + m_2 v_2(t-) = m_1 v_1(t+) + m_2 v_2(t+).$$

2. Решение задачи. Построим движение системы, решающее предложенную задачу. Это движение будет состоять из трех этапов, длительности которых обозначим через τ_1, τ_2, τ_3.

Э т а п 1. В начальный момент времени перераспределим между телами нулевой импульс системы, так что тело A_1 приобретет положительную скорость, тело A_2 – отрицательную скорость, и скорости будут определяться равенствами:

$$v_1(0) = \frac{m_2}{m_1}, \quad v_2(0) = -1. \tag{2.1}$$

На этапе 1, при $t \in (0, \tau_1)$, тела движутся свободно, сила взаимодействия тождественно равна нулю, $f \equiv 0$, и уравнения движения системы (1.1)–(1.3) принимают вид

$$\dot{x}_i = v_i, \ \ m_i \dot{v}_i = -c_i v_i |v_i|, \ \ i = 1,2. \tag{2.2}$$

Интегрируя эти уравнения, с учетом начальных условий (2.1) и равенств $x_i(0) = 0$, $i = 1, 2$, получаем выражения для скоростей и координат тел на этапе 1 движения системы:

$$v_1(t) = \frac{1}{\frac{c_1}{m_1} t + \frac{m_1}{m_2}}, \quad v_2(t) = -\frac{1}{\frac{c_2}{m_2} t + 1}, \quad t \in [0, \tau_1),$$

$$x_1(t) = \frac{m_1}{c_1} \ln\left(\frac{c_1 m_2}{m_1^2} t + 1 \right), \quad x_2(t) = -\frac{m_2}{c_2} \ln\left(\frac{c_2}{m_2} t + 1 \right). \tag{2.3}$$

Импульс системы записывается как

$$p(t) = \frac{m_2 t \left(m_1^2 c_2 - m_2^2 c_1 \right)}{\left(c_1 m_2 t + m_1^2 \right)\left(c_2 t + m_2 \right)}.$$

Импульс системы $p(t)$ монотонно возрастает в некоторой окрестности нуля и в силу (1.8) положителен на всем этапе 1 движения. Выбор скоростей $v_i(0)$, при котором скорость первого тела положительна, а второго – отрицательна (2.1), был обусловлен требованием положительности импульса при $t > 0$. Обозначим импульс в конце этапа 1 через p^*, $p^* = p(\tau_1) > 0$.

Э т а п 2. Мгновенно перераспределим импульс p^* между телами A_1 и A_2 так, что оба тела приобретут одинаковую положительную скорость:

$$v_1(\tau_1) = v_2(\tau_1) = v^* = \frac{p^*}{m_1 + m_2}. \tag{2.4}$$

Затем выберем силу взаимодействия между телами так, чтобы система двигалась как единое целое, т.е. чтобы скорости тел совпадали. Уравнение для импульса (1.7) при наложении условия $v_1 \equiv v_2$, в случае $v_i > 0$, $i = 1,2$, преобразуется к виду

$$\dot{v}_i = -\frac{c_1 + c_2}{m_1 + m_2} v_i^2, \quad t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2), \quad i = 1,2. \tag{2.5}$$

При совпадении начальных скоростей (2.4) и выполнении (2.5) скорости тел совпадают на всем этапе 2 движения:

$$v_1 \equiv v_2, \quad t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2).$$

Сила взаимодействия f, при которой движение каждого из тел подчиняется уравнению (2.5), определяется равенством

$$f(t) = -\frac{m_2 c_1 - m_1 c_2}{m_1 + m_2} v_i^2, \quad t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2), \quad i = 1,2.$$

Скорости тел в конце этапа 2 вычисляются как

$$v_1(\tau_1 + \tau_2) = v_2(\tau_1 + \tau_2) = \frac{1}{\frac{c_1 + c_2}{m_1 + m_2}\tau_2 + \frac{1}{v^*}}.$$

Пути, пройденные телами на этапе 2, равны и определяются следующим образом:

$$x_i(\tau_1 + \tau_2) - x_i(\tau_1) = \frac{m_1 + m_2}{c_1 + c_2} \ln\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1 + m_2} v^* \tau_2 + 1\right), \quad i = 1,2. \tag{2.6}$$

Заметим, что правая часть этого равенства является монотонно растущей функцией аргумента τ_2, равна нулю при $\tau_2 = 0$ и стремится к бесконечности при $\tau_2 \to \infty$. Из этого следует, что при любом заданном расстоянии $l > 0$ и любом значении величины $v^* > 0$ существует единственное значение $\tau_2 > 0$, при котором каждое из тел проходит расстояние l на этапе 2 движения,

$$x_i(\tau_1 + \tau_2) - x_i(\tau_1) = l, \quad i = 1,2. \tag{2.7}$$

Импульс системы на этапе 2 подчиняется уравнению

$$\dot{p} = -(c_1 + c_2)\frac{p^2}{(m_1 + m_2)^2}, \quad t \in (\tau_1, \tau_1 + \tau_2).$$

Обозначим через $\tilde{p}$ значение импульса системы в конце этапа 2, $\tilde{p} = p(\tau_1 + \tau_2) > 0$.

Э т а п 3. Построим такое движение системы, при котором в конце этапа тела покоятся, а расстояние между ними становится равным нулю. В момент времени $\tau_1 + \tau_2$ мгновенно перераспределим импульс системы $\tilde{p}$ между телами так, что тело A_1 приобретет отрицательную скорость $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_1 < 0$, а тело A_2 – положительную скорость $\tilde{v}_2$, $\tilde{v}_2 > 0$:

$$\tilde{p} = m_1 \tilde{v}_1 + m_2 \tilde{v}_2, \quad \tilde{v}_1 < 0, \quad \tilde{v}_2 > 0. \tag{2.8}$$

Поскольку импульс $\tilde{p}$ положителен, то из положительности правой части равенства (2.8), при его делении на $|\tilde{v}_1|\tilde{v}_2$, с учетом неравенств (2.8) получаем неравенство

$$\frac{m_2}{|\tilde{v}_1|} > \frac{m_1}{\tilde{v}_2}. \tag{2.9}$$

После перераспределения импульса в течение этапа 3 тела движутся свободно, сила взаимодействия тел равна нулю, $f \equiv 0$, движение подчиняется уравнениям (2.2). Скорости тел в конце этапа 3 определяются равенствами

$$v_1(T) = -\frac{1}{\frac{c_1}{m_1}\tau_3 + \frac{1}{|\tilde{v}_1|}}, \quad v_2(T) = \frac{1}{\frac{c_2}{m_2}\tau_3 + \frac{1}{\tilde{v}_2}}, \tag{2.10}$$

$$T = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3.$$

Найдем длительность τ_3 этапа 3, такую, что импульс в конце этапа будет равен нулю:

$$p(T) = 0. \tag{2.11}$$

Подставляя сюда, согласно определению импульса системы (1.6), выражения для скоростей тел (2.10), получаем

$$\left(\frac{m_1 c_2}{m_2} - \frac{m_2 c_1}{m_1}\right)\tau_3 = \frac{m_2}{|\tilde{v}_1|} - \frac{m_1}{\tilde{v}_2}. \tag{2.12}$$

Это уравнение имеет единственное положительное решение τ_3, поскольку множитель перед τ_3 положителен по предположению (1.8), а правая часть положительна в силу (2.9). Таким образом, каким бы ни был импульс $\tilde{p} > 0$ и как бы он не перераспределялся между телами, согласно (2.8), в начале этапа 3, существует такая длительность этого этапа $\tau_3 > 0$, что в конце этапа импульс системы станет равным нулю и, следовательно, перераспределив импульс, возможно мгновенно остановить оба тела системы.

Исследуем вопрос: возможно ли так перераспределить импульс между телами в начале этапа 3 (2.8), чтобы к моменту окончания этапа, когда импульс системы станет равным нулю, координаты обоих тел стали равны друг другу? Выпишем смещения тел на этапе 3. Имеем

$$x_1(T) - x_1(\tau_1 + \tau_2) = -\frac{m_1}{c_1}\ln\left(\frac{c_1}{m_1}|\tilde{v}_1|\tau_3 + 1\right),$$

$$x_2(T) - x_2(\tau_1 + \tau_2) = \frac{m_2}{c_2}\ln\left(\frac{c_2}{m_2}\tilde{v}_2\tau_3 + 1\right).$$

Подставляя в эти равенства величину τ_3, определяемую из выражения (2.12), получаем

$$x_1(T) - x_1(\tau_1 + \tau_2) = -\frac{m_1}{c_1}\ln\frac{m_1(m_1 c_2 - m_2 c_1\lambda)}{m_1^2 c_2 - m_2^2 c_1}, \tag{2.13}$$

$$x_2(T) - x_2(\tau_1 + \tau_2) = \frac{m_2}{c_2}\ln\frac{m_2(m_1 c_2 - m_2 c_1\lambda)}{\lambda(m_1^2 c_2 - m_2^2 c_1)}. \tag{2.14}$$

Здесь введена переменная λ, равная отношению модулей скоростей тел в начале этапа 3:

$$\lambda = \frac{|\tilde{v}_1|}{\tilde{v}_2}. \tag{2.15}$$

Область допустимых значений λ, согласно (2.9), определяется включением

$$\lambda \in \left(0, \frac{m_2}{m_1}\right). \tag{2.16}$$

Поскольку на этапе 2 оба тела проходят одинаковое расстояние l, требование $x_1(T) = x_2(T)$ означает, что сумма расстояний, пройденных на этапах 1 и 3, должна быть одинакова для обоих тел. Иными словами, расстояние, на которое тела отдалились на этапе 1, должно быть равно расстоянию, на которое они сблизились на этапе 3, т.е. должно быть выполнено равенство

$$x_2(T) - x_2(\tau_1 + \tau_2) - \left(x_1(T) - x_1(\tau_1 + \tau_2)\right) = x_1(\tau_1) - x_2(\tau_1). \tag{2.17}$$

Это равенство с учетом (2.13), (2.14) и соотношений (2.3) при $t = \tau_1$ записывается в виде

$$\frac{m_1}{c_1}\ln\frac{m_1(m_1c_2 - m_2c_1\lambda)}{m_1^2c_2 - m_2^2c_1} + \frac{m_2}{c_2}\ln\frac{m_2(m_1c_2 - m_2c_1\lambda)}{\lambda\left(m_1^2c_2 - m_2^2c_1\right)} = \frac{m_1}{c_1}\ln\left(\frac{c_1m_2}{m_1^2}\tau_1 + 1\right) + \frac{m_2}{c_2}\ln\left(\frac{c_2}{m_2}\tau_1 + 1\right). \tag{2.18}$$

Левая часть этого уравнения монотонно убывает с ростом величины λ, при $\lambda \to 0$ стремится к бесконечности, при $\lambda \to m_2/m_1$ стремится к нулю. Величина в правой части уравнения (2.18) положительна. Поэтому существует единственное значение λ из интервала (2.16), при котором равенство (2.18) выполнено. Это значение λ не зависит от величины $\tilde{p}$. Разрешая уравнения (2.8) и (2.15) относительно $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$, получаем искомые значения скоростей в начале этапа 3, при которых импульс системы в конце движения равен нулю, т.е. выполнено равенство (2.11), и смещения тел за все время движения одинаковы, что обеспечивается равенством (2.17). Скорости $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$ пропорциональны значению $\tilde{p}$, однако смещения тел на этапе 3 (2.13), (2.14) не зависят от величины $\tilde{p}$.

Таким образом, показано, что при любом значении импульса $\tilde{p}$ (т.е. при любых длительностях этапов 1 и 2, τ_1 и τ_2) в начале этапа 3 импульс можно мгновенно перераспределить между телами так, что через некоторое время свободного движения обоих тел импульс системы станет равным нулю, а сумма расстояний, пройденных каждым телом на этапах 1 и 3, будет одинакова для обоих тел. Чтобы решить поставленную задачу, достаточно теперь показать, что существует такое расстояние l, на которое сдвигаются оба тела на этапе 2, чтобы на всех трех этапах тела прошли заданное расстояние L.

Действительно, при уменьшении длительности τ_1 этапа 1 смещения тел $x_1(\tau_1), x_2(\tau_1)$ на этапе 1 уменьшаются. В силу формулы (2.17) смещения тел на этапе 3 также уменьшаются:

$$x_i(\tau_1) \underset{\tau_1 \to 0}{\to} 0, \quad x_i(T) - x_i(\tau_1 + \tau_2) \underset{\tau_1 \to 0}{\to} 0, \quad i = 1,2.$$

Поэтому можно выбрать такое τ_1, что для каждого из тел сумма смещений на этапах 1 и 3 будет меньше, чем смещение L:

$$x_i(\tau_1) + x_i(T) - x_i(\tau_1 + \tau_2) = A, \quad i = 1,2, \qquad A < L.$$

Тогда смещение на этапе 2 задается как $l = L - A$. Длительность этапа 2 определяется из формул (2.6), (2.7).

Таким образом, задача решена. Ее решение не единственно, и существует целый интервал значений $\tau_1 \in (0, \tau_{\max}]$, решающих задачу. Кроме того, хотя в формуле (2.1) были зафиксированы начальные скорости $v_i(0)$, за счет пропорционального уменьшения этих величин можно было бы достигнуть малых сдвигов $x_i(\tau_1)$ на этапе 1, даже при фиксированной длительности τ_1 этапа 1. Еще одна возможность при фиксированной величине τ_1 и начальных скоростях, заданных (2.1), состоит в следующем. Если сумма сдвигов на этапах 1 и 3 превышает L, т.е. $x_1(\tau_1) + x_1(T) - x_1(\tau_1 + \tau_2) = L^* > L$, то можно сместить систему на расстояние $2L^*$, используя описанный выше алгоритм, а затем сместить ее на расстояние $2L^* - L > L$ в обратном направлении.

Заметим, что хотя в постановке задачи не накладывалось ограничений на расстояние $x_2 - x_1$ между телами в процессе движения, но за счет уменьшения времени τ_1 этапа 1 или за счет уменьшения скоростей тел в начале этапа 1 можно добиться того, что расстояние между телами не будет превышать заданной, сколь угодно малой величины на протяжении всего времени движения. Заметим еще, что время движения T, решающее задачу, может быть сколь угодно мало за счет выбора больших скоростей тел в начале этапа 1.

Заключение. Решена задача о перемещении вдоль прямой системы двух взаимодействующих тел в изотропной среде с квадратичным законом сопротивления. Предполагалось, что сила взаимодействия тел не ограничена и возможно мгновенно перераспределять импульс между телами. Показано, что можно перевести систему между двумя состояниями покоя так, что каждое из тел переместится на одинаковое заданное расстояние. В построенном движении моменты времени, в которые импульс системы перераспределяется между телами, чередуются с интервалами времени, на которых тела движутся, либо не взаимодействуя друг с другом, либо как единое целое. На этапе 1 после перераспределения нулевого импульса тела движутся, не взаимодействуя друг с другом, в противоположных направлениях, и импульс системы возрастает; на этапе 2 система движется как единое целое, так что скорости тел совпадают; в начале этапа 3 импульс системы перераспределяется, после чего тела сближаются, не взаимодействуя друг с другом. В конце движения импульс системы становится нулевым, и тела мгновенно останавливаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальное прямолинейное движение двухмассовой системы // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 3–9.
2. *Черноусько Ф.Л.* Анализ и оптимизация прямолинейного движения двух- массовой системы // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 707–717.
3. *Bolotnik N., Figurina T.* Optimal Control of a Two-body Limbless Crawler Along a Rough Horizontal Straight Line // Nonlinear Dynamics. 2020. V. 102. № 3. P. 1627–1642.
4. *Zimmermann K., Zeidis I., Pivovarov M., Behn C.* Motion of Two Interconnected Mass Points Under Action of Nonsymmetric Viscous Friction // Archive of Applied Mechanics. Arch Appl Mech. 2010. V. 80. P. 1317–1328.
5. *Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I, Zimmrmann K.* The Motion of a Two-body Limbless Locomotor Along a Straight Line in a Resistive Medium // ZAMM. J. Applied Mathematics and Mechanics. 2016. V. 96. №. 4. P. 429–452.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 69–84

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ

УДК 681.5.015.4

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЯГИ ДВИГАТЕЛЯ И СИЛЫ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПО ДАННЫМ ЛЕТНЫХ ИСПЫТАНИЙ СО СГЛАЖИВАНИЕМ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2024 г. О. Н. Корсун[1, 2,*], Б. К. Поплавский[2], А.В. Стуловский[1], Моунг Хтанг Ом[2]

[1]ФАУ Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем, Москва, Россия

[2]НИУ Московский авиационный институт, Москва, Россия

**e-mail: marmotto@rambler.ru*

Поступила в редакцию 16.02.2024 г.
После доработки 18.03.2024 г.
Принята к публикации 13.05.2024 г.

Предлагается подход для оценивания силы тяги двигателей и силы аэродинамического сопротивления самолета на основе данных летных испытаний. Для получения раздельных оценок сил тяги и аэродинамического сопротивления применяются измерения продольной и нормальной перегрузки, угла атаки, истинной воздушной скорости и барометрической высоты. Преимущество предлагаемого подхода заключается в том, что он не требует использования газодинамических моделей двигателя, летающих лабораторий, измерений усилия в точках крепления двигателя или установки дополнительных датчиков в двигателе. Несмотря на эти преимущества, на практике такой подход обычно не применяется, поскольку он приводит к плохо обусловленной или некорректной задаче идентификации из-за высокой степени линейной зависимости между векторами сил тяги и аэродинамического сопротивления. Предлагаются способы решения указанной проблемы, заключающиеся в разработке специального тестового маневра, который повышает степень обусловленности, а также в использовании специального сглаживания случайных ошибок измерений с помощью уравнений движения летательного аппарата.

Ключевые слова: идентификация силы тяги двигателей летательного аппарата, идентификация моделей движения летательного аппарата, обработка данных летных испытаний

DOI: 10.31857/S0002338824030066 **EDN:** UPYMJE

IDENTIFICATION OF ENGINE THRUST AND AERODYNAMIC DRAG FORCE ACCORDING TO FLIGHT TEST DATA WITH SMOOTHING OF RANDOM MEASUREMENT ERRORS

O. N. Korsun[a, b, *], B.K. Poplavsky[b], A.V. Stulovskii[a], Moung Htang Om[b]

[a]Moscow Aviation Institute, National Research University, Moscow, Russia

[b]State Research Institute of Aviation Systems, Moscow, Russia

**e-mail: marmotto@rambler.ru*

In this paper, an approach is proposed to identify the thrust force of engines and the aerodynamic drag force of aircraft according to flight test data. To obtain separate estimates of thrust and drag forces, measurements of longitudinal and normal load factors, angle of attack, true airspeed and barometric altitude are used. The advantage of the proposed approach is that it does not require the use of gas-dynamic models of the engine, flying laboratories, force measurements in the engine mounting points, or the installation of additional sensors in the engine. Despite these advantages, in practice, such an approach is usually not used, since it leads to a poorly conditioned or incorrect identification problem due to the high degree of linear relationship between the vectors of thrust and drag forces. This article suggests ways to solve the problem of poor conditionality, consisting of the development of a special test maneuver that improves the degree of conditionality of the problem, as well as the use of the special smoothing of random measurement errors using the equations of motion of the aircraft.

Keywords: identification of aircraft thrust; identification of aircraft motion models; processing of flight test data

Введение. В авиационной технике оценивание силы тяги самолета является одной из основных задач летных испытаний самолета. Во-первых, сила тяги — важнейший параметр, от которого зависят основные летные характеристики самолета, определяющие его эксплуатационные возможности, а во-вторых, оценки тяги необходимы для проверки и уточнения математических моделей двигателей, которые затем используются на протяжении всего жизненного цикла самолета [1–4].

К сожалению, прямое измерение тяги при летных испытаниях обычно невозможно, поскольку векторы тяги и силы аэродинамического сопротивления очень близки к коллинеарности при малых углах атаки, соответствующих горизонтальному полету. Это означает, что непосредственно в летных экспериментах может быть измерена только сумма тяги и сопротивления. Тем не менее во многих случаях необходимы именно раздельные оценки сил тяги и сопротивления.

По этой причине принятый в настоящее время подход в первую очередь ориентирован на расчет тяги в соответствии с моделями, взятыми из теории газодинамических процессов в газотурбинных двигателях [5]. Этот подход широко известен, должным образом представлен в литературе и относительно сложен. Он формирует отдельную инженерную дисциплину — расчет газодинамических двигателей. В статье обсудим некоторые главные моменты. Расчет тяги на основе газодинамических моделей двигателей учитывает их конструктивные особенности. Требуется также получение большого количества параметров из наземных стендовых испытаний, проводимых перед началом летных. Естественно, наземные стенды не имитируют должным образом условия полета, т.е. высоту и воздушную скорость, поэтому ошибки неизбежны. Чтобы преодолеть это, можно использовать данные летных испытаний. Тем не менее эти данные порождают еще одну группу проблем.

Газодинамическая оценка тяги с помощью полетных данных требует значений давления и температуры в основных секциях двигателя, которые должны быть измерены в полете. В большинстве случаев штатная конструкция двигателя не предусматривает необходимого количества датчиков, поэтому перед началом летных испытаний двигатель должен быть модифицирован специальным образом. Другими словами, для того чтобы учитывать искажения воздушного потока и газовоздушной смеси в основных сечениях двигателя, необходимо установить дополнительные поля датчиков, которые полностью покрывают всю поверхность сечения. В результате двигатель отклоняется от своей штатной конфигурации. Кроме того, такие модификации являются дорогостоящими и отнимают много времени. Эти проблемы должным образом представлены в работах [6, 7]. Анализ ошибок измерения давления и температуры и их влияния на оценку тяги представлен в работе [8]. Другая проблема газодинамического подхода заключается в том, что он не учитывает взаимодействие между двигателем и корпусом самолета, поскольку принимает во внимание только внутренние процессы в двигателе. Для повышения достоверности результатов используются летающие лаборатории, которые обычно представляют собой многомоторные летательные аппараты, на которых тестируемый двигатель, модифицированный надлежащим образом, устанавливается вместо одного из штатных двигателей [1, 6, 7]. Этот подход, вероятно, является лучшим, но требует значительных материальных и временных затрат. Публикации [9,10] знакомят с применением методов стохастической оценки к данным испытаний двигателя, но использование тех или иных математических методов обработки данных может не решить фундаментальные проблемы, коренящиеся в физике процессов. Таким образом, распространенные в настоящее время газодинамические методы сложны, отнимают много времени и имеют свои собственные источники ошибок. Общепринятая оценка относительных погрешностей тяги при таком подходе составляет 4–7% [11, 12], но это в значительной степени зависит от рассматриваемого двигателя, летательного аппарата, задействованных наземных и летно-испытательных комплексов и т.д.

Существуют некоторые особые случаи. Для легких самолетов в ряде случаев используются датчики усилия в точках крепления двигателя [13], но это не работает для самолетов большего размера. В работе [14] представлен очень упрощенный, но широко распространенный подход, который определяет силу лобового сопротивления после принятия гипотезы о том, что тяга соответствует имеющимся априорным данным или определяется при допущении, что сопротивление известно. Двигатели с отклоняемым вектором тяги [15] предоставляют хорошие возможности для оценки тяги, поскольку отклонения в векторе тяги могут создавать некол-

линеарность между тягой и лобовым сопротивлением, но очень немногие самолеты имеют такую возможность. Теоретически можно получить неколлинеарность при больших углах атаки, но этот случай связан с нелинейной и нестационарной аэродинамикой и сильным влиянием угла атаки на тягу.

Другой подход к оценке тяги и лобового сопротивления был разработан в рамках численной аэрогидродинамики или computational fluid dynamics (CFD). При этом уравнения Навье–Стокса, которые определяют поток внутри двигателя и вокруг него, а также вокруг планера, решаются численно. Таким образом, можно получить интегральные оценки тяги и лобового сопротивления, включая взаимодействие двигателя и воздушной рамы. Этот подход всегда был чрезвычайно трудоемким, но в последние годы ситуация значительно улучшилась благодаря прогрессу в программном обеспечении. С точки зрения физики основная проблема CFD заключается в том, что он требует настройки, для чего необходим набор точек калибровки. Эти точки должны быть взяты из данных наземных или летных испытаний, от которых в решающей степени зависит итоговая точность CFD. Пример применения CFD представлен в работе [16], где относительные погрешности оцениваются в 13.5%. Таким образом, каждый метод оценки тяги имеет свои недостатки. Следовательно, полезными являются альтернативные идеи.

В настоящей статье рассмотрен подход, представляющий собой объединение теории идентификации систем и динамики полета. Прямая раздельная оценка тяги и лобового сопротивления, основанная на теории идентификации [17–19], может иметь такие преимущества, как простота моделей и ограниченный набор необходимых датчиков. Однако он не используется на практике, поскольку приводит к некорректным или плохо обусловленным задачам идентификации [16] из-за высокой степени коллинеарности или линейной зависимости между векторами тяги и лобового сопротивления [1, 17–19].

Новизна этого подхода заключается в его оригинальных рекомендациях по регуляризации некорректно поставленных задач. Эти рекомендации включают:

– разработку специального тестового маневра, сформированного таким образом, чтобы на интервале времени обработки обеспечивалась линейная независимость между векторами сил тяги и лобового сопротивления [20, 21];

– исследование алгоритма сглаживания с помощью уравнений движения летательного аппарата [22] для уменьшения влияния случайных ошибок измерений.

Преимуществами предлагаемого подхода являются:

– простая модель объекта, основанная на динамике полета;

– отсутствие необходимости в газодинамических моделях, которые обычно достаточно сложны;

– небольшой набор необходимых бортовых измерений, который включает сигналы продольной и нормальной перегрузки, угол атаки, истинную воздушную скорость и барометрическую высоту;

– метод устойчив к стохастическим ошибкам измерений благодаря алгоритму сглаживания;

– метод учитывает взаимодействие между двигателем и корпусом самолета, поскольку он получает свои оценки непосредственно из полетных данных, которые характеризуют движение воздушного судна (перегрузки, угол атаки, воздушная скорость и высота).

Краткое обоснование новизны этого подхода представлено следующим образом. В настоящее время, как правило, тяга рассчитывается с помощью газодинамических моделей, которые являются сложными и имеют несколько источников ошибок, как упоминалось выше. В данной статье предлагается простая модель объекта, обеспечивающая раздельную идентификацию тяги и сопротивления. Насколько нам известно, этот подход в настоящее время не используется, поскольку он требует решения некорректно поставленной задачи. Авторы рассматривают новый метод, который мог бы достичь этого, в том числе в условиях шума. Ограничения подхода заключаются в следующем:

– предполагается, что тяга постоянна при постоянном режиме работы двигателя и небольших изменениях воздушной скорости, высоты и угла атаки;

– метод может быть чувствителен к систематическим ошибкам измерения угла атаки и воздушной скорости.

В целях уменьшения влияния систематических ошибок при измерении угла атаки и истинной воздушной скорости рекомендуется применение метода, описанного в работе [23].

Далее обсудим взаимосвязь между предлагаемым методом, основанным на идентификации системы и динамике полета, и газодинамическим подходом и методом CFD. Эти методы имеют совершенно разную природу и могут использоваться по отдельности. Естественно, у этих методов есть свои собственные допущения, ограничения и ошибки, и ни один из них не может быть признан лучшим. С другой стороны, гетерогенный характер этих методов означает, что их погрешность должна быть некоррелированной. Следовательно, один метод может служить средством тестирования для другого. Например, предлагаемый метод должен обеспечивать набор калибровочных точек для CFD. Систематическое различие между приведенным методом и газовой динамикой может обеспечить оценку эффекта интерференции. Очевидно, что все результаты должны сравниваться статистически из-за стохастической природы ошибок оценки.

1. Общая постановка задачи. Для определения условий совместной идентифицируемости необходимо построить математическую модель объекта. Для решения этой задачи рассмотрим силы, действующие на воздушное судно в связанной системе координат [1].

В данной системе координат тяга силовой установки $P_x(t)$ представлена в следующем виде:

$$P_x(t) = mgn_x(t) + C_x(t)q(t)S, \tag{1.1}$$

где $P_x(t)$ – проекция силы тяги, $n_x(t)$ – составляющая вектора перегрузки вдоль связанной оси Ox, $C_x(t)$ – коэффициент продольной аэродинамической силы вдоль связанной оси, $q(t)$ – скоростной напор, m – масса самолета, S – площадь крыла. Преобразуем выражение (1.1) с учетом погрешностей при измерениях параметров полета:

$$P_x(t) = mgn_x(t) + C_x(t)q(t)S + \varepsilon(t), \tag{1.2}$$

где $\varepsilon(t)$ – случайная погрешность измерения.

Предположим, что измерения выполнены в дискретные, равноотстоящие моменты времени с шагом $\Delta t = h$. Тогда $\Delta t = h$ для N последовательных измерений получаем

$$t_i = hi, \;\; i = \overline{0, N-1}.$$

Для решения задачи на интервале измерений выделим скользящий базовый интервал, содержащий $2l+1$ измерение каждого параметра:

$$T_k = [t_{k-l} \dots t_k \dots t_{k+l}].$$

Для упрощения вычислений на каждом скользящем интервале введем отсчет времени от его средней точки, полагая $t_k = 0$. Для точек базового интервала можно записать систему уравнений:

$$P_x(t_j) = mgn_x(t_j) + C_x(t_j)q(t_j)S + \varepsilon(t_j), \;\; j = \overline{-l, l}. \tag{1.3}$$

В дальнейшем условимся $\hat{n}_x(t_j)$ обозначать через $n_{x,j} n_x(t_j)$, а $q(t_j)\hat{q}(t_j) - q_j q(t_j)$.

Для раздельного определения $P_x(0)$ и $C_x(0)$, т.е. значений в средней точке скользящего базового интервала, необходимо сделать ряд предположений о характере изменения этих параметров на скользящем базовом интервале, т.е. на интервале $[t_{-l} \dots t_l]$. Рассмотрим расчетные формулы совместной идентификации $P_x(0)$ и $C_x(0)$, полученные при различных предположениях, справедливость которых обеспечивается выполняемыми в полете режимами, выбором длины скользящего интервала, шагом по времени между измерениями и использованием априорной информации о ЛА.

Предположим, что скользящий интервал $T = [t_{-l} \dots 0 \dots t_l] \;\; T \in [t_{-m} \dots t_j \dots t_m]$, тяга на скользящем интервале постоянна $P_x(t_j) = \text{const} = P_x(0)$, $\forall t_j \in T$, а сила сопротивления при малом изменении угла атаки:

$$P_x(t_j) = \text{const} = P_x(0) \;\; \forall t_j \in T,$$

где $j=\overline{-l,l}$, $P_x(0), C_x(0), C_x^{\alpha}(0)$ — значения параметров в средней точке интервала $[t_{-l}\dots t_l]$, $\Delta\alpha(t_j)=\Delta\alpha(t_j)-\alpha(0)$ $[t_{-m}\dots t_m]$. Обозначим $\Delta\alpha(t_j)=\Delta\alpha_j$. Тогда

$$\Delta\alpha(t_j)=\Delta\alpha_j.$$

При сделанных предположениях систему уравнений (1.3) относительно неизвестных параметров $P_x(0)$, $C_x(0)$ и $C_x^{\alpha}(0)$ можно записать $(2l+1)$ уравнений:

$$\begin{gathered}P(0)=mgn_{x,-l}+C_x(0)q_{-l}S+C_x^{\alpha}(0)\Delta\alpha_{-l}q_{-l}S+\varepsilon_{-l};\\ \dots\\ P(0)=mgn_{x,0}+C_x(0)q_0S+C_x^{\alpha}(0)\Delta\alpha_0q_0S+\varepsilon_0;\\ \dots\\ P(0)=mgn_{x,l}+C_x(0)q_lS+C_x^{\alpha}(0)\Delta\alpha_lq_lS+\varepsilon_l.\end{gathered}\tag{1.4}$$

В матричной форме записи эта система принимает вид:

$$Za=mgN_x+\varepsilon,\tag{1.5}$$

где

$$Z=\begin{bmatrix}1 & -q_{-l}S & -\Delta\alpha_{-l}q_{-l}S\\ \dots & \dots & \dots\\ 1 & -q_0S & -\Delta\alpha_0q_0S\\ \dots & \dots & \dots\\ 1 & -q_lS & -\Delta\alpha_lq_lS\end{bmatrix};a=\begin{bmatrix}P(0)\\ C_x(0)\\ C_x^{\alpha}(0)\end{bmatrix};N_x=\begin{bmatrix}n_{x,-l}\\ \dots\\ n_{x,0}\\ \dots\\ n_{x,l}\end{bmatrix};\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_{-l}\\ \dots\\ \varepsilon_0\\ \dots\\ \varepsilon_l\end{bmatrix}.$$

В случае применения метода наименьших квадратов для оценки элементов вектора a, т.е. для определения $\hat{a}$ из условия

$$\hat{a}=\arg\min_a\sum_{j=-l}^{l}\varepsilon_j^2(a)=\arg\min_a\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon,$$

оценка $\hat{a}$ равна

$$\hat{a}=\left(Z^{\mathrm{T}}Z\right)^{-1}Z^{\mathrm{T}}N_xmg.\tag{1.6}$$

Дисперсионная матрица оценки элементов вектора $\hat{a}$ при некоррелированных погрешностях e_j может быть вычислена по формуле:

$$D[\hat{a}]=\sigma_{\varepsilon}^2\left(Z^{\mathrm{T}}Z\right)^{-1}.$$

В более подробной форме записи матрицу $Z^{\mathrm{T}}Z$ с целью анализа приведенных формул представим как

$$Z^{\mathrm{T}}Z=\begin{bmatrix}1 & \dots & 1 & \dots & 1\\ -q_{-l}S & \dots & -q_0S & \dots & -q_lS\\ -\Delta\alpha_{-l}q_{-l}S & \dots & -\Delta\alpha_0q_0S & \dots & -\Delta\alpha_lq_lS\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -q_{-l}S & -\Delta\alpha_{-l}q_{-l}S\\ \dots & \dots & \dots\\ 1 & -q_0S & -\Delta\alpha_0q_0S\\ \dots & \dots & \dots\\ 1 & -q_lS & -\Delta\alpha_lq_lS\end{bmatrix}=$$

$$= \begin{bmatrix} (2l+1) & -S\sum_{j=-l}^{l} q_j & -S\sum_{j=-l}^{l} q_j\Delta\alpha_j \\ -S\sum_{j=-l}^{l} q_j & S^2\sum_{j=-l}^{l} q_j^2 & S^2\sum_{j=-l}^{l} q_j^2\Delta\alpha_j \\ -S\sum_{j=-l}^{l} q_j\Delta\alpha_j & S^2\sum_{j=-l}^{l} q_j^2\Delta\alpha_j & S^2\sum_{j=-l}^{l} q_j^2\Delta\alpha_j^2 \end{bmatrix}.$$

Допустим, что полет выполняется с неизменными параметрами $V = \text{const}$ и $H = \text{const}$ (с постоянным скоростным напором $q = \text{const}$). В целях анализа идентифицируемости запишем матрицу $Z^{\mathrm{T}}Z$ следующим образом:

$$Z^{\mathrm{T}}Z = \begin{bmatrix} (2l+1) & -(2l+1)Sq & -(2l+1)Sq\sum_{j=-l}^{l}\Delta\alpha_j \\ -(2l+1)Sq & (2l+1)S^2q^2 & (2l+1)S^2q^2\sum_{j=-l}^{l}\Delta\alpha_j \\ -(2l+1)Sq\sum_{j=-l}^{l}\Delta\alpha_j & (2l+1)S^2q^2\sum_{j=-l}^{l}\Delta\alpha_j & (2l+1)S^2q^2\sum_{j=-l}^{l}\Delta\alpha_j^2 \end{bmatrix}.$$

Вынесем общий множитель $(2l+1)$, тогда матрица $Z^{\mathrm{T}}Z$ примет вид:

$$Z^{\mathrm{T}}Z = (2l+1)\begin{bmatrix} 1 & -Sq & -Sq\sum_{j=-l}^{l}\Delta\alpha_j \\ -Sq & S^2q^2 & S^2q^2\sum_{j=-l}^{l}\Delta\alpha_j \\ -Sq\sum_{j=-l}^{l}\Delta\alpha_j & S^2q^2\sum_{j=-l}^{l}\Delta\alpha_j & S^2q^2\sum_{j=-l}^{l}\Delta\alpha_j^2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку, например, первая и вторая строки совпадают с точностью до постоянного множителя $(-Sq)$, определитель $|Z^{\mathrm{T}}Z| = 0$, рассматриваемая матрица $Z^{\mathrm{T}}Z$ будет вырожденной.

Сформулируем предположение, которое имеет решающее значение для задачи. Допустим, что тяга остается постоянной при постоянном режиме работы двигателя, постоянной высоте полета и небольших изменениях скорости полета, т.е. скоростного напора q. Следовательно, чтобы обеспечить идентифицируемость, необходимо изменить скорость полета, при этом изменения относительно исходного установившегося значения должны быть небольшими (точные значения зависят от типа двигателя и режима полета), чтобы выполнялось условие относительно постоянства силы тяги двигателей на интервале обработки. В то же время перегрузка n_x и столбцы матрицы $Z^{\mathrm{T}}Z$ изменяются из-за изменения скорости полета и скоростного напора q. Этим и обеспечивается условие идентифицируемости.

Для изменения скорости при постоянном режиме работы двигателей можно выполнять, например, последовательные серии пикирований и кабрирований с малыми углами наклона траектории. Изменения угла атаки при переходных процессах можно использовать для оценивания параметров, связанных с углом атаки. Проведенный анализ позволяет сформировать следующие требования к полетному маневру:

– в полете необходимо выполнять режимы, при которых изменяется скоростной напор;

– величина изменений скоростного напора должна выбираться так, чтобы выполнялось допущение о постоянстве тяги на участке обработки при постоянном режиме работы двигателей.

2. Уточнение модели объекта. Аэродинамическая подъемная сила и сила аэродинамического сопротивления в полусвязанной системе координат направлены вдоль осей OX_e и OY_e соответственно. Отметим для лучшего понимания, что при отсутствии бокового движения (в нашем случае) направление оси OX_e совпадает с направлением вектора воздушной скорости, а ортогональная ось OY_e принадлежит поверхности симметрии самолета. Следовательно, силы лобового сопротивления и подъемной силы определяются по следующим формулам [24]:

$$X_e = qSC_{xe}, \; Y_e = qSC_{ye}, \tag{2.1}$$

где $q = \rho_H V^2/2$ – скоростной напор, Па, V – воздушная скорость, м/с, S – эквивалентная площадь крыла, м^2, ρ_H – плотность воздуха на высоте полета H, кг/м^3.

В полусвязанной системе координат аэродинамические коэффициенты принимают вид:

$$C_{xe} = -\left(C_x^0 + C_x^{\alpha}\alpha + C_x^{\alpha^2}\alpha^2\right);$$

$$C_{ye} = C_y^0 + C_y^{\alpha}\alpha + C_y^{\delta_B}\delta_B, \tag{2.2}$$

где δ_B – отклонение рулей высоты, C_x^0 и C_y^0 – коэффициенты аэродинамического сопротивления и подъемной силы при нулевом угле атаки, $C_x^{\alpha}, C_x^{\alpha^2}$ и C_y^{α} – производные аэродинамического сопротивления и подъемной силы по углу атаки, $C_y^{\delta_B}$ – производная подъемной силы по углу отклонения рулей высоты. В формулах (2.2) знак «минус» в первой формуле учитывает, что сила сопротивления направлена против положительного направления полусвязанной оси OX_e.

Перегрузки обычно измеряются в проекциях на связанной системе координат. Для вычисления перегрузки в проекции на оси полусвязанной системы координат из перегрузок проекций связанной системы координат используется следующее преобразование:

$$n_{xe} = n_x\cos\alpha - n_y\sin\alpha, \; n_{ye} = n_x\sin\alpha + n_y\cos\alpha, \tag{2.3}$$

где n_{x_e}, n_{y_e} – проекции перегрузки на оси полусвязанной системы координат OX_e, OY_e, n_x, n_y – проекции перегрузки в связанной системе координат.

После ряда несложных преобразований модель объекта принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} mgn_{x_e} = &-qSC_x^0 - qSC_x^{\alpha}\alpha - qSC_x^{\alpha^2}\alpha^2 - P_{in} + P_{out}\cos\phi_{\delta_e} - \\ &-P_{out}\sin\phi_{\delta_e}\alpha - \frac{1}{2}P_{out}\cos\phi_{\delta_e}\alpha^2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где ϕ_{δ_e} — угол установки двигателя, P_{out}, P_{in} – выходной и входной импульсы двигателя.

Последние два слагаемых целесообразно учесть в явном виде, используя априорную информацию о выходном импульсе P_{out}. Объединим составляющие тяги:

$$P_{eff} = -P_{in} + P_{out}\cos\phi_{\delta_e},$$

где P_{eff} – эффективная тяга двигателя. Тогда уравнение (2.4) принимает вид:

$$mgn_{x_e} = -qSC_x^0 - qSC_x^{\alpha}\alpha - qSC_x^{\alpha^2}\alpha^2 - P_{eff} + f(P_{out_0}), \tag{2.5}$$

$$f(P_{out_0}) = -P_{out_0}\sin\phi_{\delta_e}\alpha - \frac{1}{2}P_{out}\cos\phi_{\delta_e}\alpha^2. \tag{2.6}$$

Этот многочлен зависит от априорного значения выходного импульса P_{out_0}. В этом случае можно использовать априорные значения. Легко показать, что при разумных предположениях погрешность такого приближения пренебрежимо мала.

Обратите внимание, что регрессор для тяги P_{eff} (эффективная тяга, если быть точным) равен единице. Следовательно, идентификация возможна, только если динамическое давление изменяется в определенных пределах. Очевидно, что при маневрировании угол атаки также изменяется, что позволяет оценить параметры силы лобового сопротивления, связанные с ним. Следовательно, можно оценить вектор параметров, который включает в себя тягу $P = P_{eff}$ и компоненты силы лобового сопротивления $C_x^0,\ C_x^\alpha, C_x^{\alpha 2}$.

3. Алгоритм снижения влияния шумов измерений. В работе применялись традиционная множественная регрессия или метод наименьших квадратов (МНК) для оценки вектора идентифицированных параметров. Известно, что оценки МНК чувствительны к шуму изменений регрессоров. В этом случае влияние шума возрастает из-за того, что проблема по существу плохо обусловлена [1, 17]. Попытки авторов преодолеть влияние шума с помощью полиномиального сглаживания четвертого и пятого порядков [1], а затем более сложной регуляризации А.Н. Тихонова [17] не дали положительных результатов.

Доказал свою эффективность следующий алгоритм, который является вариантом метода проверки согласованности полетных данных [18]. Авторы [22] ранее сформулировали представленный ниже алгоритм с целью обнаружения динамических ошибок и других систематических погрешностей измерений. В этой работе предложенный метод был успешно применен для сглаживания стохастических погрешностей измерений.

Следующие уравнения получены из общей модели пространственного движения летательного аппарата:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_z - \frac{1}{\cos\beta}\left[\left(\frac{a_x}{V} - \omega_y \sin\beta\right)\sin\alpha + \left(\frac{a_y}{V} + \omega_x \sin\beta\right)\cos\alpha\right],$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{a_z}{V}\cos\beta - \left(\frac{a_x}{V}\sin\beta - \omega_y\right)\cos\alpha + \left(\frac{a_y}{V}\sin\beta + \omega_x\right)\sin\alpha,$$

$$\frac{dV}{dt} = a_x \cos\alpha\cos\beta - a_y \sin\alpha\cos\beta + a_z \sin\beta, \tag{3.1}$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \omega_y \sin\gamma + \omega_z \cos\gamma,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - tg\,\upsilon\,(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos\upsilon}(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma).$$

Здесь α, β – углы атаки и скольжения, рад; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – угловые скорости относительно связанных осей, рад/с; υ, γ, ψ – углы тангажа, крена, рыскания, рад; V – истинная воздушная скорость, м/с; a_x, a_y, a_z – ускорения вдоль связанных осей, определяемые формулами:

$$\begin{aligned} a_x &= g\,(n_x - \sin\upsilon), \\ a_y &= g\,(n_y - \cos\upsilon\cos\gamma), \\ a_z &= g\,(n_z + \cos\upsilon\sin\gamma), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где n_x, n_y, n_z — перегрузки вдоль связанных осей.

Главная особенность этих уравнений заключается в том, что они не зависят от аэродинамических коэффициентов самолета, поскольку входящие в правые части ускорения можно вычислить через измеряемые в полете значения перегрузок.

Уравнения (3.1), (3.2) в векторной форме имеют вид:

$$\dot{y}(t) = f(y(t), a, u(t)), \tag{3.3}$$

где $y(t)$, $u(t)$ — векторы выходных и входных сигналов; a— вектор параметров.

В данном случае вектор $y(t)$ состоит из сигналов $\alpha(t)$ $\alpha(t),\beta(t),V(t),\upsilon(t),\gamma(t)$. В вектор входных сигналов входят измеренные в полете значения угловых скоростей ω_x, ω_y, ω_z и перегрузок n_x, n_y, n_z. Начальные условия $y(t_0)$ задаются по результатам измерений параметров $\alpha(t),\beta(t),V(t),\upsilon(t),\gamma(t)$ в момент начала участка обработки.

Непосредственное численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (3.1) с учетом (3.2) в общем случае не дает положительных результатов, поскольку постоянные составляющие погрешностей измерений входных сигналов ω_x, ω_y, ω_z и n_x, n_y, n_z приводят к появлению погрешности типа линейного тренда, что не позволяет сравнивать выходные сигналы модели и объекта. Для устранения этого эффекта введем вектор неизвестных параметров a, состоящий из постоянных составляющих погрешностей измерений сигналов ω_x, ω_y, ω_z и n_x, n_y, n_z:

$$a^T = \left[C_{\omega_x} C_{\omega_y} C_{\omega_z} C_{n_x} C_{n_y} C_{n_z} \right]. \tag{3.4}$$

Для нахождения оценок параметров (3.4) применим, например, алгоритм идентификации по максимуму правдоподобия. Модель наблюдений в векторной форме имеет вид:

$$z(t_i) = y(t_i) + \eta(t_i), \tag{3.5}$$

где $i = \overline{1, K}$, K — число измерений на участке обработки, $\eta(t_i)$ – шум наблюдения или измерений, который предполагается нормальным вектором случайной последовательности типа белого шума с нулевым математическом ожиданием и постоянной ковариационной матрицей R. Как правило, также предполагается, что шумы независимы, и в этом случае матрица R является диагональной, а ее элементами — отклонения в стохастических погрешностях для каждого канала измерения.

Вектор наблюдения включает сигналы, производные которых находятся в левой части уравнения (3.1):

$$z^{\mathrm{T}}(t) = \left[\alpha(t),\beta(t),V(t),\upsilon(t),\gamma(t)\right]. \tag{3.6}$$

Минимизируемый функционал принимает вид:

$$J(a) = \sum_{i=1}^{K} ((z(t_i) - y(t_i, a, u(t_i)))^{\mathrm{T}} R^{-1} (z(t_i) - y(t_i, a, u(t_i))), \tag{3.7}$$

где $y(t_i, a, u(t_i))$ — выходной сигнал модели объекта.

Алгоритм численной оптимизации, используемый для нахождения оценок параметров, является модификацией классического метода Ньютона [18, 19].

4. Методика выполнения полетного маневра для оценивания абсолютного значения эффективной тяги. Сформулируем методику выполнения режима для одной высоты и скорости полета. В соответствии с общим подходом к оцениванию характеристик самолетов в летных испытаниях указанный маневр необходимо выполнить во всем эксплуатационном диапазоне высот и скоростей полета. Приведенные ниже конкретные значения параметров полета соответствуют только одному частному случаю.

На высота $H = 3000$ м и скорости полета, соответствующей $M = 0.4$ ($V_{\text{пр}} = 410$ км/ч), необходимо сбалансировать самолет в прямолинейном горизонтальном полете (ПГП) с постоянной скоростью, запомнив при этом угол атаки α_0. Выполнить дачи ручкой управления самолетом (РУС) по тангажу «от себя» и «на себя» длительностью 2–2.5 с так, чтобы приращения угла атаки составили $\pm(1–2)°$. Восстановить ПГП на той же высоте и с тем же числом М и углом атаки. Не изменяя режим работы двигателей, перевести самолет в пикирование с малым приращением угла тангажа так, чтобы приборная скорость полета постепенно увеличилась на 10 км/ч до 420 км/ч (число М увеличилось на 0.01 до $M = 0.41$). Затем перевести самолет в прямолинейный набор высоты так, чтобы скорость с тем же темпом уменьшилась на 10 км/ч

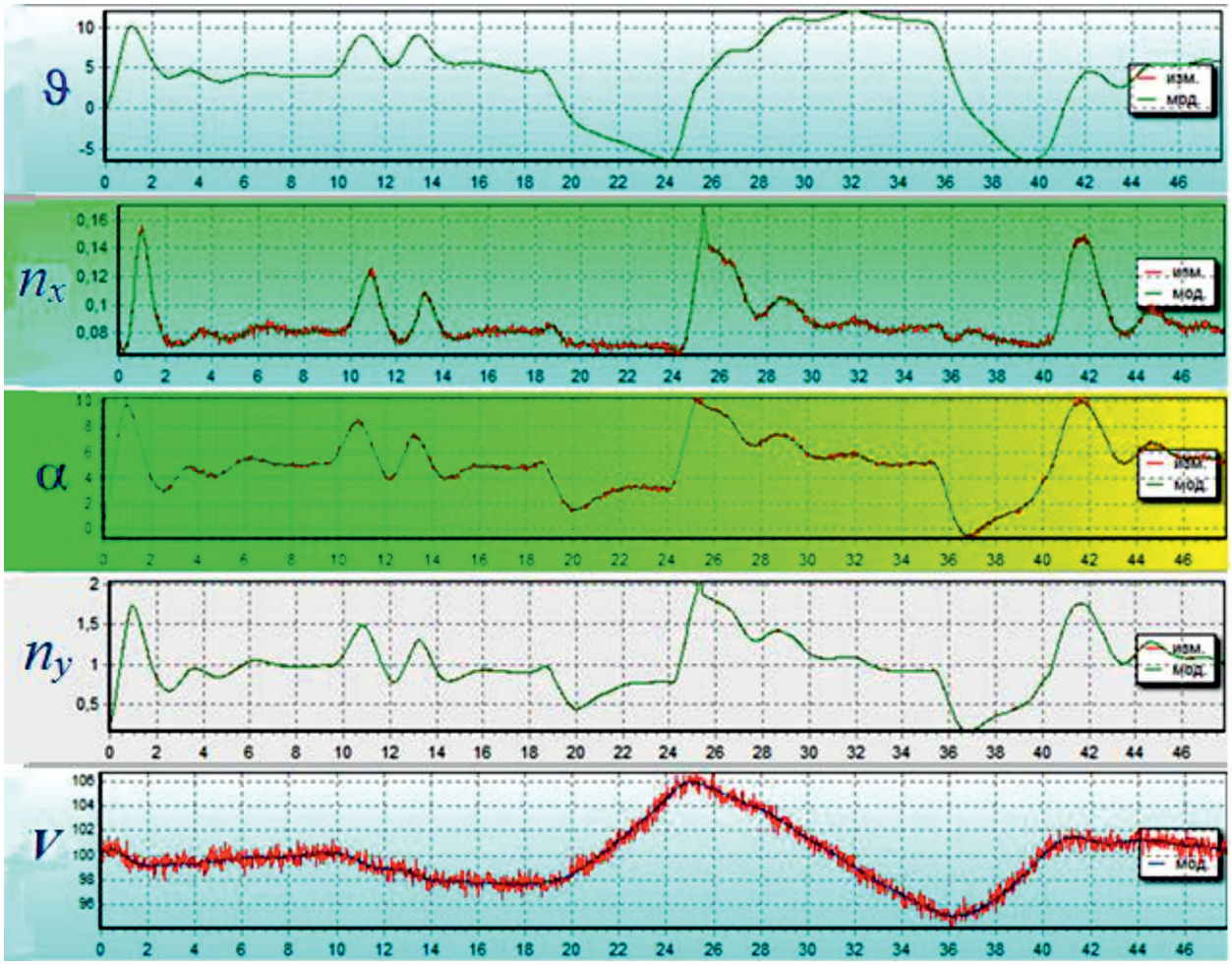


Рис. 1. Участки полетного тестового маневра с постоянным режимом работы двигателя.

от исходного значения, т.е. до 400 км/ч (число M уменьшилось на 0.01 до M = 0.39). Далее снова перевести самолет в пикирование и увеличить скорость с тем же темпом до исходного значения 410 км/ч (M = 0.4). Восстановить ПГП с M = 0.4 ($V_{пр}$ = 410 км/ч) на исходной высоте в пределах $H_0 \pm 250$ м. Выполнить дачи РУС по тангажу «от себя» и «на себя» длительностью 2–2.5 с так, чтобы приращения угла атаки составили ±(1–2)°. При выполнении режима угол атаки выдерживать в диапазоне $\alpha_0 \pm (1–2)°$, при переводах в пикирование и кабрирование допускается превышение этого ограничения.

Таким образом, требуется при постоянном режиме работы двигателя выполнить плавное колебание по приборной скорости ±10 км/ч (dM = ±0.01) за счет малых изменений угла наклона траектории. Выполнить аналогичный режим, создавая приращения по приборной скорости ±15 км/ч (dM = ±0.015).

Для полетного тестового маневра с постоянным режимом работы двигателя характерны следующие участки (рис. 1):

– балансировка самолета в ПГП с постоянной скоростью полета (M = 0.4);

– выполнение дач РУС по тангажу «от себя» и «на себя» длительностью 2–2.5 с так, чтобы приращения угла атаки составили ±(2–3)°;

– восстановление ПГП с исходными значениями высоты H, числа M и угла атаки α;

– перевод самолета в пикирование с малым приращением угла тангажа, позволяющим увеличить число M на 0.03 (M = 0.43);

– перевод воздушного судна в прямолинейный набор высоты так, чтобы число M с тем же темпом уменьшилось на 0.06 (M = 0.37);

– перевод самолета в пикирование с целью увеличения скорости полета с тем же темпом до исходного значения числа M = 0.4;

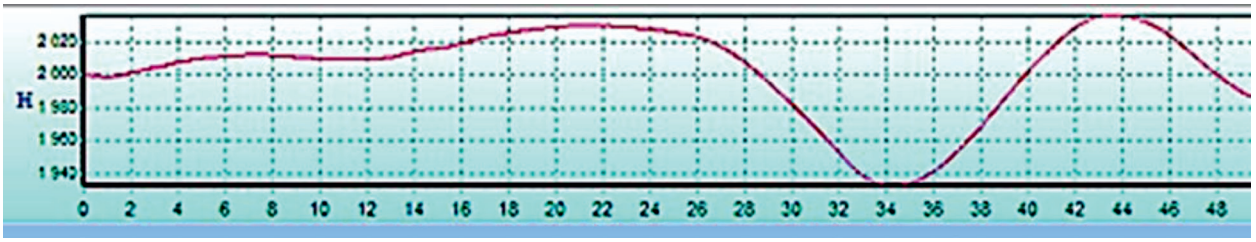


Рис. 2. Отклонения по высоте при летном испытательном маневре при постоянном режиме работы двигателя.

– восстановление ПГП с числом M = 0.4 на исходной высоте в предела $H_0 = \pm 250$ м с последующим выполнением дач РУС по тангажу «от себя» и «на себя» длительностью 2–2.5 с, позволяющих получить приращения угла атаки ±(2–3)°.

Основные требования к режиму полета заключаются в том, что отклонения воздушной скорости и соответственно числа Маха, высоты полета и угла атаки должны быть относительно небольшими. Например, высота изменяется в пределах ±(30–60) м (рис. 2). Обычно влияние таких отклонений на тягу незначительно. Это также относится к изменениям угла атаки в пределах ±(1–3)° относительно горизонтального полета и рекомендуемым отклонениям по Маху ±(0.015–0.025). В следующей части статьи обсудим эти ограничения более подробно.

Для оценки точности предложенного алгоритма использовали данные моделирования, полученные с помощью стенда полунатурного моделирования полета учебно-тренировочного самолета традиционного типа, т.е. с низко расположенным прямым крылом, турбореактивными двигателями, установленными по обе стороны от фюзеляжа, с размахом крыльев 10 м и весе 5600 кг. Моделирующий стенд включал в себя модель системы дистанционного управления полетом, модель аэродинамических характеристик. Сравнение модели с результатами летных испытаний показало, что, например, относительные расхождения между моделью и фактическими выходными сигналами самолета при подаче ступенчатого входного сигнала в канале тангажа не превысили 3.0–3.5%.

Тестовые режимы на стенде выполнялись операторами без значительной летной квалификации (как правило, приглашались авиационные инженеры и исследователи, имеющие опыт пилотирования наземных тренажерных комплексов). Их задача состояла в том, чтобы выдерживать отклонения по числу M, высоте и углу атаки, как указано выше, и никаких других требований не предъявлялось. Таким образом, все реализации тестовых режимов отличались друг от друга, при этом разброс по скорости полета и угла атаки достигал 20–30%. Как описано ниже, это не повлияло на точность оценок. Таким образом, режимы испытаний толерантны к точности пилотирования.

На рис. 1 показано, что режим испытаний состоит из достаточно небольших отклонений параметров полета, которые далеки от эксплуатационных ограничений для большинства типов воздушных судов. Скорости изменения параметров также малы и при необходимости могут быть еще уменьшены. Это означает, что тип воздушного судна и его динамические характеристики не имеют решающего значения для эффективности метода.

Этот вывод подтверждается в следующей части статьи, где рассматривается не только учебный реактивный самолет с относительно высокими динамическими характеристиками, но и весьма инерционный транспортный самолет, масса которого больше примерно в 10 раз.

5. Оценка точности алгоритма определения по данным стендового моделирования. Аэродинамика моделировалась с помощью линейной модели, которая обычно имеет место при малых угла атаки. Задавалась параболическая зависимость коэффициента лобового сопротивления от угла атаки, что также соответствует наиболее распространенному случаю.

Абсолютные значения параметров тяги и лобового сопротивления были следующими: тяга $P = 7900$ N; сопротивление при нулевом угле атаки $C_x^0 = 0.02$; производная сопротивления относительно угла атаки $C_x^{\alpha} = 0.006$; производная сопротивления относительно квадрата угла атаки $C_x^{\alpha^2} = 0.0008$.

Для одних и тех же условий полета, т.е. для одного и того же числа Маха и высоты, режим испытаний повторялся 6 раз, и для окончательной оценки тяги было взято среднее значение.

Таблица 1. Относительные погрешности в оценке коэффициентов тяги и силы сопротивления при уровне шума измерений 1 без сглаживания

№ п/п	P	C_x^0	C_x^α	$C_x^{\alpha^2}$
	%			
1	0.27	0.75	0.01	−0.13
2	0.65	2.1	−0.2	0.18
3	0.44	3.6	2.5	−1.41
4	0.62	2.2	0.33	−0.38
5	0.42	1.5	0.7	−0.73
6	1.25	2.9	−3.08	2.29
Математическое ожидание	0.61	2.18	0.043	−0.03
СКО	0.31	0.92	1.53	1.15

Таблица 2. Относительные погрешности в оценке коэффициентов тяги и силы сопротивления при уровне шума измерений 2 без сглаживания

№ п/п	P	C_x^0	C_x^α	$C_x^{\alpha^2}$
	%			
1	1.45	5.54	0.55	−0.45
2	2.58	7.95	−1.03	0.9
3	3.62	11.8	−0.58	0.68
4	3.36	11.3	0.32	−0.25
5	1.97	7.35	2.12	−1.81
6	3.99	11.2	−6.85	5.21
Математическое ожидание	2.83	9.19	−0.91	0.713
СКО	0.91	2.36	2.84	2.19

Поскольку пилотами были люди, все реализации, естественно, отличались. Затем идентификация была выполнена классическим методом наименьших квадратов (МНК) в двух вариантах: сначала без предварительного сглаживания, а затем с предварительным сглаживанием, как описано выше, чтобы уменьшить влияние шумов измерений. Шумы измерений на уровне 1 представляли собой гауссовские последовательности с нулевыми средними и среднеквадратическими отклонениями (СКО) в каналах продольной и нормальной перегрузок 0.001, а в измерениях угла атаки и воздушной скорости соответственно 0.06° и 0.6 км/ч. На уровне 2 СКО шумов были в 2 раза больше, чем на уровне 1.

Исследования показывают, что классический МНК без предварительного сглаживания обеспечивает приемлемую точность оценки в 0.61% для шумов измерения уровня 1, т.е. для низкой интенсивности шума (табл. 1). При увеличении шума до уровня 2, что соответствует значениям, ожидаемым в летном эксперименте, погрешности возрастают почти до 2.83% (табл. 2). Для уменьшения этого шума предлагается применить идентификацию МНК с предварительным сглаживанием полетных данных. Это снижает погрешности оценки до 0.65–0.7%. Относительные ошибки в оценке коэффициентов тяги и лобового сопротивления на уровнях 1 и 2 представлены ниже: оценки без сглаживания приведены в табл. 1 и 2; оценки с предварительным сглаживанием – в табл. 3 и 4.

Следовательно, согласно данным средств моделирования, погрешности в оценках тяги составляют менее 1% при низких или сглаженных случайных шумах измерений. С одной стороны, эта точность весьма хорошая, с другой — нужно иметь в виду, что она была достигнута при следующих допущениях:

– тяга постоянна во время тестового режима;

– ошибки измерений являются случайными, а не систематическими.

В данной конкретной задаче сглаженные оценки параметров полета не представляют большого интереса, поскольку нужны оценки коэффициентов тяги и лобового сопротивления. Однако следует отметить, что алгоритм сглаживания дает оценки, которые очень близки к истинным значениям. Это следует из того факта, что СКО расхождений между измерения-

Таблица 3. Относительная погрешность в оценке коэффициента тяги и лобового сопротивления при уровне шума измерений 1 с использованием метода сглаживания

№ п/п	P	C_x^0	C_x^α	$C_x^{\alpha^2}$
	%			
1	0.39	1.5	−0.017	−0.05
2	0.63	1.5	0.6	0.25
3	1.6	1.5	3.83	2.25
4	0.99	2	1.25	0.63
5	0.64	2	0.23	0.19
6	−0.29	0.05	−2.27	−1.75
Математическое ожидание	0.66	1.425	0.604	0.253
СКО	0.573	0.654	1.808	1.172

Таблица 4. Относительная погрешность в оценке коэффициента тяги и лобового сопротивления при уровне шума измерений 2 с использованием метода сглаживания

№ п/п	P	C_x^0	C_x^α	$C_x^{\alpha^2}$
	%			
1	0.41	1.5	-0.067	0.01
2	0.54	1.5	0.87	0.38
3	2.15	1.5	6.7	3.98
4	1.5	3.5	1.83	1.2
5	0.79	3	0.37	0.44
6	−1.18	−1.7	−4.8	−3.75
Математическое ожидание	0.702	1.55	0.817	0.377
СКО	1.032	1.66	3.370	2.267

ми параметров полета и оценками очень близки к СКО шумов, а средние значения близки к нулю, т.е. различия обусловлены влиянием шумов.

Таким образом, метод сглаживания работал примерно так же, как и в случаях проверки совместимости полетных данных [21, 24]. Новизна заключается в том, что в данной задаче именно такой тип сглаживания значительно улучшает решение некорректной задачи идентификации в условиях шума измерений.

В заключение статьи представим дополнительные подтверждения того, что предлагаемый метод мало чувствителен к изменениям типа самолета и стиля пилотирования. Описанные выше эксперименты проводились на пилотажном стенде небольшого учебного реактивного самолета, а тестовые режимы выполнялись пилотами-людьми. Рассмотрим совсем другой случай.

Возьмем модель транспортного реактивного самолета (вес 57 000 кг, скорость 0.27 M и высота полета 3000 м); назовем это самолетом типа 2. Зададим тестовый маневр, выполненный с помощью чисто математического моделирования. Графики этого тестового режима представлены на рис. 3. Балансировка в горизонтальном полете выполнялась автоматически, а затем руль высоты отклонялся, как показано на нижнем графике рис. 3, на котором базовый период входного сигнала составлял 33 с. Отклонения руля высоты были описаны математически без участия пилотов-людей.

Моделирование проводилось шесть раз с шумом измерения уровня 2. Относительные погрешности в оценках тяги по методу МНК с предварительным сглаживанием представлены в табл. 5 в столбце P, %. Результаты близки к предыдущему случаю (табл. 4); средняя погрешность составляет менее 1%.

Как упоминалось выше, критической точкой предлагаемого способа является предположение о постоянстве тяги. Очевидно, наиболее критичным параметром, который может влиять на тягу при постоянном режиме работы двигателя, является число Маха. На рис. 4 представлен типичный график относительного изменения тяги при постоянной высоте полета и режиме работы двигателя в зависимости от M.

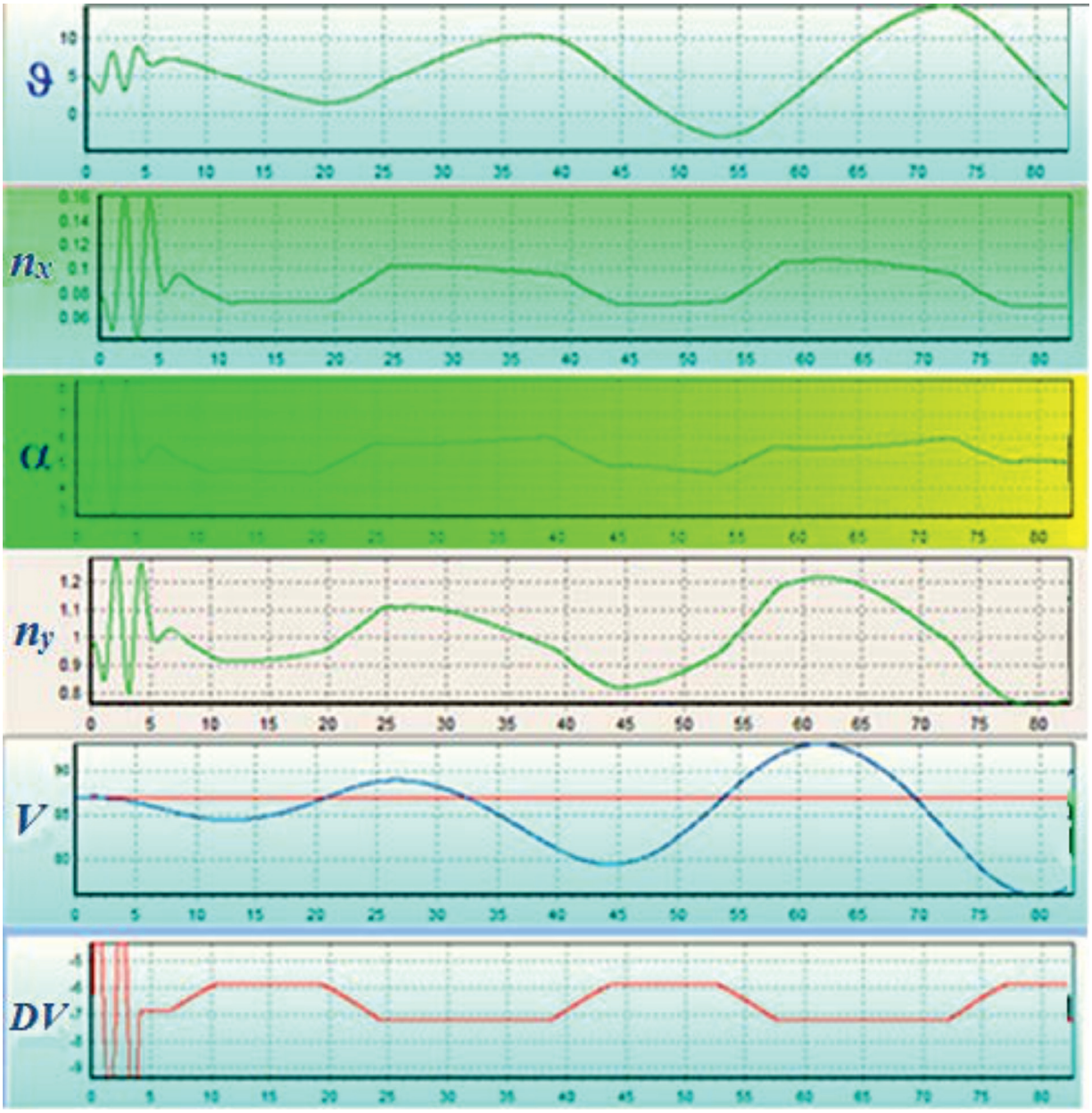


Рис. 3. Летный испытательный маневр (автоматический) с постоянным режимом работы двигателя для транспортного реактивного самолета (тип 2).

Во-первых, мы видим интервал M = 0–0.4, где тяга вообще не изменяется, т.е. при низких скоростях полета предположение может быть выполнено полностью. Для больших изменений числа M порядка 0.25 получаем для рассматриваемого примера изменение тяги менее чем на 0.3%. Примем заведомо увеличенное значение. Итак, предположим, что изменение тяги составляет 1.0%, и повторим моделирование транспортного самолета и оценку тяги по методу МНК с предварительным сглаживанием при уровне шума 2.

Результаты представлены в табл. 5 в столбце P + dpvar. Как можем видеть, относительная погрешность оценки тяги возрастает до 2.47%. Это может быть приемлемо в отдельных случаях, но рост погрешности значителен по сравнению со случаем, когда выполнено предположение о постоянстве тяги. Этот пример также показывает, что характеристики двигателя, полученные с помощью газодинамического подхода, могут быть полезны в рамках предлагаемого метода для целей планирования эксперимента.

Таким образом, можно сделать вывод, что в предположении постоянства тяги при постоянном режиме работы двигателя предлагаемый метод обеспечивает достоверные ошибки оценки

Таблица 5. Относительные погрешности в оценке тяги при уровне шума измерений 2 с использованием метода сглаживания для транспортного реактивного самолета типа 2

№ п/п	P	P + dpvar
	%	
1	0.46	0.97
2	2.67	3.3
3	−1.51	6.9
4	0.43	0.38
5	3.34	2.64
6	0.44	0.647
Математическое ожидание	0.97	2.47
СКО	1.76	2.46

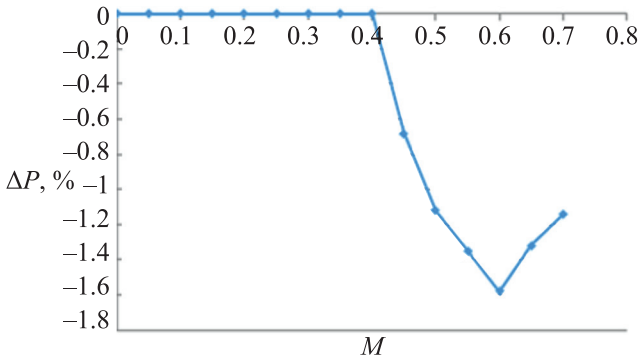


Рис. 4. Типичные отклонения тяги (ΔP, %) от начального значения при (M = 0–0.4) в зависимости от M для транспортного самолета.

менее 1%, включая случайные шумы измерения. Это подтверждается примерами обработки данных моделирования. В случаях, когда допущение о постоянстве нарушается, метод обладает определенной робастностью, как показано выше. Однако этот случай требует специального исследования. Вполне вероятно, что для того, чтобы справиться со значительными изменениями тяги во время режима летных испытаний, потребуется модификация метода. Действительно, как показано в работе [24], основным источником погрешностей идентификации параметров являются отклонения в реальном объекте модели, предполагаемые при идентификации.

Заключение. Предлагается подход, который обеспечивает идентификацию силы тяги двигателей и силы аэродинамического сопротивления в соответствии с данными летных испытаний на основе параметрической идентификации динамических систем. Преимущества метода в том, что в нем используются только измерения стандартных датчиков, которые обычно устанавливаются на борту современных самолетов. Недостатком этого подхода является плохая обусловленность задачи идентификации, которая затрудняет его практическое применение.

Методы, предложенные в статье, направлены на решение проблемы раздельных оценок тяги и лобового сопротивления. Для достижения этой цели в статье получены следующие результаты:

– математический анализ задачи, показывающий источник линейной зависимости между силами тяги и лобового сопротивления, т.е. нарушение условий параметрической идентифицируемости, и позволяющий сформулировать основные требования к маневру полета;

– рассмотрена математическая модель объекта, удобная для раздельной идентификации сил тяги и лобового сопротивления;

– подробно описан тестовый полетный маневр, обеспечивающий выполнение условий идентифицируемости;

– предложен алгоритм сглаживания полетных данных, который значительно снижает влияние случайных ошибок при измерениях параметров полета;

– получены оценки точности приведенного метода по результатам математического и стендового моделирования в условиях шумов измерений, показано, что при уровнях случайных погрешностей измерений, которые приблизительно соответствуют летному эксперименту, ошибка определения тяги не превышает 1%.

Необходимо учитывать, что ключевой особенностью представленного метода является предположение о том, что тяга остается постоянной, если режим работы двигателя не изменяется и колебания скорости полета относительно невелики. Систематические погрешности измерений оцениваются с использованием метода из работы [23] или при помощи других подходов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильченко К.К., Леонов В.А., Пашковский И.М., Поплавский Б.К.* Летные испытания самолетов. М.: Машиностроение, 1996. 745 с.
2. PART 25; Airworthiness Standard: Transport Category Airplanes. FAA. Department of Transport: Washington, DC, USA, 1999.
3. SAE AIR 1703A; In-Flight Thrust Determination. Society of Automotive Engineers: Warrendale, PA, USA, 2006.
4. SAE AIR 5450; Advanced Ducted Propulsor In-Flight Thrust Determination. Society of Automotive Engineers: Warrendale, PA, USA, 2016.
5. *Добрянский Г.В., Мартьянова Т.С.* Динамика авиационных газотурбинных двигателей. М.: Машиностроение, 1989. 240 с.
6. *Kurtenbach F.J., Burcham F.W.* Flight Evaluation of a Simplified Gross Thrust Calculation Technique Using an F100 Turbofan Engine in an F-15 Airplane; NASA Technical Paper 1782; NASA: Washington, DC, USA, 1981.
7. *Conners T.R.* Measurement Effects on the Calculation of In-Flight Thrust for an F404 Turbofan Engine; NASA Technical Memorandum 4140; NASA: Washington, DC, USA, 1989.
8. *Lee J., Yang I., Yang S., Kwak J.S.* Uncertainty Analysis and ANOVA for the Mesurement Reliability Estimation of Altitude Engine Test // J. Mech. Sci. Technol. 2007. V. 21. P. 664–671.
9. *Hoff J.C.* A Probabilistic In-flight Thrust Estimation Process // Proc. SFTE 39th Annual Symposium. Fort Worth, Brazil, 2008.
10. *Hoff J.C., Barbosa J.R.* Application of a Stochastic In-Flight Thrust Determination Process to Real Engine Data // Proc. 3rd CTA DLR Workshop on Data Analysis and Flight Control. S.J. Campos, Brasil, 2009.
11. *Andreev S.P., Makarov V.E.* The Numerical Analysis of Impact of Changes in Flight Conditions and in Engine's Regime at Cruise on Airplane's Aerodynamic Characteristics // Proc. 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences ICAS 2014. St. Petersburg, Russia, 2014.
12. *Lin Z., Xiao H., Zhang X., Wang Z.* Thrust Prediction of Aircraft Engine Enabled by Fusing Domain Knowledge and Neural Network Model. Aerospace. 2023. V. 10. P. 493.
13. *Muhammad H., Muhardi H., Kuntjoro W., Sritjahjono B.E.* In-Flight Thrust Determination by Load Measurement on the Engine Mounting System // Proc. ICAS 2000. Harrogate, UK, 2000. P. 533.1–533.7.
14. *Girija G., Parameswaran V., Raol J.R., Srinathkumar S.* Estimation of Lift and Drag Characteristics of an Aircraft from Flight Data // J. Aeronaut. Soc. India. 1991. V. 43. P. 285–292.
15. *Bowers A.H., Pahle J.W.* Thrust Vectoring on the NASA F-18 High Alpha Research Vehicle; NASA/TM 4771; NASA: Washington, DC, USA, 1996.
16. *Khasyofi M., Hartono F.* Development Testing Method and Analysis Static Thrust for Propeller Based Propulsion // Proc. Intern. Conf. on Aerospace and Aviation. Bandung City, Indonesia, 2018.
17. *Tikhonov A.N., Arsenin V.Y.* Solution of Ill-Posed Problems; Winston & Sons: Washington, DC, USA, 1977; ISBN 0-470-99124-0.
18. *Klein V., Morelli E.A.* Aircraft System Identification: Theory and Practice; AIAA: Reston, VA, USA, 2006. 499 p.
19. *Maine R.E., Iliff K.W.* Identification of Dynamic Systems: Theory and Formulation; NASA RP 1138; NASA: Washington, DC, USA, 1985. 160p.
20. *Korsun O.N., Poplavsky B.K., Prihodko S.J.* Intelligent Support for Aircraft Flight Test Data Processing in Problem of Engine Thrust Estimation // Procedia Comput. Sci. 2017. V. 103. P. 82–87.
21. *Korsun O.N., Poplavsky B.K., Om, M.H.* Identification of the Engine Thrust Force Using Flight Test Data // Proc. Intern. Conf. on Aerospace System Science and Engineering ICASSE 2021. Lecture Notes in Electrical Engineering / Eds Z. Jing, D. Strelets. Singapore: Springer, 2023. V. 849.
22. *Korsun O.N., Nikolaev S.V., Om M.H.* Detection of Dynamic Errors in Aircraft Flight Data // Proc. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. Moscow, Russia, 2021. V. 1027. P. 012011.
23. *Korsun O.N., Nikolaev S.V., Pushkov S.G.* Algorithm for Estimating Systematic Measurement Errors for Air Velocity, Angle of Attack, and Sliding Angle in Flight-testing // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2016. V. 55. P. 446–457.
24. *Korsun O.N., Om M.H.* The Practical Rules for Aircraft Parameters Identification Based on Flight Test Data // Metascience Aerosp. 2024. V. 1. P. 53–65.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 85–93

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 62-50

СРАВНЕНИЕ НАИХУДШЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ ИЗ ДВУХ МГНОВЕННЫХ УДАРОВ С ВОЗМУЩЕНИЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА[1]

© 2024 г. В. А. Корнеев[1]

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

e-mail: korneev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 04.10.2023_ г.
После доработки 23.02.2024 г.
Принята к публикации 13.05.2024 г.

Осциллятор с квадратичным демпфированием подвержен воздействию двух последовательных однонаправленных ударов заданной суммарной интенсивности. Максимизируемым критерием качества служит значение максимума модуля смещения (по времени) тела осциллятора. Найдены параметры мгновенных ударов, обеспечивающие наибольшее значение критерия качества. Проведено сравнение по критерию качества наихудшего воздействия из двух мгновенных ударов с наихудшим возмущением, полученным для множества возмущений прямоугольного профиля с заданным импульсом. Показано, что наихудшее возмущение прямоугольного профиля обеспечивает большее смещение осциллятора, чем наихудшее воздействие из двух мгновенных ударов.

Ключевые слова: оптимальное управление, осциллятор с квадратичным демпфированием, наихудшие возмущения

DOI: 10.31857/S0002338824030084 **EDN:** UPTKYY

COMPARISON OF THE RESPONSES OF A NONLINEAR OSCILLATOR TO THE WORST-CASE DISTURBANCE CONSISTING OF TWO INSTANTANEOUS IMPACTS AND THE WORST-CASE RECTANGULAR PULSE DISTURBANCE[2]

V. A. Korneev[a]

[a]Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

**E-mail: korneev@ipmnet.ru*

An oscillator with quadratic-law damping subjected to two successive instantaneous impacts is considered; the impacts have the same directions and their total impulse is given. The worst-case disturbance that maximizes the peak absolute value of the displacement of the oscillator's body from the equilibrium position (taken as a performance index) is sought. The parameters of the two-impact disturbance that provides a maximum for the performance index are determined. A comparison of the worst-case two-impact disturbance with the worst-case rectangular pulse disturbance in terms of the value of the performance index is performed; both disturbances have the same impulse. It is shown that the worst-case rectangular pulse provides a larger value for the peak absolute value of the displacement of the oscillator than the two-impact disturbance does.

Keywords and phrases: oscillator with a quadratic-law damper, optimal control, worst-case disturbance

Введение. Рассмотрение задач об оптимальной противоударной гарантированной защите объектов, расположенных на подвижном подверженном ударам основании, приводит к необходимости решать задачу о наихудшем возмущении. Различные методы и подходы к решению проблемы противоударной изоляции достаточно полно изложены в работах [1–6]. В [3, 4]

[1] Работа выполнена по теме госзадания (госрегистрация № 124012500443-0).

[2] The present work was supported by the Ministry of Science and Higher Education within the framework of the Russian State Assignment under contract no. 124012500443-0

рассматриваются пассивные изоляторы, для которых движение изолируемого объекта относительно основания задается уравнением:

$$m\ddot{x} + k|\dot{x}|^n \operatorname{sign}\dot{x} + cx = v(t), \quad v = -m w_1(t), \quad n = 1, 2. \tag{0.1}$$

Здесь $n = 1, 2$ соответствует линейному и квадратичному демпфированию соответственно, m – масса защищаемого объекта, w_1 – ускорение основания относительно неподвижной системы координат, x – координата объекта относительно основания, k – коэффициент демпфирования, c – коэффициент жесткости. Величина $-mw_1$ играет роль внешнего возмущения, а величина $u(x,\dot{x},t) = -k \mid \dot{x} \mid^n \operatorname{sign}\dot{x} - cx$ предполагается ограниченной по абсолютной величине, т.е. $| u(x,\dot{x},t) | \le A$, $A > 0$. Определяется множество V знакопостоянных функций $v(t)$ с ограниченным интегралом по времени:

$$V = \{v(t) : v(t) \ge 0, \int_0^\infty v(\tau)d\tau \le v_0\}, \tag{0.2}$$

где v_0 – заданная положительная величина. В качестве критерия качества для рассматриваемого изолятора (0.1) выбирается максимальная величина смещения объекта относительно основания, обозначим ее $J_1(v)$. Вводится величина $J_2(v)$ – абсолютное наибольшее значение по времени величины $u(x,\dot{x},t)$. Требуется определить параметры k и c, обеспечивающие минимум величине $J_1(v)$ при условии $| u(x,\dot{x},t) | \le A$.

Случай мгновенного удара, определяемого функцией Дирака $v = v_0\delta(t)$, подробно изучен в [3, 4] как для линейного осциллятора, так и для осциллятора с квадратичным демпфированием. В указанных работах показано, что для линейного осциллятора дельта-удар $v = v_0\delta(t)$ представляет собой наихудшее возмущение из множества (0.2) по отношению к обеим величинам $J_1(v)$ и $J_2(v)$. Для осциллятора с квадратичным демпфированием в [3, 4] для случая мгновенного удара получены значения коэффициентов $k = m^2A/v_0^2$, $c = 2mA^2/v_0^2$, доставляющие минимум величине $J_1(v)$ при условии $| u(x,\dot{x},t) | \le A$. Эти значения k и c обеспечивают возможность реализации предельных возможностей защиты объекта от мгновенного удара $v(t) = v_0\delta(t)$. Представляет интерес сравнить значение функционала $J_1(v)$ для мгновенного удара со значениями $J_1(v)$ для других воздействий. Для этой цели построим наихудшее возмущение для двух множеств возмущений, содержащих мгновенный удар.

1. Постановка задачи и свойства ее решения. Рассмотрим множество возмущений V_a, в котором возмущения состоят из двух последовательных однонаправленных дельта-ударов суммарной интенсивности v_0 и удовлетворяют соотношениям:

$$v(t) = a\delta(t) + (v_0 - a)\delta(t - t_a), \; 0 \le a \le v_0, \; 0 \le t_a \le t_a^*. \tag{1.1}$$

Здесь t_a^* — первый момент обращения скорости в 0 после действия возмущения $v(t) = a\delta(t)$.

Далее рассматриваем механическую колебательную систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + k \mid \dot{x} \mid \dot{x} + cx = v(t), \quad m > 0, \quad k > 0, \quad c > 0 \tag{1.2}$$

с нулевыми начальными условиями:

$$x(0) = 0, \; \dot{x}(0) = 0. \tag{1.3}$$

Задача 1. Для механической колебательной системы, определяемой дифференциальным уравнением (1.2) с нулевыми начальными условиями (1.3), найти функцию $v_a(t)$, которая принадлежит множеству (1.1) и максимизирует функционал:

$$J_1(v_a) = \max_{t \in [0,\infty)} |x_a(t)|.$$

Здесь $v_a(t)$ — решение уравнения (1.2) при начальных условиях (1.3) и заданном возмущении $v_a(t)$.

Задача 2. Для механической колебательной системы (осциллятора), описываемой дифференциальным уравнением (1.2) с нулевыми начальными условиями (1.3), найти функцию $v(t) = v_b(t)$ из однопараметрического множества V_b возмущений прямоугольного профиля вида

$$v_b(t) = \begin{cases} b, & t \in [0,\ v_0/b], \\ 0, & t > v_0/b, \end{cases} \qquad b > 0, \tag{1.4}$$

которая максимизирует функционал:

$$J_1(v_b) = \max_{t\in[0,\infty)} |x_b(t)|. \tag{1.5}$$

Здесь b — параметр, определяемый из условия максимизации функционала J_1, v_0 — заданный импульс внешнего воздействия, $x_b(t)$ – решение уравнения (1.2) при начальных условиях (1.3) и возмущении $v(t) = v_b(t)$.

Введение безразмерных (штрихованных) переменных

$$\begin{gathered} x' = \frac{\sqrt{mc}}{v_0}x,\ t' = \sqrt{\frac{c}{m}}t, v'(t') = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{m}{c}}v\left(\sqrt{\frac{m}{c}}t'\right), \\ k' = \frac{v_0}{m\sqrt{mc}}k,\ a' = \frac{a}{v_0},\ b' = b\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{m}{c}} \end{gathered} \tag{1.6}$$

приводит к уменьшению количества определяющих параметров. Замена переменных (1.6) в формулах (1.1)–(1.5) позволяет получить формулы того же вида, в которых $m = 1$, $c = 1$, $v_0 = 1$. Далее изложение проводится в безразмерных переменных.

Рассмотрим уравнение с начальными условиями

$$\begin{gathered} \ddot{x} + k|\dot{x}|\dot{x} + x = 0, \\ x(t_0) = x_0, x_0 \geq 0, \dot{x}(t_0) = u_0, u_0 \geq 0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

на интервале времени $[t_0, t_*]$, где t_* – момент первого после начала движения обращения переменной $\dot{x}$ в нуль.

Утверждение 1. Максимум по времени модуля отклонения $|x(t)|$ решения уравнения (1.7) достигается в момент первого после начала движения обращения в нуль его скорости, т.е.

$$J = \max_{t\in[0,\infty)} |x(t)| = x(t_*),$$

$$\dot{x}(t_*) = 0,\ \dot{x}(t) > 0 \ \text{ при } \ t \in (0, t_*).$$

Утверждение 1 вытекает из факта, что $|x(t)| \leq x(t_*)$ при $t \in (0, t_*)$, и диссипативности рассматриваемой колебательной системы. Из утверждения 1 следует, что задача Коши (1.7) на интервале времени $[t_0, t_*]$ приобретает вид:

$$\begin{gathered} \ddot{x} + k\dot{x}^2 + x = 0, \\ x(t_0) = x_0,\ x_0 \geq 0, \dot{x}(t_0) = u_0, u_0 \geq 0. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Поскольку дельта-возмущения, входящие в правую часть равенства из (1.1), влияют лишь на скорость осциллятора и увеличивают ее на положительные значения в моменты $t = 0$ и $t = t_a$, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Для возмущений множества V_a максимум по времени модуля отклонения осциллятора достигается в момент первого после начала движения обращения в нуль его скорости, т. е.

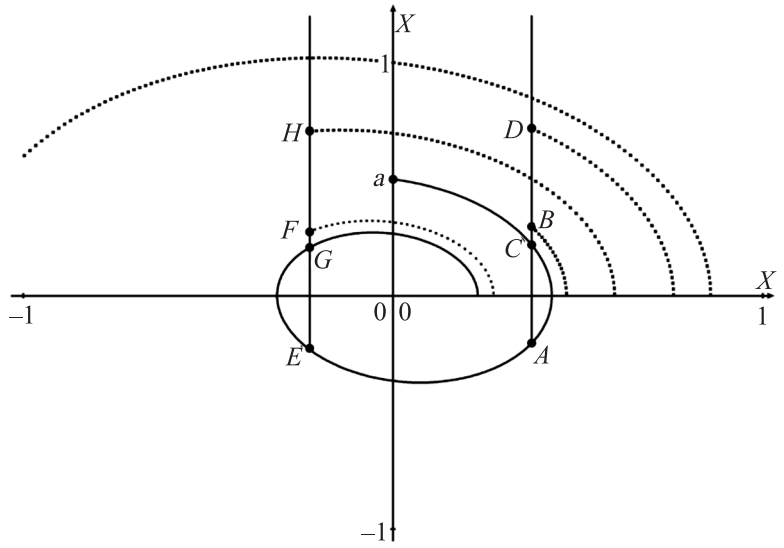


Рис. 1. Траектории движения механической колебательной системы (1.2) на фазовой плоскости при $v(t)\equiv 0$ и различных начальных условиях.

$$J_1 = \max_{t\in[0,\infty)} |x_v(t)| = x_v(t_*), \dot{x}_v(t_*) = 0,$$

$$\dot{x}_v(t) > 0 \ \text{ при } \ t \in (0, t_*).$$

Из утверждения 2 следует, что для решения поставленной задачи 1 о наихудшем возмущении достаточно ограничиться решением уравнения (1.2) с начальными условиями (1.3) при $v(t)$, заданном выражением (1.1), на интервале времени $[0, t_*]$, где $t_* > 0$ – момент первого после начала движения обращения в нуль скорости осциллятора. На этом интервале скорость $\dot{x}$ неотрицательна, и уравнение (1.2) упрощается, принимая в безразмерных переменных вид $\ddot{x} + k\dot{x}^2 + x = v(t)$.

Заметим, что постановка задачи 1 предполагает, что расположение ударов только на первом полуразмахе приводит к максимальному отклонению от положения равновесия по сравнению со всеми другими допустимыми расположениями второго удара. Покажем, что это так. На рис. 1 изображены траектории механической колебательной системы (1.2) на фазовой плоскости при $v(t)\equiv 0$ и различных начальных условиях: сплошная линия — траектория системы (1.2) после первого удара, в результате которого тело осциллятора приобрело скорость a. Фазовая траектория этого движения представляет собой закручивающуюся по часовой стрелке спираль. Согласно нашему предположению, второй удар интенсивности $1-a$ нужно подавать в первом квадранте рисунка.

Предположим, что второй удар мы подаем во втором квадранте, в точке A, после которого система попадает в точку B. Но второй удар можно подать в точке C, лежащей на сплошной кривой в первом квадранте и располагающейся на перпендикуляре к оси абсцисс, опущенном из точки A. После второго удара в точке C система попадает в точку D, которая тоже лежит на этом же перпендикуляре и располагается выше точки B. Поскольку фазовые траектории автономной системы не пересекаются между собой, траектория, исходящая из точки D, пересекает ось абсцисс правее траектории, исходящей из точки B. Тем самым мы построили точку в первом квадранте, обеспечивающую большее смещение.

Предположим теперь, что второй удар подаем в третьем или четвертом квадрантах в точках E или G соответственно, после которого система попадает в точки F или H. Точка H лежит в четвертом квадранте ниже траектории, которая проходит через точку (1,0) и соответствует единичному дельта-удару. Поэтому эта дельта-траектория пересекает ось абсцисс правее траектории, исходящей из точки H, поскольку фазовые траектории автономной системы не пересекаются. Единичный дельта-удар принадлежит множеству V_a, подается в первом квадранте и обеспечивает большее смещение, чем могут обеспечить два удара, подаваемые из точек 0 и H. Поэтому второй удар, подаваемый в четвертом квадрантах, не может быть оптимальным.

Точка F может лежать в третьем или четвертом квадрантах. Если точка F лежит в четвертом квадранте, как изображено на рис. 1, то для нее справедливы те же рассуждения, что и для точки H. Если точка F расположена в третьем квадранте, то из фазового портрета следует, что первое пересечение фазовой кривой, исходящей из точки F, с осью абсцисс происходит правее точки пересечения с осью абсцисс сплошной фазовой траектории. Отсюда и из диссипативности системы следует, что максимальное отклонение осциллятора после второго удара меньше максимального отклонения после первого удара. Таким образом, подача второго удара в третьем или четвертом квадрантах не оптимальна.

Утверждение 3. Для возмущений множества V_b и возмущения в виде дельта-функции $v(t) = \delta(t)$ максимум по времени модуля отклонения осциллятора достигается в момент первого после начала движения обнуления его скорости, т.е.

$$J_1 = \max_{t\in[0,\infty)} \left|x_v(t)\right| = x_v(t_*), \quad \dot{x}_v(t_*) = 0,$$
$$\dot{x}_v(t) > 0 \ \text{ при } \ t \in (0, t_*).$$

Справедливость утверждения 3 также следует из диссипативности рассматриваемой системы.

Решение задачи Коши (1.8) на интервале времени $[t_0, t_*]$. Функция $x(t)$ имеет положительную производную и монотонно возрастает на интервале (t_0, t_*). Переходя в уравнении из (1.8) к независимой переменной x, получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\frac{dw}{dx} + 2kw + 2x = 0, \quad w(x_0) = u_0^2; \ w = \dot{x}^2. \tag{1.9}$$

Решение задачи Коши (1.9) определяется выражениями:

$$\begin{aligned} w(x) &= C_0 e^{-(2kx-1)} - \frac{1}{2k^2}(2kx-1), \\ C_0 &= \left[u_0^2 + \frac{1}{2k^2}(2kx_0 - 1)\right] e^{2kx_0 - 1}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Для нахождения функции $x(t)$ необходимо численно решать нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{C_0 e^{-(2kx-1)} - \frac{1}{2k^2}(2kx-1)}, x(t_0) = x_0,$$

поскольку его решение не выражается в элементарных функциях или известных специальных функциях.

Соотношения (1.10) из условия $w(x) = 0$ позволяют вычислить максимальное значение переменной $x = x_* = x(t_*)$ без нахождения самого момента времени t_*:

$$x_* = \frac{1 + W_+(2k^2 C_0)}{2k}, \tag{1.11}$$

где $W_+(\xi)$ – "верхняя" ветвь функции Ламберта $W(\xi)$, обратной функции $x(z) = ze^z$, $z \in (-\infty, +\infty)$. Область определения $D[W]$ функции $W(\xi)$ совпадает с областью $R[\xi] = [-1/e, +\infty)$ значений функции $\xi(z)$ [7]. Для верхней ветви функции Ламберта W_+ в современных версиях Matlab существует встроенная процедура ее подсчета lambertw(x) [8].

Значение функционала J при дельта возмущении. Возмущение, отвечающее мгновенному удару с импульсом a, $0 \le a \le 1$, происходящему в начальный момент времени $t = 0$, моделируется дельта-функцией Дирака $v(t) = a\delta(t)$. При мгновенном ударе тело осциллятора приобретает им-

пульс а, $0 \le a \le 1$, в начальный момент времени, и движение осциллятора, подвергнувшегося мгновенному удару, описывается уравнением (1.8) с начальными условиями $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=a$. Величина J определяется формулой (1.11), где $2k^2C_0=(2k^2a^2-1)/e$. Наибольшее отклонение тела осциллятора $J_{a\delta}(k)$ дается формулой:

$$J_{a\delta}(k)=\frac{1+W_+\left((2k^2a^2-1)e^{-1}\right)}{2k}. \tag{1.12}$$

Для значения $J_{a\delta}(k)$ будем также использовать обозначение x_1, т.е. $x_1=J_{a\delta}(k)$. Анализ выражения (1.12) показывает, что $J_{a\delta}(k)\equiv 0$ при $a=0$, а при $a>0$ функция $J_{a\delta}(k)$ монотонно убывает при $k\in(0,+\infty)$, и выполняются предельные соотношения:

$$\lim_{k\to 0} J_{a\delta}(k)=a,\ \lim_{k\to+\infty} J_{a\delta}(k)=0.$$

Предел при $k\to 0$ отвечает наибольшему отклонению линейного недемпфированного осциллятора при мгновенном ударе.

Значение функционала J при возмущении из множества V_a. Движение между первым и вторым ударами. При первом ударе возмущение имеет вид $v_1=a\delta(t)$. В начальных условиях формулы (1.10) полагаем $u_0=a, x_0=0$. Для этих условий выражение C_0 из (1.10) принимает вид:

$$C_0=\left(a^2-\frac{1}{2k^2}\right)\frac{1}{e}.$$

Функция $w(x)$ из (1.10) между первым и вторым ударами вычисляется по формуле

$$w(x)=w_1(x)=\dot{x}^2=\left(a^2-\frac{1}{2k^2}\right)e^{-2kx}-\frac{1}{2k^2}(2kx-1),$$

$$x\in[0,x_1],\ x_1=J_{a\delta}(k),\ w(x_1)=0,$$

т.е. x_1 – значение координаты x, при котором скорость осциллятора обращается в 0.

Когда координата x принимает значение $x_{a0}=x(t_a)$, происходит второй удар, имеющий импульс $1-a$.

Движение после второго удара. Начальная координата: x_{a0}. Начальная скорость:

$$u_a=\sqrt{\left(a^2-\frac{1}{2k^2}\right)e^{-2kx_{a0}}-\frac{1}{2k^2}(2kx_{a0}-1)}+1-a.$$

Снова воспользуемся формулой (1.10), в которой положим $u_0=u_a$. Тогда

$$C_0=\left[u_a^2+\frac{1}{2k^2}(2kx_{a0}-1)\right]e^{2kx_{a0}-1}.$$

Квадрат скорости $w=\dot{x}^2$ после второго удара задается формулой

$$w(x)=w_2(x)=\left[u_a^2+\frac{1}{2k^2}(2kx_{a0}-1)\right]e^{-2k(x-x_{a0})}-\frac{1}{2k^2}(2kx-1).$$

Максимум отклонения x_a после второго удара достигается, когда $w_2(x_a)=0$, при этом

$$x_a=\frac{1}{2k}\left(1+W_+([2k^2u_a^2+2kx_{a0}-1]e^{2kx_{a0}-1})\right).$$

Таким образом, решение задачи 2 сводится к поиску максимума функции $x_a(a,x_{a0})$:

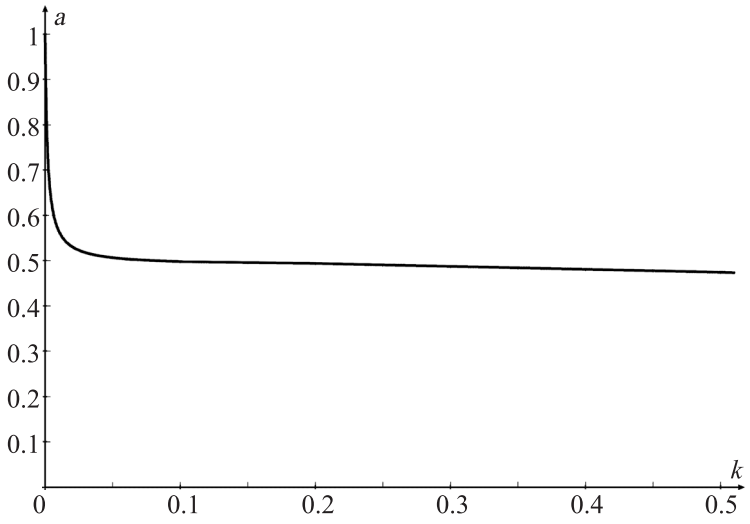


Рис. 2. Зависимость амплитуды первого дельта-удара a от параметра k в случае v_a-возмущения.

$$x_a(a, x_{a0}) = \frac{1}{2k}(1 + W_+([2k^2u_a^2 + 2kx_{a0} - 1]e^{2kx_{a0}-1}),$$

$$u_a = \sqrt{\left(a^2 - \frac{1}{2k^2}\right)e^{-2kx_{a0}} - \frac{1}{2k^2}(2kx_{a0} - 1)} + 1 - a$$

по переменным a, x_0 в области

$$G_k = \{a, x_{a0}:\ 0 \le a \le 1, 0 \le x_{a0} \le x_1(a)\},$$

$$x_1(a) = \frac{1 + W_+((2k^2a^2 - 1)e^{-1})}{2k}.$$

Здесь индекс k указывает на зависимость области от параметра k.

Случай $k = 0$:

$$x_a(a, x_{a0}) = \sqrt{2a^2 + 1 - 2a + 2(1-a)\sqrt{a^2 - x_{a0}^2}},$$

$$x_1(a) = a,\ G_0 = \{a, x_{a0} : 0 \le a \le 1, 0 \le x_{a0} \le a\}.$$

2. Результаты расчета. На языке Matlab были созданы две программы, максимизирующие наибольшее смещение для задач 1 и 2. Первая программа для задачи 1 вычисляет смещение $x_a(a, x_{a0})$ по величинам a, x_{a0} при заданном k и вычисляет зависимости $a(k), x_{a0}(k), x_f(k)$, описывающие значения параметров удара и смещение при наихудшем возмущении. Величина $x_f(k) = x_a(a(k), x_{a0}(k))$ задает наибольшее смещение.

Вторая программа для задачи 2 вычисляет смещение $J(k, b)$ для заданных величин b, k, затем максимизирует смещение по величине b при заданном k и строит зависимость $b(k)$, которая позволила вычислить соответствующие значения наибольшего отклонения $x(k)$ и времени его достижения $t(k)$. Тем самым были численно получены зависимости $x(k)$, $b(k)$ и $t(k)$, характеризующие поведение изучаемого осциллятора при наихудшем возмущении. Эти зависимости приведены в работе [9].

На рис. 2, 3 приведены зависимости $a(k), x_1(a(k)), x_f(k)$, найденные из расчетов первой программы. На рис. 4 нижний график x_δ представляет смещение при дельта-возмущении, даваемое формулой (1.12) при $a = 1$. Средний график x_f представляет смещение $x(k)$ для наихудшего возмущения $v_a(t)$. Верхний график представляет смещение $x_{opt} = J(k, b(k))$ для наихудшего возмущения $v_b(t)$.

Заключение. Для осциллятора с квадратичным демпфированием поставлена задача о выборе параметра однонаправленной внешней силы, обеспечивающего наибольшее смещение

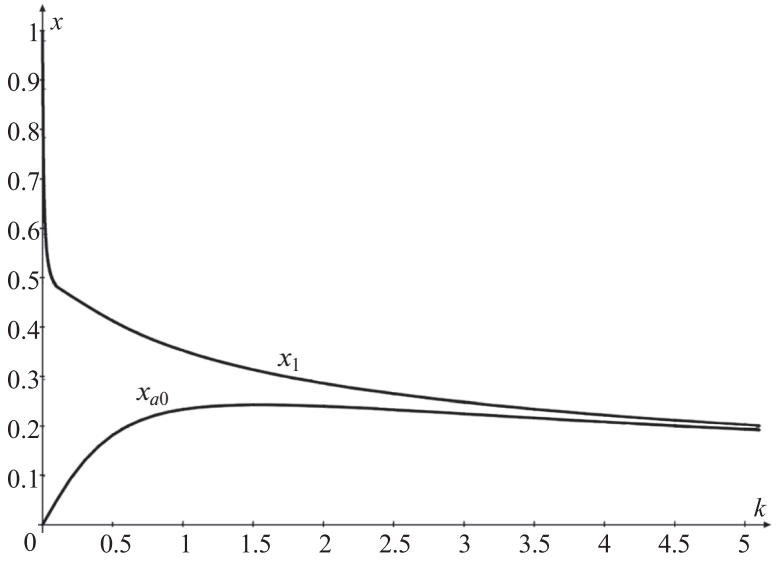


Рис. 3. Зависимость величин x_{a0}, x_1 для второго дельта-удара от параметра k в случае v_a-возмущения.

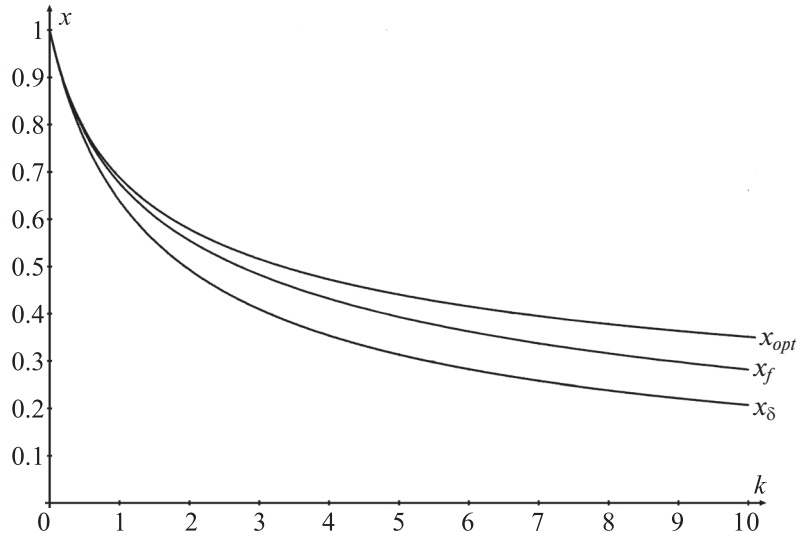


Рис. 4. Зависимости наибольших смещений x_δ, x_f, x_{opt} для дельта-удара, двух дельта-ударов и возмущения прямоугольного типа соответственно от параметра k.

осциллятора от положения равновесия. Выбор параметра осуществляется для двух множеств внешних воздействий. Первое множество возмущений состоит из двух последовательных однонаправленных мгновенных ударов заданной суммарной интенсивности. Второе множество возмущений состоит из постоянных возмущений ограниченной длительности. Численно получены оптимальные значения параметра внешней силы для обоих множеств возмущений, обеспечивающей наибольшее смещение и зависящей от параметров осциллятора. По величине наибольшего смещения осциллятора от положения равновесия проведено сравнение указанных возмущений между собой, а также с возмущением, состоящим из одного мгновенного удара. Показано, что наибольшее смещение осциллятора обеспечивается наихудшим возмущением из множества возмущений постоянной ограниченной длительности, а самое меньшее смещение — одиночным мгновенным ударом заданной интенсивности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sevin E., Pilkey W.*. Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington DC: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971. 162 p.
2. *Коловский М.З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.

3. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 256 с.
4. *Balandin D. V., Bolotnik N. N. and Pilkey W. D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 2001. 436 p.
5. *Pilkey W.D., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Crandal J.R. and Purtsezov S.V.* Injury Biomechanics and Control: Optimal Protection from Impact. Hoboken (NJ): Wiley and Sons, Inc., 2010. 286 p.
6. *Ledezma-Ramirez D.F., Tapia-Gonzalez P.E., Ferguson N., Brennan M., Tang B.*. Recent Advances in Shock Vibration Isolation: An Overview and Future Possibilities // Applied Mechanics Reviews. 2019. V. 71, № 6; https://doi.org/10.1115/1.4044190.
7. *Mezo I.* The Lambert W Function: Its Generalizations and Applications. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2022. 252 p. https://doi.org/10.1201/9781003168102
8. Lambert W function. URL: https://www.mathworks.com/help/symbolic/lambertw.html.
9. *Болотник Н.Н., Корнеев В.А.* О наихудшем возмущении осциллятора с квадратичным демпфированием внешней силой с заданным интегралом // Изв. РАН. МТТ. 2024. № 1. С. 96–109.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 94–103

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.6:004.4

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО СКАЛЯРНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНО-ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ[1]

© 2024 г. А. Ф. Антипин[1], Е. В. Антипина[2, *], С. А. Мустафина[2]

[1]Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия
[2]Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
**e-mail: stepashinaev@ya.ru*

Поступила в редакцию 23.04.2023 г.
После доработки 30.06.2023 г.
Принята к публикации 31.08.2023 г.

Разработан численный алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального управления при наличии терминально-фазовых ограничений. В общем виде приведена постановка задачи оптимального управления с терминально-фазовыми ограничениями, в которой управление является ограниченной кусочно-постоянной функцией. Для решения поставленной задачи сформулирован пошаговый алгоритм, в базу которого положены методы штрафов и дифференциальной эволюции. На основе приведенного алгоритма создана программа, с помощью которой проведен вычислительный эксперимент для каталитической реакции синтеза бензилиденбензиламина. Определен температурный профиль процесса, который обеспечивает наибольшее значение концентрации целевого вещества при ограничении на конверсию исходных веществ.

Ключевые слова: оптимальное управление, фазовые ограничения, эволюционные вычисления, метод штрафов, дифференциальная эволюция

DOI: 10.31857/S0002338824030097 **EDN:** UPRXYB

APPROXIMATE SOLUTION TO THE PROBLEM OF OPTIMAL SCALAR CONTROL WITH TERMINAL-PHASE CONSTRAINTS BASED ON EVOLUTIONARY COMPUTATIONS[2]

A. F. Antipin[a], E. V. Antipina[b,*], S. A. Mustafina[b]

[a]Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia
[b]Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia
[*]e-mail: stepashinaev@ya.ru

A numerical algorithm is developed for searching for an approximate solution to the optimal control problem in the presence of terminal-phase constraints. In general, the formulation of the optimal control problem with terminal-phase constraints is presented, in which the control is a limited piecewise constant function. To solve the problem, a step-by-step algorithm is formulated, which is based on the methods of penalties and differential evolution. Based on this algorithm, a program is created with the help of which a computational experiment is carried out for the catalytic reaction of the synthesis of benzylidenebenzylamine. The temperature profile of the process, which provides the highest concentration of the target substance with restrictions on the conversion of the starting substances, is determined.

Keywords: optimal control, phase constraints, evolutionary computation, penalty method, differential evolution

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2023-0002).

[2] This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (scientific code FZWU-2023-0002).

Введение. Решение задач оптимального управления динамической системой опирается на ее математическую модель, которую можно представить в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащую фазовые переменные, определяющие состояние управляемого процесса и неподдающиеся непосредственному воздействию, и управление, значениями которого можно варьировать в ходе процесса.

В задачах оптимального управления ограничения могут быть наложены не только на переменную управления, но и на фазовые переменные. Наличие ограничений на фазовые переменные усложняет решение оптимизационных задач как в теоретическом исследовании свойств оптимальных процессов, так и в реализации алгоритмов численного решения. Однако наличие фазовых ограничений позволяет учитывать особенности протекания процесса, и тем самым делает его математическое описание более точным.

Существует несколько подходов к решению задач оптимального управления динамическими системами с фазовыми ограничениями. Один из них связан с получением точных необходимых условий оптимальности и построением на их основе вычислительных процедур [1]. Наиболее точные результаты решения задач оптимального управления можно найти, используя принцип максимума. С помощью принципа максимума исходная постановка задачи сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой связано с выбором начальных значений сопряженных переменных [2–5].

Другой подход предполагает применение штрафных функций, с помощью которых обеспечивается переход к задаче оптимального управления без ограничений [6–10]. Однако большинство численных методов решения оптимизационных задач без ограничений зависит от начального приближения, с которого начинается поиск решения [11]. Данную трудность позволяет преодолеть применение эволюционных методов оптимизации, в частности метода дифференциальной эволюции [12–14].

Метод дифференциальной эволюции имеет меньшее количество настраиваемых параметров, в отличие от других методов эволюционного поиска, таких как генетические алгоритмы, метод искусственных иммунных систем и др. Данный метод является прямым и не зависит от начального приближения решения задачи. Отсутствие чувствительности метода дифференциальной эволюции к начальному приближению достигается за счет того, что на каждой итерации оптимизируется не одно возможное решение, а одновременно рассматривается их совокупность, что позволяет увеличить область поиска. Метод дифференциальной эволюции позволяет за небольшое время найти приближенное значение параметров оптимального управления процессом. В работе [15] показано, что для решения оптимизационных задач с помощью метода дифференциальной эволюции затрачивается меньше времени по сравнению с другими стохастическими методами оптимизации.

Целью работы является разработка численного алгоритма решения задачи оптимального управления с терминально-фазовыми ограничениями на основе методов штрафов и дифференциальной эволюции.

1. Постановка задачи. Пусть динамика управляемого процесса описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x(t), u(t), t),\ i = \overline{1,n}, \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$x_i(0) = x_i^0,\ i = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

где $x_i(t) = [x_1(t),...,x_n(t)]^{\mathrm{T}}$ – фазовые переменные, $u(t) \in D_u \subseteq \mathrm{R}$ – переменная управления, D_u – множество допустимых значений управления, $t \in [0,\tau]$ – время, $f_i(x(t),u(t),t)$ – непрерывные вместе со своими частными производными функции.

Управление $u(t)$ принадлежит классу кусочно-постоянных функций $u(t) = u_j,\ t \in [t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{0,r}$, где r – число моментов переключений при разбиении $t_0 < t_1 < ... < t_{r+1},\ t_0 = 0,\ t_{r+1} = \tau$.

Множество допустимых значений управления D_u задается неравенством:

$$u_{\min} \le u(t) \le u_{\max},\ t \in [0,\tau]. \tag{1.3}$$

Положим, что в конечный момент времени на фазовые переменные наложены ограничения:

$$\varphi_j(x(\tau)) = 0,\ j = \overline{1,m}, \tag{1.4}$$

$$\varphi_j(x(\tau)) \le 0,\ j = \overline{m+1,\ p}, \tag{1.5}$$

где $\varphi_j(x)$ – непрерывно-дифференцируемые функции.

Задача оптимального управления процессом, который описывается системой дифференциальных уравнений (1.1) с начальными условиями (1.2), заключается в том, чтобы найти управление $u^*(t) \in D_u$, при которой выполняются ограничения (1.4), (1.5) и достигается минимум критерия оптимальности:

$$I(u) = \varphi_0(x(\tau)). \tag{1.6}$$

Критерий оптимальности (1.6) представляет собой терминальный функционал. Будем рассматривать задачу Майера, так как к ней можно свести задачи Лагранжа и Больца, добавив к системе (1.1) дополнительное уравнение и граничное условие.

2. Эволюционный алгоритм решения задачи оптимального управления с терминально-фазовыми ограничениями. Приведем способ решения задачи оптимального управления с терминально-фазовыми ограничениями на основе метода штрафных функций и дифференциальной эволюции.

Для перехода от задачи с терминально-фазовыми ограничениями к задаче без ограничений введем в рассмотрение вспомогательный функционал:

$$J(u) = I(u) + R(u, s^k) \to \min, \tag{2.1}$$

где

$$R(u,s^k) = \frac{s^k}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\varphi_j(x)\right)^2 + \sum_{j=m+1}^{p}\left(g_j(x)\right)^2\right)$$

– штрафной функционал, s^k – параметр штрафа, вычисляемый на k-й итерации по формуле $s^k = b \cdot s^{k-1}$, $b > 1$ – параметр увеличения штрафа; $g_j(x) = 0$, если выполнено условие (1.5), иначе $g_j(x) = \varphi_j(x(\tau))$.

Чтобы найти решение задачи оптимального управления без ограничений (1.4), (1.5) с целью минимизации функционала (2.1), применим метод дифференциальной эволюции. Работа метода основана на имитации эволюционных процессов, которым подвергаются векторы-индивиды [16, 17].

Пусть математическим аналогом вектора-индивида является управление $u = (u_0, u_1, ..., u_r)$, где $u_i = u(t_i)$, $t_i \in [0,\tau]$, $i = \overline{0,r}$, $t_0 = 0$, $t_{r+1} = \tau$. Множеством возможных решений задачи оптимального управления, называемым популяцией, будет набор из P векторов $u_j = (u_{j0}, u_{j1}, ..., u_{jr})$, $j = \overline{1,P}$. Каждому вектору ставится в соответствие значение фитнес-функции, которой является критерий оптимальности (2.1). Для этого необходимо найти численное решение системы дифференциальных уравнений (1.1) с начальными условиями (1.2).

Алгоритм решения задачи оптимального управления (1.1)–(1.6) состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Задать параметры метода штрафов: начальное значение параметра штрафа s^0, параметр увеличения штрафа $b > 1$, параметр завершения поиска решения $\varepsilon_1 > 0$.

Задать параметры метода дифференциальной эволюции: параметр скрещивания $ps \in [0,1]$, параметр мутации $pm \in [0.5;1]$ [18], параметры завершения вычислений d, $\varepsilon_2 > 0$.

Установить счетчик итераций $k := 1$.

Шаг 2. Заполнить начальную популяцию $u_j^0 = (u_{j0}^0, u_{j1}^0, ..., u_{jr}^0)$, $j = \overline{1,P}$, значениями из области D_u. Задать начальную популяцию в качестве текущей: $u_j := u_j^0$, $j = \overline{1,P}$.

Шаг 3. Вычислить значение функции приспособленности для каждого вектора u_j, $j = \overline{1,P}$.

Шаг 4. Номеру вектора-мишени присвоить значение 1: $mish$:=1.

Шаг 5. Найти в популяции вектор u_{best} с наилучшим (наименьшим) значением фитнес-функции.

Шаг 6. Выбрать случайным образом два различных вектора u_{num1}, u_{num2}, причем $u_{num1} \neq u_{mish}$, $u_{num2} \neq u_{mish}$, $u_{num1} \neq u_{best}$, $u_{num2} \neq u_{best}$. Применить оператор мутации, в результате создать новый вектор u_{mut} :

$$u_{mut} := u_{best} + pm(u_{num1} - u_{num2}).$$

Шаг 7. Применить оператор скрещивания для вектора, полученного в результате мутации, и вектора-мишени. Создать пробный вектор u_{prob} по правилу:

$$u_{prob\,i} = \begin{cases} u_{mut\,i}, q_i \le ps, \\ u_{mish\,i}, q_i > ps, \end{cases} \quad i = \overline{0,r},$$

где q_i – случайное число из отрезка [0,1].

Шаг 8. Вычислить значение функции приспособленности для пробного вектора u_{prob}.

Шаг 9. Обновить популяцию. Если значение критерия оптимальности (2.1), вычисленное для u_{prob}, меньше его значения, найденного для u_{mish}, то в новую популяцию вместо вектора-мишени поместить пробный вектор, т.е. $u_{mish} := u_{prob}$ Иначе вектор-мишень u_{mish} остается в популяции.

Шаг 10. Если $mish < P$, то $mish := mish + 1$, перейти к шагу 5, иначе перейти к шагу 11.

Шаг 11. Проверить условие окончания поиска решения задачи оптимального управления без терминальных ограничений. Вычислить расстояние между векторами текущей u_j^k и предыдущей u_j^{k-1} популяций ρ_{ij}, $i, j = \overline{1,P}$, и изменение фитнес-функций Δ_{ij} :

$$\rho_{ij} = \rho(u_i^k, u_j^{k-1}) = \left\| u_i^k - u_j^{k-1} \right\| = \sqrt{\sum_{l=0}^{r} (u_{il}^k - u_{jl}^{k-1})^2},$$

$$\Delta_{ij} = \Delta(u_i^k, u_j^{k-1}) = \left| J(u_i^k) - J(u_j^{k-1}) \right|, \quad i, j = \overline{1,P}.$$

Если на протяжении d поколений выполнены условия $\rho_{ij} < \varepsilon_2$, $\Delta_{ij} < \varepsilon_2$, т.е. происходит незначительное изменение популяции и фитнес-функции, то остановить поиск решения и выбрать из последней популяции вектор u^{best}, которому соответствует наименьшее значение фитнес-функции. В противном случае увеличить счетчик итераций k на 1 и перейти к шагу 4.

Шаг 12. Проверить условие окончания работы алгоритма. Если $R(u^{best}, s^k) > \varepsilon_1$, то увеличить значение штрафа по формуле $s^{k+1} = b \cdot s^k$ и перейти к шагу 4.

Если $R(u^*, s^k) \le \varepsilon_1$, то остановить работу алгоритма. Приближенным решением задачи оптимального управления с терминально-фазовыми ограничениями u^* будет вектор u^{best} из последней популяции.

3. Вычислительный эксперимент. Используя описанный алгоритм, найдем численное решение задачи оптимального управления каталитическим процессом с терминальными ограничениями. Рассмотрим реакцию синтеза бензилиденбензиламина под действием $FeCl_3 \times 6H_2O$, схема и кинетические уравнения стадий $w_j(C,T)$ которой имеют следующий вид [19]:

$$\begin{aligned} &X_1 + X_2 \to X_3 + X_4, \\ &X_3 \to X_5 + X_6, \\ &X_5 + X_1 \to X_7 + X_8, \\ &X_8 + X_6 \to X_9, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где X_1 – бензиламин, X_2 – четыреххлористый углерод, X_3 – хлорбензиламин, X_4 – хлороформ, X_5 – 1-фенилметанимин, X_6 – хлористый водород, X_7 – бензилиденбензиламин, X_8 – аммиак, X_9 – хлористый аммоний, C_i – значение концентрации i-го вещества (моль/л, $i = \overline{1,9}$), k_j – константа скорости j-й стадии реакции (л/(моль·ч) для $j = 1, 3, 4$ 1/ч для $j = 2$), рассчитываемая исходя из уравнения Аррениуса:

$$k_j(T) = k_{0j} \exp\left(-\frac{E_j}{RT}\right),$$

где k_{0j} – предэкспоненциальный множитель (л/(моль·ч) для $j = 1, 3, 4$; 1/ч для $j = 2$), E_j – значение энергии активации j-й стадии, Дж/моль, T – температура, K, R – универсальная газовая постоянная (8.31 Дж/(моль·K)).

Система дифференциальных уравнений материального баланса периодического реактора идеального смешения для реакции (3.1) имеет вид [19]:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{F_i(x,T) - x_i F_n(x,T)}{N}, \quad F_i = \sum_{j=1}^{4} \nu_{ij} W_j, \quad i = \overline{1,9}, \tag{3.2}$$

$$\frac{dN}{dt} = F_n(x,T) = \sum_{j=1}^{4} W_j \sum_{i=1}^{9} \nu_{ij} \tag{3.3}$$

с начальными условиями

$$x_i(0) = x_i^0, i = \overline{1,9}, \; N(0) = 1, \tag{3.4}$$

где x_i – концентрация i-го вещества, мольная доля, $N = C/C_0$ – относительное изменение числа молей реакционной среды, C и C_0 – суммарная концентрация веществ и ее начальное значение, моль/л, ν_{ij} – матрица стехиометрических коэффициентов ($i = \overline{1,9}$, $j = \overline{1,4}$), $W_j = w_j/C_0$ – приведенная скорость j-й стадии реакции, 1/ч.

Значения приведенных кинетических констант реакции синтеза бензилиденбензиламина при $T = 293$ K приведены в работе [19] (1/ч): $K_1 = 1.5 \times 10^{-2}$, $K_2 = 4.7$, $K_3 = 13.4$, $K_4 = 0.6$. Значения истинных констант k_1, k_2, k_4 определяются по формуле $k_i = K_i/C_0$, $i = 1,3,4$, а значение $k_2 = K_2$. Значения энергий активации стадий реакции равны (кДж/моль): $E_1 = 44.35$, $E_2 = 32.22$, $E_3 = 6.69$, $E_4 = 1.67$.

Пусть управлением является температура T, на значения которой наложены технологические ограничения:

$$285 \text{ K} \le T(t) \le 373 \text{ K}, \; t \in [0, \tau]. \tag{3.5}$$

Фазовыми переменными, описывающими состояние процесса, являются концентрации веществ x_i, $i = \overline{1,9}$, и относительное изменение числа молей реакционной среды N.

Целевой продукт реакции (3.1) – бензилиденбензиламин X_7. Поэтому зададим следующий критерий оптимальности:

$$I(u) = x_7(\tau), \tag{3.6}$$

выражающий значение концентрации X_7 в конце реакции.

Поскольку выход X_7 зависит от конверсии исходных веществ, потребуем, чтобы конверсия X_1 и X_2 в конце реакции была не ниже 75%, т.е. выполнялось условие:

$$1 - (x_1(\tau) + x_2(\tau)) \ge 0.75. \tag{3.7}$$

Тогда задача оптимального управления реакцией синтеза бензилиденбензиламина формулируется следующим образом. Требуется найти оптимальный температурный режим $T^* = T^*(t)$ процесса, описываемого системой дифференциальных уравнений (3.2), (3.3) с начальными

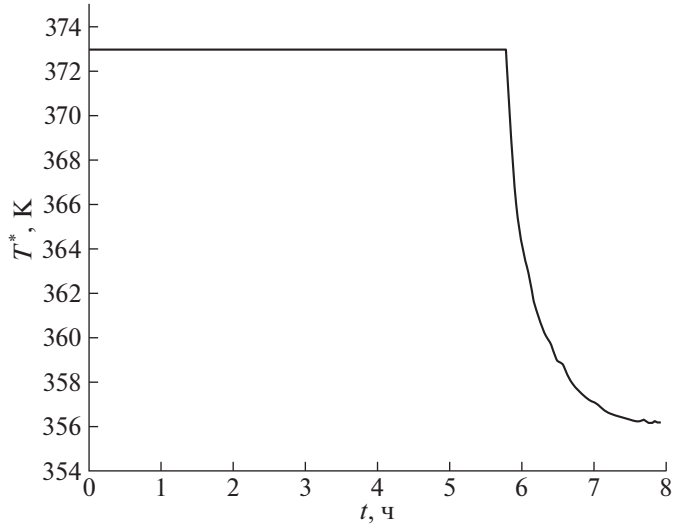


Рис. 1. Субоптимальный температурный режим.

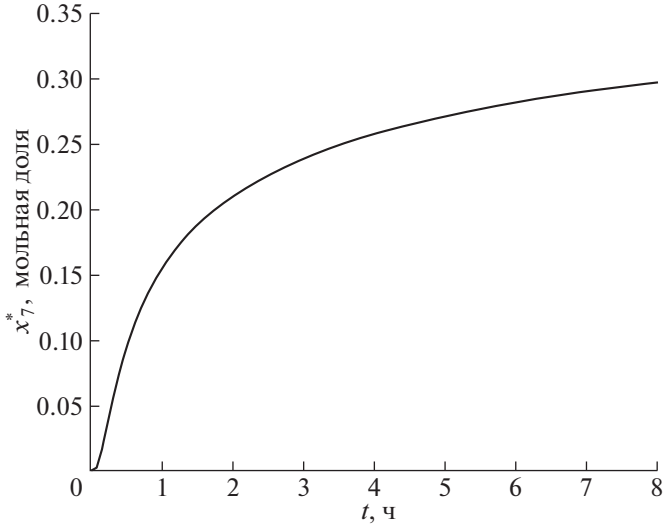


Рис. 2. Динамика концентрации бензилиденбензиламина.

условиями (3.4), который с учетом ограничений (3.5), (3.7) обеспечивает достижение максимума критерия оптимальности (3.6).

Численное решение задачи (3.1)–(3.7) найдено на основе методов штрафов и дифференциальной эволюции с помощью программы на языке Delphi, реализующей решение задачи оптимального управления реакцией синтеза бензилиденбензиламина продолжительностью $\tau = 8$ ч. Для решения системы дифференциальных уравнений (3.2), (3.3) с начальными условиями

$$x_1(0) = 0.51,\ x_2(0) = 0.49,\ x_i(0) = 0,\ i = \overline{3,9},\ N(0) = 1, \tag{3.8}$$

применен метод Рунге–Кутты четвертого порядка.

Задача решена со следующими параметрами алгоритма: начальное значение параметра штрафа $s^0 = 0.1$, параметр увеличения штрафа $b = 10$, параметр скрещивания $ps = 0.5$, параметр мутации $pm = 0.7$, параметры завершения поиска решения $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$, $d = 5$.

В результате проведенных расчетов найдено приближенное решение задачи оптимального управления (3.1)–(3.7). Определен температурный режим $T^*(t)$ реакции синтеза бензилиденбензиламина (рис. 1), при котором достигается наибольшее значение целевого продукта реакции, равное 0.2974 мольных долей (рис. 2). При этом конверсия исходных веществ составляет 72.8% (рис. 3).

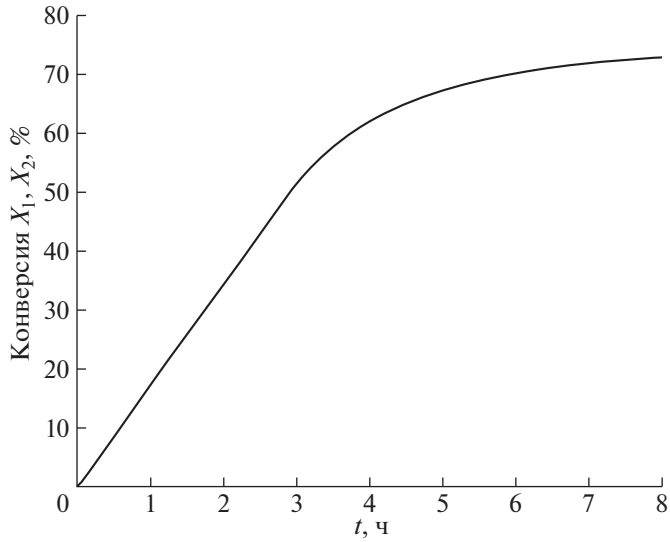


Рис. 3. Динамика конверсии исходных веществ.

Как видно из рис. 1 и 3, температура не меняется на протяжении 6 ч, а прирост конверсии X_1, X_2 начинает снижаться примерно через 3 ч, что связано с особенностями протекания каталитического процесса при заданных начальных условиях.

Задача оптимального управления процессом синтеза бензилиденбензилимина решена также с помощью метода вариаций в пространстве управлений [20], реализованного авторами в программе на языке программирования Delphi. Для выбора начального приближения решения задачи найдено численное решение системы дифференциальных уравнений (3.2), (3.3) с начальными условиями (3.4) при различных допустимых значениях температуры, приведенных в таблице. Так как наибольшее значение концентрации x_7 в конце реакции достигается при температуре, равной верхней границе допустимых значений, ее значение принято в качестве начального приближения. Задача решена с шагом $h = 0.1$ и количеством точек разбиения интервала времени $nt = 100$. Результаты расчетов показали, что наибольшее значение концентрации бензилиденбензиламина, равное 0.2971 мольных долей, достигается при температурном режиме T^*_{var}, приведенном на рис. 4. Конверсия веществ X_1, X_2 при этом равна 72.1%.

Вычислим относительные погрешности векторов T^* и фазовых переменных x_1^*, x_2^*, x_7^* с помощью формул:

$$\delta(T^*) = \frac{\left\|T^*_{var} - T^*\right\|}{\left\|T^*_{var}\right\|} \cdot 100\%, \quad \delta(x_i^*) = \frac{\left\|x^*_{var\,i} - x_i^*\right\|}{\left\|x^*_{var\,i}\right\|} \cdot 100\%, \quad i = 1,2,7.$$

Здесь

$$\left\|T^*_{var} - T^*\right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{q}\left|T^*_{var\,j} - T_j^*\right|^2}, \quad \left\|T^*_{var}\right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{q}\left|T^*_{var\,j}\right|^2}, \quad \left\|x^*_{var\,i} - x_i^*\right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{q+1}\left|x^*_{var\,ij} - x_{ij}^*\right|^2},$$

$$\left\|x^*_{var\,i}\right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{q+1}\left|x^*_{var\,ij}\right|^2},$$

где $x^*_{var\,i}$ – векторы значений концентраций веществ, вычисленные при температурном режиме T^*_{var}.

Относительные погрешности вектора температуры, векторов концентраций исходных веществ и целевого вещества составили, %: $\delta(T^*) = 3.27$, $\delta(x_1^*) = 4.13$, $\delta(x_2^*) = 4.42$, $\delta(x_7^*) = 4.55$. Относительная погрешность значения критерия оптимальности равна $\delta(I) = 0.1\%$. Отсюда

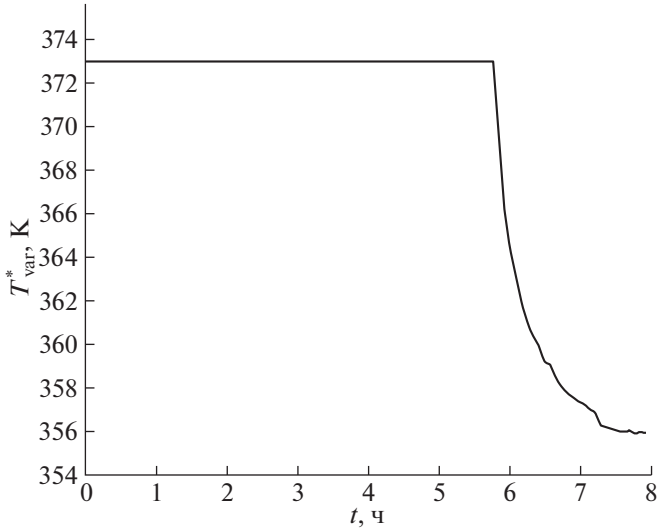


Рис. 4. Субоптимальный температурный режим, вычисленный с помощью метода вариаций в пространстве управлений.

Таблица. Зависимость значения концентрации бензилиденбензиламина от температуры

T, K	Конверсия X_1 и X_2, %	Концентрация X_7, мольная доля
285	5.19	0.013
295	9.54	0.023
305	15.59	0.039
315	22.98	0.058
325	31.04	0.079
335	39.05	0.100
345	46.46	0.120
355	52.97	0.138
365	58.47	0.154
373	62.16	0.164

видно, что решение, полученное на основе метода штрафов и дифференциальной эволюции, удовлетворительно согласуется с решением, найденным с помощью метода вариаций в пространстве управлений.

Решение задачи оптимального управления (3.1)–(3.7) определено также для реакции синтеза бензилиденбензиламина продолжительностью $\tau = 6$, 4, 2 ч. Результаты вычислений показали, что с уменьшением времени реакции происходит снижение значения концентрации целевого продукта ($x_7(6) = 0.2541$, $x_7(4) = 0.1885$, $x_7(2) = 0.1216$) и значения конверсии исходных веществ (70.72, 65.27 и 50.34% соответственно), что связано с уменьшением времени контактирования реагентов. Относительные погрешности вектора температуры, по сравнению с температурной кривой, вычисленной с помощью вариационного метода для $\tau = 6$, 4, 2 ч, равны 2.13, 1.21 и 1.98% соответственно.

Также проведено пять вычислительных экспериментов с варьированием значений начальных концентраций (3.8) исходных веществ. Выявлено, что с увеличением начальной концентрации вещества X_1 в реакционной системе повышается концентрация целевого продукта X_7 и конверсия исходных веществ. Это связано с тем, что реагент X_1 расходуется на первой стадии образования вещества X_3, из которого образуется X_5, а затем X_7, а также непосредственно участвует в образовании X_7 (стадия 3 реакции (3.1)). Вещество X_2 расходуется по одному пути образования целевого вещества X_7, поэтому его концентрации в реакционной смеси требуется меньше по сравнению с X_1. Наибольшее значение критерия оптимальности (3.6), равное 0.3451 мольных долей, достигается при следующем наборе начальных концентраций исходных веществ:

$$x_1(0) = 0.7,\ x_2(0) = 0.3. \tag{3.9}$$

При этом на протяжении всего процесса ($\tau = 8$ ч) необходимо поддерживать температуру, равную 373 K, а конверсия исходных веществ равна 81.56%. Отклонение от температурного режима, вычисленного с помощью метода вариаций в пространстве управлений, составляет 2.67%.

Также задача поиска оптимального температурного режима для реакции (3.1) решена при начальных условиях (3.9), но граничное значение конверсии в конце реакции было повышено до 80 и 90%. Решение задачи оптимального управления для этих случаях практически не отличается от решения, найденного для условия (3.7), что связано с предельными возможностями данного каталитического процесса.

Заключение. Для поиска решения задачи оптимального управления с терминально-фазовыми ограничениями можно применить метод штрафов, позволяющий избавиться от ограничений путем введения штрафной функции. Затем для решения новой задачи оптимального управления без ограничений используется метод дифференциальной эволюции. Метод дифференциальной эволюции легкореализуем на практике и позволяет найти приближенное решение оптимизационной задачи. Особенность предложенного подхода состоит в том, что его можно применять для получения приближенного решения задач оптимального управления с терминально-фазовыми ограничениями при неизвестном начальном приближении, которое обычно задается исследователем, исходя из смысла поставленной задачи.

Предложенный способ решения задачи оптимального управления с терминально-фазовыми ограничениями сформулирован в виде численного алгоритма. Работа алгоритма апробирована на каталитическом процессе синтеза бензилиденбензиламина. С помощью программы, реализующей алгоритм на основе метода штрафов и метода дифференциальной эволюции, найдены численные решения задач поиска оптимального температурного режима при наличии ограничений, накладываемых на управление и фазовые переменные. Показано, что относительные погрешности решений по сравнению с решениями, полученными с помощью метода вариаций в пространстве управлений, не превышают 5%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Химия, 1976.
2. *Карамзин Д.Ю.* Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями при ослабленных предположениях управляемости // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. 2018. № 20. С. 46–61.
3. *Арутюнов А.В., Жуков Д.А.* Исследование одной линейной задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями // Владикавказский математический журнал. 2010. Т. 12. № 1. С. 3–9.
4. *Longla M.* Pontryagin's Principle of Maximum for Linear Optimal Control Problems with Phase Constraints in Infinite Dimensional Spaces // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 2008. № 4. P. 5–19.
5. *Bergounioux M., Bourdin L.* Pontryagin Maximum Principle for General Caputo Fractional Optimal Control Problems with Bolza Cost and Terminal Constraints // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2020. V. 26. P. 38.
6. *Smith S., Mayne D.Q.* Exact Penalty Algorithm for Optimal Control Problems with Control and Terminal Constraints // Intern. J. Control. 2007. V. 48. № 1. P. 257–271.
7. *Gugat M., Zuazua E.* Exact Penalization of Terminal Constraints for Optimal Control Problems // Optimal Control Applications and Methods. 2016. V. 37. № 6. P. 1329–1354.
8. *Xiangyu Gao, Xian Zhang, Yantao Wang.* A Simple Exact Penalty Function Method for Optimal Control Problem with Continuous Inequality Constraints //Abstract and Applied Analysis. 2014. V. 2014. Article ID752854.
9. *Malisani P., Chaplais F., Petit N.* An Interior Penalty Method for Optimal Control Problems with State and Input Constraints of Nonlinear Systems // Optimal Control Applications and Methods. 2014. V. 37. № 1. P. 3–33.
10. *Duan Y.* Application of Penalty Function Method and the Conjugate Gradient Method in Economic Scheduling of Cascade Hydropower Stations // IFAC Proceedings Volumes. 1986. V. 19. № 10. P. 227–232.
11. *Горнов А.Ю.* Алгоритмы решения задач оптимального управления с терминальными ограничениями // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 4. С. 44–50.
12. *Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф.* Численный алгоритм идентификации кинетической модели химической реакции // Вестн. Технологического ун-та. 2019. Т. 22. № 9. С. 13–17.
13. *Mohamed A.W., Mohamed A.K.* Adaptive Guided Differential Evolution Algorithm with Novel Mutation for Numerical Optimization // Intern. J. Machine Learning and Cybernetics. 2019. №. 10. P. 253–277.

14. *Xue B., Yao X.* A Survey on Evolutionary Computation Approaches to Feature Selection // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2016. № 20. P. 606–626.
15. *Ковалевич А.А., Якимов А.И., Албкеират Д.М.* Исследование стохастических алгоритмов оптимизации для применения в имитационном моделировании систем // Информационные технологии. 2011. № 8. С. 55–60.
16. *Карпенко А.П.* Эволюционные операторы популяционных алгоритмов глобальной оптимизации // Математика и математическое моделирование. 2018. № 1. С. 59–89.
17. *Mohamed A.W.* A Novel Differential Evolution Algorithm for Solving Constrained Engineering Optimization Problems // J. Intelligent Manufacturing. 2018. № 29. P. 659–692.
18. *Storn R., Price K.* Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces // J. Global Optimization. 1997. № 11. P. 341–359.
19. *Ахметов И.В., Губайдуллин И.М., Коледина К.Ф., Сафин Р.Р.* Математическое моделирование и оптимизация реакций синтеза ароматических соединений // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2015. Т. 11. № 2. С. 53–58.
20. *Григорьев И.В., Михайлова Т.А., Мустафина С.А.* О численном алгоритме метода вариаций в пространстве управлений // Фундаментальные исследования. 2015. № 5–2. С. 279–283.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 104–116

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

УДК 517.977.58:539.3

ОПТИМАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ, УПРАВЛЯЕМОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ АКТЮАТОРОМ

© 2024 г. Г. В. Костин[1, *]
[1]ИПМех РАН, Москва, Россия
**e-mail: kostin@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 15.03.2024 г.
После доработки 27.03.2024 г.
Принята к публикации 13.05.2024 г.

Исследуются продольные колебания упругого стержня, управляемого нормальными силами в поперечном сечении, которые равномерно распределены по длине на выбранном интервале. Такая система может быть реализована с помощью актюатора, состоящего из пьезоэлектрических элементов, расположенных вдоль оси стержня. Найдены критерии неуправляемости отдельных мод колебаний. Обобщенное решение начально-краевой задачи находится с помощью бегущих волн Даламбера, которые определяются на образуемой характеристиками пространственно-временной сетке. Линейные комбинации функций бегущих волн и управления задают в энергетическом пространстве искомые перемещения и динамический потенциал. Последний определенным образом связывает плотность импульса и силу в сечении. Ставится задача перевода стержня за фиксированное время в предписанное состояние с минимизацией нормы управляющей силы. Оптимальное движение и соответствующий программный закон воздействия находятся сведением исходной задачи к одномерной вариационной. В примере показано управление колебаниями для определенных геометрических параметров пьезоэлектрического актюатора.

Ключевые слова: упругий стержень, пьезоэлектрические силы, метод Фурье, оптимальное управление, бегущие волны

DOI: 10.31857/S0002338824030101 **EDN:** UPROIB

OPTIMAL MOTIONS OF AN ELASTIC ROD CONTROLLED BY A PIEZOELECTRIC ACTUATOR

G.V. Kostin[a, *]
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia
**e-mail: kostin@ipmnet.ru*

The longitudinal vibrations of an elastic rod controlled by normal forces in the cross section, which are uniformly distributed along the length over a selected interval, are studied. Such a system can be implemented using an actuator consisting of piezoelectric elements located along the axis of the rod. Criteria for the uncontrollability of individual vibration modes are given. A generalized solution to the initial-boundary value problem is found applying d'Alembert traveling waves, which are determined on the space-time mesh formed by characteristics. Linear combinations of the traveling wave and control functions define the sought displacements and dynamic potential in the energy space. The latter in a certain way relates the momentum density and the force in the cross section. The problem is to transfer the rod to a prescribed state in a fixed time while minimizing the norm of the control force. The optimal motion and the corresponding feedforward control law are found by reducing the original problem to a one-dimensional variational one. The example shows the control of vibrations for certain geometric parameters of the piezoelectric actuator.

Keywords: elastic rod, piezoelectric forces, Fourier method, optimal control, traveling waves

Введение. Важным вопросом теории управления представляется возможность приведения распределенной колебательной системы в предписанное состояние с помощью нагрузки, которая воздействует на часть области определения параметров движения. При рассмотрении подобных систем возникает необходимость управлять уравнениями в частных производных

(УЧП). Функции управления могут определять правые части как краевых условий, так и самих УЧП [1, 2]. Граничное воздействие часто более удобно при реализации в различных приложениях, но построение закона такого управления бывает затруднено, в частности вследствие ограничений на скорость распространения сигнала от границы [3]. Если же управление распределено по всей области расположения системы, то иногда возможна декомпозиция движений и построение оптимального воздействия на каждую моду колебаний [4, 5]. Подобное управление бывает трудно реализовать на практике, и может возникнуть необходимость его пространственной дискретизации таким образом, что воздействие будет производится только на часть системы или распределяться по определенному закону.

В работе исследуются продольные колебания упругого стержня, управляемого нормальными силами в поперечном сечении, которые равномерно распределены по длине на заданном интервале, а вне его равны нулю. На практике эти продольные силы растяжения и сжатия можно создавать, например, группой расположенных и работающих симметрично относительно поперечного сечения пьезоэлектрических элементов, которые образуют единый пьезоактюатор (ПА). Антисимметрично работающие элементы возбуждают изгибные колебания, и такой случай изучен в работе [6]. Создаваемая переменная по времени сила в рассмотренной далее модели считается постоянно распределенной вдоль ПА [7].

Обычно подобные конструкции описываются УЧП, в правых частях которых появляется дельта-функция или даже ее производная вследствие пространственного скачка пьезоэлектрических сил при переходе от ПА к свободному от воздействия участку [8]. Это означает, что решение строится в терминах обобщенных функций. В этом исследовании применяется метод интегродифференциальных соотношений (МИДС) [9], который позволяет корректно сформулировать обобщенную начально-краевую задачу о движении упругого стержня и построить аналитически решение оптимизационной задачи управления в энергетическом классе функций состояния для соответствующих начальных условий [10]. Механическое состояние стержня описывает функция перемещения его точек и так называемый динамический потенциал, линейно через первые производные связанный как с плотностью импульса, так и с результирующей нормальной силой в поперечном сечении.

Движения для однородного стержня представляются в виде линейной комбинации бегущих волн Даламбера, определенных на заданной характеристиками пространственно-временной сетке. Задача оптимизации сводится к одномерной краевой вариационной задаче, которая решается в квадратурах. Ранее такой подход использовался для построения оптимального управления колебаниями в случае свободного стержня с группой ПА либо когда между ПА отсутствуют промежутки [10], либо когда они расположены периодически [11]. Был рассмотрен частный случай горизонта управления, кратного в безразмерных единицах длине ПА [12]. В работах [10, 13] затронут вопрос управляемости отдельных мод колебаний и разбиения мод на группы, каждая из которых управляется определенной комбинацией входов.

Главное отличие описанных далее результатов — это особые краевые условия (консольное закрепление) и управление всего лишь одним ПА. Как было показано ранее, использование определенных конфигураций ПА может приводить к потере управляемости некоторыми группами мод, что является частным случаем вопроса о неуправляемости волнового уравнения при воздействии только на часть длины [14]. Далее будет показано, что от геометрических параметров ПА зависит как управляемость, так и эффективность гашения колебаний. Выбор наилучшего расположения ПА — важная задача для инженерных приложений [15–17], когда размеры актюаторов фиксированы из-за определенных технических ограничений.

1. Классическая постановка начально-краевой задачи. Исследуются продольные колебания тонкого однородного упругого стержня длины ℓ, схематически представленного на рис. 1. Ось x с началом координат, расположенном в жестко закрепленном конце стержня, направлена на его свободный от нагрузок конец. Продольная жесткость задается коэффициентом $\kappa > 0$, а линейная плотность определена как $\rho > 0$.

Кроме упругих напряжений в поперечном сечении стержня с помощью ПА возбуждается сила $f(t,x)$, произвольно изменяющаяся на временном интервале $t \in \mathcal{T} = (0,T)$ и кусочно-постоянно распределенная по длине $x \in \mathcal{X} = (0,\ell)$. В рамках простейшей модели [7] такая сила постоянна на интервале $x \in \mathcal{U} = (x^-, x^+) \subset \mathcal{X}$ и равна нулю вне его:

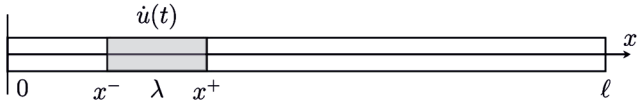


Рис. 1. Схема стержня с управляющим пьезоэлектрическим актюатором.

$$f(t,x) = \begin{cases} \dot{u}(t), & x \in \mathcal{U}, \\ 0, & x \notin \mathcal{U}, \end{cases} \quad u(0) = 0. \tag{1.1}$$

Здесь введена функция управления u: $\mathcal{T} \to \mathbb{R}$. Участок стержня длины $\lambda = x^+ - x^-$, на котором возникают сжимающие или растягивающие пьезоэлектрические напряжения, выделен на рис. 1 серым тоном.

Определим область задания переменных состояния системы в виде $\mathcal{D} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$. В качестве неизвестных выбираются перемещения точек стержня w: $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$, линейная плотность импульса p: $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ и суммарная нормальная сила в поперечном сечении s: $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

Функции p и s связывает закон изменения импульса (второй закон Ньютона):

$$\partial_t p(t,x) = \partial_x s(t,x), \quad (t,x) \in \mathcal{D}. \tag{1.2}$$

Здесь и далее символ ∂_t означает частную производную по времени t, а ∂_x — по пространственной координате x.

Согласно локальным законам состояния, импульс p в свою очередь линейно зависит от скорости, сила s — аффинно от деформации:

$$p(t,x) = \rho \partial_t w(t,x), \quad s(t,x) = \kappa \partial_x w(t,x) + f(t,x), \quad (t,x) \in \mathcal{D}. \tag{1.3}$$

В классической постановке задачи, если сила f непрерывно дифференцируема по x [18], уравнение движения получается после исключения в (1.2) переменных p и s в соответствии с (1.3):

$$\rho \partial_{tt} w(t,x) - \kappa \partial_{xx} w(t,x) = \partial_x f(t,x), \quad (t,x) \in \mathcal{D}. \tag{1.4}$$

Дополнительно на положение и импульс точек стержня накладываются начальные условия:

$$p(0,x) = p_0(x), \quad w(0,x) = w_0(x), \quad x \in \mathcal{X}, \tag{1.5}$$

где w_0 и p_0 — известные достаточно гладкие функции [19]. На концах стержня заданы краевые условия:

$$w(t,0) = 0, \quad s(t,\ell) = 0, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.6}$$

Следует сразу отметить, что функция f кусочно-постоянна по x, но при этом из физических соображений стержень должен оставаться неразрывным телом, а сила s, согласно третьему закону Ньютона, не может иметь скачков. Это накладывает определенные ограничения на класс допустимых начальных распределений w_0 и p_0, а также на управляющую функцию u.

Согласно МИДС [9], для перехода к обобщенной формулировке начально-краевой задачи (1.2)–(1.6) введем на области $\mathcal{D}$ «динамический» потенциал v: $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ таким образом, чтобы были верны соотношения

$$p = \partial_x v, \quad s = \partial_t v. \tag{1.7}$$

После подстановки (1.7) в (1.2) убеждаемся, что второй закон Ньютона выполняется автоматически.

Чтобы исключить из рассмотрения переменные p и s, перепишем уравнения состояния (1.3) в виде:

$$\begin{aligned} &\partial_t v(t,x) = \kappa \partial_x w(t,x), && (t,x) \in \mathcal{D}, \\ &\partial_x v(t,x) = \rho \partial_t w(t,x) + f(t,x), && (t,x) \in \mathcal{D}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Через неизвестные v, w выражаются как начальное состояние (1.5), так и краевые условия (1.6):

$$v(0,x) = v_0(x) = c_0 - \int_x^1 p_0(\chi)\,d\chi, \quad w(0,x) = w_0(x), \quad x \in \overline{\mathcal{X}};$$
$$w(t,0) = 0, \quad v(t,\ell) = c_0, \quad t \in \overline{\mathcal{T}}. \tag{1.9}$$

Как будет показано далее, ненулевая правая часть в последнем краевом условии из (1.9) вводится, чтобы обеспечить требуемую непрерывность решения. Таким образом, сопрягаются начальное и краевое условия на v при $t=0$ и $x=\ell$. Подчеркнем особенность такого представления механического состояния системы: динамическая переменная v определяется с точностью до калибровочной константы c_0, выбор значения которой не влияет на искомое движение упругого стержня, изначально заданного через переменные p, s, w. Поэтому для удобства выбираем $c_0=0$.

2. Обобщенная формулировка задачи оптимального управления. Разрывный характер управляющей силы (1.1) не позволяет использовать дифференциальные соотношения (1.8) для определения состояния стержня на всей области $\mathcal{D}$ [19]. Для расширения класса решений, согласно МИДС [9], два локальных уравнения состояния (1.8) можно преобразовать в одно глобальное, которое определяет интегральную невязку некоторой функции от неизвестных v и w. Тогда поиск решения сведется к условной минимизации функционала, квадратичного по первым производным от кинематической и динамической переменных.

Соответствующая обобщенная начально-краевая задача формулируется следующим образом. Даны функции $v_0, w_0 \in H^1(\mathcal{X})$ и $f \in L^2(\mathcal{D})$, т.е. начальные распределения со своими первыми производными и возбуждаемая сила квадратично-интегрируемы на своих областях определения. Следует найти такие функции состояния $v^*(t,x)$, $w^*(t,x) \in H^1(\mathcal{D})$, которые при выполнении начальных и краевых ограничений (1.9) минимизируют функционал состояния F:

$$F\left[v^*, w^*\right] = \min_{v,w \in H^1(\mathcal{D})} F[v,w] = 0, \quad F = \int_{\mathcal{D}} \varphi\,dtdx \geq 0,$$
$$\varphi \triangleq \frac{g^2}{2\rho} + \frac{h^2}{2\kappa}, \quad g \triangleq \partial_x v - \rho\partial_t w_t, \quad h \triangleq \partial_t v - \kappa\partial_x w_x + f. \tag{2.1}$$

В постановке прямой задачи динамики (1.9), (2.1) неотрицательный функционал F достигает нулевого значения или абсолютного минимума на решении. Квадратичная форма φ имеет размерность линейной плотности энергии, а F — размерность действия. Принадлежность функций v и w к пространству Соболева $H^1(\mathcal{D})$ вытекает из того, что под интегралом в F стоят квадраты производных по t и x от этих переменных.

Ограничимся случаем, когда нормальная сила f берется не в общем виде, а представима в форме (1.1). Относительно функции u решается следующая задача оптимального управления. Пусть функции $v, w \in H^1(\mathcal{D})$, согласно (1.9) и (2.1), минимизируют функционал состояния F для произвольного управления $u \in H^1(\mathcal{T})$, определяющего силу f в соответствии с (1.1). Найти такую допустимую вектор-функцию $u^*(t)$, которая на фиксированном интервале времени $\mathcal{T}$ минимизирует целевой функционал J и выполняет терминальные условия на p и w:

$$J\left[u^*\right] = \min_{u \in H^1(\mathcal{T})} J[u], \quad J = \frac{\lambda}{2\kappa T}\int_{\mathcal{T}} \dot{u}^2\,dt,$$
$$p(T,x) = p_T(x), \quad w(T,x) = w_T(x). \tag{2.2}$$

Здесь J — средняя потенциальная энергия, порождаемая силой $f(t,x)$. Отметим, что последнее терминальное ограничение с помощью интегрировании по x выражается через динамический потенциал v:

$$v(T,x) = v_T(x) = -\int_x^1 p_T(\chi)\,d\chi.$$

Для упрощения описания системы перейдем без потери общности к безразмерным переменным (в дальнейшем звездочки опускаются):

$$v = \kappa\tau_* v_*, \quad w = \ell w_*, \quad t = \tau_* t_*, \quad x = \ell x_*, \quad \tau_*^2 = \ell^2\rho / \kappa.$$

Чтобы выполнить после такой замены эквивалентные преобразования, необходимо просто во всех предыдущих выражениях подставить единичные параметры $\ell = \rho = \kappa = 1$.

3. Управляемость отдельных мод колебаний стержня. В сформулированной задаче управления (1.1), (1.9), (2.1), (2.2) присутствуют терминальные ограничения, возможность выполнения которых связана с вопросом управляемости рассматриваемой динамической системы. Некоторые необходимые условия управляемости можно вывести, применяя метод Фурье.

Используем прием разделения переменных для уравнения (1.4) и спроецируем его в гильбертовом пространстве $L^2(\mathcal{X})$ на функции $e_j : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, которые представляют собой нетривиальные решения соответствующей краевой задачи на собственные значения:

$$e_j''(x) + \omega_j^2 e_j(x) = 0, \quad e_j(0) = 0, \quad e_j'(1) = 0, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Решение начально-краевой задачи (1.1), (1.9), (2.1) представимо как разложение по базису $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ в виде:

$$w(t,x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} e_j(x) w_j(t), \quad v(t,x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} e_j'(x) \int_0^t w_j(\tau)\,d\tau + r_0(x). \tag{3.2}$$

После интегрирования по частям с учетом (3.2) и того, что сила f из (1.1) кусочно-постоянна по x, получаем счетную систему линейных ОДУ:

$$\begin{gathered} \ddot{w}_j + \omega_j^2 w_j = \left(e_j\left(x^-\right) - e_j\left(x^+\right)\right)\dot{u}, \quad t \in \mathcal{T}; \\ w_j(0) = w_j^0, \quad \dot{w}_j(0) = p_j^0, \quad j \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь w_j, w_j^0 и p_j^0 — проекции функции перемещений $w(t,x)$, а также начальных распределений $w_0(x)$ и $p_0(x)$ на $e_j(x)$ соответственно.

Из (3.1) вытекает, что в безразмерном виде собственные частоты и энергетически нормированные функции колебаний консольно закрепленного стержня имеют вид:

$$\omega_j = j\pi - \frac{\pi}{2}, \quad e_j(x) = \frac{\sin\omega_j x}{\sqrt{2}\omega_j}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Таким образом, из (3.3) следует, что n-я мода неуправляема, если для произвольного управления u правая часть соответствующего уравнения из (3.3) равна нулю, а значит, согласно (3.4):

$$\begin{gathered} \sin\left(\omega_n x^-\right) - \sin\left(\omega_n x^+\right) = \sin\left(\alpha_n - \beta_n\right) - \sin\left(\alpha_n + \beta_n\right) = 0 \Rightarrow \\ -2\cos\alpha_n \sin\beta_n = 0 \Rightarrow \\ k \in \mathbb{N} : \alpha_n = k\pi - \pi/2, k < n \vee \beta_n = k\pi, 4k < 2n - 1. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь введена фаза волны α_n собственной функции e_n в центральной точке ПА и сдвиг фазы β_n между центром и правым краем x^+ ПА:

$$\alpha_n = \omega_j \frac{x^+ + x^-}{2}, \quad \beta_n = \omega_j \frac{x^+ - x^-}{2}. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) вытекает, что n-я мода неуправляема, если либо собственная функция e_n достигает экстремума в центре ПА, либо длина ПА кратна длине волны функции e_n.

Если для фиксированных геометрических параметров $x^{\pm}$ несколько мод такие, что для каждой из них выполняется одно из условий (3.5), все они принадлежат неуправляемой группе мод. Так, например, если для m-й моды $\beta_n = \pi$, то неуправляемыми будут и все моды $n > m$, для которых число $2n-1$ кратно $2m-1$.

4. Решение краевой задачи. Допустим, что геометрические параметры ПА выбраны из класса рациональных чисел. Без потери общности можно положить, что

$$x^{\pm} = \xi n^{\pm}, \quad \xi = 1/N, \quad n^+, N \in \mathbb{N}, \quad n^- \in \mathbb{Z}_+, \quad n^- < n^+ \le N.$$

Здесь N выбирается так, что либо x^+ — несократимая дробь, либо координата x^- не равна нулю и несократима.

Пусть для некоторой пары $x^{\pm}$ каждая мода колебаний в отдельности управляема. Выполнение этого необходимого условия не гарантирует полной управляемости системы консольного стержня с ПА. Однако для рациональных параметров $x^{\pm}$ далее предлагается алгоритм построения точного решения задачи оптимального управления (1.1), (1.9), (2.1), (2.2), который позволяет ответить на вопрос, в каком случае и за какое время T система может быть приведена из произвольного допустимого начального состояния в произвольное терминальное.

Для нахождения оптимального движения функции состояния (v, w) берутся в виде линейной комбинации бегущих волн Даламбера. Сформируем конечную сетку из характеристик на пространственно-временной области $\mathcal{D}$, с использованием которой, как будет показано ниже, удается свести рассматриваемую прямую задачу динамики в УЧП к линейной алгебраической системе, а обратную задачу управления — к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с постоянными коэффициентами.

Допустим, что в безразмерных переменных время управления T не кратно ξ, и представим его в виде:

$$T = M\xi + \tau_0, \quad \tau_1 = \xi - \tau_0 \ge 0, \quad M \in \mathbb{Z}_+.$$

Особый случай $\tau_0 = 0$ рассматривается либо с помощью предельного перехода, либо с использованием специального упрощенного алгоритма, как показано в работе [12].

Для построения сетки на области $\mathcal{D}$ (см. рис. 2) разобьем временной интервал $\mathcal{T}$ на $2\mathrm{M}+1$ подынтервалов $\mathcal{T}_m$, а пространственный интервал $\mathcal{X}$ — на N подынтервалов $\mathcal{X}_j$ так, что

$$\begin{gathered}\mathcal{T}_m = \left(t_m - t_{m+1}\right),\ m \in \mathcal{M} = \left\{\overline{0,2\mathrm{M}}\right\}, \quad t_m = \begin{cases} j\xi, & m = 2j, \\ j\xi + \tau_0, & m = 2j+1, \end{cases} \quad m \in \mathcal{M}^* = \left\{\overline{0,2M+1}\right\}, \\ \mathcal{X}_n = \left(x_{n-1} - x_n\right),\ n \in \mathcal{N} = \left\{\overline{1,N}\right\},\ x_n = n\xi,\ n \in \mathcal{N} = \left\{\overline{0,N}\right\},\end{gathered} \tag{4.1}$$

На рис. 2 приведен пример сетки с выбранными параметрами $M=9$, $N=4$, $\tau_0 = 1/12$, где отрезки $x = x_n$ изображены горизонтально, а отрезки $t = t_n$ — вертикально пунктирными линиями.

Каждому интервалу $\mathcal{X}_n$ из (4.1) соответствует подобласть $\mathcal{D}_n = \mathcal{T} \times \mathcal{X}_n$ области $\mathcal{D}$ и три одномерные функции:

$$\begin{gathered} w_n^+ : \left(x_n, T + x_{n+1}\right) \to \mathbb{R}, \quad w_n^- : \left(-x_{n+1}, T - x_n\right) \to \mathbb{R}, \\ y_n : \left(0, T\right) \to \mathbb{R}, \quad y_n(t) = \frac{1}{\xi} \int\limits_{\mathcal{X}_j} \int\limits_0^t f(\tau, x)\, d\tau\, dx. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Здесь, согласно (1.1), функция y_n либо тождественно равна нулю при $\mathcal{X}_n \cap \mathcal{U} = \varnothing$, либо $y_n = u$ при $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{U}$.

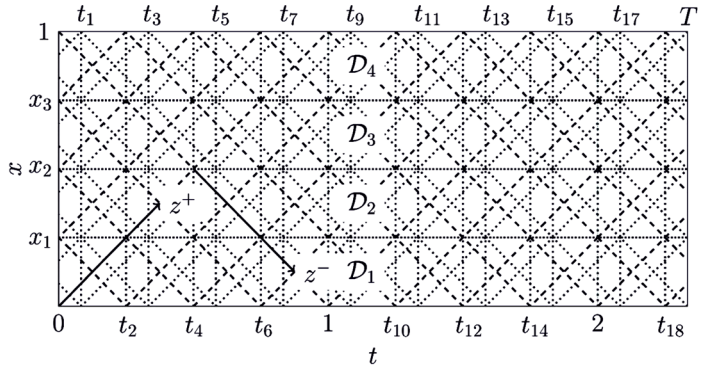


Рис. 2. Сетка на пространственно-временной области $\mathcal{D}$ для параметров системы: $x^-=0$, $\lambda=1/4$, $T=7/3$.

На каждой подобласти $\mathcal{D}_n$ переменные v и w представляются в виде:

$$\begin{cases} v(t,x) = w_n^+\left(z^+\right) - w_n^-\left(z^-\right) + y_n(t), \\ w(t,x) = w_n^+\left(z^+\right) + w_n^-\left(z^-\right), \end{cases} \quad (t,x) \in \mathcal{D}_n, n \in \mathcal{N}, \tag{4.3}$$

где введены новые координаты (z^+, z^-) на двумерной области $\mathcal{D}$:

$$z^\pm = t \pm x, \quad t = \frac{z^+ + z^-}{2}, \quad x = \frac{z^+ - z^-}{2}. \tag{4.4}$$

Новые координатные оси связанны с двумя характеристиками решения (сплошные наклонные линии на рис. 2, для наглядности ось z^- сдвинута вдоль оси z^+). Как видно из (4.4), новые координаты связаны с (t,x) биективными линейными преобразованиями (поворотом вокруг точки (0,0) и растяжением осей). После непосредственной подстановки (4.3) в функционал состояния F получается, что $F=0$, так как $\partial_x v \equiv \partial_t w$ и $\partial_t v \equiv \partial_x w - f$.

Два семейства характеристик представляют собой прямолинейные сегменты на $\mathcal{D}$, на которых не меняются значения функций $w_n^\pm(t \pm x)$. Показанные на рис. 2 наклонные ребра формируемой сетки — это характеристики, определяемые в новых координатах как

$$\mathcal{S}_k^\pm = \left\{(z^+, z^-) \in \mathcal{D} : z^\pm = z_k^\pm\right\}, \quad k \in \left\{\overline{1, 2(M+N)}\right\},$$

$$\begin{cases} z_k^+ = j\xi, & z_k^- = j\xi - 1, & k = 2j, \\ z_k^+ = j\xi + \tau_0, & z_k^- = j\xi - 1 + \tau_0, & k = 2j+1, \end{cases} \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Пространственные и временные ребра сетки удобнее задаются в старых координатах:

$$\mathcal{S}_m^t = \left\{(t,x) \in \mathcal{D} : t = t_m\right\}, \quad m \in \mathcal{M}^*,$$
$$\mathcal{S}_n^x = \left\{(t,x) \in \mathcal{D} : x = x_n\right\}, \quad n \in \mathcal{N}^*.$$

Из требования интегрируемости обобщенных первых производных от переменных состояния стержня (v,w) и их начальных и терминальных распределений следуют как непрерывность функций бегущих волн $w_n^\pm$ и управления u, так и выполнение условий непрерывной стыковки пары (v,w) на сегментах $\mathcal{S}_n^x$, где $n \in \mathcal{N}_* = \left\{\overline{1, N-1}\right\}$.

Для сшивки v и w на этих ребрах понадобится ввести на каждой подобласти $\mathcal{D}_n$ следующие вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} &w_{n,m}^+ : \mathcal{Z}_j \to \mathbb{R} : \ w_{n,m}^+(z) = w_n^+\left(z + z_{m+2n-2}^+\right), && m \in \mathcal{M}^{**}, \\ &w_{n,m}^- : \mathcal{Z}_j \to \mathbb{R} : \ w_{n,m}^-(z) = w_n^-\left(z + z_{m+2N-2n-2}^-\right), && m \in \mathcal{M}^{**}, \\ &y_{n,m} : \mathcal{Z}_j \to \mathbb{R} : \ y_{n,m}(z) = y_n\left(z + t_m\right), && m \in \mathcal{M}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где

$$\mathcal{M}^{**} = \left\{\overline{1, 2M+2}\right\}, \quad \mathcal{Z}_j = \left(0, \tau_j\right), \; j = m \bmod 2.$$

Согласно (4.3), комбинация функций $w^+_{n,i}$, $w^-_{n,j}$ и $y_{n,k}$ с правильным набором индексов i, j, k, n однозначно определяет переменные состояния v, w на каждом элементе сетки.

Так как $v, w \in H^1(\mathcal{D})$, из линейности соотношений (4.3) следуют определенные свойства одномерных функций $w^{\pm}_{n,m} \in H^1\left(\mathcal{Z}_j\right)$, $y_{n,m} \in H^1\left(\mathcal{Z}_j\right)$ из (4.5). В силу леммы Соболева [20] эти функции должны быть непрерывны и непрерывно продолжаемы на замыкание своей области определения: $w^{\pm}_{n,m} \in C^0\left(\overline{\mathcal{Z}}_j\right)$, $y_{n,m} \in C^0\left(\overline{\mathcal{Z}}_j\right)$, где $j = m \bmod 2$.

Для построения непрерывного решения краевой задачи на замыкании области $\overline{\mathcal{D}}$ необходимо выполнить терминальные, начальные, краевые и межэлементные условия соответственно на сегментах $\mathcal{S}^t_0$, $\mathcal{S}^t_{2M+1}$, $\mathcal{S}^x_n$, $n \in \mathcal{N}^*$. Учтем (1.9), (2.2), (4.3), (4.5) и начальные ограничения $y_{j,0}(0) = 0$, следующие из (4.2). Тогда терминальные условия из (2.2), заданные на $\mathcal{S}^t_0$, для каждой $\mathcal{D}_n$, $n \in \mathcal{N}$, после определенных преобразований представляются в форме

$$\begin{cases} w^+_{n,j}(z) = \dfrac{1}{2} w_T\left(z + z^+_{j+2M+2n-2}\right) + \dfrac{1}{2} v_T\left(z + z^+_{j+2M+2n-2}\right), \\ w^-_{n,j}(z) = \dfrac{1}{2} w_T\left(z^-_{j+2M+2N-2n} - z\right) - \dfrac{1}{2} v_T\left(z^-_{j+2M+2N-2n} - z\right), \\ j = 2M+1, 2M+2, \quad n \in \mathcal{N}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Начальные условия, заданные в (1.9), для той же $\mathcal{D}_n$ примут вид:

$$\begin{cases} w^+_{n,j}(z) = \dfrac{1}{2} w_0\left(z + z^+_{j+2n-2}\right) + \dfrac{1}{2} v_0\left(z + z^+_{j+2n-2}\right), \\ w^-_{n,j}(z) = \dfrac{1}{2} w_0\left(z^-_{j+2N-2n} - z\right) - \dfrac{1}{2} v_0\left(z^-_{j+2N-2n} - z\right), \\ j = 0,1, \quad n \in \mathcal{N}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Условия на обоих краях стержня из (1.9) для каждого ребра сетки, лежащего на граничных сегментах $\mathcal{S}^x_0$ и $\mathcal{S}^x_N$, переписываются как

$$\begin{cases} w^+_{1,m}(z) + w^-_{1,m+2}(z) = 0, \\ w^+_{N,m+2}(z) - w^-_{N,m}(z) + y_{N,m}(z) = 0, \end{cases} \quad m \in \mathcal{M}. \tag{4.8}$$

Межэлементные условия для функций v и w на внутренних сегментах $\mathcal{S}^x_n$, $n \in \mathcal{N}_*$, описываются следующим образом:

$$\begin{cases} w^+_{n,m+2}(z) + w^-_{n,m}(z) = w^+_{n+1,m}(z) + w^-_{n+1,m+2}(z), \\ w^+_{n,m+2}(z) - w^-_{n,m}(z) + y_{n,m}(z) = \\ = w^+_{n+1,m}(z) - w^-_{n+1,m+2}(z) + y_{n+1,m}(z), \\ m \in \mathcal{M}, \quad n \in \mathcal{N}_*. \end{cases} \tag{4.9}$$

Число уравнений $N_e = 4NM + 10N$ в линейной алгебраической системе (4.6)–(4.9) равно сумме числа неизвестных функций $w^{\pm}_{n,m}$ и числа терминальных условий $4N$, $n \in \mathcal{N}$, $m \in \mathcal{M}$. В этой системе аргумент z пробегает значения от 0 до τ_j, $j = 0$, 1, в зависимости от четности индекса m. Чтобы разрешить начальные, краевые и межэлементные условия, достаточно использовать функций $w^{\pm}_{n,m}$, но для удовлетворения терминальных ограничений (4.6) потребуется привлечь, например, независимые функции $y_{n^+,m}$. Эти функции определяются через функцию управления, и их число должно быть не меньше $4N$, что обеспечивается выполнени-

ем неравенства $M \geq 2N$ ($T \geq T_* = 2$). Если время управления больше критического, именно разрешимость уравнений (4.7)–(4.9) доказывает управляемость системы стержень–ПА.

Чтобы подтвердить разрешимость начально-краевых и межэлементных условий (4.7)–(4.9) исключительно относительно функций бегущих волн, можно предложить следующий алгоритм.

Ш а г 1. Начальные условия (4.7) разрешены: для каждого n относительно четырех переменных $w^{\pm}_{n,j}$, $j = 0,1$.

Ш а г $m+2$. Индекс m пробегает значения от 0 до $M-1$. Разрешаем соответствующие краевые и межэлементные условия. Функции $w^{\pm}_{j,m}$, входящие в эту подсистему, уже выражены на предыдущих шагах через начальные распределения v_0, w_0 и функций u_k, где $k=\overline{0,m-1}$:

– пара краевых условий из (4.8) решается для текущего индекса m относительно $w^{+}_{N,m+2}$ и $w^{-}_{0,m+2}$;

– наряду с этим $2(N-1)$ межэлементных уравнений из (4.9) попарно удовлетворяются с использованием $w^{+}_{n,m+2}$ и $w^{-}_{n+1,m+2}$, где $n = \mathcal{N}_*$.

5. Сведение задачи управления к одномерной вариационной. Введем вспомогательные функции управления:

$$u_m : \mathcal{Z}_j \to \mathbb{R} : \quad u_m(z) = u(z + t_m), \quad m \in \mathcal{M}, \quad j = m \bmod 2. \tag{5.1}$$

Из (4.2), (4.5) следует, что $y_{n,m}(z) = u_m(z)$ для $n^- < n \leq n^+$ и $y_{n,m}(z) = 0$ для $n \leq n^-$ или $n > n^+$, где $z \in \mathcal{Z}_j$.

Как обсуждалось в предыдущем разделе, чтобы выполнить все терминальные условия (4.6) в общем случае необходимо $4N$ независимых функций из (5.1). Это, в свою очередь, приводит к тому, что требуется время управления не меньше критического $T \geq T^* = 2$, чтобы существовало такое количество функций u_m.

Допустим, что система (4.6)–(4.9) разрешима относительно функций бегущих волн $w^{\pm}_{n,m}$ при $n \in \mathcal{N}$ и $m \in \mathcal{M}^{**}$, а также части функций управления $u_i(z)$ из (5.1), $k = \overline{2M-4N, 2M}$. Оставшиеся независимыми функции $u_j(z)$ соберем в два вектора:

$$\mathbf{u}_0 = (u_{2k})_{k=0}^{M-2N}, \quad \mathbf{u}_1 = (u_{2k-1})_{k=1}^{M-2N}.$$

Решение линейной системы (4.6)–(4.9) в этом случае зависит от начальных и терминальных распределений $v_0(x)$, $w_0(x)$ $v_T(x)$, $w_T(x)$ на отрезке $x \in \bar{\mathcal{X}}$ и двух вектор-функций:

$$\mathbf{u}_j : \bar{\mathcal{Z}}_j \to \mathbb{R}^{N_j}, \quad N_1 = N_0 - 1 = M - 2N, \quad j = 0,1.$$

Для того чтобы динамическая и кинематическая функции v, w были непрерывны, на сегментах $\mathcal{S}^t_m$, где $m \in \mathcal{M}$, должны быть согласованы узловые значения управления:

$$u_{2k+1}(0) = u_{2k}(\tau_0), \quad k = \overline{0, M-2N},$$
$$u_{2k}(0) = u_{2k-1}(\tau_0), \quad k = \overline{1, M-2N}, \quad u_0(0) = 0.$$

Можно представить эти соотношения в векторном виде:

$$\mathbf{u}_0(0) = \mathbf{B}_0\mathbf{u}_1(\tau_1), \quad \mathbf{u}_0(\tau_0) = \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1(0) + \mathbf{b}. \tag{5.2}$$

Здесь

$$\mathbf{B}_j \in \mathbb{R}^{N_0 \times N_1}, \quad j = 0,1, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_0},$$
$$\mathbf{B}_0 = [0\ \mathbf{E}_{N_1}]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{B}_1 = [\mathbf{E}_{N_1}\ \mathbf{b}]^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{E}_{N_1}$ — единичная матрица размером N_1. Значения векторов $\hat{\mathbf{b}}$, $\mathbf{b}$ зависят от параметров сетки, а $\mathbf{b}$ — еще и от значений начальных и терминальных функций v_0, w_0, v_T, w_T в узловых точках сетки.

Рассмотрим подробнее функционал цены J из (2.2) с учетом введенных функций управления. В силу своей аддитивности безразмерный функционал J записывается через функции u_m в форме:

$$J = \frac{\lambda}{2T}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=j}^{M}\int_{\mathcal{Z}_j}(u'_{2k-j}(z))^2\,dz.$$

Так как зависимые функции управления u_m выражаются аффинно через независимые, квадратичный функционал J переписывается в терминах вектор-функций управления $\mathbf{u}_j$:

$$J = \frac{\lambda}{2T}\sum_{j=0}^{1}\int_{\mathcal{Z}_j} L_j dz, \quad L_j(z) = |\,\mathbf{A}_j\mathbf{u}'_j\,(z) + \mathbf{a}_j(z)\,|^2, \tag{5.3}$$

где $\mathbf{A}_j(z) \in \mathbb{R}^{(2N+N_j)\times N_j}$ — постоянные матрицы, а значения вектор-функций $\mathbf{a}_j(z) \in \mathbb{R}^{2N+N_j}$ определяются через начальные и терминальные состояния стержня. Отметим, что L_j как квадратичные формы векторов $\mathbf{u}'_j(z)$ положительно определенны. Это напрямую следует из того, что каждую форму L_j можно представить как сумму положительной и неотрицательной форм:

$$L_j(z) = \mathbf{u}'^{\mathrm{T}}_j(z)\mathbf{u}'_j\,(z) + |\,\tilde{\mathbf{A}}_j\mathbf{u}'_j\,(z) + \tilde{\mathbf{a}}_j(z)\,|^2, \tilde{\mathbf{A}}_j \in \mathbb{R}^{2N\times N_j}, \tilde{\mathbf{a}}_j \in \mathbb{R}^{2N}.$$

В итоге задача оптимального управления сводится к классической одномерной краевой задаче вариационного исчисления относительно векторозначных функций $\mathbf{u}_j$, $j = 0, 1$. Нужно найти такие управления $\mathbf{u}^*_j(z)$ для $z \in \bar{\mathcal{Z}}_j$, которые минимизируют квадратичный функционал:

$$J[\boldsymbol{u}^*_0, \boldsymbol{u}^*_1] = \min_{\boldsymbol{u}_j \in H^1(\mathcal{Z}_j, \mathbb{R}^{N_j}),\, j=0,1} J[\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1] \tag{5.4}$$

при соблюдении краевых ограничений (5.2).

Для определения необходимых условий экстремальности решения вариационной задачи (5.2), (5.4) введем вектор-функции, сопряженные с $\mathbf{u}_j$, согласно

$$\mathbf{p}_j = \frac{\partial L_j}{\partial \mathbf{u}'} = 2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_j\mathbf{A}_j\mathbf{u}'_j + 2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_j\mathbf{a}_j.$$

С учетом того, что лагранжианы L_j, введенные в (5.3), включают в себя только первую производную от $\mathbf{u}_j$, два векторных уравнения Эйлера имеют вид:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_j\mathbf{A}_j\mathbf{u}'_j(z) + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}_j\mathbf{a}'_j(z) = 0, \quad z \in \mathcal{Z}_j, \quad j = 0,1. \tag{5.5}$$

Выпишем условие трансверсальности вариационной задачи:

$$\sum_{j=0}^{1}\left(\mathbf{p}^{\mathrm{T}}_j(0)\delta\mathbf{u}_j(0) - \mathbf{p}^{\mathrm{T}}_j(\tau_j)\delta\mathbf{u}_j(\tau_j)\right) = 0, \tag{5.6}$$

где $\delta\mathbf{u}_j(0)$ и $\delta\mathbf{u}_j(\tau_j)$ — вариации вектор-функций $\mathbf{u}_j$ на границе области определения $\mathcal{Z}_j$. С учетом существенных краевых условий (5.2) из (5.6) выводятся естественные условия, накладываемые на сопряженный функции $\mathbf{p}_j$:

$$\left(\mathbf{p}^{\mathrm{T}}_0(0)\mathbf{B}_0 - \mathbf{p}^{\mathrm{T}}_1(\tau_1)\right)\delta\mathbf{u}_1(\tau_1) - \left(\mathbf{p}^{\mathrm{T}}_0(\tau_0)\mathbf{B}_1 - \mathbf{p}^{\mathrm{T}}_1(0)\right)\delta\mathbf{u}_1(0) = 0. \tag{5.7}$$

Окончательно из независимости вариаций концевых значений $\mathbf{u}_1$ в (5.7) получаем условия трансверсальности:

$$\mathbf{p}_1(\tau_1) = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}_0\mathbf{p}_0(0), \quad \mathbf{p}_1(0) = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}_1\mathbf{p}_0(\tau_0). \tag{5.8}$$

Из положительной определенности матриц $\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_j$ решение ОДУ (5.5) выводится напрямую в квадратурах:

$$\mathbf{u}_j(z) = -\int_0^z \left(\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_j\right)^{-1}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_j(\zeta)\,d\zeta + \mathbf{c}_j^1 z + \mathbf{c}_j^0, \qquad \mathbf{c}_j^i \in \mathbb{R}^{N_j}, \quad z \in \mathcal{Z}_j, \quad i,j = 0,1. \tag{5.9}$$

Оптимальные константы $\mathbf{c}_j^i$ находятся из $2N_0 + 2N_1$ условий (5.2), (5.8).

Важно отметить, что векторы управления $\mathbf{u}_j^*(z)$ из (5.9), удовлетворяющие этим условиям, доставляют абсолютный минимум целевому функционалу J. Это напрямую следует из квадратичности и положительной определенности J.

6. Пример оптимизации движения. Приведем пример оптимального гашения продольных колебаний ($v_T = w_T = 0$) консольно закрепленного стержня для заданной длины ПА $\lambda = 1/4$. Допускаются лишь четыре варианта расположения ПА: $x^- = 0, \xi, 2\xi, 3\xi$, где $\xi = 1/N$, $N = 4$. В качестве начальных распределений зададим следующие тригонометрические функции:

$$v_0(x) = \sin 4 - \sin 4x, \quad w_0(x) = \sin 4x. \tag{6.1}$$

Для демонстрации характера оптимальных перемещений выберем случай, когда ПА находится ближе к заделке ($x^- = 0$). Зафиксируем время гашения колебаний $T = 7/3$, т.е. $M = 9$, $\tau_0 = 1/12$. На рис. 3 показано оптимальное управление u как функция времени t. Как видно из графика, управление непрерывно и, согласно построению (1.1), равно нулю в начальный момент $u(0) = 0$. На начальном этапе эта функция положительна, а ближе к концу временного интервала меняет знак.

Оптимальная пьезоэлектрическая сила $f(t, 1/8)$, возбуждаемая ПА во время процесса, приведена на рис. 4. Судя по этому графику, в моменты времени вида $t = j\xi$ и $t = k\xi + \tau_0$, где $0 < j,k \le 9$ — целые числа, сила может скачком менять свое значение.

На рис. 5 показано соответствующее выбранным параметрам оптимальное пространственно-временное распределение динамического потенциала $v(t,x)$. Это распределение показывает, что потенциал представляет собой непрерывную функцию, строго удовлетворено краевое ограничение $v(t,1) = 0$, в конце процесса выполняется однородное терминальное условие

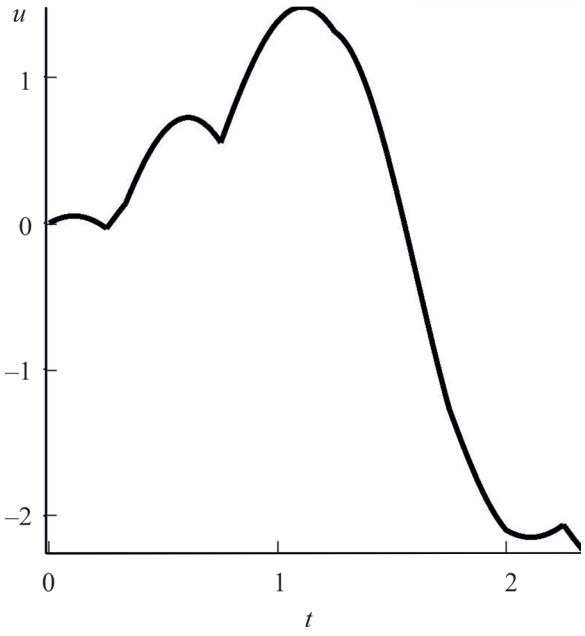


Рис. 3. Оптимальное управление $u(t)$.

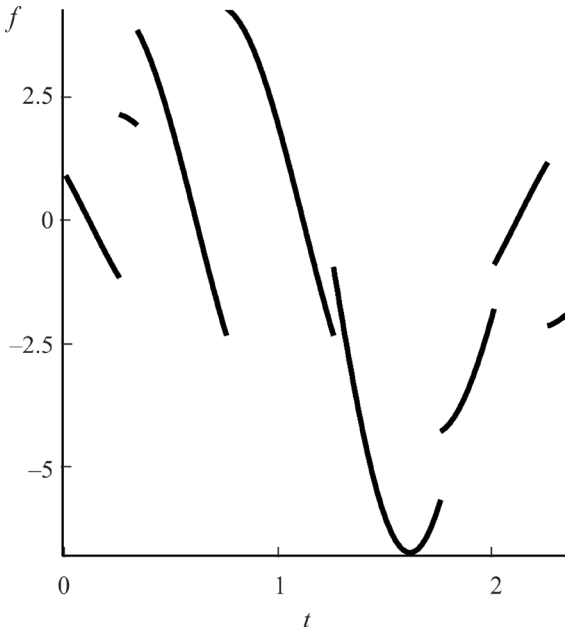


Рис. 4. Создаваемая пьезоэлектрическим актюатором оптимальная сила $f(t, \lambda/2) = \dot{u}(t)$.

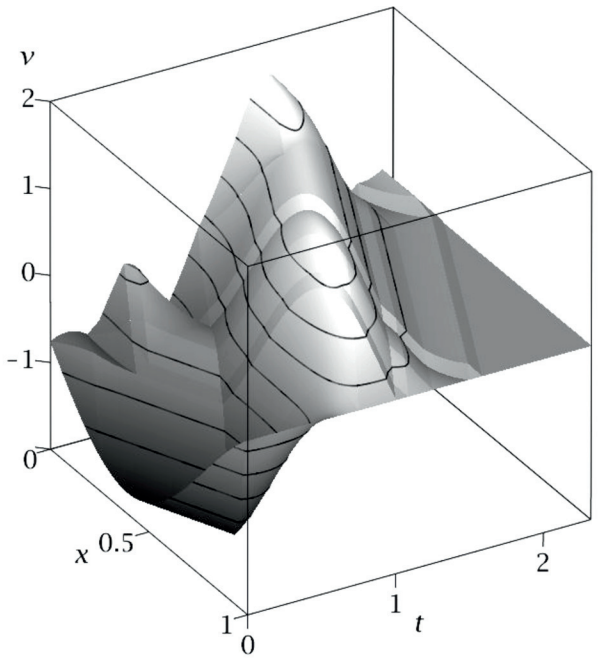


Рис. 5. Оптимальный динамический потенциал стержня $v(t,x)$.

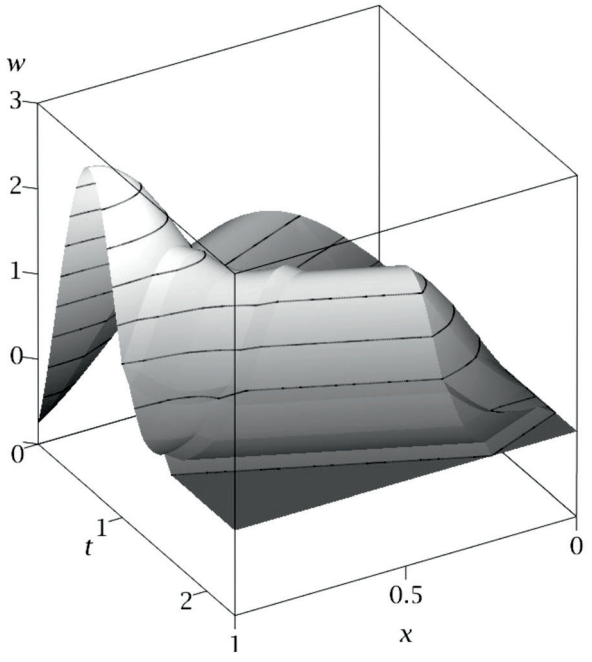


Рис. 6. Оптимальные перемещения точек стержня $w(t,x)$.

$v(T,x)=0$. Максимальное значение динамическая переменная v принимает в точке закрепления $x=0$.

На рис. 6 изображены оптимальные продольные перемещения w точек деформируемого стержня в зависимости от координат (t,x). Функция $w(t,x)$ непрерывна, в заделанном конце стержня перемещений нет ($w(t,0)$), а к моменту окончания управляемого процесса $t=T$ стержень приходит в недеформированное состояние с нулевой скоростью. Максимум перемещений достигается на свободном конце $x=1$.

Посмотрим, как изменяется целевой функционал J в зависимости от времени управления T и места расположения ПА на стержне. На рис. 7 различными маркерами показаны оптимальные значения функционала J для четырех положений левого конца ПА: $x^-=j\xi$, $j=0, 1, 2, 3$. Зависимости $J(T)$ для различных j помечены соответствующими номерами. Начальные условия такие же, как в (6.1). Время меняется от минимально допустимого $T^*=2$ до $T=3$. Для каждого j функция $J(T)$ строго монотонно убывающая. Эта функция терпит разрывы первого рода для значений T, кратных $\xi=\lambda=1/4$, причем $J(T)$ имеет непрерывный предел справа $J(m\xi-0)>J(m\xi)=J(m\xi+0)$.

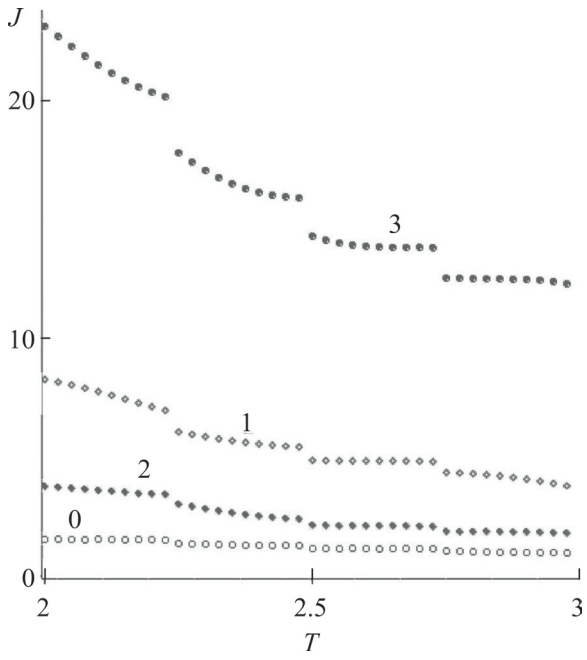


Рис. 7. Оптимальные значения целевого функционала J в зависимости от времени управления T для различных расположений ПА при $x^-=j/4$, где $j=0, 1, 2, 3$.

Наименьшие значения нормы управляющей силы достигаются, если расположить ПА ближе к жесткой заделке стержня ($j=0$). При этом для критического $T=2$ и выбранных начальных условий подсчитано, что $J(2)=1.53$. Если поместить ПА у свободного края ($j=3$), требуемые управляющие силы для гашения колебаний наибольшие по квадратичной норме. Для такой конфигурации критическое значение функционала равно $J(2)=23.15$. Далее по убыванию

нормы идет случай $x^- = 1/4$ ($j = 1$), для которого $J(2) = 8.28$. Если левый конец ПА находится в середине стержня ($x^- = 1/2$, т.е. $j = 2$), максимум функционала принимает значение $J(2) = 3.77$.

Заключение. Рассмотрены продольные перемещения тонкого однородного упругого стержня с расположенным на нем пьезоэлектрическим актюатором. Механическое состояние стержня описывается кинематическим и динамическим полями, заданными в энергетическом пространстве. Для фиксированного интервала времени дана обобщенная формулировка задачи оптимального управления с помощью дискретно распределенных в пространстве продольных сил. Минимизируется квадрат среднего по времени значения управляющей пьезоэлектрической силы при условии приведения стержня в предписанное состояние. Определены геометрические параметры ПА, при которых приведение стержня в произвольное состояние невозможно ни за какое время. Предложен алгоритм построения и оптимизации движения с использованием представления решения в виде комбинации бегущих волн. Исследована зависимость оптимальных значений квадратичной нормы пьезоэлектрической силы от времени управления и положения ПА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lions J.L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1971. 400 p.
2. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
3. *Романов И.В., Шамаев А.С.* О задаче граничного управления для системы, описываемой двумерным волновым уравнением // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 109–116.
4. *Черноусько Ф.Л. Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
5. *Chen G.* Control and Stabilization for the Wave Equation in a Bounded Domain. II // SIAM J. Control Optim. 1981. V. 19. № 1. P. 114–122.
6. *Гавриков А.А., Костин Г.В.* Изгибные колебания упругого стержня, управляемого пьезоэлектрическими силами // ПММ. 2023. Т. 87. № 5. С. 801–819.
7. IEEE Standard on Piezoelectricity // ANSI/IEEE Std 176-1987. 1988. https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1988.79638
8. *Kucuk I., Sadek I., Yilmaz Y.* Optimal Control of a Distributed Parameter System with Applications to Beam Vibrations Using Piezoelectric Actuators // J. Franklin Inst. 2014. V. 351. № 2. P. 656–666.
9. *Kostin G.V., Saurin V.V.* Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.
10. *Kostin G., Gavrikov A.* Controllability and Optimal Control Design for an Elastic Rod Actuated by Piezoelements // IFAC-PapersOnLine. 2022. V. 55. № 16. P. 350–355. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.09.049
11. *Гавриков А.А., Костин Г.В.* Оптимизация продольных движений упругого стержня с помощью периодически распределенных пьезоэлектрических сил // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 6. С. 93–109.
12. *Kostin G., Gavrikov A.* Modeling and Optimal Control of Longitudinal Motions for an Elastic Rod with Distributed Forces // ArXiv. 2022. arXiv:2206.06139 5. P. 1–11. https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.06139
13. *Gavrikov A., Kostin G.* Optimal LQR Control for Longitudinal Vibrations of an Elastic Rod Actuated by Distributed and Boundary Forces // Mechanisms and Machine Science. V. 125. Berlin: Springer, 2023. P. 285–295. https://doi.org/10.1007/978-3-031-15758-5_28
14. *Ho L.F.* Exact Controllability of the One-dimensional Wave Equation with Locally Distributed Control // SIAM J Control Optim. 1990. V. 28. № 3. P. 733–748.
15. *Bruant I., Coffignal G., Lene F., Verge M.* A Methodology for Determination of Piezoelectric Actuator and Sensor Location on Beam Structures // J. Sound and Vibration. 2001. V. 243. № 5. P. 861–882. https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3448
16. *Gupta V., Sharma M., Thakur N.* Optimization Criteria for Optimal Placement of Piezoelectric Sensors and Actuators on a Smart Structure: A Technical Review // J. Intelligent Material Systems and Structures. 2010. V. 21. № 12. P. 1227–1243. https://doi.org/10.1177/1045389X10381659
17. *Botta F., Rossi A., Belfiore N.P.* A Novel Method to Fully Suppress Single and Bi-modal Excitations Due to the Support Vibration by Means of Piezoelectric Actuators // J. Sound and Vibration. 2021. V. 510. № 13. P. 116260. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116260
18. *Тихонов А.Н. Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
19. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
20. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1968. 624 с.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 117–136

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

УДК 004.67, 608.2, 608.4, 519.25, 519.223

АВТОМАТИЗАЦИЯ ТЕСТИРОВАНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК ЗРИТЕЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ

© 2024 г. А. Т. Костоев[1], *, В. И. Цурков[2]

[1]Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина,, Москва, Россия
[2]Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия
**e-mail: a.kostoev@inbox.ru*

Поступила в редакцию 14.03.2024 г.
После доработки 31.03.2024 г.
Принята к публикации 13.05.2024 г.

Рассматриваются проблемы, связанные с исследованием возникновения систематических ошибок зрительного восприятия, проявляющихся в форме иллюзий. Уровень существующей техники демонстрирует недостаток технических средств и методов, направленных на исследование зрительного восприятия в условиях возникновения зрительных иллюзий. В связи с этим авторами предложены методология тестирования и автоматизированная система, позволяющая систематизировать процесс исследования зрительных иллюзий. На основе предложенной модели проведено исследование зрительной иллюзии пересечения (иллюзии Поггендорфа), возникающей при зрительном восприятии диагональной линии, частично проходящей за непрозрачным объектом. Изучалась зависимость систематических ошибок, возникающих при определении местоположения выходного отрезка относительного входного, от геометрических параметров и конфигураций фигур, вызывающих иллюзию.

Ключевые слова: зрительные иллюзии, геометрические иллюзии, иллюзия Поггендорфа, систематические ошибки восприятия, методология тестирования, автоматизированная система, систематизация процесса тестирования, моделирование процесса

DOI: 10.31857/S0002338824030128 **EDN:** UPLFNO

AUTOMATION OF TESTING OF SYSTEMATIC ERRORS IN VISUAL PERCEPTION

A. T. Kostoev[a], *, V. I. Tsurkov[b]

[a] Russian State University named after A.N. Kosygin, Moscow
[b] Federal Research Center «Computer Science and Control» Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
**e-mail: a.kostoev@inbox.ru*

The article discusses the problems associated with the study of the occurrence of systematic errors in visual perception, manifested in the form of illusions. The level of existing technology demonstrates a lack of technical means and methods aimed at studying visual perception in conditions of the occurrence of visual illusions. In this regard, the authors proposed a testing methodology and an automated system that allows us to systematize the process of studying visual illusions. Based on the proposed model, a study of the visual illusion of intersection was carried out (Poggendorff illusion), which occurs when the visual perception of a diagonal line partially passing behind an opaque object. The dependence of systematic errors that arise when determining the location of the output segment, relative to the input, on the geometric parameters and configurations of figures causing the illusion was studied.

Keywords: visual illusions, geometric illusions, Poggendorff illusion, systematic errors of perception, testing methodology, automated system, systematization of the testing process, process modeling

Введение. Зрительное восприятие играет ключевую роль при обработке информации человеком. Понимание механизмов зрительного восприятия является важным фактором исследований в различных областях науки и техники: психологии, психофизиологии, искусственного интеллекта и др. [1–4].

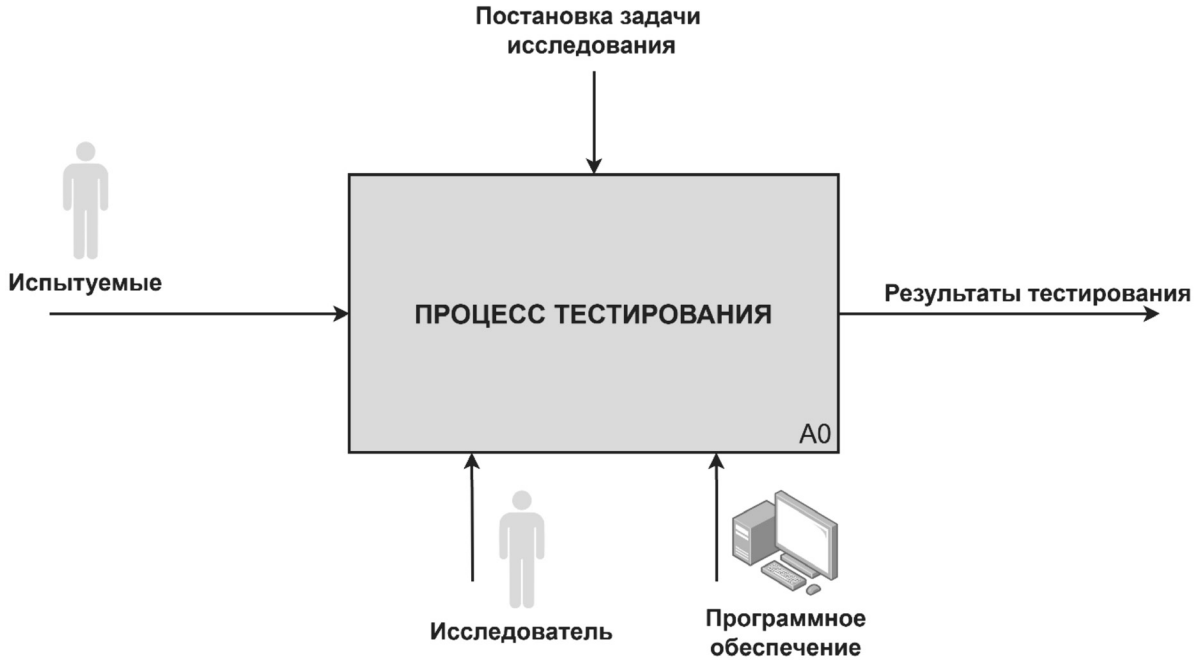


Рис. 1. Процесс тестирования зрительного восприятия.

Известно, что восприятие человеком зрительной информации – сложный процесс, подверженный различным ошибкам и искажениям. Особый интерес для исследователей представляют зрительные иллюзии [5], выходящие за границы обычных ошибок восприятия. Иллюзии представляют собой систематические ошибки зрительного восприятия, не поддающиеся произвольной коррекции. Эти ошибки могут быть связаны как с физиологическими причинами зрительной системы человека, так и с психологическими особенностями [6–10]. Однако, как отмечает И.И. Шошина, «пока еще не сформулирована гипотеза, позволяющая исключить противоречия хотя бы в объяснении основных закономерностей зрительного искажения при восприятии даже простых геометрических фигур» [11].

В качестве одной из причин такого положения автор выделяет недостаточно надежную процедуру тестирования испытуемых, в связи с чем возникает необходимость в разработке методов количественного тестирования, дающих относительно высокую воспроизводимость результатов.

В работе [12] также подчеркивается значимость исследований, посвященных разработке средств компьютерной поддержки для автоматизированных психофизиологических экспериментов, направленных на изучение механизмов зрительного восприятия. Основное внимание уделяется аспектам синтеза и сохранения изображений-стимулов, их предъявлению наблюдателям, а также анализу ответов в специализированных программах. Авторы также представили ряд разработанных программных обеспечений (ПО) для проведения психофизиологических экспериментов.

Однако большинство разрабатываемых ПО в области исследований зрительного восприятия в настоящее время является лишь инструментом для решений отдельных задач в рамках одного типа исследований. В связи с чем возникает необходимость в разработке общей методологии проведения экспериментов (тестирований) и системы, реализующей данную методологию.

Данная работа посвящена описанию предложенной модели тестирования систематических ошибок восприятия, воспроизводимость которой подтверждается исследованием зависимости систематических ошибок зрительного восприятия от геометрических параметров тест-объектов фигур, порождающих геометрические иллюзии.

1. Моделирование процесса тестирования систематических ошибок восприятия. Тестирование зрительного восприятия, направленное, в частности, на выявление величины систематиче-

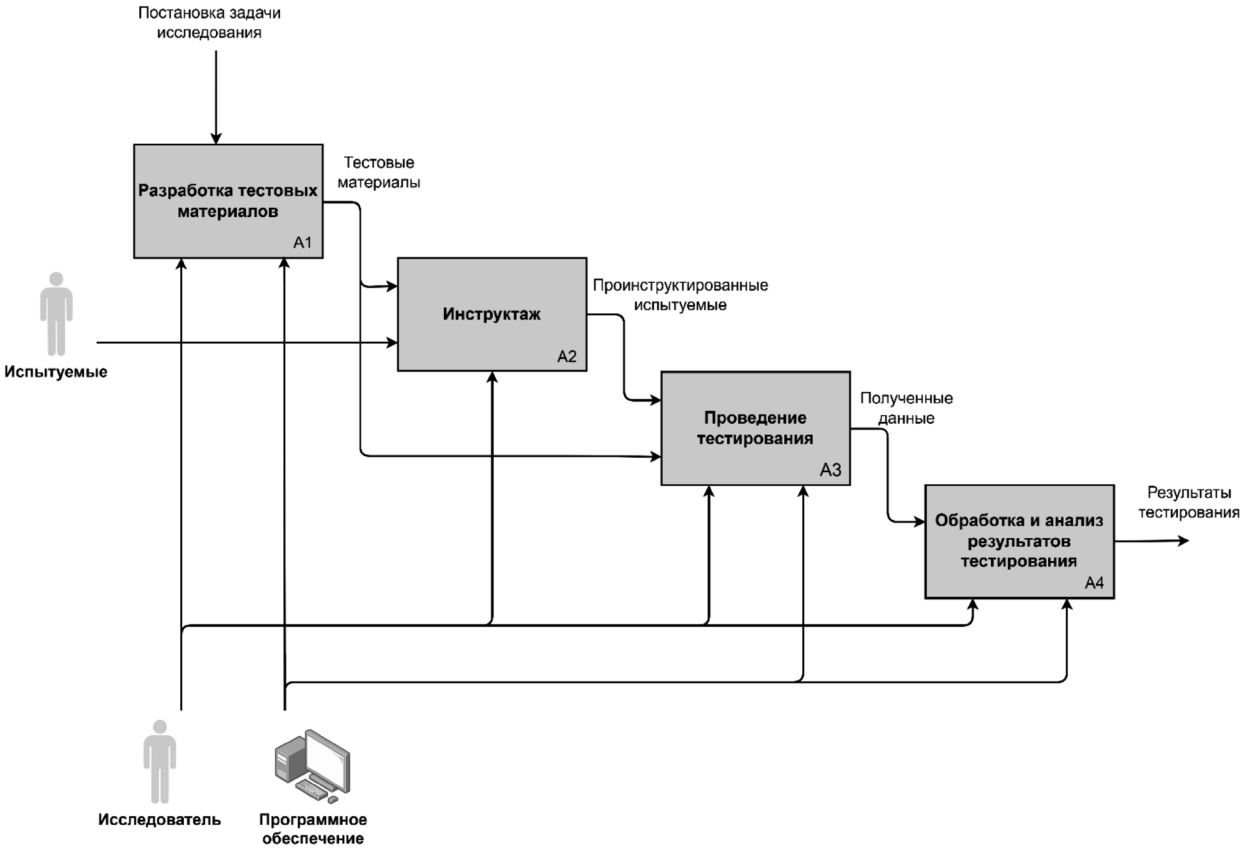


Рис. 2. Основные этапы процесса тестирования.

ских ошибок в восприятии при различных условиях, можно представить как информационный процесс. На общей контекстной диаграмме, изображенной на рис. 1, обозначены входы, выходы, механизмы и элементы управления, задействованные в процессе тестирования. Участниками данного процесса являются: испытуемый (или группа испытуемых), исследователь (или группа исследователей) и ПО.

В начале процесса формируется постановка задачи исследования, в зависимости от которой осуществляется сам процесс тестирования. Постановка задачи представляет управляющий элемент, от которого зависит функционал процесса тестирования, реализуемый исследователем и ПО, выступающими в качестве механизмов процесса. Входным элементом процесса выступает испытуемый, который, следуя инструкциям исследователя, проходит тестирование. На выходе процесса формируются результаты тестирования.

Процесс тестирования разделен на четыре основных этапа (рис. 2): разработка тестовых материалов, инструктаж, проведение тестирования, обработка и анализ результатов тестирования.

Указанные этапы отражают основные функции процесса и являются также декомпозируемыми, за исключением второго этапа, заключающегося в проведении инструктажа для испытуемых.

Первый этап представляет собой разработку тестовых материалов (рис. 3).

1. Выбор объекта исследования. Согласно поставленной задаче, исследователем осуществляется выбор иллюзии для дальнейшего изучения.

2. Формирование референтных и тестовых стимулов. На основе объекта исследования и поставленной задачи формируются тест-объекты для проведения тестирований, включающие референтные и тестовые стимулы.

3. Определение изменяющихся параметров референтных стимулов. В зависимости от задачи на этапе разработки определяются регулируемые параметры тест-объектов иллюзии, от которых находится значение систематической ошибки, возникающей у испытуемых при определении тестовых стимулов.

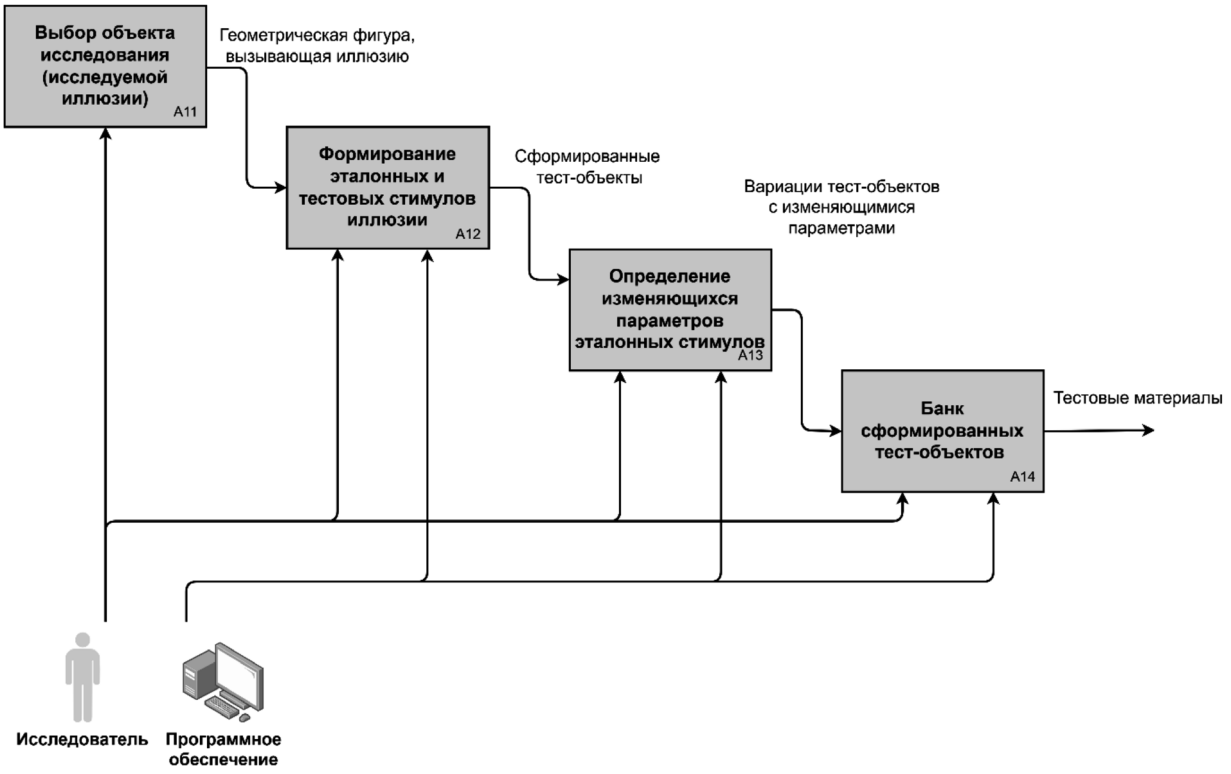


Рис. 3. Этап разработки тестовых материалов.

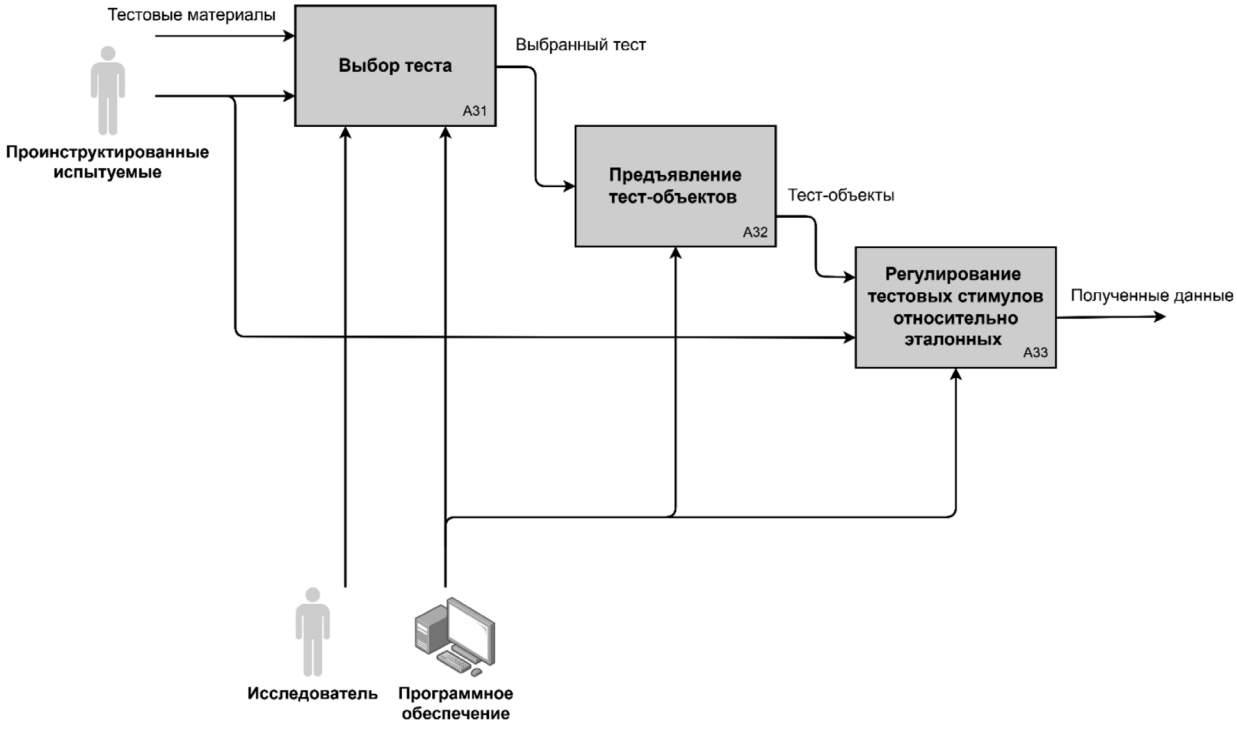


Рис. 4. Этап проведения тестирования.

4. Банк сформированных тест-объектов. На выходе из функции, отвечающей за разработку тестовых материалов, формируем тестовые материалы для проведения тестирований.

Тестовые материалы, полученные на первом этапе процесса, позволяют перейти ко второму этапу, на котором исследователь дает инструкции для испытуемых, демонстрирует работу

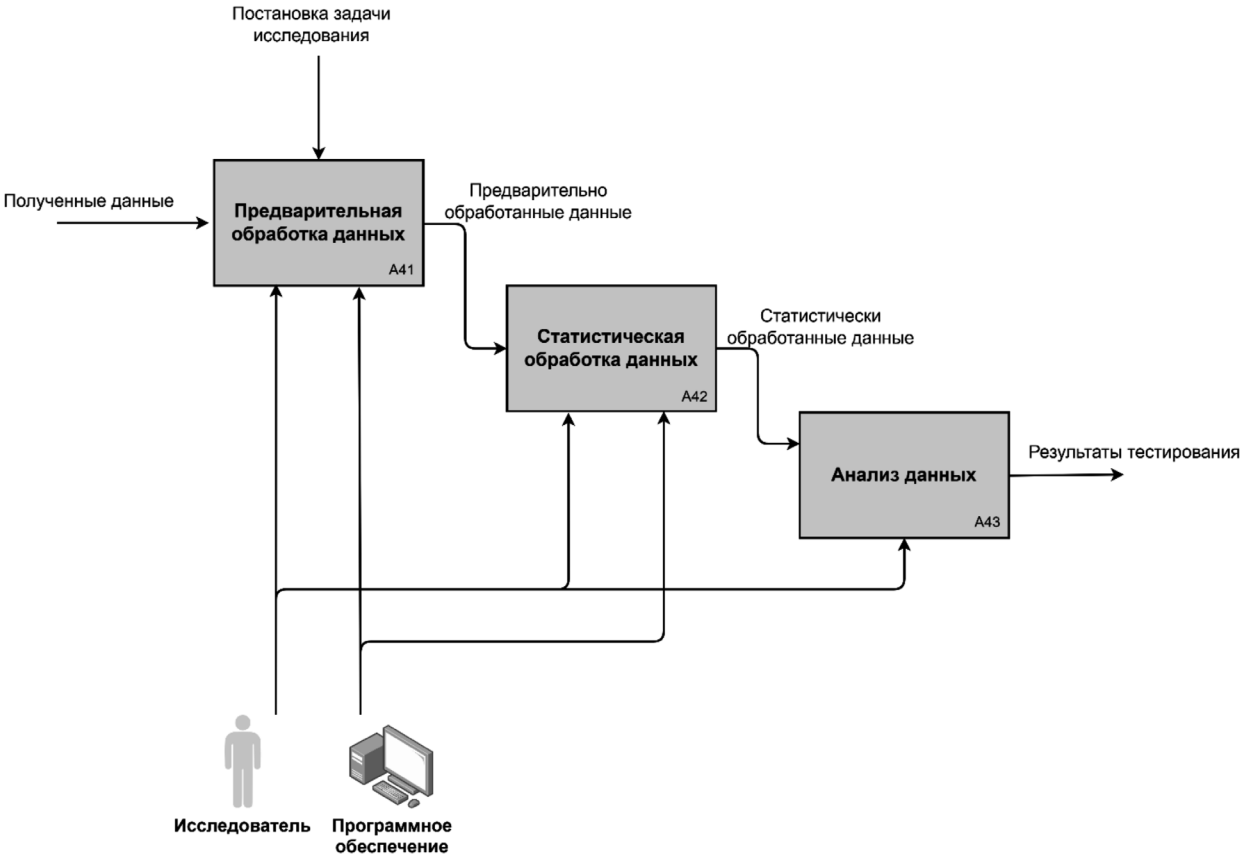


Рис. 5. Обработка и анализ результатов тестирования.

системы и знакомит с правилами прохождения тестов. После чего испытуемые приступают непосредственно к самому тестированию.

На этапе проведения тестирования (рис. 4) испытуемые, прошедшие инструктаж, осуществляют выбор теста. На основе данного выбора предъявляются сформированные тест-объекты с референтными и тестовыми стимулами. Тестовые стимулы регулируются испытуемыми, согласно задаче исследования и полученным инструкциям, при этом данные каждого теста сохраняются и структурируются по каждому испытуемому.

Последним этапом процесса является обработка и анализ результатов тестирования (рис. 5). Этап включает предварительную обработку данных, статистическую обработку данных и анализ.

Предварительная и статистическая обработка данных осуществляется ПО и включает:

– поиск и очистку заведомо ошибочных значений пропусков, выбросов и других несоответствий, которые могут исказить результаты анализа;

– методы описательной статистики: вычисление средних значений, медианы, стандартного отклонения и других мер центральной тенденции и разброса данных;

– первичную визуализацию данных, позволяющую лучше понять их структуру и распределения для дальнейшего анализа и выявления закономерностей.

Анализ статистически обработанных данных, осуществляемый исследователем, включает методы корреляционного и регрессионного анализа, а также статистические тесты для проверки гипотез и определения статистически значимых различий между группами данных.

2. Проектирование системы тестирования. Важным шагом для разработки системы является функциональное моделирование процесса. На начальном этапе необходимо определить роли пользователей системы и их функциональные возможности.

Из раскрытого в разд. 1 процесса тестирования выделены два вида пользователей системы: испытуемые и исследователь. Графическое представление функциональных требований к системе, моделирующих способы взаимодействия пользователей с системой, представлено диа-

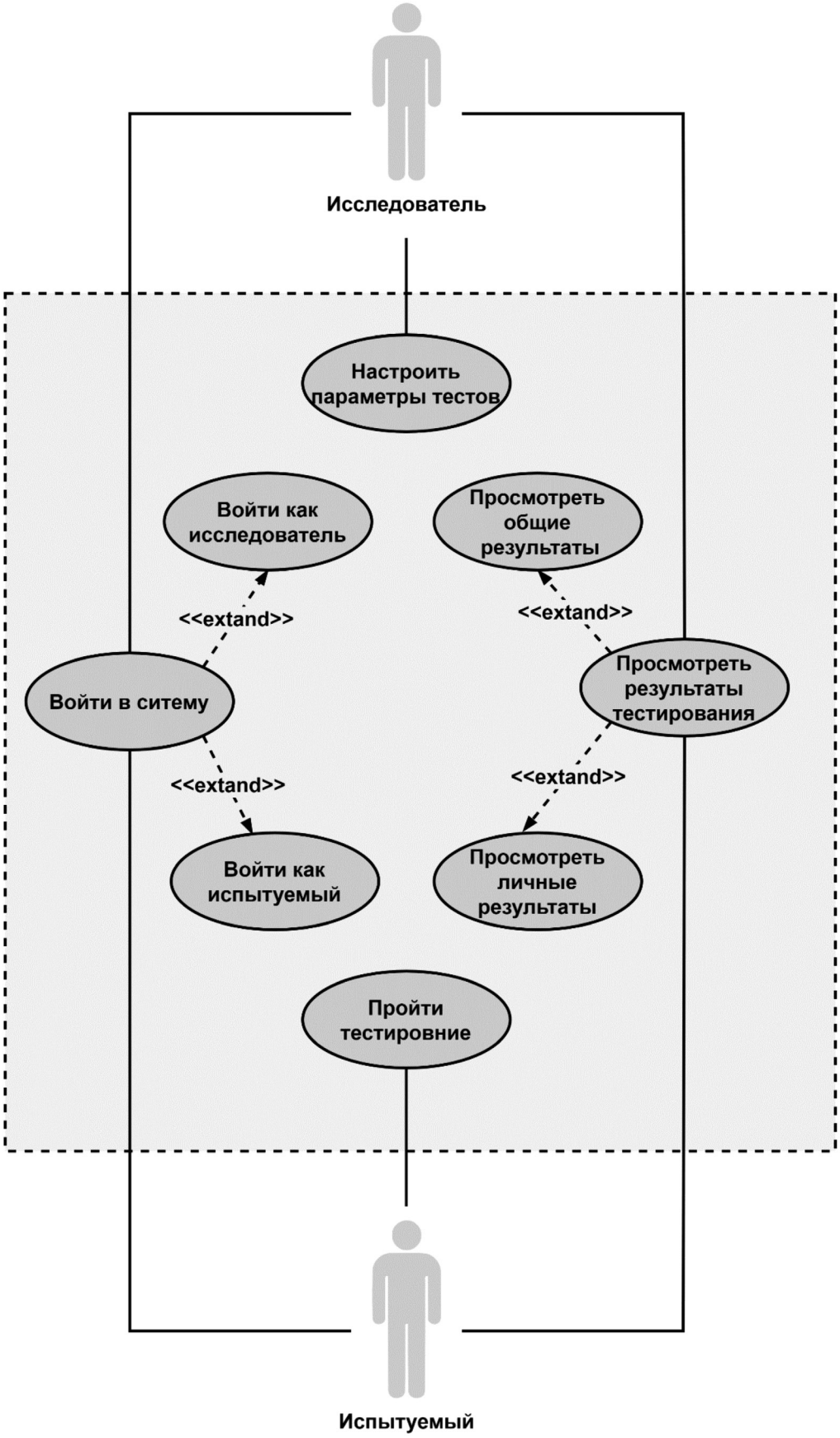


Рис. 6. Обобщенная UML-диаграмма вариантов использования.

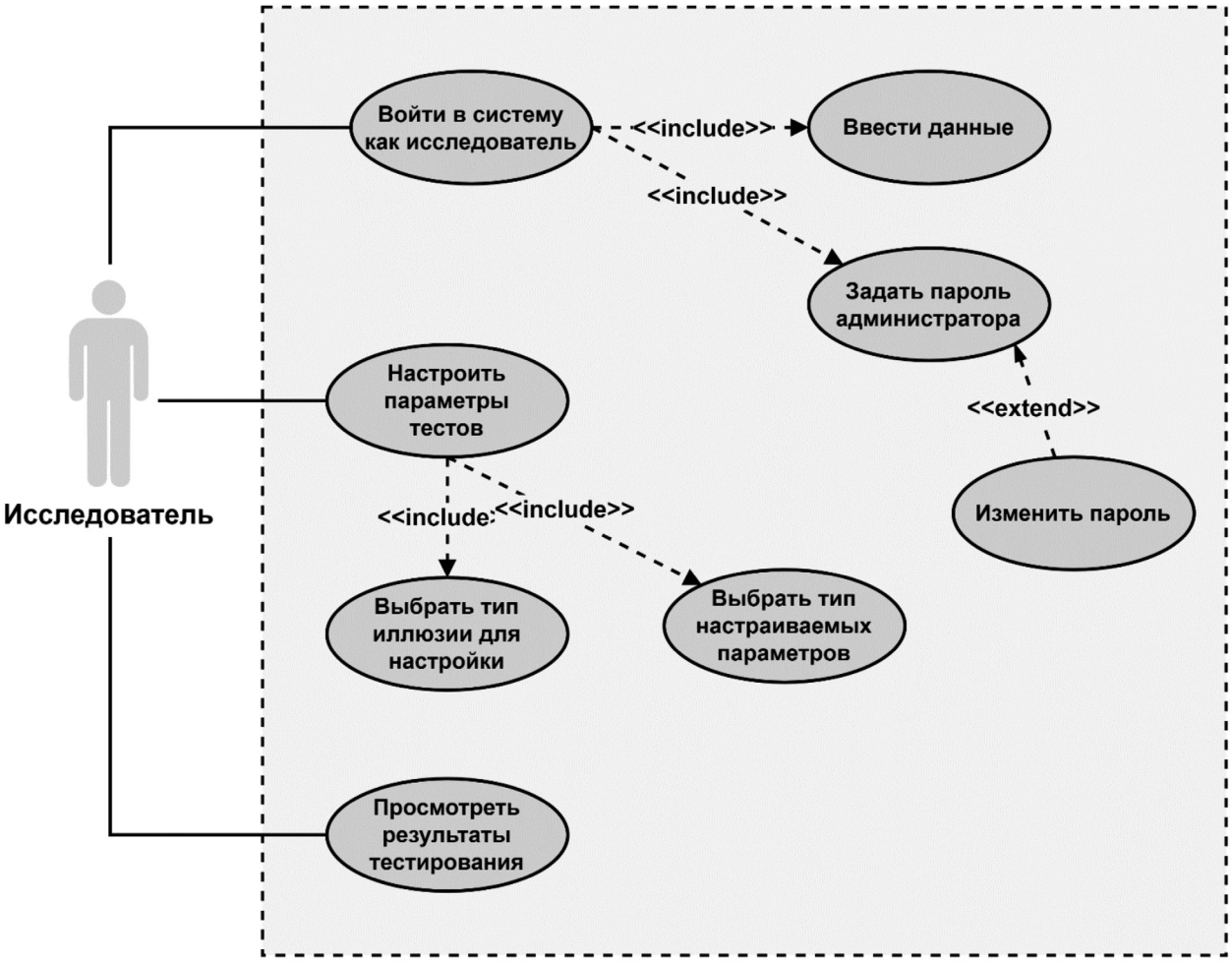


Рис. 7. UML-диаграмма вариантов использования исследователя.

граммами UML (англ. unified modeling language – унифицированный язык моделирования). На рис. 6 схематически изображена обобщенная UML-диаграмма вариантов использования.

Данная диаграмма в общем виде отображает варианты применения (сценарии), акторов (ролей, взаимодействующих с системой) и отношения между ними.

Базовые сценарии: «Войти в систему» (для исследователя и испытуемого), «Настроить параметры тестов» (для исследователя), «Пройти тестирование» (для испытуемого) и «Просмотреть результаты тестирования» (для исследователя и испытуемого).

В начале взаимодействия с системой осуществляется непосредственно вход в саму систему. Система предлагает пользователю два варианта входа: «Войти как исследователь» или «Войти как испытуемый». Данные сценарии являются расширением варианта использования «Войти в систему», при этом для указанных типов пользователей сформированы свои функциональные возможности взаимодействия с системой.

Вариант использования «Войти как исследователь» предоставляет функционал работы, связанный с разработкой тестовых материалов («Настроить параметры тестов») и с просмотром результатов тестирования («Просмотреть общие результаты тестирования»). В случае сценария «Войти как испытуемый» предоставляется возможность сценариев «Пройти тестирование» и «Просмотреть личные результаты».

Вариант использования «Войти как исследователь» обеспечивает функционал работы, связанный с разработкой тестовых материалов («Настроить параметры тестов») и с просмотром результатов тестирования («Просмотреть общие результаты тестирования»). В случае сценария «Войти как испытуемый» предлагает возможность сценариев «Пройти тестирование» и «Просмотреть личные результаты».

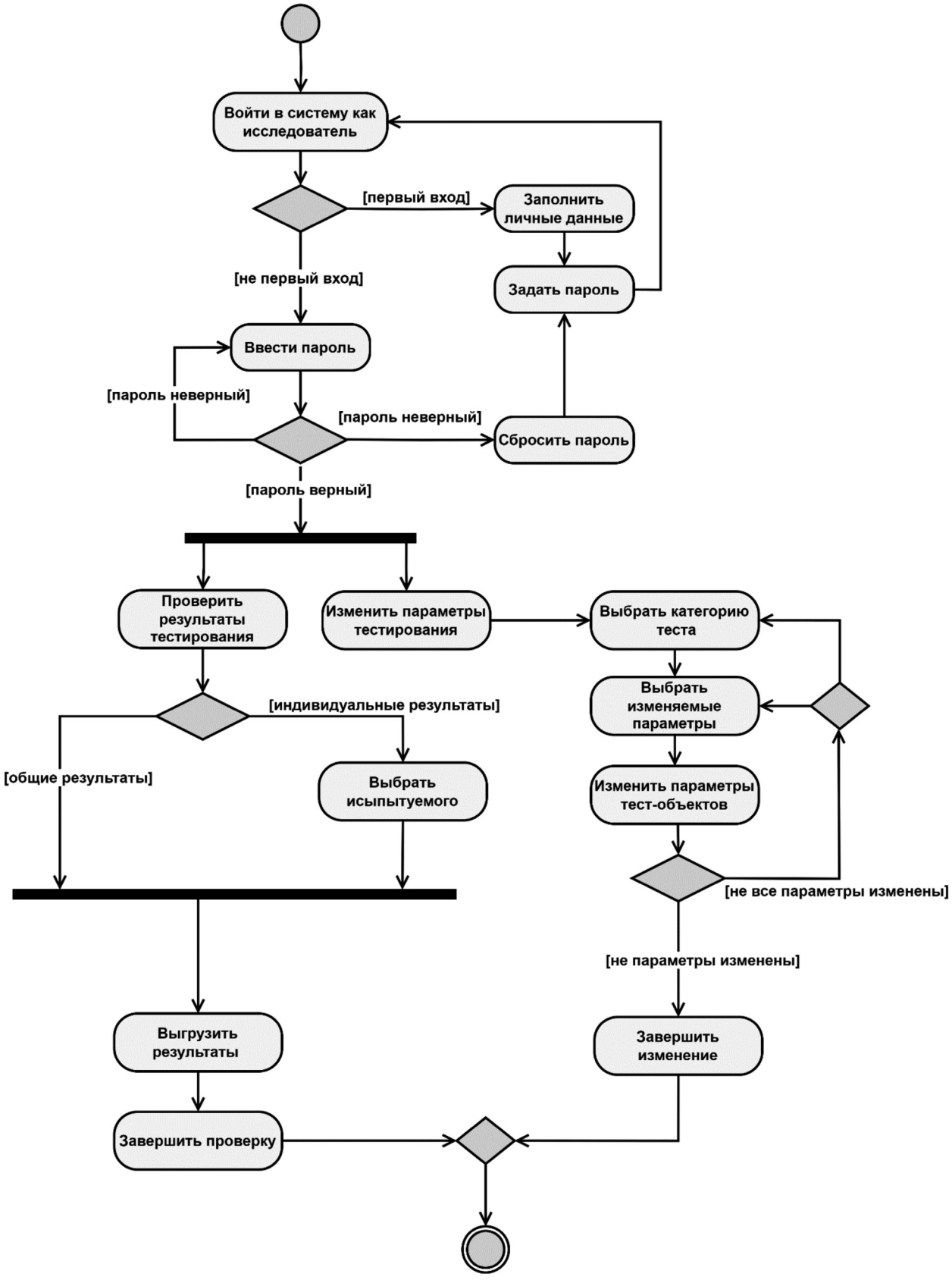


Рис. 8. UML-диаграмма деятельности исследователя.

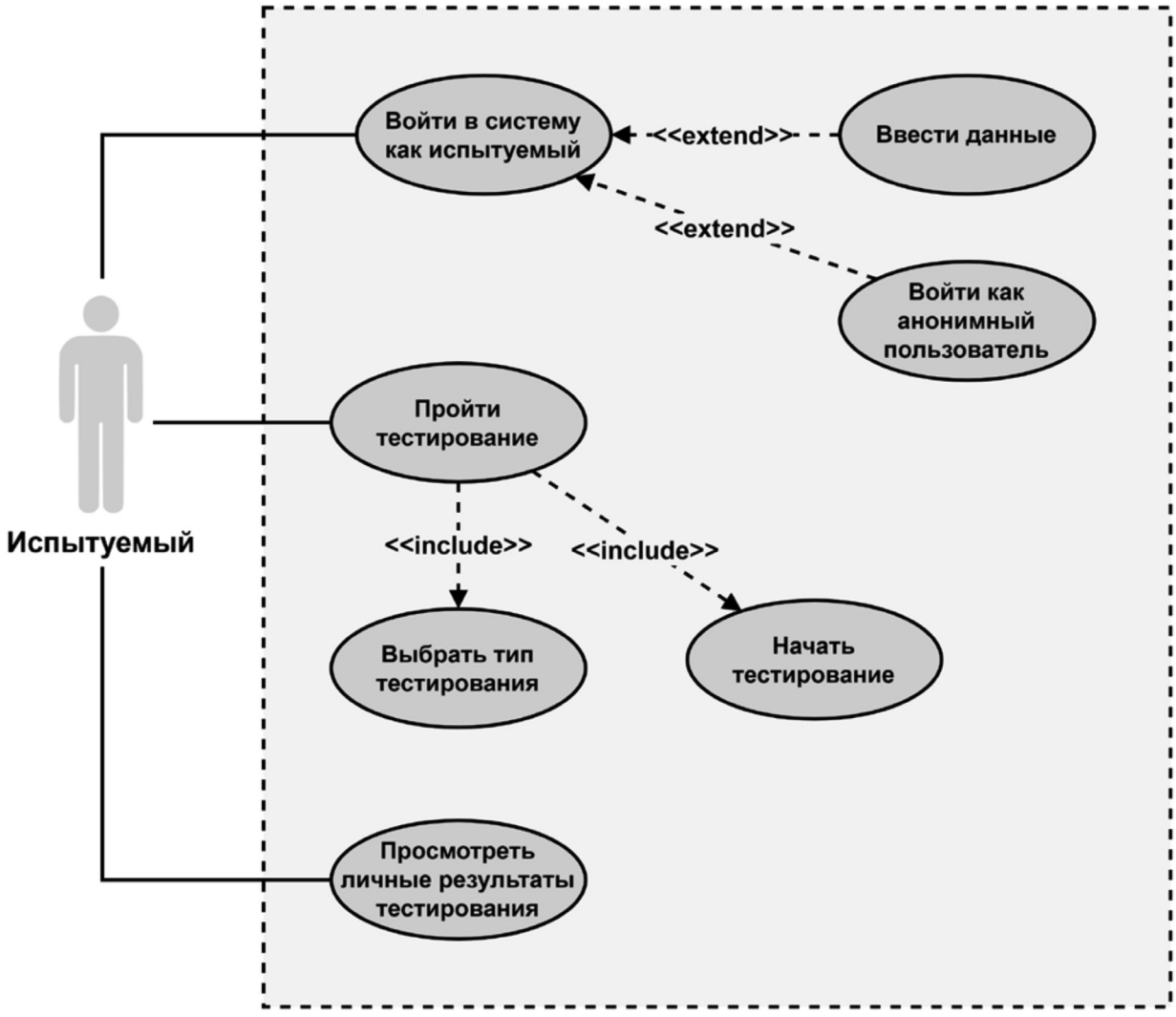


Рис. 9. UML-диаграмма вариантов использования испытуемого.

Для уточнения и дополнения обобщенной модели вариантов использования на рис. 7–10 представлены UML-диаграммы вариантов отдельно как для исследователя, так и для испытуемого.

2.1. И с с л е д о в а т е л ь. Сценарий «Войти в систему как исследователь» включает следующие варианты использования: «Вести данные» и «Задать пароль администратора» (рис. 7). При первом входе исследователь заполняет личные данные и задает пароль для ограничения доступа к системе для других типов пользователей. При последующем входе в систему исследователь вводит свои личные данные (фамилию, имя, отчество) и пароль, после чего система предоставляет полный доступ к функционалу системы.

Функционал системы для исследователя дает возможность настройки параметров тестов. Исследователю предлагаются варианты использования «Выбрать тип иллюзии для настройки» и «Выбрать тип настраиваемых объектов». Для данных вариантов обеспечивается включение дополнительных модулей ПО, предназначенных для тестирования иллюзий. При этом в зависимости от задач исследования и подключенных модулей выбор типа иллюзий для настройки и типа настраиваемых параметров может расширяться путем разработки новых модулей. Также исследователю доступны результаты тестирования как отдельных испытуемых, так и всей выборки испытуемых в целом.

Для детализации особенностей алгоритмической и процедурной реализации выполняемых системой операций и ее взаимодействия с исследователем разработана также UML-диаграмма деятельности исследователя (рис. 8). Диаграмма отражает последовательность операций про-

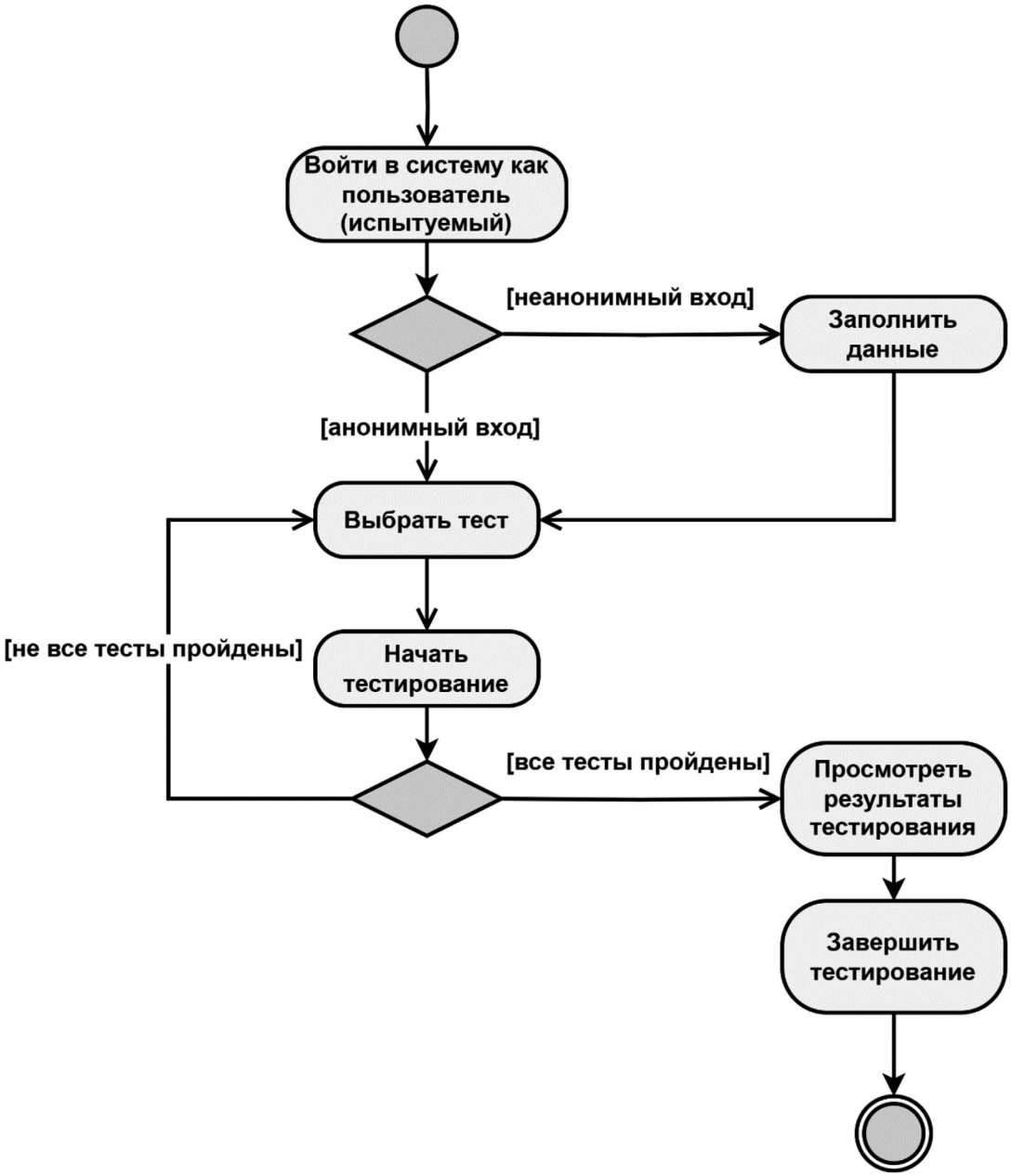


Рис. 10. UML-диаграмма деятельности испытуемого.

цесса взаимодействия системы и исследователя и возможные для него варианты исполнения процесса.

2.2. И с п ы т у е м ы й. Сценарий варианта использования «Войти в систему как испытуемый» является расширением для вариантов «Ввести данные» и «Войти как анонимный пользователь» (рис. 9). Испытуемому предлагается выбрать один из вариантов, после чего система сохраняет информацию о нем в базе данных. В случае анонимного входа испытуемому присваивается анонимное имя и порядковый ID анонимного пользователя.

Функционал системы для исследователя позволяет испытуемому пройти тестирование и посмотреть первичные результаты личных тестов. Сценарий «Пройти тестирование» включает варианты использования «Выбрать тип тестирования» и «Начать тестирование». Тип тестирования испытуемый выбирает согласно инструкциям исследователя.

Последовательность операций и взаимодействия испытуемого с системой представлены на рис. 10.

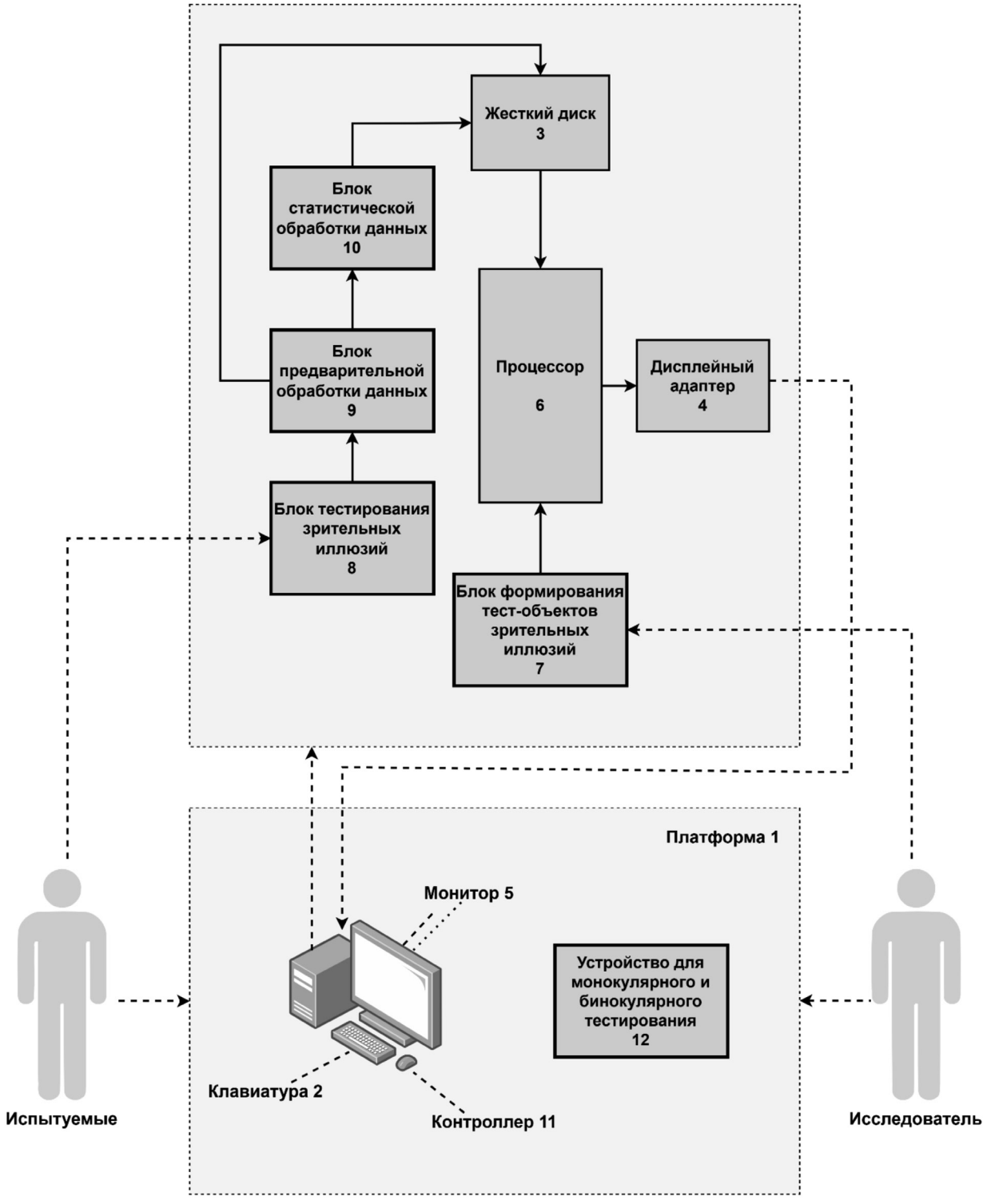


Рис. 11. Структурная схема автоматизированной системы тестирования.

3. Система тестирования. На основе представленной в предыдущих разделах методологии проектирования процесса тестирования предлагается использование автоматизированной системы, позволяющей осуществлять тестирование зрительного восприятия испытуемых в условиях возникновения иллюзий [13]. Данная система может быть применена для исследования различного класса зрительных иллюзий.

На рис. 11 представлена структурная схема автоматизированной системы тестирования систематических ошибок зрительного восприятия.

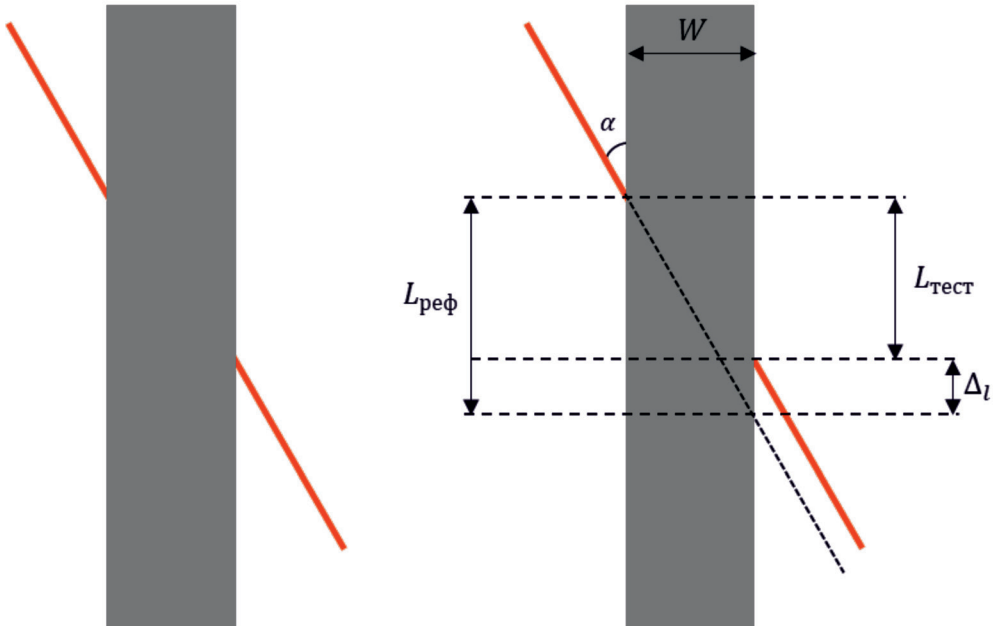


Рис. 12. Схема зрительной иллюзии пересечения (иллюзии Поггендорфа).

Автоматизированная система тестирования содержит следующие компоненты:

1) платформу, представляющую площадку для расположения испытуемого и его дальнейшего прохождения тестирования;

2) персональный компьютер (ПК), установленный на платформе, включает клавиатуру для ввода данных, контроллер (компьютерная мышь) и монитор;

3) устройство для монокулярного и бинокулярного тестирования [14], также установленное на платформе, является отличительным признаком предложенной системы относительно аналогов [15].

При этом на схеме изображены основные компоненты, использующиеся в ПК: жесткий диск для хранения данных, дисплейный адаптер для преобразования получаемой информации в визуальные элементы и процессор. Кроме того, система от аналогов [15] отличается тем, что содержит блоки, осуществляющие через ПО взаимодействие с основными компонентами ПК: формирование тест-объектов зрительных иллюзий, тестирование зрительных иллюзий, предварительную и статистическую обработки данных.

Технический результат приведенной системы – повышение эффективности тестирования зрительного восприятия испытуемых. Данный результат достигается за счет расширения функциональных возможностей системы путем добавления технических средств, позволяющих проводить тестирование зрительного восприятия кандидатов в условиях возникновения иллюзий, а также возможность осуществления монокулярного и бинокулярного наблюдения испытуемым в зависимости от задач исследователя.

Предложенная система является расширяемой, и в дальнейшем предполагается использование методов разработки георасределенных систем [16].

4. Исследование иллюзии Поггендорфа. Изложено использование рассмотренной в разд. 1–3 методологии и разработанной системы на примере исследования зрительной иллюзии пересечения (иллюзии Поггендорфа), относящейся к классу геометрических [5].

4.1. Постановка задачи исследования. Согласно предложенной модели (рис. 1–5) первоначальным этапом выступает постановка задачи исследования. Данная работа продолжает исследование, представленное в [17, 18].

Объектом исследования служит упомянутая иллюзия Поггендорфа. Предметом исследования – зависимость ошибок смещения от геометрических параметров тест-объектов [17–20]. Цель исследования заключается в выявлении статистических зависимостей ошибок смещения, порождаемых иллюзией.

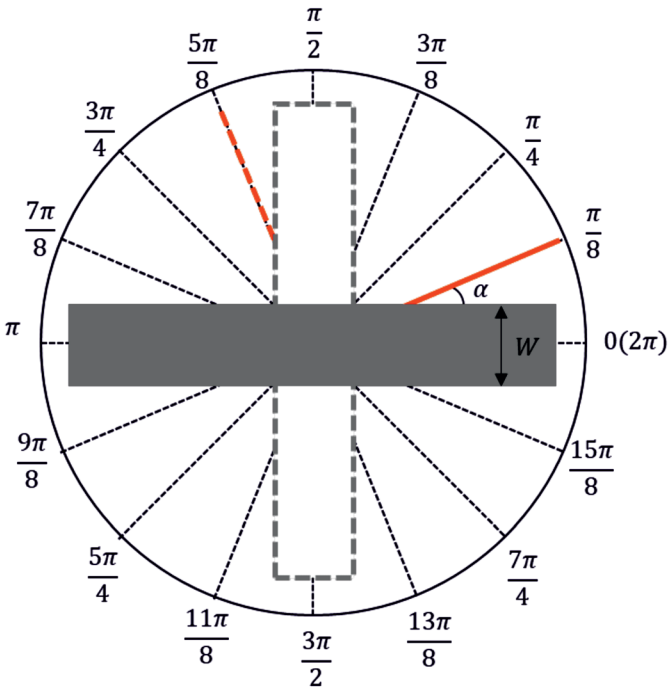


Рис. 13. Диапазон вариаций угла поворота φ.

Рассмотрим подробнее объект и предмет исследования. На рис. 12 изображена схема, демонстрирующая эффект зрительной иллюзии пересечения прямой за непрозрачной полосой. Эффект иллюзии проявляется в субъективно неправильном определении коллинеарного продолжения выходного отрезка прямой относительно входного на определенную величину ΔL.

Значение $L_{\text{реф}}$ представляет собой расстояние между входной точкой прямой, примыкающей к полосе, до выходной точки, являющейся коллинеарным продолжением прямой, выходящей за полосой. Значение $L_{\text{тест}}$ – расстояние между входной точкой прямой, примыкающей к полосе, до выходной точки, субъективно смещенной относительно коллинеарности прямой. При этом ошибка смещения ΔL определяется следующим выражением:

$$\Delta L = L_{\text{реф}} - L_{\text{тест}}.$$

Известно, что ошибки смещения ΔL зависят от геометрических параметров тест-объектов [5, 7]: от ширины полосы W и угла наклона прямой α. Также выявлено [17, 18], что на величину ошибки смещения ΔL влияют ориентационные характеристики всей тестовой конструкции (рис. 13).

Для определения зависимостей ошибки смещения ΔL от геометрических параметров и определения наиболее адекватных моделей зависимости необходимо провести дополнительные исследования с большей выборкой испытуемых, основываясь на предложенной методологии тестирования.

Общая структура постановки задачи исследования заключается в определении:

– статистической зависимости ошибки смещения ΔL от параметров ширины S полосы;

– статистической зависимости ошибки смещения ΔL от параметров угла наклона α прямой;

– статистической зависимости ошибки смещения ΔL от параметров поворота φ тест-объектов.

4.2. Разработка тестовых материалов. Следующим этапом исследования является разработка тестовых материалов (рис. 3). Тестовые материалы разрабатываются согласно общей структуре постановки задачи исследования. В качестве тест-объектов для количественного тестирования зрительного восприятия испытуемых используют фигуры, вызывающие эффект иллюзии Поггендорфа.

Испытуемым предъявляются тест-объекты с определенными параметрами ширины полосы W, угла наклона входного отрезка прямой α и угла поворота всей тестовой конструкции φ

(рис. 12, 13). При этом выходной отрезок заранее располагается значительно выше относительно коллинеарности входного. Испытуемый перемещает выходной отрезок до тех пор, пока для его субъективного восприятия входной и выходной отрезки не станут фрагментами одной прямой. Для проведения тестирования необходимо сформировать тест-объекты с различными геометрическими параметрами, указанными при постановке задачи.

Для первой серии тестирования зрительного восприятия на величину ошибок смещения ΔL сформированы следующие тест-объекты:

– 6 тест-объектов с изменяющимися параметрами $W = [10; 20; 30; 40; 50; 60$ мм], при фиксированном параметре $\alpha = 45°$ (для определения статистической зависимости ошибки смещения от значений ширины полосы),

– 9 тест-объектов с изменяющимися параметрами $\alpha = [22.5; 30; 45; 60; 90; 120; 135; 150; 157.5°]$ (для определения статистической зависимости ошибки смещения от значений угла наклона прямой).

Для второй серии тестирования, направленного на определение статистической зависимости ошибки смещения ΔL от угла поворота φ всей тестовой-конструкции (рис. 13), сформировано 16 тест-объектов с изменяющимися параметрами φ. Значение углов поворота φ варьируются в диапазоне $[0; 2\pi]$ с шагом $\pi/8$.

Для формирования обозначенных тест-объектов и количественной регистрации ошибок смещения разработано ПО [21], позволяющее в зависимости от выбранного типа тестирования предъявлять тест-объекты на экране монитора. Измерительная процедура ошибки смещения ΔL производится автоматически в зависимости от сокращения или увеличения расстояния между «входом» линии – концом видимой части входного отрезка и ее «выходом» – началом видимой части выходного отрезка. Данное ПО является подключаемым модулем в блоках 7–10, обозначенных на схеме автоматизированной системы (рис. 11)

4.3. И н с т р у к т а ж. Следующим этапом исследования является проведение инструктажа испытуемых.

Объяснение правил тестирования. В процессе тестирования испытуемому необходимо принять наиболее комфортную позу для работы за ПК. Экран монитора должен находиться на расстоянии примерно 40–50 см от глаз испытуемого. Правильность и условия проведения тестирования оказывают влияние на чистоту эксперимента.

Объяснение технической части тестирования. Испытуемому демонстрируется техническая часть тестирования, заключающуюся в выравнивании выходного отрезка относительно входного по указанной выше методике.

4.4. П р о в е д е н и е т е с т и р о в а н и я. Данный этап предполагает проведение тестирования на определенной выборке испытуемых, прошедших инструктаж. Всего в процессе исследования иллюзии Поггендорфа было протестировано 107 испытуемых (59 мужчин, 48 женщин).

В первой серии тестирования, направленной на выявление статистической зависимости ошибки смещения ΔL от параметров ширины полосы W и угла наклона прямой α, участвовали 67 испытуемых. Во второй серии тестирования, ориентированной на определение статистической зависимости ошибки смещения ΔL от параметров угла поворота тестовой конструкции φ, участвовали 40 испытуемых.

Пол и возрастная динамика не имела целевого значения, так как цель исследования – выявление статистической зависимости иллюзии от геометрических параметров тест-объектов. В связи с этим для получения репрезентативной выборки процентное соотношение мужчин (55.1%) и женщин (44.9%) было относительно небольшим, при этом возраст испытуемых варьировался от 18 до 55 лет.

Тестирования проводились на ПК в естественных условиях, бинокулярно без использования вспомогательных средств. В случае исследований психофизиологических механизмов целесообразно применять дополнительные инструменты. Для подобных исследований в системе тестирования предлагается использование устройства для монокулярного и бинокулярного исследования [14].

4.5. О б р а б о т к а д а н н ы х. После проведения тестирования ПО автоматически осуществляет сбор первичных данных отдельно для каждого испытуемого по трем типам теста: тестирование при варьировании параметров ширины полосы W, параметров угла наклона α

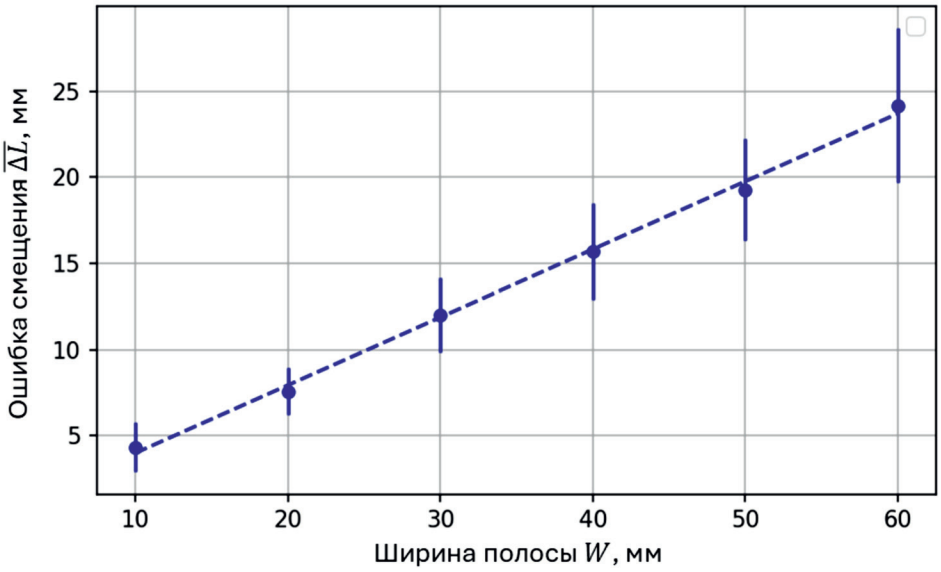


Рис. 14. График зависимости ошибки смещения $\overline{\Delta L}$ от ширины полосы.

Таблица 1. Форма записи количественной регистрации ошибки смещения ΔL от геометрических параметров G по выборке n

№ п/п	G_1	G_2	...	G_k
1	ΔL_{11}	ΔL_{12}	...	ΔL_{1k}
...	...	...	...	...
i	ΔL_{i1}	ΔL_{i2}	...	ΔL_{ik}
...	...	...	...	...
n	ΔL_{n1}	ΔL_{n2}	...	ΔL_{nk}
ΔL	$\overline{\Delta L_1}$	$\overline{\Delta L_2}$	...	$\overline{\Delta L_n}$
S	S_1	S_2	...	S_n

Таблица 2. Усредненные эмпирические данные $\overline{\Delta L}$, зависимые от параметра

№ п/п	$\overline{\Delta L}$	G
1	$\overline{\Delta L_1}$	G_1
2	$\overline{\Delta L_2}$	G_2
...	...	...
i	$\overline{\Delta L_i}$	G_i
...	...	...
n	$\overline{\Delta L_n}$	G_n

и поворота тестовой констуркции φ. Для дальнейшего удобства обозначим указанные параметры общей переменной G.

Предварительная обработка первичных данных осуществляется также ПО и представляет усредненные значения по n пробам ($n=5$) выполнения одного и того же задания в одинаковых условиях, т.е. параметры тест-объектов в рамках одного типа тестирования повторялись на протяжении всего тестирования. При этом на данной стадии осуществляется поиск заведомо ошибочных значений ΔL и их замена, согласно статистическим стандартам, на средние по соседним значениям:

$$\Delta L_i = \frac{\Delta L_{i-1} + \Delta L_{i+1}}{2}.$$

Далее осуществляется поиск средних значений ошибок смещения $\overline{\Delta L}$ и стандартных отклонений S от среднего по всей выборке испытуемых согласно каждому типу теста:

$$\overline{\Delta L} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta L_i,$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta L_i - \overline{\Delta L})^2}.$$

Данные сортируются и формируются в табличном формате для дальнейшей обработки и анализа (табл. 1).

Таким образом, по результатам проведения предварительной и статистической обработки данных конечными значениями для анализа являются зависимая переменная $\overline{\Delta L}$ (исследуемый процесс), изменяющаяся под влиянием независимого параметра G (фактор, регрессор) (табл. 2).

4.6. Анализ полученных данных и результаты исследования. Статистически обработанные числовые данные первой серии тестирования представлены в табл. 3, 4. На рис. 14, 15 рассмотрены соответствующие таблицам графики зависимостей ошибок смещения $\overline{\Delta L}$ от значений ширины полосы W и угла наклона α.

Приведенные данные позволяют сделать предположение о том, что ошибка смещения $\overline{\Delta L}$ возрастает с увеличением ширины полосы W (рис. 14). Эта зависимость описывается линейной функцией вида $y = ax + b$. Для аппроксимации статистических зависимостей и поиска коэффициентов уравнения использовался метод наименьших квадратов:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(y - y_i\right)^2 \to \min.$$

Уравнение, описывающее зависимость ошибки смещения, имеет следующий вид:

$$y = 0.39x + 0.04.$$

Для оценки тесноты линейной связи используем линейный коэффициент корреляции Пирсона r_{xy}:

$$r_{xy} = \frac{cov_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \sum_{i=1}^{n}\left(x - \overline{x}\right)\left(y - \overline{y}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x - \overline{x}\right)^2\left(y - \overline{y}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

– средние значения выборок $\overline{\Delta L}$ и W соответственно.

Коэффициент корреляции $r_{xy} = 0.9986$, что свидетельствует о сильной линейной связи между ошибкой смещения $\overline{\Delta L}$ и шириной полосы W. Ошибка смещения $\overline{\Delta L}$ имеет прямую пропорциональную зависимость относительно ширины полосы W: расширение полосы влечет за собой увеличение ошибок смещений.

Коэффициент детерминации R^2, определяемый как квадрат коэффициента корреляции $R2 = r_{xy}^2 = 0.9973$, указывает на то, что ошибка смещения $\overline{\Delta L}$ на 99.73% зависит от значения ширины полосы W.

Проверим статистическую гипотезу об оценке значимости уравнения. Гипотеза H_0: ширина полосы W не влияет существенно на изменения ошибки смещения $\overline{\Delta L}$, модель незначима в целом.

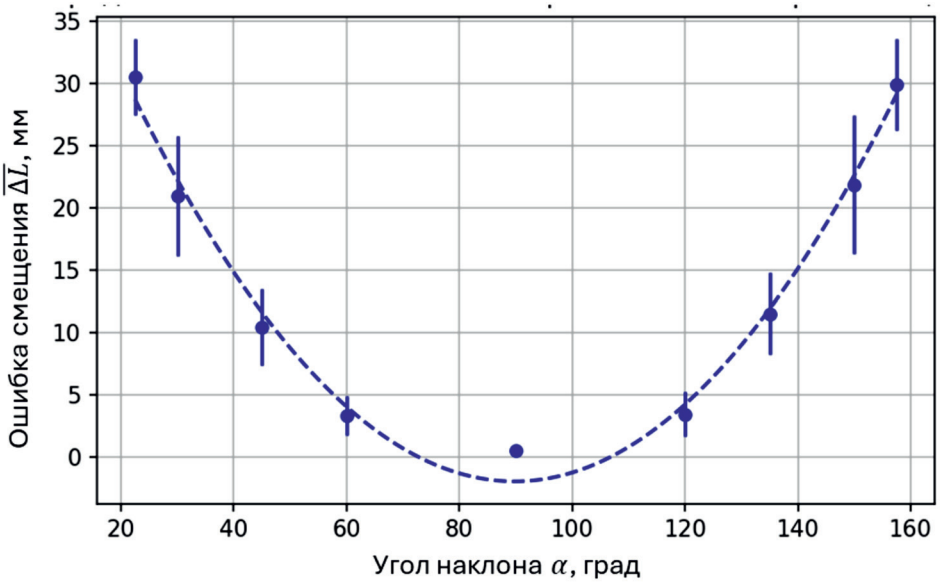


Рис. 15. График зависимости ошибки смещения $\overline{\Delta L}$ от угла наклона α.

Таблица 3. Числовые данные средних значений ошибок смещения $\overline{\Delta L}$ по соответствующим параметрам ширины полосы W

№ п/п	1	2	3	4	5	6
W	10	20	30	40	50	60
$\overline{\Delta L}$	4.34	7.58	12.02	15.69	19.29	24.19
$\boldsymbol{S}$	1.44	1.37	2.15	2.81	2.97	4.50

Таблица 4. Числовые данные средних значений ошибок смещения $\overline{\Delta L}$ по соответствующим параметрам угла наклона прямой α

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**
α, град	22.5	30	45	60	90	120	135	150	157.5
$\overline{\Delta L}$	30.54	20.99	10.42	3.31	0.52	3.44	11.50	21.90	29.94
S	3.09	4.85	3.09	1.55	0.40	1.81	3.31	5.59	3.71

Оценка значимости уравнения осуществляется на основе F-критерия Фишера. Эмпирическое значения критерия определяется формулой

$$F_{\text{эмп}} = \frac{R^2}{1-R^2}(n-2).$$

Критическое значение $F_{\text{эмп}}$ (при $\alpha = 0.01$, $k_1 = 1$, $k_2 = 4$) задается по известным статистическим таблицам, где k_1 – число независимых переменных в уравнении, а $k_2 = n - 2$ разница наблюдений и количества оцениваемых параметров в модели. Гипотеза H_0 принимается при $F_{\text{эмп}} \le F_{\text{крит}}$. Рассчитанное значение $F_{\text{эмп}} = 1477.48 > F_{\text{крит}} = 21.20$, что позволяет опровергнуть гипотезу и сделать вывод о статистической значимости, полученной модели.

На рис. 15 представлен график зависимости ошибок смещения $\overline{\Delta L}$ от угла наклона α. Полученные данные представляют собой нелинейную зависимость в параболической форме и описываются уравнением

$$\hat{y} = 0.01x^2 - 1.22x + 52.73.$$

Для оценки тесноты нелинейной связи используем индекс корреляции R, определяемый как

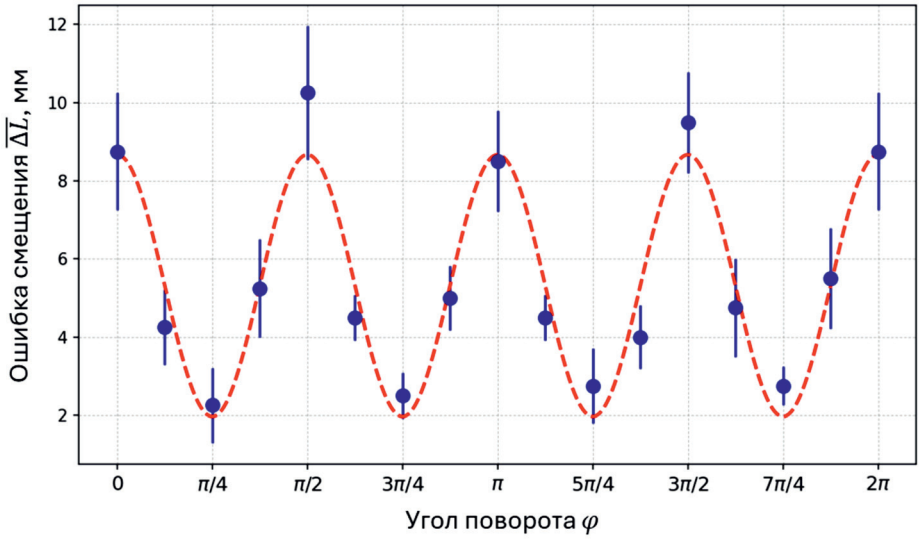


Рис. 16. График зависимости ошибки смещения $\overline{\Delta L}$ от угла поворота тест-объекта φ.

$$R = \sqrt{1 - \frac{SS_e}{SS}} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_i)^2}},$$

где y – расчетные значения зависимой переменной по нелинейной регрессии.

Построенная модель ошибки смещения $\overline{\Delta L}$ на 98.58% объясняется изменением угла α наклона линии (индекс детерминации $R^2 = 0.9858$), при этом существует практически функциональная зависимость ошибки $\overline{\Delta L}$ от параметра α (индекс корреляции $R = 0.9928$). Ошибка смещения $\overline{\Delta L}$ возрастает при увеличении остроты угла наклона прямой: чем острее угол α относительно полосы, тем «ярче» выражена ошибка смещения $\overline{\Delta L}$. Проверка статистической гипотезы о значимости полученного уравнения по F-критерию Фишера свидетельствует об адекватности модели:

$$F_{\text{эмп}} = 208.27 > F_{\text{крит}} = 13.74 \ \left(\text{при} \ \ \alpha = 0.01, \ k_1 = 1, \ k_2 = 6\right).$$

Результаты второй серии тестирования (рис. 16), направленной на выявление зависимости ошибок смещения $\overline{\Delta L}$ относительно ориентации φ всей тестовой фигуры, позволяют сделать предположение о нелинейной периодической зависимости следующего вида:

$$y = A\cos\left(Bx + C\right) + D.$$

Используя метод наименьших квадратов, получили уравнение, описывающее статистическую зависимость $\overline{\Delta L}$ от φ:

$$\hat{y} = 3.367\cos\left(3.964x + 1.745\right) + 5.341.$$

Тригонометрическая модель ошибки смещения $\overline{\Delta L}$ на 92.05% объясняется изменением угла поворота всей тестовой конструкции (индекс детерминации $R^2 = 0.9205$), при этом рассчитанный индекс корреляции $R = 0.9594$ указывает на сильную связь между ошибкой смещения $\overline{\Delta L}$ и углом поворота φ. Данная зависимость демонстрирует π/2-периодику, где ярко выражены экстремумы ошибки смещения $\overline{\Delta L}$ (4 max и 4 min). Периодика иллюзии наблюдается в пределах значений φ [0; π/2], т.е. в соответствии с угловыми четвертями координатной плоскости. Точки максимумов фиксируются на границах этих периодов, когда поворот тест-объекта достигает ориентации, при которой полоса принимает горизонтальное и вертикальное положения.

Внутри каждого периода фиксируется также точка минимума, характеризующая ситуацию, когда горизонтальное и вертикальное положения принимает прямая. Поэтому, в отличие от

максимумов, минимумы иллюзии меняют свое положение в зависимости от заданного значения угла α между прямой и полосой.

Проверка статистической гипотезы о значимости найденного уравнения по F-критерию Фишера также свидетельствует об адекватности полученной модели:

$$F_{\text{эмп}} = 173.68 > F_{\text{крит}} = 8.68 \ \left(\text{при } \alpha = 0.01;\ k_1 = 1;\ k_2 = 15\right).$$

Заключение. Отметим, что построенная система помогает в исследовании зрительных иллюзий, в частности предоставляет управление собранными данными во время проведения тестирования. Данная система также автоматизирует сбор и обработку данных, формируя полученные данные в удобный для исследователей вид. Система является гибкой и расширяемой, предполагается возможность подключения дополнительных модулей для исследования различного класса иллюзий. Модель данной системы также подразумевает различные формы работы с ней, в том числе дистанционные. Дистанционная работа системы допускает как централизованную установку сервера, так и использование распределенных серверов системы. Проблемы, связанные с построением распределенных автоматизированных научных систем, в частности, представлены в работе [16] и могут быть предметом дальнейшего исследования.

Применение системы позволило проанализировать иллюзию Поггендорфа и определить статистическую зависимость ошибок смещения от геометрических параметров тест-объектов. Ошибка смещения, порождаемая иллюзией, линейно зависит от ширины полосы: с увеличением ширины прямо пропорционально возрастает ошибка. Относительно угла наклона прямой ошибка нелинейна и повышается с увеличением остроты. Данные выводы подтверждают ранее полученные результаты [11, 17], что свидетельствует о воспроизводимости исследования, проведенного с помощью данной системы.

В продолжении работы [17] был изучен ориентационный параметр тест-объекта, влияющий на ошибку смещения. Выявлено, что иллюзия при среднем параметре ширины полосы и угла наклона прямой существует при любой конфигурации ориентационного параметра тест-объекта. При этом точки максимума в ошибке соответствуют горизонтальной и вертикальной ориентациями полосы, а точки минимума – горизонтальной и вертикальной ориентациями линии. Даная модель зависимости описывается уравнением нелинейной регрессии тригонометрического вида.

Полученные результаты могут иметь практическое применение в области дизайна одежды, оборудования и архитектурных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барабанов Р. Е.* Психологические механизмы зрительного восприятия формы и пространства // Психология. Историко-критические обзоры и современные исследования. 2023. Т. 12. № 8А. С. 64–75.
2. *Бондарко В. М. Данилова М. В., Солнушкин С. Д., Чихман В. Н.* Моделирование зрительного восприятия с использованием нейрофизиологических механизмов // Тез. XXIV съезда физиологического общества им. И.П. Павлова. Санкт-Петербург: ООО «Издательство ВВМ», 2023.
3. *Винокур А. И.* Искусственный интеллект. Свойства зрительного восприятия и компьютерное зрение // Шаг в будущее: искусственный интеллект и цифровая экономика. Технологическое лидерство: взгляд за горизонт: IV Междунар. научного форума. М.: Государственный университет управления, 2021.
4. *Тумова М. А., Шошина И. И., Становая В. В., Гусейнова З. Т., Фернандес Т. П., Иванов М. В.* Показатели когнитивного функционирования и характеристики зрительной системы при шизофрении: кросс-секционное исследование // Психиатрия. 2023. Т. 21, № 3. С. 36–44.
5. *Толанский С.* Оптические иллюзии. М.: Мир, 1967.
6. *Горбунов, И. А., Мамаев А. Н.* Моделирование некоторых зрительных иллюзий на базе нейросетевых алгоритмов // Тр. VIII Всероссийск. конф. Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 2023.
7. *Медведев Л. Н., Шошина И. И.* Количественная оценка влияния пола и типа межполушарной асимметрии на искажение зрительного восприятия фигуры Поггендорфа в модификации Джастроу // Физиология человека. 2004. Т. 30. № 5. С. 5–11.
8. *Медведев Л. Н., Шошина И. И.* Количественная оценка влияния пола и типа межполушарной асимметрии на искажение зрительного восприятия фигуры Поггендорфа в модификации Джастроу // Физиология человека. 2004. Т. 30. № 5. С. 5–11.
9. *Медведев Л. Н., Шошина И. И., Федорова Е. С.* Отражение в вызванном потенциале процессов зрительного восприятия фигуры Поггендорфа // Журн. высш. нервн. деятельности им. ИП Павлова. 2011. Т. 61. № 1. С. 61–66.

10. *Романова-Африкантова, Н. И.* Сенсомоторная оценка зрительных иллюзий детьми дошкольного и младшего школьного возраста в сравнении со взрослыми // Человек в информационном обществе: матер. второй междунар. науч.-практ. конф. Самара: Изд-во Самар. ун-та, 2023.
11. *Шошина И. И.* Влияние пола и возраста на зрительное искажение фигуры Поггендорфа (в модификации Джастроу) у правшей и левшей: Дис. ... канд. биол. наук : 03.00.13 : Томск, 2005. 133 с. РГБ ОД, 61:05-3/1355.
12. *Чихман В.Н., Солнушкин С.Д., Пронин С.В., Шелепин Ю.Е., Бондарко В.М.* Информационные технологии зрительного эксперимента // Экспериментальная психология в России: традиции и перспективы. 2010. С. 189–194.
13. *Горшков В. В. Костоев А.Т.* Система для тестирования зрительного восприятия в условиях возникновения иллюзий // Патент РФ на изобретение № 2786961 C1, 26.12.2022.
14. *Горшков В. В. Костоев А.Т.* Устройство для определения величины зрительных иллюзий // Патент РФ на полезную модель № 208910 U1, 21.01.2022.
15. *Айдоган Г. Сюло Р., Сюмер Х. и др.* Система определения зрительного восприятия // Патент РФ на изобретение № 2663639 C2, 07.08.2018.
16. *Romanenkov A. M., Temnov A. A., Kostoev A. T.* Methods of Creating Fault-Tolerant Geographically Distributed Systems // Mathematical Statistician and Engineering Applications. 2022. V. 71. № 2. P. 168–176.
17. *Rakcheeva T. A., Kostoev A. T.* Research of Orientation Characteristics of Visual Intersection Illusion // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering: Intern. Conf. of Young Scientists and Students “Topical Problems of Mechanical Engineering”. ToPME 2019. Moscow: Institute of Physics Publishing, 2020. P. 012073.
18. *Костоев А. Т., Огородов Д. В., Данько Д. И.* Исследование геометрических факторов зрительной иллюзии, возникающей при оценке расстояний между краями объектов // Инженерный вестник Дона. 2022. № 6(90). С. 46–55.
19. *Булатов А., Бертулис А., Гутаускас А., Булатова Н.* Размеры стимула и выраженность зрительной иллюзии протяженности // Физиология человека. 2010. Т. 36. № 2. С. 50–63.
20. *Бондарко В. М., Бондарко Д. В., Чихман В. Н.* Зависимость иллюзии Оппель- Кундта от конфигурации составляющих линий // Экспериментальная психология. 2016. Т. 9. № 3. С. 27–40.
21. *Костоев А.Т., Николаева Е.А.* // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2022683021, 30.11.2022.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 137–149

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.85

МЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ УЗЛОВЫХ МУЛЬТИПОТОКОВ В МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ СЕТЕВОЙ СИСТЕМЕ

© 2024 г. Ю. Е. Малашенко[1], И.А. Назарова[1, *]

[1]Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия

**e-mail: irina-nazar@yandex.ru*

Поступила в редакцию 13.03.2024 г.
После доработки 21.03.2024 г.
Принята к публикации 13.05.2024 г.

В рамках вычислительных экспериментов анализируются монопольные и предельные режимы управления многопользовательской сетью при передаче потоков по кратчайшим маршрутам. Предложены метод аппроксимации множества допустимых межузловых потоков и процедура получения многопараметрических оценок показателей функционирования системы. В предельном режиме полностью загружаются все ребра сети и достигается максимально возможный суммарный межузловой поток. В монопольном режиме распределение потоков из каждого узла осуществляется без учета остальных корреспондентов. Найденные значения позволяют определить допустимые нагрузки и удельные затраты при передаче потока. На основе рассчитанных исходящих узловых мультипотоков строится аппроксимация множества допустимых межузловых потоков. Приводятся различные способы графического представления результатов экспериментов и отображения метрических оценок. Исследуются сети с различными структурными особенностями и одинаковой суммарной пропускной способностью.

Ключевые слова: многопродуктовая потоковая модель, распределение мультипотока при перегрузке, допустимые межузловые потоки

DOI: 10.31857/S0002338824030145 **EDN:** UPKZWY

METRIC ESTIMATES OF NODAL MULTIFLOWS IN A MULTIUSER NETWORK SYSTEM

Yu. E. Malashenko, I. A. Nazarova[*]

Federal Research Center “Computer Science and Control”, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[*]e-mail: irina-nazar@yandex.ru

Within the framework of computational experiments, burst and limiting modes of multiuser network control are analysed when flows are transmitted along the shortest routes. A method of approximating the set of admissible inter-node flows and a procedure for obtaining multi-parametric estimates of the system performance are proposed. In the limiting mode, all edges of the network are fully loaded and the maximum possible total inter-node flow is achieved. In the burst mode, the distribution of flows from each node is carried out without taking into account the other correspondents. The found values allow us to determine the allowable loads and specific costs of flow transmission. On the basis of the calculated outgoing node multiflows, an approximation of the set of allowable inter-node flows is constructed. Different ways of graphical representation of experimental results and display of metric estimates are given. Networks with different structural features and the same total capacity are investigated.

Keywords: multiproduct flow model, multiflow distribution under congestion, feasible inter-node flows

Введение. В рамках вычислительных экспериментов продолжено изучение различных режимов управления сетевой телекоммуникационной системой [1–3]. В данной работе основное внимание уделено получению метрических оценок множества допустимых межузловых потоков. Для расчета представительных показателей функционирования многопользовательской сети используются векторы исходящих узловых мультипотоков [3].

В процессе анализа множества допустимых потоков рассматриваются монопольные и предельные режимы управления сетью. В монопольном режиме формируются допустимые векторы исходящих узловых мультипотоков, передаваемых из заданной вершины без учета остальных корреспондентов сети. Сделан упор на анализе величин исходящих узловых потоков, когда нагрузка на систему выше нормативных ограничений.

В предельном режиме для каждого узла-источника оцениваются требуемые затраты ресурсов при передаче всех исходящих из него межузловых потоков. При этом пропускная способность ребер трактуется как ресурс, который распределяется между потоками разных видов при передаче в сети. Для каждого узла-источника при передаче всех исходящих из него межузловых потоков определяются необходимые затраты ресурсов. На финальных итерациях достигается полная загрузка сети и максимальный суммарный межузловой поток. По построению полученные оценки ограничивают исходящие узловые мультипотоки при одновременной передаче в сети потоков из других узлов, если условия совместной передачи на остальные виды потоков не нарушаются.

Предложенные методы моделирования для каждого вектора исходящего узлового мультипотока дают возможность вычислить максимальное суммарное значение допустимых межузловых потоков, оценить удельные затраты ресурсов при передаче потока, а также сформировать структурный внутренний каркас и построить аппроксимацию множества допустимых межузловых потоков. Анализ результатов позволяет найти различия в распределении ресурсов при использовании указанных режимов управления и оценить передаваемые потоки в ситуациях, когда внешняя нагрузка превышает нормативные ограничения.

С помощью диаграмм, построенных на основании метрических оценок, выявлены особенности множества допустимых потоков. В частности, предложено аналитическое представление части множества допустимых потоков. Графическое представление результатов экспериментов можно также рассматривать как описание функциональных возможностей сети при предельных внешних нагрузках.

1. Математическая модель. Для описания многопользовательской сетевой системы связи воспользуемся следующей математической записью модели передачи многопродуктового потока. Сеть G задается множествами $\langle V, R, U, P\rangle$: узлов (вершин) сети $V = \{v_1, v_2, ..., v_n, ..., v_N\}$; неориентированных ребер $R = \{r_1, r_2, ..., r_k, ..., r_E\}$; ориентированных дуг $U = \{u_1, u_2, ..., u_k, ..., u_{2E}\}$; пар узлов-корреспондентов $P = \{p_1, p_2, ..., p_M\}$. Предполагается, что в сети отсутствуют петли и сдвоенные ребра.

Ребро $r_k \in R$ соединяет смежные вершины v_{n_k}, v_{j_k}. Каждому ребру r_k ставятся в соответствие две ориентированные дуги u_k, u_{k+E} из множества U. Дуги $\{u_k, u_{k+E}\}$ определяют прямое и обратное направление передачи потока по ребру r_k между концевыми вершинами v_{n_k}, v_{j_k}. Для каждой вершины v_n формируется список $K(n)$ номеров инцидентных ей ребер: $K(n) = \{k_1, k_2, ..., k_{a(n)}\}$, где $a(n)$ — число инцидентных ребер для v_n.

В многопользовательской сети G рассматривается $M = N(N-1)$ независимых, невзаимозаменяемых и равноправных межузловых потоков различных видов. Каждой паре узлов-корреспондентов p_m из множества P соответствуют: вершина-источник с номером s_m, из s_m входной поток m-го вида поступает в сеть; вершина-приемник с номером t_m, из t_m поток m-го вида покидает сеть. Для каждой вершины $v_n \in V$, определяется подмножество $P(v_n)$ всех пар-корреспондентов, для которых вершина v_n служит узлом-источником:

$$P(v_n) = \{p_m \mid s_m = n, t_m \neq n, t_m = \overline{1, N}\},$$

а для каждого $P(v_n)$ — список номеров $M(n)$ пар p_m, входящих в подмножество $P(v_n)$:

$$M(n) = \{m_1(n), m_2(n), ..., m_{N-1}(n)\}.$$

Обозначим через z_m величину *межузлового* потока m-го вида, поступающего в сеть через узел с номером s_m и покидающего сеть из узла с номером t_m; x_{mk}, $x_{m(k+E)}$ — поток m-го вида, который передается по дугам u_k и u_{k+E}, согласно направлению передачи, $x_{mk} \geq 0$, $x_{m(k+E)} \geq 0$, $m = \overline{1, M}$, $k = \overline{1, E}$; $S(v_n)$ — множество номеров исходящих дуг, по ним поток покидает

узел v_n; $T(v_n)$ — множество номеров входящих дуг, по ним поток поступает в узел v_n. Состав множеств $S(v_n)$, $T(v_n)$ однозначно формируется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть некоторое ребро $r_k \in R$ соединяет вершины с номерами n и j, такими, что $n<j$. Тогда ориентированная дуга $u_k=(v_n,v_j)$, направленная из вершины v_n в v_j, считается *исходящей* из вершины v_n, и ее номер k заносится в множество $S(v_n)$, а дуга u_{k+E}, направленная из v_j в v_n, — *входящей* для v_n, и ее номер $k+E$ помещается в список $T(v_n)$. Дуга u_k является *входящей* для v_j, и ее номер k попадает в $T(v_j)$, а дуга u_{k+E} — *исходящей*, и номер $k+E$ вносится в список исходящих дуг $S(v_j)$.

Во всех узлах сети $v_n \in V$, $n=\overline{1,N}$, для каждого вида потока должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i\in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i\in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}, \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$n=\overline{1,N}, m=\overline{1,M}, x_{mi} \ge 0, z_m \ge 0.$$

Величина z_m равна входному межузловому потоку m-го вида, проходящему от источника s_m к приемнику t_m пары p_m при распределении потоков x_{mi} по дугам сети.

Каждому ребру $r_k \in R$ приписывается неотрицательное число d_k — суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру r_k в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей $\mathbf{d}=(d_1, d_2, ..., d_E)$ — положительные числа $d_k>0$. Вектор $\mathbf{d}$ определяет следующие ограничения на сумму потоков всех видов, передаваемых по ребру r_k одновременно:

$$\sum_{m=1}^{M}(x_{mk} + x_{m(k+E)}) \le d_k,\ x_{mk} \ge 0,\ x_{m(k+E)} \ge 0,\ k=\overline{1,E}. \tag{1.2}$$

Ограничения (1.1), (1.2) задают множество допустимых значений вектора межузловых потоков $\mathbf{z}=(z_1, z_2, ..., z_m, .., z_M)$:

$$\mathcal{Z}(\mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \ge 0 \,|\, \exists\, \mathbf{x} \ge 0 : (\mathbf{z},\mathbf{x}) \text{ удовлетворяют (1.1),(1.2)}\}.$$

2. Равные межузловые потоки. Для анализа множества $\mathbf{Z}(\mathbf{d})$, получения метрических оценок [4] и построения аппроксимирующих представительных показателей [5] функционирования используются межузловые потоки. При проведении вычислительных экспериментов предполагается, что поток одного вида передается одновременно по всем маршрутам, содержащим минимальное число ребер (далее — MER-маршруты, от англ. minimum edge route). Для оценки величины "расщепленного" потока для каждой пары узлов $p_m=(s_m, t_m)$ в сети $G(1)$ формируется набор $H_m(1)$ путей, которые далее рассматриваются как MER-маршруты передачи m-го вида потока:

$$H_m(1) = \{h_m^1(1), h_m^2(1), ..., h_m^j(1), ..., h_m^{J_m(1)}(1)\},$$

где $h_m^j(1)$ — список номеров дуг в j-м пути в сети $G(1)$ между узлами s_m и t_m; $\mu_m(1)$ — число ребер в MER-маршруте $h_m^j(1)$, а $J_m(1)$ — число MER-маршрутов для m-й пары.

Для каждой пары $p_m \in P$ по всем MER-маршрутам из $H_m(1)$ передается единичный межузловой поток z_m и подсчитываются значения индикаторной функции:

$$\eta_k^j(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in h_m^j(1), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определяются дуговые потоки для пары p_m:

$$x_{mk}^0(1) = \sum_{j=1}^{J_m(1)} \eta_k^j(m),\ m = \overline{1,M},\ k = \overline{1,2E}. \tag{2.1}$$

Межузловой поток по MER-маршрутам (далее — MER-поток) $z_m^0(1)$ между узлами s_m и t_m вычисляется по формулам (1.1) и (2.1). Рассчитываются нормирующий коэффициент

$$\omega_m^0(1) = \frac{1}{z_m^0(1)},\ z_m^0(1) \neq 0,\ m = \overline{1,M},$$

и дуговые потоки:

$$x_{mk}^0 = \omega_m^0 x_{mk}^0(1),\ m = \overline{1,M},\ k = \overline{1,2E}.$$

При передаче всех потоков x_{mk}^0 по ребрам сети межузловой поток из узла s_m в узел t_m равен единице для всех $p_m \in P$.

Распределение совместно допустимых межузловых потоков последовательно определяется на основе MER-маршрутов и дуговых потоков x_{mk}^0.

З а д а ч а 1. Найти $\tilde{\alpha} = \max_\alpha \alpha$

$$\text{при условиях: } \alpha \sum_{m=1}^{M} [x_{mk}^0 + x_{m(k+E)}^0] \le d_k(1), \alpha \ge 0,\ k = \overline{1,E}.$$

С помощью решения задачи 1 для всех $p_m \in P$ вычисляется вектор $\tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha})$, все компоненты которого равны $\tilde{\alpha}$, т.е.

$$\tilde{z}_m = \tilde{\alpha}, m = \overline{1,M},\ \tilde{x}_{mk} = \tilde{\alpha} x_{mk}^0, m = \overline{1,M}, k = \overline{1,2E}.$$

При проведении эксперимента векторы $\tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha})$ формируются на основе найденных распределений совместно допустимых межузловых потоков $\tilde{z}_m$, $p_m \in P$, передаваемых одновременно. Для каждой пары узлов-корреспондентов $p_m \in P$, для полученного допустимого межузлового потока $\tilde{z}_m$ и соответствующих значений дуговых потоков $\tilde{x}_{mk}$, $k = \overline{1,2E}$, величина

$$\tilde{y}_m = \sum_{k=1}^{2E} \tilde{x}_{mk}, m = \overline{1,M},$$

характеризует результирующую межузловую *нагрузку* (далее — RI-нагрузку, от англ. resulting internodal load) на ребра сети при передаче межузлового потока $\tilde{z}_m$ из узла-источника s_m в узел-приемник t_m. Величина $\tilde{y}_m$ показывает, какая суммарная пропускная способность сети потребуется для передачи дуговых потоков $\tilde{x}_{mk}$. В рамках модели отношение RI-нагрузки и межузлового потока

$$\tilde{w}_m = \frac{\tilde{y}_m}{\tilde{z}_m}, m = \overline{1,M},$$

можно трактовать как удельные затраты ресурсов сети при передаче единичного потока m-го вида между узлами s_m и t_m при дуговых потоках $\tilde{x}_{mi}$.

Вектор $\tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha})$ определяет опорную точку на осевой линии равных межузловых потоков (далее ALEF-прямая от англ. axial line equal flow). Вектор $\tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha})$ является направляющим для гиперплоскости:

$$\sum_{m=1}^{M} z_m = \tilde{\zeta}(\tilde{\alpha}), \tag{2.2}$$

где

$$\tilde{\zeta}(\tilde{\alpha}) = \sum_{m=1}^{M} \tilde{z}_m = \tilde{\alpha} M.$$

Норма вектора $\tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha})$ может трактоваться как «расстояние» от начала координат до точки пересечения ALEF-прямой с гиперплоскостью (2.2):

$$\| \tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha}) \| = \tilde{\gamma} = [\sum_{m=1}^{M} \tilde{z}_m^2]^{1/2} = [\tilde{\alpha}^2 M]^{1/2} = \tilde{\alpha}\sqrt{M}.$$

3. Узловые мультипотоки. В рамках формализма модели для каждой вершины $v_n \in V$, $n = \overline{1, N}$, формируется VMF-вектор (от англ. vertex multi flow) исходящего мультипотока $\vec{\mathbf{z}}(n)$ с компонентами:

$$z_m(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \notin M(n), \\ z_m, & \text{если } m \in M(n), \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{d}). \end{cases}$$

Таким образом, ненулевыми компонентами $\vec{\mathbf{z}}(n)$ становятся межузловые потоки $z_m > 0$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{d})$, для всех пар $p_m \in P(v_n)$ с узлами-источниками s_m, расположенными в вершине v_n.

Для каждого VMF-вектора вычисляются равные значения исходящих мультипотоков, последние могут передаваться одновременно в сети $G(1)$ без учета остальных корреспондентов. Указанный способ называется далее *монопольным* режимом передачи VMF-потока из узла v_n.

З а д а ч а 2. Для заданной вершины v_n найти $\beta^*(n) = \max_{\beta} \beta$

$$\text{при условиях: } \beta \sum_{m \in M(n)} [x_{mk}^0 + x_{m(k+E)}^0] \le d_k(1), \beta \ge 0, \; k = \overline{1, E}.$$

С помощью решения задачи 2 последовательно для всех n, $n = \overline{1, N}$, $p_m \in P$, $m \in M(n)$, рассчитываются VMF-векторы $\vec{\mathbf{z}}^*(n)$, все компоненты которых равны $\beta^*(n)$, т. е.

$$z_m^*(n) = \beta^*(n), m \in M(n), z_m^*(n) = 0, m \notin M(n), n = \overline{1, N}.$$

Для каждого ребра r_k, $k = \overline{1, E}$, подсчитывается величина

$$\Delta_k^*(n) = \beta^*(n) \sum_{m \in M(n)} [x_{mk}^0 + x_{m(k+E)}^0], \; k = \overline{1, E}, n = \overline{1, N}$$

и формируется вектор ресурсов $\vec{\Delta}^*(n) = \{\Delta_1^*(n), \Delta_2^*(n), ..., \Delta_E^*(n)\}$. Вектор $\vec{\Delta}^*(n)$ показывает, какие затраты пропускной способности требуются при передаче исходящих межузловых потоков из вершины v_n в монопольном режиме, без учета всех остальных корреспондентов. Для каждого VMF-вектора подсчитывается суммарное значение допустимых межузловых потоков и затраты ресурсов:

$$\zeta^*(n) = \sum_{m \in M(n)} z_m^*(n) = \beta^*(n)(N-1), \delta^*(n) = \sum_{k=1}^{E} \Delta_k^*(n),$$

а также нормы соответствующих векторов:

$$\| \vec{\mathbf{z}}^*(n) \| = \beta^*(n)(N-1)^{1/2}, \| \vec{\Delta}^*(n) \| = [\sum_{k=1}^{E} (\Delta_k^*(n))^2]^{1/2}, n = \overline{1, N}.$$

Векторы мультипотоков $\vec{\mathbf{z}}^*(n)$ взаимно ортогональны. Назовем набор векторов $(\vec{\mathbf{z}}^*(1), \vec{\mathbf{z}}^*(2), ..., \vec{\mathbf{z}}^*(N))$ структурным внутренним каркасом и обозначим его через $SiF(\mathbf{z}^*(\cdot))$ (от англ. structural internal frame), т.е.

$$SiF(\mathbf{z}^*(\cdot)) = (\vec{\mathbf{z}}^*(1), \vec{\mathbf{z}}^*(2), \ldots, \vec{\mathbf{z}}^*(N)).$$

Некоторый вектор

$$\mathbf{z}(\xi) = \sum_{n=1}^{N} \xi_n \vec{\mathbf{z}}^*(n), \sum_{n=1}^{N} \xi_n = 1, \xi_n \geq 0,$$

представленный в виде выпуклой комбинации векторов $SiF(\mathbf{z}^*(\cdot))$, является допустимым и принадлежит $\mathcal{Z}(\mathbf{d})$.

В рамках вычислительного эксперимента кроме *монопольных* исследовались *предельные* режимы передачи, при которых достигалась максимальная сумма межузловых потоков и использовались все пропускные способности сети. Для оценки VMF-векторов при полной загрузке всех ребер сети формируются векторы $\vec{\mathbf{z}}^{**}(n)$, их компоненты определяются по следующему правилу: для каждого узла v_n и всех пар $p_m \in P(v_n)$, с источником и стоком — не смежными узлами (кратчайший маршрут соединения для них состоит из двух и более ребер), поток $z_m^{**}(n)$ приравнивается нулю. Для всех пар $p_a \in P(v_n)$, с кратчайшим маршрутом соединения — единственным ребром r_k, поток $z_a^{**}(n)$ полагается равным $d_k(1)/2$, где $d_k(1)$ — пропускная способность ребра r_k в сети $G(1)$:

$$z_a^{**}(n) = \begin{cases} \dfrac{d_k(1)}{2}, & \text{если } \mu_a(1) = 1, h_a^1(1) = \{k\}, p_a \in P(v_n); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Вычисляется норма векторов

$$\left\| \vec{\mathbf{z}}^{**}(n) \right\| = \left[\sum_{k \in K(n)} \left(\frac{d_k(1)}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = \left\| \vec{\Delta}^{**}(n) \right\|, n = \overline{1, N},$$

где $\vec{\Delta}^{**}(n)$ — вектор ресурсов, необходимых при передаче мультипотока $\vec{\mathbf{z}}^{**}(n)$.

При одновременной передаче всех VMF-потоков $\vec{\mathbf{z}}^{**}(n)$ из всех узлов v_n, $n = \overline{1, N}$, достигается полная загрузка всех ребер сети $G(1)$, и максимальное суммарное значение допустимых межузловых потоков равно

$$\zeta^{**}(0) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m \in M(n)} z_m^{**}(n) = \sum_{k=1}^{E} d_k(1) = D(0).$$

Норма результирующего вектора межузловых потоков $\vec{\mathbf{z}}^{**}(0)$ равна

$$\rho(0) = \left\| \vec{\mathbf{z}}^{**}(0) \right\| = \left[\sum_{n=1}^{N} \sum_{k \in K(n)} \left(\frac{d_k(1)}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_{k=1}^{E} d_k(1)^2 \right]^{1/2}. \tag{3.1}$$

Координаты точки пересечения ALEF-прямой с гиперплоскостью

$$\sum_{m=1}^{M} z_m = D(0) \tag{3.2}$$

задаются вектором $\tilde{\mathbf{z}}(\lambda^{**}(0))$, все компоненты которого равны

$$\tilde{z}_m(\lambda^{**}(0)) = \lambda_m^{**}(0), \text{где } \lambda_m^{**}(0) = \frac{D(0)}{M}, m = \overline{1, M}.$$

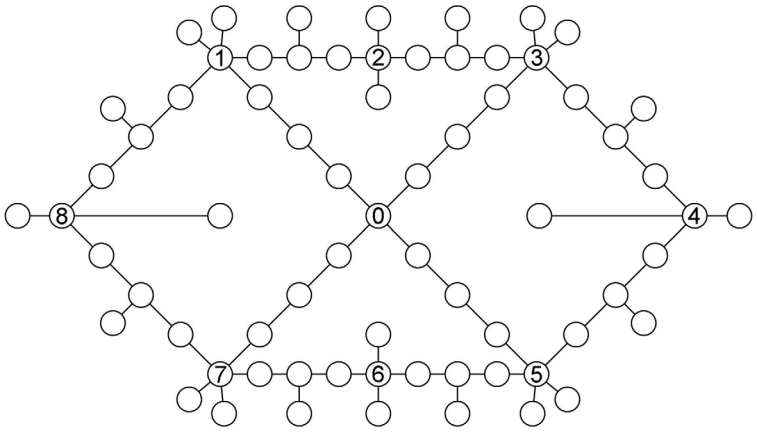


Рис. 1. Базовая сеть.

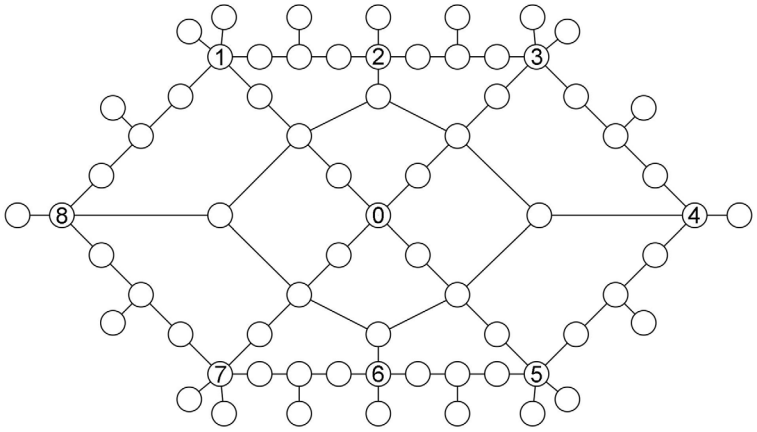


Рис. 2. Кольцевая сеть.

Норма вектора $\vec{\mathbf{z}}(\lambda^{**}(0))$ рассматривается как расстояние от начала координат до точки пересечения ALEF-прямой с гиперплоскостью (3.2):

$$\left\|\tilde{\mathbf{z}}(\lambda^{**}(0))\right\| = \left[\sum_{m=1}^{M}\left(\lambda_m^{**}(0)\right)^2\right]^{1/2} = \frac{D(0)}{\sqrt{M}}.$$

4. Анализ результатов вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент проводился на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1, 2. В каждой сети имеется 69 узлов. В ходе эксперимента проводилась нормировка, и суммарная пропускная способность в обеих сетях была одинакова:

$$\sum_{k=1}^{E} d_k(1) = D(0) = 68\,256.$$

На диаграммах рис. 3, 4 для VMF-векторов $\vec{\mathbf{z}}(n)$ в базовой и кольцевой сетях по горизонтальной оси откладываются суммарные значения мультипотока $\zeta(n)$, а по вертикальной $\delta(n)$ — соответствующие значения требуемой суммарной пропускной способности при передаче в монопольном режиме. На рис. 3 группа точек, для которых $\zeta(n) \le 1000$, относится к висячим вершинам и суммарный исходящий поток ограничен величиной пропускной способности инцидентного ребра. Для большой группы узлов суммарный исходящий межузловой поток находится в диапазоне $1300 \le \zeta(n) \le 1500$, поскольку в монопольном режиме используется уравнительная стратегия для всех исходящих потоков. В кольцевой сети "средняя" длина

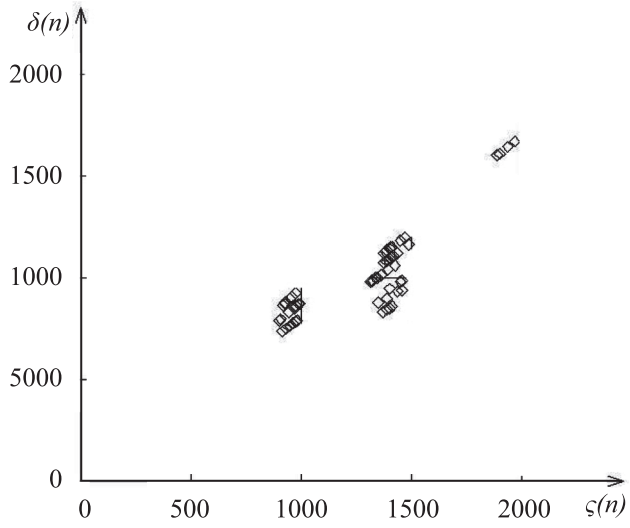


Рис. 3. Узловые мультипотоки и ресурсы в базовой сети.

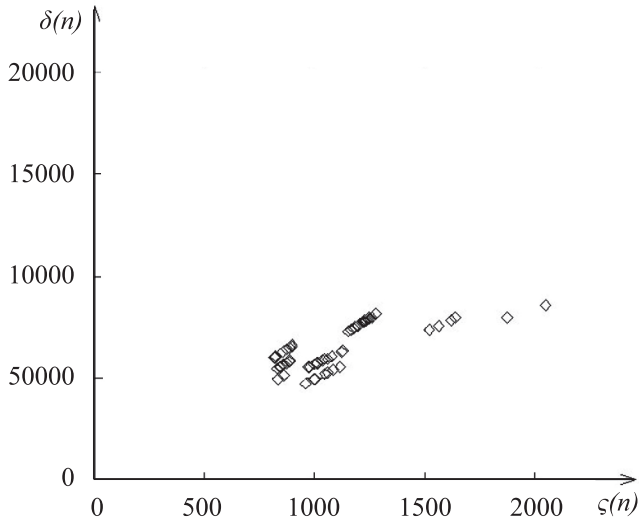


Рис. 4. Узловые мультипотоки и ресурсы в кольцевой сети.

кратчайшего пути меньше, чем в базовой. В результате, как следует из рис. 4, затраты ресурсов — пропускной способности — значительно меньше практически для всех VMF-потоков и $\delta(n) \le 10\,000$.

На рис. 5, 6 представлены диаграммы распределения удельных затрат $w(n) = \delta(n)/\zeta(n)$ передачи единичного потока из узла $v(n)$. Значения $w(n)$ откладываются по вертикальной оси, а относительные номера узлов $\nu(n) = n/N$, $n = \overline{1, N}$, указываются по горизонтальной оси. Удельные затраты в кольцевой сети меньше, чем в базовой, поскольку добавление ребер приводит к уменьшению *длины* кратчайших путей для большого числа пар-корреспондентов. Для висячих узлов, соединенных единственным ребром с сетью, удельные затраты выше, чем для вершин, расположенных в центре. Крайняя точка справа на рис. 5 со значением $5 \le w^*(n) < 6$, $\nu(n) = 1$, соответствует центральному узлу в базовой сети.

Круговые диаграммы на рис. 7, 8 строятся на основании векторов потоков $\vec{\mathbf{z}}^*(n)$, $n = \overline{1, N}$, сформированных после решения задачи 2. Для каждого вектора $\vec{\mathbf{z}}^*(n)$, $n = \overline{1, N}$, вычисляется сумма потоков $\zeta^*(n)$ и значение $\lambda^*(n)$:

$$\zeta^*(n) = \sum_{m=1}^{M} z_m^*(n),\ \lambda^*(n) = \frac{\zeta^*(n)}{M}.$$

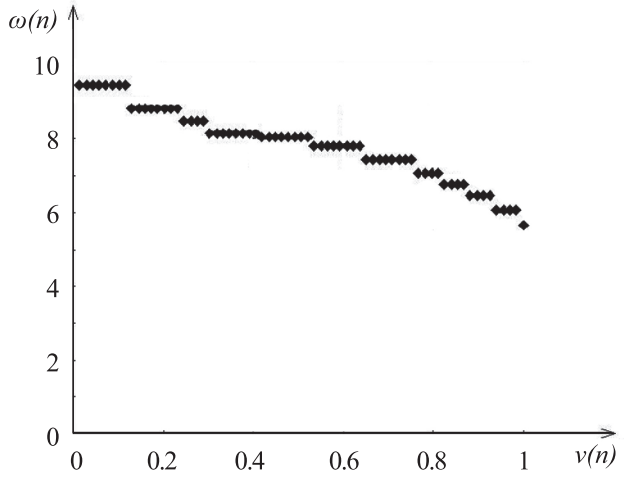


Рис. 5. Удельные затраты в базовой сети.

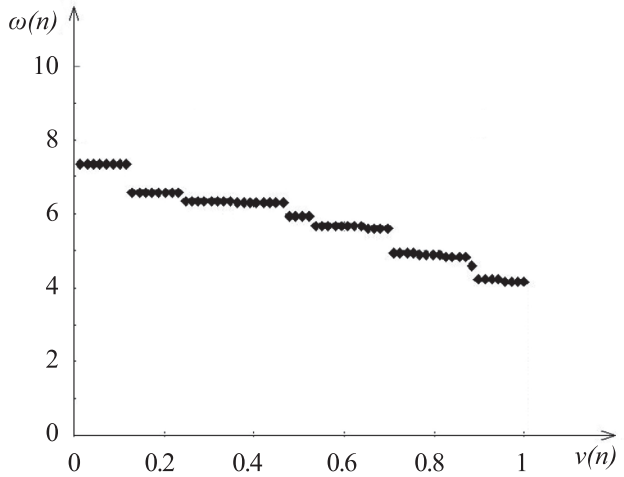


Рис. 6. Удельные затраты в кольцевой сети.

Формируется вектор $\vec{\mathbf{I}}(\lambda^*(n))$, каждая из компонент которого

$$\lambda_m^*(n) = \lambda^*(n), \ \ m = \overline{1,\ M}.$$

Для указанного вектора $\vec{\mathbf{I}}(\lambda^*(n))$ рассчитываются: норма

$$\gamma^*(n) = \left[\sum_{m=1}^{M} \lambda^*(n)^2\right]^{1/2} = \lambda^*(n)\sqrt{M} = \frac{\zeta^*(n)}{\sqrt{M}}$$

и норма вектора разности векторов $\vec{\mathbf{I}}(\lambda^*(n))$ и $\vec{\mathbf{z}}^*(n)$:

$$\mathrm{dev}\left(\vec{\mathbf{z}}^*(n)\right) = \left[\sum_{m=1}^{M} \left(\lambda^*(n) - z_m^*(n)\right)^2\right]^{1/2}.$$

По построению диаграмм на рис. 7, 8 значение $\mathrm{dev}(\vec{\mathbf{z}}^*(n))$ (отклонения) равно расстоянию между точками, заданными векторами $\vec{\mathbf{I}}(\lambda^*(n))$ и $\vec{\mathbf{z}}^*(n)$, в плоскости:

$$\sum_{m=1}^{M} z_m = \zeta^*(n).$$

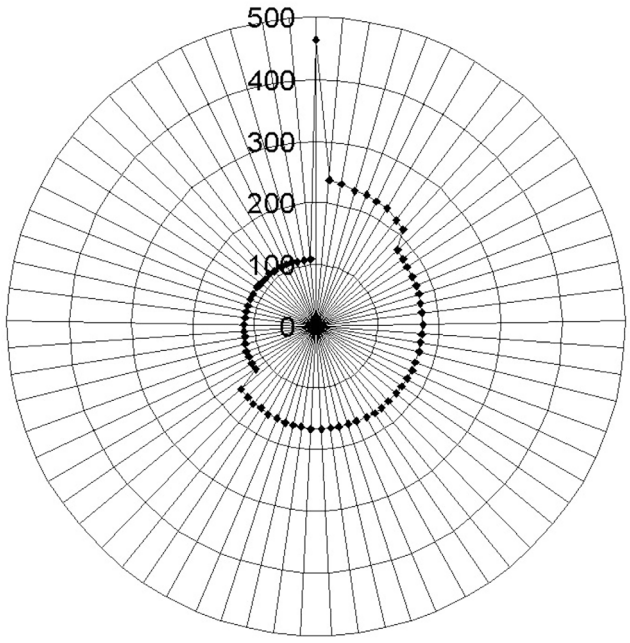


Рис. 7. Базовая сеть. Отклонения в монопольном режиме.

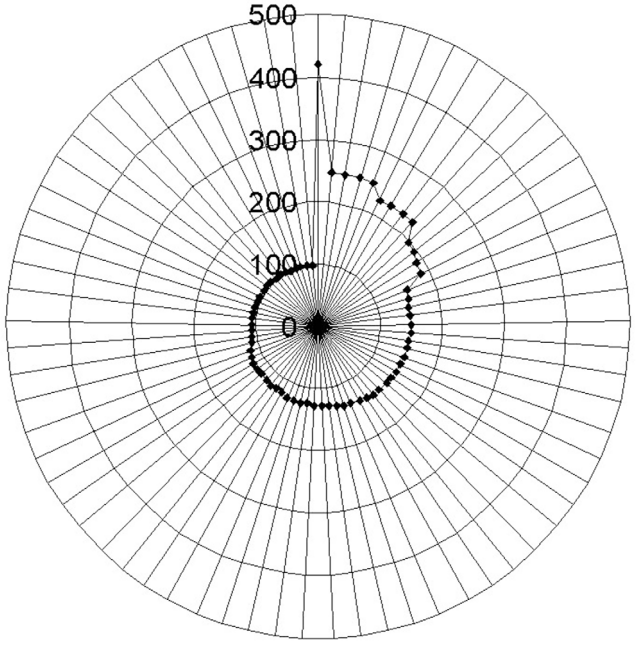


Рис. 8. Кольцевая сеть. Отклонения в монопольном режиме.

На диаграммах рис. 7, 8 концентрические окружности задают сетку значений отклонений. Длина отрезков от центра до точек-ромбов отвечает $\mathrm{dev}(\vec{\mathbf{z}}^*(n))$, $n = \overline{1, N}$. Точки расположены по ходу часовой стрелки по невозрастанию $\mathrm{dev}(\vec{\mathbf{z}}^*(n))$, $n = 1, N$. Значения $\mathrm{dev}(\vec{\mathbf{z}}^*(n))$ пропорциональны величине $\zeta^*(n)$ — суммарному исходящему мультипотоку из узла v_n. Векторы мультипотоков $\vec{\mathbf{z}}^*(n)$ образуют SiF-каркас, а соответствующие им точки расположены внутри границ множества $\mathcal{Z}(\mathbf{d})$. Точки-ромбы на диаграммах 7, 8 обозначают опорные векторы внешней оболочки SiF-каркаса.

На рис. 9, 10 приведены диаграммы для VMF-векторов $\vec{\mathbf{z}}^{**}(n)$ при предельной загрузке сети. Сравнение диаграмм с рис. 9, 10 и 7, 8 свидетельствует, что суммарные значения потоков $\zeta^{**}(n)$ и отклонение $\mathrm{dev}(\vec{\mathbf{z}}^{**}(n))$ значительно больше при предельной загрузке. Несколько групп

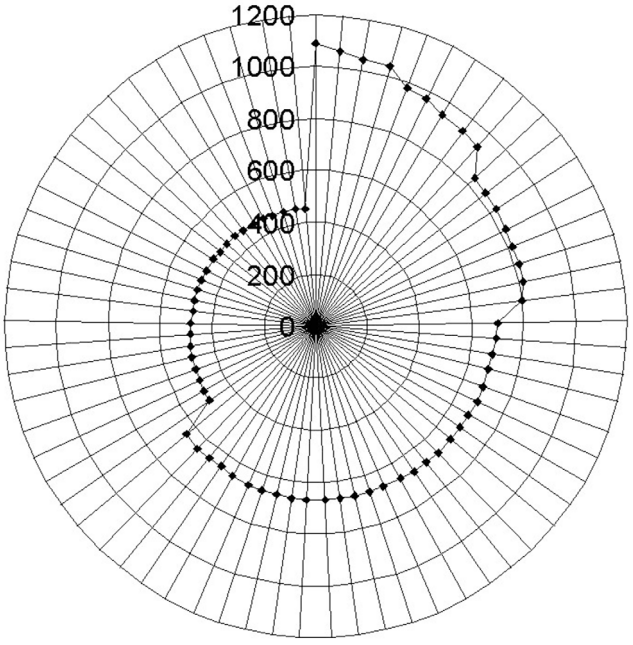


Рис. 9. Базовая сеть. Отклонения при предельной загрузке.

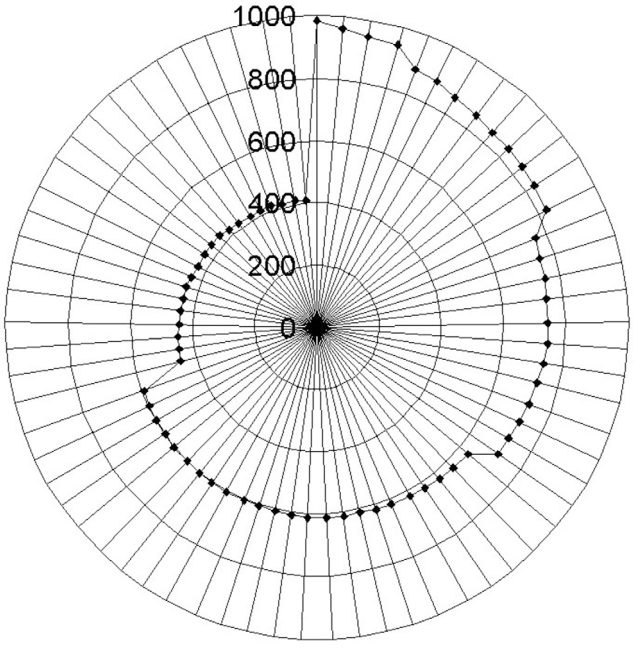


Рис. 10. Кольцевая сеть. Отклонения при предельной загрузке.

точек-ромбов с почти равными значениями $\zeta^{**}(n)$ отвечают вершинам сети с одинаковым числом инцидентных ребер и близкими значениями исходящих потоков.

Диаграммы на рис. 11, 12 построены на основании метрических оценок и позволяют проанализировать особенности множества допустимых потоков $\mathcal{Z}(\mathbf{d})$. По вертикальной оси указывается расстояние от начала координат до точки пересечения ALEF-прямой с гиперплоскостью межузловых потоков:

$$\sum_{m=1}^{M} z_m = \tilde{\zeta}(\cdot)$$

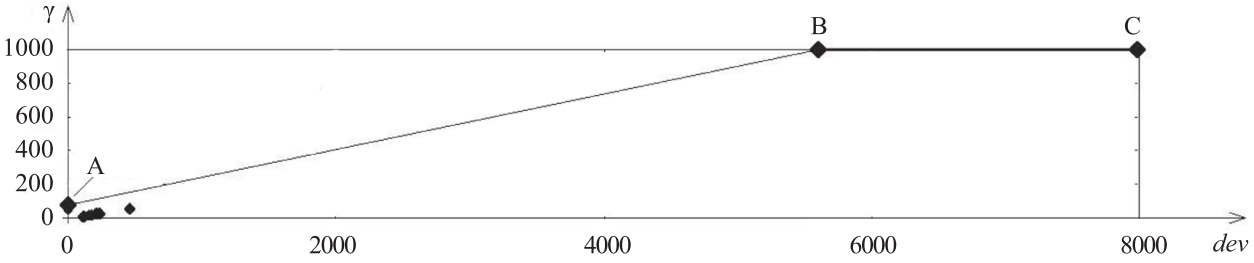


Рис. 11. Базовая сеть. Множество допустимых потоков.

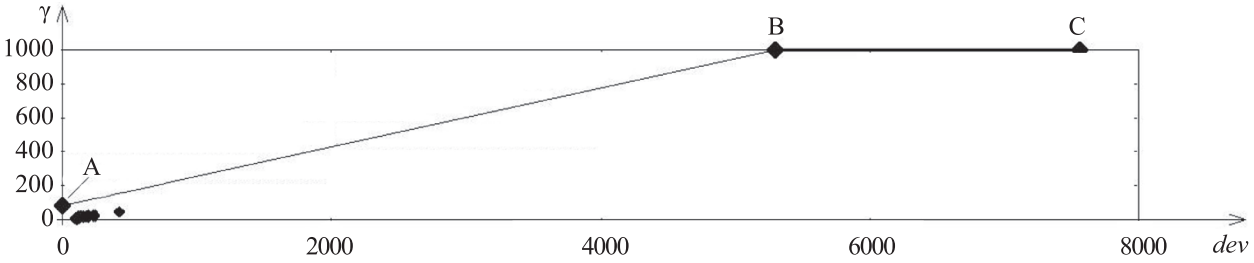


Рис. 12. Кольцевая сеть. Множество допустимых потоков.

при различных заданных значениях $\tilde{\zeta}(\cdot)$. Формально можно рассматривать вертикальную ось как ALEF-прямую, точка-ромб на вертикальной оси соответствует норме вектора межузловых потоков $\tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha})$ с равными компонентами $\tilde{\alpha}$ — решениями задачи 1. Буква A на диаграммах используется для обозначения точек-ромбов, для которых

$$\tilde{\gamma} = \|\tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha})\|.$$

Для базовой сети $\tilde{\gamma}=75$, для кольцевой — $\tilde{\gamma}=84$.

По горизонтальной оси откладываются значения $\mathrm{dev}(\vec{\mathbf{z}}^*(\cdot))$. Для наглядности и оценки масштаба группа точек-ромбов вблизи начала координат вдоль горизонтальной оси отвечает VMF-потокам, точнее $\vec{\mathbf{z}}^*(n)$ — векторам, изображенным на диаграммах 7, 8. Буквой B обозначена точка-ромб, определяющая вектор межузловых потоков $\vec{\mathbf{z}}^{**}(n) \in \mathcal{Z}(\mathbf{d})$. Выпуклая комбинация

$$\vec{\mathbf{z}}(\xi) = \xi\tilde{\mathbf{z}}(\tilde{\alpha}) + (1-\xi)\vec{\mathbf{z}}^{**}(0), 0 \le \xi \le 1,$$

позволяет описать векторы, лежащие на наклонной линии, которая соединяет точки-ромбы A и B диаграмм на рис. 11, 12. Расстояние от начала координат до точки B численно равно $\rho(0)$ — значению нормы вектора (3.1).

Отрезок горизонтальной прямой (жирная линия) между двумя точками-ромбами B и C является отображением подмножества векторов допустимых межузловых потоков $\vec{\mathbf{z}}(\cdot) \in \mathcal{Z}(\mathbf{d})$, таких, что

$$\sum_{m=1}^{M} z_m(\cdot) = D(0).$$

Точка C соответствует некоторому допустимому вектору $\vec{\mathbf{z}}^+(0) \in \mathcal{Z}(\mathbf{d})$ со следующими компонентами:

$$z_m^+(0) = \begin{cases} d_k(1), & \text{если } \mu_m(1) = 1, h_m^1(1) = \{k\},\ k \le E; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $d_k(1)$ — пропускная способность ребра r_k в сети $G(1)$, $m = \overline{1, M}$. Норма вектора $\vec{\mathbf{z}}^+(0)$ по формуле (3.1) равна

$$\rho^+ = \left[\sum_{k=1}^{E} d_k(1)^2\right]^{1/2} = \sqrt{2}\rho(0).$$

В M-мерном пространстве межузловых потоков по построению ALEF-прямая перпендикулярна секущим гиперплоскостям с заданной суммой всех межузловых потоков.

На двумерных диаграммах, приведенных на рис. 7–10, указаны расстояния от точек, отвечающих VMF-векторам, до ALEF-прямой. Метрические оценки сохраняют взаимное пространственное расположение векторов, фактически являются сверткой и позволяют выделять доминирующие решения. В свою очередь VMF-векторы взаимно ортогональны и их можно рассматривать как набор базисных векторов для агрегированного представления межузловых потоков.

Набор VMF-векторов с единичными компонентами является направляющими лучами конуса, а его центральная ось — ALEF-прямая. На рис. 7, 8 показаны точки пересечения направляющих лучей конуса с гиперплоскостями межузловых потоков. Метрические оценки вычисляются относительно ALEF-прямой. Выпуклая комбинация VMF-векторов и вектора, коллинеарного ALEF-прямой, позволяет формально описать любой вектор, лежащий внутри конуса SIF-каркаса. На рис. 7, 8 в рамках формализма модели и разработки диспетчерских правил маршрутизации каждый VMF-вектор соответствует доле входного потока (нагрузки), который предполагается передать из узла с номером n остальным корреспондентам.

Заключение. Априорные оценки VMF-векторов, вычисленные в монопольном режиме, дают возможность анализировать ситуации, когда внешняя (входная) нагрузка на сеть в узле превышает нормативные ограничения. В зависимости от постановки задачи и моделируемой системы перегрузки на входе в систему приведут к отказам в обслуживании и/или возникновению очередей на входах. На основе минимальных удельных затрат определяются группы узлов-корреспондентов, требующих больших ресурсов для передачи потоков.

Перекрестный анализ структурных и потоковых характеристик, их взаимосвязи и взаимовлияния может быть использован на предпроектном этапе создания сетей различного назначения [6–14]. Метрические оценки предельных распределений ресурсов позволяют получить агрегированное описание множества допустимых потоков [4, 5]. Диаграммы свидетельствуют, что большая часть содержательно значимых решений в стационарных режимах будет сосредоточена в относительной близости от начала координат и на значительном удалении от формально предельных показателей рабочих характеристик.

REFERENCES

1. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А.* Оценки распределения ресурсов в многопользовательской сети при равных межузловых нагрузках // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 21–26.
2. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А.* Анализ загрузки многопользовательской сети при расщеплении потоков по кратчайшим маршрутам // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 19–24.
3. *Малашенко Ю.Е., Назарова И.А.* Сравнительный анализ узловых мультипотоков в многопользовательской сетевой системе // Информатика и ее применения. 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 40–45.
4. *Лотов А.В., Поспелова И.И.* Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Макс Пресс. 2008.
5. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
6. *Kung H.T., Wu C.H.* Content Networks: Taxonomy and New Approaches. The Internet as a Large-Scale Complex System. Oxford: Oxford University Press, 2005. P. 203–225.
7. *Yang R., Van der Mei R.D., Roubos D. et al.* Resource Optimization in Distributed Real-time Multimedia Applications // Multimed. Tools Appl. 2012. V. 59. P. 941–971.
8. *Beben A., Batalla J. M., Chai W.K., Sliwinski J.* Multi-criteria Decision Algorithms for Efficient Content Delivery in Content Networks // Ann. Telecommun. 2013. V. 68. P. 153–165.
9. *Zhang H.P., Yin B.Q., Lu X.N.* Modeling and Analysis for Streaming Service Systems // Internat. J. of Automation and Computing. 2014. V. 11. P. 449–458.
10. *Pathan A., Buyya R.* A Taxonomy and Survey of Content Delivery Network. Technical Report GRIDS-TR-2007-4. Melbourne: University of Melbourne, 2007.
11. *Omotunde A.A., Okolie S.O., Adekunle Y.A. et al.* Request-Routing for Content Delivery Networks (CDN) // Intern. J. of Advanced Research in Computer Science. 2015. V. 6. Iss. 6. P. 10–16.
12. *Waheed M.H.B., Jamil F., Qayyum A. et al.* A New Efficient Architecture for Adaptive Bit-Rate Video Streaming // Sustainability. 2021. V. 13. Iss. 8. P. 4541. https://doi.org/10.3390/su13084541
13. *Vepsäläinen J.* Disappearing Frameworks Explained. Ithaca: Cornell University, 2023. https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.03201
14. *Dutta N., Sarma H.K.D., Jadeja R. et al.* Introduction to Information-Centric Networks // Information Centric Networks (ICN). Practical Networking. Cham: Springer, 2021.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 150–156

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК: 004.932.2

МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ОБЛАСТИ ХОРИОИДЕИ И ЕЕ КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ ОПТИЧЕСКОЙ КОГЕРЕНТНОЙ ТОМОГРАФИИ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ЗАБОЛЕВАНИЙ ГЛАЗА[1]

© 2024 г. Н. С. Демин[1, 2, *], Н. Ю. Ильясова[1, 2, **], Р. Т. Самигуллин[1, *]**

[1]*Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия*

[1]*Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Самара, Россия*

** e-mail: volfgunus@gmail.com*

*** e-mail: ilyasova.nata@gmail.com*

**** e-mail: samigullin.ravil2015@yandex.ru*

Поступила в редакцию 27.11.2023 г.
После доработки 22.02.2024 г.
Принята к публикации 13.05.2024 г.

Предлагается технология выделения сосудистой ткани глаза человека и подсчета хориоидального сосудистого индекса на изображениях оптической когерентной томографии. Хориоидея представляет собой одну из наиболее васкуляризированных структур человеческого тела и играет незаменимую роль в питании фоторецепторов. Предлагаемый нами подход для диагностического анализа области хориоидеи основан на использовании метода компенсации теней изображений оптической когерентной томографии с последующей их фильтрацией и бинаризацией. Технология позволила автоматизировать подсчет значения хориоидального сосудистого индекса, который служит важным показателем в исследовании сосудистого слоя при проведении диагностики заболеваний глаза. Рассмотрена технология выделения области хориоидеи и количественной оценки хориоидального сосудистого индекса на изображениях оптической когерентной томографии для выявления эндокринной офтальмопатии. Хориоидея – одна из наиболее васкуляризированных структур человеческого тела и играет незаменимую роль в питании фоторецепторов.

Ключевые слова: биомедицинские изображения, изображения оптической когерентной томографии, пороговая обработка, хориоидея, количественные характеристики, количественный анализ

DOI: 10.31857/S0002338824030172 **EDN:** UPHZSO

METHOD OF CHORIOIDEA AREA EXTRACTION AND ITS QUANTITATIVE ANALYSIS ON OPTICAL COHERENCE TOMOGRAPHY IMAGES FOR DIAGNOSTICS OF EYE DISEASES[2]

N. S. Demin[a, b, *], N. Yu. Ilyasova[a, b, **], R. T. Samigullin[a, *]**

[a] *Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute", Samara, Russia*

[b] *Samara National Research University, Samara, Russia*

** e-mail: volfgunus@gmail.com*

*** e-mail: ilyasova.nata@gmail.com*

**** e-mail: samigullin.ravil2015@yandex.ru*

The paper proposes a technology for extraction of vascular tissue of the human eye and calculation of chorioidal vascular index on optical coherence tomography images. The applied approach is based on the use of the method of shadow compensation of optical coherence tomography (OCT) images with their subsequent filtering and binarisation. The technology made it possible to automate the calculation of chorioidal vascular index value, which is an important indicator in the study of the vascular layer when diagnosing eye diseases.

[1] Работа выполнена по госзаданию НИЦ «Курчатовский институт».

[2] This work was performed within the State Assignment of NRC "Kurchatov Institute", Moscow, Russia.

Keywords: biomedical images, optical coherence tomography images, thresholding, charyoid, quantitative features, quantitative analysis

Введение. Изучение анатомических особенностей хориоидеи является основополагающей ролью во многих процессах функционирования и развития глаза и зрения. Хориоидея – богатая сосудами ткань организма, обеспечивает кислородом и питательными веществами пигментный эпителий и наружные слои сетчатки, поддерживает внутриглазное давление и температуру глазного яблока, принимает участие в фокусировке изображения на сетчатке, поэтому дефекты хориоидеи выступают провоцирующим фактором ряда заболеваний глаза [1]. Информация о структуре глазного дна, включающей анатомические и патологические элементы, обычно извлекается при помощи оптической когерентной томографии (ОКТ) и фундус-камер. Использование цифровых методов позволяет упростить работу врача-офтальмолога за счет решения задач, с которыми человек не справляется за ограниченный промежуток времени.

Искусственный интеллект дает возможность решать задачи диагностики заболеваний глазного дна, лечения глазных заболеваний и т.д. Анализ диагностических данных проводится с помощью таких технологий искусственного интеллекта, как применение сверточных нейронных сетей, интеллектуальный анализ данных и др. [2, 3]. Указанные методы используются для выделения области хориоидеи с целью ее дальнейшего диагностического анализа, что является предварительным этапом формирования данных для обработки.

Диагностика хориоидеи проводится с помощью ОКТ, которая позволяет получать данные об отражательной способности тканей с разрешением по глубине с помощью сканирующего источника ближнего инфракрасного излучения. Данные представлены в виде массивов пикселей или вокселей, в которых яркость кодирует отражательную способность фокальной ткани. Значимое наблюдение за задним сегментом глаза возможно, потому что ткани достаточно прозрачны, чтобы обеспечить проникновение фотонов под поверхность, но достаточно непрозрачны и оптически неоднородны, чтобы возвращать структурно релевантные и информативные отражения.

1. Постановка задачи. Визуализация хориоидеи с помощью ОКТ является сложной задачей из-за маскирующего эффекта относительно непрозрачного пигментного эпителия сетчатки. Традиционно визуализированные изображения ОКТ заднего сегмента содержат тени, которые влияют на визуализацию глубоких структур, в том числе хориоидеи. Улучшенная визуализация глубины и усреднение улучшают визуализацию сосудистой оболочки на поперечных ОКТ-сканах, но усреднение требует многократных проходов сканирования и продлевает время сбора данных [4]. ОКТ со свип-источником использует настраиваемый лазер и позволяет быстро получать плотные растровые сканы. Он также работает на более длинных волнах и обеспечивает более глубокое проникновение в ткани, так что вся толщина сосудистой оболочки лучше визуализируется, хотя и с постоянными тенями от передних структур [5]. Качественный анализ изображений, полученных с помощью этих стратегий, дал важную информацию о заболеваниях, при которых изменения в архитектуре сосудов хориоидеи считаются этиологическими, и вызвал растущий интерес к количественной оценке этих изменений с использованием автоматизированных алгоритмов.

Для количественной оценки хориоидеи были разработаны различные критерии оценки, включая толщину хориоидеи, объем и хориоидальный сосудистый индекс (CVI). Индекс сосудистого русла хориоидеи представляет собой отношение объема просвета к общему объему хориоидеи [6–9]. К настоящему времени опубликовано множество исследований, посвященных CVI и его потенциальному применению для оценки и лечения некоторых заболеваний сетчатки и сосудистой оболочки [10–14].

Целью наших исследований является выделение зоны хориоидеи, подсчет признаков в выделенной зоне для дальнейшего диагностического анализа по классам нормы и патологии рис. 1. Для этого был разработан метод предобработки изображений ОКТ и морфологический анализ зон интереса. Результаты работы будут использованы для последующих исследований, в том числе для выделения зоны интереса посредством машинного обучения и диагностического анализа.

(а) (б)

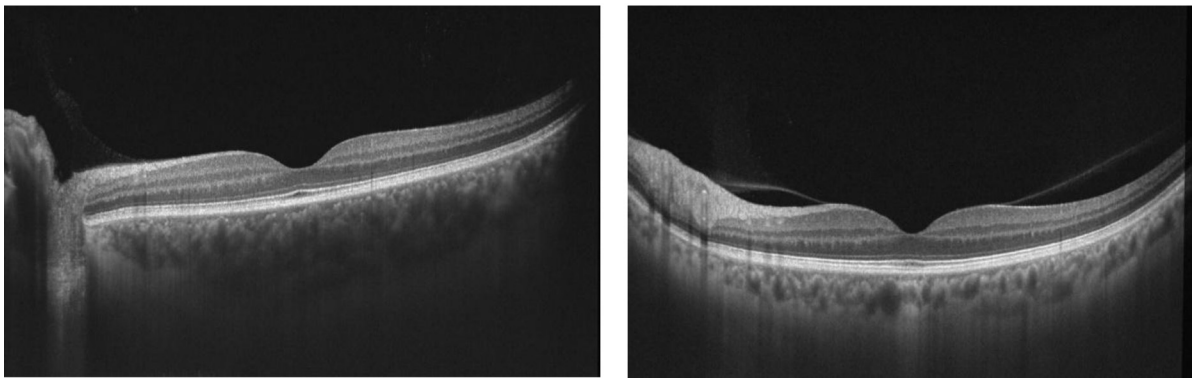


Рис. 1. Изображение исходного B-скана ОКТ глазного дна. а – без патологии; б – с патологией.

Аналогичный метод обработки данных изображений был представлен в работе [15], главная цель которой – оценка хориоидального индекса, а выделение интересующих зон происходит вручную в соответствии с международной номенклатурой для ОКТ.

2. Идея предлагаемого подхода. Для автоматизации выделения области хориоидеи и ее количественного анализа на ОКТ изображениях была разработана технология выделения зоны интереса и подсчета хориоидального сосудистого индекса, основными этапами которой являются:

1) теневая компенсация;
2) бинаризация снимка;
3) фильтрация бинаризованного изображения;
4) подсчет хориоидального индекса;

На рис. 2 приведена схема технология выделения зоны интереса и подсчета хориоидального сосудистого индекса.

2.1. Компенсация теней. Количественный анализ сосудистой оболочки затруднен из-за теней, отбрасываемых передними структурами, такими как сосуды сетчатки. Поэтому компенсация теней важна для успешного и надежного количественного ОКТ-анализа, особенно сосудистой оболочки и других субретинальных структур пигментного эпителия [15, 16].

Теоретическое физическое ограничение, накладываемое тенями ОКТ, заключается в сокращении динамического диапазона более глубоких значений отражательной способности. Доступные нам изображения были закодированы в 8-битной шкале серого, где каждый пиксель или воксель представлен целым числом от 0 до 255. Тени накладывают еще меньший диапазон на более глубокие ткани, что может запутать определенные типы анализа. На практике, однако, включение компенсации теней производителями устройств выше по цепочке инструментов позволило бы им использовать необработанные данные отражательной способности, которые обычно собираются с гораздо большей точностью [17]. Компенсация теней выполнялась с помощью алгоритма Жирара.

Каждое B-сканирование преобразуется в область необработанной интенсивности, а интенсивность каждого пикселя умножается на уникальный коэффициент компенсации, полученный на основе особенностей сигнала ОКТ. Этот метод также повышает контрастность изображения кровеносных сосудов [17].

Непосредственно теневая компенсация изображения определялась следующим уравнением:

$$s(z) / \int_{z}^{\infty} s(u)\,du = \alpha r_s(z) = HD\{s(z)\}, \tag{2.1}$$

где HD – оператор, переводящий заданный сигнал $s(z)$ в его скомпенсированную форму, α – коэффициент затухания, $s(z)$ – А скан ОКТ, который на изображении представляет собой вертикальные линии толщиной в 1 пиксель, $r_s(z)$ – амплитуда сигнала $s(z)$.

Рис. 2. Технология выделения зоны интереса и подсчета хориоидального сосудистого индекса.

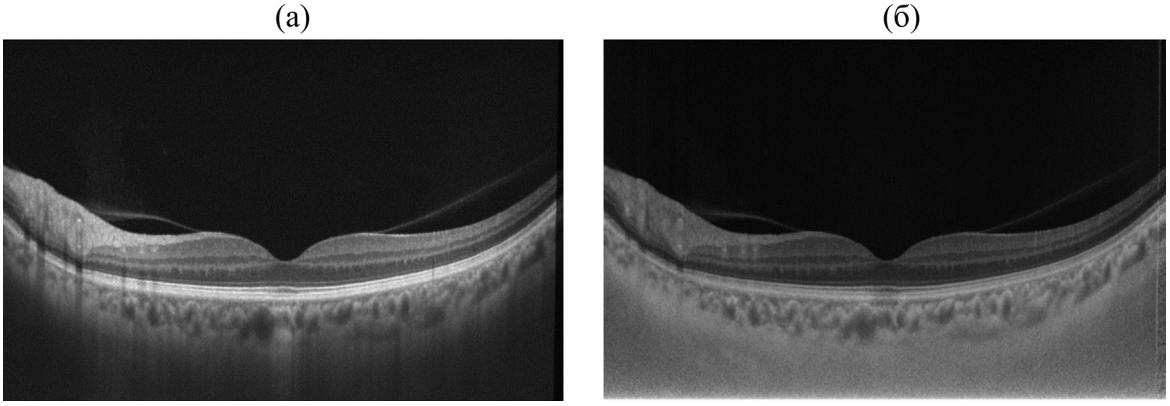


Рис. 3. а – необработанный B-скан ОКТ; б – изображение с компенсацией теней.

Усиление контраста выполнялось до теневой компенсации изображения, которое описывается следующей формулой:

$$HD\left\{I^n(z)\right\} = I^n(z) / 2\int_z^{\infty} I^n(u)\,du, \tag{2.2}$$

где I – интенсивность пикселей, n – показатель степени (в рамках данной работы равен 2).

Метод позволил значительно улучшить качество изображения (рис. 3, б).

Применение компенсации теней может распространяться на ангиографию с оптической когерентной томографией (ОКТА), в которой используются кратковременные данные структурной ОКТ для определения местонахождения динамических вокселов с помощью методов декорреляции и для определения кровотока [18]. Из-за относительной прозрачности глазных структур эффекты декорреляции, возникающие в относительно передних вокселях, проецируются на относительно задние гиперрефлективные структуры.

Появление проекционных артефактов на ангиографических сегментах ОКТ en face глубоких тканей затрудняет количественный анализ глубоких капиллярных сплетений сетчатки и, возможно, неоваскулярной ткани, что требует разрешения проекции в программном обеспечении [19].

2.2. Бинаризация. Бинаризация ОКТ-изображения облегчает количественную оценку люминальной и стромальной областей хориоидеи [9, 10, 20]. Для выделения области просвета сосудов использовалась бинарная обработка. Первым шагом выполнялось адаптивное выравнивание гистограмм на уровне отдельных B-сканов для увеличения контраста сосудов сосудистой оболочки. Далее осуществлялась бинаризация изображения. Из-за разности распределения яркостей между отдельными снимками применение глобального порога проблематично. В связи с этим для бинаризации применялся метод адаптивной пороговой обработки Ниблэка. Изображение обрабатывается с помощью окна. Для каждого положения окна считается свой порог:

$$treshold = mean + k\,s, \tag{2.3}$$

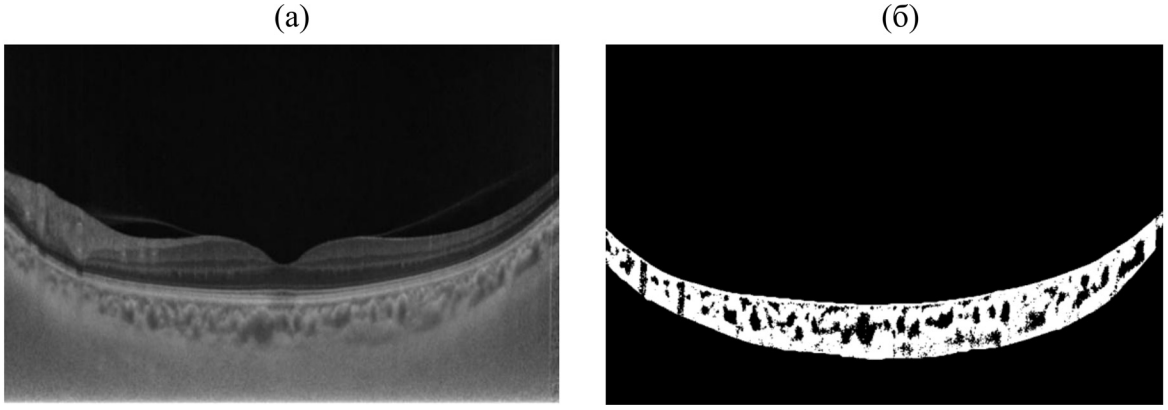


Рис. 4. а – изображение с компенсацией теней; б – бинаризованный слой хориоидеи.

Рис. 5. а – бинарное изображение; б – отфильтрованное изображение.

где *mean* – среднее значение яркости пикселей в окне, *s* – стандартное отклонение значений яркости в окне, а *k* – коэффициент для отделения объекта от фона. Соответственно алгоритм бинаризации имеет 2 параметра: размер окна и коэффициент *k*. В ходе исследований наулучшее среднее значение для максимальной разделимости классов дало окно размером 41 пиксель и параметр $k = 0.03$. Пример бинаризованного изображения представлен на рис. 4.

2.3. Фильтрация шумов. Для избавления от шумов на бинаризованном изображении использовались методы морфологической обработки изображений [21]. Проводилось вскрытие (последовательное применение операций эрозии и дилатации) изображения с структурным элементом вида эллипс размером 5×5. Пример отфильтрованного изображения показан на рис. 5.

2.4. Хориоидальный индекс. Для изображений хориоидеи на B-сканах был предложен такой критерий, как сосудистый индекс хориоидеи. Подсчет сосудистого индекса хориоидеи определялся по формуле:

$$\mathrm{CVI} = \frac{LCA}{TCA}, \tag{2.4}$$

где CVI – хориоидальный сосудистый индекс, *LCA* – общая площадь просвета сосудов, *TCA* – общая площадь поперечного сечения.

С момента появления CVI в многочисленных исследованиях оценивалась его эффективность в качестве инструмента для прогнозирования заболевания и мониторинга прогрессирования с многообещающими результатами [1]. CVI был создан из-за необходимости более надежной и точной оценки хориоидальной сосудистой сети [22–24]. Хориоидальный сосудистый индекс определяентся как отношение площади просвета сосудов к общей площади сосудистого слоя [25]. Расчеты проводились для изображений ОКТ с патологией и без патологии.

Таблица. Значения оценок хориоидальных параметров для двух классов изображений ОКТ сетчатки

Вид изображения	Отношение сосудов к общей площади	Высота, мкм				
		–800 от фовеа	–400 от фовеа	0 от фовеа	+400 от фовеа	+800 от фовеа
Патология	0.47 ± 0.04	282 ± 60	293 ± 62	300 ± 60	300 ± 62	300 ± 64
Норма	0.54 ± 0.05	479 ± 80	500 ± 78	530 ± 80	536 ± 80	550 ± 84

Данные для исследования были предоставлены Московским стоматологическим университетом им. А.И. Евдокимова (кафедра офтальмологии), всего было 25 образцов с патологией и 25 без патологии. Открытая база данных B-сканов глазного дна для анализа хориоидального слоя с соответствующей разметкой отсутствует. Индекс рассчитывался на ограниченной области по 1000 нм влево и вправо от фовевы. Значения считались для всего набора данных для каждого класса, определялось среднее значение индекса для класса и стандартное отклонение. Исследования показали, что среднее значение индекса для класса нормы равно 0.52, а для патологии составляет 0.56 при среднеквадратичном отклонении (СКО) 0.02. В таблице представлена оценка хориоидальных параметров для двух классов изображений, для которых в дальнейшем определяются эффективные цифровые методы диагностики заболеваний и поддержки принятия решений в процессе лечения. Результаты исследования показали, что полученная оценка признаков хориоидеи позволяет провести классификацию на нормы и патологии по изображениям ОКТ сетчатки для выявления эндокринной офтальмопатии.

Дальнейшие исследования посвящены формированию оценок таких диагностических признаков хориоидального слоя, как яркостные и морфологические параметры хориоидеи, а также текстурные признаки слоя, которые планируется в дальнейшем использовать для выявления патологических изменений.

Сегментация снимков ОКТ, по которым проводился количественный анализ, включающий оценку хориоидальных параметров, является сложным этапом и включает задачу выделения слоев сетчатки, которая в настоящий момент решается на основе нейросетевого подхода. В данный момент нами совместно с врачами производится сбор данных ОКТ для обучения сети и разметка данных. Совместно с Московским стоматологическим университетом им. А.И. Евдокимова (кафедра офтальмологии) нами ведутся обширные научные исследования по выявлению эффективных способов диагностики и лечения глазных заболеваний. Благодаря взаимодействию с врачами проводятся работы по сбору и интерпретации данных пациентов, для которых определяются эффективные цифровые методы для диагностики заболеваний и поддержки принятия решений в процессе лечения.

Заключение. Предложена технология выделения области хориоидеи и количественной оценки хориоидального сосудистого индекса на изображениях оптической когерентной томографии для выявления эндокринной офтальмопатии. Хориоидея представляет собой одну из наиболее васкуляризированных структур человеческого тела и играет незаменимую роль в питании фоторецепторов [25–27]. Таким образом, развитие и исследование новых методов хориоидеи играет важную роль в диагностике эндокринной офтальмопатии (ЭОП) и возрастной макулярной дегенерации (ВМД), это даст возможность увеличить вероятность обнаружения у пациентов признаков ЭОП и ВМД на более ранних стадиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шагалова П.А., Ерофеева А.Д., Орлова М.М. и др.* Исследование алгоритмов предобработки изображений для повышения эффективности распознавания медицинских снимков// Тр. НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2020. № 1 (128). С. 25–32.
2. *Medeiros F.A., Jammal A.A., Thompson A.C.* From Machine to Machine: an OCT-trained Deep Learning Algorithm for Objective Quantification of Glaucomatous Damage in Fundus Photographs //Ophthalmology. 2019. № 126(4). P. 513–521.
3. *An G., Omodaka K., Hashimoto K. et al.* Glaucoma Diagnosis with Machine Learning Based on Optical Coherence Tomography and Color Fundus Images // Healthcare Engineering. 2019. № 2019.
4. *Copete S., Flores-Moreno I., Montero J.A., Duker J.S., Ruiz-Moreno J.M.* Direct Comparison of Spectral-Domain and Swept-Source OCT in the Measurement of Choroidal Thickness in Normal Eyes // British J. of Ophthalmology. 2014. № 98 (3). P. 334–338.

5. *Ng W.Y., Ting D.S.W., Agrawal R. et al.* Choroidal Structural Changes in Myopic Choroidal Neovascularization After Treatment with Antivascular Endothelial Growth Factor Over 1 Year // Investig. Ophthalmol. Vis. Sci. 2016. № 57. P. 4933–4939.
6. *Kuroda Y., Ooto S., Yamashiro K. et. al.* Increased Choroidal Vascularity in Central Serous Chorioretinopathy Quantified Using Swept-Source Optical Coherence Tomography // American J. Ophthalmology. 2016. № 169. P. 199–207.
7. *Vupparaboina K.K., Dansingani K.K., Goud A. et al.* Quantitative Shadow Compensated Optical Coherence Tomography of Choroidal Vasculature // Scientific Reports. 2018. № 8 (6461).
8. *Singh S.R., Vupparaboina K. K., Goud A. et. al.* Choroidal Imaging Biomarker // Surv. Ophthalmol. 2019. № 64. P. 312–333.
9. *Park Y., Cho K.J.* Choroidal Vascular Index in Patients with Open Angle Glaucoma and Preperimetric Glaucoma // PLoS ONE. 2019. № 14 (3).
10. *Ozcaliskan S., Balci S., Yenerel N.M.* Choroidal Vascularity Index Determined by Binarization of Enhanced Depth Imaging Optical Coherence Tomography Images in Eyes with Intermediate Age-Related Mascular Degeneratiob // European J. Ophtalmology. 2020. № 30 (6). P. 1512–1518.
11. *Agrawal R., Wei X., Goud A., Vupparaboina K.K., Jana S., Chhablani J.* Influence of Scanning Area on Choroidal Vascularity Index Measurement Using Optical Coherence Tomography // Acta Ophthalmol. 2017. № 95. P. 770–775.
12. *Wei X.*, Mishra C., Kannan N. B. *et al.* Choroidal Structural Analysis and Vascularity Index in Retinal Dystrophies // Acta Ophthalmol. 2019. № 97 (1). P. 116–121.
13. *Gora M., Karnowski K., Szkulmowski M. et. al.* Ultra High-speed Swept Source OCT Imaging of the Anterior Segment of Human Eye at 200 kHz with Adjustable Imaging Range // Optics Express. 2009. № 17. P. 14880–4894.
14. *Betzler B.K., Ding J., Wei X. et al.* Choroidal Vascularity Index: a Step Towards Software as a Medical Device // British J. Ophthalmology. 2022. № 106. P. 149–155.
15. *Agrawal R., Salman M., Tan K. A. et al.* Choroidal Vascularity Index (CVI)-A Novel Optical Coherence Tomography Parameter for Monitoring Patients with Panuveitis? // PLoS One. 2016. № 11 (1). P. e0146344.
16. *Girard M.J., Strouthidis N.G., Ethier C.R., Mari J.M.* Shadow Removal and Contrast Enhancement in Optical Coherence Tomography Images of the Human Optic Nerve Head // Investigative Ophthalmology & Visual Science. 2011. № 58. P. 7738–7748.
17. *Cheong H., Devalla S. K., Chuangsuwanich T. et. al.* OCT-GAN: Single Step Shadow and Noise Removal From Optical Coherence Tomography Images of the Human Optic Nerve Head // Biomedical Optics Express. 2021. № 12. P. 1482–1498.
18. *Shin Y.U., Lee S.E., Kang M.H., Han S.W., Yi J.H., Cho H.* Evaluation of Changes in Choroidal Thickness and the Choroidal Vascularity Index After Hemodialysis in Patients with End-stage Renal Disease by Using Swept-Source Optical Coherence Tomography // Med. (Baltim.). 2019. № 98.
19. *Jia Y., Tan O., Tokayer J. et al.* Split-spectrum Amplitude-decorrelation Angiography with Optical Coherence Tomography // Optics Express. 2012. № 20. P. 4710–4725.
20. *Zhang M., Hwang T. S., Campbell J. P. et al.* Projection-resolved Optical Coherence Tomographic Angiography // Biomedical Optics Express. 2016. № 7. P. 816–828.
21. *Tan K.A., Gupta P., Agarwal A. et al.* State of Science: Choroidal Thickness and Systemic Health // Surv. Ophthalmol. 2016. № 61. P. 566–581.
22. *Pellegrini M., Giannaccare G., Bernabei F. et. al.* Choroidal Vascular Changes in Arteritic and Nonarteritic Anterior Ischemic Optic Neuropathy // American J. Ophthalmol. 2019. № 205. P. 43–49.
23. *Betzler B.K., Ding J., Wei X. et al.* Choroidal Vascularity Index: a Step Towards Software as a Medical Device // British J. of Ophthalmology. 2022. № 106. P. 149–155.
24. *Iovino C., Pellegrini M., Bernabei F. et al.* Choroidal Vascularity Index: An In-Depth Analysis of This Novel Optical Coherence Tomography Parameter // J. Clin. Med. 2020. № 9 (2).
25. *Laviers H., Zambarakji H.* Enhanced Depth Imaging-OCT of the Choroid: a Review of the Current Literature // Graefe's Arch. Clin. Exp. Ophthalmol. 2014. № 252 (12). P. 1871–1883.
26. *Agrawal R., Ding J., Sen P.* Exploring Choroidal Angioarchitecture in Health and Disease Using Choroidal Vascularity Index // Progress in Retinal and Eye Research. 2020. № 77(100829).
27. *Sezer T., Altınışık M., Koytak İ.A., Özdemir M.H.* The Choroid and Optical Coherence Tomography // Turk. Oftalmoloiji Derg. 2016. № 46. P. 30–37.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 157–168

НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 629.7

МЕТОДЫ, СРЕДСТВА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ГЛОНАСС

© 2024 г. М. Н. Красильщиков[1], Д. М.Кружков[1, *], Е. А. Мартынов[1]

[1]МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

**e-mail: kruzhkovd@mail.ru*

Поступила в редакцию 08.03.2024 г.
После доработки 11.03.2024 г.
Принята к публикации 13.05.2024 г.

Описывается задача совершенствования характеристик ГЛОНАСС в контексте современного конкурентного развития глобальных спутниковых навигационных систем. Авторы рассматривают в качестве ключевых направлений исследования и разработки, связанные, во-первых, с улучшением показателя signal-in-space ratio в оперативном режиме за счет создания новых технологических циклов на борту космического аппарата и привлечения в эти процессы бортовых аппаратных средств и, во-вторых, с формированием задела с последующей реализацией функциональных возможностей орбитальных группировок отечественной системы без загрузки эфемеридно-временной информации и частотно-временных поправок с наземного комплекса управления. Обсуждаются основные факторы, препятствующие реализации в текущий момент намеченных целей, а также предложены пути устранения или нивелирования влияния этих факторов путем разработки и внедрения специальных информационных технологий использования современных и перспективных бортовых аппаратных средств, размещаемых на борту навигационных космических аппаратов ГЛОНАСС и его потенциальных дополнениях.

Ключевые слова: ГЛОНАСС, SISRE, НКА, ПВЗ, эфемериды.

DOI: 10.31857/S0002338824030186 **EDN:** UPGJUO

METHODS, TOOLS AND INFORMATION TECHNOLOGIES FOR IMPROVING GLONASS CHARACTERISTICS

M. N. Krasilshchikov[1], D. M. Kruzhkov[1, *], E. A. Martynov[1]

[1]Moscow aviation institute (national research university)

**e-mail: kruzhkovd@mail.ru*

GLONASS characteristics improving task in the context of modern competitive development of global satellite navigation systems is considered. The authors consider research and development related, firstly, to improving the signal-in-space ratio indicator in an operational mode by creating new technological cycles on board the spacecraft and involving on-board hardware in these processes, and, secondly, with the formation of a reserve to orbital groupings functionality subsequent implementation without downloading ephemeris-temporal information and time-frequency corrections from the ground control complex. The article considers the main factors hindering the implementation of the currently set goals, and also suggests ways to eliminate or level the influence of these factors by developing and implementing special information technologies using modern and promising on-board hardware placed on board the GLONASS spacecraft and its potential additions.

Keywords: GLONASS, SISRE, NSC, EOP, ephemerides.

Введение. Современные глобальные спутниковые навигационные системы (ГНСС), включая ГЛОНАСС, GPS, Galileo, Beidou, как системы двойного назначения интегрированы в народное хозяйство (транспорт, системы жизнеобеспечения и т.д.), а также в современные образцы военной и специальной техники. Иными словами, сложившийся на сегодня уровень использования ГНСС свидетельствует о насущной востребованности их возможностей, предоставляемых любому потребителю. Одновременно с этим неуклонно растут и требования к качеству данных услуг с точки зрения потенциальных характеристик точности и в широком

смысле надежности решения задачи навигации. С развертыванием в XXI в. ГНСС нового, вслед за ГЛОНАСС и GPS, поколения таких систем конкуренция в этой области вышла на новый виток. Как следствие, разработчики и ответственные за поддержание и эксплуатацию ГЛОНАСС, GPS, Galileo, Beidou профильные организации постоянно решают одновременно ряд задач, включая модернизацию системы в целом, модификацию ее отдельных сегментов, совершенствование наземных и бортовых аппаратных средств, внедрение новых подходов и алгоритмов при решении рутинных задач и т.д. Проводимые мероприятия, в том числе исследования и разработки, направленные на улучшение характеристик ГНСС, приводят также и к одновременному усложнению процессов функционирования этих систем. В статье рассматривается одно из ключевых направлений совершенствования ГЛОНАСС, а именно: повышение точности навигации, в том числе «базовой», под которой авторы понимают точность навигации при использовании сигналов орбитальной группировки (ОГ) ГЛОНАСС без привлечения дополнительных средств и альтернативных источников высокоточной навигационной информации. Под ОГ ГЛОНАСС далее будем понимать не только средневысотный сегмент (СВС), но и перспективные его дополнения, такие как высокоорбитальный космический комплекс (ВКК), а также геостационарные и низкоорбитальные дополнения. Действующим общепринятым критерием оценки точностных характеристик ГНСС на текущий момент принято считать эквивалентную погрешность псевдодальности (ЭППД), обусловленную только космическим сегментом, или SISRE (signal-in-space range error) [1]. Несмотря на свое определение в скалярной форме, данный критерий агрегирует целый ряд свойств и характеристик навигационной системы, которые будут результатом ее штатного функционирования как интегрированной системы, включающей не только орбитальный сегмент в виде навигационных космических аппаратов (КА), но и ряд дополнений. В настоящее время уровень развития ГЛОНАСС таков, что к ухудшению SISRE прежде всего приводит рост ошибок эфемерид, оценок параметров вращения Земли и ухода часов спутника относительно системной шкалы, а также наличие различных неформулярных погрешностей в бортовой аппаратуре. Таким образом, стремление улучшить эксплуатируемую ГНСС требует разносторонней «работы» с целым рядом различных источников ошибок, которые выступают следствием влияния на навигационную систему неконтролируемых факторов различной физической природы. Для этого предполагается совершенствование технологических процедур штатного функционирования ГЛОНАСС, задачей которого является вовлечение современных и перспективных бортовых и наземных аппаратных средств с целью повышения точности эфемерид и формирования эфемеридно-временной и частотно-временных поправок на борту каждого навигационного КА (НКА) ОГ, которые бы обеспечивали наилучший показатель SISRE в оперативном режиме и сохранение его на приемлемом уровне в режиме автономного функционирования, а также более высокую точность передаваемых в навигационном кадре потребителю эфемерид и поправок к бортовым шкалам времени и в конечном итоге наилучшую точность формируемого на Земле навигационного решения. Кроме того, в силу двойного назначения отечественной навигационной системы, немаловажной ее характеристикой был и остается обеспечиваемый уровень точности навигации при функционировании космического сегмента ГЛОНАСС в автономном режиме, под которым понимается полное отсутствие загрузки готовых высокоточных данных с наземного комплекса управления (НКУ), и резервирование на борту НКА основных с точки зрения поддержания работоспособности ОГ, но выполняемых силами НКУ процессов.

Подводя итог сказанному, можно констатировать актуальность решения задач, направленных на улучшение характеристик ГЛОНАСС, а именно: достижение более высокого уровня точности прогнозирования и/или определения в процессе штатного и нештатного (т.е. без загрузки данных с наземного комплекса управления) функционирования НКА параметров – данных, влияющих на систему в целом. К числу таких параметров относятся:

– эфемериды НКА ГЛОНАСС в инерциальной системе координат на произвольно заданном отрезке времени;

– значения параметров вращения Земли (смещение полюса относительно его среднего положения на эпоху и неравномерность суточного вращения Земли) и их эволюция;

– уходы бортовых шкал времени относительно шкалы времени системы и относительно друг друга;

– значения выносов фазовых центров антенн во всех используемых частотных диапазонах (*S, L*);

– задержки в бортовой аппаратуре на различных частотах и по каждой литере.

1. Концепция и способы решения рассмотренных задач. Поставленную во Введении задачу предлагается решать поэтапно, декомпозируя ее на отдельные частные задачи, для решения каждой из которых необходимо формулировать индивидуальный подход, опирающийся как на разработку соответствующих методов и алгоритмов, так и на выбор средств и технологий, ориентированных на совершенствование той или иной характеристики системы. Использование такого подхода ожидаемо приведет к созданию новых технологическим циклов, алгоритмов и результатов применения бортовых и наземных аппаратных средств на их основе. Сформулированную концепцию решения поставленной задачи совершенствования характеристик ГЛОНАСС удобно интерпретировать с помощью функциональной схемы, включающей последовательность определенных шагов (рис. 1). Данная схема отражает процесс совершенствования конкретных характеристик ГЛОНАСС на базе исследований и разработок, начиная с формирования «банка» располагаемых ресурсов и возможностей.

В вопросе оценки ресурсов для решения поставленной задачи авторами основное внимание уделяется действующим и перспективным образцам аппаратных средств, в первую очередь тем, которые в перспективе будут использованы в составе бортовых средств НКА существующей ОГ ГЛОНАСС и ее возможных дополнений: новые бортовые часы на водородном стандарте, беззапросная аппаратура межспутниковых измерений (БАМИ), БАМИ нового поколения (БАМИ НП), Межспутниковая лазерная навигационно-связная система (МЛНСС), МЛНСС нового поколения (МЛНСС НП), бортовые беззапросные квантово-оптические системы (ББКОС), наземные станции контроля и управления (НСКУ) и пр. Кроме этого, новые возможности, по мнению авторов, могут возникнуть в результате привлечения альтернативных систем и средств, не входящих в структуру ГЛОНАСС, а именно наземных квантово-оптических систем и радиоинтерферометров со сверхдлинной базой (РСДБ). Заметим, что все перечисленные выше средства используют информационные технологии, не реализованные на данный момент в штатных технологических циклах ГЛОНАСС. Как уже говорилось выше, каждое из перечисленных средств и сопутствующая его применению технология должны быть направлены на совершенствование конкретной характеристики (или нескольких характеристик) системы, т.е. в конечном итоге эффективность предлагаемой концепции будет определяться достигнутым целевым уровнем результатов. На рис. 1 эти уровни символически обозначены X и Y; при этом X – уровень соответствующей характеристики в оперативном режиме функционирования, а Y – в режиме без поддержки НКА средствами НКУ. Иными словами, на этой функциональной схеме приведен перечень характеристик ГЛОНАСС, подлежащих улучшению, а также подчеркивается необходимость такого улучшения в оперативном и автономном (т.е. без поддержки НКУ) режимах. Рассмотрим далее ключевые особенности подхода к достижению нового уровня характеристик.

2. Ошибки эфемерид НКА. В результате использования разрабатываемой авторами информационной технологии предполагается совершенствование процедур штатного и формирование процедур нештатного функционирования орбитальной группировки ГЛОНАСС, следствием чего будет снижение погрешности вычисляемых на борту эфемерид. Такой результат может быть достигнут за счет усовершенствования соответствующего программного обеспечения и привлечения располагаемых ГЛОНАСС бортовых аппаратных средств межспутниковых измерений, применяемых в интересах повышения точности эфемерид НКА в отсутствие готовых пакетов данных. При этом предлагается совмещение технологий высокоточного прогнозирования и уточнения эфемерид на борту НКА в рамках единой технологической цепочки, где для уточнения эфемерид используются современные и перспективные аппаратные средства радиотехнических и оптических межспутниковых измерений, имеющие низкое значение среднеквадратического отклонения (СКО) шума измерений. Заметим, что при подобном подходе существует ряд технических проблем, устранение которых потребует дополнительных мероприятий, в частности обработки межспутниковых измерений между НКА ГЛОНАСС средневысотного сегмента и перспективных дополнениях системы, устранения сопутствую-

РИСУНКИ

Функциональная диаграмма совершенствования ГЛОНАСС

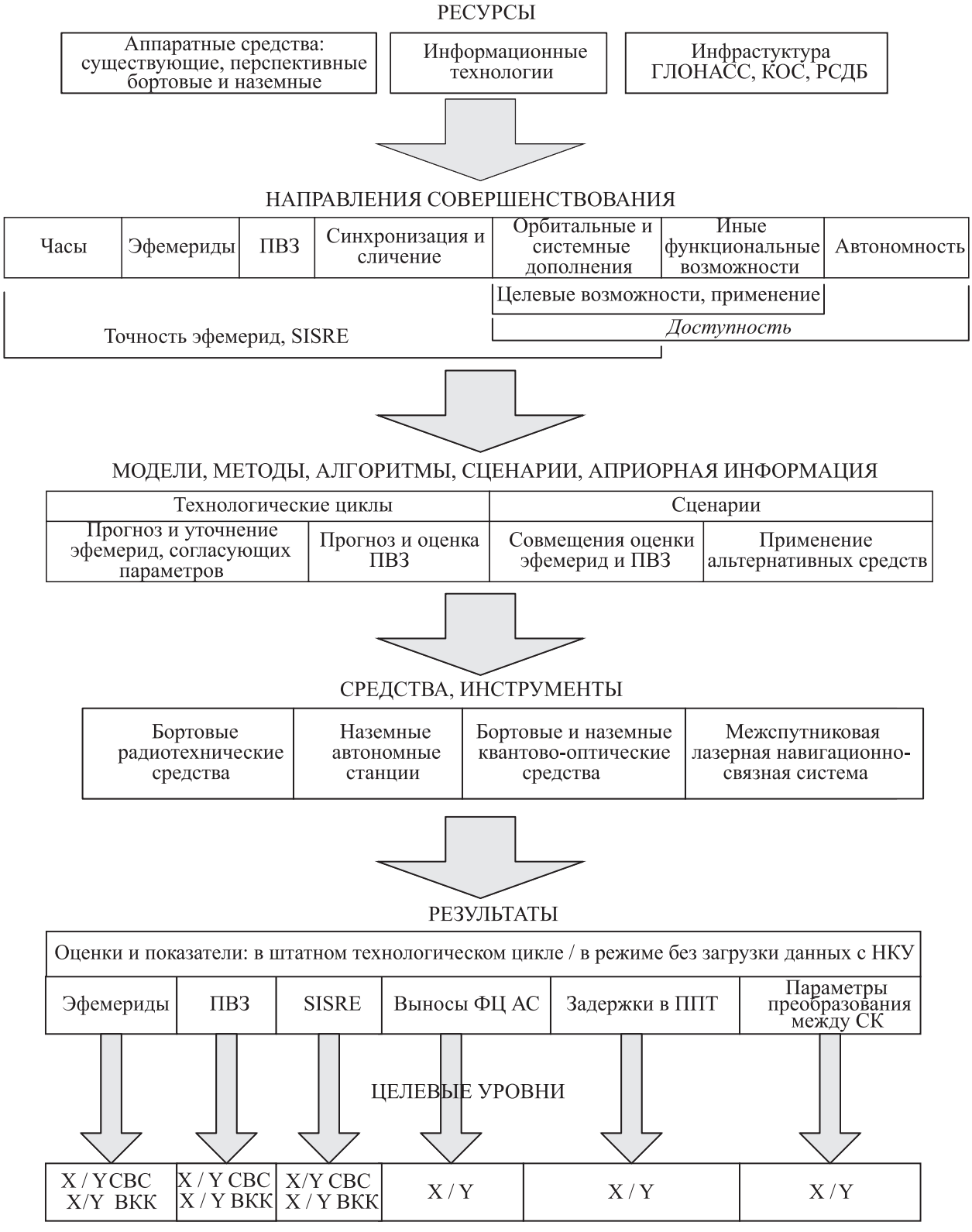


Рис. 1. Функциональная схема процессов совершенствования характеристик ГЛОНАСС.

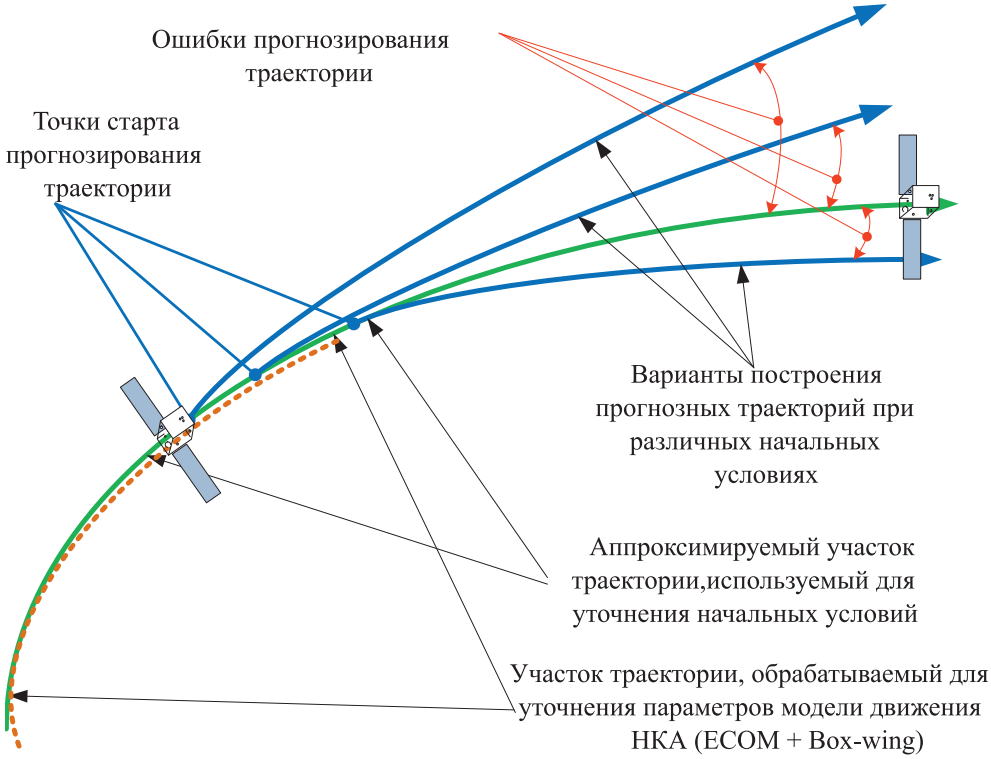


Рис. 2. Условна схема организации нового технологического цикла на борту НКА ГЛОНАСС.

Таблица 1. Модели, используемые для расчета возмущающих ускорений

Модель	Тип модели / Вариант реализации	Оптимизация под бортовой алгоритм
Геопотенциал Земли	В сферических функциях, коэффициенты EGM2008	Ограничение на количество гармоник в соответствии с высотой орбиты НКА, для средневысотного сегмента это составляет 12 членов симметричного поля, для высокоорбитальных дополнений – 6
Приливы в твердом теле	Включены, реализация согласно IERS conv.2010	–
Океанические приливы	Не учитываются	
Притяжение третьих тел	Модель центрального поля, учитываются Луна и Солнце. Эфемериды Луны и Солнца импортируются из каталога de421	Усеченная версия небесного каталога, содержащая данные только на полгода вперед. Периодичность их обновления вполне может быть не чаще раза в месяц
Солнечное давление	Классическая модель давления солнечного света	Уточнение модели box-wing + ecom
Альбедо	Классическая модель с разбиением на 30 поверхностей	Box-wing
Релятивистские эффекты	Не учитываются	

щих технических и технологических проблем. С учетом необходимости такой доработки предлагается реализовать технологический цикл функционирования ОГ в рамках двухэтапной процедуры. На первом этапе формируется высокоточный прогноз, алгоритм которого представляет самостоятельный результат работы авторов, а результаты прогноза используются на втором этапе для обработки измерений дальностей между НКА с учетом необходимых ограничений. Особенности моделей, применяемых для прогнозирования, приведены в табл. 1 [2].

Повышение точности прогнозирования достигается путем аппроксимации апостериорной траектории с помощью метода наименьших квадратов и оценки начальных условий движения и коэффициентов модели учета солнечного давления (рис. 2) [3]. Типовые результаты эволю-

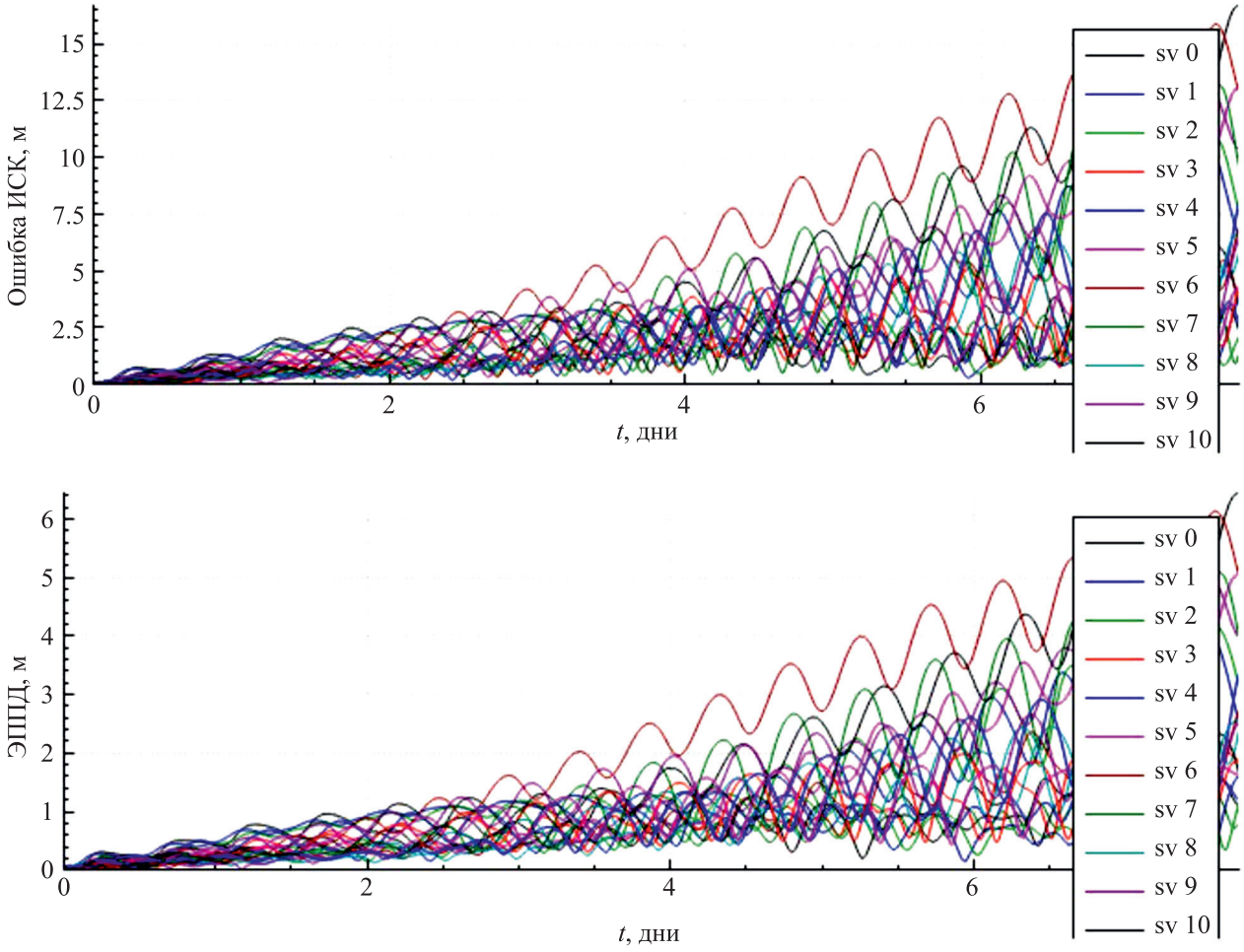


Рис. 3. Ошибки прогнозирования координат НКА ГЛОНАСС.

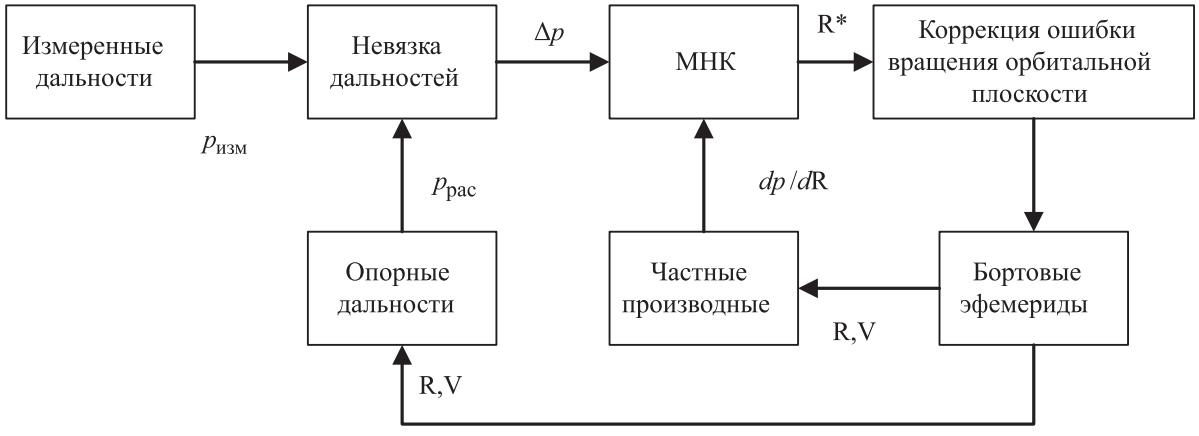


Рис. 4. Функциональная схема процесса уточнения эфемерид.

ции погрешности прогнозирования представлены на рис. 3 (здесь и далее sv – номер НКА в созвездии ОГ).

Процедура дальнейшего уточнения эфемерид НКА основана на использовании межспутниковых измерений. Результаты измерений и соответствующая эфемеридно-временная информация транслируются между НКА для обработки с применением метода наименьших квадратов [4, 5], обрабатывающего невязки Δp между фактическими измерениями дальностей $p_{изм}$ и их расчетными аналогами $p_{рас}$. Функциональная схема процедуры уточнения эфемерид приведена на рис. 4, типовые результаты по эволюции погрешности уточняемых эфемерид

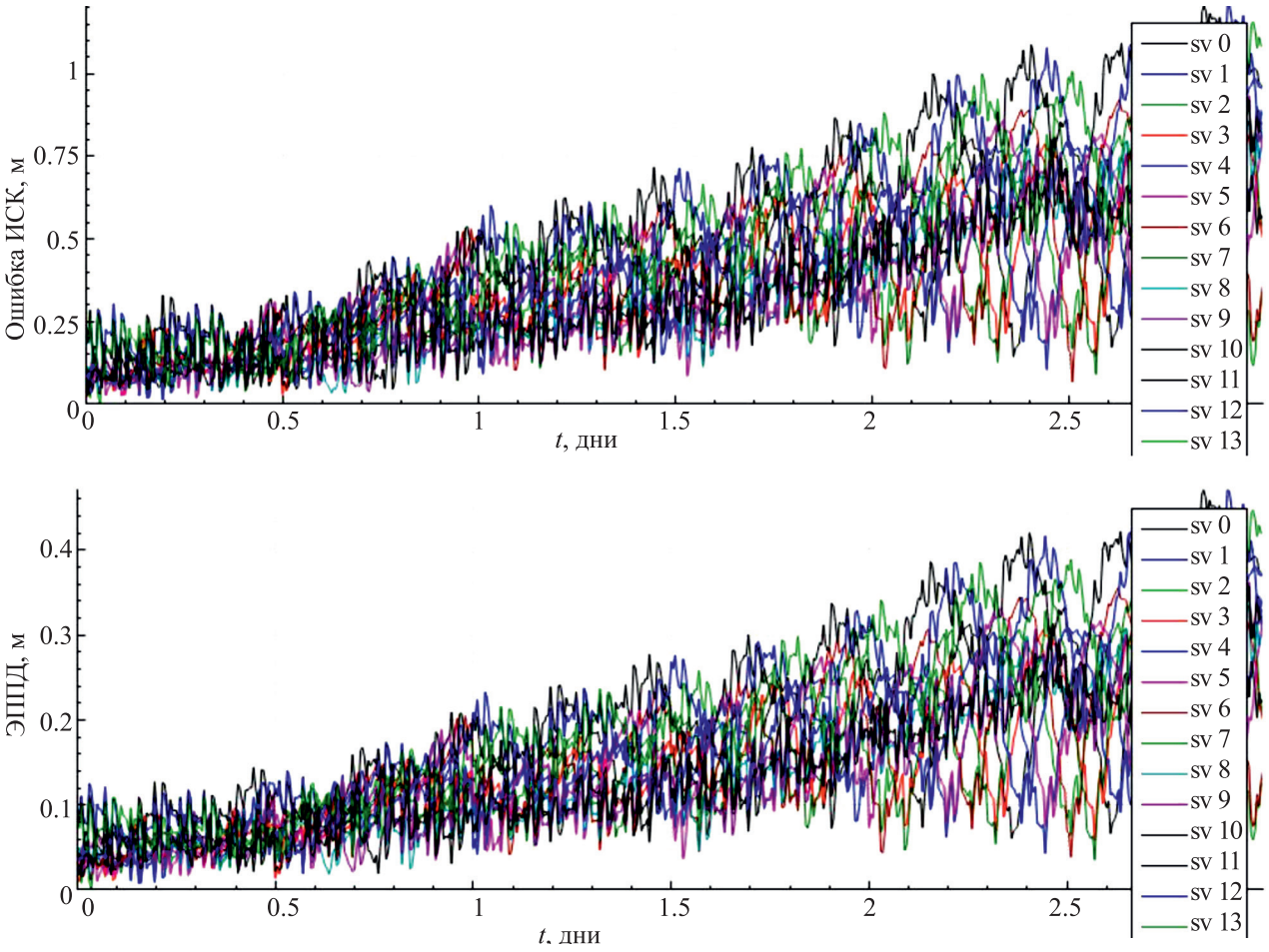


Рис. 5. Эволюция погрешностей определения эфемерид (абсолютная ошибка, сверху) и соответствующая им ЭППД (снизу).

НКА в режиме без загрузки ЭВИ – на рис. 5. Более подробно о данной технологии рассказывается в работе [6].

3. Проблема неопределенной эволюции параметров вращения Земли (ПВЗ). Рассмотрим теперь проблему неопределенной эволюции ПВЗ и влияние этой неопределенности на точность передаваемых потребителю эфемерид, итоговое значение ЭППД, а также точность прогнозирования эфемерид НКА при моделировании его движения в инерциальной системе координат. Современные и перспективные способы определения данных параметров имеют недостатки с точки зрения оперативности и точности предоставления этих данных в ГЛОНАСС от других системных служб, а от ГЛОНАСС – через переводимые в ПЗ90 эфемериды – к потребителю. Заметим, что используемый в сегодняшней технологической цепочке эксплуатации НКА ГЛОНАСС механизм регулярной загрузки данных о фактической эволюции ПВЗ и их прогнозе на будущие интервалы не только требует выделения на решение данной задачи значительных ресурсов, но и частого повторения этих процедур вследствие значительной скорости и непредсказуемости эволюции, в первую очередь dUT, препятствуя при этом функционированию НКА в независимом от данных с НКУ режиме. С целью преодоления этой трудности предлагается развиваемая авторами концепция совершенствования процедуры штатного и формирования процедуры нештатного функционирования ОГ ГЛОНАСС. Эта концепция включает создание самостоятельного набора алгоритмов, обеспечивающих повышение точности эфемерид на борту НКА в связанной с Землей системой координат за счет модернизации программных средств, привлечения располагаемых ГЛОНАСС бортовых аппаратных средств и сети специальных наземных станций. В итоге развиваемая концепция предполагает реализацию технологии высокоточного прогнозирования и уточнения парамет-

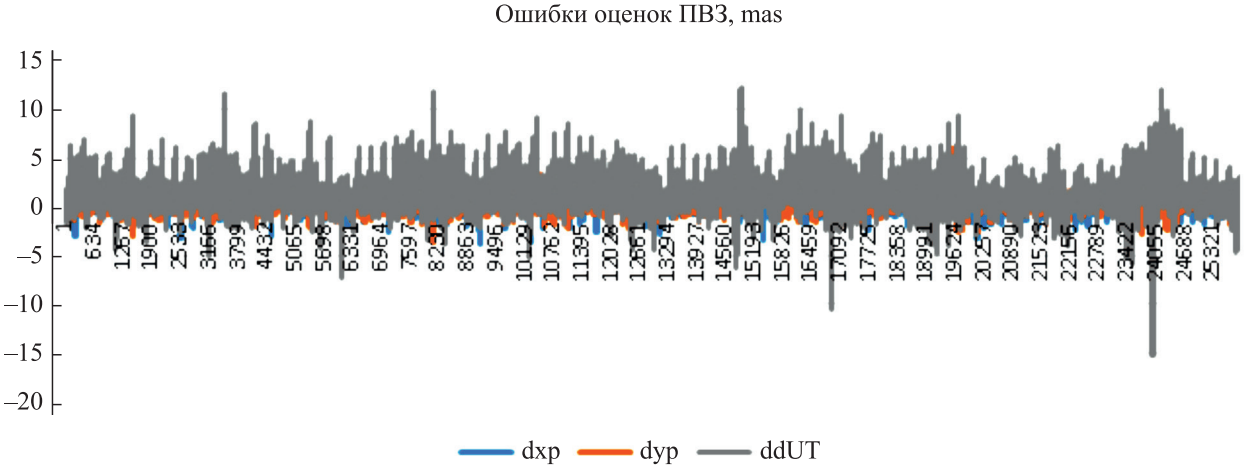


Рис. 6. Ошибки оценок ПВЗ, формируемые с помощью предлагаемой процедуры на интервале 90 дней.

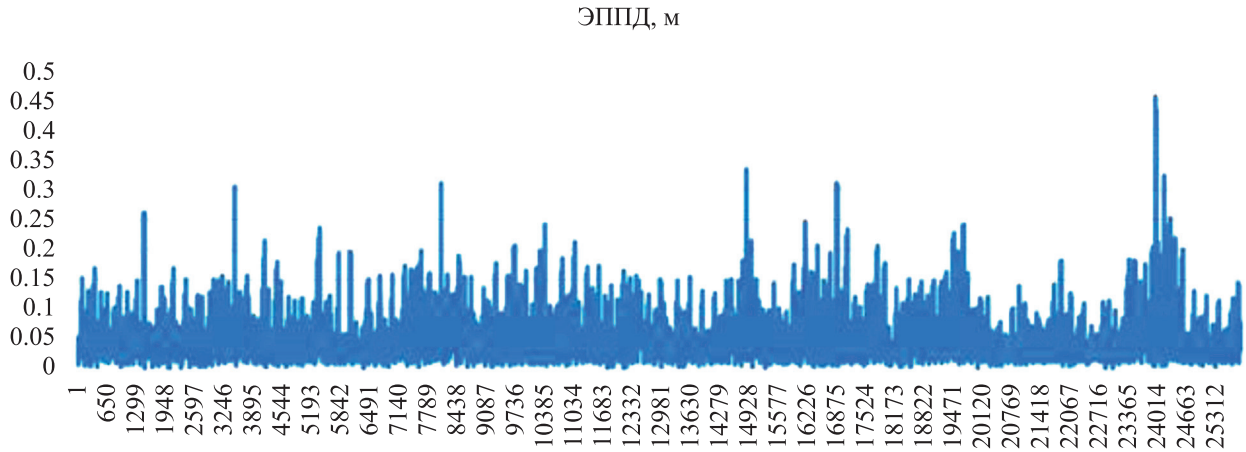


Рис. 7. Соответствующая ошибкам оценок ПВЗ эволюция ЭППД, м.

Таблица 2. Погрешности прогнозирования ПВЗ

Тип модели	Параметр	Ошибки прогнозирования (mas для x_p и y_p, ms для dUT) по уровню 0.95 для различных дней прогноза			
		20	30	60	90
ГЛОНАСС	x_p	26 (~520)	34 (~520)	54 (770–840)	63 (770–800)
	y_p	17 (490–510)	23 (490–500)	48 (480–520)	70 (730)
	dUT	12 (320–350)	15 (320–340)	27.5 (310–320)	40 (300–320)
NGA	x_p	31.5 (~590)	38 (~610)	51.5 (~710. 750–770. 810–850)	61.5 (~760)
	y_p	22 (490–500)	30 (470–510)	51 (620–660)	65 (690)
	dUT	12 (310–340)	15 (310–340)	27.5 (310-320)	40 (300–320)

ров вращения Земли на борту НКА. При этом прогнозирование осуществляется на основе использования нескольких моделей аппроксимации эволюции ПВЗ, среди которых выбирается лучшая по результатам многолетних наблюдений. Кроме того, авторами применена процедура оптимизации, обеспечивающая подбор интервала аппроксимации МНК по выбранной модели исходя из требуемых условий прогнозирования. Все это позволило получить точность прогнозирования, приведенную в табл. 2 [7].

В ячейках таблицы рядом с вычисленным результатом – ошибкой прогнозирования по уровню вероятности 0.95 в скобках приведены оптимальные в смысле достигаемой точности длины интервалов аппроксимации.

Процедуры уточнения ПВЗ на борту НКА базируются на применении аппаратуры для формирования беззапросных и запросных измерений дальностей до наземных станций. В осно-

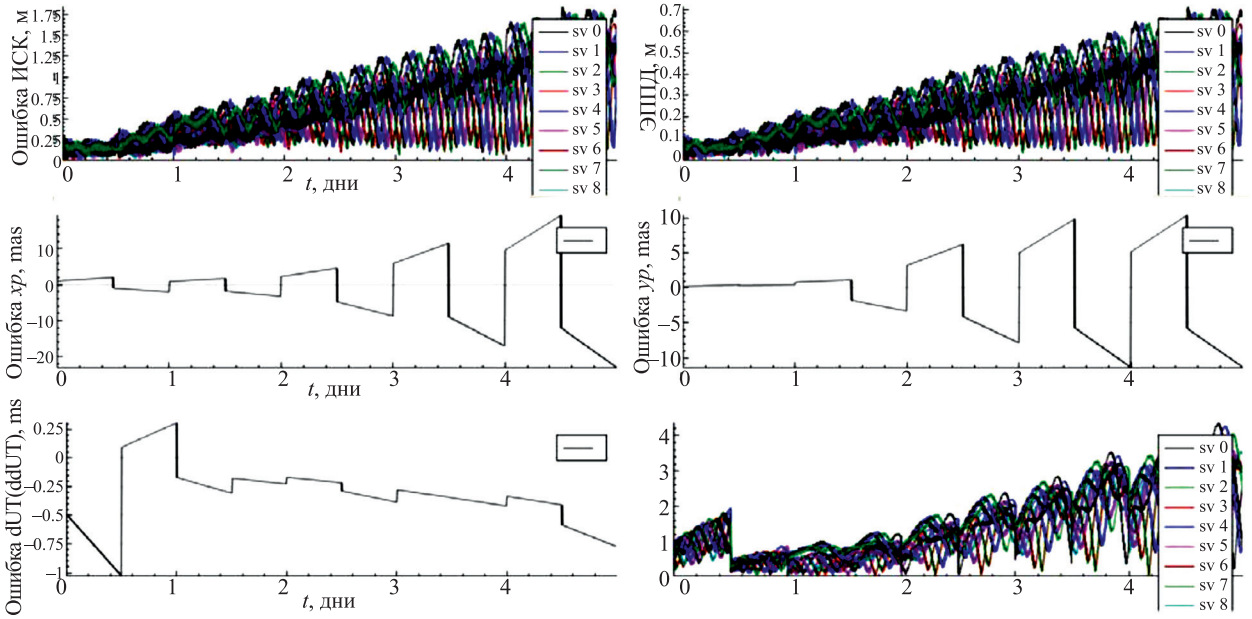


Рис. 8. Ошибки эфемерид, соответствующая им ЭППД и ошибки ПВЗ, получаемые в рамках реализации единого процесса планирования, формирования и обработки измерений на борту НКА.

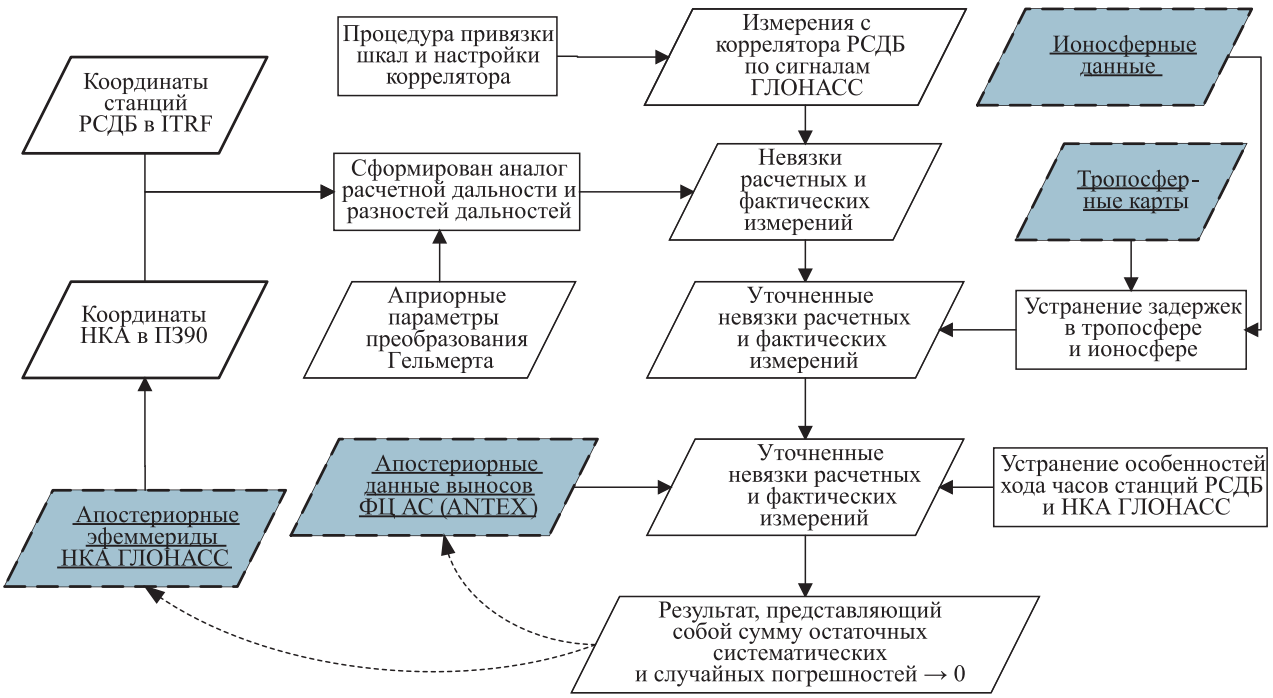


Рис. 9. Функциональная схема применения альтернативных технических средств и систем в интересах совершенствования ГЛОНАСС.

ве процедуры лежит использование уравнения для дальности, которое дифференцируется по компонентам ПВЗ [8, 9]:

$$\rho_{k,l}^{i,j} = f\left(\mathbf{X}_{\text{н.с}}^{j\,ITRF}(t_l), \mathbf{X}_{\text{НКА}}^{j\,GCRS}(t_k)\right),$$

где $\mathbf{X}_{\text{НКА}}^{j\,GCRS}(t_k)$ – координаты j-го НКА в инерциальной системе координат (СК) GCRS в момент t_k получения сигнала БАМИ, $\mathbf{X}_{\text{н.с}}^{j\,ITRF}(t_l)$ – координаты i-й наземной станции в земной СК ITRF в момент t_l отправки сигнала. Вид итоговых частных производных и другие подроб-

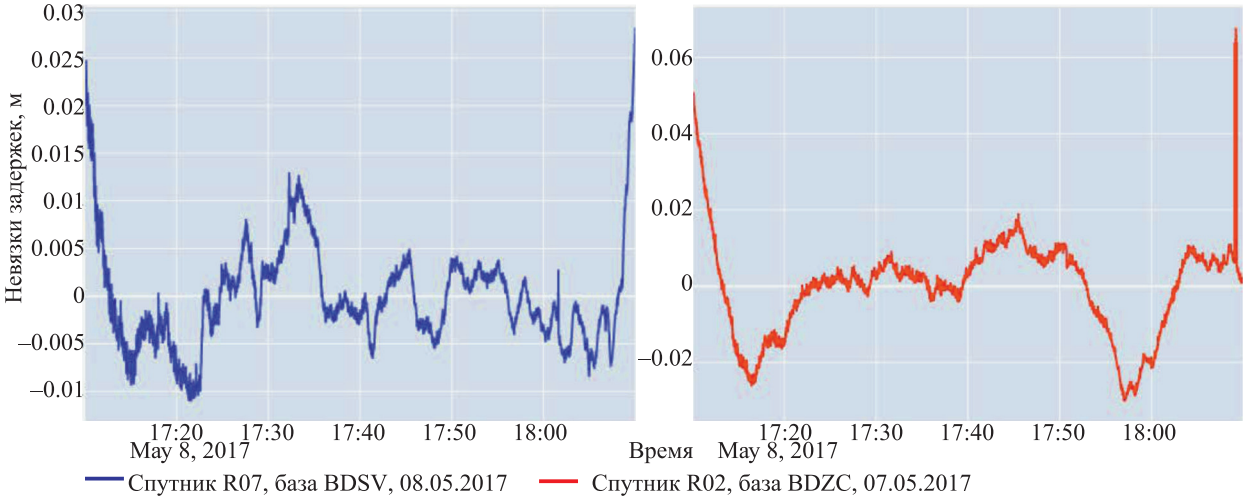


Рис. 10. Погрешность сличения опорных и фактических измерений разностей дальностей между станциями РСДБ и НКА.

ности в части реализации процедуры с применением метода наименьших квадратов можно найти в [9]. Типовые зависимости формируемых с использованием обсуждаемых алгоритмов результаты представлены на рис. 6, 7.

4. Совмещение задач уточнения эфемерид и ПВЗ на борту НКА ГЛОНАСС. Рассмотрим проблему совмещения процедур прогнозирования и уточнения эфемерид НКА в инерциальном пространстве с процедурой прогнозирования и уточнения ПВЗ в интересах, во-первых, повышения точности транслируемых эфемерид и снижения величины SISRE ГЛОНАСС в штатном режиме и, во-вторых, реализации режима функционирования современных и перспективных ОГ ГЛОНАСС без загрузки данных с наземного комплекса управления. Предлагаемая процедура включает два независимых параллельно выполняемых технологических цикла. В первом происходит регулярное решение задач по формированию высокоточных эфемерид в соответствии с методикой, упомянутой в разд. 2. Во втором цикле применяются прогнозные значения эфемерид, подвергаемые периодической (между итерациями обработки измерений до наземных станций и формированием оценок ПВЗ) инициализации результатами первого цикла. В результате уточняются компоненты расширенного вектора состояния, включающего, помимо ПВЗ, погрешности знания эфемерид в орбитальной системе координат, представленные аппроксимирующей их моделью в виде гармонического выражения, которое позволяет преодолеть ненаблюдаемость ПВЗ и эфемерид НКА при одновременно оценивании. Эффективность предлагаемой концепции совмещения процедур прогнозирования и уточнения эфемерид НКА с точки зрения достигаемых характеристик точности продемонстрирована путем обработки измерений в совмещенном на борту процессе функционирования обоих технологических циклов, отработанном с использованием имитационного программно-математического комплекса, в котором применены реальные данные измерений, эфемерид и ПВЗ. Таким образом, показано, что итеративная задача одновременного уточнения эфемерид и ПВЗ имеет решение и обеспечивает высокоточные оценки как эфемерид в инерциальной СК, так и ПВЗ, т.е. позволяет таким образом снизить SISRE в условиях долговременного отсутствия закладок соответствующей информации с НКУ. Типовые результаты эволюции ошибок эфемерид и ПВЗ при одновременной оценке представлены на рис. 8.

5. Компенсация влияния прочих неконтролируемых факторов. Рассмотрим решение проблем, осложняющих реализацию описанных выше методик и алгоритмов. Речь идет о совокупности неконтролируемых факторов, влияющих на обработку различных типов измерений дальностей между НКА и НКА, а также между НКА и наземными станциями. В качестве основных факторов, вносящих систематические погрешности в измерения и тем самым препятствующих получению потребной точности оценок, генерируемых с помощью различных численных методов, рассмотрены:

– задержки в приемно-передающих трактах (ППТ) аппаратуры при передаче сигналов в разных диапазонах;

– погрешности определения выносов фазовых центров антенных систем (ФЦ АС);

– погрешности совмещения различных систем координат, которые могут применяться в ГНСС и других связанных с ними системах.

Решение обсуждаемой здесь задачи компенсации влияния перечисленных факторов на характеристики ГЛОНАСС опирается на дополнительные технические средства оснащения станций и НКА, осуществляющих взаимодействие друг с другом. Поскольку в текущий момент нет общепринятых методик и средств, используемых для определения задержек в ППТ и выносов ФЦ АС с высокой точностью, и не реализовано штатных технологических циклов по применению различных аппаратных средств в данных целях, авторами самостоятельно проделан выбор необходимых методов и средств, а также разработка методики оценки упомянутых погрешностей с их использованием. Предложена рекуррентная схема поэтапного уточнения выносов ФЦ АС и задержек в ППТ на основе обработки измерений фактических значений дальностей до станций и между НКА с привлечением высокоточной апостериорной эфемеридно-временной информации (ЭВИ) и частотно-временных поправок (ЧВП) и последующим применением полученных оценок обсуждаемых параметров во всех других технологических циклах функционирования ОГ ГЛОНАСС, описанных в разд. 2–4. В качестве дополнительного варианта решения поставленной в данном разделе задачи рассмотрено привлечение дополнительной инфраструктуры альтернативных средств и систем. Речь идет о более широком привлечении наземных и бортовых квантово-оптических систем (КОС) и отечественных РСДБ. Суть предлагаемого подхода состоит в разработке и реализации методики проведения и обработки измерений дальностей между НКА и наземными станциями КОС и РСДБ в интересах оценки следующих параметров: выносов ФЦ АС, уходов и флуктуаций бортовых шкал времени НКА, задержки приема и передачи сигналов в бортовых радиотехнических трактах относительно бортовых синхронизирующих устройств (БСУ) и относительно КОС, рассогласования системы координат ГЛОНАСС и других связанных с Землей систем координат. Такая обработка выполняется на основе использования функциональной схемы, приведенной на рис. 9. Отработка предлагаемой схемы с помощью программно-математического обеспечения и данных реальных измерений, апостериорных эфемерид и другой необходимой информации (выносы ФЦ АС из файлов ANTEX, ионосферные и тропосферные карты, координаты станций в земной связанной системе координат ITRF и пр.) позволила получить субсантиметровую точность сличения данных (рис. 10), что обеспечивает решение обратной задачи по оценке выносов и задержек с сохранением погрешности на таком же уровне.

Заключение. Описан развитый авторами подход к решению задачи совершенствования характеристик ГЛОНАСС, основанный на применении различных информационных технологий, аппаратных средств и новых технологических циклов функционирования ОГ НКА. Подход включает взаимосвязанные этапы, каждый из которых посвящен совершенствованию какой-либо характеристике системы, имеет свою оригинальную концепцию и реализуется с использованием соответствующих методов и алгоритмов. Отработка развиваемого подхода с целью его дальнейшей реализации и анализ эффективности решения поставленных задач осуществлялись с помощью специального программного макета. Получены предварительные результаты экспериментов, определяющие возможность достижения показателей точности и доступности на уровне, обеспечивающем ГЛОНАСС лидирующую позицию среди конкурентных ГНСС. Под этим понимаются следующие характеристики: по показателю SISRE менее 1 м в оперативном режиме ОГ, менее 1.5 м в течение месячного функционирования без загрузки данных с НКУ, менее 1 м по ошибкам эфемерид в аналогичном режиме, ошибки единицы mas в определении ПВЗ по уровню 0.95, сантиметровые ошибки выносов ФЦ и эквивалентов задержек приема и передачи сигналов в бортовых трактах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. GLONASS Information Analytics Center. https://glonass-iac.ru/, 10.12.2023.
2. *Kruzhkov D.M., Pasynkov V.V.* High-Accuracy Navigation Based on Informational GNSS Technologies. II GLONASS – Information Technologies and Navigation Tasks Solving Algorithms. M.: Moscow Aviation Institute, 2021.

3. *Bingbing D., Hugentobler U., Hofacker M., Selmke I.* Improving Solar Radiation Pressure Modeling For GLONASS Satellites // J. Geodesy. 2020. V. 94. № 8. P. 1–14.
4. *Grechkoseev A.K.* Study of Observability of Motion of an Orbital Group of Navigation Space System Using Intersatellite Range Measurements. I // Computer and Systems Sciences International. 2011. V. 50. № 2. P. 293–308.
5. *Grechkoseev A.K.* Study of Observability of Motion of an Orbital Group of Navigation Space System Using Intersatellite Range Measurements. II // Computer and Systems Sciences International. 2011. V. 50. № 3. P. 472–482.
6. *Krasilshchikov M.N., Kruzhkov D.M., M.N., Pasynkov V.V.* On The Implementation of Information Technology for Refining the Ephemerides of GLONASS Spacecraft Based on the Use of Advanced Intersatellite Measurment Hardware // J. Computer and Systems Sciences International. 2023. №5. P. 147–159
7. *Krasil'shchikov M.N., Kruzhkov D.M., Martynov E.A.* Predicting the Parameters of the Orientation of the Earth in Problems of Navigation Taking into Account the Phenomenon of the Development of Irregularity in the Earth's Rotation // Cosmic Research. 2023. V. 61. № 4. P. 324–332.
8. *Grechkoseev A.K., Krasil'shchikov M. N., Kruzhkov D.M., Mararescul T.A.* Refining the Earth Orientation Parameters Onboard Spacecraft Concept and Information Technologies // J. Computer and Systems Sciences International. 2020. V. 59. № 4. P. 598–608.
9. *Krasil'shchikov M.N., Kruzhkov D.M.* On the Issue of Autonomous Refining of the Earth Orientation Parameters Onboard Spacecraft. Analysis of the Possibilities of Developed Information Technology // Cosmic Research. 2021. V. 59. № 5. P. 357–365.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 3, С. 169–182

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 62.40

ОПЕРАТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БЕСПИЛОТНЫМ ВЕРТОЛЕТОМ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЭКСТРЕННОЙ БЕЗОПАСНОЙ ПОСАДКИ НА НЕОБОРУДОВАННУЮ ПЛОЩАДКУ

© 2024 г. В. Н. Евдокименков[1], П. Г. Ермаков[1, *], А. А. Гоголев[1]

[1]Московский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

**e-mail: pavel-ermakov-1998@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.03.2024 г.
После доработки 26.03.2024 г.
Принята к публикации 13.05. 2024 г.

Рассматривается задача обеспечения экстренной посадки беспилотного вертолета, совершающего полет в некотором районе целевого применения. Предложен двухэтапный алгоритм поиска площадки, пригодной для посадки с учетом набора требований. На первом этапе с помощью цифровой карты местности, размещенной на борту беспилотного вертолета, рассчитывается маршрут обхода площадок, потенциально пригодных для посадки с точки зрения особенностей рельефа поверхности. Формирование маршрута достигнуто путем последовательного решения статических задач оптимизации с целью минимизации средних потерь, возникающих при перелете от одной посадочной площадки до другой. На втором этапе, реализуемом непосредственно в процессе движения по рассчитанному маршруту, осуществляется окончательный выбор посадочной площадки на основе обработки данных георадара для подтверждения требований по плотности грунта в месте посадки. Для оценки пригодности посадочной площадки требованию плотности грунта использован нейросетевой классификатор на базе двухслойного персептрона.

Рассмотрен пример, иллюстрирующий работу предложенного алгоритма, как в условиях вычислительного эксперимента, так и при выполнении серии летных экспериментов.

Ключевые слова: необорудованный вертодром, цифровая карта местности, оптимальный маршрут, двухслойный перцептрон

DOI: 10.31857/S0002338824030196 **EDN:** UPFHMT

OPERATIONAL CONTROL OF AN UNMANNED AERIAL VEHICLE HELICOPTER TYPE TO ENSURE EMERGENCY SAFE LANDING ON AN UNEQUIPPED PAD

V. N. Evdokimenkov[a], A. A. Gogolev[a], P. G. Ermakov[a, *]

[a]Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

**E-mail: pave-ermakov-1998@mail.ru*

The problem of providing an emergency landing of an unmanned aerial vehicle (UAV) helicopter type flying in a certain area of the target application is considered. The two-stage algorithm for finding an unprepared landing pad taking into account a set of requirements is proposed. At the first stage, using a digital elevation map placed on an UAV helicopter type board a route for overflying unprepared landing pads in terms of surface topography is calculated. A route formation is achieved by sequentially solving static optimization problems in order to minimize the average losses that occur when an UAV helicopter type flying from one an unprepared landing pad to another. At the second stage, which is implemented directly during an UAV's helicopter type movement along the calculated route, the final choose of an unprepared landing pad is made based on the processing of ground penetrating radar data. A neural network classifier based on a two-layer perceptron is used to assess the suitability of an unprepared landing pad to the soil density requirement. An example that illustrates the operation of the proposed algorithm both under the conditions of a computational experiment and during a series of flight experiments is considered.

Keywords: unprepared landing pad, digital elevation map, optimal route, two-layer perceptron

Введение. В настоящее время беспилотные вертолеты (БВ) с взлетной массой до 500 кг, использующие в качестве источника энергии аккумуляторную батарею или двигатель внутреннего сгорания, все чаще применяются для решения гражданских и военных задач. Гражданские БВ в основном ориентированы на доставку грузов в удаленные районы (в том числе районы арктической зоны), помощь людям, терпящим бедствие в труднодоступной местности, обследование инфраструктурных объектов (линии электропередач, нефтегазопроводы), охрану площадной территории. В области обороны БВ привлекаются для выполнения разведывательно-ударных задач.

Примерами наиболее удачных БВ, которые уже успели зарекомендовать себя с лучшей стороны, являются [1]:

– БАС-200, обладающий максимальной взлетной массой 200 кг, дальностью полета до 430 км и максимальной скоростью до 160 км/ч;

– VRT300, имеющий максимальную взлетную массу 300 кг; радиус действия 150 км и максимальную скорость 180 км/ч;

– MQ-8 Fire Scout, обладающий максимальной скоростью, равной 205 км/ч, и дальностью полета 177 км.

Несмотря на очевидные преимущества БВ по сравнению с беспилотными летательными аппаратами самолетного типа, использующими горизонтальный способ взлета и посадки, их широкое практическое применение требует решения ряда проблем, одной из которых является обеспечение экстренной посадки на неподготовленную площадку. Необходимость экстренной посадки на неподготовленную площадку возникает, например, в условиях нештатных режимов работы бортового оборудования, развитие которых способно привести к катастрофе и потере БВ. В свою очередь, обеспечение экстренной посадки на неподготовленную площадку требует оперативного формирования на борту БВ оптимального (в смысле некоторого критерия) маршрута движения БВ с целью поиска площадки, пригодной для посадки.

В соответствии с требованиями международной организации гражданской авиации (ИКАО) площадка, пригодная для безопасной посадки БВ, представляет собой квадратную область со стороной, равной $1.5D \times 1.5D$, где D – диаметр несущего винта, которая удовлетворяет комплексу следующих требований:

– угол наклона поверхности посадочной площадки не должен превышать 10° (так называемая зона FATO);

– неровности на поверхности посадочной площадки не должны превышать 100 мм под трехметровой рейкой, укладываемой в зоне прохода опор БВ;

– за пределами посадочной площадки на удалении от ее края, равном $1.5D$, не должно быть элементов рельефа с высотой, превышающей 1 м;

– прочность грунта в границах посадочной площадки должна превышать 3 кгс/см^2.

Ниже рассматривается решение задачи оперативного планирования маршрута БВ для обеспечения экстренной безопасной посадки на необорудованную площадку. В рамках предложенного решения для проверки первых трех сформулированных требований используется цифровая карта местности (ЦКМ), на основе которой формируется маршрут обхода ячеек с учетом их предпочтительности. Контроль соответствия посадочной площадки требованию прочности грунта проводится непосредственно в процессе движения БВ по сформированному маршруту путем оперативной обработки данных георадара, размещенного на борту БВ.

1. Оптимальное планирование маршрута облета необорудованных площадок на основе ЦКМ. Рассматривается БВ, который выполняет полет в некотором районе. Предполагается, что в процессе движения БВ возникает необходимость его посадки в течение времени, не превышающего заданного значения $T_{\text{зад}}$, например при возникновении нештатных режимов работы бортового оборудования, развитие которых способно привести к катастрофе и потере БВ. Исходя из времени $T_{\text{зад}}$, учитывая максимальную скорость движения, определяется квадрат, центр которого совпадает с текущим положением БВ. Размер этого квадрата выбирается так, чтобы БВ был способен провести его облет в течение заданного времени $T_{\text{зад}}$.

Следуя сформулированным выше требованиям, представим квадратную область, в пределах которой должна быть обеспечена посадка БВ на необорудованную площадку, в виде сетки с квадратными ячейками. Стороны ячеек в соответствии с требованиями ИКАО выбираются равными $1.5D$, где D – диаметр несущего винта БВ (рис. 1).

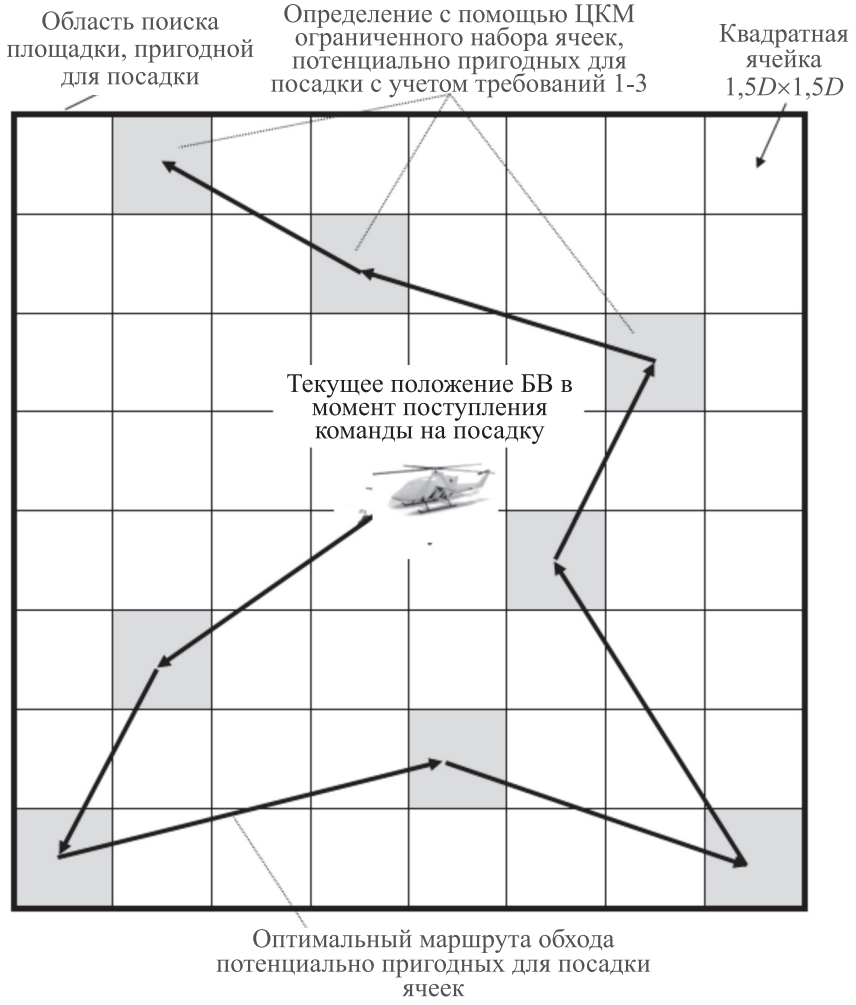


Рис. 1. Иллюстрация задачи построения маршрута движения БВ для обеспечения экстренной посадки.

Ниже приведен алгоритм, обеспечивающий формирование маршрута БВ для поиска посадочной площадки путем проверки трех из сформулированных выше требований на основе данных ЦКМ. Работа алгоритма начинается с оценивания в границах каждой квадратной ячейки угла наклона поверхности. Для этого на каждой стороне квадратной ячейки выбирается конечное число точек, обозначаемых как $A_1, A_2, ..., A_{sz-1}, B_1, B_2, ..., B_{sz-1}, C_1, C_2, ..., C_{sz-1}, D_1, D_2, ..., D_{sz-1}$, где $s_z = [1.5D/dscr]$, $dscr$ – шаг дискретизации ЦКМ. Оцениваются углы наклона отрезков, соединяющих точки, лежащие на противоположных сторонах, как показано на рис. 2.

Поскольку значения высот, представленных на ЦКМ, искажены присутствием случайных ошибок, для получения оценки угла наклона посадочной площадки в границах квадратной ячейки использован метод Монте-Карло, обеспечивающий генерацию реализаций $i = \overline{1, N}$ значений высот с учетом случайных ошибок ЦКМ. Каждая реализация $i = \overline{1, N}$ обеспечивает конкретный набор значений высот, представленных на ЦКМ, на основе которых с помощью метода наименьших квадратов (МНК) по полной выборке рассчитывается оценка α_i угла наклона посадочной площадки α_i из условия минимума квадратичного критерия:

$$\left(Y_i - F\left(\alpha_i\right)\right)^{\mathrm{T}} K^{-1}\left(Y_i - F\left(\alpha_i\right)\right) \to \min_{\alpha_i \in [0,\pi/2)},$$

где Y_i – вектор размера $2(sz+1) \times 1$, компоненты которого для конкретной реализации выражают перепады высот рельефа на границах отрезков, приведенных на рис. 2:

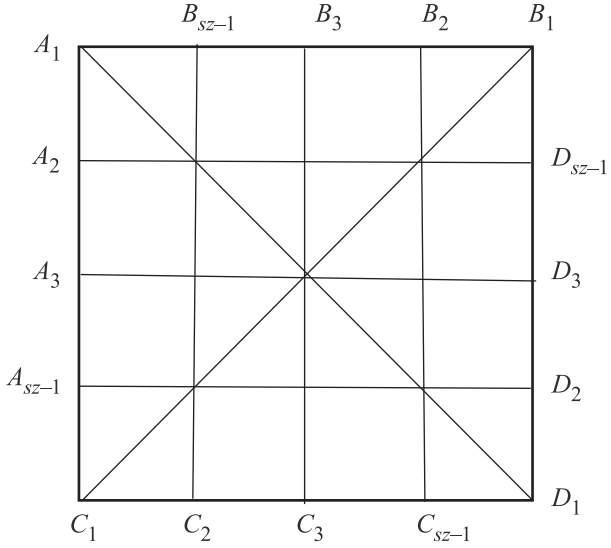


Рис. 2. Схема вычисления углов, используемых для оценки наклона посадочной площадки.

$$Y_i = \begin{pmatrix} \left|h^i_{A_1} - h^i_{D_1}\right| \\ \left|h^i_{B_1} - h^i_{C_1}\right| \\ \left|h^i_{A_2} - h^i_{D_{sz-1}}\right| \\ \cdots \\ \left|h^i_{A_{sz-1}} - h^i_{D_2}\right| \\ \left|h^i_{B_2} - h^i_{C_{sz-1}}\right| \\ \cdots \\ \left|h^i_{B_{sz-1}} - h^i_{C_2}\right| \end{pmatrix};$$

$F(\alpha_i)$ – нелинейная вектор-функция размера $2(sz+1)\times 1$, связывающая компоненты вектора Y_i с оцениваемым углом площадки:

$$F(\alpha_i) = \begin{pmatrix} 1.5D\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\alpha_i \\ 1.5D\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\alpha_i \\ 1.5D\,\mathrm{tg}\alpha_i \\ \cdots \\ 1.5D\,\mathrm{tg}\alpha_i \end{pmatrix};$$

K – ковариационная матрица ошибок высотной информации ЦКМ размера $2(sz+1)\times 2$. Эта матрица предполагается заданной и является характеристикой точности высотной информации, представленной на ЦКМ.

Известно [2], что оптимальная в смысле минимума вышеприведенного квадратичного критерия оценка α_i рассчитывается на основе выражения

$$\alpha_i = \left(H^{\mathrm{T}} K^{-1} H\right)^{-1} H^{\mathrm{T}} K^{-1} Y_i, \tag{1.1}$$

H – вектор размера $2(sz+1)\times 1$ с компонентами:

$$H = \left.\frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 1.5D\sqrt{2} \\ 1.5D\sqrt{2} \\ 1.5D \\ \dots \\ 1.5D \end{pmatrix}.$$

Таким образом, описанная выше процедура обеспечивает получение выборки реализаций α_i, $i=\overline{1,N}$, угла наклона площадки α в границах некоторой квадратной ячейки, на основе которой рассчитывается вероятность соответствия этой квадратной ячейки требованию по углу наклона посадочной площадки:

$$p_1 = \mathrm{P}\left(0^o \le \alpha \le 10^o\right). \tag{1.2}$$

В качестве оценки вероятности p_1 использована частота, определяемая как доля реализаций $\hat{\alpha}_i$, $i=\overline{1,N}$, для которых выполняется условие $0° \le \alpha_i \le 10°$.

Следующее условие в соответствии с требованиями ИКАО состоит в том, что неровности на поверхности посадочной площадки не должны превышать 100 мм под трехметровой рейкой, укладываемой в зоне прохода опор БВ. Поскольку для большинства современных БВ взлетной массой 200–300 кг диаметр винта не превышает 4 м, для проверки этого требования достаточно выделить в границах квадратной ячейки четыре подобласти, разделив стороны ячейки пополам.

Для каждой из таких четырех квадратных подобластей повторяется описанная выше процедура на основе комбинации методов Монте-Карло и наименьших квадратов, в результате чего рассчитываются реализации $\hat{\alpha}_i^j$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,4}$, углов наклона поверхности $\hat{\alpha}^j$, $j=\overline{1,4}$, которые сравниваются с предельно-допустимым значением:

$$\alpha_{\text{пред1}} = \operatorname{atan}\left(\frac{0.075D}{3}\right).$$

На базе реализаций $\alpha_i^j, i=\overline{1,N}, j=\overline{1,4}$, для каждой из подобластей находятся вероятности $p_2^j = \mathrm{P}\{0 \le \alpha^j \le \alpha_{\text{пред1}}\}$, $j=\overline{1,4}$. В качестве оценок этих вероятностей, как и прежде, выступают частоты, определяемые долями реализаций α_i^j, $i=\overline{1,N}$, не превышающих предельного значения $\alpha_{\text{пред1}}$. Эти вероятности характеризуют то, что в пределах каждой квадратной подобласти $j=\overline{1,4}$ неровности поверхности не превышают 0.1 м под трехметровой рейкой, укладываемой в зоне прохода опор БВ. Вероятность p_2 того, что вся квадратная ячейка удовлетворяет требованию к неровности поверхности, определяется как

$$p_2 = \min_{j=\overline{1,4}} p_2^j. \tag{1.4}$$

Наконец, заключительное требование из числа перечисленных выше предполагает, что за пределами посадочной площадки на удалении от ее края, равном $1.5D$, где D – диаметр несущего винта БВ, не должно быть элементов рельефа с высотой, превышающей 1 м.

Проверка этого требования может быть достигнута на основе описанного выше алгоритма. Для этого для каждой квадратной ячейки формируются четыре внешних квадратных области, прилегающие к ее сторонам, размерами $1.5D \times 1.5D$. Для каждой из таких внешних областей рассчитываются оценки углов наклона поверхности, которые сравниваются с предельно-допустимыми значением, равным

$$\alpha_{\text{пред3}} = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{1.5D}\right). \tag{1.5}$$

Далее рассчитывается вероятность p_3, выражающая пригодность использования квадратной ячейки в качестве посадочной площадки с точки зрения этого заключительного требова-

ния. Процедура получения оценки этой вероятности аналогична вычислению оценок вероятностей p_1, p_2.

Подобная процедура повторяется для всех квадратных ячеек, рассматриваемых в качестве потенциальных посадочных площадок (рис. 1). В итоге получаем набор вероятностей p_1^k, p_2^k, p_3^k, $k=\overline{1,K}$, где K – количество квадратных ячеек в пределах области поиска посадочной площадки. Вероятности p^k, $k=\overline{1,K}$, характеризующие пригодность использования каждой квадратной ячейки в качестве посадочной площадки с точки зрения всего комплекса требований 1)–3), рассчитываются как

$$p^k = p_1^k p_2^k p_3^k, k = \overline{1,K}. \tag{1.6}$$

Полученные таким образом вероятности p^k, $k=\overline{1,K}$ позволяют сформировать маршрут обхода квадратных ячеек с учетом их предпочтительности для проверки последнего требования, связанного с допустимой для посадки плотностью грунта, и окончательного выбора посадочной площадки.

Построение маршрута начинается с определения начальной квадратной ячейки, в которую БВ должен быть направлен в первую очередь выбора. Для этого для каждой квадратной ячейки рассчитывается функция потерь C_k, учитывающая риск, возникающий при перелете от текущего местоположения БВ к k-й ячейке. В качестве начального пункта маршрута БВ выбирается ячейка, для которой риск минимален [3–6].

Функция потерь C_k рассчитывается на основе выражения

$$C_k = \alpha_{1k}\left(1 - p^k\right) + \alpha_2 \frac{C_{\text{уд}} N_n R \delta_k}{1000 V_{\text{г.п}} R_0}, \tag{1.7}$$

где α_{1k} – вероятность отказа бортовых систем БВ в процессе перелета к k-й ячейке. Для оценки этой вероятности использована принятая в теории надежности экспоненциальная модель отказов, учитывающая текущий часовой налет БВ и время, необходимое для перелета; a_2 – весовой коэффициент, имеющий смысл меры доверия к прогнозному значению затрат топлива (к прогнозному времени на перелет БВ к k-й ячейке), рассчитываемому в условиях случайных ошибок бортового навигационного комплекса и ЦКМ ($0 \le \alpha_2 \le 1$):

$$\alpha_2 = \frac{\Delta_{\text{тр}}^2}{\sigma_{\text{ЦКМ}} \sqrt{\sigma_{\Delta N_{\text{БВ}}^*}^2 + \sigma_{\Delta E_{\text{БВ}}^*}^2}}, \tag{1.8}$$

$\Delta_{\text{тр}}$ – требуемое значение среднеквадратической ошибки (СКО) определения местоположения БВ в горизонтальной плоскости, задаваемое на основе нормативов ИКАО к точности осуществления навигации воздушного судна при полете по маршруту, м; $\sigma_{\Delta N_{\text{БВ}}^*}, \sigma_{\Delta E_{\text{БВ}}^*}$ – СКО ошибок оценок линейных координат БВ, получаемые в ходе статистической обработки навигационной информации, м; $\sigma_{\text{ЦКМ}}$ – СКО случайной ошибки позиционной информации ЦКМ, м; δ_k – угловая длина ортодромии между центром k-й ячейки и текущим местоположением БВ, рад.; $C_{\text{уд}}$ – удельный расход топлива двигателя БВ, кг/Втч, N_n – потребная мощность двигателя для выполнения горизонтального полета, Вт; R – геоцентрический радиус Земли, м; $V_{\text{г.п}}$ – скорость горизонтального полета, м/с; R_0 – текущий запас топлива, кг.

После того, как определена начальная ячейка для посещения БВ в процессе поиска посадочной площадки, рассчитывается следующая. Схема определения следующей потенциальной посадочной площадки полностью повторяет описанную выше для выбора начальной ячейки с той лишь разницей, что при вычислении вероятности отказа бортовых систем БВ учитывается дополнительное время, необходимое для перелета.

Процесс формирования маршрута завершается после исчерпания списка квадратных ячеек, рассматриваемых в качестве потенциальных посадочных площадок. Результатом является перечень квадратных ячеек, упорядоченных по возрастанию значений функции потерь. Сформированный маршрут позволяет начать движение БВ между выбранными ячейками с учетом их предпочтительности для окончательного выбора посадочной площадки, удовлетворяющей требованию прочности грунта.

2. Выбор посадочной площадки с учетом требования к прочности грунта. Дальнейшее изложение предполагает, что БВ оснащен георадаром, обеспечивающим получение информации о прочности грунта на основе вычисления его диэлектрической проницаемости.

Задача выбора посадочной площадки с учетом прочности грунта интерпретирована как задача классификации, позволяющая формировать решение на множестве двух альтернативных исходов:

1) “Грунт не подходит для посадки БВ”;

2) “Грунт подходит для посадки БВ”.

Каждому из упомянутых выше исходов соответствует эталонный класс, для описания которого используются значения диэлектрической проницаемости грунта подстилающей земной поверхности и скорости распространения электромагнитной волны в нем. Диэлектрическая проницаемость грунта ε оценивается на основе рекуррентной обработки георадаром отраженных от земных слоев амплитуд [7]:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}\frac{Q_1}{Q_2}, \tag{2.1}$$

где

$$Q_1 = 1 - \left(\frac{A_0}{A_m}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-2} R_i \frac{A_i}{A_m} + \frac{A_{n-1}}{A_m},$$

$$Q_2 = 1 - \left(\frac{A_0}{A_m}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-2} R_i \frac{A_i}{A_m} - \frac{A_{n-1}}{A_m},$$

A_0 – амплитуда радиосигнала, отраженного от границы среды “воздух/поверхность грунта”; A_m – амплитуда радиосигнала, отраженного от металлической пластины (определяется при проведении калибровки георадара); R_i – коэффициент отражения электромагнитной волны на границе двух слоев грунта:

$$R_i = \frac{\sqrt{\varepsilon_n} - \sqrt{\varepsilon_{n-1}}}{\sqrt{\varepsilon_n} + \sqrt{\varepsilon_{n-1}}},$$

где n – количество различных слоев в зондируемом грунте.

Скорость распространения электромагнитной волны в слое грунта (в м/нс) упрощенно можно вычислить как:

$$v_n = \frac{10^{-9} c}{\sqrt{\varepsilon_n}}, \tag{2.2}$$

где c – скорость электромагнитной волны в вакууме ($\approx 2.9979 \cdot 10^8$), м/с.

На основе опыта применения георадаров сформирована обучающая выборка, содержащая значения классификационных признаков (диэлектрическая проницаемость грунта и скорость распространения электромагнитной волны в грунте) для каждого из эталонных классов. В качестве классификатора использована нейросетевая модель на базе двухслойного персептрона.

Применение георадара, размещенного на борту БВ, для оперативной оценки плотности грунта в месте предполагаемой посадки сталкивается с серьезной трудностью. Известно [8, 9], что существует предельная дальность действия георадара, рекомендуемое значение которой не должно превышать длину электромагнитной волны, излучаемой радиотехническим устройством в воздухе. Учитывая это, возникает проблема высокоточного счисления высоты БВ, поскольку на современные БВ для оптимизации массогабаритных характеристик бортового оборудования чаще всего устанавливают бесплатформенные инерциальные системы (БИНС) на базе микроэлектромеханической системы (МЭМС), обладающие ошибками в определении координат более 5 км за час непрерывного счисления [10–12].

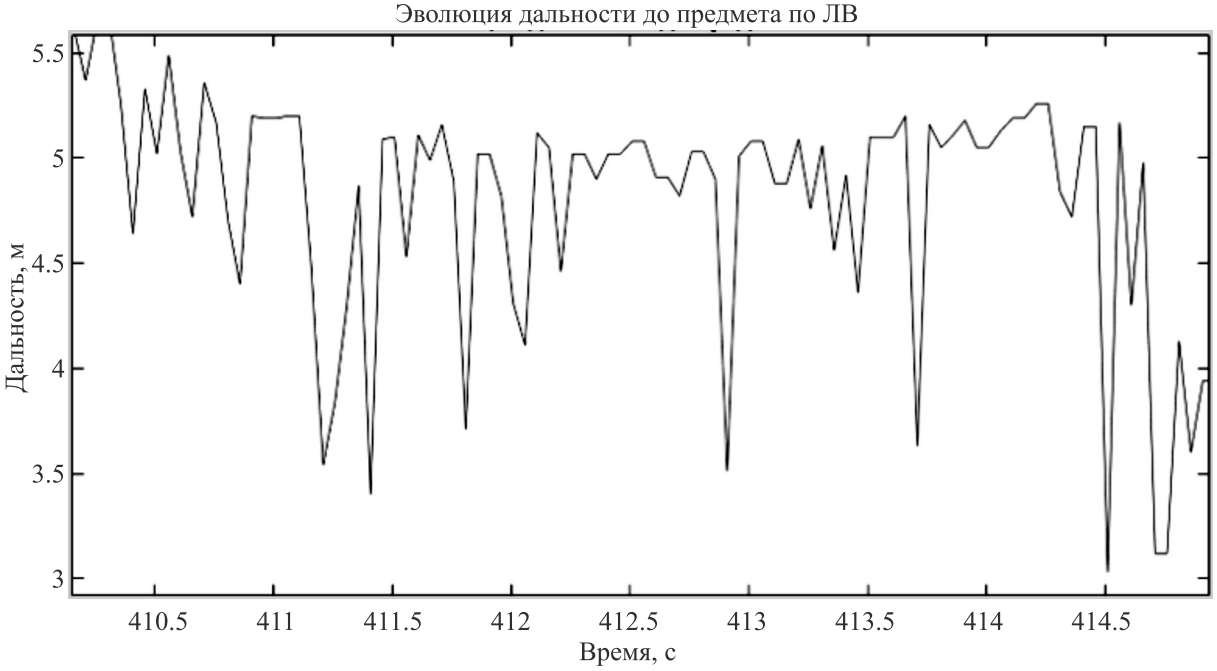


Рис. 3. Эволюция вычисленной дальности до поверхности лазерным высотомером (истинное расстояние до предмета 5 м).

Для повышения точности вертикального канала БВ предлагается комплексирование навигационной информации на основе слабосвязанной схемы. В качестве корректора инерциальной системы на этапе посадки выступает лазерный высотомер (лидар с малым углом обзора). Заметим, что дальность, рассчитанная по данным лидара, не обладает постоянной во времени ошибкой измерения [13–14], что подтверждается записями тестовых сценариев работы данного устройства (рис. 3).

При реализации слабосвязанной схемы комплексирования с целью исключения аномальных измерений лазерного высотомера (ЛВ) предлагается осуществлять коррекцию вектора оцениваемых параметров не только при обновлении навигационной информации подобно тому, как это делается в традиционной схеме [15, 16], но и в ситуации, когда модуль разности высоты БВ по данным ЛВ, полученный на текущем и предыдущем тактах его функционирования, превышает пороговое значение, зависящее от скороподъемности БВ и предельной ошибки вычисления дальности до объекта лазерным высотомером. Подобная модификация фильтра Калмана (ФК) предложена в работе [17]. Ниже приведены математические модели, составляющие основу алгоритма комплексирования для указанной модификации ФК, достигнутой за счет адаптации ковариационной матрицы измерений. Эта адаптация предполагает пересчет ковариационной матрицы измерений всякий раз, когда выявлено аномальное (ошибочное) измерение ЛВ. Очевидно, что при отсутствии аномальных измерений ЛВ предлагаемый вариант ФК полностью соответствует его традиционному представлению.

Компонентами вектора оцениваемых параметров в данном случае являются следующие ошибки инерциального счисления:

$$\Delta X = \left(\Delta z_{\text{инс}}, \Delta v_{z_{\text{инс}}}, \Delta a_{z_{\text{инс}}}\right)^T;$$

где $\Delta z_{\text{инс}}$ – ошибка определения высоты БВ по данным инерциальной навигационной системы (ИНС), м; $\Delta v_{z_{\text{инс}}}$ – ошибка инерциального счисления вертикальной скорости БВ, м/с; $\Delta a_{z_{\text{инс}}}$ – ошибка получения вертикального ускорения БВ с помощью ИНС, м/с^2.

Уравнения для оценок вектора параметров ΔX и ковариационной матрицы оценок в соответствии с [17] имеют следующий вид:

$$\Delta X_c^* = \Delta \widehat{X}_k + \widehat{P}_k H_k^{\mathrm{T}} \left(H_k \widehat{P}_k H_k^{\mathrm{T}} + S\tilde{R}_{c-1}\right)^{-1} \left(\Delta Y_c - H_k \Delta \widehat{X}_k\right), \tag{2.3}$$

$$S = \frac{\mathrm{tr}\{A\}}{\mathrm{tr}\{B\}}, \tag{2.4}$$

$$A = \frac{1}{N_m}\sum_{j=1}^{N_m}\left(\Delta Y_c - H_k \Delta X_k\right)_j \left(\Delta Y_c - H_k \Delta \widehat{X}_k\right)_j^{\mathrm{T}},$$

$$B = H_k \widehat{P}_k H_k^{\mathrm{T}} + \tilde{R}_{c-1},$$

$$P_c^* = \left(I - \widehat{P}_k H_k^{\mathrm{T}} \left(H \widehat{P}_k H_k^{\mathrm{T}} + S\tilde{R}_{c-1}\right)^{-1}\right)\widehat{P}_k. \tag{2.5}$$

В (2.3)–(2.5) индекс k соответствует моменту коррекции навигационной информации, индекс c указывает на момент поступления навигационных измерений. Как отмечалось ранее, в модификации фильтра Калмана, предложенной в работе [17], коррекция проводится не с тактом поступления навигационной информации, но всякий раз, когда локализованы аномальные измерения ЛВ. Остальные компоненты, присутствующие в (2.3)–(2.5), имеют такой же смысл, как в работе [17]: ΔX_c^* – вектор оцениваемых параметров, скорректированный после поступления навигационных измерений на шаге c, учитывающий наличие аномальных измерений ЛВ; P_c^* – апостериорная ковариационная матрица вектора оценок ΔX_c^*; ΔX_k – вектор оцениваемых параметров, полученный с учетом проведения k-й коррекции при обнаружении аномальных измерений; P_k – ковариационная матрица вектора $\Delta \hat{X}_k$; H_k – матрица Якоби, определяемая на основе модели измерений ЛВ для k-го момента коррекции; tr{ } – операция вычисления следа матрицы; ΔY_c – вектор измеряемых параметров на шаге c поступления навигационных измерений; $\tilde{R}_{c-1}$ – значение ковариационной матрицы измерений, соответствующее моменту $c-1$поступления навигационных измерений; N_m – общее количество тактов вычисления ковариационной матрицы измерений, определяемое как сумма числа навигационных измерений, поступивших к текущему моменту, и числа коррекций, проведенных между моментами поступления навигационных измерений, с учетом выявленных аномальных измерений ЛВ.

Вектор наблюдений ΔY_c в (2.3)–(2.5) имеет вид:

$$\Delta Y_c = \begin{pmatrix} z_{\text{инс}} - z_{лв} \\ v_{z_{инс}} - v_{z_{лв}} \end{pmatrix},$$

где $z_{\text{инс}}$ – высота БВ по данным ИНС, м; $z_{\text{лв}}$ – значение высоты, полученное с помощью ЛВ с исключенными аномальными значениями, м; $v_{z_{\text{инс}}}$ – инерциальная вертикальная скорость БВ, м/с; $v_{z_{\text{лв}}}$ вертикальная проекция вектора скорости БВ по данным ЛВ, м/с.

3. Пример решения задачи планирования маршрута БВ с целью поиска площадки, пригодной для посадки. Имитационное моделирование задачи планирования маршрута облета необорудованных площадок проводилось при следующих параметрах:

– для получения высотной информации о рельефе земной поверхности используется ЦКМ SRTM [18];

– информация о типах объектов земной поверхности в районе целевого применения БВ получена с помощью ЦКМ OpenStreetMap [19];

– $V_{\text{г.п}} = 120$ км/ч – скорость горизонтального полета БВ;

– потребная мощность двигателя внутреннего сгорания (ДВС) N_n для выполнения горизонтального полета БВ рассчитывалась путем билинейной интерполяции расчетных зависимостей потребной тяги от скорости и высоты осуществления горизонтального полета БВ;

– удельный расход топлива ДВС $C_{\text{уд}}$ для выполнения горизонтального полета определялся аналогичным образом на основе билинейной интерполяции расчетных зависимостей удельного расхода топлива от скорости и высоты горизонтального полета БВ;

– $R_0 = 120$ кг – объем топливного бака БВ.

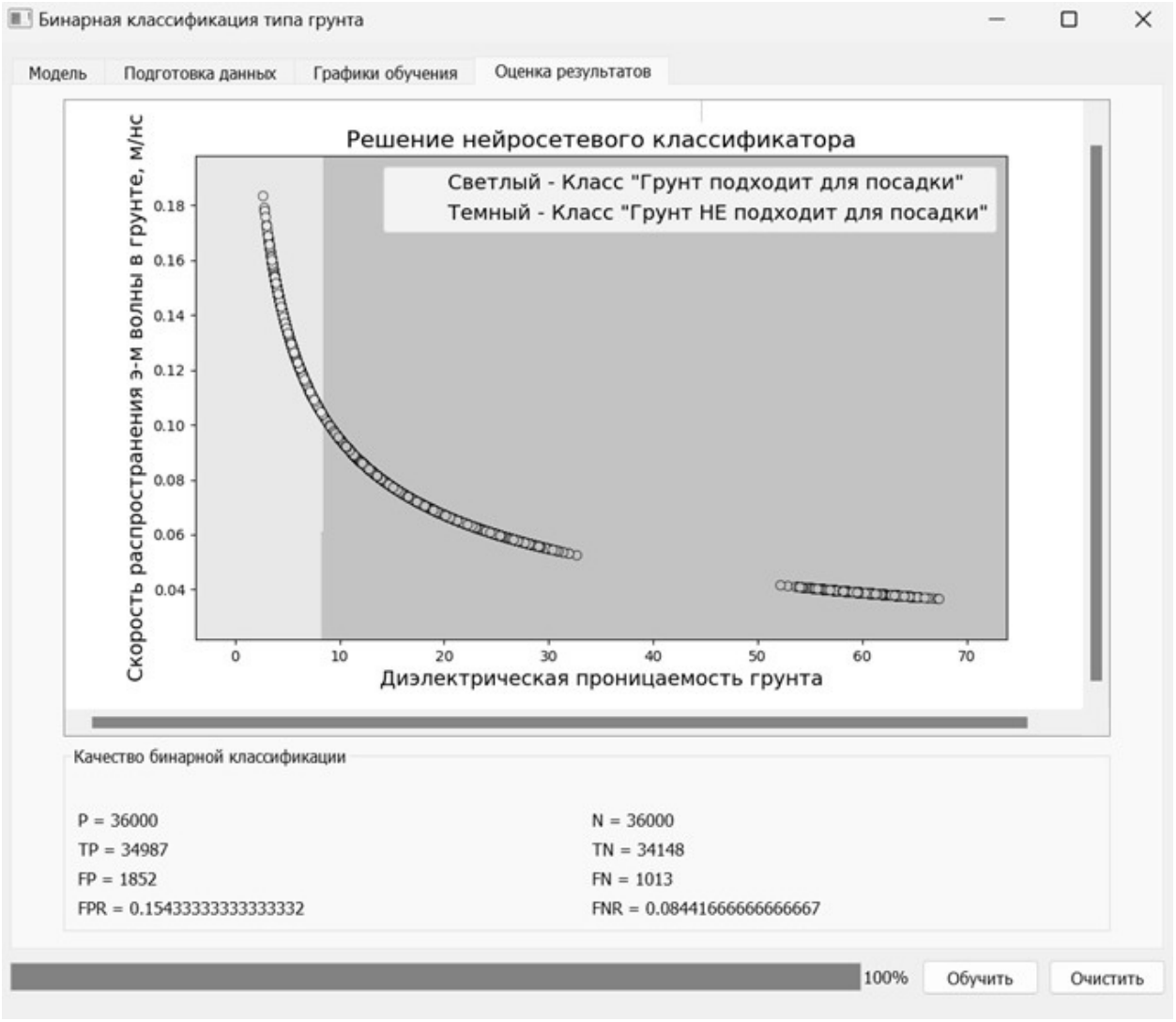


Рис. 4. Результат решения бинарной задачи классификации типа грунта потенциальной посадочной площадки.

Обучение и тестирование нейросетевого алгоритма бинарной классификации типа грунта необорудованного вертодрома проводились с помощью открытых данных зондирования грунтов. Частота излучения электромагнитной волны георадара составляла 100 МГц [20–22]. Функция классификации типа грунта, полученная с помощью двухслойного персептрона, выглядит следующим образом:

$$f(\varepsilon, \mathrm{v}) = f_{\text{акт}}\left(\sum_{i=1}^{N_{\text{нейрон}}} W_i^2 f_{\text{акт}}\left(\sum_{i=1}^{N_{\text{нейрон}}}\sum_{j=1}^{N_{\text{вх}}} W_{i,j}^1 x_j + b_i^1\right) + b^2\right),$$

где $f(\varepsilon, \mathrm{v})$ – выходная переменная нейросетевого классификатора, принимающая одно из двух возможных значений: 0 – текущий облучаемый грунт не подходит для осуществления посадки, 1 – грунт подходит для посадки; $W_{i,j}^1$ – весовые коэффициенты входного слоя нейронной сети; W_i^2 – весовые коэффициенты выходного слоя нейронной сети; $N_{\text{нейрон}}$ – количество нейронов в первом скрытом слое; $N_{\text{вх}}$ – количество входов нейронной сети; x – входной вектор двухслойного персептрона, $x = (\varepsilon, \mathrm{v})^T$; b_i^1 – вектор смещения первого скрытого слоя нейронной сети; b^2 – смещение второго скрытого слоя нейронной сети; $f_{\text{акт}}$ – функция активации нейронов. Графическое представление результата решения бинарной задачи классификации типа грунта необорудованного вертодрома обозначено ниже (рис. 4).

Таблица 1. Показатели качества бинарной классификации типа грунта (в процентах)

TPR	*FPR*	*TNR*	*FNR*
99.95	0.05	99.97	0.03

Таблица 2. Технические характеристики МЭМС БИНС VN-100

Точность определения угла крена/тангажа, град	СКО случайной ошибки ускорения, $м/с^2$	СКО случайной ошибки угловой скорости, град/с	Частота обновления навигационного решения, Гц	Масса, г
0.5	0.0004	0.002	400	15

Таблица 3. Технические характеристики ЛВ Lightware Sf11/c

Параметр		Паспортные данные
Масса, г		100
Предельное значение измерения дальности, м	Земная поверхность	120
	Морская поверхность	40
Разрешающая способность измерений, см		1
Ошибка измерения дальности, см		10 (при 70% отражении энергии от поверхности при температуре 20 °C)
Частота обновления информации, Гц		20

На рис. 4 введены следующие обозначения: P – общее количество положительных решений (грунт, подходящий для посадки) в рассматриваемой выборке данных; N – общее количество отрицательных решений (грунт, неподходящий для посадки) в представленной выборке данных; TP, TN – соответственно количество положительных и отрицательных заключений, выданных классификатором; FP – количество ложноположительных решений в рассматриваемой выборке данных (ошибка 1-го рода, т.е. грунт, неподходящий для осуществления посадки, был предсказан классификатором как подходящий); FN – количество ложноотрицательных решений (ошибка 2-го рода, проявляющаяся в том, что грунт, подходящий для осуществления посадки, был неверно классифицирован как неподходящий).

В табл. 1 приведены данные, отражающие достоверность решения бинарной задачи классификации типа грунта необорудованного вертодрома. При этом использованы обозначения: TPR – доля положительных решений, предсказанных классификатором; FPR – доля ложноположительных решений (вероятность появления ошибки 1-го рода: неподходящий грунт для совершения посадки был определен классификатором как подходящий); TNR – доля отрицательных решений; FNR – доля ложноотрицательных решений (вероятность появления ошибки 2-го рода: подходящий для выполнения посадки грунт был неверно классифицирован как неподходящий).

Как указывалось выше, возможность применения георадара, размещенного на борту БВ, для оценки плотности грунта в границах посадочной площадки обоснована тогда, когда обеспечена необходимая точность оценки текущей высоты БВ. Учитывая это, проведена верификация разработанного алгоритмического обеспечения навигации вертикального канала БВ.

Основные технические характеристики используемых навигационных систем МЭМС БИНС VN-100 и ЛВ Lightware Sf11/c приведены в табл. 2, 3.

Верификация описанного выше алгоритмического обеспечения навигации вертикального канала БВ проведена в условиях летных экспериментов. В табл. 4 представлены оценки статистических характеристик ошибки счисления высоты БВ при осуществлении посадки по результатам обработки данных трех летных экспериментов.

В табл. 4 приняты следующие обозначения: $M_{\Delta h}$, $\sigma_{\Delta h}$ – математическое ожидание и СКО – ошибки определения высоты БВ над подстилающей поверхностью соответственно; $\delta^{+}_{\Delta h}$, $\delta^{-}_{\Delta h}$ – верхнее и нижнее предельные отклонения ошибки определения высоты БВ над подстилающей поверхностью.

Эффект, достигнутый от включения дополнительного условия при осуществлении перехода алгоритма комплексирования навигационных данных в режим коррекции вектора оцениваемых параметров, графически показан на рис. 5.

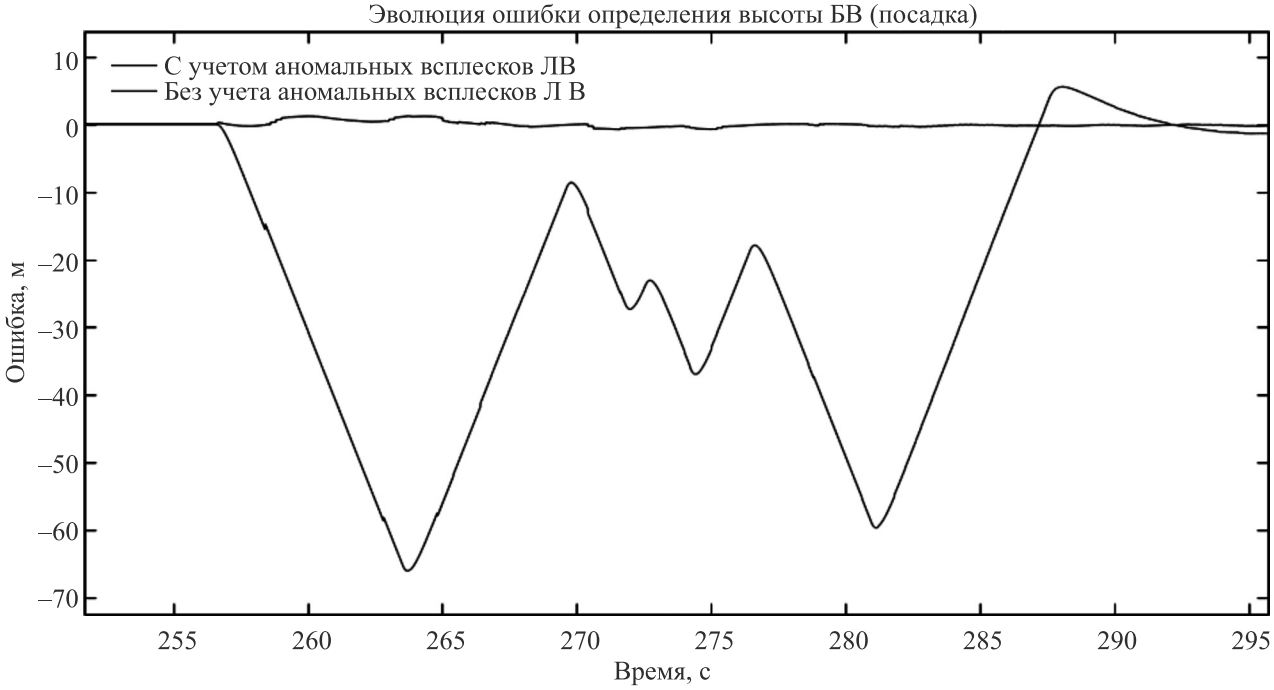
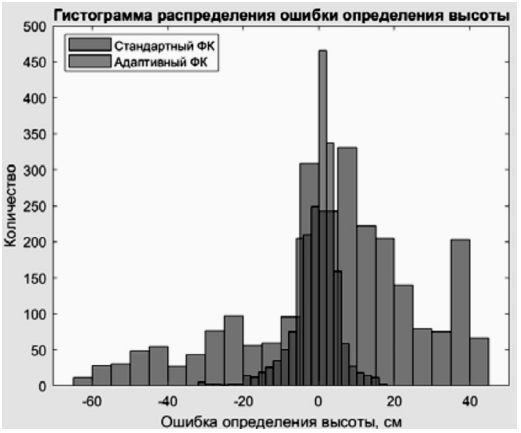
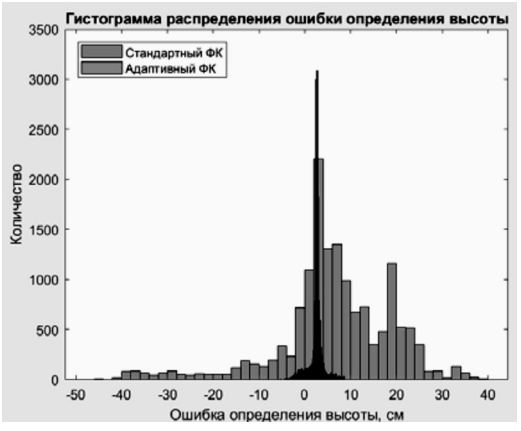


Рис. 5. График эволюции ошибки определения высоты БВ на этапе осуществления посадки (с учетом и без аномальных всплесков данных лазерного высотомера).

Таблица 4. Статистические характеристики ошибки определения высоты, см

Эксперимент	Гистограмма распределения ошибки определения высоты (этап посадки БВ)	Стандартный ФК	Адаптивный ФК
1		$M_{\Delta h}=5.3$; $\sigma_{\Delta h}=23.1$; $\delta^{+}_{\Delta h}=40$; $\delta^{-}_{\Delta h}=-65$	$M_{\Delta h}=-1.6$; $\sigma_{\Delta h}=6.1$; $\delta^{+}_{\Delta h}=18$; $\delta^{-}_{\Delta h}=-32$
2		$M_{\Delta h}=8.12$; $\sigma_{\Delta h}=12.5$; $\delta^{+}_{\Delta h}=40$; $\delta^{-}_{\Delta h}=-48$	$M_{\Delta h}=2.25$; $\sigma_{\Delta h}=3.53$; $\delta^{+}_{\Delta h}=13$; $\delta^{-}_{\Delta h}=-14$

Окончание табл. 4

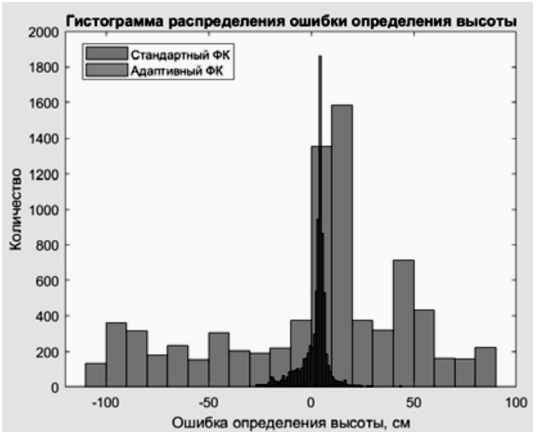
Эксперимент	Гистограмма распределения ошибки определения высоты (этап посадки БВ)	Стандартный ФК	Адаптивный ФК
3		$M_{\Delta h} = 5.6$; $\sigma_{\Delta h} = 46.3$; $\delta^{+}_{\Delta h} = 90$; $\delta^{-}_{\Delta h} = -110$	$M_{\Delta h} = 3.24$; $\sigma_{\Delta h} = 7.84$; $\delta^{+}_{\Delta h} = 44$; $\delta^{-}_{\Delta h} = -49$

Таблица 5. Процент попадания ошибки определения высоты БВ в интервал ±30 см

Эксперимент	Наличие всплесков в показании лазерного высотомера (при осуществлении посадки)	Процент попадания ошибки в интервал ±30 см	
		Стандартный ФК	Адаптивный ФК
1	Да	75.1	99.3
2	Нет	78.6	100
3	Да	65.9	96.4

Процент попаданий ошибки определения высоты БВ в интервал ±30 см (третья категория ИКАО по точности посадки) приведен в табл. 5.

Заключение. Рассмотрена задача обеспечения экстренной посадки беспилотного вертолета на необорудованную площадку. Сложность решения подобной задачи обусловлена тем, что в соответствии с требованиями ИКАО безопасная посадка беспилотного вертолета может быть достигнута, если выполнен комплексу требований, учитывающих особенности рельефа и плотность грунта в месте посадки.

С целью обеспечения экстренной безопасной посадки БВ на необорудованную площадку предложен двухэтапный алгоритм. На первом этапе на основе цифровой карты местности, размещенной на борту, формируется маршрут обхода площадок, потенциально пригодных для посадки, с учетом требований к рельефу местности. Для этого последовательно решаются статические задачи оптимизации, направленные на минимизацию потерь, возникающих при перелете БВ между посадочными площадками. При расчете потерь учитываются: вероятности удовлетворения посадочной площадки требованиям ИКАО; априорное состояние бортовых систем; неточность определения собственного положения и позиционной информации ЦКМ, а также летно-технические характеристики.

Второй этап алгоритма реализуется непосредственно в процессе движения БВ по рассчитанному маршруту и предполагает окончательный выбор посадочной площадки с учетом требования к порочности грунта в месте посадки на основе обработки данных георадара. Задача определения прочности грунта сведена к задаче бинарной классификации типа грунта необорудованного вертодрома на базе двухслойного персептрона. Тестирование разработанного алгоритма производилось на открытых данных облучения георадаром основных типов грунтов с частотой 100 МГц. Вероятность правильной классификации грунтов, подходящих для осуществления посадки, составляет более 0.99, что доказывает возможность использования такого подхода при определении типа грунта в месте посадки.

Дополнительно рассмотрен вопрос определения высоты БВ на этапе осуществления посадки. Предложенное алгоритмическое обеспечение по счислению высоты воздушного судна над подстилающей поверхностью прошло верификацию на данных летных экспериментов.

Ошибка определения высоты БВ вертолетного типа при осуществлении посадки остается в пределах ±30 см.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цуканов И.Р., Азман А.В.* Решаемые проблемы, преимущества и перспективы развития беспилотных вертолетов // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2022. Вып. 9.
2. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962. 352 с.
3. *Андреев М.А., Миллер А.Б., Миллер Б.М., Степанян К.В.* Планирование траектории беспилотного летательного аппарата в сложных условиях при наличии угроз // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 2. С.166–176.
4. *Гончаренко В.И., Желтов С.Ю., Князь В.А., Лебедев Г.Н., Михайлин Д.А., Царева О.Ю.* Интеллектуальная система планирования групповых действий беспилотных летательных аппаратов при наблюдении наземных мобильных объектов на заданной территории // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 3. С. 39–56.
5. *Себряков Г.Г., Красильщиков М.Н., Евдокименков В.Н.* Алгоритмическое и программно-математическое обеспечение предполетного планирования групповых действий беспилотных летательных аппаратов // Фундаментальные проблемы группового взаимодействия роботов: материалы отчетного мероприятия РФФИ по конкурсу “офи-м” (тема 604) в рамках международной научно-практической конф. Волгоград, 2018. С. 30–32.
6. *Evdokimenkov V.N., Krasilshchikov M.N., Kozorez D.A.* Development of Pre-flight Planning Algorithms for the Functional-program Prototype of a Distributed Intellectual Control System of Unmanned Flying Vehicle Groups // INCAS Bulletin. 2019. V. 11. № 1. P. 75–88.
7. *Rafiqul A., Mesbah A.* Ground Penetrating Radar for Measuring Thickness of an Unbound Layer of a Pavement // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2018. V. 598. P. 160–167.
8. *Leucci G.* Ground Penetrating Radar: The Electromagnetic Signal Attenuation and Maximum Penetration Depth // Scholarly Research Exchange. 2008. V. 2008. https://doi.org/10.38114/2008/926091
9. *Booth A.D, Koylass T.M.* Drone-mounted Ground-penetating Radar Surveying: Flight-Height Considerations for Diffraction-based Velocity Analysis // GEOPHYSICS. 2021. V. 87. № 4. https://doi.org/10.1190/geo2021-0602.1 *Zakriya M., Elfadel I., Rasras M.* Monolitic Multi Degree of Freedom (MDoF) Capacitive MEMS Accelerometers // Micromachines. 2018. V. 9. № 11. https://doi.org/0.3390/mi9110602
10. *Quinchia A., Falco G., Faletti E., Dovis F.* A Comparison Between Different Error Modelling of MEMS Applied to GPS / INS Integrate Systems // Sensors (Basel). 2013. V. 13. №. 3. P. 9549–0588. https://doi.org/10.3390/s130809549
11. *Liu Hong Dan, Shu Xiong Ying, Li Xi Sheng.* Application Of Strongly Tracking Kalman Filter In MEMS Gyroscopes Bias Compensation // 6th Intern. Conf. on Advanced Materials and Computer Science. ISAMCS, Rome, 2017. https://doi.org/10.23977/icamcs.2017.1004
12. *Parra-Tsunekawa I., Ruiz-del-Solar J., Vallejos P.* A Kalman-filtering-based Approach for Improving Terrain Mapping in off-road Autonomous Vehicles // J. Intelligent & Robotic Systems. 2014. V. 78. P. 577–591. https://doi.org/10.1007/s10846-014-0087-9
13. *Rullán-Lara J., Salazar S., Lozano R.* Real-time Localization of an UAV Using Kalman Filter and a Wireless Sensor Network // J. Intelligent & Robotic Systems. 2012. V. 65. P. 283–293. https://doi.org/10.1007/s10846-011-959908
14. *Kim K., Lee L., Park C.* Adaptive Two-stage Extanded Kalman Filter for a Fault-tolerant INS-GPS Loosely Coupled Systems // IEEE Translations on Aerospace and Electronic Systems. 2009. V. 45. № 1. P. 125–137. https://doi.org/10.1109/TAES.2009.4805268
15. *Веремеенко К.К., Желтов С.Ю., Ким Н.В., Себряков Г.Г , Красильщиков М.Н.*. Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов. М.: Физматлит, 2009. 556 с.
16. *Dah-Jing Jwo, Chung F., Tsu-Pin Weng.* Adaptive Kalman Filter for Navigation Sensor Fusion, Sensor Fusion and Its Applications, Ciza Thomas (Ed.), ISBN: 978-953-307-101-5, InTech. 2010. P. 488. https://doi.org/10.5772/9957
17. Shuttle Radar Topography Mission. URL: https://www2.jpl.nasa.gov/srtm/.
18. OpenStreetMap. URL: https://www.openstreetmap.org .
19. *Гринев А.Ю.* Вопросы подповерхностной радиолокации. М.: Радиотехника, 2005. 416 с.
20. *Изюмов С.В., Дручинин С.В., Вознесенский А.С.* Теория и методы георадиолокации: Учебное пособие. М.: Горная книга, Изд. Московского гос. горного ун-та, 2008. 196 с.
21. *Сухобок Ю.А.* Совершенствование методики георадарного обследования грунтовых объектов транспортной инфраструктуры: дис... канд. техн. наук: 05.23.11. Хабаровск, 2014. 165 с.