

ISSN 0002-3388

Номер 1

Январь - Февраль 2023



*ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК*

# ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

[www.sciencejournals.ru](http://www.sciencejournals.ru)



---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

Номер 1, 2023

---

## УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Импульсная переходная матрица нестационарной системы  
дифференциально-алгебраических уравнений

*А. А. Щеглова*

3

Синтез параметров пропорционально-интегрирующих  
и пропорционально-интегрально-дифференцирующих регуляторов  
для стационарных линейных объектов с ненулевыми начальными условиями

*Д. В. Шатов*

18

---

## УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Оптимальное комплексирование измерителей при сопровождении маневрирующего объекта  
в статистически неопределенных ситуациях

*А. Н. Детков*

28

---

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Восстановление параметров движения летательного аппарата с использованием алгоритмов  
оптимального управления

*О. Н. Корсун, А. В. Стуловский*

44

---

## УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Оптимальное управление системами с распределенными параметрами  
в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта

*Ю. Э. Плешивцева, Э. Я. Рапопорт*

56

---

## СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Организация подсистемы контроля в вычислительных системах реального времени

*М. Г. Фуругян*

72

сравнение методов организации и эффективности управления  
в динамических моделях олигополии Курно

*А. В. Королёв, М. А. Котова, Г. А. Угольников*

82

Декомпозиция задачи принятия решений на уровни предпочтения  
мажоритарного графа

*С. О. Смерчинская, Н. П. Яшина*

106

Многоагентная динамическая модель многокритериального информационного  
взаимодействия структурных элементов самоорганизующейся сети передачи  
данных наземно-воздушной системы мониторинга

*В. В. Бородин, Д. А. Клецков, А. В. Тимошенко, В. А. Щевцов*

123

---

## **ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ**

Решение задач по прецеденту в базах знаний бортовых интеллектуальных систем  
тактического уровня на этапах выполнения миссии подвижным объектом

*Б. Е. Федун*

137

---

## **СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ**

Метод согласования приборных и связанной систем координат на летательном аппарате

*В. М. Лисицын, К. В. Обросов, Г. Г. Себряков*

148

---

## **РОБОТОТЕХНИКА**

Организация поворота корпуса вибрационного робота вокруг вертикали

*М. А. Гарбуз, М. З. Досаев, В. А. Самсонов*

164

---

---

## УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.926, 517.922

# ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕХОДНАЯ МАТРИЦА НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. А. А. Щеглова

*Институт динамики систем и теории управления СО РАН им. В.М. Матросова, Иркутск, Россия*

*e-mail: shchegl@icc.ru*

Поступила в редакцию 18.04.2022 г.

После доработки 09.08.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Рассматривается круг вопросов, связанных с импульсной переходной матрицей системы линейных дифференциально-алгебраических уравнений. Для систем с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами показано, что эта матрица представима в виде суммы импульсных переходных матриц ее дифференциальной и алгебраической подсистем. Найден вид невырожденной замены переменных, которая не влияет на вид импульсной переходной матрицы. Реализации этой матрицы предлагается искать в классе дифференциально-алгебраических уравнений индекса 1 с разделенными дифференциальной и алгебраической составляющими. Получены необходимые и достаточные условия реализуемости импульсной переходной матрицы в классе алгебраических систем. Обсуждается вопрос о способах построения и о размерности минимальных реализаций такой матрицы при различных предположениях.

DOI: 10.31857/S0002338823010092, EDN: JASOTZ

**0. Введение.** Рассматривается линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(t)\frac{d}{dt}x(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (0.1)$$

$$y(t) = V(t)x(t), \quad (0.2)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  — известные  $(n \times n)$ -матрицы;  $x(t)$  — искомая  $n$ -мерная вектор-функция;  $U(t)$  и  $V(t)$  — заданные матрицы размеров  $n \times l$  и  $m \times n$  соответственно;  $u(t)$  —  $l$ -мерная вектор-функция управления;  $y(t)$  —  $m$ -мерный выход. Предполагается, что элементы матричных коэффициентов системы (0.1), (0.2) являются бесконечно-дифференцируемыми на  $T$  функциями:  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $U(t)$ ,  $V(t) \in C^\infty(T)$ .

Основным допущением служит необратимость матрицы  $A(t)$  для всех значений  $t \in T$ :  $\det A(t) \equiv 0$ . Такие системы называются *дифференциально-алгебраическими уравнениями* (ДАУ). Сложность внутренней структуры ДАУ характеризует целочисленная величина  $r$ :  $0 \leq r \leq n$ , называемая *индексом*. Точное определение индекса сформулировано в разд. 2.

Системы вида (0.1), (0.2) используются при математическом моделировании во многих прикладных областях: теории автоматического регулирования [1, с. 19], химической кинетике [2], теории переноса нейтронов [1, с. 21], гидродинамике [3, с. 86; 4], теплотехнике [5], теории электронных схем и электрических цепей [6, с. 259; 7], механике [8] и др.

Импульсная переходная матрица системы дифференциальных уравнений представляет собой функцию выхода при нулевом начальном состоянии и управляющем воздействии в виде дельта-функции Дирака. Она находит широкое применение в теории управления и при исследовании различных инженерных систем (см., в частности, [9, с. 5–50; 10, с. 36–92; 11, с. 13–39; 12–14].

Проблема анализа и синтеза импульсных переходных матриц для нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной

$$x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad y(t) = V(t)x(t), \quad (0.3)$$

в настоящее время хорошо изучена. Для таких систем в книге [15, с. 131–201] систематически изложены важнейшие аспекты теории: вид и свойства импульсных переходных матриц, условия эквивалентности и реализуемости, построение минимальных реализаций и их связь со свойствами управляемости и наблюдаемости (см. также [16–20]). Эта теория получила свое развитие применительно к конкретным прикладным областям в работах [13, 14, 21]. Способы построения импульсных переходных матриц и описание с их помощью различных технических и экономических объектов, моделируемых системами вида (0.3), можно найти в работах [22, с. 50–78; 23–25].

Данная статья посвящена изучению свойств импульсной переходной матрицы системы (0.1), (0.2), а также построению ее реализаций. ДАУ анализируются в предположениях, обеспечивающих существование линейного дифференциального оператора, действие которого преобразует (0.1) в систему индекса 1, множество решений которой совпадает с множеством решений системы (0.1). Показано, что импульсная переходная матрица в этом случае представляет собой сумму импульсных переходных матриц дифференциальной и алгебраической подсистем. В силу данного обстоятельства реализацию такой матрицы предлагается строить в классе ДАУ индекса 1 с разделенными дифференциальной и алгебраической составляющими. Для ДАУ, имеющих одинаковую внутреннюю структуру, получены условия эквивалентности при нулевом начальном состоянии, что позволяет указать вид невырожденной замены переменных, не влияющей на вид импульсной переходной матрицы.

Показано, что импульсная переходная матрица алгебраической подсистемы ДАУ представляет собой линейную комбинацию дельта-функции и ее производных с матричными коэффициентами. Вводится специальная матрица  $W(t)$ , которая вычисляется по этим коэффициентам. Доказано, что для реализуемости импульсной переходной матрицы в классе алгебраических систем необходимо и достаточно разложимости  $W(t)$  на произведение двух матриц. Рассматриваются способы построения минимальных реализаций и связь между минимальностью реализации и наличием у нее свойств управляемости и наблюдаемости при различных предположениях на ранг и гладкость матрицы  $W(t)$ .

Результаты, представленные в работе, носят теоретический характер, но могут послужить основой для построения соответствующих алгоритмов.

**1. Структурная форма для системы ДАУ.** Приведены вспомогательные сведения из структурной теории нестационарных ДАУ.

Для системы (0.1) определим  $(n(r+1) \times n)$ -матрицы

$$\mathcal{A}_r(t) = \text{col}(C_0^0 A(t), C_1^0 A'(t) + C_1^1 B(t), \dots, C_r^0 A^{(r)}(t) + C_r^1 B^{(r-1)}(t)),$$

$$\mathcal{B}_r(t) = \text{col}(B(t), B'(t), \dots, B^{(r)}(t)),$$

$(n(r+1) \times nr)$ -матрицу

$$\Lambda_r(t) = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ C_1^1 A(t) & O & \dots & O \\ C_2^1 A'(t) + C_2^2 B(t) & C_2^2 A(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1 A^{(r-1)}(t) + C_r^2 B^{(r-2)}(t) & C_r^2 A^{(r-2)}(t) + C_r^3 B^{(r-3)}(t) & \dots & C_r^r A(t) \end{pmatrix}$$

и  $(n(r+1) \times n(r+2))$ -матрицу

$$\mathcal{D}_r(t) = (\mathcal{B}_r(t) \quad \mathcal{A}_r(t) \quad \Lambda_r(t)).$$

Здесь и далее  $C_i^j = i!/(j!(i-j)!)$  – биномиальные коэффициенты,  $O$  – нулевая матрица соответствующего размера,  $f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$ ,  $f^{(j)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j f(t)$ .

Предположим, что для некоторого  $r$  ( $0 \leq r \leq n$ ) выполняется условие

$$\text{rank} \Lambda_r(t) = \lambda = \text{const} \quad \forall t \in T$$

и в матрице  $\mathcal{D}_r(t)$  имеется неособенный для всех  $t \in T$  минор порядка  $n(r+1)$ , включающий в себя  $\lambda$  столбцов матрицы  $\Lambda_r(t)$  и все столбцы матрицы  $\mathcal{A}_r(t)$ . Такой минор будем называть *разрешающим минором*.

**О п р е д е л е н и е 1.** Наименьшее значение  $r \leq n$ , при котором в  $\mathcal{D}_r(t)$  имеется разрешающий минор, называется *индексом неразрешенности* ДАУ (0.1).

Обозначим через  $\mathcal{M}_r(t)$  квадратную порядка  $n(r+1)$  подматрицу матрицы  $\mathcal{D}_r(t)$ , определителем которой является разрешающий минор.

Введем обозначение

$$(A_1(t) \ A_2(t)) = A(t)Q, \quad (B_1(t) \ B_2(t)) = B(t)Q, \quad (1.1)$$

где  $Q$  – матрица перестановок столбцов<sup>1</sup>, такая, что все столбцы матрицы

$$\mathcal{B}_{2,r}(t) = \text{col}(B_2(t), B'_2(t), \dots, B_2^{(r)}(t)) \quad (1.2)$$

входят в разрешающий минор, а столбцы  $\text{col}(B_1(t), B'_1(t), \dots, B_1^{(r)}(t))$  не входят в этот минор. Блоки  $B_2(t)$  и  $A_2(t)$  из (1.1), (1.2) имеют размеры  $n \times d$  где  $d = nr - \lambda$ . О построении матрицы  $Q$  см. в [27].

**Л е м м а 1** [28]. Пусть:

- 1)  $\text{rank} \Lambda_r(t) = \lambda = \text{const} \ \forall t \in T$ ;
- 2) в матрице  $\mathcal{D}_r(t)$  имеется разрешающий минор.

Тогда существует оператор

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t) \frac{d}{dt} + \dots + R_r(t) \left( \frac{d}{dt} \right)^r \quad (1.3)$$

с бесконечно дифференцируемыми на  $T$  коэффициентами  $R_j(t)$ ,  $j = \overline{0, r}$ , обладающий следующим свойством:

$$\mathcal{R} [A(t)Q\varphi'(t) + B(t)Q\varphi(t)] = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \varphi'(t) + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} \varphi(t) \quad (1.4)$$

для всех значений  $t \in T$  и для любой  $n$ -мерной вектор-функции  $\varphi(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T)$ . Здесь  $E_d$  – единичная матрица порядка  $d$ ,  $Q$  – матрица перестановок из (1.1),

$$\text{col}(J_2(t), J_1(t)) = (R_0(t) \ R_1(t) \ \dots \ R_r(t)) \text{col}(B_1(t), B'_1(t), \dots, B_1^{(r)}(t)).$$

При этом коэффициенты оператора (1.3) вычисляются по формуле [29]

$$(R_0(t) \ R_1(t) \ \dots \ R_r(t)) = (E_n \ O \ \dots \ O) \mathcal{M}_r^{-1}(t). \quad (1.5)$$

**Л е м м а 2.** [28] Пусть выполнены предположения леммы 1 и

$$\text{rank} \Lambda_{r+1}(t) = \text{rank} \Lambda_r(t) + n \quad \forall t \in T.$$

Тогда существует оператор  $\mathcal{L} = L_0(t) + L_1(t) \frac{d}{dt}$ , такой, что

$$\mathcal{L} \left[ \sum_{j=0}^r R_j(t) \varphi^{(j)}(t) \right] = \varphi(t) \quad \forall \varphi(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathbf{R}),$$

где  $L_0(t), L_1(t) \in \mathbf{C}^\infty(T) - (n \times n)$ -матрицы.

Другими словами, в предположениях леммы 2 оператор (1.3) имеет левый обратный оператор  $\mathcal{L}$ .

**2. Импульсная переходная матрица.** Предположим, что для ДАУ (0.1) выполнены все предположения леммы 2, а элементы управления  $u(t)$  являются достаточно гладкими на  $T$  функциями.

Подойствуем на систему (0.1) оператором (1.3), коэффициенты которого определяются формулой (1.5). Принимая во внимание свойство (1.4) этого оператора, получим систему

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} Q^{-1} \frac{d}{dt} x(t) + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} Q^{-1} x(t) + \sum_{j=0}^r R_j(t) \left( \frac{d}{dt} \right)^j (U(t)u(t)) = 0. \quad (2.1)$$

Разобьем матрицы  $R_j(t)$  на блоки размера  $(n-d) \times n$  и  $d \times n$  соответственно:

$$R_j(t) = \text{col}(R_{1,j}(t), R_{2,j}(t)), \quad j = \overline{0, r}.$$

Обозначим

$$Q^{-1} x(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t)), \quad (2.2)$$

<sup>1</sup> О матрицах перестановок строк и столбцов см. в книге [26, с. 127, 128].

где  $x_1(t)$  —  $(n-d)$ -мерная, а  $x_2(t)$  —  $d$ -мерная вектор-функция,

$$\mathbf{d}_r[u(t)] = \text{col}(u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t)),$$

$$(V_1(t) \ V_2(t)) = V(t)Q, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{U}_i(t) = (U_{i,0}(t), U_{i,1}(t), \dots, U_{i,r}(t)), \quad i = 1, 2,$$

$$U_{1,j}(t) = \sum_{i=j}^r C_i^j R_{1,i}(t) U^{(i-j)}(t), \quad U_{2,j}(t) = \sum_{i=j}^r C_i^j R_{2,i}(t) U^{(i-j)}(t), \quad j = \overline{0, r}. \quad (2.4)$$

Тогда систему (2.1), (0.2) можно записать в виде

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) + \mathcal{U}_1(t)\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \quad (2.5)$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) + \mathcal{U}_2(t)\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \quad (2.6)$$

$$y(t) = V_1(t)x_1(t) + V_2(t)x_2(t). \quad (2.7)$$

По построению решения систем (0.1) и (2.5), (2.6) связаны матрицей перестановок  $Q$  (см. (2.2)). Согласно лемме 2, оператор  $\mathcal{R}$  имеет левый обратный оператор, поэтому любое решение ДАУ (0.1) является решением системы (2.5), (2.6) и наоборот.

По этой причине общее решение системы (0.1) может быть представлено как

$$x(t) = Q \left\{ \begin{pmatrix} E_{n-d} \\ -J_2(t) \end{pmatrix} \left( X(t)X^{-1}(t_0)x_1(t_0) - X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) \mathcal{U}_1(\tau) \mathbf{d}_r[u(\tau)] d\tau \right) - \begin{pmatrix} O \\ E_d \end{pmatrix} \mathcal{U}_2(t) \mathbf{d}_r[u(t)] \right\},$$

где  $X(t)$  — фундаментальная матрица решений системы

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) = 0. \quad (2.8)$$

В случае равновесной системы ( $x_1(t_0) = 0$ ) с учетом (2.3) из (0.2) получим

$$y(t) = V(t)x(t) = (V_2(t)J_2(t) - V_1(t)) X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) \mathcal{U}_1(\tau) \mathbf{d}_r[u(\tau)] d\tau - V_2(t) \mathcal{U}_2(t) \mathbf{d}_r[u(t)]. \quad (2.9)$$

Введем в рассмотрение оператор  $\mathcal{J}$ , действующий на достаточно гладкую матрицу  $\Phi(t)$  соответствующего размера по правилу

$$\mathcal{J}[\Phi](t) = \Phi(t)J_1(t) + \Phi'(t).$$

Будем считать  $\mathcal{J}^0[\Phi](t) = E_{n-d}$ , тогда

$$\mathcal{J}[E_{n-d}](t) = J_1(t), \quad \mathcal{J}^2[E_{n-d}](t) = \mathcal{J}[\mathcal{J}[E_{n-d}]](t) = J_1^2(t) - J_1'(t)$$

и т.д.

Для нахождения импульсной переходной матрицы равновесной системы (0.1), (0.2) зададим на  $i$ -м входе импульсное воздействие

$$u(t) = \text{col}(0, \dots, 0, \delta(t - \tau), 0, \dots, 0),$$

где  $\delta(t - \tau)$  — дельта-функция Дирака. Тогда на выходе получим величину

$$\omega_i(t, \tau) = \omega_{i,1}(t, \tau) + \omega_{i,2}(t, \tau), \quad (2.10)$$

$$\omega_{i,1}(t, \tau) = (V_2(t)J_2(t) - V_1(t)) X(t)X^{-1}(\tau) \left( \sum_{k=0}^r \mathcal{J}^k[E_{n-d}](\tau) \left( \sum_{j=k}^r (-1)^j C_j^{j-k} R_{1,j}^{(j-k)}(\tau) \right) \right) w_i(\tau), \quad (2.11)$$

$$\omega_{i,2}(t, \tau) = \sum_{k=0}^r \left( \sum_{j=k}^r (-1)^{j-k} C_j^{j-k} (V_2(\tau)R_{2,j}(\tau))^{(j-k)} \right) w_i(\tau) \delta^{(k)}(t - \tau), \quad i = \overline{1, l}. \quad (2.12)$$

Здесь  $w_i(t)$  —  $i$ -й столбец матрицы  $U(t)$ :  $U(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_l(t))$ ,  $(V_2(\tau)R_{2,j}(\tau))^{(j-k)} = (V_2(t)R_{2,j}(t))^{(j-k)}|_{t=\tau}$ .

Формулы (2.10)–(2.12) получены с использованием свойств дельта-функции:

$$g(t)\delta^{(k)}(t-\tau) = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i g^{(i)}(\tau)\delta^{(k-i)}(t-\tau),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta^{(k)}(t-\tau)dt = (-1)^k g^{(k)}(\tau) \quad \forall g(t) \in C^\infty(\mathbf{R}).$$

Импульсная переходная матрица системы (0.1), (0.2) будет иметь вид

$$\Omega(t, \tau) = (\omega_1(t, \tau) \ \omega_2(t, \tau) \ \dots \ \omega_l(t, \tau))$$

или с использованием (2.10)–(2.12) —

$$\Omega(t, \tau) = \Omega_1(t, \tau) + \Omega_2(t, \tau), \quad (2.13)$$

где

$$\Omega_1(t, \tau) = (V_1(t) - V_2(t)J_2(t))X(t)X^{-1}(\tau) \left( \sum_{k=0}^r \mathcal{J}^k[E_{n-d}](\tau) \left( \sum_{j=k}^r (-1)^j C_j^{j-k} R_{1,j}^{(j-k)}(\tau) \right) \right) U(\tau), \quad (2.14)$$

$$\Omega_2(t, \tau) = \sum_{k=0}^r W_k(\tau)\delta^{(k)}(t-\tau), \quad (2.15)$$

$$W_k(\tau) = - \sum_{j=k}^r (-1)^{j-k} C_j^{j-k} (V_2(\tau)R_{2,j}(\tau))^{(j-k)} U(\tau), \quad k = \overline{0, r}. \quad (2.16)$$

Обратимся к системе (2.5)–(2.7). В результате замены переменных

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ -J_2(t) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

уравнения (2.5)–(2.7) примут вид ДАУ с полностью разделенными дифференциальной и алгебраической подсистемами:

$$\dot{z}_1(t) + J_1(t)z_1(t) + \mathcal{U}_1(t)\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \quad (2.17)$$

$$z_2(t) + \mathcal{U}_2(t)\mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \quad (2.18)$$

$$y(t) = (V_1(t) - V_2(t)J_2(t))z_1(t) + V_2(t)z_2(t). \quad (2.19)$$

Используя вид общего решения

$$z_1(t) = X(t)X^{-1}(t_0)z_1(t_0) - X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)\mathcal{U}_1(\tau)\mathbf{d}_r[u(\tau)]d\tau, \quad z_2(t) = -\mathcal{U}_2(t)\mathbf{d}_r[u(t)],$$

при  $z_1(t_0) = 0$  для выхода системы (2.17)–(2.19) получим представление (2.9). Таким образом, системы (0.1), (0.2), (2.5)–(2.7) и (2.17)–(2.19) будут иметь одну и ту же импульсную переходную матрицу (2.13)–(2.16).

Для систем (2.17) и (2.18) зададим выходы

$$y_1(t) = (V_1(t) - V_2(t)J_2(t))z_1(t), \quad (2.20)$$

$$y_2(t) = V_2(t)z_2(t). \quad (2.21)$$

Легко видеть, что функция (2.19), вычисляемая по формуле (2.9), есть сумма соответствующих представлений для выходов систем (2.17), (2.20) и (2.18), (2.21). По этой причине импульсная переходная матрица системы (0.1), (0.2) находится как сумма импульсных переходных матриц ее дифференциальной и алгебраической подсистем.

Таким образом, доказан следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть выполнены все предположения леммы 2. Тогда ДАУ (0.1), (0.2), (2.5)–(2.7) и (2.17)–(2.19) имеют одну и ту же импульсную переходную матрицу  $\Omega(t, \tau)$  вида (2.13)–(2.16). При этом в (2.13)  $\Omega_1(t, \tau)$  есть импульсная переходная матрица дифференциальной подсистемы (2.17), (2.20) системы (0.1), (0.2), а  $\Omega_2(t, \tau)$  — импульсная переходная матрица ее алгебраической подсистемы (2.18), (2.21).

**3. Эквивалентность систем.** Изучается вопрос о том, какой должна быть замена переменных в системе ДАУ для того, чтобы импульсная переходная матрица осталась без изменений. Эта проблема тесно связана с понятием эквивалентности систем [15, с. 79].

Рассмотрим ДАУ

$$\tilde{A}(t) \frac{d}{dt} \xi(t) + \tilde{B}(t) \xi(t) + \tilde{U}(t) u(t) = 0, \quad t \in T, \quad (3.1)$$

$$y(t) = \tilde{V}(t) \xi(t), \quad (3.2)$$

в которых матричные коэффициенты  $\tilde{A}(t), \tilde{B}(t), \tilde{U}(t), \tilde{V}(t) \in C^\infty(T)$  имеют те же размеры, что и соответствующие коэффициенты системы (0.1), (0.2).

**О п р е д е л е н и е 2.** ДАУ (0.1), (0.2) и (3.1), (3.2) эквивалентны при нулевом начальном состоянии, если при нулевых начальных данных и при одинаковых входных сигналах они имеют одинаковые выходные сигналы.

Из определения 2 следует, что эквивалентные при нулевом начальном состоянии системы имеют одну и ту же импульсную переходную матрицу. Об эквивалентности систем ДАУ имеет смысл говорить лишь в том случае, если они имеют одинаковую внутреннюю структуру, которая для ДАУ, удовлетворяющих предположениям леммы 2, представлена формой (2.5)–(2.7).

Пусть системы (0.1) и (3.1) удовлетворяют условиям леммы 2. Тогда ДАУ (0.1) имеют одни и те же решения, что и система (2.5)–(2.7), а ДАУ (3.1), (3.2) эквивалентны в смысле решений системы

$$\xi_1'(t) + \tilde{J}_1(t) \xi_1(t) + \tilde{U}_1(t) \mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \quad (3.3)$$

$$\xi_2(t) + \tilde{J}_2(t) \xi_1(t) + \tilde{U}_2(t) \mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \quad (3.4)$$

$$y(t) = \tilde{V}_1(t) \xi_1(t) + \tilde{V}_2(t) \xi_2(t), \quad (3.5)$$

где  $\text{col}(\xi_1(t), \xi_2(t)) = \tilde{Q}^{-1} \xi(t)$ ,  $\tilde{Q}$  – матрица перестановок.

**О п р е д е л е н и е 3.** Будем говорить, что системы (0.1) и (3.1), удовлетворяющие всем предположениям леммы 2, имеют одинаковую структуру, если совпадают их индексы неразрешенности и все матричные коэффициенты структурных форм (2.5), (2.6) и (3.3), (3.4) попарно имеют одинаковые размеры.

**У т в е р ж д е н и е 1.** Пусть для ДАУ (0.1) и (3.1) выполняются условия леммы 2. Кроме того, они имеют один и тот же индекс неразрешенности  $r$  и одинаковые ранги  $\lambda$  соответствующих матриц  $\Lambda_r(t)$ . Тогда эти системы имеют одинаковую структуру.

Справедливость утверждения вытекает из равенства  $d = nr - \lambda$ , где  $d$  – размерность вектор-функций  $x_2(t)$  и  $\xi_2(t)$  в системах (2.5), (2.6) и (3.3), (3.4).

Осуществим в (2.5)–(2.7) замену переменных

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) & O \\ S(t) & P_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

где  $P_1(t), P_2(t), S(t) \in C^\infty(T)$ , квадратные блоки  $P_1(t)$  и  $P_2(t)$  (порядков соответственно  $n - d$  и  $d$ ) обратимы при всех  $t \in T$ , а  $S(t)$  – произвольная  $(n - d) \times d$ -матрица. В результате получим систему

$$z_1'(t) + P_1^{-1}(t) \left( P_1'(t) + J_1(t) P_1(t) \right) z_1(t) + P_1^{-1}(t) U_1(t) \mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \quad (3.7)$$

$$P_2^{-1}(t) (J_1(t) P_1(t) + S(t)) z_1(t) + z_2(t) + P_2^{-1}(t) U_2(t) \mathbf{d}_r[u(t)] = 0. \quad (3.8)$$

$$y(t) = (V_1(t) P_1(t) + V_2(t) S(t)) z_1(t) + V_2(t) P_2(t) z_2(t). \quad (3.9)$$

Используя вид общего решения системы (3.7), (3.8), нетрудно получить представление для выхода (3.9) при  $z_1(t_0) = 0$ :

$$y(t) = (V_2(t) J_2(t) - V_1(t)) P_1(t) Z(t) \int_{t_0}^t Z^{-1}(\tau) P_1^{-1}(\tau) U_1(\tau) \mathbf{d}_r[u(\tau)] d\tau - V_2(t) P_2^{-1}(t) U_2(t) \mathbf{d}_r[u(t)], \quad (3.10)$$

где  $Z(t)$  — фундаментальная матрица решений системы

$$z_1'(t)(t) + P_1^{-1}(t) \left( P_1'(t) + J_1(t)P_1(t) \right) z_1(t) = 0. \quad (3.11)$$

По построению фундаментальные матрицы решений систем (3.11) и (2.8) связаны тождеством

$$Z(t) = P_1^{-1}(t)X(t). \quad (3.12)$$

Подставив (3.12) в (3.10), получим представление (2.9). Это доказывает эквивалентность при нулевом входе систем (2.5)–(2.7) и (3.7)–(3.9). Приравнявая соответствующие матричные коэффициенты систем (3.3)–(3.5) и (3.7)–(3.9), получим следующий результат.

**Л е м м а 3.** Если существуют матрицы  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ ,  $S(t) \in C^\infty(T)$ , такие, что для всех  $t \in T$  выполняются соотношения

$$\det P_1(t) \neq 0, \quad \det P_2(t) \neq 0, \quad (3.13)$$

$$\tilde{J}_1(t) = P_1^{-1}(t) \left( J_1(t)P_1(t) + P_1'(t) \right), \quad \tilde{J}_2(t) = P_2^{-1}(t) (J_2(t)P_1(t) + S(t)), \quad (3.14)$$

$$\tilde{u}_1(t) = P_1^{-1}(t)u_1(t), \quad \tilde{u}_2(t) = P_2^{-1}(t)u_2(t), \quad (3.15)$$

$$\tilde{V}_1(t) = V_1(t)P_1(t) + V_2(t)S(t), \quad \tilde{V}_2(t) = V_2(t)P_2(t), \quad (3.16)$$

то системы (2.5)–(2.7) и (3.3)–(3.5) эквивалентны при нулевом начальном состоянии.

Из изложенного выше следует, что замена переменных (2.2), (3.6), где  $Q$  — матрица перестановок из (1.1), не влияет на вид импульсной переходной матрицы системы (0.1), (0.2).

**Т е о р е м а 2.** Пусть для систем (0.1) и (3.1) выполняются все предположения леммы 2. При этом совпадают индексы неразрешенности этих систем и ранги  $\lambda$  соответствующих матриц  $\Lambda_r(t)$ . Если существуют матрицы  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ ,  $S(t) \in C^\infty(T)$ , такие, что для всех  $t \in T$  выполняются соотношения (3.13)–(3.16), то системы (0.1), (0.2) и (3.1), (3.2) эквивалентны при нулевом начальном состоянии.

**С л е д с т в и е 1.** В предположениях теоремы 2 системы (0.1), (0.2) и (3.1), (3.2) имеют одну и ту же импульсную переходную матрицу.

**4. Реализация импульсной переходной матрицы.** Согласно теореме 1, любые ДАУ (0.1), (0.2), удовлетворяющие предположениям леммы 2, имеют импульсную переходную матрицу вида (2.13), в которой  $\Omega_1(t, \tau)$  является импульсной переходной матрицей дифференциальной подсистемы (2.17), (2.20), а  $\Omega_2(t, \tau)$  — импульсной переходной матрицей алгебраической подсистемы (2.18), (2.21). По этой причине реализацию импульсной переходной матрицы (2.13) можно строить в виде (2.17)–(2.19). Очевидно, что для этого нужно построить реализации импульсных переходных матриц  $\Omega_1(t, \tau)$  и  $\Omega_2(t, \tau)$ .

В данной работе не затрагиваются вопросы, связанные с реализацией матрицы  $\Omega_1(t, \tau)$ , поскольку в настоящее время эта проблема детально изучена. Например, в книге [15, гл. 4–6] рассматривается задача синтеза системы вида (0.3), реализующей наперед заданную импульсную переходную матрицу. Приведены необходимые и достаточные условия реализуемости и минимальности реализации. Предложен алгоритм практической проверки реализуемости импульсной переходной матрицы и алгоритм построения минимальной реализации [15, с. 191–198].

Заметим, что из (0.3) легко получить реализацию вида (2.17). Для этого достаточно разбить матрицу  $U(t)$  на блоки соответствующего размера, при необходимости добавив нулевые столбцы. При этом  $J_1(t) = B(t)$ ,  $u_1(t) = U(t)$ ,  $z_1(t) = x(t)$ ,  $t \in T$ .

Перейдем к анализу импульсной переходной матрицы (2.15), (2.16). Принимая во внимание (2.4), нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$W_r(t) = -V_2(t)U_{2,r}(t), \quad (4.1)$$

$$W_{r-1}(t) + C_r^{r-1}W_r'(t) = -V_2(t)U_{2,r-1}(t) \quad (4.2)$$

$$W_{r-2}(t) + C_{r-1}^{r-2}W_{r-1}'(t) + C_r^{r-2}W_r''(t) = -V_2(t)U_{2,r-2}(t), \quad (4.3)$$

.....

$$W_0(t) + C_1^0W_1'(t) + C_2^0W_2''(t) + \dots + C_r^0W_r^{(r)}(t) = -V_2(t)U_{2,0}(t). \quad (4.4)$$

Здесь для нахождения производных, присутствующих в выражениях (4.2)–(4.4) по левую сторону от знака равенства, использованы формулы (2.16).

Введем в рассмотрение матрицу

$$\mathcal{W}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^r C_j^0 W_j^{(j)}(t) & \dots & W_{r-1}(t) + C_r^{r-1} W_r'(t) & W_r(t) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

В обозначениях (4.5), (2.4) равенства (4.1)–(4.4) можно записать в виде

$$\mathcal{W}(t) = -V_2(t)\mathcal{U}_2(t). \quad (4.6)$$

Заметим, что для любой заданной матрицы (2.15), используя формулу (4.5), всегда можно построить матрицу  $\mathcal{W}(t)$  и наоборот. Построение реализации импульсной переходной матрицы (2.15) напрямую связано с построением разложения вида (4.6).

**Т е о р е м а 3.** Импульсная переходная матрица

$$\Omega_2(t, \tau) = \sum_{k=0}^r W_k(\tau) \delta^{(k)}(t - \tau), \quad (4.7)$$

где  $W_k(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ ,  $k = \overline{0, r}$ , имеет реализацию

$$z_2(t) + \mathcal{U}_2(t) \mathbf{d}_r[u(t)] = 0, \quad (4.8)$$

$$y_2(t) = V_2(t)z_2(t) \quad (4.9)$$

( $\mathcal{U}_2(t), V_2(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ ) тогда и только тогда, когда существует разложение (4.6) матрицы (4.5).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Необходимость. Пусть импульсная переходная матрица (4.7) имеет реализацию вида (4.8), (4.9). В этом случае для коэффициентов этой реализации справедливы тождества (4.1)–(4.4), которые можно записать в виде (4.6).

**Д о с т а т о ч н о с т ь.** Пусть для матрицы (4.5) справедливо разложение (4.6). Разобьем  $\mathcal{U}_2(t)$  на  $r + 1$  блок размера  $d \times l$ :  $\mathcal{U}_2(t) = (U_{2,0}(t), U_{2,1}(t), \dots, U_{2,r}(t))$ , тогда равенство (4.6) можно представить в виде (4.1)–(4.4). Запишем систему (4.8), (4.9), в которой коэффициенты являются элементами разложения (4.6). В силу (4.1)–(4.4) импульсная переходная матрица для ДАУ (4.8), (4.9) будет иметь вид (4.7). Таким образом, (4.8), (4.9) суть реализация импульсной переходной матрицы (4.7). Теорема 3 доказана.

**5. Управляемость и наблюдаемость.** Построение минимальной реализации импульсной переходной матрицы тесно связано со свойствами управляемости и наблюдаемости.

**О п р е д е л е н и е 4.** Систему (0.1) будем называть *управляемой* на отрезке  $T$ , если для любых  $\theta_0, \theta_1 \in T$  и  $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^n$  найдется достаточно гладкое управление  $u(t)$ , такое, что решение ДАУ (0.1) существует и удовлетворяет условиям  $x(\theta_0) = x_0, x(\theta_1) = x_1$ .

**О п р е д е л е н и е 5.** Система (0.1), (0.2) называется *наблюдаемой* на отрезке  $T$ , если по известному на  $T$  достаточно гладкому выходу  $y(t)$  единственным образом можно восстановить  $x(t_*)$  в любой точке  $t_* \in T$ .

**Т е о р е м а 4.** Пусть в (4.8), (4.9)  $\mathcal{U}_2(t), V_2(t) \in \mathbf{C}(T)$ .

1. Система (4.8) управляема на отрезке  $T$  тогда и только тогда, когда матрица  $\mathcal{U}_2(t)$  имеет полный ранг по строкам для всех  $t \in T$ .

2. Система (4.8), (4.9) наблюдаема на отрезке  $T$  тогда и только тогда, когда матрица  $V_2(t)$  имеет полный ранг по столбцам для всех  $t \in T$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** 1. В соответствии с определением 4 управляемость системы (4.8) означает существование достаточно гладкого управления  $u(t)$ , такого, что

$$z_0 = -\mathcal{U}_2(\theta_0) \mathbf{d}_r[u(\theta_0)], \quad z_1 = -\mathcal{U}_2(\theta_1) \mathbf{d}_r[u(\theta_1)] \quad (5.1)$$

для любых векторов  $z_0, z_1 \in \mathbf{R}_d$  и любых значений  $\theta_0, \theta_1 \in T$  ( $d$  — размерность вектор-функции  $z_2(t)$ ). Здесь  $\mathbf{d}_r[u(\theta_0)] = \mathbf{d}_r[u(t)]|_{t=\theta_0}$ . Покажем, что в этом случае  $\text{rank } \mathcal{U}_2(t) = d \quad \forall t \in T$ .

Предположим, что  $\exists \theta_0 \in T: \text{rank } \mathcal{U}_2(\theta_0) < d$ . Тогда найдется обратимая матрица  $P_*$ , такая, что

$$P_* \mathcal{U}_2(\theta_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{2,*} \\ O \end{pmatrix},$$

где  $\mathcal{U}_{2,*}$  имеет полный ранг по строкам. Умножив первое из равенств (5.1) слева на  $P_*$ , получим

$$\begin{pmatrix} z_{1,*} \\ z_{2,*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{2,*} \\ O \end{pmatrix} \mathbf{d}_r[u(\theta_0)],$$

где  $\text{col}(z_{1,*}, z_{2,*}) = P_* z_0$ . В этом случае рассматриваемое равенство (5.1) будет выполнено не для всех  $z_0$ , а только для тех, в которых  $z_{2,*} = 0$ . Получили противоречие. Следовательно, матрица  $\mathcal{U}_2(t)$  имеет полный строчный ранг  $d$  во всех точках  $t \in T$ .

Пусть  $\text{rank } \mathcal{U}_2(t) = d \ \forall t \in T$ . Легко видеть, что векторы

$$\mathbf{d}_r[u(\theta_0)] = -\mathcal{U}_2^T(\theta_0)(\mathcal{U}_2(\theta_0)\mathcal{U}_2^T(\theta_0))^{-1}z_0, \quad \mathbf{d}_r[u(\theta_1)] = -\mathcal{U}_2^T(\theta_1)(\mathcal{U}_2(\theta_1)\mathcal{U}_2^T(\theta_1))^{-1}z_1 \quad (5.2)$$

удовлетворяют уравнениям (5.1). В (5.2) управление будем искать в виде

$$u(t) = \sum_{j=0}^r \alpha_j(t - \theta_0)^j + \sum_{j=0}^r \beta_j(t - \theta_1)^j, \quad (5.3)$$

где  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbf{R}^l$  — неизвестные векторы. Нетрудно показать, что в результате подстановки (5.3) в (5.2) получим систему алгебраических уравнений, однозначно разрешимую относительно коэффициентов  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbf{R}^l$ ,  $j = \overline{0, r}$ . Таким образом, для любых  $\theta_0, \theta_1 \in T$  и  $z_0, z_1 \in \mathbf{R}^d$  указан способ построения управления, удовлетворяющего равенствам (5.1). Это означает, что система (4.8) управляема на отрезке  $T$ .

2. Наблюдаемость системы (4.8), (4.9) означает, что из уравнения (4.9) при каждом  $t \in T$  единственным образом определится  $z_2(t)$  для любого заданного  $y(t)$ . Покажем, что в этом случае матрица  $V_2(t)$  будет иметь полный ранг  $d$  по столбцам при всех  $t \in T$ .

Предположим противное, т.е. что  $\exists t_* \in T: \text{rank } V_2(t_*) < d$ . Тогда существует обратимая матрица  $S_*$ , такая, что

$$V_2(t_*)S_* = \begin{pmatrix} V_* & O \end{pmatrix},$$

где  $V_*$  имеет полный ранг по столбцам.

Положим в (4.9)  $t = t_*$ ,  $z_2(t_*) = S_* \text{col}(z_{1,*}, z_{2,*})$ , где  $z_{1,*}, z_{2,*}$  — некоторые векторы соответствующих размерностей. В результате получим уравнение

$$y(t_*) = V_* z_{1,*},$$

из которого единственным образом определится только компонента:  $z_{1,*} = (V_*^T V_*)^{-1} V_*^T y(t_*)$ , а  $z_{2,*}$  может быть произвольным. Получили противоречие. Следовательно,  $\text{rank } V_2(t) = d \ \forall t \in T$ .

Наоборот. Пусть матрица  $V_2(t)$  имеет полный ранг по столбцам для любого  $t \in T$ . Тогда из (4.8) можно единственным образом найти вектор  $z_2(t)$ :

$$z_2(t) = (V_2^T(t) V_*(t))^{-1} V_*^T(t) y(t).$$

Это означает, что система (4.8), (4.9) наблюдаема на отрезке  $T$ . Теорема 4 доказана.

## 6. Минимальная реализация в случае постоянного ранга матрицы $\mathcal{W}(t)$ .

**О п р е д е л е н и е 6.** *Размерностью* реализации будем называть размерность ее вектора состояния.

**О п р е д е л е н и е 7.** Реализация импульсной переходной матрицы называется *минимальной*, если она имеет наименьшую из возможных размерность вектора состояния.

В случае, когда матрица  ${}^{\circ}W(t)$  имеет на  $T$  постоянный ранг, можно показать, что (4.7) всегда имеет управляемую и наблюдаемую реализацию, которая будет минимальной.

**Утверждение 2** [30, с. 39]. Пусть прямоугольная матрица  ${}^{\circ}W(t) \in \mathbf{C}^{\infty}(T)$  и

$$\text{rank } {}^{\circ}W(t) = d = \text{const} \quad \forall t \in T. \quad (6.1)$$

Тогда существуют матрицы соответствующих размеров  $\Phi(t), \Psi(t) \in \mathbf{C}^{\infty}(T)$ , такие, что  $\det \Phi(t) \neq 0, \det \Psi(t) \neq 0$  и

$$\Phi(t) {}^{\circ}W(t) \Psi(t) = \begin{pmatrix} E_d & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad \forall t \in T.$$

**Теорема 5.** Пусть  $W_k(t) \in \mathbf{C}^{\infty}(T)$ ,  $k = \overline{0, r}$ . Импульсная переходная матрица (4.7) имеет управляемую и наблюдаемую реализацию вида (4.8), (4.9) тогда и только тогда, когда справедливо условие (6.1). При этом  $d$  – размерность реализации.

**Доказательство.** Достаточность. Предположим, что условие (6.1) выполнено. В соответствии с утверждением 2 найдется обратимая для всех  $t \in T$  матрица  $\Psi(t) \in \mathbf{C}^{\infty}(T)$ , такая, что

$${}^{\circ}W(t) \Psi(t) = (V_2(t) \ O),$$

где матрица  $V_2(t)$  состоит из  $d$  столбцов и  $\text{rank } V_2(t) = d$ . Положим

$$\mathcal{U}_2(t) = -(E_p \ O) \Psi^{-1}(t).$$

Тогда

$$-V_2(t) \mathcal{U}_2(t) = {}^{\circ}W(t). \quad (6.2)$$

По построению матрица  $V_2(t)$  имеет полный ранг по столбцам, а  $\mathcal{U}_2(t)$  – по строкам для всех  $t \in T$ , поэтому, согласно теореме 4, реализация (4.8), (4.9) будет управляема и наблюдаема.

**Необходимость.** Пусть существует управляемая и наблюдаемая реализация (4.8), (4.9) импульсной переходной матрицы (4.7), такая, что  $V_2(t), \mathcal{U}_2(t) \in \mathbf{C}^{\infty}(T)$ . В соответствии с теоремой 4 матрицы  $V_2(t)$  и  $\mathcal{U}_2(t)$  будут иметь при всех  $t \in T$  полный ранг  $d$  по столбцам и строкам соответственно. При этом справедливо тождество (6.2).

Согласно утверждению 2, найдутся обратимые матрицы  $\Phi(t), \Psi(t) \in \mathbf{C}^{\infty}(T)$ , такие, что

$$\Phi(t) V_2(t) = \begin{pmatrix} E_d \\ O \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_{2,r}(t) \Psi(t) = (E_d \ O).$$

Отсюда, принимая во внимание представление (6.2), получим

$$\Phi(t) {}^{\circ}W(t) \Psi(t) = - \begin{pmatrix} E_d & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Обратимость матриц  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$  гарантирует выполнение условия (6.1). Теорема 5 доказана.

**Следствие 2.** Пусть  $W_k(t) \in \mathbf{C}^{\infty}(T)$ ,  $k = \overline{0, r}$ , и импульсная переходная матрица (4.7) имеет управляемую и наблюдаемую реализацию (4.8), (4.9). Тогда эта реализация будет иметь минимальную размерность из возможных.

**Доказательство.** Допустим, что система (4.8), (4.9) – управляемая и наблюдаемая реализация импульсной переходной матрицы (4.7). По теореме 5 это означает, что справедливо тождество (6.2), где матрицы  $V_2(t)$  и  $\mathcal{U}_2(t)$  имеют при всех  $t \in T$  полный ранг  $d$  по столбцам и строкам соответственно. Тогда, согласно доказательству теоремы 5,  $\text{rank } {}^{\circ}W(t) = d$ . Покажем, что эта реализация минимальна.

Допустим, что имеется реализация меньшего размера  $\hat{d} < d$  с соответствующими матрицами  $\hat{V}_2(t)$  и  $\hat{\mathcal{U}}_2(t)$ , состоящими из  $\hat{d}$  столбцов и  $\hat{d}$  строк соответственно. Тогда по теореме 3

$$-\hat{V}_2(t) \hat{\mathcal{U}}_2(t) = {}^{\circ}W(t). \quad (6.3)$$

Из (6.3) следует, что  $\text{rank } {}^{\circ}W_r(t) \leq \hat{d}$ . Получили противоречие. Таким образом, управляемая и наблюдаемая реализация имеет минимальную размерность вектора состояния. Следствие 2 доказано.

**Утверждение 3.** Пусть  $W_k(t) \in C^{\infty}(T)$ ,  $k = \overline{0, r}$ , и выполняется условие (6.1). Тогда любая минимальная реализация (4.8), (4.9) импульсной переходной матрицы (4.7) будет управляема и наблюдаема на отрезке  $T$ .

**Доказательство.** Допустим, что существует минимальная реализация (4.8), (4.9) размерности  $d$ , которая не является управляемой на отрезке  $T$ . Согласно теореме 3, это означает, что существует  $t_* \in T$  :  $\text{rank } {}^{\circ}u_2(t_*) = d_* < d$ . В силу (6.2)  $\text{rank } {}^{\circ}W(t_*) \leq d_* < d$ . Получили противоречие. Следовательно, минимальная реализация всегда управляема на отрезке  $T$ .

Случай наличия минимальной реализации, не являющейся наблюдаемой, рассматривается аналогично. Утверждение 3 доказано.

Наиболее простой способ построить минимальную реализацию возможен, если в дополнение к условию (6.1) предположить, что в матрице  ${}^{\circ}W(t)$  имеется  $d$  линейно независимых для всех  $t \in T$  столбцов.

Не ограничивая общности, можно считать, что

$${}^{\circ}W(t) = ({}^{\circ}W_1(t) \ {}^{\circ}W_2(t)),$$

где матрица  ${}^{\circ}W_1(t)$  состоит из  $d$  линейно независимых для всех  $t \in T$  столбцов.

Умножим  ${}^{\circ}W(t)$  справа на матрицу  $\Psi(t)$ , фигурирующую в формулировке утверждения 2:

$${}^{\circ}W(t)\Psi(t) = ({}^{\circ}W_1(t) \ {}^{\circ}W_2(t))\Psi(t) = ({}^{\circ}W_1(t) \ O).$$

Очевидно, что  $\Psi(t)$  будет иметь следующую структуру:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} E_p & \Psi_1(t) \\ O & \Psi_2(t) \end{pmatrix},$$

где блок  $\Psi_2(t)$  обратим при всех  $t \in T$ . Тогда

$${}^{\circ}W_2(t) = -{}^{\circ}W_1(t)\Psi_1(t)\Psi_2^{-1}(t). \quad (6.4)$$

Таким образом,

$${}^{\circ}W(t) = {}^{\circ}W_1(t)(E_p; -\Psi_1(t)\Psi_2^{-1}(t)).$$

Для построения реализации (4.8), (4.9) положим

$$V_2(t) = -{}^{\circ}W_1(t), \quad {}^{\circ}u_2(t) = (E_p; -\Psi_1(t)\Psi_2^{-1}(t)).$$

Другими словами, выберем в матрице  ${}^{\circ}W(t)$   $d$  линейно независимых для всех  $t \in T$  столбцов, они будут составлять матрицу  $-V_2(t)$ . Соотношение (6.4) означает, что остальные столбцы матрицы  ${}^{\circ}W(t)$  линейно выражаются через эти линейно независимые столбцы. Поэтому  $j$ -й столбец матрицы  ${}^{\circ}u_2(t)$  будет состоять из коэффициентов разложения  $j$ -го столбца матрицы  ${}^{\circ}W(t)$  по столбцам матрицы  $-V_2(t)$ .

**7. Минимальная реализация в случае переменного ранга матрицы  ${}^{\circ}W(t)$ .** Если  ${}^{\circ}W(t)$  имеет на  $T$  переменный ранг, то минимальная реализация может не быть управляемой или наблюдаемой. Рассмотрим пример индекса 1.

**Пример 1.** Пусть импульсная переходная матрица имеет вид

$$\Omega_2(t, \tau) = W_0(\tau)\delta(t - \tau), \quad W_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & \beta(t) \end{pmatrix},$$

где скалярные функции  $\alpha(t), \beta(t) \in C^{\infty}(T)$  обладают следующим свойством:  $\alpha(t) = 0$ , если  $\beta(t) \neq 0$ . Таким образом,  $\beta(t)$  и  $\alpha(t)$  обращаются в ноль либо по очереди, либо одновременно, вследствие чего матрица  $W_0(t)$  имеет на  $T$  переменный ранг. При этом структура множеств перемены ранга может быть выбрана сколь угодно сложной. Заметим, что в классе аналитических функций невозможно построить функции  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ , обладающие указанным выше свойством.

Заметим, что матрица  $\mathcal{W}(t) = W_0(t)$  не имеет линейно зависимых (равно как и линейно независимых) для всех  $t \in T$  строк.

Построим несколько разложений  $\mathcal{W}(t) = -V_2(t)\mathcal{U}_2(t)$ :

- 1)  $V_2(t) = -E_2$ ,  $\mathcal{U}_2(t) = W_0(t)$ ;
- 2)  $V_2(t) = -W_0(t)$ ,  $\mathcal{U}_2(t) = E_2$ ;
- 3)  $V_2(t) = -\begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{U}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta(t) \end{pmatrix}$ ;
- 4)  $V_2(t) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta(t) \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{U}_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Соответствующая реализация (4.8), (4.9) в случае 1 будет наблюдаемой, но не будет управляемой, в случае 2 она будет управляемой, но не будет наблюдаемой, в случаях 3 и 4 реализация не является ни наблюдаемой, ни управляемой. Очевидно, что при этом размерность вектора состояния  $z_2(t)$  в системе (4.8) уменьшить невозможно, т.е. все эти реализации минимальны.

Рассмотрим вопрос о размерности минимальной реализации в случае, когда элементы матрицы  $\mathcal{W}(t)$  – аналитические функции:  $\mathcal{W}(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ .

**Т е о р е м а 6.** Пусть  $W_k(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ ,  $k = \overline{0, r}$ , и  $\max_{t \in T} \text{rank } \mathcal{W}(t) = d$ . Тогда для импульсной переходной матрицы (4.7)

- 1) существует минимальная реализация (4.8), (4.9) размерности  $d$ , управляемая на  $T$ ;
- 2) существует минимальная реализация (4.8), (4.9) размерности  $d$ , наблюдаемая на  $T$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Известно [30, с. 40], что для матрицы  $\mathcal{W}(t)$  с аналитическими коэффициентами найдутся обратимые для любого  $t \in T$  матрицы  $\Phi(t)$ ,  $\Psi(t) \in \mathbf{C}^A(t)$ , такие, что

$$\Phi(t)\mathcal{W}(t)\Psi(t) = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{W}}(t) & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

где  $\bar{\mathcal{W}}(t) \in \mathbf{C}^A(T)$  –  $(d \times d)$ -матрица,  $\max_{t \in T} \text{rank } \bar{\mathcal{W}}(t) = d$ .

Положим

$$V_2(t) = -\Phi^{-1}(t) \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{W}}(t) \\ O \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_2(t) = (E_d \ O)\Psi^{-1}(t).$$

Принимая во внимание представление (7.1), нетрудно убедиться в справедливости тождества (6.2). Очевидно, что матрица  $\mathcal{U}_2(t)$  будет иметь  $\forall t \in T$  полный ранг по строкам  $d$ . Согласно теореме 4, это означает, что соответствующая реализация (4.8), (4.9) управляема на  $T$ . По построению эта реализация будет иметь минимальную из возможных размерность вектора состояния  $d$ .

Если положить

$$V_2(t) = -\Phi^{-1}(t) \begin{pmatrix} E_d \\ O \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_2(t) = (\bar{\mathcal{W}}(t) \ O)\Psi^{-1}(t),$$

то нетрудно убедиться, что соответствующая система (4.8), (4.9) является реализацией импульсной переходной матрицы (4.7) минимальной размерности  $d$ . Поскольку матрица  $V_2(t)$  имеет  $\forall t \in T$  полный ранг по столбцам, в соответствии с теоремой 4 система (4.8), (4.9) наблюдаема на  $T$ . Теорема 6 доказана.

Перейдем к более общему случаю  $\mathcal{W}(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ .

**Л е м м а 4.** Пусть  $F(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$  – некоторая матрица. Тогда существуют обратимые для всех  $t \in T$  матрицы  $\bar{\Phi}(t), \bar{\Psi}(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$  соответствующих размеров, такие, что

$$\bar{\Phi}(t)F(t)\bar{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} E & O & O \\ O & \bar{F}(t) & O \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

где блок  $\bar{F}(t)$  не имеет обратимых при всех  $t \in T$  подматриц и не имеет линейно независимых для всех  $t \in T$  столбцов.

**Доказательство.** Выделим в матрице  $F(t)$  обратимую для всех  $t \in T$  подматрицу  $F_1(t)$  максимально возможного порядка. С помощью матриц перестановок  $\Phi_1$  и  $\Psi_1$  переставим в  $F(t)$  строки и столбцы таким образом, чтобы

$$\Phi_1 F(t) \Psi_1 = \begin{pmatrix} F_1(t) & F_2(t) \\ F_3(t) & F_4(t) \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

В результате умножения слева и справа соответственно на матрицы

$$\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} F_1^{-1}(t) & O \\ -F_3(t)F_1^{-1}(t) & E \end{pmatrix}, \quad \Psi_2(t) = \begin{pmatrix} E & -F_1^{-1}(t)F_2(t) \\ O & E \end{pmatrix}$$

(7.3) приобретет вид

$$\begin{pmatrix} E & O \\ O & F_4^{[1]}(t) \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

где  $F_4^{[1]}(t) = -F_3(t)F_1^{-1}(t)F_2(t) + F_4(t)$ . Пусть  $\Psi_4^{[1]}(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$  обратимая для всех  $t \in T$  матрица, зануляющая в  $F_4^{[1]}(t)$  все линейно зависимые для всех  $t \in T$  столбцы. В результате умножения (7.4) справа на матрицу

$$\Psi_3(t) = \begin{pmatrix} E & O \\ O & \Psi_4^{[1]}(t) \end{pmatrix}$$

получим

$$\begin{pmatrix} E & O & O \\ O & F_4^{[2]}(t) & O \end{pmatrix},$$

где блок  $F_4^{[2]}(t)$  не имеет линейно независимых для всех  $t \in T$  столбцов.

Продолжим процесс, осуществляя описанные выше преобразования над матрицей  $F_4^{[2]}(t)$  и т.д. Наконец, придем к матрице вида (7.2). При этом  $\bar{\Phi}(t)$  представляет собой произведение всех матриц, на которые в процессе преобразований производилось умножение слева, а  $\bar{\Psi}(t)$  — произведение всех матриц, на которые умножали справа. По построению эти матрицы будут обратимы при всех  $T$  и будут иметь бесконечно дифференцируемые на  $T$  коэффициенты. Лемма 4 доказана.

По лемме 4 для  ${}^{\circ}W(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$  найдутся обратимые для всех  $t \in T$  матрицы  $\bar{\Phi}(t), \bar{\Psi}(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ , такие, что

$$\bar{\Psi}(t){}^{\circ}W(t)\bar{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} E_{\kappa_1} & O & O \\ O & {}^{\circ}\bar{W}(t) & O \end{pmatrix},$$

где блок  ${}^{\circ}\bar{W}(t)$  состоит из  $\kappa_2$  столбцов, не имеет обратимых при всех  $t \in T$  подматриц и не имеет линейно независимых для всех  $t \in T$  столбцов.

Аналогичным образом можно доказать, что для  ${}^{\circ}W(t)$  найдутся обратимые для всех  $t \in T$  матрицы  $\hat{\Phi}(t), \hat{\Psi}(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$ , такие, что

$$\hat{\Psi}(t){}^{\circ}W(t)\hat{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} E_{\kappa_3} & O \\ O & {}^{\circ}\hat{W}(t) \\ O & O \end{pmatrix},$$

где блок  ${}^{\circ}\hat{W}(t)$  состоит из  $\kappa_4$  столбцов, не имеет обратимых при всех  $t \in T$  подматриц и не имеет линейно независимых для всех  $t \in T$  строк. Заметим, что в общем случае  $\kappa_1 + \kappa_2 \neq \kappa_3 + \kappa_4$ .

**Пример 2.** Пусть  $\mathcal{W}(t) = W_0(t) = (\alpha(t) \ \beta(t))$ , где  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  – скалярные функции из примера 1. Очевидно, что матрица  $\mathcal{W}(t)$  не содержит обратимых подматриц для любого  $t \in T$  или линейно зависимых при всех  $t \in T$  столбцов. Здесь  $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$ ,  $\kappa_2 = 2$ ,  $\kappa_4 = 1$ .

**Теорема 7.** Пусть  $W_k(t) \in C^\infty(T)$ ,  $k = \overline{0, r}$ . Тогда для импульсной переходной матрицы (4.7)

- 1) существует управляемая на  $T$  реализация размерности  $\kappa_1 + \kappa_2$ ;
- 2) существует наблюдаемая на  $T$  реализация размерности  $\kappa_3 + \kappa_4$ .

При этом реализация размерности  $\kappa = \min\{\kappa_1 + \kappa_2, \kappa_3 + \kappa_4\}$  будет минимальной.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3. Для построения управляемой реализации следует положить

$$V_2(t) = -\bar{\Phi}^{-1}(t) \begin{pmatrix} E_{\kappa_1} & O \\ O & \bar{W}(t) \end{pmatrix}, \quad u_2(t) = \begin{pmatrix} E_{\kappa_1} & O & O \\ O & E_{\kappa_2}(t) & O \end{pmatrix} \bar{\Psi}^{-1}(t),$$

а для построения наблюдаемой реализации –

$$V_2(t) = -\hat{\Phi}^{-1}(t) \begin{pmatrix} E_{\kappa_3} & O \\ O & E_{\kappa_4} \\ O & O \end{pmatrix}, \quad u_2(t) = \begin{pmatrix} E_{\kappa_3} & O & O \\ O & \hat{W}(t) & O \end{pmatrix} \hat{\Psi}^{-1}(t).$$

Теорема 7 доказана.

Возвратимся к примеру 2. В управляемой реализации

$$V_2(t) = -(\alpha(t) \ \beta(t)), \quad u_2(t) = E_2,$$

а в наблюдаемой –

$$V_2(t) = -1, \quad u_2(t) = (\alpha(t) \ \beta(t)).$$

Последняя будет иметь минимальную размерность вектора состояния.

**Заключение.** Рассматриваются нестационарные ДАУ (0.1) в предположениях, обеспечивающих существование линейного дифференциального оператора, преобразующего (0.1) в систему индекса неразрешенности 1, которая имеет то же множество решений, что и исходная система. Такое преобразование позволяет разделить ДАУ на дифференциальную и алгебраическую части. Импульсная переходная матрица в этом случае представляет собой сумму (2.13) импульсных переходных матриц дифференциальной (2.17), (2.20) и алгебраической (2.18), (2.21) подсистем. Импульсная переходная матрица алгебраической подсистемы имеет вид (4.7).

Реализация импульсной переходной матрицы в случае систем ДАУ имеет свою специфику. Для построения реализации матрицы (4.7) в классе алгебраических систем (4.8), (4.9) в рассмотрение вводится матрица  $\mathcal{W}(t)$  (см. (4.5)), свойства которой определяют размерность минимальной реализации, а также ее управляемость и наблюдаемость.

Оказалось, что необходимым и достаточным условием существования у импульсной переходной матрицы (4.7) управляемой и наблюдаемой реализации (4.8), (4.9) является постоянство ранга матрицы  $\mathcal{W}(t)$ . При этом любая минимальная реализация будет управляема и наблюдаема, а ее размерность  $d = \text{rank } \mathcal{W}(t)$ . В этом случае способ построения минимальной реализации наиболее простой.

Отказ от постоянства ранга матрицы  $\mathcal{W}(t)$  осложняет ситуацию. Если элементы матрицы  $\mathcal{W}(t)$  – аналитические функции, то  $d = \max_{t \in T} \text{rank } \mathcal{W}(t)$  и можно гарантировать существование ли-

бо управляемой, либо наблюдаемой минимальной реализации. Если  $\mathcal{W}(t) \in C^\infty(T)$  имеет переменный ранг, то управляемая и наблюдаемая реализации импульсной переходной матрицы (4.7) также существуют, но могут иметь разные размерности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980.
2. Sibuya Jr. Y. Some Global Properties of Matrices of One Variable // Math. Ann. 1965. V. 61. № 1. P. 67–77.
3. Коновалов А.Н. Задача фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, 1988.

4. Бояринцев Ю.Е., Бояринцева Т.П. Замечания о неявной разностной схеме, аппроксимирующей систему уравнений Стокса // Численные методы анализа и их приложения. Иркутск: Изд-во СЭИ СО АН СССР, 1983. С. 140–152.
5. Серов Е.П., Корольков Б.П. Динамика парогенератора. М.: Энергоиздат, 1981.
6. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. М.: Радио и связь, 1988.
7. Сенди К. Современные методы анализа электрических систем. М.: Энергия, 1971.
8. Eich-Soellner E., Führer C. Numerical Methods in Multibody Dynamics. Stuttgart: B.G. Teubner, 1998.
9. Носов Г.В., Калганова В.А., Кулешова Е.О. Теоретические основы электротехники. Ч. 2. Томск: Изд-во Томск. политехн. ун-та, 2012.
10. Андришин А.В., Сабанин В.Р., Смирнов Н.И. Управление и инноватика в теплоэнергетике. М.: МЭИ, 2011.
11. Борисов Б.М., Большаков В.И., Маларев В.И., Проскуряков Р.М. Математическое моделирование и расчет систем управления техническими объектами. СПб.: Изд-во С.-Петербургск. гос. горного ин-та, 2002.
12. Балакирев В.С., Дудников Е.Г., Цирлин А.М. Экспериментальное определение динамических характеристик промышленных объектов управления. М.: Энергия, 1967.
13. Hatemi-J. A. Asymmetric Generalized Impulse Responses with an Application in Finance // Economic Modelling. 2014. V. 36(C). P. 18–22.
14. Pesaran H.H., Shin Y. Generalized Impulse Response Analysis in Linear Multivariate Models // Economus Letters. 1988. V. 58. № 1. P. 17–29.
15. Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1974.
16. Борский В. О свойствах импульсных переходных матриц систем с переменными параметрами // АиТ. 1959. Т. 20. № 7. С. 848–855.
17. Мальчиков С.В. О синтезе линейных систем автоматического управления с переменными параметрами // АиТ. 1959. Т. 20. № 12. С. 1588–1594.
18. Kalman R. Mathematical Description of Linear Dynamical Systems // J. SIAM Control. 1963. V. 1. № 2. P. 152–192.
19. Silverman L., Meadows H. Equivalence and Synthesis of Time-variable Linear Systems // Proc. IV Annual Allerton Conf. Allerton, 1966. P. 776–784.
20. Youla D. The Synthesis of Linear Dynamical Systems from Prescribed Weighting Patterns // J. SIAM Appl. Math. 1966. V. 14. № 3. P. 527–549.
21. Lükepohl H. Impulse Response Function. Berlin: Springer, 2008.
22. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 2003.
23. Певзнер Л.Д. Теория систем управления. М.: Горная книга, 2002.
24. Горелик В.Ю., Тафт В.А., Хейфец С.Б. Определение импульсной переходной функции с периодическими параметрами с помощью обобщенного метода Хилла // АиТ. 1977. № 8. С. 12–24.
25. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. М.: Машиностроение, 1972.
26. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
27. Щеглова А.А., Кононов А.Д. Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса // АиТ. 2017. № 5. С. 36–55.
28. Щеглова А.А. Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2010. № 9. С. 57–70.
29. Щеглова А.А., Кононов А.Д. Устойчивость интервального семейства дифференциально-алгебраических уравнений с переменными коэффициентами // Проблемы математического анализа. 2019. № 5. С. 36–55.
30. Чистяков В.Ф., Щеглова А.А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.

---

**УПРАВЛЕНИЕ  
В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ**

---

УДК 681.515.8

**СИНТЕЗ ПАРАМЕТРОВ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРИРУЮЩИХ  
И ПРОПОРЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИХ  
РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ  
С НЕНУЛЕВЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ<sup>1</sup>**

© 2023 г. Д. В. Шатов<sup>a,b,\*</sup>

<sup>a</sup>ИПУ РАН, Москва, Россия

<sup>b</sup>МФТИ, Долгопрудный, Россия

\*e-mail: dvshatov@gmail.com

Поступила в редакцию 07.06.2022 г.

После доработки 29.07.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Рассматривается задача синтеза пропорционально-интегрирующих и пропорционально-интегрально-дифференцирующих регуляторов в нестандартной постановке. Для линейного одномерного объекта управления с ненулевыми начальными условиями требуется найти регулятор, который является оптимальным в смысле квадратичного функционала от состояния объекта с регуляризационной добавкой по управлению. Процедура синтеза представляет собой решение соответствующей квадратичной задачи оптимизации с помощью метода, подобного методу сопряженных градиентов (направление на каждом шаге вычисляется по методу сопряженных градиентов, а длина шага — по правилу Армихо). Численные примеры иллюстрируют эффективность предложенного алгоритма при синтезе регуляторов для моделей объектов управления, распространенных на практике.

DOI: 10.31857/S0002338823010080, EDN: JALDCC

**Введение.** Пропорционально-интегрирующие (ПИ) и пропорционально-интегрально-дифференцирующие (ПИД) регуляторы возникли как естественное развитие центробежных регуляторов, использовавшихся для регулирования скорости вращения в паровых машинах XIX в. Их параметры настраивались выбором физических характеристик конструкции: масс, жесткости пружин или вязкости смазочных материалов. Единственным критерием качества регулирования выступала устойчивость [1, 2]. В первой половине XX в. ПИ- и ПИД-регуляторы развились в конструктивно обособленные, универсальные устройства, позволяющие менять параметры закона управления в некоторых фиксированных диапазонах настройки. Несмотря на значительный технологический прогресс, существовал серьезный недостаток простых и эффективных методов настройки параметров регуляторов. В 40-е годы XX в. были предложены два, пожалуй, самых популярных эмпирических метода настройки ПИД-регуляторов [3]. Исходно предназначенные для контроля давления данные методы настройки носят универсальный характер, впоследствии они получили теоретическое обоснование [4]. Во второй половине XX в. был достигнут значительный прогресс в исследовании ПИ- и ПИД-регуляторов как в теоретическом плане, так и учитывая специфику конкретных производственных отраслей [4–6]. Значительное число известных методов и подходов к синтезу ПИ- и ПИД-регуляторов собрано в сборнике “рецептов” для настройки [7].

Широкое применение ПИ- и ПИД-регуляторов связано в первую очередь с их простотой — необходимо выбрать всего три (или два для ПИ-случая) коэффициента. До сих пор, несмотря на обилие методов, в реальных установках ПИД-регуляторы часто настраиваются вручную, исходя из интуитивного понимания технологического процесса и влияния на него отдельных составляющих ПИД-закона управления.

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при частичной поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30005).

У ПИД-регуляторов есть и недостатки: если посмотреть на модели объектов управления в [7], то все они имеют невысокий порядок. Такой выбор обусловлен естественным ограничением применимости ПИД-регуляторов – из-за их простоты они не предназначены для управления сложными объектами. Ряд современных подходов направлен на преодоление этого ограничения, например, адаптивное ПИД-управление [8],  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ -регуляторы дробного порядка [9], оптимизация [10, 11] и др. Большинство методов рассматривают задачи синтеза ПИД-регуляторов для одномерных (SISO – single-input single-output) систем (с одним входом и одним выходом), но существуют подходы и к их многомерному синтезу [12, 13].

Все описанные выше подходы предназначены для синтеза следящих систем управления, цель которых обеспечить минимальную ошибку между некоторым эталонным задающим сигналом (уставкой) и выходным сигналом объекта. При этом предполагается, что начальные условия в объекте нулевые. Настоящая статья рассматривает обратную ситуацию, когда на объект не действуют внешние возмущения (ни уставка, ни возмущения), а движение в ней вызвано ненулевыми начальными условиями. Целью управления выбирается минимизация их влияния на объект управления с помощью ПИ- или ПИД-регулятора. Подобная задача является нестандартной для ПИД-регуляторов, однако в теории управления она рассматривалась давно и может считаться классической. Так синтез линейных квадратичных регуляторов (ЛКР-задача) [14, 15] представляет собой близкую задачу: поиск статического оптимального регулятора по состоянию (или выходу). В последние годы новый подход к ЛКР-задачам был предложен в [16, 17], в них синтез регулятора рассматривается как задача матричной оптимизации, в которой переменной является матрица коэффициентов обратной связи. В постановке задачи и общем подходе к ее решению будем следовать работе [17]. В настоящей статье обсуждается вычислительный аспект этого подхода применительно к практическим задачам синтеза ПИ- и ПИД-регуляторов при ненулевых начальных условиях.

В разд. 1 демонстрируется, как с помощью расширения пространства состояний можно свести поиск коэффициентов ПИ- и ПИД-регуляторов к ЛКР-задаче. Раздел 2 описывает алгоритм синтеза регулятора, который представляет собой процедуру решения задачи оптимизации методом, схожим с методом сопряженных градиентов. В разд. 3 приведены ряд примеров синтеза регуляторов, обсуждаются практические аспекты применимости найденных регуляторов в классической следящей системе и предлагаются модификации, позволяющие улучшить показатели качества систем.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим полностью управляемый и наблюдаемый объект управления, описываемый уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad x(0) = x_0 \neq 0, \quad (1.1)$$

где  $x(t) \in R^n$  – вектор состояния объекта,  $u(t) \in R$  – скалярный сигнал управления,  $y(t) \in R$  – измеряемый скалярный выход объекта управления,  $A, B, C$  – известные вещественные матрицы соответствующих размеров,  $x_0 \in R^n$  – вектор известных ненулевых начальных условий.

Объект (1.1) замыкается идеальным ПИ-/ПИД-регулятором, формирующим управляющий сигнал:

$$u(t) = -k_p y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau - k_D \dot{y}(t), \quad (1.2)$$

где  $K = [k_p \ k_I \ k_D]^T$  – вектор параметров регулятора, которые необходимо определить в процессе синтеза. Правая часть (1.2) описывает ПИД-регулятор, который переходит в ПИ-регулятор при  $k_D = 0$ .

Рассматриваемая система (1.1), (1.2) является системой стабилизации, а не слежения как в классических постановках, когда есть внешний задающий сигнал (уставка). Единственным возмущением в системе являются ненулевые начальные условия, влияние которых необходимо подавить, используя сигнал управления, оптимальный по квадратичному критерию.

Покажем, каким образом задача синтеза сводится к ЛКР-задаче. Для этого введем в рассмотрение вспомогательную переменную

$$z(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau,$$

принимая во внимание, что  $\dot{z}(t) = y(t) = Cx(t)$ , уравнение регулятора (1.2) можно представить в следующем виде:

$$u(t) = k_p Cx(t) + k_I z(t) + k_D C\dot{x}(t) = [k_p C + k_D CA]x(t) + k_I z(t) + k_D CBu(t).$$

Выделив управление из последнего уравнения, окончательно получим

$$u(t) = \frac{1}{1 + k_D CB} ([k_p C + k_D CA]x(t) + k_I z(t)).$$

Уравнения замкнутой системы (1.1), (1.2) можно найти, подставив найденное  $u(t)$  в (1.1). Обозначая расширенный вектор состояния как  $\tilde{x}(t) = [x(t) \ z(t)]^T \in R^{n+1}$ , перепишем (1.1) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(K)\tilde{x}(t), \\ y(t) = [C \ 0]\tilde{x}(t), \end{cases} \quad \tilde{x}(0) = [x_0 \ 0]^T,$$

где матрица  $\tilde{A}(K)$  имеет вид

$$\tilde{A}(K) = \begin{bmatrix} A - \frac{k_p BC + k_D BCA}{1 + k_D CB} & -\frac{k_I B}{1 + k_D CB} \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим через  $S_k = \{K : \text{Re}\{\max \lambda(\tilde{A}(K))\} < 0\}$  (где  $\lambda(\cdot)$  – собственные числа матрицы) множество стабилизирующих регуляторов  $K$ , которые обеспечивают устойчивость объекта (1.1). Тогда предлагается свести задачу синтеза ПИ-/ПИД-регулятора к решению оптимизационной задачи:

$$\min_{K \in S_k} J(K), \quad (1.3)$$

где  $J(K)$  – целевая функция, которая представляет собой квадратичный критерий:

$$J(K) = \int_0^\infty \tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) dt + \rho |K|^2, \quad (1.4)$$

здесь  $Q^T = Q > 0$  и  $\rho > 0$  – весовая матрица и коэффициент соответственно. Первый член в (1.4) соответствует классической ЛКР-задаче, а второй является регуляризационной добавкой, ограничивающей рост параметров регулятора.

В [16, 17] исследуются свойства функции (1.4) и доказано, что задача (1.3), (1.4) может рассматриваться как задача матричной оптимизации, к которой применимы соответствующие классические методы. Единственным дополнительным предположением служит существование *известного* стабилизирующего регулятора  $K_0 \in S_k$ .

Задача синтеза состоит в поиске оптимального ПИ-/ПИД-регулятора  $K^*$ , который доставляет минимум критерию (1.3) при известном объекте управления (1.1) и начальных условиях  $x_0$ .

**2. Процедура синтеза.** Синтез регулятора сводится к решению задачи (1.3). Предлагается использовать метод, подобный методу сопряженных градиентов [18]: выбор направления выполняется в соответствии с правилами метода сопряженных градиентов, но полная релаксация по длине шага заменяется линейным поиском по правилу Армихо [19]. В данном разделе описывается алгоритм решения задачи оптимизации и некоторые технические детали, упрощающие ее численное решение.

**2.1. Алгоритм синтеза.** Вначале приведем исходные данные, которые используются при синтезе:

матрицы объекта управления  $A, B, C$  и его ненулевые начальные условия  $x_0$ ;

весовые параметры: положительно-определенная матрица  $Q \in R^{(n+1) \times (n+1)}$  и скалярные параметр  $\rho$ ;

известный стабилизирующий регулятор  $K_0 \in S_k$ , который является “стартовой точкой” для оптимизационного процесса; для такого поиска можно воспользоваться готовыми решениями для синтеза ПИД-регуляторов (например, PID Tuner в MATLAB) или известными аналитическими выражениями для расчета по моделям параметров ПИ- и ПИД-регуляторов [7];

настраиваемые параметры процедуры оптимизации: стартовый шаг  $\alpha_0$ , который выбирается достаточно большим вещественным числом и число  $\tau \in (0,1)$ , используемые в правиле Армихо,  $\varepsilon > 0$  — достаточно малое число, определяющее точность решения задачи оптимизации,  $N_{\max}$  — максимальное число итераций, после достижения которого процедура синтеза завершается.

Процесс оптимизации носит итеративный характер с улучшением значения целевой функции на каждой итерации. Каждая  $j$ -я итерация процедуры оптимизации состоит из следующих этапов.

1. Проверить ограничения на число итераций  $j < N_{\max}$ : если оно нарушается, то процесс останавливается на текущем найденном регуляторе с параметрами  $K_{j-1}$  в качестве решения задачи (1.3). Здесь и далее  $K_{j-1}$  — вектор параметров ПИД-регулятора, найденный на предыдущей итерации (при  $j = 1$  предыдущим является стартовый регулятор  $K_0$ ).

2. Определить направление  $s_j$  на текущей итерации, согласно соотношению

$$s_j = -r_j + \beta_j s_{j-1},$$

где  $r_j = \nabla J(K_{j-1})$  — градиент целевой функции, а коэффициент  $\beta_j$  находится следующим образом:

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{\langle r_j, r_j - r_{j-1} \rangle}{|r_{j-1}|^2}, \\ 0 \text{ при обновлении и } j = 1, \end{cases}$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение, а обновление — специальная процедура обнуления, ускоряющая сходимость процесса оптимизации в неквадратичных задачах и заключающаяся в том, что иногда направление шага выбирается, как в начальной точке — по градиенту. Такое обновление выполняется в тех случаях, когда текущее направление  $s_j$  указывает в сторону выхода из множества стабилизирующих регуляторов, а результат предыдущей итерации  $K_{j-1}$  располагается очень близко к его границе.

3. Вычислить величину шага  $\alpha_j$  на текущей итерации. Для этого используется поиск с остановкой по правилу Армихо: выбирается значение  $\alpha_j = \alpha_0$  и проверяется условие

$$J(K_{j-1} + \alpha_j s_j) < J(K_{j-1}) + \tau \alpha_j \langle J(K_{j-1}), s_j \rangle. \quad (2.1)$$

Если условие выполнено, то текущий шаг допустим и рассчитывается текущий вектор параметров регулятора:

$$K_j = K_{j-1} + \alpha_j s_j.$$

В противном случае, когда условие (2.1) нарушается, необходимо уменьшить величину шага  $\alpha_j = \alpha_j/2$  и снова проверить условие (2.1), продолжая до тех пор, пока не будет получено допустимое значение  $\alpha_j$ . Сокращение шага выполняется также в случаях, когда условие (2.1) не может быть проверено, потому что промежуточный вектор  $K_j$  приводит к неустойчивости замкнутой системы.

4. Проверить условие остановки синтеза:

$$\frac{|J(K_j) - J(K_{j-1})|}{|J(K_j)|} < \varepsilon.$$

Если оно выполняется, то процедура оптимизации завершена и решением является текущий регулятор  $K^* = K_j$ . В противном случае необходимо перейти к следующей итерации процедуры синтеза.

2.2. Вычисление целевой функции и ее градиента. Целевая функция (1.4) может быть вычислена в явном виде для любого заданного вектора параметров  $K \in S_k$  на основе леммы 1.2.3 из [20], в которой доказано, что уравнение Ляпунова

$$AP + PA^T + Q = 0, \quad Q = Q^T > 0$$

имеет единственное положительно-определенное решение

$$P = \int_0^{\infty} e^{At} Q e^{A^T t} dt > 0$$

тогда и только тогда, когда матрица  $A$  гурвицева.

Для регулятора  $K \in S_k$ , соответствующей матрицы замкнутой системы  $\tilde{A}(K)$ , весовой матрицы  $Q \in R^{n+1 \times n+1}$  и параметра  $\rho$  значение функции (1.4) вычисляется, используя аналитическое выражения для решения уравнения Ляпунова, с помощью соотношения

$$J(K) = \tilde{x}_0^T P \tilde{x}_0 + \rho |K|^2,$$

где матрица  $P \in R^{n+1 \times n+1}$  является решением сопряженного уравнения Ляпунова:

$$\tilde{A}^T(K)P + P\tilde{A}(K) + Q = 0. \quad (2.2)$$

Вычисление градиента  $\nabla J(K)$  также основано на решении уравнений Ляпунова и использует подход, предложенный в работах [16, 17]. Для этого требуется представить матрицу  $\tilde{A}(K)$  в виде линейной комбинации:

$$\tilde{A}(K) = \tilde{A}_0 + [\tilde{A}_p \ \tilde{A}_I \ \tilde{A}_D] K = \tilde{A}_0 + k_p \tilde{A}_p + k_I \tilde{A}_I + k_D \tilde{A}_D. \quad (2.3)$$

Учитывая, что в общем случае элементами матрицы  $\tilde{A}(K)$  могут быть дробно-рациональные функции от параметров регуляторов  $K$ , представление (2.3) без введения новых переменных и усложнения вычислений, возможно, только в случае ортогональности векторов  $C$  и  $B$ . Также условие  $CB = 0$  гарантирует, что в формуле для  $\tilde{A}(K)$  знаменатель  $1 + k_p CB \neq 0$ . Следующее утверждение описывает достаточное условие ортогональности.

**У т в е р ж д е н и е.** Для ортогональности векторов  $C$  и  $B$  достаточно, чтобы объект (1.1) имел относительный порядок больше 1, т.е. при записи в форме передаточной функции степень числителя  $m$  должна быть меньше или равна  $n - 2$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Запишем объект (1.1) в канонической управляемой форме, что всегда возможно сделать для управляемого и наблюдаемого объекта. Матрицы  $B, C$  в этом случае имеют фиксированную структуру [21]:

$$B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1} \ b_n]^T; \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0],$$

где

$$b_i = c_i - \sum_{j=1}^i a_j b_{i-j}, \quad i = \overline{1, m}, \quad b_0 = c_0,$$

с коэффициентами  $c_j, j = \overline{0, m}$ , и  $a_j, j = \overline{1, n}$ , заданными соответствующей передаточной функцией объекта (1.1):

$$w(s) = \frac{c_0 s^m + c_1 s^{m-1} + \dots + c_{m-1} s + c_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \quad (2.4)$$

Произведение  $CB = 0$  при  $b_0 = b_1 = 0$ . Из постановки задачи предполагается, что у объекта (1.1) нет прямой связи между  $u(t)$  и  $y(t)$ , что соответствует моделям реальных физических процессов. Поэтому в (2.4) коэффициент  $c_0 = b_0 = 0$ , а для выполнения  $b_1 = 0$  требуется также, чтобы  $c_1 = 0$ , что означает выполнение условия, описанного в утверждении:  $n - m \geq 2$ . Утверждение доказано.

Достаточно широкий класс моделей объектов, используемых на практике, подходит под критерии утверждения (см., например, [22]). Далее в примерах предлагаемый алгоритм синтеза будет применен для поиска ПИ- и ПИД-регуляторов только для таких объектов.

Согласно результатам [17], обозначим первое слагаемое в (1.4) как функцию

$$f(K) = \int_0^{\infty} \tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) dt.$$

Вычислить ее градиент можно с помощью следующего соотношения:

$$\frac{\partial f(K)}{\partial k_i} = \langle Y, \tilde{A}_i P + P \tilde{A}_i^T \rangle, \quad i \in \{P, I, D\},$$

где  $P$  — решение уравнения Ляпунова (2.2), матрицы  $\tilde{A}_i$ ,  $i \in \{P, I, D\}$  берутся из представления матрицы  $\tilde{A}(K)$  в виде линейной комбинации (2.3). Матрица  $Y$  определяется как решение следующего сопряженного уравнения Ляпунова:

$$\tilde{A}^T(K)Y + Y\tilde{A}(K) + R = 0, \quad R = \tilde{x}(0)\tilde{x}^T(0). \quad (2.5)$$

Окончательно компоненты вектора градиента  $\nabla J(K)$  вычисляются как

$$\frac{\partial J(K)}{\partial k_i} = \nabla_i J(K) = \frac{\partial f(K)}{\partial k_i} + 2\rho|K|, \quad i \in \{P, I, D\}.$$

**3. Примеры.** Предложенный алгоритм синтеза ПИ- и ПИД-регуляторов применяется к нескольким моделям объектов управления, используемым в реальной инженерной практике. Начальные условия  $x_0$  объекта (1.1) во всех примерах выбираются вектором, состоящим из единиц.

Общие параметры синтеза во всех примерах заданы следующими: весовая матрица  $Q \in R^{5 \times 5}$  выбрана как единичная, а регуляризационный параметр  $\rho = 1$ , точность решения задачи оптимизации  $\varepsilon = 10^{-8}$ , максимальное число итераций  $N_{\max} = 200$ .

**3.1. Синтез ПИ-регулятора.** Объект управления взят из [22] и описывается передаточной функцией с кратными единичными полюсами и без нулей:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^4},$$

которая при записи в пространстве состояний (1.1) в канонической управляемой форме имеет матрицы  $A, B, C$  следующего вида:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

Начальные условия объекта выбраны как  $x_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ , тогда в (2.5) матрица

$$R = \begin{bmatrix} x_0 x_0^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Стартовый ПИ-регулятор задан  $K_0 = [1 \ 0.8]^T$ . Параметры, используемые при линейном поиске по правилу Армихо,  $\alpha_0 = 20$  и  $\tau = 0.6$ . В результате синтеза за  $N = 28$  итераций был найден оптимальный ПИ-регулятор, за ним указан показатель качества (1.4), который он обеспечивает:

$$K^* = [1.997 \ 0.399]^T; \quad J(K^*) = 245.63.$$

В случае ПИ-регулятора есть возможность проиллюстрировать поведение решения задачи в пространстве параметров  $k_P$  и  $k_I$ . На рисунке 1 черным цветом изображена траектория изменения значений  $K_j$ . Она начинается в точке  $K_0$  и заканчивается в точке оптимума  $K^*$ . Поверхность, показанная градиациями серого цвета с выделенными на ней линиями уровня, отвечает значениям целевой функции (1.4). В данном примере видно, что функция  $J(K)$  в области  $S_k$  — выпуклая, с единственной точкой минимума, которая находится в процессе синтеза ПИ-регулятора.

Дополнительно укажем инженерные свойства синтезированной замкнутой системы: частота среза  $\omega_{cp} = 0.666$  рад/с позволяет оценить быстродействие системы — величина  $3/\omega_{cp} = 4.5$  с дает оценку времени установления до 5% при реакции на единичное ступенчатое воздействие, запасы устойчивости по модулю и фазе равны  $L = 1.59$  и  $\varphi_3 = 28.6^\circ$  соответственно. При этом обычно на практике требуется обеспечить выполнение неравенств  $L > 2$  и  $\varphi_3 > 30^\circ$ , чтобы система обладала достаточными робастными свойствами. Найденный оптимальный ПИ-регулятор малоприменим в классическом инженерном смысле для слежения за уставкой, так как малые запасы устойчивости приводят к значительному перерегулированию и колебательности в переходном процессе

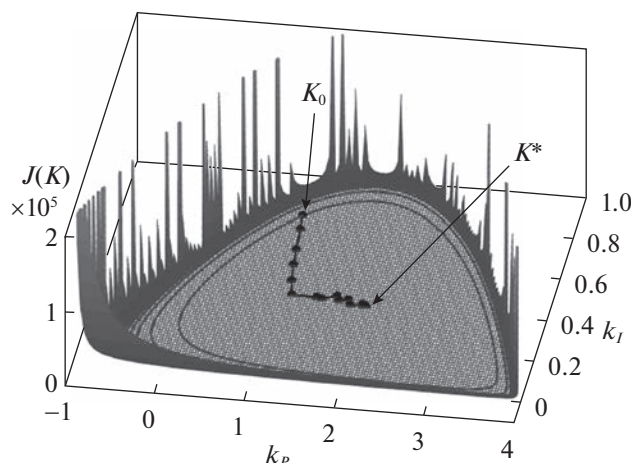


Рис. 1. Поведение решения задачи оптимизации в процессе синтеза ПИ-регулятора

при ступенчатом задающем сигнале. Такие результаты объясняются ограниченностью возможностей ПИ-регулятора при управлении объектом 4-го порядка.

3.2. Синтез ПИД-регулятора. Объект управления задается следующей передаточной функцией [22]:

$$G_1(s) = \frac{1}{(1+s)(1+\delta s)(1+\delta^2 s)(1+\delta^3 s)}; \quad \delta = 0.1; 0.2; 0.5; 1. \quad (3.1)$$

При  $\delta = 1$  она совпадает с объектом управления в предыдущем примере, а при  $\delta = 0.1$  передаточная функция  $G_1(s)$  представляет собой объект с разнотемповой динамикой, который практически неуправляем с помощью ПИ-регулятора. Параметры синтеза выбраны такими же, как в случае ПИ-регулятора и для краткости опущены.

Результаты синтеза представлены в табл. 1: первая строка которой содержит значения параметра  $\delta$  из (3.1); вторая строка содержит  $t_{G_1}$  — время установления до 5% при подаче на объект (3.1) единичной ступенчатой функции (на эту величину можно ориентироваться при анализе быстродействия замкнутой системы — найденный ПИД-регулятор обычно должен обеспечивать сравнимое быстродействие); третья строка — стартовые ПИД-регуляторы, которые были определены с помощью PID Tuner в MATLAB. Далее указаны число итераций  $N$ , найденный ПИД-регулятор  $K^*$  и значение целевой функции, обеспечиваемое оптимальным регулятором. Последние две строки имеют те же инженерные показатели, что приведены в примере с ПИ-регулятором, причем в предпоследней строке сначала указана частота среза, далее, в скобках — оценка длительности переходного процесса  $3/\omega_{cp}$ .

Данные табл. 1 демонстрируют, что для всех  $\delta$  найденные оптимальные ПИД-регуляторы естественно оказываются лучше стартовых, причем разница в показателях растет по мере уменьшения  $\delta$  (усложнения объекта с точки зрения управления). Такой результат объясняется тем, что исходный регулятор  $K_0$  был синтезирован для классической следящей системы и дал заметно худшие значения показателя качества при оценке по другому критерию  $J(K)$ .

С другой стороны, анализ классических инженерных показателей систем с найденными оптимальными регуляторами  $K^*$  при использовании их в следящей системе демонстрирует их практическую неприменимость (за исключением случая  $\delta = 1$ ). При больших запасах устойчивости найденные регуляторы имеют очень низкое быстродействие — при  $\delta = 0.5$  длительность реакции на ступенчатую уставку можно приблизительно оценить как  $3/\omega_{cp} = 35.29$  с, а для остальных случаев оценка длительности переходных процессов достигает тысячи секунд. Отдельно отметим, что при  $\delta = 1$ , когда объект управления совпадает с передаточной функцией объекта  $G(s)$  из разд. 3.1, ПИД-регулятор обеспечивает улучшение всех рассматриваемых показателей качества ( $J(K^*)$ ,  $\omega_{cp}$  и  $[L, \phi_3]$ ) по сравнению с ПИ-регулятором, который, как уже было сказано выше, имеет ограниченные возможности.

**Таблица 1.** Результаты численных экспериментов для  $G_1(s)$

|                                                  |                                                                                           |                                                                              |                                                        |                                                      |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $\delta$                                         | 0.1                                                                                       | 0.2                                                                          | 0.5                                                    | 1                                                    |
| $t_{G_1}, c$                                     | 3.11                                                                                      | 3.27                                                                         | 4.1                                                    | 7.75                                                 |
| $K_0$                                            | $\begin{bmatrix} 1.74 \times 10^6 \\ 2.69 \times 10^6 \\ 1.897 \times 10^5 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 3.13 \times 10^4 \\ 3.97 \times 10^4 \\ 5950 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 133.8 \\ 90.8 \\ 49.27 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2.13 \\ 0.5 \\ 2.26 \end{bmatrix}$  |
| $J(K_0)$                                         | $1.031 \times 10^{13}$                                                                    | $2.586 \times 10^9$                                                          | 28760.15                                               | 177.32                                               |
| $N$                                              | 34                                                                                        | 33                                                                           | 18                                                     | 34                                                   |
| $K^*$                                            | $\begin{bmatrix} -0.004 \\ 72.09 \\ -0.018 \end{bmatrix}$                                 | $\begin{bmatrix} -0.007 \\ 20.78 \\ -0.07 \end{bmatrix}$                     | $\begin{bmatrix} 0.32 \\ 5.45 \\ -0.45 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 2.82 \\ 1.22 \\ 3.55 \end{bmatrix}$ |
| $J(K^*)$                                         | 35812.28                                                                                  | 2607.12                                                                      | 143                                                    | 139.26                                               |
| $\omega_{cp}, \text{ рад/с } (3/\omega_{cp}, c)$ | $7.21 \times 10^{-5} (4.16 \times 10^4)$                                                  | $1.33 \times 10^{-3} (2.26 \times 10^3)$                                     | 0.085 (35.29)                                          | 0.926 (3.24)                                         |
| $[L, \Phi_3]$                                    | $[1.36 \times 10^5 \ 90^\circ]$                                                           | $[3.48 \times 10^3 \ 89.9^\circ]$                                            | $[18 \ 81.2^\circ]$                                    | $[2.81 \ 43.8^\circ]$                                |

Найденные предложенным методом ПИД-регуляторы решают поставленную задачу — подавить влияние ненулевых начальных условий. Но иногда они оказываются малопригодны для практического применения, особенно по показателю быстродействия замкнутой системы. Исправить данный недостаток можно, добавив ограничение на множество стабилизирующих регуляторов следующего вида:

$$S_{k\sigma} = \{K : -\text{Re}\{\max \lambda(\tilde{A}(K))\} > \sigma^*\}, \quad (3.2)$$

где  $\sigma^* > 0$  — желаемая степень устойчивости матрицы  $\tilde{A}(K)$  замкнутой системы. Для обеспечения условия  $K^* \in S_{k\sigma}$  воспользуемся известным приемом — будем рассматривать смещенную матрицу замкнутой системы:

$$\tilde{A}_\sigma(K) = \tilde{A}(K) + \sigma^* I,$$

и решим для нее задачу синтеза. Полученный оптимальный ПИД-регулятор  $K^*$  принадлежит (3.2) и, следовательно, условие  $\sigma(\tilde{A}(K^*)) > \sigma^*$  выполняется (где  $\sigma(A)$  — степень устойчивости матрицы  $A$ ).

Существенным недостатком приведенного приема служит ухудшение значения целевой функции. Также некоторой проблемой может быть поиск стартового ПИД-регулятора  $K_0$ , обеспечивающего устойчивость  $\tilde{A}_\sigma(K_0)$ .

Использование предложенного приема проиллюстрируем для значения параметра  $\delta = 0.2$  в (3.1): задавшись стартовым ПИД-регулятором  $K_\sigma^* = [3 \times 10^4 \ 4.2 \times 10^4 \ 5350]^T$ , проведем синтез для нескольких значений  $\sigma^*$ . Результаты представлены в табл. 2: первая строка содержит заданную степень устойчивости замкнутой системы, вторая — найденный регулятор, третья — фактическую степень устойчивости замкнутой системы  $\sigma(\tilde{A}(K^*))$ . Далее указано фактическое время установления  $t_\sigma$  до 5% при подаче единичной ступенчатой уставки, остальные строки имеют такую же структуру как в табл. 1.

Данные табл. 2 демонстрируют, что с увеличением параметра  $\sigma^*$  происходит рост значений  $J(K_\sigma^*)$ , увеличение частоты среза (растет быстродействие) и немного сокращаются запасы устойчивости. Выбор конкретного значения  $\sigma^*$  может осуществляться, исходя из требуемого быстродействия, по формуле  $\sigma^* = 3/t^*$ , где  $t^*$  — желаемое время установления. Нужно отметить, что последняя формула для  $\sigma^*$  носит эвристический характер. Фактическое быстродействие системы может оказаться как выше заданного, так и ниже. Например, в рассмотренном примере в табл. 2 при  $\sigma^* = 0.3$  соответствующее желаемое время составит  $t^* = 10$  с, однако фактическое время установления  $t_\sigma = 12.9$  с.

**Таблица 2.** Результаты численных экспериментов для  $G_1(s)$  при разных  $\sigma^*$ 

| $\sigma^*$                    | 0                                                        | 0.05                                                    | 0.1                                                      | 0.2                                                      | 0.3                                                       |
|-------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $K_\sigma^*$                  | $\begin{bmatrix} -0.007 \\ 20.78 \\ -0.07 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -35.9 \\ 734.93 \\ 1.66 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -138.4 \\ 1360.3 \\ 12.8 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -456.4 \\ 2284.9 \\ 90.5 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -833.4 \\ 2771.4 \\ 246.9 \end{bmatrix}$ |
| $\sigma(\tilde{A}(K^*))$      | $1.3 \times 10^{-3}$                                     | 0.0503                                                  | 0.1002                                                   | 0.2004                                                   | 0.3009                                                    |
| $t_\sigma, c$                 | 2250                                                     | 61                                                      | 31.5                                                     | 17.05                                                    | 12.9                                                      |
| $J(K_\sigma^*)$               | 2607.12                                                  | $5.43 \times 10^5$                                      | $1.87 \times 10^6$                                       | $5.44 \times 10^6$                                       | $8.44 \times 10^6$                                        |
| $\omega_{cp} (3/\omega_{cp})$ | $1.33 \times 10^{-3} (2.26 \times 10^3)$                 | 0.047 (63.83)                                           | 0.087 (34.6)                                             | 0.145 (20.7)                                             | 0.174 (17.2)                                              |
| $[L, \varphi_3]$              | $[3.48 \times 10^3 \ 89.9^\circ]$                        | $[82 \ 86.5^\circ]$                                     | $[37 \ 83.3^\circ]$                                      | $[17.4 \ 78.1^\circ]$                                    | $[11.7 \ 74.6^\circ]$                                     |

**Таблица 3.** Результаты численных экспериментов для  $G_2(s)$ 

| $\delta$                     | 0.1                                                   | 0.2                                                   | 0.5                                                    | 1                                                       | 2.5                                                     |
|------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $K_0$                        | $\begin{bmatrix} 2.22 \\ 0.841 \\ 1.42 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2.11 \\ 0.762 \\ 1.46 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.41 \\ 0.526 \\ 0.947 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.628 \\ 0.276 \\ 0.187 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.293 \\ 0.143 \\ 0 \end{bmatrix}$     |
| $J(K_0)$                     | 41.83                                                 | 48.45                                                 | 73.23                                                  | 134.8                                                   | 311.16                                                  |
| $N$                          | 22                                                    | 21                                                    | 27                                                     | 43                                                      | 40                                                      |
| $K^*$                        | $\begin{bmatrix} 2.15 \\ 0.965 \\ 1.41 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.95 \\ 0.899 \\ 1.5 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 1.39 \\ 0.665 \\ 1.37 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 0.876 \\ 0.399 \\ 0.916 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.417 \\ 0.167 \\ 0.416 \end{bmatrix}$ |
| $J(K^*)$                     | 41.51                                                 | 47.83                                                 | 71.84                                                  | 121.15                                                  | 286.52                                                  |
| $\omega_{cp}, \text{ рад/с}$ | 0.818                                                 | 0.755                                                 | 0.559                                                  | 0.373                                                   | 0.179                                                   |
| $[L, \varphi_3]$             | $[10.5 \ 56.8^\circ]$                                 | $[5.77 \ 58.5^\circ]$                                 | $[3.04 \ 59.8^\circ]$                                  | $[2.42 \ 58.5^\circ]$                                   | $[2.19 \ 61.2^\circ]$                                   |

Важно отметить, что увеличение  $\sigma^*$  приводит к сокращению запасов устойчивости и снижению робастных свойств замкнутой системы. Это нужно учитывать, задавая желаемое быстродействие: найденный регулятор должен обеспечивать  $L > 2$  и  $\varphi_3 > 30^\circ$ .

Второй пример, для которого проводится синтез ПИД-регуляторов, описывается передаточной функцией [22]:

$$G_2(s) = \frac{1 - \delta s}{(1 + s)^3}; \quad \delta = 0.1; 0.2; 0.5; 1; 2.5.$$

Это неминимально-фазовый объект с кратными единичными полюсами и неустойчивым нулем, величина которого является параметром с заданным набором значений. Параметры синтеза оставлены без изменений.

Данные табл. 3 демонстрируют, что найденный оптимальный ПИД-регулятор  $K^*$  дает некоторый небольшой выигрыш по сравнению с исходным регулятором  $K_0$ , который, напомним, был определен как оптимальный для следящей системы. По мере увеличения  $\delta$  задача управления усложняется, что видно по увеличению значения целевой функции (как для стартового ПИД-регулятора, так и для синтезированного). Показатели запасов устойчивости уменьшаются с ростом  $\delta$ , однако остаются допустимыми, с инженерной точки зрения, для всех значений  $\delta$ . Показатель быстродействия, оцениваемый через  $\omega_{cp}$ , уменьшается с ростом  $\delta$ , но остается достаточно высоким (для  $\delta = 2.5$  оценка длительности переходного процесса дает  $3/\omega_{cp} = 16.76$  с). При необходимости увеличить быстродействие можно использовать прием, описанный выше. Однако следует учитывать, что в неминимально-фазовом случае частота среза системы ограничена, поэтому даже выбор большой степени устойчивости может не обеспечивать желаемого быстродействия [23]. Для всех случаев  $\delta$  качество замкнутых систем с синтезированными ПИД-регуляторами, с инженерной точки зрения, достаточно хорошее.

**Заключение.** Предложен алгоритм синтеза ПИ- и ПИД-регуляторов для подавления эффекта ненулевых начальных условий. Описанная процедура синтеза продолжает новый подход к таким задачам, который предлагает рассмотреть задачу синтеза как задачу оптимизации по параметрам обратной связи и решать ее методами оптимизации. Численные примеры демонстрируют применимость найденных регуляторов для управления моделями объектов, используемых в инженерной практике, хоть и с некоторыми ограничениями, которые можно обойти введением желаемой заданной степени устойчивости замкнутой системы (см. разд. 3.1).

Дальнейшим развитием предложенного подхода служит применение алгоритма синтеза к задаче подавления импульсных внешних возмущений, которые можно свести к действию ненулевых начальных условий, с учетом инженерных требований к качеству управления замкнутой системы при действии ступенчатой уставки. Другим возможным направлением развития предложенного подхода будет исследование задачи синтеза для других более сложных форм ПИД-регуляторов: с фильтром, двумя степенями свободы и т.п.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maxwell J.C.* On Governors // *Proceedings of the Royal Society of London*. 1868. V. 16. P. 270–283.
2. *Айзерман М.А.* Краткий очерк становления и развития классической теории регулирования и управления // *АиТ*. 1993. № 7. С. 6–18.
3. *Ziegler J.G., Nichols N.B.* Optimum Settings for Automatic Controllers // *Transactions of ASME*. 1942. V. 64. P. 759–768.
4. *Åström K.J., Hägglund T.* Advanced PID Control. NC: ISA, 2006. 460 p.
5. *Visioli A.* Practical PID Control. London: Springer-Verlag, 2006. 310 p.
6. *Wang L.* PID Control System Design and Automatic Tuning using MATLAB/Simulink. Wiley-IEEE Press, 2020. 368 p.
7. *O'Dwyer A.* Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules: 3<sup>rd</sup> edition. London: Imperial College Press, 2009. 608 p.
8. *Александров А.Г., Паленов М.В.* Состояние и перспективы развития адаптивных ПИД-регуляторов // *АиТ*. 2014. № 2. С. 16–30.
9. *Podlubny I.* Fractional-order Systems and  $PI^\lambda D^\mu$ -controllers // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1999. V. 44. №. 1. P. 208–214.
10. *Hast M., Åström K.J., Bernhardsson B., Boyd S.* PID Design by Convex-Concave Optimization // *Proc. Europ. Control Conf. (ECC-2013)*. Zurich, Switzerland, 2013. P. 4460–4465.
11. *Han S., Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* PID Controller Design with an  $H_\infty$  Criterion // *IFAC PapersOnLine*. 2018. V. 51. №. 4. P. 400–405.
12. *Wang Q.-G., Ye Z., Cai W.-J., Hang C.-C.* PID Control for Multivariable Processes. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 273 p.
13. *Boyd S., Hast M., Åström K.J.* MIMO PID Tuning via Iterated LMI Restriction // *Intern. J. Robust and Non-linear Control*. 2016. V. 26. P. 1718–1731.
14. *Kwakernaak H., Sivan R.* Linear Optimal Control Systems. First Edition. London: Wiley-Interscience, 1972. 575 p.
15. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal Control. Linear Quadratic Methods. New Jersey: Prentice-Hall, 1989. 380 p.
16. *Fatkhullin I., Polyak B.* Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // *SIAM J. on Control and Optimization*. 2021. V. 59. № 51. P. 3887–3911.
17. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // *АиТ*. 2022. № 11.
18. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
19. *Armijo L.* Minimization of Functions Having Lipschitz Continuous First Partial Derivatives // *Pacific J. Mathematics*. 1966. V. 16. № 1. P. 1–3.
20. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014. 560 с.
21. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2004. 464 с.
22. *Åström K.J., Hägglund T.* Benchmark Systems for PID Control // *IFAC Proceedings Volumes*. 2000. V. 33. №. 4. P. 165–166.
23. *Åström K.J.* Limitations on Control System Performance // *European Journal of Control*. 2000. V. 6. Iss.1. P. 2–20.

---

УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ  
И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

---

УДК 519.71

**ОПТИМАЛЬНОЕ КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ  
ПРИ СОПРОВОЖДЕНИИ МАНЕВРИРУЮЩЕГО ОБЪЕКТА  
В СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИТУАЦИЯХ**

© 2023 г. А. Н. Детков

ФАУ “ГосНИИАС”, Москва, Россия

e-mail: detkov@gosniias.ru

Поступила в редакцию 14.02.2022 г.

После доработки 29.06.2022 г.

Принята к публикации 01.08.2022 г.

Методами марковской теории оценивания случайных процессов решена задача синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов комплексной обработки информации при сопровождении маневрирующего объекта и двухканальном векторном наблюдении с нарушениями в статистически неопределенных ситуациях. Задача решена применительно к дискретно-непрерывному марковскому процессу для случая, когда его непрерывная часть представляет собой векторную марковскую последовательность, а дискретная часть характеризуется трехкомпонентным дискретным марковским процессом, каждая компонента которого описывается цепью Маркова на несколько положений. Приводится структурная схема квазиоптимальной комплексной обработки информации. На простом примере методом имитационного моделирования показана работоспособность квазиоптимального алгоритма в статистически неопределенных ситуациях.

DOI: 10.31857/S0002338822060075, EDN: BHHBHH

**Введение.** На практике часто возникает задача сопровождения подвижных объектов, например воздушных судов по локационным измерениям параметров их траекторий. Для решения задачи оценивания при определении параметров движения и организации сопровождения объектов широкое распространение получил линейный фильтр Калмана (ФК) [1, 2]. Однако в статистически неопределенных ситуациях в условиях маневра подвижного объекта, вызванных резким изменением траектории, например при смене эшелонов полета воздушного судна, и/или неопределенных измерений, обусловленных помехами (искусственного или естественного происхождения) и влиянием других объектов, уточнение траектории движения объекта может происходить по измерениям, не содержащим полезной информации об этом маневрирующем объекте [3–5]. В результате вычисляемая в алгоритме ковариационная матрица ошибок оказывается излишне оптимистической и значительно ухудшаются характеристики точности оценивания и условия сопровождения (вплоть до срыва сопровождения). Поэтому широко используются различные модификации ФК, пригодные для оценивания в условиях неопределенных измерений траектории маневрирующего объекта [6, 7]. В этих алгоритмах оценки параметров движения объекта формируются на выходах двух или более параллельно работающих ФК по поступающим результатам измерений. Каждый из ФК соответствует своему виду маневра и основан на представлении маневра объекта в виде стохастического процесса. Итоговая оценка находится путем объединения соответствующих оценок по каждому виду маневра с учетом их весов, что эквивалентно гауссовской аппроксимации апостериорной плотности вероятности параметров движения объекта на каждом такте. Эффективным средством синтеза модифицированных ФК является марковская теория оценивания [8, 9].

Кроме того, для повышения потенциальной точности и достоверности результатов сопровождения маневрирующих объектов широко используется комплексирование разнотипных измерителей с совпадающими зонами наблюдения и имеющими разную физическую природу, например активными радиолокационными и пассивными оптико-электронными [10–13].

Развитие средств вычислительной техники позволяет реализовать комплексную обработку информации (КОИ) в цифровой форме при достаточно большом числе уровней квантования

аналого-цифровых преобразователей и разрядов для представления чисел [14]. Максимального выигрыша от комплексирования можно достичь, решив задачу синтеза, что позволяет определить оптимальную структуру и характеристики системы комплексной обработки информации [8].

Для решения задачи КОИ при сопровождении маневрирующего объекта в условиях противодействия среды может быть использован математический аппарат дискретно-непрерывных марковских процессов (ДНМП) в дискретном времени [14], адекватный решаемой задаче при реализации синтезированных алгоритмов на ЭВМ.

**1. Постановка задачи оценивания дискретно-непрерывного марковского процесса в дискретном времени.** Пусть вектор состояния сопровождаемого динамического маневрирующего объекта описывается линейным векторно-матричным стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) с постоянными во времени коэффициентами, зависящим от изменяющегося во времени случайного дискретного параметра  $A_k$ , который характеризует виды маневров объекта [15]:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(A_k)\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}(A_k)\mathbf{N}_\xi(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{X}(t)$  —  $n_x$ -мерный вектор фазовых координат ДНМП;  $\mathbf{X}_0$  — вектор начальных фазовых координат, имеющий гауссовское распределение;  $\mathbf{F}$  — матрица коэффициентов усиления состояния размером  $(n_x \times n_x)$ ;  $\mathbf{G}$  — матрица интенсивностей шумов размером  $(n_x \times n_\xi)$ ;  $\mathbf{Q} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$  — матрица коэффициентов диффузии вектора  $\mathbf{X}(t)$ ;  $T$  — операция транспонирования;  $\mathbf{N}_\xi(t)$  —  $n_\xi$ -мерный вектор белого гауссовского шума (БГШ) с нулевым математическим ожиданием и единичной матрицей интенсивностей;  $A_k \equiv A(t_k)$  — дискретный конечномерный марковский процесс, который может принимать значения  $a_j, j = \overline{1, M_1}$ , — марковская цепь с матрицей вероятностей переходов

$$\Pi_i(k-1, k) = \{\pi_{ij}^a(k-1, k)\} = \{P(A_k = a_j | A_{k-1} = a_i)\}, \quad i, j = \overline{1, M_1},$$

смена состояний которой может происходить только в фиксированные моменты времени  $t_k = t_0 + k\Delta, k = 1, 2, \dots$ , разделенные постоянным интервалом  $\Delta = t_k - t_{k-1}$ ;  $P$  — оператор вероятности;  $M_1$  — число значений дискретного параметра  $a_k$ .

Решение уравнения (1.1) имеет вид [16]

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0, A_k)\mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau, A_k)\mathbf{G}(\tau, A_k)\mathbf{N}_\xi(\tau)d\tau, \quad (1.2)$$

где фундаментальная матрица решений  $\Phi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0, A_k) = \mathbf{F}(A_k)\Phi(t, t_0, A_k), \quad \Phi(t_0, t_0, A_k) = \mathbf{I}.$$

Интеграл в правой части равенства (1.2) представляет собой векторный процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей центральных моментов второго порядка:

$$\mathbf{Q}(t, t_0, A_k) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau, A_k)\mathbf{G}(\tau, A_k)\mathbf{G}^T(\tau, A_k)\Phi^T(t, \tau, A_k)d\tau, \quad \mathbf{Q}(t_0, t_0, A_k) = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{I}, \mathbf{0}$  — единичная и нулевая матрицы соответственно.

Так как для неперекрывающихся интервалов времени значения этого процесса статистически независимы, аналогично [16] уравнение состояния (1.1) может быть представлено в статистически эквивалентной форме в виде разностного уравнения с шагом дискретизации  $\Delta = t_k - t_{k-1}$ :

$$\mathbf{X}_k = \Phi(k, k-1, A_k)\mathbf{X}_{k-1} + \Gamma(k, k-1, A_k)\mathbf{\Xi}_{k-1}, \quad \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0^*, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{X}_k \equiv \mathbf{X}(t_k)$ ,  $\Gamma(A_k)$  — нижняя треугольная матрица, которая определяется соотношением

$$\Gamma(A_k)\Gamma^T(A_k) = \mathbf{B}(A_k);$$

$\Xi$  —  $n_x$ -мерный вектор независимых гауссовских случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями;  $\mathbf{X}_0^* = \mathcal{N}\{\mathbf{X} - \mathbf{m}_0; \mathbf{B}_0\}$  — вектор начальных фазовых координат, имеющий нормальное распределение с вектором математических ожиданий  $\mathbf{m}_0$  и корреляционной матрицей  $\mathbf{B}_0$ .

Эквивалентное дискретное представление (1.3) непрерывных моделей вектора состояния маневрирующего объекта (1.1) является абсолютно точным в том смысле, что для любых  $t_k - t_{k-1} > 0$  оно позволяет получить случайные процессы с теми же статистическими характеристиками, как и решение СДУ (1.1), без погрешностей аппроксимации [8].

Пусть в дискретные моменты времени  $t_k = t_0 + k\Delta$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , уравнение измерений имеет вид

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{H}(B_k, C_k)\mathbf{X}_k + \mathbf{V}(B_k, C_k)\boldsymbol{\Psi}_k, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{Y}_k = [\mathbf{Y}_k^{(1)\top}, \mathbf{Y}_k^{(2)\top}]^\top$ ,  $\mathbf{Y}_k^{(1)}$  —  $n_{y1}$ -мерный вектор наблюдений активного канала измерений, использующего отраженные от объекта зондирующие сигналы;  $\mathbf{Y}_k^{(2)}$  —  $n_{y2}$ -мерный вектор наблюдений пассивного канала измерений, применяющего собственное электромагнитное излучение объекта;  $\boldsymbol{\Xi}_k, \boldsymbol{\Psi}_k = [\boldsymbol{\Psi}_k^{(1)\top}, \boldsymbol{\Psi}_k^{(2)\top}]^\top$  — выборки независимых векторных БГШ с нулевыми математическими ожиданиями и единичными корреляционными матрицами соответствующей размерности;  $\mathbf{H}(B_k, C_k) = [\mathbf{H}_1^\top(B_k) \ \mathbf{H}_2^\top(C_k)]^\top$ ;  $\mathbf{V}(B_k, C_k) = \text{diag}[\mathbf{V}_1(B_k) \ \mathbf{V}_2(C_k)]$  — матрица известных коэффициентов и матрица диагональных элементов, характеризующих погрешности измерений соответственно;  $B_k, C_k$  — дискретные марковские процессы нарушений в каналах измерений, описываемые цепями Маркова на  $M_2$ - и  $M_3$ -положений соответственно, с матрицами вероятностей переходов:

$$\Pi_2(k-1, k) = \{\pi_{nm}^b(k-1, k)\} = \{P(B_k = b_m | B_{k-1} = b_n)\}, \quad n, m = \overline{1, M_2},$$

$$\Pi_3(k-1, k) = \{\pi_{ed}^c(k-1, k)\} = \{P(C_k = c_d | C_{k-1} = c_e)\}, \quad e, d = \overline{1, M_3},$$

смена состояний которых может происходить только в фиксированные моменты времени  $k = 1, 2, \dots$ ;  $M_2, M_3$  — число значений дискретных параметров  $b_m, c_d$  соответственно.

Применительно к решаемой задаче синтеза вектор состояния представляет собой ДНМП  $[\mathbf{X}_k^\top, A_k, B_k, C_k]^\top \equiv [\mathbf{X}_k^\top, \mathbf{S}_k^\top]^\top$ , где  $\mathbf{X}_k$  — непрерывная  $n_x$ -мерная компонента ДНМП, описывающий в пространстве состояний динамику фазовых координат объекта;  $\mathbf{S}_k = [A_k, B_k, C_k]^\top$  — дискретная компонента ДНМП — трехкомпонентный дискретный марковский процесс, причем марковские цепи  $B_k$  и  $C_k$  не зависят от  $\mathbf{X}_k$  и  $A_k$ .

По условию задачи известны матрицы  $\Phi, \Gamma, \mathbf{H}, \mathbf{V}$ , а также начальные распределения марковского вектора, причем компоненты марковской цепи  $A_k, B_k$  и  $C_k$ , характеризующие маневр объекта и нарушения в каналах измерений соответственно, не зависят друг от друга.

Цель работы — на основе марковской теории оценивания случайных процессов разработать оптимальные (квазиоптимальные) алгоритмы комплексной обработки ДНМП  $[\mathbf{X}_k^\top, A_k, B_k, C_k]^\top$ , характеризующего сопровождение маневрирующего объекта, по наблюдаемым в дискретном времени выходным сигналам измерителей  $\mathbf{Y}_k = [\mathbf{Y}_k^{(1)\top}, \mathbf{Y}_k^{(2)\top}]^\top$  в статистически неопределенных ситуациях.

**2. Закон распределения смешанного вектора состояния дискретно-непрерывного марковского процесса.** Обозначим апостериорное распределение смешанного вектора состояния  $[\mathbf{X}_k^\top, \mathbf{S}_k^\top]^\top$  по наблюдаемой последовательности измерений  $\mathbf{y}_1^k = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$  как  $w_{jmd}(\mathbf{x}_k)$ . Величина  $w_{jmd}(\mathbf{x}_k)d\mathbf{x}_k$  равна вероятности одновременного выполнения условий  $\mathbf{X}_k \in (\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k + d\mathbf{x}_k)$ ,  $A_k = a_j$ ,  $B_k = b_m$ ,  $C_k = c_d$ , где  $\mathbf{x}_k$  — детерминированное значение случайной величины  $\mathbf{X}_k$  при условии

$\mathbf{Y}_1^k = \mathbf{y}_1^k$ . На основании свойств марковских процессов в дискретном времени запишем рекуррентное уравнение:

$$w_{jmd}^*(\mathbf{x}_k) = \frac{f_{md}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)}{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1})} \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{de}^c \int f_j(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) w_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (2.1)$$

где  $f_j(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, A_k = a_j)$  — условная плотность вероятности (ПВ), определяемая с помощью уравнения (1.3);  $w_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1})$  — апостериорное распределение, полученное на предыдущем  $k-1$ -м шаге по последовательности измерений  $\mathbf{y}_1^{k-1} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}\}$ ;  $f_{md}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d)$  — одношаговая функция правдоподобия;  $f(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1})$  — нормирующий коэффициент,

$$\sum_i = \sum_{i=1}^{M_1}, \quad \sum_n = \sum_{n=1}^{M_2}, \quad \sum_e = \sum_{e=1}^{M_3}.$$

В (2.1) и далее для простоты записи аргументы  $k, k-1$  всех функций, где это возможно и не вызывает сомнений, опущены, а интегрирование по переменной  $\mathbf{x}$  ведется в области  $\mathfrak{R}^{n_x}$ .

Выражение (2.1) по своей сути — интегрально-рекуррентная формула Стратоновича—Бухалева [17, 18] апостериорного распределения смешанного вектора состояния  $[\mathbf{X}_k^T, \mathbf{S}_k^T]^T$  в дискретном времени и представляет собой решение задачи оценивания этого вектора состояния. Оптимальный алгоритм является рекуррентным и описывает эволюцию апостериорного распределения  $w_{jmd}^*(\mathbf{x}_k)$  на каждом  $k$ -м шаге. Начальное условие  $w_{jmd}^*(\mathbf{x}_0)$  равно известному априорному совместному распределению случайных величин  $\mathbf{X}_0, A_0, B_0, C_0$ .

Вводя обозначение  $\tilde{w}_{jmd}(\mathbf{x}_k)$  (экстраполированного по измерениям  $\mathbf{y}_1^{k-1} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}\}$  распределения смешанного вектора состояния  $[\mathbf{X}_k^T, \mathbf{S}_k^T]^T$ ), перепишем (2.1) в виде цепочки из двух формул:

$$\tilde{w}_{jmd}(\mathbf{x}_k) = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{de}^c P_{ine}^*(k-1) \int f_j(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) w_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (2.2)$$

$$w_{jmd}^*(\mathbf{x}_k) = \frac{f_{md}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)}{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1})} \tilde{w}_{jmd}(\mathbf{x}_k). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.2) описывает преобразование апостериорного распределения предыдущего шага в экстраполированное распределение  $\tilde{w}_{jmd}(\mathbf{x}_k)$ . С помощью соотношения (2.3) производится уточнение экстраполированного распределения на основе полученного измерения  $\mathbf{y}_k$  и определяется апостериорное распределение  $w_{jmd}^*(\mathbf{x}_k)$ .

Для нахождения апостериорной вероятности дискретной компоненты ДНМП на текущем  $k$ -м шаге  $P_{jmd}^*(k)$  проинтегрируем (2.1) по переменным  $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}$ , в результате получим систему рекуррентных уравнений:

$$\tilde{P}_{jmd}(k) = P(A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d | \mathbf{y}_1^{k-1}) = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c P_{ine}^*(k-1), \quad (2.4)$$

$$P_{jmd}^*(k) = P(A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d | \mathbf{y}_1^k) = \frac{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d, \mathbf{y}_1^{k-1})}{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1})} \tilde{P}_{jmd}(k), \quad (2.5)$$

где

$$f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d, \mathbf{y}_1^{k-1}) = \int f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d) \tilde{w}_{jmd}(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k \quad (2.6)$$

— условная ПВ одношагового предсказания наблюдаемых сигналов, а нормирующий множитель  $f(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1})$  определяется как

$$f(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1}) = \sum_i \sum_n \sum_j \sum_m \sum_e \sum_d \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d, \mathbf{y}_1^{k-1}) P_{jmd}^*(k),$$

$$\sum_j = \sum_{j=1}^{M_1}, \quad \sum_m = \sum_{m=1}^{M_2}, \quad \sum_d = \sum_{d=1}^{M_3}.$$

Для нахождения условной ПВ непрерывной компоненты ДНМП  $f_{jmd}^*(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k | A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d, \mathbf{y}_1^k)$  введем в рассмотрение условную экстраполированную ПВ непрерывной компоненты ДНМП  $\tilde{f}_{jmd}(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k | A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d, \mathbf{y}_1^{k-1})$  и применим свойство условных распределений. В результате из (2.2) и (2.3) получим систему рекуррентных уравнений:

$$\tilde{f}_{jmd}(\mathbf{x}_k) = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c P_{ine}^*(k-1) \int f_j(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) f_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (2.7)$$

$$f_{jmd}^*(\mathbf{x}_k) = \frac{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d)}{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d, \mathbf{y}_1^{k-1})} \tilde{f}_{jmd}(\mathbf{x}_k), \quad (2.8)$$

где  $\tilde{f}_{jmd}(\mathbf{x}_k)$  — условная экстраполированная ПВ вектора  $\mathbf{X}_k$  при условии  $A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d$ ;  $f_{jmd}^*(\mathbf{x}_k)$  — условная апостериорная ПВ вектора  $\mathbf{X}_k$  при условии  $A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d$ ;  $f_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1})$  — условная апостериорная ПВ вектора  $\mathbf{X}_{k-1}$  при условии  $A_{k-1} = a_i, B_{k-1} = b_n, C_{k-1} = c_e$ , полученная на предыдущем  $k-1$ -м шаге (вывод уравнений (2.1)–(2.8) приводится в Приложении).

Синтезированный алгоритм совместной фильтрации компонент ДНМП (2.5)–(2.8) является нелинейным даже для линейных априорных уравнений (1.3), (1.4). Нелинейные операции выполняются при вычислении условной ПВ (2.6), используемой для определения апостериорных вероятностей (2.5). Особенность синтезированного алгоритма состоит в неразрывной связанности уравнений фильтрации и экстраполяции дискретного и непрерывного компонентов между собой.

**3. Квазиоптимальный алгоритм оценивания вектора состояния дискретно-непрерывного марковского процесса.** Практическая реализация синтезированного оптимального алгоритма совместной фильтрации компонент ДНМП (2.5)–(2.8) встречает значительные трудности. Они обусловлены требованием больших объемов памяти и быстродействия вычислителя при выполнении численного интегрирования многомерных ПВ. Поэтому представляет большой интерес синтез квазиоптимальных алгоритмов фильтрации и экстраполяции [8, 19].

Существует большое количество различных методов синтеза квазиоптимальных алгоритмов нелинейного оценивания [17, 18]. Наибольшее распространение получил метод гауссовской аппроксимации, который требует минимальных вычислительных затрат по сравнению с остальными методами и во многих случаях позволяет задать требуемое качество оценивания, несмотря на приближенное нахождение компонент ДНМП. Для этого необходимо выполнить двухмоментную параметрическую гауссовскую аппроксимацию апостериорного распределения  $w_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1})$ . Эта аппроксимация состоит в замене этой неизвестной функции некоторыми известными функциями, в частности условными математическим ожиданием и ковариационной функцией, случайные значения которых определяются так:

$$\mathbf{X}_{ine}^*(k-1) \equiv \mathbf{M}\{\mathbf{X}_{k-1}, A_{k-1} = a_i, B_{k-1} = b_n, C_{k-1} = c_e | \mathbf{Y}_1^{k-1}\},$$

$$\mathbf{R}_{ine}^*(k-1) \equiv \text{cov}\{\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}, A_{k-1} = a_i, B_{k-1} = b_n, C_{k-1} = c_e | \mathbf{Y}_1^{k-1}\}.$$

Применяя, таким образом, на каждом  $k$ -м шаге гауссовскую аппроксимацию для условного апостериорного распределения  $w_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1})$ , можно показать, что квазиоптимальный алгоритм

фильтрации непрерывного компонента ДНМП описывается системой рекуррентных уравнений, вывод которых приводится в Приложении.

Вектор текущей условной оценки непрерывного компонента ДНМП и ковариационная матрица ее погрешностей

$$\mathbf{X}_{jmd}^*(k) \equiv \mathbf{M}\{\mathbf{X}_k, A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d | \mathbf{Y}_1^k\},$$

$$\mathbf{R}_{jmd}^*(k) \equiv \text{cov}\{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k, A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d | \mathbf{Y}_1^k\}$$

определяется по результатам текущих измерений  $\mathbf{Y}_k^{(1)}$  и  $\mathbf{Y}_k^{(2)}$ :

$$\mathbf{X}_{jmd}^*(k) = \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k) + \mathbf{K}_{jmd}^{(1)}(k)(\mathbf{Y}_k^{(1)} - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k)) + \mathbf{K}_{jmd}^{(2)}(k)(\mathbf{Y}_k^{(2)} - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k)), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{R}_{jmd}^*(k) = \tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k) - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^T(b_m) \tilde{\mathbf{R}}_{jmd} \\ \mathbf{H}_2^T(c_d) \tilde{\mathbf{R}}_{jmd} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} \\ \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(b_m) \tilde{\mathbf{R}}_{jmd} \\ \mathbf{H}_2(c_d) \tilde{\mathbf{R}}_{jmd} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Здесь

1)  $\mathbf{K}_{jmd}^{(1)}(k)$  и  $\mathbf{K}_{jmd}^{(2)}(k)$  – оптимальные коэффициенты передачи:

$$\mathbf{K}_{jmd}^{(1)}(k) = \tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k) \mathbf{H}_1^T(b_m) (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)}(k) - \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)}(k) (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)}(k))^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)}(k))^{-1} - \\ - \tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k) \mathbf{H}_2^T(c_d) (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)}(k) - \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)}(k) (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)}(k))^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)}(k))^{-1}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{K}_{jmd}^{(2)}(k) = -\tilde{\mathbf{R}}_{jmd} \mathbf{H}_1^T(b_m) (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} - \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)})^{-1} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} + \\ + \tilde{\mathbf{R}}_{jmd} \mathbf{H}_2^T(c_d) ((\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} + (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} - \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1}); \quad (3.4)$$

2)  $\tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k)$  – условно-прогнозная оценка непрерывного компонента ДНМП при условии  $A_k = a_j$ ,  $B_k = b_m$ ,  $C_k = c_d$  и  $\tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k)$  – ковариационная матрица погрешностей предсказания:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k) = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1), \quad (3.5)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k) = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} \{ \Phi(a_j) \mathbf{R}_{ine}^*(k-1) \Phi^T(a_j) + \Gamma(a_j) \Gamma^T(a_j) + \\ + [\Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k)] \times [\Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k)]^T \}; \quad (3.6)$$

3)  $\tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k)$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k)$  – прогнозируемые значения векторов измерений и  $\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}(k)$  – условная блочная ковариационная матрица погрешностей предсказания измерений:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k) = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} \mathbf{H}_1(b_m) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1), \quad (3.7)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k) = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} \mathbf{H}_2(c_d) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1), \quad (3.8)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} \\ \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} \left\{ \mathbf{H}_1(b_m) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) \Phi^T(a_j) \mathbf{H}_1^T(b_m) + \mathbf{V}_1(b_m) \mathbf{V}_1^T(b_m) + \right. \\ \left. + \left[ \mathbf{H}_1(b_m) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k) \right] \times \left[ \mathbf{H}_1(b_m) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k) \right]^T \right\}, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} & \left\{ \mathbf{H}_1(b_m) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) \Phi^T(a_j) \mathbf{H}_2^T(c_d) + \right. \\ & \left. + \left[ \mathbf{H}_1(b_m) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k) \right] \times \left[ \mathbf{H}_2(c_d) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k) \right]^T \right\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} & \left\{ \mathbf{H}_2(C_k) \Phi(A_k) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) \Phi^T(A_k) \mathbf{H}_1^T(B_k) + \right. \\ & \left. + \left[ \mathbf{H}_2(C_k) \Phi(A_k) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k) \right] \times \left[ \mathbf{H}_1(B_k) \Phi(A_k) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k) \right]^T \right\}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)} = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} & \left\{ \mathbf{H}_2(c_d) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) \Phi^T(a_j) \mathbf{H}_2^T(c_d) + \mathbf{V}_2(c_d) \mathbf{V}_2^T(c_d) + \right. \\ & \left. + \left[ \mathbf{H}_2(c_d) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k) \right] \times \left[ \mathbf{H}_2(c_d) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k) \right]^T \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

При этом начальные условия для квазиоптимального алгоритма КОИ (2.4), (2.5), (3.1)–(3.13):

$$\mathbf{X}_{jmd}^*(0) = \mathbf{M}\{\mathbf{X}_0\}, \quad \mathbf{R}_{jmd}^*(0) = \text{cov}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0\}, \quad P_{ine}^*(0) = P_0, \quad i = \overline{1, M_1}, \quad n = \overline{1, M_2}, \quad e = \overline{1, M_3}.$$

Уравнения оценивания апостериорной вероятности дискретной компоненты ДНМП (2.4), (2.5) остаются без изменения, а условная ПВ одношагового предсказания наблюдаемых сигналов (2.6) имеет вид [15]

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Y}_k | \mathbf{X}_k, B_k = b_m, C_k = c_d, \mathbf{Y}_1^{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{(n_{y1}+n_{y2})} \det\{\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}\}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k^{(1)} - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k) \\ \mathbf{Y}_k^{(2)} - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k) \end{bmatrix}^T \right. \\ \left. \times \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} \\ \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k^{(1)} - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k) \\ \mathbf{Y}_k^{(2)} - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k) \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Задача КОИ при сопровождении маневрирующего объекта считается решенной, если на выходе оптимального фильтра на каждом  $k$ -м шаге формируется оптимальная оценка, соответствующая определенному критерию оптимальности. Байесовское решение может быть получено на основе минимизации апостериорного риска [20], который применительно к решаемой задаче имеет вид

$$\mathbf{u}_k^o = (\mathbf{x}_k^o, A_k^o = a_j^o, B_k^o = b_m^o, C_k^o = c_d^o) = \arg \min_{\tilde{\mathbf{x}}_k, j, m, d} \sum_{\mu=1}^{M_1} \sum_{v=1}^{M_2} \sum_{\eta=1}^{M_3} \int g_{jmd\mu v \eta}(\mathbf{x}_k, \tilde{\mathbf{x}}_k) w_{jmd}^*(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k, \quad (3.15)$$

где  $g_{jmd\mu v \eta}(\mathbf{x}_k, \tilde{\mathbf{x}}_k)$  – функция потерь;  $\mathbf{u}_k^o$  – оптимальное решение.

При решении многих практических задач малым ошибкам непрерывного компонента соответствуют меньшие потери. В таких случаях применяется функция потерь [15], простая по дискретному и квадратичная по непрерывному компонентам:

$$g_{jmd\mu v \eta}(\mathbf{x}_k, \tilde{\mathbf{x}}_k) = \alpha(1 - \delta_{jmd\mu v \eta}) + \beta \delta_{jmd\mu v \eta} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k), \quad (3.16)$$

где  $\alpha, \beta$  – коэффициенты потерь;  $\delta_{jmd\mu v \eta}$  – символ Кронекера:

$$\delta_{jmd\mu v \eta} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = \mu, \quad m = v, \quad d = \eta, \\ 0, & \text{если } j \neq \mu, \quad m \neq v, \quad d \neq \eta, \end{cases} \quad \mu = \overline{1, M_1}, \quad v = \overline{1, M_2}, \quad \eta = \overline{1, M_3}.$$

Функция потерь (3.16) означает, что при любом неправильном определении значений дискретного компонента потери равны коэффициенту  $\alpha$ , а при правильном принятии решения потери пропорциональны сумме квадратов ошибок оценки непрерывного компонента.

Подставляя выражение (3.16) в (3.15) и выполняя минимизацию апостериорного риска, можно показать, что решающее правило имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{если } P_{jmd}^*(k) \{ \alpha + \beta \text{Tr} \{ \mathbf{R}_{jmd}^*(k) \} \} \geq P_{\mu\nu\eta}^*(k) \{ \alpha + \beta \text{Tr} \{ \mathbf{R}_{\mu\nu\eta}^*(k) \} \}, \quad \text{то} \\ \mathbf{X}_k^o = \mathbf{X}_{jmd}^*(k), \quad a_j^o = a_j^*, \quad b_m^o = b_m^*, \quad c_d^o = c_d^*, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где  $\text{Tr} \{ \mathbf{A} \}$  — след матрицы  $\mathbf{A}$ .

Таким образом, в качестве безусловной оценки непрерывного компонента ДНМП выступает условное апостериорное математическое ожидание  $\mathbf{X}_{jmd}^*(k)$ . Из (3.17) следует, что принятие решения сводится к максимизации взвешенных апостериорных вероятностей дискретных компонент ДНМП. При этом следует отметить, что с увеличением погрешности оценки непрерывного компонента ДНМП уменьшаются веса погрешностей оценки дискретных компонент ДНМП. В результате может приниматься гипотеза с меньшей апостериорной вероятностью, но и с меньшими погрешностями оценки непрерывного компонента ДНМП, т.е. может отвергаться гипотеза с большей апостериорной вероятностью.

Условная ковариационная матрица  $\mathbf{R}_{jmd}^*(k)$  характеризует качество оценки при правильном определении значений дискретных компонент  $A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d$ . Безусловная ковариационная матрица  $\mathbf{R}^*(k)$  погрешностей оценки непрерывного компонента ДНМП определяется по формуле

$$\mathbf{R}^*(k) = \sum_j \sum_m \sum_d \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c P_{jmd}^*(k) (\mathbf{R}_{jmd}^*(k) + (\mathbf{X}_{jmd}^*(k) - \mathbf{X}_k^*)(\mathbf{X}_{jmd}^*(k) - \mathbf{X}_k^*)^T). \quad (3.18)$$

Квазиоптимальный цифровой фильтр КОИ (рис. 1), реализующий алгоритм (2.4), (2.5)—(3.14), (3.16)—(3.18), является многоканальным с числом каналов  $M = M_1 \times M_2 \times M_3$  и в основном сохраняет структуру и все обратные связи, присущие оптимальному устройству. Каждый канал состоит из блоков КУ<sub>1</sub> и КУ<sub>2</sub> — вычисления коэффициентов усиления  $\mathbf{K}_{jmd}^{(1)}(k)$  и  $\mathbf{K}_{jmd}^{(2)}(k)$ ; блока оценки (БО), в котором рассчитываются  $\mathbf{X}_{jmd}^*(k)$ ,  $\mathbf{X}_{ine}^*(k-1)$ ; блоков прогноза БП<sub>1</sub> и БП<sub>2</sub>, в которых вычисляются  $\tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k)$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k)$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k)$ ; блока апостериорных вероятностей (БАВ), в котором рассчитываются  $P_{jmd}^*(k)$ ,  $P_{ine}^*(k-1)$ ,  $\tilde{P}_{jmd}(k)$ , и блоков вычисления корреляционных матриц БКМ<sub>1</sub> и БКМ<sub>2</sub>, в которых вычисляются  $\tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k)$ ,  $\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}(k)$ ,  $\mathbf{R}_{jmd}^*(k)$  и  $\mathbf{R}_{ine}^*(k-1)$ . Окончательное решение о принятии безусловных оценок  $\mathbf{X}_k^* = \mathbf{X}_{jmd}^*(k)$ ,  $A_k = a_j^*$ ,  $B_k = b_m^*$ ,  $C_k = c_d^*$  производится в решающем устройстве (РУ).

**4. Пример.** Приведены результаты моделирования алгоритма сопровождения маневрирующей цели в горизонтальной плоскости в условиях нарушений в каналах измерений угла пеленга. По условиям постановки задачи исходные вектор состояния  $\mathbf{X}(t)$  и коэффициенты матриц априорного уравнения (1.1) определяются из системы СДУ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi(t) &= \omega(t), \\ \frac{d}{dt} \omega(t) &= -2\alpha_\omega \omega - \chi_\omega^2 \varphi - \psi J + \sqrt{4\alpha_\omega \chi_\omega^2 \sigma_\omega^2} \xi_1(t), \\ \frac{d}{dt} D(t) &= V(t), \\ \frac{d}{dt} V(t) &= J(t), \\ \frac{d}{dt} J(t) &= -2\alpha_J J - \chi_J^2 V + \sqrt{4\alpha_J \chi_J^2 \sigma_J^2} \xi_2(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\varphi$  — угол пеленга на объект;  $\omega$  — угловая скорость линии визирования;  $D$  — дальность до объекта;  $V$  — скорость сближения с объектом;  $J$  — ускорение сближения с объектом;  $1/\alpha_\omega = D^*/2V$  — время, оставшееся до конца сопровождения,  $\chi$  — коэффициент, характеризующий математическое ожидание флуктуаций угловой скорости линии визирования;  $\alpha_J$  — коэффициент, характеризующий

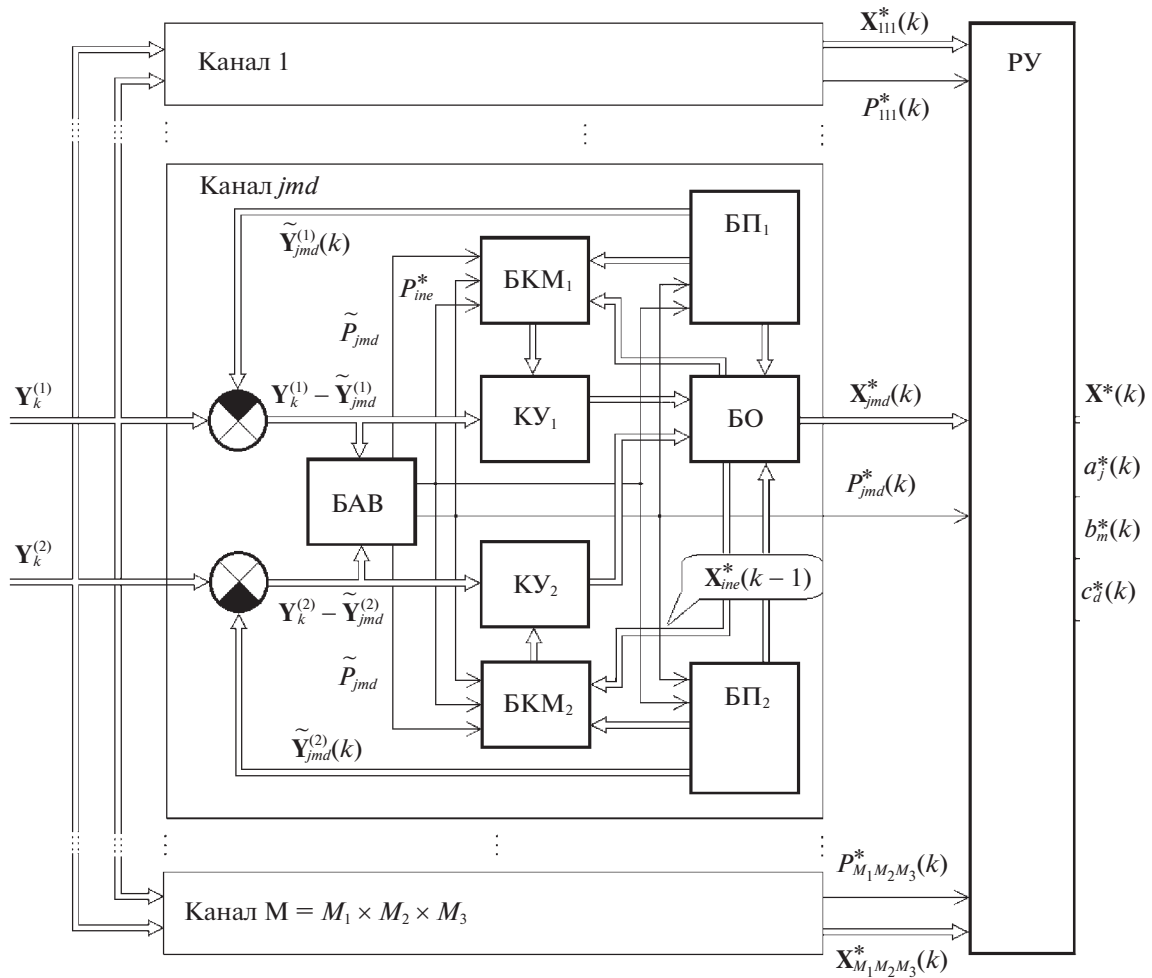


Рис. 1. Структурная схема цифрового фильтра КОИ

ширину спектральной плотности флуктуаций ускорения сближения с объектом;  $\psi = 1/D^*$ ;  $D^*$  – текущая оценка дальности до объекта (считается, что измеряется без погрешностей даже в статистически неопределенных ситуациях),  $1/\chi_j = \tau_m$  – среднее время маневра;  $\sigma_\omega^2$  – дисперсия флуктуаций угловой скорости линии визирования;  $\sigma_j^2$  – дисперсия флуктуаций ускорения сближения с объектом;  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  – стандартные БГШ.

Исходный вектор наблюдения  $Y(k)$  и коэффициенты матриц априорного уравнения (1.4) определяются как

$$Y_k^{(1)} = [Y_k^{(11)} \ Y_k^{(12)}]^T, \quad Y_k^{(2)} \equiv Y_k^{(2)}, \quad H(C_k) = [h_{ij}], \quad V(B_k) = \text{diag} \left[ \sqrt{B_k \sigma_{y11}^2} \ \sqrt{B_k \sigma_{y12}^2} \ \sqrt{\sigma_{y2}^2} \right], \quad (4.2)$$

где ненулевые элементы матрицы  $H(C_k)$ :  $h_{11} = h_{24} = 1$ ,  $h_{31} = C_k$ .

Проверка качества квазиоптимального алгоритма проведена с помощью статистического моделирования на электронно-вычислительной машине для случая, когда параметры уравнений (4.1), (4.2) равны:  $\tau_m = 10$  с,  $\chi = 0.16$  рад/с,  $\Delta = 1$  с,  $\sigma_{y11} = 0.01$  рад;  $\sigma_{y12} = 0.02$  рад;  $\sigma_{y2} = 0.5$  м/с; а цепи Маркова принимают значения  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5$ ;  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 10$ ;  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 10$ . Вероятности перехода  $\pi_{11}^a = \pi_{11}^b = \pi_{11}^c = 0.8$ ;  $\pi_{12}^a = \pi_{12}^b = \pi_{12}^c = 0.2$ . В целях повышения наглядности функционирования

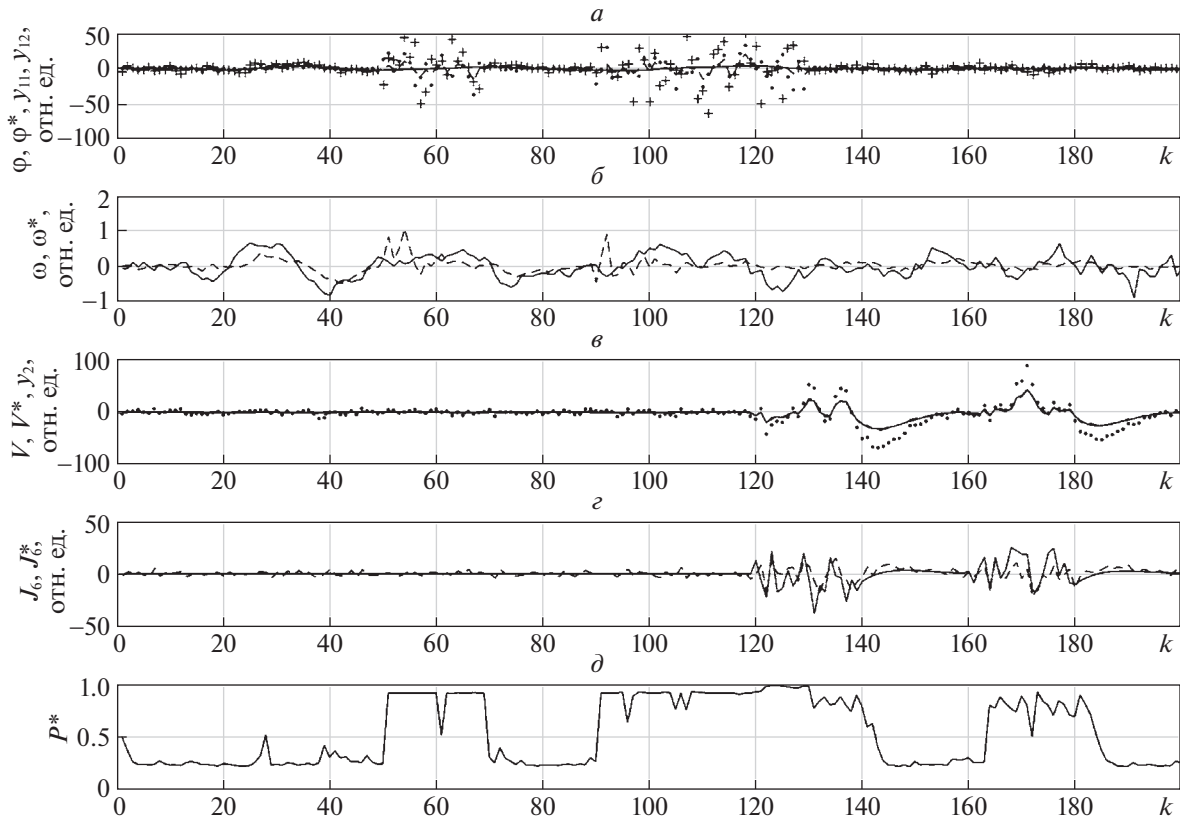


Рис. 2. Результаты моделирования и оценивания в дискретном времени

алгоритма была сформирована тестовая реализация для дискретных компонент  $B_k, C_k$ . При этом было принято, что длина реализации  $k = 1, 200$ , а цепи Маркова запишем как

$$B_k = \begin{cases} b_1, & 1 \leq k < 49, \quad 71 \leq k < 200, \\ b_2, & 50 \leq k < 70, \end{cases} \quad C_k = \begin{cases} c_1, & 1 \leq k < 89, \quad 131 \leq k < 200, \\ c_2, & 90 \leq k < 130. \end{cases}$$

Ускорение объекта изменяется по следующему закону:

$$A_k = \begin{cases} a_1, & 1 \leq k < 119, \quad 141 \leq k < 159, \quad 161 \leq k < 200, \\ a_2, & 120 \leq k < 140, \quad 160 \leq k < 180. \end{cases}$$

Определение статистических характеристик квазиоптимальных алгоритмов КОИ проводилось методом Монте-Карло, при этом тестовая реализация дискретной цепи Маркова  $A(k)$  сохранялась неизменной, а независимые гауссовские последовательности  $\Xi_1(k), \Xi_2(k), \Psi_1(k) - \Psi_3(k)$  формировались с помощью датчика случайных чисел. Для определения оценок дискретного и непрерывного компонентов использовалось решающее правило (3.16)–(3.17), для которого коэффициенты потерь принимали значения  $\alpha = 1, \beta = 0$ .

Результаты моделирования приведены на рис. 2, где показаны зависимости от дискретного времени: а)  $\varphi(k)$  – угла визирования объекта (сплошная),  $\varphi^*(k)$  – оценки угла визирования объекта (пунктир),  $y_{11}(k)$  – измерений активным каналом (точки),  $y_{12}(k)$  – измерений пассивным каналом (крестики); б)  $\omega(k)$  – угловой скорости линии визирования (сплошная),  $\omega^*(k)$  – оценки угловой скорости линии визирования (пунктир); в)  $V$  – скорости объекта,  $V^*$  – оценки скорости объекта (пунктир),  $y_2(k)$  – измерений скорости объекта (точки); г)  $J_6$  – бокового ускорения объекта (сплошная),  $J_6^*$  – оценки бокового ускорения объекта (пунктир); д)  $P^*$  – совместной вероятности правильного обнаружения нарушений в каналах измерений и маневров объекта.

Данные рис. 2 показывают работоспособность квазиоптимального алгоритма (2.4)–(3.14), (3.16)–(3.18) при оценке угловой скорости линии визирования, что особенно важно в случае, когда одновременно наблюдается как маневр объекта, так и скачкообразные нарушения в каналах измерений. Необходимо также отметить, что при реализации квазиоптимального алгоритма отсутствует рост числа каналов фильтра, как в случае байесовского алгоритма адаптивного оценивания [8], что обусловлено марковским свойством ДНМП.

**Заключение.** Методами теории условных марковских процессов решена задача оптимального оценивания ненаблюдаемых компонент векторной марковской последовательности ДНМП при двухканальном векторном наблюдении. Синтезированные алгоритмы основаны на разложении смешанной апостериорной плотности вероятности вектора состояния  $\left[ \mathbf{X}_k^T, A_k, B_k, C_k \right]^T$  и являются алгоритмами с обратными связями по дискретному процессу  $\mathbf{S}_k^T = [A_k, B_k, C_k]$ . На базе квазиоптимального алгоритма разработана соответствующая структурная схема цифрового фильтра КОИ.

Особенность синтезированного квазиоптимального алгоритма комплексирования состоит в неразрывной связанности уравнений фильтрации и экстраполяции дискретного и непрерывного компонентов ДНМП между собой, что потребует дополнительных вычислительных затрат по сравнению с известными алгоритмами. Однако современная высокопроизводительная вычислительная техника позволяет построить практически реализуемый цифровой фильтр КОИ в статистически неопределённых ситуациях.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Введем в рассмотрение апостериорное распределение смешанного вектора состояния  $[\mathbf{X}_k^T, \mathbf{S}_k^T]^T = [\mathbf{X}_k^T, A_k, B_k, C_k]^T$ :

$$f(\mathbf{x}_k, A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d | \mathbf{y}_1^k) = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k | \mathbf{y}_1^k) = w_{jmd}^*(\mathbf{x}_k).$$

Согласно определению условных распределений, имеем

$$f(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{y}_1^k) = f(\mathbf{y}_1^k) f(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k | \mathbf{y}_1^k) = f(\mathbf{y}_1^k) w_{jmd}^*(\mathbf{x}_k). \quad (\text{П.1})$$

Используя (П.1) и основные свойства марковских процессов, запишем выражения для закона распределения апостериорного распределения смешанного вектора состояния  $[\mathbf{X}_k^T, \mathbf{S}_k^T]^T$ :

$$\begin{aligned} w_{jmd}^*(\mathbf{x}_k) &= \frac{1}{f(\mathbf{y}_1^k)} f(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{y}_1^k) = \frac{1}{f(\mathbf{y}_1^k)} \sum_{\mathbf{s}_{k-1}} \cdots \sum_{\mathbf{s}_1} \int \cdots \int f(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k, \dots, \mathbf{x}_1, \mathbf{s}_1, \mathbf{y}_1) \prod_{g=1}^{k-1} d\mathbf{x}_g = \\ &= \frac{f(\mathbf{y}_1^{k-1})}{f(\mathbf{y}_1^k)} \sum_{\mathbf{s}_{k-1}} \int f(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1}) f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1} | \mathbf{y}_1^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} = \\ &= \frac{f(\mathbf{y}_1^{k-1})}{f(\mathbf{y}_1^k)} \sum_{\mathbf{s}_{k-1}} \int f(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1}) w_{jme}^*(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

где интегрирование по переменной  $\mathbf{x}$  осуществляется в области  $\mathfrak{R}^{n_x}$ .

Преобразуем первую условную плотность вероятности в подынтегральном выражении:

$$f(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1}) = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1}).$$

Здесь отсутствие  $\mathbf{y}_{k-1}$  не имеет значения при заданном  $\mathbf{x}_{k-1}$ . Используя свойство условных плотностей вероятности, запишем

$$f(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1}) = f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{s}_k) P(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-1}) f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1}). \quad (\text{П.3})$$

С учетом тождеств

$$\begin{aligned} P(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-1}) &\equiv P(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{k-1}), \\ f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{s}_k) &\equiv f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, A_k = a_j) = f_j(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}), \end{aligned}$$

$$f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1}) \equiv f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d),$$

которые выполняются по условиям постановки задачи, перепишем (П.3) в виде

$$f(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1}) = P(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{k-1}) f_j(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d). \quad (\text{П.4})$$

После подстановки (П.3) в (П.1) имеем

$$w_{jmd}^*(\mathbf{x}_k) = \frac{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k, C_k)}{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1})} \sum_{\mathbf{s}_{k-1}} P(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{k-1}) \int f_j(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) w_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (\text{П.5})$$

С учетом того, что  $P(\mathbf{s}_k | \mathbf{s}_{k-1}) = \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c$ , перепишем (П.5):

$$w_{jmd}^*(\mathbf{x}_k) = \frac{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d)}{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1})} \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{de}^c \int f_j(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) w_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (\text{П.6})$$

где  $f_j(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  — условная ПВ, определяемая на основании уравнения (1.3);  $w_{jmd}^*(\mathbf{x}_k)$  — апостериорное распределение смешанного вектора состояния  $[\mathbf{X}_k^T, \mathbf{S}_k^T]^T$ , полученное на предыдущем  $k-1$ -м шаге по последовательности измерений  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}$ ;  $f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d)$  — одношаговая функция правдоподобия,  $f(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1})$  — нормирующий коэффициент.

Введем в рассмотрение экстраполированное распределение смешанного вектора состояния  $[\mathbf{X}_k^T, \mathbf{S}_k^T]^T$ :

$$\tilde{w}_{jmd}(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k, A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d | \mathbf{y}_1^{k-1}) = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k | \mathbf{y}_1^{k-1}). \quad (\text{П.7})$$

Согласно (П.7), перепишем (П.6) в виде системы двух рекуррентных уравнений:

$$\tilde{w}_{jmd}(\mathbf{x}_k) = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{de}^c \int f_j(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) w_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (\text{П.8})$$

$$w_{jmd}^*(\mathbf{x}_k) = \frac{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d)}{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1})} \tilde{w}_{jmd}(\mathbf{x}_k). \quad (\text{П.9})$$

Уравнение (П.7) описывает эволюцию экстраполированного распределения  $\tilde{w}_{jmd}(\mathbf{x}_k)$  смешанного вектора состояния  $[\mathbf{X}_k^T, \mathbf{S}_k^T]^T$ . С помощью соотношения (П.9) производится уточнение экстраполированного распределения на основе полученного измерения  $\mathbf{y}_k$  и определяется апостериорное распределение  $w_{jmd}^*(\mathbf{x}_k)$ .

Дальнейшее преобразование выражений (П.8), (П.9) может быть выполнено с учетом свойств условных распределений. При этом уравнение (П.6) можно по методике [19] представить в виде следующей системы рекуррентных уравнений:

$$\tilde{P}_{jmd}(k) = P(A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d | \mathbf{y}_1^{k-1}) = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c P_{ine}^*(k-1), \quad (\text{П.10})$$

$$P_{jmd}^*(k) = P(A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d | \mathbf{y}_1^{k-1}) = \frac{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d, \mathbf{y}_1^{k-1})}{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1})} \tilde{P}_{jmd}(k), \quad (\text{П.11})$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{jmd}(\mathbf{x}_k) &= f(\mathbf{x}_k | A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d, \mathbf{y}_1^{k-1}) = \\ &= \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{de}^c P_{ine}^*(k-1) \int f_j(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) w_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

$$f_{jmd}^*(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k | A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d, \mathbf{y}_1^k) = \frac{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d)}{f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d, \mathbf{y}_1^{k-1})} \tilde{f}_{jmd}(\mathbf{x}_k), \quad (\text{П.13})$$

$$f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k, C_k, \mathbf{y}_1^{k-1}) = \int f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k = b_m, C_k = c_d) \tilde{f}_{jmd}(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k, \quad (\text{П.14})$$

$$f(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1}) = \sum_i \sum_n \sum_j \sum_m \sum_e \sum_d \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, B_k, C_k, \mathbf{y}_1^{k-1}) P_{jm}^*(k), \quad (\text{П.15})$$

где  $\tilde{f}_{jmd}(\mathbf{x}_k)$  – условная экстраполированная ПВ вектора  $\mathbf{x}_k$  при условии  $A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d$ ;  $f_{jmd}^*(\mathbf{x}_k)$  – условная апостериорная ПВ вектора  $\mathbf{x}_k$  при условии  $A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d$ ;  $P_{jmd}^*(k)$  – апостериорная вероятность  $A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d$ , вычисляемая путем интегрирования (П.6) по переменным  $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}$ ;  $\tilde{P}_{jmd}(k)$  – экстраполированная вероятность  $A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d$ .

Таким образом, выражение (П.6) соответствует формуле (2.1); выражения (П.7)–(П.8) – формулам (2.2)–(2.3), выражения (П.10)–(П.11) – формулам (2.4), (2.5).

Для вывода квазиоптимальных алгоритмов фильтрации компонент ДНМП воспользуемся допущением о нормальности апостериорного распределения  $w_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1})$  на предыдущем  $k-1$ -м такте фильтрации [15]:

$$w_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x} \det\{\mathbf{R}_{ine}^*(k-1)\}}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{X}_{ine}^*(k-1))^T (\mathbf{R}_{ine}^*(k-1))^{-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{X}_{ine}^*(k-1))\right\}, \quad (\text{П.16})$$

где  $\mathbf{X}_{ine}^*(k-1) \equiv \mathbf{M}\{\mathbf{X}_{k-1}, A_{k-1} = a_i, B_{k-1} = b_n, C_{k-1} = c_e | \mathbf{Y}_1^{k-1}\}$  – математическое ожидание и  $\mathbf{R}_{ine}^*(k-1) \equiv \text{cov}\{\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}, A_{k-1} = a_i, B_{k-1} = b_n, C_{k-1} = c_e | \mathbf{Y}_1^{k-1}\}$  – ковариационная матрица апостериорного распределения  $w_{ine}^*(\mathbf{x}_{k-1})$ ,  $\det\{\mathbf{R}\}$  – детерминант матрицы  $\mathbf{R}$ .

Из (П.16) на основании линейного преобразования (1.3) условно-гауссовской случайной величины  $\mathbf{X}_{k-1}$  перепишем (П.12)

$$\tilde{f}_{jmd}(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x}}} \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c P_{in}^*(k-1) \frac{1}{\sqrt{\det\{\tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k)\}}} \times \\ \times \exp\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k))^T \tilde{\mathbf{R}}_{jmd}^{-1}(k) (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k))\right\}, \quad (\text{П.17})$$

где

$$\tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k) = \Phi(A_k = a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1),$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k) = \Phi(A_k = a_j) \mathbf{R}_{ine}^*(k-1) \Phi^T(A_k = a_j) + \Gamma(A_k = a_j) \Gamma^T(A_k = a_j).$$

В результате двухмоментной гауссовской аппроксимации экстраполированного распределения (2.3) запишем

$$\tilde{f}_{jmd}(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x} \det\{\tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k)\}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k))^T \tilde{\mathbf{R}}_{jmd}^{-1}(k) (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k))\right\}, \quad (\text{П.18})$$

где  $\tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k) \equiv \mathbf{M}\{\mathbf{X}_k, A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d | \mathbf{Y}_1^{k-1}\}$  – условно-прогнозное математическое ожидание при  $A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d$ , которое с учетом взвешенной суммы условных распределений имеет вид

$$\tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k) = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} \Phi(A_k = a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1), \quad (\text{П.19})$$

$\tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k) \equiv \text{cov}\{\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k, A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d | \mathbf{Y}_1^{k-1}\}$  – ковариационная матрица погрешностей предсказания при  $A_k = a_j, B_k = b_m, C_k = c_d$ , которая может быть вычислена по формуле [14]

$$\tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k)) (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k))^T \tilde{f}_{jmd}(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k.$$

Используя представление экстраполяционной плотности вероятности  $\tilde{f}_{jmd}(\mathbf{x}_k)$  в виде взвешенной суммы условных вероятностей, а также с учетом того, что

$$\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k) \equiv (\mathbf{x}_k - \Phi(A_k = a_j)\mathbf{X}_{ine}^*(k-1)) + (\Phi(A_k = a_j)\mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k)),$$

можно показать, что ковариационная матрица погрешностей предсказания  $\tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k) = & \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} \times \\ & \times \left\{ \Phi(A_k = a_j) \mathbf{R}_{ine}^*(k-1) \Phi^T(A_k = a_j) + \Gamma(A_k = a_j) \mathbf{\Gamma}^T(A_k = a_j) + \right. \\ & \left. + (\Phi(A_k = a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k)) (\Phi(A_k = a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k))^T \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

На основании линейного уравнения измерений (1.4) из (П.19) и (П.20) легко получить выражения условно-прогнозных значений векторов измерений  $\tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k)$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k)$  и условную ковариационную матрицу  $\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}(k)$  погрешностей предсказания измерений соответственно:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k) = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} \mathbf{H}_1(b_m) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1), \quad (\text{П.21})$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k) = \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} \mathbf{H}_2(c_d) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1), \quad (\text{П.22})$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}(k) = \mathbf{H} \tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k) \mathbf{H}^T + \mathbf{V}(b_m, c_d) \mathbf{V}^T(b_m, c_d). \quad (\text{П.23})$$

С учетом того, что  $\mathbf{Y}_k = [\mathbf{Y}_k^{(1)T}, \mathbf{Y}_k^{(2)T}]^T$ , условная ковариационная матрица  $\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}(k)$  погрешностей предсказания измерений имеет блочный вид

$$\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} \\ \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.24})$$

Используя (П.20) и (П.23), легко получить выражения элементов блочной матрицы  $\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}(k)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} = & \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} \times \\ & \times \left\{ \mathbf{H}_1(b_m) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) \Phi^T(a_j) \mathbf{H}_1^T(b_m) + \mathbf{V}_1(b_m) \mathbf{V}_1^T(b_m) + \right. \\ & \left. + \left[ \mathbf{H}_1(b_m) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k) \right] \times \left[ \mathbf{H}_1(b_m) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k) \right]^T \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} = & \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} \left\{ \mathbf{H}_1(b_m) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) \Phi^T(a_j) \mathbf{H}_2^T(c_d) + \right. \\ & \left. + \left[ \mathbf{H}_1(b_m) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k) \right] \times \left[ \mathbf{H}_2(c_d) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k) \right]^T \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} = & \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{P_{ine}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jmd}(k)} \left\{ \mathbf{H}_2(c_d) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) \Phi^T(a_j) \mathbf{H}_1^T(b_m) + \right. \\ & \left. + \left[ \mathbf{H}_2(c_d) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k) \right] \times \left[ \mathbf{H}_1(b_m) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k) \right]^T \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П.27})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)} = & \sum_i \sum_n \sum_e \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \pi_{ed}^c \frac{\mathbf{P}_{ine}^*(k-1)}{\tilde{\mathbf{P}}_{jmd}(k)} \times \\ & \times \left\{ \mathbf{H}_2(c_d) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) \Phi^T(a_j) \mathbf{H}_2^T(c_d) + \mathbf{V}_2(c_d) \mathbf{V}_2^T(c_d) + \right. \\ & \left. + \left[ \mathbf{H}_2(c_d) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k) \right] \times \left[ \mathbf{H}_2(c_d) \Phi(a_j) \mathbf{X}_{ine}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k) \right]^T \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.28})$$

Для определения матрицы оптимального коэффициента передачи комплексного дискретного фильтра [14]

$$\mathbf{K}_{jmd}(k) = \tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k) \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{-1}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{jmd}^{(1)}(k) \\ \mathbf{K}_{jmd}^{(2)}(k) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{R}}_{jmd} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^T(b_k) \\ \mathbf{H}_2^T(c_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} \\ \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{П.29})$$

представим обратную блочную корреляционную матрицу  $\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{-1}$ , используя формулу Фробениуса [21]:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} \\ \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}^{-1} & -\tilde{\mathbf{D}}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} \\ -(\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} \tilde{\mathbf{D}}^{-1} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} + (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{П.30})$$

где  $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} - \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)}$ .

Подставляя в (П.29) значения (П.25)–(П.28) с учетом (П.30), получим выражение для оптимальных коэффициентов передачи комплексного дискретного фильтра:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{jmd}^{(1)}(k) = & \tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k) \mathbf{H}_1^T(b_m) (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)}(k) - \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)}(k) (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)}(k))^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)}(k))^{-1} - \\ & - \tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k) \mathbf{H}_2^T(c_d) (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)}(k) - \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)}(k) (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)}(k))^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)}(k))^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{П.31})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{jmd}^{(2)}(k) = & -\tilde{\mathbf{R}}_{jmd} \mathbf{H}_1^T(b_m) (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} - \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)})^{-1} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} + \\ & + \tilde{\mathbf{R}}_{jmd} \mathbf{H}_2^T(c_d) ((\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} + (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} - \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)})^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} (\tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)})^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{П.32})$$

Текущий вектор условной оценки непрерывной компоненты ДНМП  $\mathbf{X}_{jmd}^*(k)$  при  $A_k = a_j$ ,  $B_k = b_m$ ,  $C_k = c_d$  определяется с учетом (П.19), (П.21), (П.22), (П.31), (П.32) по результатам измерений  $\mathbf{Y}_k^{(1)}$  и  $\mathbf{Y}_k^{(2)}$  [15]:

$$\mathbf{X}_{jmd}^*(k) = \tilde{\mathbf{X}}_{jmd}(k) + \mathbf{K}_{jmd}^{(1)}(k) (\mathbf{Y}_k^{(1)} - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(1)}(k)) + \mathbf{K}_{jmd}^{(2)}(k) (\mathbf{Y}_k^{(2)} - \tilde{\mathbf{Y}}_{jmd}^{(2)}(k)). \quad (\text{П.33})$$

Ковариационная матрица погрешностей оценки непрерывной компоненты ДНМП  $\mathbf{R}_{jmd}^*(k)$  при условии  $A_k = a_j$ ,  $B_k = b_m$ ,  $C_k = c_d$  определяется с учетом (1.4), (П.20), (П.24), (П.30) [15]:

$$\mathbf{R}_{jmd}^*(k) = \tilde{\mathbf{R}}_{jmd}(k) - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^T(b_k) \tilde{\mathbf{R}}_{jmd} \\ \mathbf{H}_2^T(c_k) \tilde{\mathbf{R}}_{jmd} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(11)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(12)} \\ \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(21)} & \tilde{\mathbf{W}}_{jmd}^{(22)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(b_k) \tilde{\mathbf{R}}_{jmd} \\ \mathbf{H}_2(c_k) \tilde{\mathbf{R}}_{jmd} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.34})$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бар-Шалом Я., Лу Х.-П. Траекторная обработка: принципы, способы и алгоритмы. Пер. с англ. Д.Д. Дмитриева. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.
2. Bar-Shalom Y., Kirubarajan T., Li X.R. Estimation with Applications to Tracking and Navigation. N.Y.: Wiley, 2001.
3. Sutton Z., Willett P., Bar-Shalom Y. Target Tracking Applied to Extraction of Multiple Evolving Threats From a Stream of Surveillance Data // IEEE Transactions on Computational Social Systems. 2021. V. 8. № 2. P. 434–450.
4. Schoenecker S., Willett P., Bar-Shalom Y. Resolution Limits for Tracking Closely Spaced Targets // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2018. V. 54. № 6. P. 2900–2910.

5. Gao Y., Liu Y., Li, X.R. Tracking-Aided Classification of Targets Using Multihypothesis Sequential Probability Ratio Test // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2018. V. 54. № 1. P. 233–245.
6. Aftab W., Mihaylova L. A Learning Gaussian Process Approach for Maneuvering Target Tracking and Smoothing // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2021. V. 57. № 1. P. 278–292.
7. Buelta A., Olivares A., Staffetti E., Aftab W., Mihaylova L. A Gaussian Process Iterative Learning Control for Aircraft Trajectory Tracking // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2021. V. 57. № 6. P. 3962–3973.
8. Миронов М.А. Марковская теория оптимального оценивания случайных процессов. М.: Изд-во ФГУП “ГосНИИАС”, 2013.
9. Rezaie R., Li X.R. Destination-Directed Trajectory Modeling, Filtering, and Prediction Using Conditionally Markov Sequences // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2021. V. 57. № 2. P. 820–833.
10. Li S., Cheng Y., Brown D., Tharmarasa R. Comprehensive Time-Offset Estimation for Multisensor Target Tracking // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2020. V. 56. № 3. P. 2351–2373.
11. Kowalski M., Willett P., Fair T., Bar-Shalom Y. CRLB for Estimating Time-Varying Rotational Biases in Passive Sensors // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2020. V. 56. № 1. P. 343–355.
12. Taghavi E., Tharmarasa R., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y. Track-to-Track Fusion with Cross-covariances from Radar and IR/EO Sensor // 22<sup>th</sup> Intern. Conf. on Information Fusion (FUSION). Ottawa, ON, Canada, 2019.
13. Rashid M., Ali Sebt M. Tracking a Maneuvering Target in the Presence of Clutter by Multiple Detection Radar and Infra-red Sensor // 25<sup>th</sup> Iranian Conf. on Electrical Engineering (ICEE). Tehran, Iran, 2017. P. 1917–1922.
14. Детков А.Н. Оптимальное оценивание дискретно-непрерывных марковских процессов по наблюдаемым цифровым сигналам // РЭ. 2021. Т. 66. № 8. С. 748–759.
15. Детков А.Н. Оптимизация алгоритмов цифровой фильтрации смешанных марковских процессов при сопровождении маневрирующего объекта // Изв. РАН. ТиСУ. 1997. № 2. С. 73–80.
16. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов радио, 1977.
17. Бухалёв В.А. Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Наука, 1996.
18. Руденко Е.А. Конечномерные рекуррентные алгоритмы оптимальной нелинейной логико-динамической фильтрации // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 1. С. 43–65.
19. Жук С.Я. Методы оптимизации дискретных динамических систем со случайной структурой. Киев: НТУУ “КПИ”, 2008.
20. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1978.
21. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.

---

---

ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ

---

---

УДК 629.7:004:331.101.1

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

© 2023 г. О. Н. Корсун<sup>а,\*</sup>, А. В. Стуловский<sup>а</sup>

<sup>а</sup>ФАУ “ГосНИИАС”, Москва, Россия

\*e-mail: marmotto@rambler.ru

Поступила в редакцию 05.08.2022 г.

После доработки 21.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Рассмотрен метод решения задачи восстановления сигналов, основанный на прямом поиске оптимального программного управления. Его основу составляет параметризация искоемых сигналов и нахождение решения путем численной оптимизации в конечномерном пространстве с использованием какого-либо генетического или популяционного алгоритма. В целях проверки работоспособности метода приводится задача нахождения угловых скоростей и углов ориентации летательного аппарата по имеющимся на борту данным при отсутствии прямых измерений. Проводится сравнение различных вариантов параметризации сигналов на основе Эрмитовых кубических сплайнов.

DOI: 10.31857/S0002338823010055, EDN: JAAOFU

**Введение.** Миниатюризация приемников систем спутниковой навигации и рост вычислительных мощностей микроконтроллеров позволили малоразмерным беспилотным летательным аппаратам за последние несколько лет достигнуть уровня автономных систем [1]. Высокий уровень автоматизации накладывает строгие требования на точность оценки пространственного положения объекта управления. Вместе с тем малый размер таких летательных аппаратов (ЛА) ограничивает возможность установки дополнительного оборудования.

Существуют разные способы преодоления данного противоречия. Предлагается рассмотреть подход, заключающийся в восстановлении измерительных сигналов отсутствующих датчиков [2–7] на основе известных из динамики полета математических моделей, связывающих различные полетные параметры.

Восстановление сигналов основано на прямом методе оптимального управления, в котором искомые сигналы представляются в виде полиномиальных или сплайн-аппроксимаций. Параметры сигналов находятся путем решения оптимизационной задачи в конечномерном пространстве. В качестве метода оптимизации используется алгоритм роя частиц [8, 9], а для аппроксимации сигналов применяются Эрмитовы сплайны 3-го порядка дефектов 1 и 2 [10]. Отметим, что традиционно под задачей восстановления данных и проверки совместимости с помощью дифференциальных уравнений движения ЛА [11] понимается более простая задача, которая предполагает, что все основные полетные параметры измеряются непосредственно. Это означает, что входные сигналы известны и решение получается путем численного интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений [12, 13].

**1. Постановка задачи восстановления параметров полета.** Рассмотрим две задачи, связанные с оценкой значений угловых скоростей и углов ориентации ЛА. В первой из них требуется найти оценки угловых скоростей в предположении, что измеряются только значения углов ориента-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-08-00449-а).

ции. Соотношения, связывающие эти величины, хорошо известны [11]. Это кинематические уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma, \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma), \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma),\end{aligned}\quad (1.1)$$

где  $\vartheta$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$  — углы тангажа, крена и рыскания,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  — угловые скорости крена, рыскания и тангажа относительно связанной системы координат.

Отметим, что для данной задачи известно простое решение, основанное на численном дифференцировании значений углов ориентации [14, 15]. При этом существенно усиливаются случайные составляющие погрешностей измерений, поэтому его практическое применение ограничено. В предлагаемом методе этот недостаток отсутствует.

Во второй задаче требуется восстановить углы ориентации и угловые скорости ЛА при отсутствии на борту соответствующих датчиков, т.е. без использования прямых измерений. Для ее решения используются измерения перегрузок в связанной системе координат и три компоненты скорости ЛА в земной системе координат, измеряемые навигационной системой, спутниковой или инерциальной.

Пусть известны значения перегрузок в связанной системе координат. Это позволяет определить проекции ускорения на ее оси [14]:

$$\begin{aligned}a_x &= g(n_x - \sin \vartheta), \\ a_y &= g(n_y - \cos \vartheta \cos \gamma), \\ a_z &= g(n_z + \cos \vartheta \sin \gamma),\end{aligned}\quad (1.2)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  — перегрузки, измеренные относительно осей связанной системы координат.

Воспользовавшись матрицей перехода [11], проекции ускорений можно пересчитать из связанной системы в нормальную земную. Далее, проинтегрировав проекции ускорения в земной системе координат, получим значения проекций скорости:

$$\begin{aligned}V_{xg}(t) &= V_{xg}(t_0) + \int_{t_0}^t a_{xg}(\tau) d\tau, \\ V_{yg}(t) &= V_{yg}(t_0) + \int_{t_0}^t a_{yg}(\tau) d\tau, \\ V_{zg}(t) &= V_{zg}(t_0) + \int_{t_0}^t a_{zg}(\tau) d\tau,\end{aligned}\quad (1.3)$$

где  $a_{xg}$ ,  $a_{yg}$ ,  $a_{zg}$  — значения проекций ускорений, приведенные в нормальной земной системе координат;  $V_{xg}$ ,  $V_{yg}$ ,  $V_{zg}$  — значения проекции вектора скорости в нормальной земной системе координат;  $t_0$  — время начала интервала.

Выражения (1.2) и (1.3) определяют связь между перегрузками и проекциями скорости, которые зависят от угловой ориентации ЛА, в первую очередь от углов тангажа и крена. Благодаря этому можно найти оценки угловых величин, т.е. углов Эйлера и угловых скоростей, которые, согласно принятому допущению, не измеряются.

**2. Общий метод решения задачи.** В работе используется метод нахождения сигналов, аналогичный прямому методу решения задач оптимального управления [9, 16, 17]. Он основан на параметризации искомого сигнала и сведении решаемой задачи к задаче численной оптимизации [18].

Пусть требуется вычислить значения угловых скоростей на рассматриваемом промежутке времени. Предполагается, что искомым сигналом — угловые скорости, которые являются достаточно гладкими функциями времени, чтобы их можно было с хорошей точностью приблизить кубическими сплайнами. В таком случае определение параметров сплайнов позволит восстановить искомые сигналы.

Отличие приведенной задачи от задачи аппроксимации состоит в том, что за исключением класса рассматриваемых функций о самом сигнале ничего не известно. Поэтому для их восстановления используются соотношения динамики полета, зависящие от измеряемых сигналов. Очевидно, что в летном эксперименте измерения всех параметров движения ЛА содержат погрешности, в первую очередь постоянные. Их влияние на результат восстановления полетных параметров необходимо исследовать отдельно. Однако следует отметить, что для восстанавливаемых сигналов предлагаемый метод решает проблему погрешностей измерения кардинальным образом. Действительно, если при получении конечного результата данные какого-либо измерительного канала не используются, то и его погрешности на этот результат не влияют.

**2.1. Математическая модель.** Сформулированная таким образом задача нахождения параметров сплайнов является примером задачи численной параметрической оптимизации и в общем виде может быть записана как

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{a})) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in U}, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор фазовых координат или выходных сигналов;  $\mathbf{u}$  — вектор управления, или входной сигнал, который однозначно определяется вектором параметров  $\mathbf{a}$ ;  $U$  — множество допустимых значений вектора управления. При этом полагаем, что нелинейная модель объекта управления, связывающая входные и выходные сигналы, задана как

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2.2)$$

и начальные условия  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  принимаются известными.

Из постановки задачи следует, что искомое управление должно обеспечивать минимальные отклонения выходных сигналов системы от заданных на рассматриваемом интервале времени. Это позволяет составить целевой функционал (2.1) следующим образом:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{a})) = J(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(\mathbf{a})) = \int_{t_0}^T (\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t))^T \mathbf{K}(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)) dt, \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{a}$  раскрыты в пояснении к формуле (2.1);  $\tilde{\mathbf{x}}$  — вектор желаемых значений фазовых координат;  $\mathbf{K}$  — матрица весовых коэффициентов, которая задается отдельно для каждой конкретной задачи;  $t_0$ ,  $T$  — время начала и конца участка соответственно.

Поскольку в общем случае размерность вектора  $\mathbf{a}$  может быть достаточно велика, решать сформулированную задачу (2.1)–(2.3) предлагается численно [19] с помощью популяционных или эволюционных алгоритмов [8, 20–24]. В работе использовался метод роя частиц [20, 21, 25–27].

Конкретный вид математических моделей динамических систем, рассматриваемых в данной работе, и детальное описание двух решаемых задач представлены выше в разд. 1. Для первой задачи — это дифференциальные уравнения (1.1). В обозначениях функционала (2.3) вектору фазовых координат соответствуют углы ориентации ЛА  $\mathbf{x} = (\vartheta, \gamma, \psi)^T$ , вектору управления — угловые скорости  $\mathbf{u} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ . Для второй задачи — это дифференциальные уравнения (1.1) и (1.3) с учетом алгебраических соотношений (1.2). В этом случае фазовые координаты представляют собой проекции скорости  $\mathbf{x} = (V_{xg}, V_{yg}, V_{zg})^T$ , а вектор управления — проекции перегрузок  $\mathbf{u} = (n_x, n_y, n_z)^T$ . В обеих задачах желаемыми фазовыми координатами  $\tilde{\mathbf{x}}$  являются измеренные в эксперименте значения фазовых координат. Роль вектора параметров  $\mathbf{a}$  исполняют коэффициенты сплайнов, обсуждению которых посвящен следующий раздел.

**2.2. Эрмитовы сплайны.** Предлагаемый метод использует параметризацию искомого сигнала. Поскольку угловые скорости являются достаточно гладкими сигналами, перспективным выглядит представить их в виде сплайнов. Этому способствуют достигнутые результаты в решении задач сплайн-аппроксимации сигналов.

Учитывая характеристики рассматриваемых сигналов, в качестве их модели были предложены кубические сплайны, прежде всего так называемые кубические сплайны дефекта 2, именуемые также эрмитовыми. Особенностью данного вида сплайнов является, как следует из названия, разрывность второй производной, что приводит к необходимости задавать в узлах сплайна значения как самой функции, так и ее первой производной. Кратко приведем здесь их формулы [10].

Пусть на некотором интервале  $t \in [t_1, t_M]$  заданы  $M$  значений  $t_i, i = \overline{1, M}$ , которые называются узлами сплайна. Тогда для точки  $t$  из отрезка  $[t_i, t_{i+1}]$  значение сплайна рассчитывается по формуле

$$S(t) = \phi_1(e)f_i + \phi_2(e)f_{i+1} + \phi_3(e)h_i f'_i + \phi_4(e)h_i f'_{i+1},$$

причем

$$\phi_1(e) = (1 - e)^2(1 + 2e), \quad \phi_2(e) = e^2(3 - 2e), \quad \phi_3(e) = e(1 - e)^2,$$

$$\phi_4(e) = -e^2(1 - e), \quad h_i = t_{i+1} - t_i, \quad e = (t - t_i)/h_i.$$

Значения коэффициентов  $f_i, f_{i+1}, f'_i, f'_{i+1}$  могут быть определены с помощью численной оптимизации. В рассматриваемой задаче для этой цели применялся популяционный алгоритм роя частиц.

В качестве материала для сравнения использовался вариант кубических сплайнов, называемый интерполяционным кубическим сплайном. От приведенного выше сплайна он отличается дополнительным требованием непрерывности второй производной в узлах и, следовательно, меньшим дефектом:

$$S''(t_i - 0) = S''(t_i + 0), \quad i = \overline{2, M - 1}.$$

Это требование позволяет получить систему из  $M - 2$  уравнений, которая может быть решена относительно значений производных сплайна в узлах методом “прогонки” [10].

Неизвестными параметрами для этого сплайна являются только значения самой функции в узлах сплайна и ее производной на концах участка, что позволяет существенно сократить размерность пространства поиска. Недостатком выступает возрастающее требование к гладкости функций и более узкий класс приближаемых сигналов.

**2.3. Метод роя частиц.** Для решения задачи численной параметрической оптимизации был выбран алгоритм, называемый методом роя частиц (particle swarm optimization) [25, 26].

Общую концепцию алгоритмов роя можно описать следующим образом. Сначала формируется пространство поиска, имеющее размерность, которая равна числу искомых параметров. Таким образом каждой точке этого пространства соответствует единственное решение рассматриваемой задачи. Затем в пространство поиска “вбрасываются” частицы — случайным образом выбирается несколько точек пространства. Кроме того, для каждой из них задается вектор скорости, величина и направление которого выбираются случайным образом. Для каждой частицы определяется соответствующее решение и вычисляется значение целевого функционала.

На каждом последующем шаге алгоритма частицы смещаются в поисковом пространстве, причем направления и модуль этого смещения определяются как изначальной скоростью, которой располагала частица, так и положением частиц роя, имеющих лучшие значения целевого функционала. Учет таких влияний с помощью весовых коэффициентов позволяет добиться от алгоритма требуемого сочетания между покрытием пространства поиска и тщательностью исследования областей перспективных решений [20].

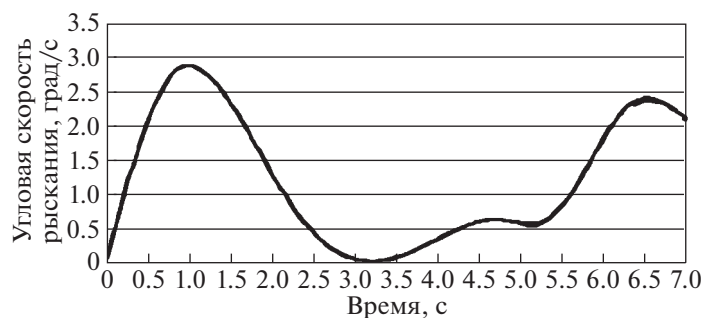
Вычисления прекращаются, если на протяжении определенного времени не происходит заметного улучшения качества получаемых решений.

Если распространенным представлением для градиентных методов является шар, движущийся под действием силы тяжести на поверхности, кривизна которой определяется значением минимизируемого функционала, то для алгоритма роя таких шаров оказывается несколько и их движение определяется начальными условиями и информацией о положении других шаров, а не потенциалом некоего единого поля.

Очевидным недостатком метода роя частиц, впрочем, как всего семейства алгоритмов популяционной оптимизации, является субоптимальность получаемых решений [10, 28]. Его достоинство — простота формализации задачи и малое время, требуемое для получения решения.

Выбор данного метода в рассматриваемой задаче определяется, прежде всего, предполагаемой областью применения, а также тем, что для приближения сигналов с достаточной точностью требуется задание значительного числа параметров (от 16 до 24 для каждого сигнала), что придает задаче большую размерность, затрудняя ее решение градиентными методами.

Более подробное описание применявшегося метода приводится в Приложении.



**Рис. 1.** Значения угловой скорости рыскания на рассматриваемом участке, исходные данные (сплошная линия) и полученные при решении задачи аппроксимации с 8 узлами (штрихпунктирная линия)

**3. Описание экспериментов.** Эксперимент проводился в несколько этапов. Первоначально определялись требования к сплайнам, такие, как необходимое количество узлов сплайнов и требования к пространству поиска. Затем решалась задача восстановления значений угловых скоростей с привлечением модели (1.1) и сравнение возможных параметризаций сплайнов. Наконец, аналогичное сравнение выполнялось для второй задачи при помощи математической модели (1.2)–(1.3). В качестве матрицы весовых коэффициентов  $\mathbf{K}$  (2.3) была выбрана единичная матрица, хотя в общем случае она может иметь и более сложную структуру.

Эксперименты показали, что на персональном компьютере, оснащённом процессором Intel Core 2 Duo с частотой 2.4 ГГц и оперативной памятью 1.99 Гб, определение 72 параметров (в случае трех сигналов с 12 узлами для каждого) занимало порядка 30–40 мин.

**3.1. Определение параметров сплайнов.** На предварительном этапе эксперимента требовалось убедиться, что выбранная параметризация позволяет с достаточной точностью описывать искомые сигналы, подбирая необходимое число узлов на участке аппроксимации.

При решении этой проблемы необходимо учитывать характеристики рассматриваемого сигнала. Например, сигналы угловых скоростей являются более высокочастотными, чем сигналы углов ориентации. Угловые скорости крена и тангажа подвержены более динамичным изменениям, чем угловая скорость угла рыскания, что связано с разделением на движения центра масс и относительно центра масс.

Задача аппроксимации решалась для каждого рассматриваемого сигнала. По ее результатам было определено необходимое количество узлов сплайна, а также параметры пространства поиска, которые позволяли восстановление сигнала с достаточной точностью. На участок времени длиной 7 с для угловых скоростей тангажа и крена использовалось 12 узлов и 8 узлов для угловой скорости рыскания.

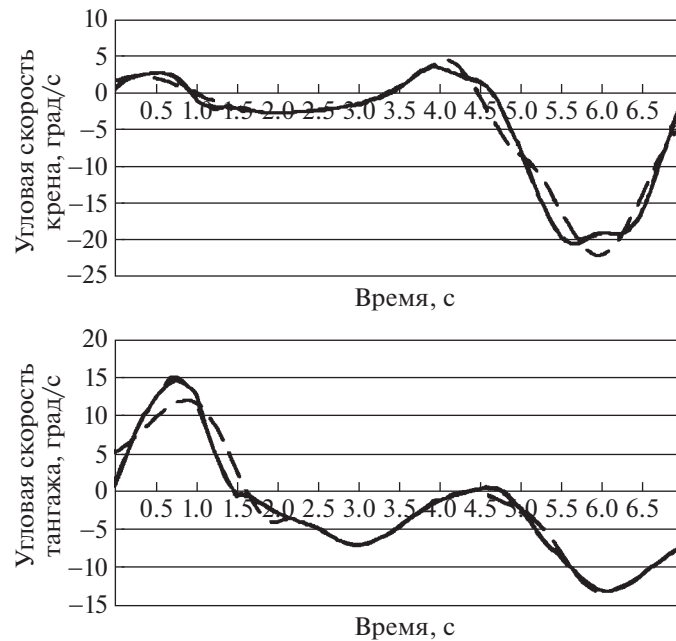
Полученные решения задачи аппроксимации приводятся на рис. 1 и 2.

Из рис. 1 видно, что уже для 8 узлов решение с достаточной точностью воспроизводит исходный сигнал угловой скорости рыскания. Поэтому увеличение числа узлов для угловой скорости рыскания является нецелесообразным.

Для двух других угловых скоростей (как можно видеть на рис. 2) для достаточно точного воспроизведения сигнала требуется 12 узлов, тогда как при меньшем их количестве возникают заметные погрешности. Этот вывод подтверждается и данными табл. 1, где приводятся соответствующие среднеквадратические отклонения (СКО) рассогласований. При выбранном количестве узлов истинное значение и аппроксимация на графиках уже практически не различимы визуально.

По результатам решения задачи аппроксимации можно заметить, что в отсутствие шумов проявляется очевидное соответствие между ростом количества узлов и улучшением качества получаемого приближения.

**3.2. Восстановление значений угловых скоростей на основе кинематических уравнений Эйлера.** После того как были определены условия, позволяющие добиться достаточного качества аппроксимации, решалась основная задача — восстановление сигналов угловых скоростей при заданных значениях углов ориентации на основе модели (1.1) (уравнений Эйлера).



**Рис. 2.** Значения угловых скоростей тангажа и крена, исходные данные (сплошная линия) и полученные при решении задачи аппроксимации с 8 (штриховая линия) и 12 узлами (штрихпунктирная линия)

Поиск сигналов производился в классе Эрмитовых сплайнов со значениями дефектов 1 и 2. Сравнение двух видов сплайнов производилось при одинаковом числе узлов. Как можно видеть на рис. 3, Эрмитов сплайн дефекта 2 обеспечивает более точное приближение, чем интерполяционный кубический сплайн.

Если рассмотреть полученные при решении задачи СКО, приведенные в табл. 2, то можно видеть, что Эрмитов кубический сплайн позволяет добиться меньшего отклонения, особенно явно в случае угловой скорости крена.

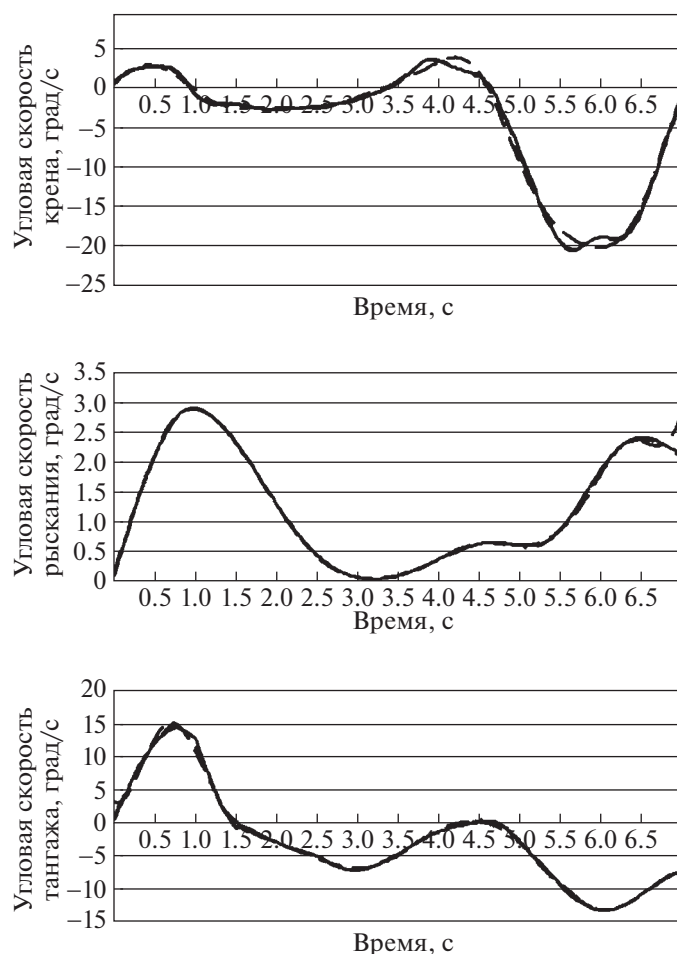
Объяснением может служить то, что он представляет более широкий класс функций за счет отсутствия требования непрерывности второй производной и является более вариативным благодаря большему числу изменяемых параметров. В свою очередь большее число коэффициентов увеличивает размерность решаемой задачи, затрудняя сходимость решения и увеличивая время на вычисления. Заметное преимущество применения интерполяционного кубического сплайна заключается в необходимости задавать в узлах только значения самой функции. За счет этого количество искомых параметров снижается примерно вдвое.

3.3. Восстановление значений углов ориентации по информации о проекциях перегрузки и скорости. В данном случае используется модель (1.2), (1.3). Задача несколько усложняется, так как одних выходных сигналов — проекций скорости в земной системе координат — оказывается недостаточно для определения значения угла рыскания, а оценки углов тангажа и крена имеют существенные погрешности (рис. 4).

Для повышения точности приближения требуется дополнительная информация, например, значения угла скольжения. Как можно видеть на рис. 5, учет угла скольжения позволяет существенно улучшить качество оценок.

**Таблица 1.** Значения СКО рассогласований для угловых скоростей тангажа и крена ЛА при аппроксимации их сплайнами с разным количеством узлов

| Измеряемая величина, град/с | Для сплайна с 12 узлами | Для сплайна с 8 узлами |
|-----------------------------|-------------------------|------------------------|
| Угловая скорость крена      | 0.17                    | 1.47                   |
| Угловая скорость тангажа    | 0.21                    | 1.37                   |



**Рис. 3.** Значения угловых скоростей (сплошная линия), воспроизведенные с помощью интерполяционного кубического сплайна (штриховая линия) и Эрмита кубического сплайна (штрихпунктирная линия)

Сравнение сплайнов осуществлялось, как и в предыдущем случае, для равного числа узлов. Угол скольжения считался известным. В условиях рассматриваемой задачи оба сплайна дают сходные результаты (рис. 5).

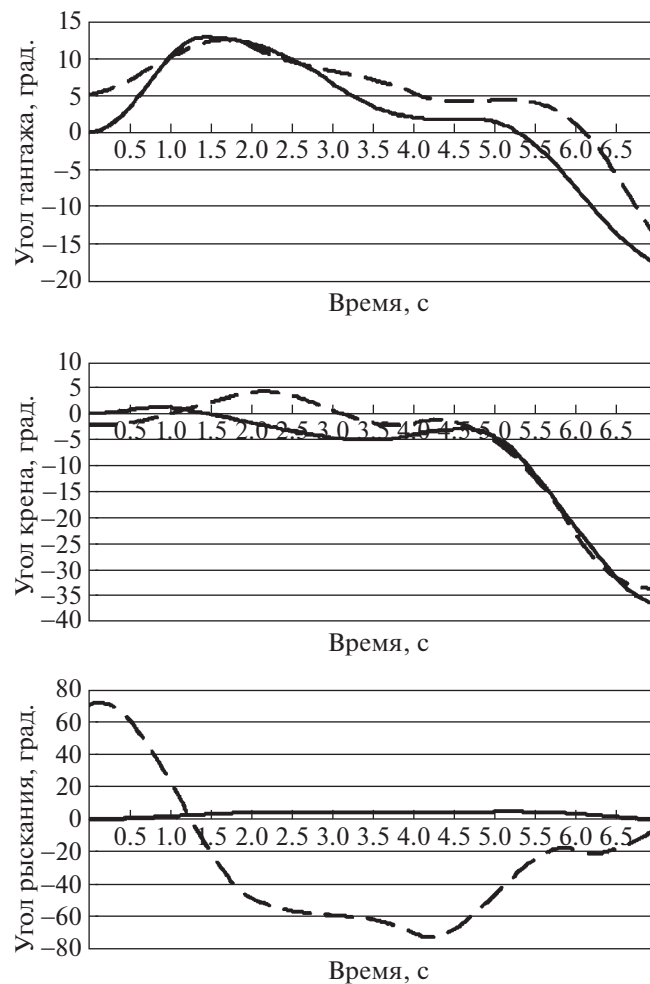
Полученные СКО приводятся в табл. 3.

Визуальный анализ графиков и данных таблицы показывает, что вид сплайна существенного влияния на точность не оказывает.

Итак, проведенные эксперименты показали, что предложенный метод обеспечивает восстановление полетных параметров, для которых отсутствуют прямые измерения. Положительный эффект достигается за счет использования моделей динамики полета, задающих связь между параметрами движения. Установлено также, что точность результатов существенно зависит от задаваемого числа узлов сплайнов.

**Таблица 2.** Значения СКО для угловых скоростей ЛА при поиске сигналов по значениям углов ориентации

| Измеряемая величина, град/с | Эрмитов кубический сплайн<br>дефекта 2 | Кубический интерполяционный<br>сплайн дефекта 1 |
|-----------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------|
| Угловая скорость крена      | 0.17                                   | 0.7                                             |
| Угловая скорость рыскания   | 0.02                                   | 0.07                                            |
| Угловая скорость тангажа    | 0.21                                   | 0.51                                            |



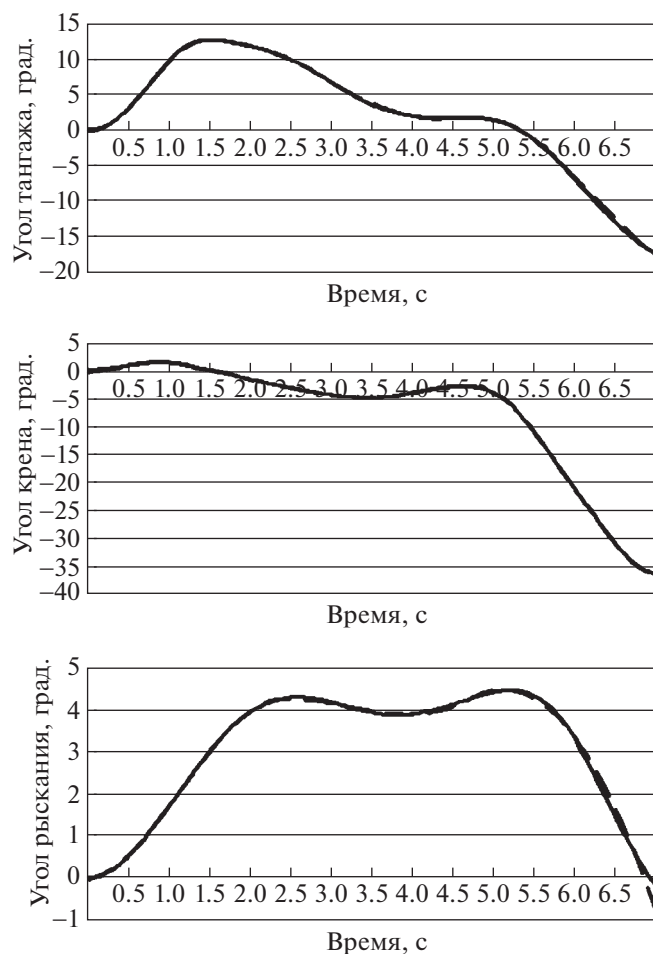
**Рис. 4.** Значения углов ориентации ЛА, заданные (сплошная линия) и полученные при решении задачи оптимизации (штриховая линия)

Полученные по результатам моделирования погрешности в основном не превышают 0.2 град. для углов ориентации ЛА и 1 град/с для угловых скоростей. Очевидно, что эта точность существенно уступает прямым измерениям (погрешность измерения углов ориентации обычно не превышает угловой минуты, угловых скоростей – 0.1 град/с). Таким образом, метод имеет смысл применять при отсутствии прямых измерений полетных параметров.

**Закключение.** Рассматривается метод восстановления входных сигналов системы при условии, что математическая модель системы задана. Он опирается на идеи прямого метода решения за-

**Таблица 3.** Значения СКО для углов ориентации и угловых скоростей ЛА при поиске сигналов по перегрузкам и проекциям скорости

| Измеряемая величина               | Эрмитов кубический<br>сплайн дефекта 2 | Кубический<br>интерполяционный сплайн<br>дефекта 1 |
|-----------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Угол тангажа, град.               | 0.2                                    | 0.18                                               |
| Угол крена, град.                 | 0.11                                   | 0.17                                               |
| Угол рыскания, град.              | 0.1                                    | 0.03                                               |
| Угловая скорость крена, град/с    | 0.55                                   | 0.96                                               |
| Угловая скорость рыскания, град/с | 0.14                                   | 0.09                                               |
| Угловая скорость тангажа, град/с  | 1.03                                   | 0.94                                               |



**Рис. 5.** Значения углов ориентации при известном угле скольжения, исходные данные (сплошная линия), полученные при использовании интерполяционного сплайна (штриховая линия) и Эрмита кубического сплайна

дач оптимального управления, а именно на параметризацию искомого сигнала и сведение приведенной задачи к задаче численной оптимизации.

В качестве примера применения метода описываются задачи восстановления угловых скоростей ЛА по известным значениям углов ориентации и углов ориентации и угловых скоростей по значениям перегрузок в связанной системе координат и проекций скорости в земной системе координат. Кроме того, в этих задачах проводится сравнение двух различных параметризаций: Эрмитовых сплайнов дефектов 1 и 2. Основываясь на полученных результатах, делается вывод о целесообразности использования Эрмитового сплайна дефекта 2, в случае если дополнительные расходы времени на вычисление и памяти допустимы.

Проведенные экспериментальные исследования также показали, что точность метода восстановления уступает точности прямых измерений. Поэтому преимущества данного подхода проявляются при отказах датчиков или в случае отсутствия на борту соответствующих датчиков, что особенно характерно для беспилотных ЛА. Итоговые рекомендации по применению предложенного подхода — следует сформировать практическое решение нескольких конкретных навигационных задач.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже приводится более подробное описание варианта метода роя частиц, использованного при решении рассматриваемой задачи.

Пусть описывается задача безусловной оптимизации

$$\min F(\mathbf{x}) = F(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{F}.$$

Введем следующие обозначения:  $m$  – размерность задачи;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$  – вектор параметров, которые выполняют роль координат частицы в пространстве поиска,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ;  $\mathbf{x}_i$  – вектор координат  $i$ -й частицы,  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$ ;  $\mathbf{v}_i$  – вектор скорости  $i$ -й частицы,  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^m$ ;  $F$  – скалярный критерий оптимальности, целевой функционал;  $\tilde{\mathbf{x}}$  – приближенное решение задачи,  $\tilde{F} = F(\tilde{\mathbf{x}})$  – достигаемое при данном решении значение критерия оптимальности;  $\mathbf{u}^b = (u_1^b, u_2^b, \dots, u_m^b)^T$ ,  $\mathbf{l}^b = (l_1^b, l_2^b, \dots, l_m^b)^T$  – векторы, обозначающие верхнюю и нижнюю границы области поиска;  $k = \min(100, 10m)$  – количество частиц в рое;  $\mathbf{q} = \mathbf{u}^b - \mathbf{l}^b$  – вектор, характеризующий размер поискового пространства;  $\mathbf{p}_i$  – вектор координат  $i$ -й частицы, при которых достигалось лучшее значение целевого функционала для этой частицы для всех выполненных итераций  $j = \overline{1, j_{current}}$ , где

$$\mathbf{p}_i = \arg \min_{j=\overline{1, j_{current}}} F(\mathbf{x}_i(j)),$$

$j_{current}$  – номер текущей итерации;  $\mathbf{p}_i$  – вектор координат  $i$ -й частицы, при которых достигалось предыдущее лучшее значение целевой функции для этой частицы;  $b$  – лучшее найденное значение целевой функции среди всех частиц:

$$b = \min_{i=\overline{1, k}} F(\mathbf{p}_i);$$

$\mathbf{d}$  – координаты точки пространства поиска, для которой  $F(\mathbf{d}) = b$ ,  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ ;  $n_i$  – количество соседей частицы, т.е. число частиц роя, координаты которых известны  $i$ -й частице;  $c$  – весовой коэффициент, учитывающий степень влияния положения остальных частиц  $c = (0.5 + \lg 2)$ ;  $w$  – весовой коэффициент инерции, определяющий влияние текущей скорости самой частицы  $0.5 \lg 2$ .

На каждой итерации алгоритма частица меняет свое положение и скорость в соответствии с параметрами, которые она получает от других частиц. Множество частиц, о положении которых частица знает, называют соседями, а матрицу, отражающую этот факт, – матрицей связи. Матрица связи составляется следующим образом: если частица  $i$  знает о положении частицы  $j$ , то на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца стоит единица, в противном случае – ноль.

В используемой версии алгоритма элемент матрицы принимает значение единица с вероятностью  $p$  ( $p = 0.5$ ) и ноль – с вероятностью  $1 - p$ . Диагональный элемент – всегда единица, частица знает, где сама находится. Матрица создается перед первой итерацией алгоритма и по мере вычисления может обновляться.

**Инициализация алгоритма.** Начальные координаты  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$ ,  $i = \overline{1, k}$ , частиц задаются случайным равномерным распределением в пределах пространства поиска  $[-\mathbf{q}; \mathbf{q}]$ . Также каждой частице задается скорость  $\mathbf{v}_i$  по правилу

$$v_{ij} = 0.5(R(l_j^b, u_j^b) - R(l_j^b, u_j^b)), \quad j = \overline{1, m},$$

где  $R(l_j^b, u_j^b)$  – равномерно распределенная на отрезке  $[l_j^b, u_j^b]$  случайная величина.

Далее алгоритм вычисляет значение целевой функции для каждой частицы и записывает ее текущее положение в соответствующий вектор  $\mathbf{p}_i$ . Устанавливается

$$b = \min_{i=\overline{1, k}} F(\mathbf{p}_i).$$

Задается также вектор  $\mathbf{d}$ , такой, что  $F(\mathbf{d}) = b$ .

**Итерации алгоритма.** Для частицы  $i$ , которая находится в позиции  $\mathbf{x}_i$ , совершаются следующие шаги.

**Шаг 1.** Определяется случайным образом порядок перемещения частиц. Для этого используют случайную величину, имеющую равномерное распределение и принимающую значение из диапазона  $[1, k]$ .

Шаг 2. Среди соседей находится частица с индексом  $g$ , таким, что  $F(\mathbf{p}_g) = \min_j F(\mathbf{p}_j)$ ,  $j = \overline{1, n_i}$ , и  $gg$ , таким, что  $F(\mathbf{pp}_{gg}) = \min_j F(\mathbf{pp}_j)$ ,  $j = \overline{1, n_i}$ .

Шаг 3. Вычисляется скорость частицы

$$\mathbf{v}_i = w\mathbf{v}_i + R(0, c)(\mathbf{p}_g - \mathbf{x}_i) + R(0, c)(\mathbf{pp}_f - \mathbf{x}_i),$$

где  $R(0, c)$  — равномерно распределенная на отрезке  $[0, c]$  случайная величина.

Шаг 4. Вычисляется новая позиция частицы  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i$ .

Шаг 5. Выполняется проверка попадания в область поиска. Вектор  $\mathbf{x}_i$  считается попадающим в область, только если для  $\forall j = \overline{1, m}$  верно  $\mathbf{u}_j^b \leq \mathbf{x}_{ij} \leq \mathbf{l}_j^b$ . Если какая-либо из компонент  $\mathbf{x}_i$  оказывается вне ее границ, то для этой компоненты устанавливается граничное значение с нулевой скоростью.

Шаг 6. Вычисляется значение целевого функционала  $F(\mathbf{x}_i)$ .

Шаг 7. Если  $F(\mathbf{x}_i) < F(\mathbf{p}_i)$ , то  $\mathbf{pp}_i = \mathbf{p}_i$ ,  $\mathbf{p}_i = \mathbf{x}_i$ . Этот шаг гарантирует, что  $\mathbf{p}_i$  соответствует лучшей позиции, на которой была частица.

Шаг 8. Если  $F(\mathbf{x}_i) < b$ , то  $b = F(\mathbf{x}_i)$  и  $\mathbf{d} = \mathbf{x}_i$ . Этот шаг гарантирует, что  $b$  соответствует лучшему значению целевой функции в роле, а  $\mathbf{d}$  — лучшей позиции.

Шаг 9. Шаги 1–8 справедливы для всех частиц.

Шаг 10. Если критерий остановки не выполняется, то алгоритм повторяется с шага 1. Иначе работа алгоритма завершается, за лучшее достигнутое значение целевой функции принимается  $b$ , которому соответствует вектор параметров  $\mathbf{d}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биард Р.У., МакЛэйн Т.У. Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика. М.: Техносфера, 2015. 311 с.
2. Корсун О.Н., Данеко А.И., Мотлич П.А., Ом М.Х. Оценка углов атаки и скольжения беспилотного летательного аппарата при отсутствии датчиков аэродинамических углов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2022. № 5. С. 274–280.
3. Пушков С.Г., Ловицкий Л.Л., Корсун О.Н. Методы определения скорости ветра при проведении летных испытаний авиационной техники с применением спутниковых навигационных систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 9. С. 65–70.
4. Харьков В.П. Дискретно-непрерывный алгоритм определения высотно-скоростных параметров полета ЛА // Инновационные, информационные и коммуникационные технологии. 2019. № 1. С. 330–333.
5. Падерин Ф.Г. Комплексная обработка информации в бортовом навигационном комплексе БПЛА с использованием метода одновременной навигации и составления карты (SLAM) // Труды МИЭА. Навигация и управление летательными аппаратами. 2017. № 19. С. 79–87.
6. Жарков М.В., Веремеенко К.К., Антонов Д.А., Кузнецов И.М. Вычисление параметров ориентации по интерферометрическим неоднозначным фазовым измерениям спутниковых навигационных систем и измерениям абсолютной угловой скорости // Гироскопия и навигация. 2018. № 3(102). С. 54–68.
7. Богдановский С.В., Симонов А.Н., Севидов В.В. Поляризационный способ определения ориентации БЛА // Успехи современной радиоэлектроники. 2017. № 10. С. 15–19.
8. Davis L. Handbook of Genetic Algorithms. N. Y., USA: Van Nostrand Reinhold, 1991. 385 p.
9. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: Изд. МГТУ им. Баумана, 2004. 656 с.
10. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
11. ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. М.: Изд-во стандартов, 1981. 54 с.
12. Klein V., Morelli E. Aircraft System Identification. Theory and Practice. Reston: AIAA, 2006. 484 p.
13. Корсун О.Н., Мотлич П.А. Оценка погрешностей бортовых измерений на основе уравнений движения самолета // Вестник метролога. 2019. № 1. С. 5–8.
14. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов / Под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Наука. Физмалит, 1998. 816 с.
15. Овчаренко В.Н. Аэродинамические характеристики летательных аппаратов: идентификация по полетным данным. М.: ЛЕНАНД, 2019. 236 с.

16. Rao A.V. Survey of Numerical Methods for Optimal Control // *Advances Astronautical Sciences*. 2010. V. 135. P. 497–528.
17. Корсун О.Н., Стуловский А.В. Прямой метод формирования оптимального программного управления летательным аппаратом // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2019. № 2. С. 75–89.
18. Hull D.G. Conversion of Optimal Control Problems into Parameter Optimization Problems // *J. Guidance, Control, Dynamics*. 1997. V. 20. № 1. P. 57–60.
19. Conway B.A. A Survey of Methods Available for Numerical Optimization of Continuous Dynamic Systems // *J. Optimization Theory Appl.* 2012. V. 152. № 2. P. 271–306.
20. Nature-inspired Optimizers: Theories, Literature Reviews and Applications / Eds S. Mirjalili, J.S. Dong, A. Lewis. Switzerland, AG: Springer Nature, 2020. 239 p.
21. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: Изд. МГТУ им. Баумана, 2016. 448 с.
22. Степанов Д.В. Популяционные алгоритмы в задачах оптимального управления // *Системы управления и обработки информации*. 2013. № 26. С. 118–127.
23. Дивеев А.И. Гибридный эволюционный алгоритм для решения задачи оптимального управления // *Вопросы теории безопасности и устойчивости систем*. 2021. № 23. С. 3–12.
24. Diveev A., Shmalko E. Comparison of Direct and Indirect Approaches for Numerical Solution of the Optimal Control Problem by Evolutionary Methods // *Communications in Computer and Information Science*. 2020. V. 1145 CCIS. P. 180–193.
25. Eberhardt R.C., Kennedy J.A. Particle Swarm Optimization // *Proceedings of the IEEE Intern. Conf. on Neural Networks*. Piscataway, NJ, 1995. P. 1942–1948.
26. Olsson A.E. Particle Swarm Optimization: Theory, Techniques and Applications. Hauppauge, USA: Nova Science Publishers, 2011. 305 p.
27. Курейчик В.М., Каланчук С.А. Обзор и состояние проблемы роевых методов оптимизации // *Информатика, вычислительная техника и инженерное образование*. 2016. № 1(25). С. 1–13.
28. Clerc M. Guided Randomness in Optimization. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2015. 320 p.

---

**УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ  
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

---

УДК 62-40

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ  
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ  
В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ  
ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТА<sup>1</sup>**

© 2023 г. Ю. Э. Плешивцева<sup>a</sup>, Э. Я. Рапопорт<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Самарский государственный технический ун-т, Самара, Россия

\*e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

Поступила в редакцию 04.07.2022 г.

После доработки 31.07.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Предлагается конструктивный метод решения линейно-квадратичной задачи робастной оптимизации пространственно-временных управляющих воздействий в системах с распределенными параметрами параболического типа в условиях интервальной неопределенности неизменных во времени параметрических характеристик объекта. В соответствии со стратегией управления по принципу наилучшего гарантированного результата оценка достижимых целевых множеств управляемой системы производится по точности равномерного приближения к требуемому конечному состоянию на расширенном множестве аргументов, включающем кроме пространственных переменных все допустимое множество неопределенных факторов. Развиваемый подход базируется на разработанном ранее альтернативном методе построения параметризуемых алгоритмов программного управления, распространяющем на широкий круг задач оптимизации результаты теории нелинейных чебышевских приближений и существенно использующем фундаментальные закономерности предметной области. Показывается, что предлагаемые уравнения оптимальных регуляторов, сводимые к линейным законам обратной связи по измеряемому состоянию объекта с нестационарными коэффициентами передачи, приводят к достижимым значениям критериев оптимальности, не превышающим их верхних оценок в рассматриваемых условиях неопределенности.

DOI: 10.31857/S0002338823010079, EDN: JANTJS

**Введение.** Задачи управления не полностью определенными динамическими объектами относятся в настоящее время к числу приоритетных и представляют значительный теоретический и прикладной интерес [1–8]. Большинство работ в этом направлении относится к системам с сосредоточенными параметрами (ССП), для которых известные результаты получены в основном с использованием аппарата функций Ляпунова и линейных матричных неравенств при ограниченной неопределенности модельных представлений [2–4] либо с помощью модифицированных аналогов принципа максимума Понтрягина [5, 6], главным образом, в линейно-квадратичных задачах оптимизации со свободным правым концом фазовой траектории процесса управления.

Применительно к системам с распределенными параметрами (СРП), в рамках моделей которых описывается широкий круг управляемых процессов самой различной физической природы [9], задачи управления в условиях неопределенности принципиально усложняются бесконечной размерностью пространственно распределенной управляемой величины [7, 8]. Их решение разработанными для СПП методами становится затруднительным, особенно при типичных для приложений равномерных оценках целевых множеств конечных состояний СРП, на негладкой границе которых неприменимы классические условия трансверсальности [7, 8, 10–13].

В настоящей работе предлагается конструктивный метод решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления СРП с заданной точностью равномерного приближения конеч-

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00180, <https://rscf.ru/project/22-29-00180>, ФГБОУ ВО “Самарский государственный технический университет”.

ного состояния системы к требуемому пространственному распределению управляемой величины в условиях интервальной неопределенности неизменных во времени параметрических характеристик объекта. Разработанный метод опирается на установленные ранее в этих условиях альтернативные свойства параметризуемых оптимальных программных управляющих воздействий, распространяющие на рассматриваемые задачи оптимального управления известные результаты теории нелинейных чебышевских приближений [7, 8, 10–13].

**1. Постановка задачи.** Пусть управляемая величина  $Q(x, t)$  объекта с распределенными параметрами описывается в зависимости от пространственной координаты  $x \in [x_0, x_1]$  и времени  $t \in [0, t_1]$  линейным уравнением второго порядка в частных производных параболического типа:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + c(x) Q(x, t) + u(x, t) \quad (1.1)$$

с начальными

$$Q(x, 0) = Q_0(x) = Q_0 = \text{const} \geq 0 \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$\alpha_0 Q(x_0, t) + \beta_0 \frac{\partial Q(x_0, t)}{\partial x} = 0; \quad \alpha_1 Q(x_1, t) + \beta_1 \frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} = 0; \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (1.3)$$

при пространственно-временном кусочно-непрерывном [13] внутреннем управляющем воздействии  $u(x, t)$ , заданных достаточно гладких функциях  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$  и постоянных коэффициентах  $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$ ;  $\beta_0, \beta_1 > 0$ .

Здесь для простоты без потери общности получаемых далее основных результатов предполагается равномерное распределение  $Q(x, 0)$  по пространственной координате в (1.2) и управляющие воздействия не стесняются никакими дополнительными ограничениями.

Эквивалентное (1.1)–(1.3) представление модели объекта управления может быть получено в форме бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно коэффициентов (временных мод)  $\bar{Q}_n(t)$  разложения  $Q(x, t)$  в сходящийся в среднем ряд по ортонормированной с весом  $r(x)$  системе собственных функций  $\varphi_n(\mu_n, x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , определяемых вместе с собственными числами  $\mu_n^2$  известными методами конечных интегральных преобразований [9, 13, 14]:

$$\frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(t) + \bar{u}_n(t), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.4)$$

$$\bar{Q}_n(0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n);$$

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t) \varphi_n(\mu_n, x). \quad (1.5)$$

Здесь  $\bar{u}_n(t)$  – временные моды разложения  $u(x, t)$  в ряд вида (1.5):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(t) \varphi_n(\mu_n, x), \quad (1.6)$$

рассматриваемые далее в качестве бесконечного числа автономных, независимых друг от друга и нестесняемых ограничениями сосредоточенных управляющих воздействий, и  $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$  – моды  $Q_0(x)$ .

При этом поведение каждой из модальных составляющих  $\bar{Q}_n$  управляемой величины определяется только “своим” управляющим воздействием  $\bar{u}_n$ , согласно решению каждого из уравнений (1.4) в отдельности независимо от других, обеспечивая в итоге требуемое состояние  $Q(x, t)$ , описываемое рядом (1.5).

Можно показать [15, 16], что в малостеснительных условиях выполнения усиленных условий Коши–Липшица система уравнений (1.4) имеет единственное решение при заданных воздействиях  $\bar{u}_n(t)$ , которое с любой требуемой точностью при необходимости аппроксимируется ре-

шением “укороченной” системы, образуемой достаточно большим конечным числом  $N$  первых уравнений (1.4) при  $\bar{Q}_n(t) = 0$  для всех  $n > N$ . В итоге оказывается допустимой конечномерная аппроксимация модели (1.4) при  $n = \overline{1, N}$ ,  $N < \infty$ . Всюду далее на этом основании учитывается  $N_1$  мод  $\bar{Q}_n$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ , в (1.4), где  $N_1 = \infty$  или  $N_1 = N < \infty$  в зависимости от используемой схемы анализа и возможностей практической реализации исследуемых алгоритмов управления. Конкретный выбор числа  $N_1$  должен производиться при проектировании системы управления, исходя из практически требуемой точности описания модели объекта  $N_1$  уравнениями (1.4).

В характерных условиях интервальной неопределенности начального состояния объекта  $Q_0$  и вектора  $w$  его неизменных во времени параметрических характеристик, с точностью до которых определены ограниченные в этих условиях своими заданными максимально и минимально возможными величинами значения  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$  в (1.3), вся информация о величинах  $Q_0$  и  $w$  исчерпывается сведениями об их принадлежности заданным компактными множествам  $\Omega$  и  $W$ :

$$\begin{aligned} Q_0 \in \Omega; \quad w \in W, \quad w = \{\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1\}; \quad Q_{0\min} \leq Q_0 \leq Q_{0\max}; \\ \alpha_{0\min} \leq \alpha_0 \leq \alpha_{0\max}; \quad \alpha_{1\min} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1\max}; \\ \beta_{0\min} \leq \beta_0 \leq \beta_{0\max}; \quad \beta_{1\min} \leq \beta_1 \leq \beta_{1\max}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Поскольку собственные числа находятся в зависимости от коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  в граничных условиях (1.3) [14], то  $\mu_n$  в (1.4), (1.5) также оказываются заданными с точностью до известного интервала их возможных изменений.

Каждой реализуемой, согласно (1.7), паре  $y = (Q_0, w) \in Y = \Omega \times W$  значений неопределенных факторов при любом допустимом управлении  $u(x, t)$  соответствует определяемая решением системы уравнений (1.4) траектория процесса  $\bar{Q}(\bar{u}, t, y) = (\bar{Q}_n(\bar{u}_n, t, y))$ ,  $\bar{u} = (\bar{u}_n)$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ ,  $t \in [0, t_1]$ . Их объединение по всем  $y \in Y$  при одном и том же управляющем воздействии образует ансамбль траекторий [1]:

$$Z(t, \bar{u}) = \cup \{\bar{Q}(\bar{u}, t, y) | y \in Y\}, \quad (1.8)$$

описывающий поведение управляемой функции состояния вида (1.5) на множестве  $Y \in y$  не полностью определенных параметрических характеристик объекта:

$$Q(x, \bar{u}, t, y) = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\bar{u}_n, t, y) \varphi_n(\mu_n(y), x). \quad (1.9)$$

Пусть необходимо обеспечить за фиксируемое априори время  $t_1$  при управлении ансамблем (1.8) заданную точность  $\varepsilon$  равномерного приближения конечного пространственного распределения управляемой величины  $Q(x, \bar{u}, t_1, y)$  к требуемому состоянию, описываемому кусочно-непрерывной функцией  $Q^{**}(x) > Q_0$ ,  $x \in [x_0, x_1]$ , для всех  $y \in Y$ , согласно соотношению

$$\xi_\Sigma(\bar{u}) = \max_{y \in Y} \left[ \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \bar{u}, t_1, y) - Q^{**}(x)| \right] \leq \varepsilon, \quad (1.10)$$

которое определяет оцениваемое в типичной для приложений равномерной метрике целевое множество конечных состояний распределенной системы [10–13].

Пусть далее эффективность процесса управления объектом (1.1)–(1.3) оценивается квадратичным функционалом качества

$$J(u, y) = \int_0^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [r(x) Q^2(x, u, t, y) + r(x) u^2(x, t)] dx dt \rightarrow \min_u. \quad (1.11)$$

Переход к описанию объекта в терминах модальных переменных приводит в силу ортонормированности семейства собственных функций к представлению критерия (1.11) в следующем виде [13]:

$$J_1(\bar{u}, y) = \int_0^{t_1} \left[ \sum_{n=1}^{N_1} (\bar{Q}_n^2(\bar{u}_n, t, y) + \bar{u}_n^2(t)) \right] dt \rightarrow \min_{\bar{u}}, \quad (1.12)$$

а требования (1.10) к конечному состоянию объекта определяются в форме условия

$$\xi_{\Sigma}(\bar{u}) = \max_{y \in Y} \left[ \max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\bar{u}_n, t_1, y) \varphi_n(\mu_n(y), x) - Q^{**}(x) \right| \right] \leq \varepsilon. \quad (1.13)$$

В соответствии со стратегией управления по принципу наилучшего гарантированного результата рассмотрим следующую минимаксную задачу робастной оптимизации поведения ансамбля траекторий (1.8) [7]. Обозначим через  $u(Q, x, t)$  управляющее воздействие с обратной связью по управляемой величине  $Q$ .

Требуется найти оптимальное управление  $u^*(Q, x, t)$  обеспечивающее перевод не полностью определенного в условиях (1.7) объекта (1.4) в требуемое конечное состояний (1.13) при минимально возможном значении критерия оптимальности:

$$J_2(\bar{u}) = \max_{y \in Y} J_1(\bar{u}, y) \rightarrow \min_{\bar{u}}. \quad (1.14)$$

Решение сформулированной задачи существует при достижимых значениях  $\varepsilon$  в (1.13) [1].

**2. Программное оптимальное управление ансамблем траекторий.** 2.1. Структура оптимального управления для детерминированной модели объекта. При некотором фиксированном значении  $y = \tilde{y} = \text{const} \in Y$  задача (1.13), (1.14) приводится к рассмотренному в [13] виду

$$\xi_{1\Sigma}(\bar{u}) = \max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\bar{u}_n, t_1, \tilde{y}) \varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x) - Q^{**}(x) \right| \leq \varepsilon; \quad (2.1)$$

$$J_2(\bar{u}) = J_1(\bar{u}, \tilde{y}) \quad (2.2)$$

для детерминированной модели объекта.

Как показано в [13], стандартные процедуры принципа максимума Понтрягина приводят к представлению оптимальных модальных управлений  $\bar{u}_n^*(t)$  в форме явной функции от сопряженной переменной  $\psi_n^*(t)$ , соответствующей оптимальному процессу, независимо от других составляющих вектора  $\bar{u}^* = (\bar{u}_n^*)$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ :

$$\bar{u}_n^*(t) = \frac{1}{2} \psi_n^*(t), \quad n = \overline{1, N_1}. \quad (2.3)$$

2.2. Краевая задача принципа максимума для детерминированной модели объекта. Уравнения (1.4) с подстановкой управляющего воздействия в форме (2.3) образуют в рассматриваемом случае совместно с уравнениями для сопряженных переменных  $\psi_n(t)$  линейную программно-управляемую систему второго порядка относительно двух переменных  $\bar{Q}_n$ ,  $\psi_n$  для каждого  $n = \overline{1, N_1}$  [13]:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_n}{dt} &= 2\bar{Q}_n + \mu_n^2 \psi_n; \\ \frac{d\bar{Q}_n}{dt} &= -\mu_n^2 \bar{Q}_n + \frac{1}{2} \psi_n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Система (2.4) замыкается требованиями к ее конечному состоянию, которые считаются определенными, исходя из общего для всех  $n = \overline{1, N_1}$  условия (2.1).

Решение уравнений (2.4) может быть получено в векторно-матричной форме [13]:

$$\begin{bmatrix} \psi_n(t) \\ \bar{Q}_n(t) \end{bmatrix} = e^{A_n t} \begin{bmatrix} \psi_n(0) \\ \bar{Q}_n(0) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Здесь  $A_n$  —  $2 \times 2$ -матрица коэффициентов системы (2.4),  $e^{A_n t}$  —  $2 \times 2$ -матрица (матричная экспонента)

$$e^{A_n t} = \begin{bmatrix} A_{n11}(t) & A_{n12}(t) \\ A_{n21}(t) & A_{n22}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

где  $A_{nij}(t)$ ;  $i, j = 1, 2$  известные в соответствии со структурой системы уравнений (2.4) элементы  $e^{A_n t}$  [13].

2.3. Параметризация управляющих воздействий при полном объеме информации о характеристиках объекта. Согласно (2.5),  $\psi_n^*(t)$ , а следовательно, и программное управление (2.3) определяются для каждой известной величины  $\bar{Q}_n(0)$  с точностью до начальных значений  $\psi_n^*(0)$ , совокупность которых для всех  $n = \overline{1, N_1}$  выступает таким образом, в роли параметрического представления  $u^*(x, t)$  в соответствии с (1.6), (2.3), (2.4) [17, 18]. Однако для систем с распределенными параметрами такой подход оказывается неконструктивным, прежде всего, в силу бесконечной размерности вектора  $\psi(0) = (\psi_n(0))$ ,  $n = \overline{1, N_1}$  при  $N_1 = \infty$ . В работе [12] применительно к требованиям (2.1), предъявляемым к конечному состоянию объекта  $\bar{Q}(t_1) = (\bar{Q}_n(t_1))$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ , предложен конструктивный способ последовательной конечно-мерной параметризации управляющих воздействий (“ $\psi$  – параметризация”) на множестве  $M$ -мерных векторов  $\psi^{(M)} = (\tilde{\psi}_i)$ ,  $i = \overline{1, M}$ ;  $\tilde{\psi}_i = \psi_i(t_1)$ ,  $M < N_1$ , финишных значений  $\tilde{\psi}_i$  первых  $M$  сопряженных функций в (2.4) при равных нулю всех остальных значениях  $\psi_i(t_1)$ :

$$\psi^{(M)} = (\psi_i(t_1)) = (\tilde{\psi}_i), \quad i = \overline{1, M}; \quad \psi_i(t_1) = 0, \quad i > M. \quad (2.7)$$

С возрастанием  $M$  обеспечивается попадание под действием параметризуемых на множестве параметров (2.7) управляющих воздействий вида (2.3) в сужающееся к началу координат в пространстве  $\bar{Q}(t)$  целевое множество, гарантируя выполнение условий (2.1) для достижимых значений  $\epsilon$  при некотором конечном значении  $M \geq 1$  [12].

Явная форма  $\psi$ -параметризованного управления (2.3) может быть получена в результате прогонки начальных условий в (2.5) к моменту  $t = t_1$  в виде следующей линейной зависимости от определяемого, согласно (2.7), конечного значения  $\psi_n^*(t_1)$  в оптимальном процессе и начального состояния  $\bar{Q}_n(0)$  объекта управления [13]:

$$\bar{u}_n^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[K_n(t, t_1)\tilde{\psi}_n^* + K_{ln}(t, t_1)\bar{Q}_n(0)], & n \leq M; \\ \frac{1}{2}K_{ln}\bar{Q}_n(0), & n > M, \end{cases} \quad (2.8)$$

где  $\tilde{\psi}_n^*$  – значения  $\tilde{\psi}_n$  в (2.7), соответствующие оптимальному процессу. Здесь [13]

$$\begin{aligned} K_n(t, t_1) &= \hat{A}_{n11}(t_1 - t) + \hat{A}_{n12}(t_1 - t)B_n(t_1); \\ K_{ln}(t, t_1) &= \hat{A}_{n12}(t_1 - t)B_{ln}(t_1); \end{aligned} \quad (2.9)$$

$\hat{A}_{nij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , подобные (2.6) блоки обратной матрицы  $e^{-A_n(t_1-t)}$  и

$$B_n(t_1) = A_{n21}(t_1)A_{n11}^{-1}(t_1); \quad B_{ln}(t_1) = A_{n22}(t_1) - A_{n21}(t_1)A_{n11}^{-1}(t_1)A_{n12}(t_1). \quad (2.10)$$

Последующая подстановка (2.8) в (1.6), где следует учесть  $N_1 \leq \infty$  слагаемых бесконечной суммы, приводит к  $\psi$ -параметризованной форме оптимального программного управления  $u^*(x, t)$ :

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M K_n(t, t_1)\tilde{\psi}_n^* \varphi_n(\mu_n, x) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} K_{ln}(t, t_1)\bar{Q}_n(0) \varphi_n(\mu_n, x). \quad (2.11)$$

Таким образом,  $u^*(x, t)$  находится, согласно (2.11), с точностью до выбора оптимального вектора параметров  $\psi_*^{(M)} = (\tilde{\psi}_i^*)$ ,  $i = \overline{1, M}$ , в (2.7). К его определению применительно к задаче (1.13), (1.14) управления ансамблем траекторий (1.8) и сводится дальнейшая задача.

2.4. Редукция к не полностью определенной минимаксной задаче полубесконечной оптимизации. В зависимости от реализуемой величины  $\tilde{y} \in Y$  оптимальное управление  $\bar{u}_n^*(t, \tilde{y})$  определяется в форме (2.8)–(2.10):

$$\bar{u}_n^*(t, \tilde{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ K_n(t, t_1, \tilde{y}) \tilde{\psi}_n^* + K_{ln}(t, t_1, \tilde{y}) \bar{Q}_n(0) \right], & n \leq M; \\ \frac{1}{2} K_{ln}(t, t_1, \tilde{y}), & n > M; \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} K_n(t, t_1, \tilde{y}) &= \hat{A}_{n11}(t_1 - t, \tilde{y}) + \hat{A}_{n12}(t_1 - t, \tilde{y}) B_n(t_1, \tilde{y}); \\ K_{ln}(t, t_1, \tilde{y}) &= \hat{A}_{n12}(t_1 - t, \tilde{y}) B_{ln}(t_1, \tilde{y}); \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} B_n(t_1, \tilde{y}) &= A_{n21}(t_1, \tilde{y}) A_{n11}^{-1}(t_1, \tilde{y}); \\ B_{ln}(t_1, \tilde{y}) &= A_{n22}(t_1, \tilde{y}) - A_{n21}(t_1, \tilde{y}) A_{n11}^{-1}(t_1, \tilde{y}) A_{n12}(t_1, \tilde{y}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $A_{nij}$ ,  $\hat{A}_{nij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , находятся в соответствии со структурой системы уравнений (2.4) при  $\mu_n = \mu_n(\tilde{y})$ . На этом основании, согласно (2.11),

$$u^*(x, t, \tilde{y}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M K_n(t, t_1, \tilde{y}) \tilde{\psi}_n^* \varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} K_{ln}(t, t_1, \tilde{y}) \bar{Q}_n(0) \varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x). \quad (2.15)$$

Интегрирование уравнений системы (1.4) с  $\psi$ -параметризованным управляющим воздействием вида (2.12)–(2.14) позволяет получить в форме (1.9) зависимости  $Q(x, \psi^{(M)}, \tilde{y})$  управляемой величины в конце оптимального процесса и критерия оптимальности  $J_1(\psi^{(M)}, \tilde{y})$  в (1.12) для каждого значения  $\bar{Q}(0)$  в (2.12) в виде явных функций  $x$ ,  $\psi^{(M)}$  и  $\tilde{y}$ . В результате осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления (1.12)–(1.14) к минимаксной задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [10, 11]:

$$J_2(\psi^{(M)}) = \max_{\tilde{y} \in Y} J_1(\psi^{(M)}, \tilde{y}) \rightarrow \min_{\psi^{(M)}} \quad (2.16)$$

$$\xi_\Sigma(\psi^{(M)}) = \max_{\tilde{y} \in Y} \left[ \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi^{(M)}, \tilde{y}) - Q^{**}(x)| \right] \leq \varepsilon \quad (2.17)$$

на экстремум функции  $J_2(\psi^{(M)})$  конечного числа  $M$  переменных  $\tilde{\psi}_i$ ,  $i = \overline{1, M}$ , в (2.7) с бесконечным числом ограничений (2.17). Эти ограничения порождаются требованиями выполнения условия (1.13), записываемого в форме (1.10), для всех  $x \in [x_0, x_1]$ ,  $\tilde{y} \in Y$  и заменяются одним эквивалентным ограничением на ошибку равномерного приближения  $Q(x, \psi^{(M)}, \tilde{y})$  к  $Q^{**}(x)$  в области  $G = [x_0, x_1] \times Y$ .

ЗПО (2.16), (2.17) существенно усложняется по сравнению с ее частным случаем для детерминированной модели объекта управления [13], во-первых, ограничением на функцию максимума в (2.17), определяемую на расширенном множестве аргументов, которое включает кроме пространственной переменной  $x \in [x_0, x_1]$  все допустимые реализации неопределенных факторов  $y \in Y$ , и, во-вторых, вычислением  $J_2(\psi^{(M)})$  в (2.16) по максимальной величине  $J_1$  на множестве  $Y$ .

Аналогично детерминированному варианту вида (2.1), (2.2), к которому сводится задача (2.16), (2.17) с фиксируемыми значениями  $\tilde{y}$ , размерность  $M$  вектора  $\psi_*^{(M)} = (\tilde{\psi}_n^*)$ ,  $n = \overline{1, M}$ , однозначно определяется в зависимости от заданной величины  $\varepsilon$  в (2.17) соотношением [10–13]

$$M = \omega \quad \text{для всех} \quad \varepsilon : \varepsilon_{\min}^{(\omega)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\omega-1)}, \quad (2.18)$$

где

$$\varepsilon_{\min}^{(\omega)} = \min_{\psi^{(\omega)}} \left[ \max_{\substack{x \in [x_0, x_1] \\ \tilde{y} \in Y}} |Q(x, \psi^{(\omega)}, \tilde{y}) - Q^{**}(x)| \right]. \quad (2.19)$$

Значения  $\varepsilon_{\min}^{(\omega)}$ ,  $\omega = \overline{1, \rho}$ , образуют, как правило, убывающую с возрастанием  $\omega$  цепочку неравенств [10–13]. Задача (2.16), (2.17) оказывается разрешимой, если  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\inf}$ . Здесь точная нижняя грань  $\varepsilon_{\inf}$  достижимых значений  $\varepsilon$  становится равной минимаксу  $\varepsilon_{\min}^{(\rho)}$ , где  $\rho = \infty$  при  $\varepsilon_{\inf} = 0$  и  $\rho < \infty$  при  $\varepsilon_{\inf} > 0$  соответственно для управляемых и неуправляемых относительно  $Q^{**}(x)$  объектов [10].

**2.5. Решение минимаксной задачи полубесконечной оптимизации.** Решение ЗПО (2.16), (2.17) относительно вектора параметров  $\psi^{(M)}$ , а также априори неизвестной величины  $\varepsilon_{\min}^{(M)}$  в (2.18) в случае, когда по исходным условиям задачи должно быть выполнено равенство  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$  в (2.17), может быть получено альтернансным методом [10, 11, 13]. Метод базируется на специальных альтернансных свойствах искомого решения  $\psi_*^{(M)} = (\tilde{\psi}_i^*)$ ,  $i = \overline{1, M}$ , задачи (2.16), (2.17) и диктуемой закономерностями предметной области дополнительной информации о характере и формах распределения результирующего состояния  $Q(x, \psi^{(M)}, y) - Q^{**}(x)$  управляемой величины в области  $G = [x_0, x_1] \times Y$ ,  $(x, y) \in G$ , и значения критерия оптимальности  $J_1(\psi_*^{(M)}, y)$  в области  $Y \ni y$ . Можно показать [10], что в рассматриваемой ЗПО, согласно альтернансным свойствам  $\psi_*^{(M)}$ , в условиях малостеснительных допущений равные допустимой величине  $\varepsilon$  значения  $\max_{x, \tilde{y}} |Q(x, \psi_*^{(M)}, \tilde{y}) - Q^{**}(x)|$  и совпадающие с  $J_2(\psi_*^{(M)})$  в (2.16) значения  $\max_{\tilde{y}} J_1(\psi_*^{(M)}, \tilde{y})$  достигаются соответственно в некоторых точках  $(x_j^0, \tilde{y} = y_j^0) \in G$ ,  $j = \overline{1, R_x}$ , и  $y_{ei}^0 \in Y$ ,  $i = \overline{1, R_y}$ :

$$|Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}, y_j^0) - Q^{**}(x_j^0)| = \varepsilon, \quad j = \overline{1, R_x}, \quad (2.20)$$

$$J_2(\psi_*^{(M)}) = J_1(\psi_*^{(M)}, y_{ei}^0), \quad i = \overline{1, R_y}. \quad (2.21)$$

В общем случае значения  $y_j^0$  неопределенных факторов в (2.21) заранее не определены и процедура их поиска существенно затрудняет дальнейшее решение задачи [5, 6]. Ограничимся далее типичной для прикладных задач возможностью предварительной фиксации этих величин, как правило, на границе  $\partial Y$  области  $Y$ , которые считаются известными, исходя из физических закономерностей конкретных оптимизируемых процессов [7, 10, 19–22].

Числа  $R_x$  и  $R_y$  в (2.20), (2.21) определяются следующими соотношениями в зависимости от значения  $\varepsilon$  в (2.20), замыкающими систему равенств (2.20), (2.21) относительно искомым параметров оптимального процесса:

$$R_x + R_y = M + 1, \quad \text{если} \quad \varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \bar{\varepsilon}; \quad \text{если} \quad (2.22)$$

$$R_x = M + 1, \quad \text{если} \quad \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}; \quad (2.23)$$

$$R_y = M + 1, \quad \text{если} \quad \varepsilon \geq \bar{\varepsilon} = \max_{x, \tilde{y}} |Q(x, \bar{\psi}^{(M)}, \tilde{y}) - Q^{**}(x)|; \quad \bar{\psi}^{(M)} = \arg \min_{\psi^{(M)}} J_2(\psi^{(M)}), \quad (2.24)$$

где  $M$  находится по правилу (2.18). Вариант (2.24) исключается далее из рассмотрения, поскольку он отвечает решению  $\bar{\psi}^{(M)}$  задачи (2.16) без учета ограничения (2.17).

При наличии информации из предметной области о форме распределений  $Q(x, \psi_*^{(M)}, y)$  на  $G \ni (x, y)$  и  $J_1(\psi_*^{(M)}, y)$  на  $Y \ni y$ , которая позволяет идентифицировать точки  $x_j^0, y_j^0, y_{ei}^0$  и знаки разности  $Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}, y_j^0) - Q^{**}(x_j^0)$ , равенства (2.20), (2.21), дополненные условиями существования экстремума функций  $Q(x, \psi_*^{(M)}, y) - Q^{**}(x)$  и  $J_1(\psi_*^{(M)}, y)$  соответственно в принадлежащих  $\text{int}[x_0, x_1]$  точках  $x_{jg}^0 \in \{x_j^0\}$  при  $y = y_{jg}^0 \in \{y_j^0\}$ ,  $g = \overline{1, R_{1x}}$ ,  $R_{1x} \leq R_x$ , и внутренних точках  $y_{ei}^0 \in \{y_{ei}^0\}$  множества  $Y$ ,  $p = \overline{1, R_{1y}}$ ,  $R_{1y} \leq R_y$ , переводятся в случае (2.22) в замкнутую систему уравнений:

$$Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}, y_j^0) - Q^{**}(x_j^0) = \pm \varepsilon, \quad j = \overline{1, R_x}; \quad (2.25)$$

$$J_2(\Psi_*^{(M)}) = J_1(\Psi_*^{(M)}, y_{ei}^0), \quad i = \overline{1, R_y}; \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [Q(x_{jg}^0, \Psi_*^{(M)}, y_{jg}^0) - Q^{**}(x_{jg}^0)] = 0, \quad g = \overline{1, R_{lx}}; \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} J_1(\Psi_*^{(M)}, y_{eip}^0) = 0, \quad p = \overline{1, R_{ly}} \quad (2.28)$$

с известными числами  $R_{lx}$ ,  $R_{ly}$  и однозначно определяемым знаком  $\varepsilon$  в (2.25) для каждой пары значений  $x_j^0$ ,  $y_j^0$ .

Совместное решение в условиях (2.22)  $R_x + R_y + R_{lx} + R_{ly} = M + 1 + R_{lx} + R_{ly}$  уравнений (2.25)–(2.28) относительно  $M + 1 + R_{lx} + R_{ly}$  неизвестных  $\Psi_*^{(M)} = (\Psi_i^*)$ ,  $i = \overline{1, M}$ ;  $J_2(\Psi_*^{(M)})$ :  $x_{jg}^0$ ,  $g = \overline{1, R_{lx}}$ ;  $y_{eip}^0$ ,  $p = \overline{1, R_{ly}}$ , при заданных величинах  $y_j^0$  позволяет определить все искомые параметры в ЗПО (2.16), (2.17) применительно к варианту (2.22).

В случае (2.23) получаем систему  $M + 1 + R_{lx}$  уравнений (2.25), (2.27), разрешаемую относительно  $M + 1 + R_{lx}$  неизвестных  $\Psi_*^{(M)} = (\Psi_i^*)$ ,  $i = \overline{1, M}$ ;  $\varepsilon_{\min}^{(M)}$ ;  $x_{jg}^0$ ,  $g = \overline{1, R_{lx}}$ .

Для выпуклого минимизируемого функционала качества (1.12) значения  $\max_{\tilde{y}} J_1(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y})$  в (2.16) достигаются в точках  $y_{ei}^0 \in \partial Y$ ,  $i = \overline{1, R_y}$  [6]. Ограничимся далее типичным случаем наличия при  $R_y = 1$  в (2.26) только одной такой заранее фиксируемой (подобно  $y_j^0$ ) точки  $y_{e1}^0 \in \partial Y$ , соответствующей единственной “наихудшей” реализации значений неопределенных величин  $y \in Y$ , на которой достигается  $\max_{\tilde{y}} J_1(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y})$ . При этом точки  $y_{eip}^0 \in \text{int } Y$  отсутствуют и уравнения (2.28) исключаются из системы (2.25)–(2.28), которая принимает в итоге следующий вид:

$$Q(x_j^0, \Psi_*^{(M)}, y_j^0) - Q^{**}(x_j^0) = \pm \varepsilon, \quad j = \overline{1, R_x}; \quad (2.29)$$

$$J_2(\Psi_*^{(M)}) = J_1(\Psi_*^{(M)}, y_{e1}^0); \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [Q(x_{jg}^0, \Psi_*^{(M)}, y_{jg}^0) - Q^{**}(x_{jg}^0)] = 0, \quad g = \overline{1, R_{lx}}, \quad R_{lx} \leq R_x, \quad (2.31)$$

где, как правило,  $y_{e1}^0 \in \{y_j^0\}$  в (2.29). Согласно (2.22), при  $R_y = 1$ ,  $\varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}$  будем иметь  $R_x = M$ . Система  $R_x + R_{lx} = M + R_{lx}$  уравнений (2.29), (2.31) может быть решена известными численными методами относительно  $R_x + R_{lx}$  неизвестных  $\Psi_*^{(M)} = (\tilde{\Psi}_i^*)$ ,  $i = \overline{1, M}$ ;  $x_{jg}^0$ ,  $g = \overline{1, R_{lx}}$ , независимо от значений  $J_1(\Psi_*^{(M)}, y_{e1}^0)$ . По найденной таким образом величине  $\Psi_*^{(M)}$  определяется  $J_2(\Psi_*^{(M)})$  из уравнения (2.30).

Состояние управляемой величины  $Q(x, \Psi_*^{(M)}, \tilde{y})$  в конце оптимального процесса при любом реализуемом значении  $\tilde{y} \in Y$  описывается рядом вида (1.9):

$$Q(x, \Psi_*^{(M)}, \tilde{y}) = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y}) \varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x) \quad (2.32)$$

с вектором  $\bar{Q}(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y}) = (\bar{Q}_n(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y}))$  конечных значений модальных переменных  $\bar{Q}_n$ . Здесь, подобно (2.12), можно получить следующее выражение для  $\bar{Q}_n(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y})$  в форме линейной функции начального состояния объекта  $\bar{Q}_n(0)$  и конечных значений  $\Psi_n^*(t_1)$  вектора сопряженных переменных [13]:

$$\bar{Q}_n(\Psi_*^{(M)}, \tilde{y}) = B_n(t_1, \tilde{y}) \Psi_n^*(t_1) + B_{ln}(t_1, \tilde{y}) \bar{Q}_n(0), \quad (2.33)$$

где  $\psi_n^*(t_1)$  по-прежнему определяется, согласно (2.7),  $B_n(t_1, \tilde{y})$ ,  $B_{1n}(t_1, \tilde{y})$  вычисляются по формулам (2.14) и, следовательно,  $Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}, y_j^0)$  в системе уравнений (2.29), (2.31) находится в форме (2.32), (2.33) с заменой  $\tilde{y}$  на  $y_j^0$ .

Таким образом, значения  $\psi_*^{(M)}$  в задаче (2.16), (2.17) находятся в результате решения системы уравнений (2.29), (2.31), учитывающей конечное состояние всего ансамбля траекторий управляемой системы. Зависимость  $J_1(\psi_*^{(M)}, \tilde{y})$  от  $\tilde{y}$  создается за счет включения в подынтегральную функцию критерия (1.12) значений  $\bar{Q}_n$  и  $\bar{u}_n$ , зависящих от  $y$ .

При заранее фиксируемом известными закономерностями предметной области значении  $y^*$  величины  $y_{el}^0$  в (2.30) в силу соотношений (2.16), (2.17), (2.30) выполняются равенства для найденного вектора  $\psi_*^{(M)}$ :

$$\begin{aligned} \min_{\psi^{(M)}} J_2(\psi^{(M)}) = J_2(\psi_*^{(M)}) = \max_{y \in Y} J_1(\psi_*^{(M)}, y) = J_1(\psi_*^{(M)}, y_{el}^0) = J_1(\psi_*^{(M)}, y^*); \\ (\psi_*^{(M)}, y^*) = \arg \min_{\psi^{(M)} \in G_\Sigma} \max_{y \in Y} J_1(\psi^{(M)}, \tilde{y}), \quad G_\Sigma = \{\psi^{(M)} : \xi_\Sigma(\psi^{(M)}) \leq \varepsilon\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Отсюда в соответствии с представлением критерия оптимальности  $J_1(\bar{u}, y)$  в форме (1.12) следует, что искомое  $\psi$ -параметризованное оптимальное программное управление  $\bar{u}^*(t)$  ансамблем траекторий (1.8) совпадает с  $\bar{u}^*(t, y^*) = (\bar{u}_n^*(t, y^*))$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ , где  $\bar{u}_n^*(t, y^*)$  определяется, согласно (2.12), при  $\tilde{y} = y^*$ .

В итоге программное оптимальное управление ансамблем (1.8) определяется в форме (2.15) с подстановкой (2.12)–(2.14), где  $\tilde{\psi}_*^{(M)}$ ,  $n = \overline{1, M}$ , находятся в результате решения системы уравнений (2.29)–(2.31), а  $\tilde{y}$  выбирается равным  $y^*$ .

2.6. Учет ограничений на характер пространственного распределения программного управления ансамблем траекторий. При характерных для приложений затруднениях в технической реализации пространственного распределения управлений  $u^*(x, t)$  вида (2.15) они ищутся в форме взвешенной суммы заранее фиксируемых проектными решениями объекта и заведомо исполнимых стандартными инженерными средствами зависимостей (чаще всего, кусочно-постоянных)  $F_m(x)$ ,  $m = \overline{1, s}$ ;  $s \geq 1$ , от пространственной координаты с весовыми коэффициентами, в роли которых выступает искомые сосредоточенные управляющие воздействия  $v_m(t)$  [13]:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^s F_m(x) v_m(t), \quad m = \overline{1, s}. \quad (2.35)$$

Конечное интегральное преобразование равенства (2.35) приводит к следующему выражению для модальных управляющих воздействий  $\bar{u}_n(t)$  в (1.4) [13]:

$$\bar{u}_n(t) = \sum_{m=1}^s \bar{F}_{mn} v_m(t), \quad n = \overline{1, N_1}, \quad (2.36)$$

где  $\bar{F}_{mn}$  –  $n$ -я мода разложения  $F_m(x)$  в ряд вида (1.5) по собственным функциям начально-краевой задачи (1.1)–(1.3).

В типичной для приложений ситуации, когда можно ограничиться учетом только  $N_1 = N$  мод  $\bar{Q}_n$  в (1.5) и возможен выбор  $s = N$  в (2.35), равенства (2.36) при  $n = \overline{1, N}$ ,  $N = s$  образуют линейную систему уравнений относительно  $v_m^*(t)$ ,  $m = \overline{1, s}$ , для заданных значений  $\bar{u}_n^*(t)$  в (2.8), решение которой определяется формулами Крамера непосредственно по решению задачи с автономными модальными управлениями:

$$v_m^*(t) = \sum_{n=1}^s \frac{D_{mn}}{D} \bar{u}_n^*(t), \quad m = \overline{1, s}. \quad (2.37)$$

Здесь  $D = \det[\bar{F}_{mn}]$ ,  $m, n = \overline{1, s}$ ;  $D_{mn}$  — алгебраическое дополнение  $n$ -го элемента  $m$ -го столбца  $D$  и  $D \neq 0$  при линейно-независимых функциях  $F(x)$ .

В результате искомое программное управление ансамблем траектории  $u^*(x, t)$  восстанавливается в виде (2.35) с подстановкой (2.37):

$$u^*(x, t) = \sum_{m=1}^s F_m(x) \sum_{n=1}^s \frac{D_{mn}}{D} \bar{u}_n^*(t), \quad (2.38)$$

где  $\bar{u}_n^*(t)$  находятся по схеме (2.12)–(2.34) в форме (2.12) при  $\tilde{y} = y^*$ . В более общем случае  $s < N_1 = N$  в (2.35) задача определения многоканального сосредоточенного управления  $v_m^*(t)$ ,  $m = \overline{1, s}$ , решается распространением полученных в (2.3)–(2.9) результатов на подобную (2.4) программно-управляемую систему теперь уже  $N$ -го порядка путем, указанным в [13].

**3. Синтез оптимального управления с модальными управляющими воздействиями.** Применение известных процедур аналитического конструирования оптимальных регуляторов в рассматриваемой не полностью определенной линейно-квадратичной задаче оптимизации существенно усложняется трудностями реализации алгоритмов позиционного управления ансамблем траекторий движения объекта [1, 6] и отсутствием классических условий трансверсальности на негладкой границе целевого множества (1.10) [8, 13]. В настоящем разделе предлагается метод синтеза управляющих воздействий  $u^*(Q, x, t)$  с обратной связью, осуществляемый по принципу наилучшего гарантированного результата с использованием, подобно [8, 13], в качестве условий трансверсальности на правом конце оптимальной траектории известных конечных значений управляемых и сопряженных переменных, которые определяются предварительным расчетом программного управления. Рассмотрим сначала задачу синтеза для детерминированной модели объекта при  $\tilde{y} = y^*$  в (2.12)–(2.14), для которой управляющее воздействие  $u^*(x, t)$  совпадает, как показано в разд. 2, с оптимальным программным управлением ансамблем траекторий (1.8) в форме (2.15) с заменой  $\tilde{y}$  на  $y^*$ .

Перенос (прогонка) начальных значений  $\psi_n(0)$ ,  $Q_n(0)$  в (2.5) в конечный момент времени  $t_1$  приводит при  $\tilde{y} = y^*$  к решению системы уравнений (2.4) в следующем виде [13]:

$$\psi_n^*(t_1) = A_{n11}(t_1 - t, y^*) \psi_n^*(t) + A_{n12}(t_1 - t, y^*) \bar{Q}_n^*(t, y^*); \quad (3.1)$$

$$\bar{Q}_n^*(t_1, y^*) = A_{n21}(t_1 - t, y^*) \psi_n^*(t) + A_{n22}(t_1 - t, y^*) \bar{Q}_n^*(t, y^*), \quad (3.2)$$

где  $\psi_n^*(t)$ ,  $\bar{Q}_n^*(t, y^*)$  соответствуют оптимальному процессу и конечные значения  $\psi_n^*(t_1)$ ,  $\bar{Q}_n^*(t_1, y^*)$  фиксируются решением задачи программного управления описанным в разд. 2 способом. После умножения равенств (3.1), (3.2) соответственно на известные значения  $\bar{Q}_n^*(t_1, y^*) = \bar{Q}_n^*(\psi_n^*(t_1), y^*)$  и  $\psi_n^*(t_1)$  в (2.33) и (2.7) левые части соотношений (3.1), (3.2) становятся одинаковыми. Последующее вычитание этих уравнений приводит к зависимости сопряженных переменных от наблюдаемых мод  $\bar{Q}_n^*(t, y^*)$  в случае, когда на множестве  $Y$  реализуется именно изначально фиксируемое значение  $y = y^*$ :

$$\begin{aligned} \psi_n^*(t, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(0), \bar{Q}_n^*(t, y^*)) &= T_{n1}(t, t_1, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(t_1, y^*)) \times \\ &\times T_{n2}(t, t_1, \psi_n^*(t_1), \bar{Q}_n^*(t_1, y^*)) \bar{Q}_n^*(t, y^*), \quad n = \overline{1, N_1}; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$T_{n1} = [\bar{Q}_n^*(t_1, y^*) A_{n11}(t_1 - t, y^*) - \psi_n^*(t_1) A_{n21}(t_1 - t, y^*)]^{-1}; \quad (3.4)$$

$$T_{n2} = \psi_n^*(t_1) A_{n22}(t_1 - t, y^*) - \bar{Q}_n^*(t_1, y^*) A_{n12}(t_1 - t, y^*). \quad (3.5)$$

Выражения (3.3)–(3.5) однозначным образом определяют зависимость  $\psi_n^*$  от своих аргументов. При этом зависимость  $\psi_n^*$  от  $\bar{Q}_n^*(0)$  в (3.3) характеризуется представлением  $\bar{Q}_n^*(t_1, y^*)$  в (3.4), (3.5) в виде (2.33).

Подстановка (3.3) в выражение (2.3) для модального управления приводит к линейному закону синтеза оптимального регулятора с нестационарными коэффициентами обратных связей по изменяемому состоянию  $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(t))$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ , в форме (1.6) в условиях реализации значения  $y = y^*$ :

$$u^*(\bar{Q}(t, y^*), y^*, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} T_{n1}(t, y^*) T_{n2}(t, y^*) \bar{Q}_n(t, y^*) \varphi_n(\mu_n(y^*), x). \quad (3.6)$$

Здесь значения  $T_{n1}$ ,  $T_{n2}$  представляются, согласно (3.4), (3.5), известными функциями времени с фиксируемыми на протяжении процесса управления величинами  $\bar{Q}_n(0)$  в (2.33), которые находятся по результатам наблюдения  $\bar{Q}(t)$  в момент  $t = 0$ .

При наблюдении вектора  $\bar{Q}(t, y)$  в условиях неопределенности величин  $y \in Y$  при некотором заранее неизвестном значении  $y = \tilde{y} = \text{const} \neq y^*$  реализуемый алгоритм обратной связи сохраняется в виде (3.6) с заменой  $\bar{Q}(t, y^*)$  на  $\bar{Q}(t, \tilde{y})$ :

$$u(\bar{Q}(t, \tilde{y}), y^*, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} T_{n1}(t, y^*) T_{n2}(t, y^*) \bar{Q}_n(t, \tilde{y}) \varphi_n(\mu_n(y^*), x) \quad (3.7)$$

в отличие от оптимального

$$u^*(\bar{Q}(t, \tilde{y}), \tilde{y}, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} T_{n1}(t, \tilde{y}) T_{n2}(t, \tilde{y}) \bar{Q}_n(t, \tilde{y}) \varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x), \quad (3.8)$$

который определяется, подобно (3.6), для всех  $\tilde{y} \in Y$ . Однако оптимальный регулятор (3.8) нереализуем в рассматриваемой задаче робастной оптимизации, не предусматривающей использование идентификаторов значений  $\tilde{y}$ , из-за невозможности предварительного вычисления  $T_{n1}(t, \tilde{y})$ ,  $T_{n2}(t, \tilde{y})$  и  $\varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x)$  для заведомо непредсказуемых величин  $\tilde{y}$ .

Поскольку алгоритму (3.6) соответствует оптимальное программное управление (2.15) ансамблем траекторий при  $\tilde{y} = y^*$ , то на основании (3.7), (3.8) и соотношений (2.34) выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} J_1(u^*(\bar{Q}(t, \tilde{y}), \tilde{y}, x, t), \tilde{y}) &\leq J_1(u(\bar{Q}(t, \tilde{y}), y^*, x, t), y^*) \leq \max_{\tilde{y} \in Y} J_1(u(\bar{Q}(t, \tilde{y}), y^*, x, t), y^*) = \\ &= J_1(u^*(\bar{Q}(t, y^*), y^*, x, t), y^*) = J_2(u^*(\bar{Q}(t, y^*), y^*, x, t)), \end{aligned} \quad (3.9)$$

согласно которым величина  $J_1(u(\bar{Q}(t, \tilde{y}), y^*, x, t), y^*)$ , определяемая законом обратной связи (3.7), не превышает верхней оценки достижимых значений  $J_2$  при управлении (3.6) детерминированной моделью объекта. Отсюда следует, что синтез оптимального регулятора (3.7) можно считать гарантированным решением рассматриваемой задачи управления ансамблем траекторий управляемого процесса.

Переход в (3.7) от  $\bar{Q}(t, \tilde{y})$  к измеряемому выходу объекта  $Q_u(x_u, t, \tilde{y}) = (Q(x_{uj}, t, \tilde{y}))$  в  $r$  точках  $x_{uj} \in [x_0, x_1]$ ,  $j = \overline{1, r}$ , определяется в соответствии с (1.5) векторно-матричным уравнением наблюдения

$$Q_u(x_u, t, \tilde{y}) = \Phi_u(\tilde{y}) \bar{Q}(t, \tilde{y}); \quad \Phi_u(\tilde{y}) = [\varphi_n(\mu_n(\tilde{y}), x_{uj})], \quad n = \overline{1, N_1}; \quad j = \overline{1, r}. \quad (3.10)$$

В условиях  $r < N_1$  неполного измерения состояния для восстановления вектора  $\bar{Q}(t, \tilde{y})$  по значениям  $Q_u(x_u, t, \tilde{y})$  требуется построение наблюдателя точного или пониженного порядка [23]. Если по условиям требуемой точности моделирования объекта (1.4) можно ограничиться учетом только  $M$  первых слагаемых  $\bar{Q}(t, \tilde{y}) = (\bar{Q}_n(t, \tilde{y}))$ ,  $n = \overline{1, M}$ , с минимальным их числом  $M < N_1$ , необходимым для решения системы уравнений (2.29), (2.31) относительно вектора  $\Psi_*^{(M)}$ , то  $\bar{Q}(t, \tilde{y})$  непосредственно определяется решением уравнения (3.10) относительно  $\bar{Q}(t, \tilde{y})$  при  $r = M$ ,  $N_1 = N = M$ :

$$\bar{Q}(t, \tilde{y}) = \Phi^{-1}(\tilde{y}) Q_u(x_u, t, \tilde{y}). \quad (3.11)$$

Подстановка (3.11) в (3.7) приводит к линейному алгоритму синтеза с обратными связями по измеряемому выходу объекта:

$$\begin{aligned} u(Q_u(x_u, t, \tilde{y}), y^*, x, t) &= \frac{1}{2} \Phi_u^{-1}(\tilde{y}) Q_u(x_u, t, \tilde{y}) \varphi(y^*, x, t); \\ \varphi(y^*, x, t) &= (T_{n1}(t, y^*) T_{n2}(t, y^*) \varphi_n(\mu_n(y^*), x)), \quad n = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $\Phi_u^{-1}(\tilde{y}) Q_u(x_u, t, \tilde{y})$  – матрица-строка;  $\varphi(y^*, x, t)$  – матрица-столбец.

Аналогично (3.8) регулятор (3.12) нереализуем ввиду невозможности предварительного вычисления  $\Phi_u^{-1}(\tilde{y})$  для непредсказуемых заранее конкретных значений  $\tilde{y} \in Y$ . Замена  $\Phi_u^{-1}(\tilde{y})$  на  $\Phi_u^{-1}(y^*)$  в (3.12) приводит в силу неравенств вида (3.9) к реализуемому гарантированному алгоритму управления

$$u(Q_u(x_u, t, \tilde{y}), y^*, x, t) = \frac{1}{2} \Phi_u^{-1}(y^*) Q_u(x_u, t, \tilde{y}) \varphi(y^*, x, t), \quad (3.13)$$

не превышающему верхней оценки критерия качества  $J_2$  в (3.9).

В условиях (2.35)–(2.37) при  $N_1 = N = s$  управление  $u^*(x, t)$  представляется в форме (2.38). Подстановка  $\bar{u}_n^*(t)$  в (2.38) в виде (2.3), (3.3)–(3.5) приводит в таком случае вместо (3.7) и (3.13) к следующим алгоритмам синтеза оптимального регулятора с обратными связями по  $\bar{Q}(t, \tilde{y})$ :

$$u^*(\bar{Q}(t, \tilde{y}), y^*, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s F_m(x) \sum_{n=1}^s \frac{D_{mn}}{D} T_{n1}(t, y^*) T_{n2}(t, y^*) \bar{Q}_n(t, \tilde{y}) \quad (3.14)$$

и по измеряемому выходу объекта:

$$\begin{aligned} u^*(Q_u(x_u, t, \tilde{y}), y^*, x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s F_m(x) [\Phi_u^{-1}(y^*) Q_u(x_u, t, \tilde{y}) \varphi_{om}(y^*, t)]; \\ \varphi_{om}(y^*, t) &= \left( T_{n1}(t, y^*) T_{n2}(t, y^*) \frac{D_{mn}}{D} \right), \quad n = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где аналогично (3.12)  $\varphi_{om}(y^*, t)$  – матрица-столбец.

**4. Синтез оптимального регулятора для не полностью определенного объекта технологической теплофизики.** В качестве примера, представляющего самостоятельный интерес, рассмотрим задачу синтеза оптимального управления температурным режимом нагрева неограниченной пластины в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта [7, 10, 19–22].

Пусть температурное поле  $Q(x, t)$  неограниченной пластины описывается в процессе ее нагрева в зависимости от пространственной координаты  $x$  и времени  $t$  линейным неоднородным уравнением теплопроводности вида (1.1)–(1.3) в относительных единицах [19–21]:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in [0, t_1]; \quad (4.1)$$

$$Q(x, 0) = Q_0 = \text{const} \geq 0; \quad \frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q(1, t)}{\partial x} + \alpha Q(1, t) = 0, \quad (4.2)$$

где граничные условия (4.2) учитывают тепловые потери в окружающую среду с нулевой температурой на границе пластины  $x = 1$  по закону конвективной теплопередачи с заданным значением  $\alpha$  критерия Био. Здесь  $u(x, t)$  в (4.1) – нестесняемое дополнительными ограничениями кусочно-непрерывное пространственно-временное воздействие по мощности внутреннего тепловыделения.

В характерной ситуации, когда вся информация о неизменных во времени величинах  $Q_0$  и  $\alpha$  в (4.2) исчерпывается сведениями об их предельно допустимых значениях  $Q_{0\min}, Q_{0\max}, \alpha_{\min}, \alpha_{\max}$ , получаем следующий вектор  $y$  неопределенных факторов в (1.8), (1.9):

$$y = (Q_0, \alpha) \in Y = \{Q_0, \alpha : Q_{0\min} \leq Q_0 \leq Q_{0\max}; \alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}\}. \quad (4.3)$$

При этом управляемая величина  $Q(x, \bar{u}, t, y)$  представляется в форме ее разложения в ряд (1.9) по собственным функциям  $\varphi_n(x, y) = \cos(\mu_n(y), x)$  [19–21]:

$$Q(x, \bar{u}, t, y) = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{2\alpha^2 \cos(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha) \sin^2(\mu_n)} \bar{Q}_n(\bar{u}_n, t, y), \quad (4.4)$$

где  $\mu_n$  — бесконечно возрастающая последовательность корней трансцендентного уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu - \alpha = 0, \quad (4.5)$$

вычисляемых в зависимости от заданного значения  $\alpha$  в условиях (4.3), а  $\bar{Q}_n(\bar{u}_n, t, y)$  определяется решением системы уравнений вида (1.4):

$$\frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n + \bar{u}_n(t); \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}^0(\mu_n), \quad n = \overline{1, N_1}, \quad (4.6)$$

где  $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$  — моды  $Q_0$  в (4.2).

Зависимости  $\mu_n(\alpha)$  в (4.5) и  $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n, Q_0)$  в (4.6) определяют  $Q(x, \bar{u}, t, y)$  как сложную функцию  $y$ .

Требуется найти управление  $u^*(Q, x, t)$  с обратной связью, являющееся решением минимаксной задачи оптимизации (1.12)–(1.14) при  $Q^{**}(x) = Q^{**} = \text{const} > Q_0$ .

4.1. Решение задачи программного управления. Процедура  $\psi$ -параметризации приводит к представлению  $\psi^*(t_1)$  в форме (2.7). Для типичного в приложениях случая  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$  в (2.17), (2.19) здесь следует принять  $M = 2$ , согласно (2.18), и тогда в соответствии с (2.7)

$$\psi^*(t_1) = (\tilde{\psi}_i^*), \quad i = 1, 2; \quad \psi_i^*(t_1) = 0, \quad i > 2.$$

Примем здесь и всюду далее для большей простоты и наглядности получаемых результатов  $N_1 = N = 2$  в (4.4), ограничиваясь учетом только двух модальных переменных в сумме (4.4). При  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$  получаем  $R_x = M + 1 = 3$  в (2.29) в соответствии с правилом (2.23), образуя замкнутую систему равенств (2.29), (2.31) относительно неизвестных  $\psi_*^{(M)}$ ;  $x_{jg}^0$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $g = \overline{1, R_{1x}}$ , при заданных величинах  $y_{jg}^0$  в (2.31).

Физические закономерности поведения нестационарных температурных полей в оптимальном процессе нагрева пластины и альтернансные свойства  $\psi_*^{(2)}$  однозначным образом определяют в рассматриваемом примере, подобно [19–21], при  $M = 2$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ ,  $Q_0 = \text{const}$ ,  $Q^{**} = \text{const}$  форму кривых результирующего распределения температуры  $Q(x, \psi_*^{(M)}, y) - Q^{**}$  по пространственной координате (рис. 1) для всех значений  $y = (Q_0, \alpha) \in Y$ . Это позволяет заведомо идентифицировать в (2.29), (2.31) при  $R_{1x} = 1$  координаты точек  $x_1^0 = 0$ ,  $x_2^0 = x_{2g}^0 = x_{21}^0 \in (0, 1)$ ,  $x_3^0 = 1$ ; значения  $y_1^0 = (Q_{0\min}, \alpha_{\max})$ ,  $y_2^0 = y_{2g}^0 = y_{21}^0 = (Q_{0\max}, \alpha_{\min})$ ;  $y_3^0 = y_1^0$  и знаки  $Q(x_j^0, \psi_*^{(2)}, y_j^0) - Q^{**}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ . В результате равенства (2.29), (2.31) редуцируются к замкнутой системе линейных по  $\tilde{\psi}_1^*$ ,  $\tilde{\psi}_2^*$  уравнений:

$$\begin{aligned} Q(x_1^0, \psi_*^{(2)}, Q_{0\min}, \alpha_{\max}) - Q^{**} &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ Q(x_2^0, \psi_*^{(2)}, Q_{0\max}, \alpha_{\min}) - Q^{**} &= \varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ Q(x_3^0, \psi_*^{(2)}, Q_{0\min}, \alpha_{\max}) - Q^{**} &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ \frac{\partial Q(x_2^0, \psi_*^{(2)}, Q_{0\max}, \alpha_{\min})}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

разрешаемой относительно  $\psi_*^{(2)} = (\tilde{\psi}_1^*, \tilde{\psi}_2^*)$  и  $x_2^0$  при  $x_1^0 = 0$ ,  $x_3^0 = 1$ . Здесь  $Q(x, \psi_*^{(2)}, y)$  при  $y = y_j^0$ ,  $j = 1, 2, 3$ , находится в форме (4.4) при  $t = t_1$  с подстановкой  $\bar{Q}_n(\bar{u}_n, t_1, y)$  в виде  $\bar{Q}_n(\psi_*^{(2)}, y)$  в (2.33).

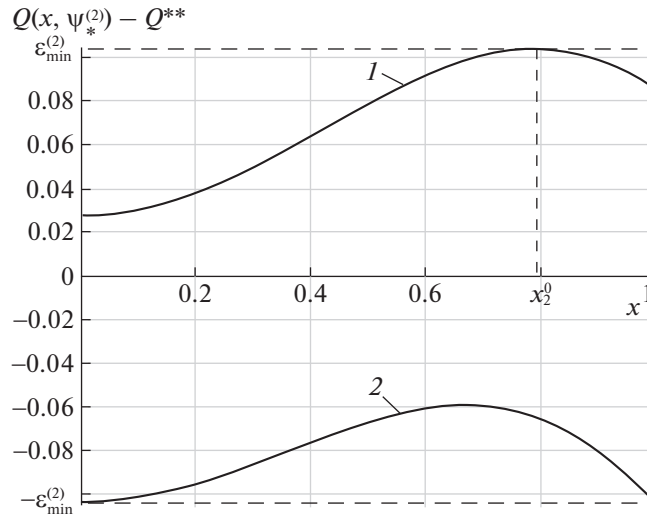


Рис. 1. Температурные распределения в конце оптимального процесса

Значения  $B_n$  и  $B_{1n}$  вычисляются по выражениям (2.14) в зависимости от блочных компонентов матричной экспоненты (2.6) системы уравнений (2.4), которые в свою очередь определяются по описанной в [13] схеме для  $y = y_j^0$ .

В силу базовых свойств температурного распределения  $Q(x, \psi_*^{(2)}, y)$  значение  $y_{el}^0$  в (2.30), на котором достигается оптимальная величина  $J_2(\psi_*^{(2)})$  квадратичного критерия качества, оказывается равной, подобно [19–21], величине  $y^* = y_2^0 = (Q_{0\max}, \alpha_{\min})$ . В таком случае  $J_2(\psi_*^{(2)})$  непосредственно находится из уравнения (2.30) при найденном значении  $\psi_*^{(2)}$ .

В итоге оптимальное программное управление определяется в виде (2.15) с подстановкой (2.13), (2.14) при  $\tilde{y} = y^* = y_2^0 = (\alpha_{\min}, Q_{0\max})$  и известных значениях  $A_{nij}$ ,  $\hat{A}_{nij}$ ;  $i, j = 1, 2$ .

4.2. Аналитическое конструирование оптимального регулятора. Согласно (3.7), (4.3), получаем линейный с нестационарными коэффициентами алгоритм оптимального управления с обратными связями по реализуемому состоянию  $\bar{Q}(t, \tilde{y}) = (\bar{Q}_n(t, \tilde{y}))$ ,  $n = 1, 2$ :

$$u(\bar{Q}(t, \tilde{y}), y^*, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 T_{n1}(t, y^*) T_{n2}(t, y^*) \bar{Q}_n(t, \tilde{y}) \varphi_n(\mu_n(y^*), x), \quad y^* = (Q_{0\max}, \alpha_{\min}) \quad (4.7)$$

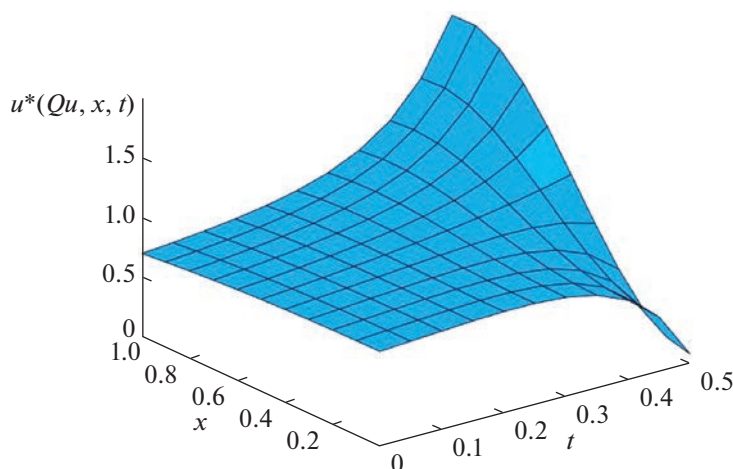
с известными функциями  $T_{n1}(y^*, t)$ ,  $T_{n2}(y^*, t)$  в (3.4), (3.5); значениями  $\psi_*^{(2)} = (\tilde{\psi}_1^*, \tilde{\psi}_2^*)$ , найденными в условиях  $N_1 = N = 2$  в (4.4), и собственными функциями  $\varphi_n(\mu_n(y^*), x) = \varphi_n(\mu_n(\alpha_{\min}), x)$ , определяемыми, согласно (4.4), (4.5), в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\mu_n(\alpha_{\min}), x) &= q_n(\alpha_{\min}) \cos(\mu_n(\alpha_{\min}), x), \quad n = 1, 2; \\ q_n(\alpha_{\min}) &= \frac{2\alpha_{\min}}{(\mu_n^2(\alpha_{\min}) + \alpha_{\min}^2 + \alpha_{\min}) \sin^2(\mu_n(\alpha_{\min}))}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $\mu_n(\alpha_{\min})$  — корни уравнения (4.5) при  $\alpha = \alpha_{\min}$ .

При наличии двух измерителей выхода объекта в точках  $x_{u1}$ ,  $x_{u2} \in [0, 1]$  получаем систему двух линейных уравнений (3.10) при  $\tilde{y} = y^*$ :

$$\begin{aligned} Q_u(x_{u1}, t, y^*) &= \bar{Q}_1(t, y^*) \varphi_1(\mu_1(y^*), x_{u1}) + \bar{Q}_2(t, y^*) \varphi_2(\mu_2(y^*), x_{u1}); \\ Q_u(x_{u2}, t, y^*) &= \bar{Q}_1(t, y^*) \varphi_1(\mu_1(y^*), x_{u2}) + \bar{Q}_2(t, y^*) \varphi_2(\mu_2(y^*), x_{u2}), \end{aligned} \quad (4.9)$$



**Рис. 2.** Управляющее воздействие с обратными связями на пространственно-временной плоскости в условиях реализации значений  $y = (\alpha_{\min}, Q_{0\max})$

разрешаемую относительно  $\bar{Q}_1(t, y^*)$ ,  $\bar{Q}_2(t, y^*)$  по известным значениям наблюдаемых величин  $Q_u(x_u, t, y^*)$ .

Подстановка решения системы уравнений (4.9) в (4.7) определяет искомый алгоритм синтеза оптимального регулятора с обратными связями по наблюдаемому выходу объекта в форме (3.13), где в данном примере  $x_u = (x_{u1}, x_{u2})$ ,  $\Phi_u^{-1}(y^*)$  –  $2 \times 2$ -матрица и матрица-столбец  $\varphi(y^*, x, t)$ , состоит из двух элементов при  $n = 1, 2$  в (3.12).

На рис. 1, 2 представлены некоторые расчетные результаты, полученные при  $Q^{**} = 0.5$ ;  $\alpha_{\min} = 0.3$ ;  $\alpha_{\max} = 0.7$ ;  $Q_{0\min} = 0$ ;  $Q_{0\max} = 0.15$ ;  $t_1 = 0.5$  при  $x_{u1} = 1$ ,  $x_{u2} = 0$ .

На рис. 1 показано результирующее состояние ансамбля траекторий оптимального процесса ( $1 - \alpha = \alpha_{\min}$ ;  $Q_0 = Q_{0\max}$ ;  $2 - \alpha = \alpha_{\max}$ ;  $Q_0 = Q_{0\min}$ ;  $\tilde{\Psi}_1^* = 2.12$ ;  $\tilde{\Psi}_2^* = -1.40$ ;  $\varepsilon_{\min}^{(2)} = 0.104$ ).

Рисунок 2 иллюстрирует в условиях реализации неизменных во времени значений  $\tilde{y} = y^* = (\alpha_{\min}, Q_{0\max})$  поведение управляющих воздействий  $u(Q_u(x_u, t, y^*), y^*, x, t)$  на пространственно-временной плоскости, изменяющихся во времени по алгоритму (3.13) в зависимости от текущих значений измеряемых сигналов обратной связи в точках  $x_{u1} = 1$ ,  $x_{u2} = 0$  с нестационарными коэффициентами передачи.

**Заключение.** Предлагаемые методы решения линейно-квадратичных задач робастной оптимизации пространственно-временного управления системами с распределенными параметрами параболического типа в условиях интервальной неопределенности параметрических характеристик объекта разработаны применительно к характерным для приложений оценкам целевых множеств конечных состояний ансамбля траекторий управляемой системы в равномерной метрике. Полученные уравнения субоптимальных регуляторов, сводимые к линейным алгоритмам обратной связи по измеряемому состоянию объекта с нестационарными коэффициентами передачи, характеризуются достигаемыми значениями критерия оптимальности, не превышающими их максимально возможные величины в исследуемых условиях неопределенности, и тем самым реализуют стратегию управления по принципу наилучшего гарантированного результата.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
2. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
3. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
4. Афанасьев В.Н. Управление неопределенными динамическими объектами. М.: Физматлит, 2008.

5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974.
6. *Пантелеев А.В., Бортакровский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2003.
7. *Рапопорт Э.Я.* Робастная параметрическая оптимизация динамических систем в условиях ограниченной неопределенности // *АиТ.* 1995. № 3. С. 86–96.
8. *Рапопорт Э.Я.* Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в линейно-квадратичных задачах управления системами с распределенными параметрами при равномерных оценках целевых множеств // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2021. № 3. С. 23–38.
9. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
10. *Рапопорт Э.Я.* Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000.
11. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2009.
12. *Плешивецкая Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2009. № 3. С. 22–33.
13. *Плешивецкая Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Пространственно-временное управление системами с распределенными параметрами в линейно-квадратичных задачах оптимизации с равномерными оценками целевых множеств // *Изв. РАН ТиСУ.* 2022. № 4. С. 49–65.
14. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк. 2003.
15. *Валеев Г.К., Жаутыков О.А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1974.
16. *Коваль В.А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. Саратов: Саратовский гос. техн. ун-т, 1997.
17. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
18. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал-Пресс, 2002.
19. *Рапопорт Э.Я.* Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Metallurgy, 1993.
20. *Rapoport E., Pleshivtseva Yu.* Optimal Control of Induction Heating Processes. L., N.Y.: CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2007.
21. *Рапопорт Э.Я., Плешивецкая Ю.Э.* Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. М.: Наука, 2012.
22. *Рапопорт Э.Я., Плешивецкая Ю.Э.* Метод полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 2021.
23. *Рапопорт Э.Я.* Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2005.

---

## СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

---

УДК 519.86

### ОРГАНИЗАЦИЯ ПОДСИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

© 2023 г. М. Г. Фуругян

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

*e-mail: rtscas@yandex.ru*

Поступила в редакцию 27.06.2022 г.

После доработки 12.08.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Рассматривается задача оптимального расположения модулей контроля в вычислительной системе реального времени. Данная задача формулируется в виде минимаксной. Исследуются различные структуры графа частичного порядка выполнения прикладных модулей: последовательная цепочка, несколько независимых последовательных цепочек, дерево, ориентированное от корня к листьям, дерево, ориентированное от листьев к корню, произвольный граф без циклов. Разработаны алгоритмы построения оптимальной расстановки модулей контроля.

DOI: 10.31857/S000233882301002X, EDN: IZTYEW

**Введение.** В настоящее время вычислительные системы реального времени применяются в различных областях деятельности человека: в гражданском и военном строительстве, при испытаниях и эксплуатации самолетов и ракет, при проектировании и функционировании производственных и транспортных систем, в нефте- и газодобывающих отраслях. Одно из основных требований, предъявляемых к таким системам, заключается в том, что все вычисления должны производиться при заданных временных ограничениях. Для решения этой задачи могут быть использованы различные методы построения оптимальных расписаний [1–4].

В [5–7] разработана методика проверки выполнения ограничений реального времени, заключающихся в том, что каждая работа должна выполняться в заданном директивном интервале. Проведенные исследования выполнены для многоядерной вычислительной системы реального времени и основаны на построении имитационной модели с использованием обобщенных конечных автоматов с остановкой таймера. С помощью этой модели строится временная диаграмма работы системы, позволяющая осуществить непосредственную проверку выполнения ограничений реального времени. В [8] предложен псевдополиномиальный алгоритм решения задачи построения оптимального по быстродействию расписания исполнения заданий с логическими условиями предшествования. В этой задаче для каждого задания дан список его непосредственных предшественников, а также число завершенных непосредственных предшественников, необходимое для начала его выполнения. Задача сведена к циклической игре. В [9, 10] некоторые задачи планирования работ сведены к минимаксным задачам.

Помимо временных ограничений на выполняемые вычисления, при создании систем реального времени необходимо учитывать возможность возникновения различных сбоев и проводить проверку правильности работы прикладных модулей. Для этого в систему кроме прикладных модулей вводят модули контроля — специальные программы, отслеживающие сбои и ошибки и сохраняющие промежуточную информацию. Так, например, при проведении летных испытаний некоторые модули контроля выполняют проверку того, что вычисляемые параметры принадлежат области допустимых значений и удовлетворяют различным соотношениям. Это позволяет в случае необходимости рестарта системы не выполнять все вычисления заново, а использовать данные, сохраненные модулями контроля. Таким образом, наличие модулей контроля может существенно улучшить надежность работы системы и уменьшить временные издержки, вызванные возникновением сбоев и ошибок, что крайне важно для систем жесткого реального времени.

При разработке вычислительных систем реального времени возникает задача оптимизации расположения модулей контроля среди прикладных модулей. Эта задача исследовалась ранее ря-

дом авторов с использованием вероятностных методов. При этом предполагается, что известны вероятности возникновения сбоев и ошибок. В [11, 12] допускалось, что вероятность возникновения ошибки в одном и том же месте системы не является постоянной и может изменяться после рестарта. В [13] для многопроцессорной системы определяется такое расположение модулей контроля, при котором вероятность выполнить все прикладные модули до выхода из строя всех процессоров максимальна. В [14] определяется понятие зоны рестарта — совокупность прикладных модулей, которые следует выполнить заново в случае обнаружения ошибки некоторым модулем контроля. В предположении, что известно расположение модулей контроля, строится минимальная зона рестарта. В [15] решается задача расположения модулей контроля с целью минимизировать математическое ожидание суммарного времени, затраченного на выполнение всех модулей (включая их повторное выполнение при рестарте). Рассмотрены различные виды графа частичного порядка выполнения прикладных модулей.

В настоящей статье рассматривается вычислительная система реального времени, состоящая из прикладных модулей, на множестве которых задано отношение частичного порядка в виде ориентированного графа без циклов. Предполагается, что число модулей контроля фиксировано, и временем их выполнения можно пренебречь, поскольку оно существенно меньше времени выполнения прикладных модулей. Каждый модуль контроля располагается непосредственно после некоторого прикладного модуля. При обнаружении ошибки каким-либо модулем контроля определяется область повторного выполнения прикладных модулей. Эта область состоит из одного или нескольких путей графа, ведущих в модуль контроля, обнаруживший ошибку. Требуется таким образом расположить модули контроля, чтобы максимально возможная длина такого пути была минимальной. Данная задача формулируется в виде минимаксной задачи. Исследуются различные структуры графа частичного порядка выполнения прикладных модулей. Разработаны алгоритмы построения оптимальной расстановки модулей контроля.

**1. Постановка задачи.** Задан набор прикладных модулей  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ ,  $N \geq 2$ , подлежащих выполнению на вычислительной системе. Число процессоров в системе может быть произвольным. (Как будет показано ниже, на решение рассматриваемой задачи это не влияет.) Каждый модуль  $w_i$  выполняется без прерываний и переключений с одного процессора на другой, а длительность его выполнения равна  $t_i = t(w_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . На множестве  $W$  задано отношение частичного порядка выполнения прикладных модулей в виде ориентированного графа без циклов  $G = (W, A)$ , где  $W$  — множество узлов,  $A$  — множество ориентированных дуг. Если  $(w_i, w_j) \in A$ , то начало исполнения модуля  $w_j$  возможно только после завершения модуля  $w_i$ . В этом случае будем также использовать обозначение  $w_i \rightarrow w_j$ . В цепочке

$$w_{i_1} \rightarrow w_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow w_{i_{n-1}} \rightarrow w_{i_n} \quad (1.1)$$

модули  $w_{i_j}$  при  $j < p$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ , являются предшественниками модуля  $w_{i_p}$ , а при  $j > p$ ,  $j = \overline{2, n}$ , — его последователями. Кроме того, модуль  $w_{i_j}$  выступает непосредственным предшественником  $w_{i_{j+1}}$ , а  $w_{i_{j+1}}$  — непосредственным последователем  $w_{i_j}$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ . Введем обозначения:

$$P(w_i) = \{w_j \in W : w_j \rightarrow w_i\}, \quad Q(w_i) = \{w_j \in W : w_i \rightarrow w_j\}, \\ P_0 = \{w_i \in W : P(w_i) = \emptyset\}, \quad Q_0 = \{w_i \in W : Q(w_i) = \emptyset\},$$

т.е.  $P(w_i)$  и  $Q(w_i)$  — соответственно все непосредственные предшественники и непосредственные последователи прикладного модуля  $w_i$ , а  $P_0$  и  $Q_0$  — прикладные модули, не имеющие соответственно непосредственных предшественников и непосредственных последователей.

Помимо прикладных модулей в системе имеется  $K$  модулей контроля,  $K \leq N$ . Каждый модуль контроля присоединяется к некоторому прикладному модулю и выполняется сразу же после завершения этого прикладного модуля. К каждому прикладному модулю присоединяется не более одного модуля контроля. Предполагается, что временем выполнения модуля контроля можно пренебречь, поскольку оно существенно меньше времени выполнения прикладных модулей. Пусть  $\overline{W} = \{w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_K}\}$  — множество всех прикладных модулей, к которым присоединены модули контроля. Будем называть его расстановкой модулей контроля или просто расстановкой.

Модуль контроля после своего выполнения сигнализирует об отсутствии или наличии ошибки. В первом случае вычисления продолжают по ранее построенному расписанию. В случае

обнаружения модулем контроля ошибки необходимо повторить (инициировать рестарт) выполнение некоторых прикладных модулей следующим образом.

Предположим, что модулем контроля, присоединенным к некоторому прикладному модулю  $w_{i_n} \in \bar{W}$ , была обнаружена ошибка. В графе  $G$  рассматриваются все ориентированные пути (цепочки)  $\pi$  вида (1.1), в которых  $w_{i_j} \notin \bar{W}$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ . Кроме того, либо  $w_{i_1} \in P_0$ , либо модуль  $w_{i_1}$  имеет одного или нескольких предшественников, и если  $w_{i_{j-1}} \rightarrow w_{i_j}$ , то  $w_{i_{j-1}} \in \bar{W}$ . Иными словами, указанный путь начинается с прикладного модуля, который либо не имеет непосредственных предшественников, либо к каждому из его непосредственных предшественников присоединен модуль контроля, а все остальные прикладные модули этого пути, кроме  $w_{i_n}$  ( $w_{i_n} \in \bar{W}$ ), не являются таковыми. Будем называть такие пути  $\pi$  путями (или цепочками) рестарта. В случае обнаружения ошибки модулем контроля, присоединенным к прикладному модулю  $w_{i_n}$ , необходимо для каждой цепочки рестарта вида (1.1) повторить выполнение всех ее прикладных модулей. Длиной цепочки рестарта  $\pi$  вида (1.1) будем называть величину

$$t(\pi) = \sum_{j=1}^n t_{i_j}. \quad (1.2)$$

Пусть  $\Pi(w_{i_n})$  – множество всех путей рестарта  $\pi$  вида (1.1) и пусть

$$t(\Pi(w_{i_n})) = \max_{\pi \in \Pi(w_{i_n})} t(\pi),$$

т.е.  $t(\Pi(w_{i_n}))$  – это длина максимального из указанных путей. Допустимой расстановкой будем называть такую расстановку  $\bar{W}$ , при которой к каждому прикладному модулю из  $Q_0$  присоединен модуль контроля, т.е.

$$Q_0 \subseteq \bar{W}. \quad (1.3)$$

Отметим, что при  $K < |Q_0|$  допустимой расстановки не существует. Если расстановка не является допустимой, то контроль вычислений не может быть выполнен полностью. Поэтому всюду в дальнейшем будем предполагать, что  $K \geq |Q_0|$  и что к каждому прикладному модулю из  $Q_0$  присоединен модуль контроля.

Пусть  $\Omega$  – множество всех допустимых расстановок. Задача заключается в выборе допустимой расстановки  $\bar{W}$ , для которой величина

$$\max_{w \in W} t(\Pi(w))$$

минимальна. Иными словами, требуется определить величину

$$T_{opt} = \min_{W \in \Omega} \max_{w \in W} t(\Pi(w)) \quad (1.4)$$

и допустимую расстановку  $\bar{W}$ , на которой реализуется указанный минимакс. Такую расстановку будем называть оптимальной. Таким образом, при оптимальной расстановке минимизируется максимальная длина (1.2) цепочки рестарта.

**Замечание 1.** В данной постановке задачи при любом числе процессоров время выполнения рестарта в случае обнаружения ошибки не может быть меньше длины максимальной цепочки рестарта. Поэтому представленная минимаксная постановка актуальна независимо от числа процессоров в системе.

**Замечание 2.** В данной постановке задачи предполагается, что в случае обнаружения ошибки необходимо повторно выполнить прикладные модули, принадлежащие описанным выше цепочкам рестарта, независимо от того, какой результат выдали другие модули контроля.

**2. Построение оптимальной расстановки.** Предлагаются методы построения оптимальной расстановки для случаев, когда граф  $G$  представляет собой последовательную цепочку прикладных модулей, несколько независимых последовательных цепочек, дерево, ориентированное от листьев к корню, дерево, ориентированное от корня к листьям, и произвольный граф без циклов.

**2.1. Последовательная цепочка.** Допустим, что граф  $G$  является последовательной цепочкой  $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \dots \rightarrow w_N$ . В этом случае  $Q_0 = \{w_N\}$  и в силу (1.3) любая допустимая расста-

новка имеет вид  $\overline{W} = \{w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_{K-1}}, w_{i_K} = w_N\}$ . Без ограничения общности можно считать, что  $K \geq 2$  и тогда  $\Omega = \{\overline{W} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{K-1} < i_K = N\}$ . Введем обозначения:

$$I_k = \{i_{k-1} + 1, \dots, i_k\}, \quad T_k = \sum_{i \in I_k} t_i, \quad (2.1)$$

где  $k = \overline{1, K}$ ,  $i_0 = 0$ . В соответствии с (1.4) задача заключается в поиске величины

$$T_{opt} = \min_{\overline{W} \in \Omega} \max_{k=\overline{1, K}} T_k \quad (2.2)$$

и расстановки  $\overline{W}$ , реализующей указанный минимакс. Ниже предлагаются два алгоритма решения этой задачи — точный (алгоритм 1) и приближенный (алгоритм 2).

Алгоритм 1 основан на переборе всех допустимых расстановок, число которых составляет  $C_{N-1}^{K-1}$ . Алгоритм перебора базируется на том, что величины  $i_1, i_2, \dots, i_K$  могут принимать следующие значения:  $i_K = N$ ,  $i_{K-1} = K-1$ ,  $i_K - 1$ ,  $i_{K-2} = K-2$ ,  $i_{K-1} - 1$ , ...,  $i_1 = 1$ ,  $i_2 - 1$ . Для каждого набора  $i_1, i_2, \dots, i_K$  вычисляются величины  $T_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , согласно (2.1), и величина  $T_{opt}$ , согласно (2.2). Расстановка  $\overline{W}$ , реализующая минимакс (2.2), будет оптимальной.

Определим вычислительную сложность алгоритма 1. Для каждой расстановки при вычислении величин  $T_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , требуется выполнить  $O(N)$  операций, а для вычисления максимальной из величин  $T_k - O(K)$  операций. Таким образом, вычислительная сложность алгоритма 1 составляет  $O(C_{N-1}^{K-1}(N+K))$  или  $O((N-K+1) \cdots (N-1)(N+K)/(K-1)!)$ . Поскольку  $K \leq N$ , то при фиксированном  $K$  сложность алгоритма 1 составляет  $O(N^K)$ , т.е. алгоритм 1 имеет полиномиальную вычислительную сложность.

Далее предлагается приближенный алгоритм (алгоритм 2). Введем обозначения:

$$T_1^* = \left( \sum_{i=1}^N t_i \right) / K, \quad (2.3)$$

$$T_2^* = \max_{i=\overline{1, N}} t_i; \quad T^* = \max(T_1^*, T_2^*).$$

Каждая из величин  $T_1^*$ ,  $T_2^*$  и  $T^*$  является нижней оценкой величины  $T_{opt}$ , т.е.

$$T_{opt} \geq T^*. \quad (2.4)$$

Действительно, если  $T_{opt} < T_1^*$ , то существует допустимая расстановка  $\overline{W} \in \Omega$ , для которой  $T_k < T_1^*$  при всех  $k = \overline{1, K}$  и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^K T_k < KT_1^*, \quad \sum_{i=1}^N t_i < KT_1^*.$$

Откуда следует, что

$$\left( \sum_{i=1}^N t_i \right) / K < T_1^*,$$

что противоречит (2.3). Следовательно,

$$T_{opt} \geq T_1^*. \quad (2.5)$$

Кроме того, для любой допустимой расстановки  $\overline{W}$  при некотором  $k$ ,  $1 \leq k \leq K$ , справедливо неравенство  $T_2^* \leq T_k$ . Следовательно,

$$T_{opt} \geq T_2^*. \quad (2.6)$$

Из (2.5), (2.6) следует (2.4).

Алгоритм 2 минимизирует максимальное отклонение величин  $T_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , от  $T^*$ , т.е. находит

$$\min_{\overline{W} \in \Omega} \max_{k=\overline{1, K}} |T_k - T^*|$$

и расстановку  $\overline{W}$ , реализующую этот минимакс.

Алгоритм 2.

Шаг 1. Положить  $k = K, i_k = N$ .

Шаг 2. Если  $t_{i_k} \geq T^*$ , то положить  $I_k = \{i_k\}, l = i_k - 1$ , перейти на шаг 5. В противном случае (т.е. если  $t_{i_k} < T^*$ ) перейти на шаг 3.

Шаг 3. Определить номер  $i_0, 1 < i_0 \leq i_k$ , для которого

$$\sum_{i=i_0}^{i_k} t_i \leq T^*, \quad \sum_{i=i_0-1}^{i_k} t_i \geq T^*.$$

Если такой номер существует, то перейти на шаг 4, в противном случае — на шаг 6.

Шаг 4. Положить

$$\Delta_1 = T^* - \sum_{i=i_0}^{i_k} t_i, \quad \Delta_2 = \sum_{i=i_0-1}^{i_k} t_i - T^*.$$

Если  $\Delta_1 \leq \Delta_2$ , то положить  $l = i_0, I_k = \{i_0, \dots, i_k\}$ . Если  $\Delta_1 > \Delta_2$ , то положить  $l = i_0 - 1, I_k = \{i_0 - 1, \dots, i_k\}$ .

Шаг 5. Если  $l > 1$  и  $k > 1$ , то положить  $k = k - 1, i_k = l$ , перейти на шаг 2. В противном случае (т.е. если  $l = 1$  или  $k = 1$ ) перейти на шаг 6.

Шаг 6. Положить

$$I_1 = \{1, 2, \dots, N\} \setminus \bigcup_{k=2}^K I_k.$$

Шаг 7. Если  $k \geq 2$ , то  $(K - k)$  неиспользованных модулей контроля включить в максимальные по длине цепочки рестарта с помощью процедуры включения модуля контроля в цепочку рестарта, описание которой содержится в разд. 2.2.

Шаг 8. Решением задачи является допустимая расстановка  $\overline{W} = \{w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_N}\}$ . Алгоритм завершен.

Поскольку для каждого  $k$  выполняется  $O(N)$  операций, то сложность алгоритма 2 составляет  $O(KN)$ . Следовательно, алгоритм 2 имеет полиномиальную вычислительную сложность. Для определения отклонения величины

$$T = \max_{k=1, K} T_k$$

от  $T_{opt}$  применима оценка

$$T - T_{opt} \leq T - T^*, \quad (2.7)$$

которая может быть вычислена после работы алгоритма 2.

2.2. Несколько последовательных цепочек. Предполагается, что граф  $G$  состоит из  $p$  независимых (непересекающихся) цепочек:

$$w_{i1} \rightarrow w_{i2} \rightarrow \dots \rightarrow w_{iN_i}, \quad i = \overline{1, p}. \quad (2.8)$$

В этом случае  $P_0 = \{w_{i1}, i = \overline{1, p}\}$ ,  $Q_0 = \{w_{iN_i}, i = \overline{1, p}\}$ , а в силу (1.3)  $\{w_{iN_i}, i = \overline{1, p}\} \subseteq \overline{W}$  и  $K \geq p$ . В приводимом ниже описании приближенного алгоритма построения оптимальной расстановки используется следующая процедура.

*Процедура включения модуля контроля в цепочку рестарта.* Пусть в цепочку рестарта (1.1) требуется включить дополнительный модуль контроля. Согласно (1.4), этот модуль контроля должен разбивать указанную цепочку на две цепочки так, чтобы длина максимальной из них была бы минимально возможной. Для этого вычисляются величины

$$\tau^* = \left( \sum_{j=1}^n t(w_{i_j}) \right) / 2, \quad S(r) = \sum_{j=1}^r t(w_{i_j}), \quad \Delta(r) = |\tau^* - S(r)|, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Далее определяется номер  $r_0, 1 \leq r_0 \leq n$ , при котором величина  $\Delta(r)$  принимает минимальное значение, т.е.

$$\Delta(r_0) = \min_{r=1, n} \Delta(r).$$

Дополнительный модуль контроля присоединяется к прикладному модулю  $w_{i_0}$ . Процедура завершена.

Перейдем к описанию алгоритма построения оптимальной расстановки для случая нескольких независимых цепочек.

Алгоритм 3.

Шаг 1. Присоединить модули контроля к прикладным модулям  $w_{iN_i}$ ,  $i = \overline{1, p}$ .

Шаг 2. Положить  $l = K - p$ . Если  $l = 0$ , алгоритм завершен. Если  $l > 0$ , то  $l$  раз повторять шаг 3.

Шаг 3. Среди всех цепочек рестарта вида (1.1), содержащих более одного прикладного модуля ( $n > 1$ ), выбрать цепочку максимальной длины и выполнить для нее процедуру включения модуля контроля.

Алгоритм завершен.

Для определения вычислительной сложности алгоритма 3 отметим, что сложность шага 1 составляет  $O(p)$ , сложность вычисления длин цепочек рестарта и нахождения максимальной из них составляет

$$O\left(\sum_{i=1}^p N_i\right),$$

а сложность процедуры включения модуля контроля составляет

$$O(\max_{i=1, p} N_i)$$

и повторяется она  $K - p$  раз. Следовательно, сложность алгоритма 3 составляет

$$O\left(\left(\sum_{i=1}^p N_i\right)(K - p)\right),$$

т.е. алгоритм 3 имеет полиномиальную вычислительную сложность.

Для оценки точности алгоритма 3 может быть использовано неравенство (2.7), где  $T$  — длина максимальной цепочки рестарта, полученной после работы алгоритма, а

$$T^* = \max \left[ \left( \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{N_i} t(w_{ij}) \right) / K, \max_{i=1, p, j=1, N_i} t(w_{ij}) \right].$$

Аналогичный подход применим к П-сетям, т.е. к сетям, в которых помимо цепочек (2.8) есть еще два узла  $w_0$  и  $w_N$ , связанные с узлами  $w_{i1}$  и  $w_{iN_i}$  отношениями предшествования  $w_0 \rightarrow w_{i1}$  и  $w_{iN_i} \rightarrow w_N$ ,  $i = \overline{1, p}$ . В этом случае  $P_0 = \{w_0\}$ ,  $Q_0 = \{w_N\}$ ,  $K \geq 1$ .

Приведем еще один приближенный алгоритм, основанный на использовании алгоритма 2.

Алгоритм 4.

Шаг 1. Присоединить модули контроля к прикладным модулям  $w_{iN_i}$ ,  $i = \overline{1, p}$ .

Шаг 2. Вычислить длины  $T_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ , всех цепочек вида (2.8).

Шаг 3. Каждой цепочке вида (2.8) дополнительно выделить  $k_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ , модулей контроля, где  $k_i$  вычисляется по следующим правилам:

а)  $k_i \leq N_i - 1$ ;

б) величины  $k_i$  пропорциональны величинам  $T_i$ ;

в)  $\sum_{i=1}^p k_i = K - p$ .

Шаг 4. В каждую цепочку вида (2.8) дополнительно включить  $k_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ , модулей контроля, применяя алгоритм 2. Алгоритм завершен.

Сложность алгоритма 4 составляет

$$O\left(\sum_{i=1}^p k_i N_i\right),$$

или

$$O\left(\left(\sum_{i=1}^p N_i\right)(K-p)\right),$$

т.е. алгоритм 4 имеет полиномиальную вычислительную сложность.

Оценка точности вычисляется с помощью неравенства (2.7) при

$$T^* = \max_{i=1, p} \left( T_i/k_i, \max_{j=1, N_i} t(w_{ij}) \right).$$

**2.3. Дерево, ориентированное от листьев к корню.** Граф  $G$  имеет структуру дерева, ребра которого ориентированы от листьев к корню  $w_N$ . В данном случае  $Q_0 = \{w_N\}$ ,  $P_0$  — это множество всех листьев дерева. Каждый узел  $w \in W$  дерева имеет два параметра: длительность  $t(w)$  выполнения прикладного модуля  $w$  (заданная величина) и расстояние  $s(w)$  (длина ориентированного пути) от  $w$  до ближайшего модуля контроля (вычисляется в ходе работы алгоритма). Приведем общее описание приближенного алгоритма построения оптимальной расстановки, а затем более подробно остановимся на каждом шаге алгоритма.

Алгоритм 5.

Шаг 1. Присоединить модуль контроля к корню дерева  $w_N$ .

Шаг 2. Для каждого узла  $w \in W$  вычислить  $s(w)$ .

Шаг 3. Выполнять шаги 3.1, 3.2 ( $K-1$ ) раз.

Шаг 3.1. Найти максимальную цепочку рестарта, состоящую более чем из одного узла, и выполнить процедуру включения в нее модуля контроля. Пусть модуль контроля был присоединен к прикладному модулю  $w_{i_0} \in W$ .

Шаг 3.2. Для каждого узла  $w$  цепочек рестарта, ведущих к узлу  $w_{i_0}$ , пересчитать величину  $s(w)$ .

Алгоритм завершен.

В результате работы алгоритма 5 будет построена расстановка  $\overline{W}$  и вычислена величина

$$T = \max_{w \in W} s(w).$$

Приведем пояснения к шагам алгоритма 5.

1. Поскольку  $Q_0 = \{w_N\}$ , то модуль контроля присоединяется к прикладному модулю  $w_N$ .

2. Величины  $s(w)$  для  $w \in W$  вычисляются по следующим правилам:  $s(w_N) = t(w_N)$ ; если  $\overline{w} \in P(w)$ , то положить  $s(\overline{w}) = s(w) + t(\overline{w})$ .

3. После выполнения шага 2 величина  $s(w)$  равна расстоянию от  $w$  до ближайшего модуля контроля.

3.1. Длина максимальной цепочки рестарта — это максимум величин  $s(w)$  по всем  $w \in W$ , для которых либо  $w \in P_0$ , либо  $\overline{w} \in \overline{W}$  для всех  $\overline{w} \in P(w)$ . Сама цепочка рестарта однозначно строится, следуя по ребрам дерева от  $w$  до ближайшего модуля контроля.

3.2. а) Положить  $s(w) = s(w) - s(w_{i_0}) + t(w_{i_0})$  для каждого узла  $w$ ,  $w \neq w_{i_0}$ , цепочек рестарта, ведущих к узлу  $w_{i_0}$ .

б) Положить  $s(w_{i_0}) = t(w_{i_0})$ .

Сложность алгоритма 5 составляет  $O(NK)$ , т.е. алгоритм имеет полиномиальную вычислительную сложность. Точность алгоритма 5 определяется с помощью оценки (2.7), где

$$T^* = \max \left( \left( \sum_{i=1}^N t(w_i) \right) / K, \max_{i=1, N} t(w_i) \right). \quad (2.9)$$

**2.4. Дерево, ориентированное от корня к листьям.** Граф  $G$  имеет структуру дерева, ребра которого ориентированы от корня  $w_N$  к листьям  $V$ ,  $V \subseteq W$ . В этом случае  $P_0 = \{w_N\}$ ,  $Q_0 = V$ ,  $K \geq |V|$ . Поэтому к каждому листу присоединяется модуль контроля, т.е.  $V \subseteq \overline{W}$ . Каждый узел  $w \in W$  имеет три параметра:  $t(w)$ ,  $\sigma(w)$  и  $w'(w)$ . Как и прежде,  $t(w)$  — длительность выполнения модуля  $w$ . Значения параметров  $\sigma(w)$  и  $w'(w)$  определяются следующим образом. Если

$w \notin \overline{W}$ , то  $\sigma(w)$  — это длина максимальной цепочки  $w \rightarrow w_{i_1} \rightarrow \dots \rightarrow w_{i_n} \rightarrow v$  при  $n > 0$ , где  $v \in \overline{W}$ , а  $w_{i_j} \notin \overline{W}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , т.е.  $\sigma(w) = t(w) + t(w_{i_1}) + \dots + t(w_{i_n}) + t(v)$ , и  $w'(w) = w_{i_1}$ . При  $n = 0$  указанная цепочка имеет вид  $w \rightarrow v$ , и в этом случае  $\sigma(w) = t(w) + t(v)$ ,  $w'(w) = v$ . Если  $w \in \overline{W}$ , то  $\sigma(w) = t(w)$  и  $w'(w) = w$ . Значения параметров  $\sigma(w)$  и  $w'(w)$  вычисляются в ходе работы алгоритма.

Перед тем, как дать общее описание приближенного алгоритма построения оптимальной расстановки, остановимся на некоторых его частях. Как отмечено выше, все листья  $V$  дерева  $G$  включаются в  $\overline{W}$ , поскольку они не имеют непосредственных последователей. Вершины  $W$  дерева  $G$  разбиваются на непересекающиеся подмножества (уровни)  $W_1, W_2, \dots, W_M$ ,  $W_i \cap W_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ :

$$\bigcup_{i=1}^M W_i = W$$

следующим образом:  $W_1 = \{w_N\}$ ,

$$W_m = \bigcup_{w \in W_{m-1}} Q(w), \quad m = \overline{2, M}$$

(т.е. каждый узел в  $W_m$  является непосредственным последователем некоторого узла из  $W_{m-1}$ ). Отметим, что  $W_M \subseteq V$  (т.е. каждый узел последнего уровня выступает листом).

Значения параметров  $\sigma(w)$  и  $w'(w)$  узлов  $w$  вычисляются следующим образом. Для  $w \in \overline{W}$  полагаем

$$\sigma(w) = t(w), \quad w'(w) = w. \quad (2.10)$$

Отметим, что при этом будут рассчитаны значения параметров  $\sigma(w)$  и  $w'(w)$  для всех узлов  $w \in W_M$ . Пусть далее значения параметров  $\sigma(w)$  и  $w'(w)$  вычислены для всех узлов  $w \in W_m$ ,  $1 < m \leq M$ . Для каждого узла  $w \in W_{m-1} \setminus V$  рассчитываем

$$\max_{w \in Q(w)} \sigma(\bar{w}).$$

Пусть этот максимум достигается при  $\bar{w} = \bar{w}_0$ . Тогда полагаем

$$\sigma(w) = \sigma(\bar{w}_0) + t(w), \quad w'(w) = \bar{w}_0. \quad (2.11)$$

Перейдем к описанию приближенного алгоритма построения оптимальной расстановки. Алгоритм 6.

Шаг 1. Включить в  $\overline{W}$  все листья  $V$  дерева  $G$ .

Шаг 2. Вершины  $W$  разбить на уровни  $W_1, W_2, \dots, W_M$ .

Шаг 3. Вычислить величины  $\sigma(w)$  и  $w'(w)$  для всех  $w \in W$  по формулам (2.10), (2.11).

Выполнить шаги 4–8 ( $K - |V|$ ) раз.

Шаг 4. Выбрать узел  $w_{i_1} \in W \setminus \overline{W}$  с максимальной величиной  $\sigma(w)$ , что однозначно определяет цепочку рестарта максимальной длины

$$w_{i_1} \rightarrow w_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow w_{i_n}, \quad w_{i_n} \in \overline{W}, \quad w_{i_j} \notin \overline{W}, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad (2.12)$$

которая строится с помощью значений  $w'(w_{i_j})$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ .

Шаг 5. Выполнить процедуру включения модуля контроля в цепочку (2.12). Пусть модуль контроля был присоединен к прикладному модулю  $w_{i_r}$ ,  $1 \leq r < n$ .

Шаг 6. Включить  $w_{i_r}$  в  $\overline{W}$ .

Шаг 7. Положить  $\sigma(w_{i_r}) = t(w_{i_r})$ ,  $w'(w_{i_r}) = w_{i_r}$ .

Шаг 8. Вычислить заново по формулам (2.10), (2.11) величины  $\sigma(w_{i_j})$  и  $w'(w_{i_j})$  для узлов  $w_{i_{r-1}}, \dots, w_{i_1}$  в указанной последовательности.

Таблица 1. Параметры дуг сети  $G$ 

| Дуга                           | $L$ | $U$ | $C$       |
|--------------------------------|-----|-----|-----------|
| $(w_i, w_j) \neq (\bar{w}, w)$ | 0   | 1   | $-t(w_i)$ |
| $(\bar{w}, w)$                 | 1   | 1   | 0         |

Шаг 9. Искомой расстановкой является  $\bar{W}$ . Положить  $T = \max_{w \in \bar{W}} \sigma(w)$ .

Алгоритм завершен.

Вычислительная сложность шагов 1–9 составляет  $O(N)$ . Следовательно, сложность алгоритма 6 есть  $O(N(K - |V|))$ , т.е. алгоритм 6 имеет полиномиальную вычислительную сложность. Точность алгоритма 6 определяется с помощью оценки (2.7), где  $T^*$  вычисляется по формуле (2.9).

2.5. Произвольный граф. В этом разделе предполагается, что  $G$  – произвольный ориентированный граф, не содержащий циклов. Как и раньше, к каждому прикладному модулю  $w \in Q_0$  прикрепляется модуль контроля. На каждой итерации предлагаемого ниже алгоритма определяется самая длинная цепочка рестарта, в которую затем включается модуль контроля. Для нахождения такой цепочки будет использована следующая модификация алгоритма дефекта [16, 17], определяющего поток минимальной стоимости в сети.

Пусть в графе  $G$  выделены два узла  $w \in W \setminus \bar{W}$  и  $\bar{w} \in \bar{W}$  и требуется найти самую длинную цепочку рестарта:

$$w \rightarrow w_{i_1} \rightarrow w_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow w_{i_n} \rightarrow \bar{w}, \quad (2.13)$$

где  $w_{i_j} \notin \bar{W}$ ,  $j = 1, n$ . Будем рассматривать граф  $G$  как потоковую сеть с источником  $w$  и стоком  $\bar{w}$ . Добавим к сети  $G$  возвратную дугу  $(\bar{w}, w)$ . Припишем каждой дуге  $(w_i, w_j) \in A$  графа  $G$  три параметра: нижнюю границу  $L(w_i, w_j)$  потока по дуге, верхнюю границу  $U(w_i, w_j)$  потока по дуге и стоимость  $C(w_i, w_j)$  единицы потока по дуге. Значения параметров дуг сети  $G$  приведены в табл. 1.

Алгоритм дефекта, работая с параметрами, указанными в таблице, построит самый длинный ориентированный путь из  $w$  в  $\bar{w}$  [16, 17]. Этот путь определяется теми дугами (кроме возвратной дуги), поток по которым равен единице. Однако такой путь, помимо  $\bar{w}$ , может содержать и другие узлы из  $\bar{W}$ , и в этом случае он не будет цепочкой рестарта. Чтобы избежать этого, предлагается использовать следующую простую модификацию алгоритма дефекта. При построении увеличивающего пути из  $w$  в  $\bar{w}$  нельзя использовать узлы из  $\bar{W}$ . А в остальном алгоритм работает так же, как алгоритм дефекта. Перейдем к описанию приближенного алгоритма построения оптимальной расстановки.

Алгоритм 7

Шаг 1. Включить  $Q_0$  в  $\bar{W}$ .

Выполнять шаги 2–4  $(K - |Q_0|)$  раз.

Шаг 2. Для каждой пары узлов  $w, \bar{w}$  ( $w \notin \bar{W}$ ,  $\bar{w} \in \bar{W}$ , кроме того, либо  $w \in P_0$ , либо  $w$  имеет одного или нескольких предшественников, если  $w' \rightarrow w$ , то  $w' \in \bar{W}$ ) с помощью модифицированного алгоритма дефекта найти самый длинный путь (2.13). Этот путь является самой длинной цепочкой рестарта.

Шаг 3. Применить процедуру включения модуля контроля в построенную на шаге 3 цепочку рестарта. Пусть в результате этой процедуры модуль контроля был прикреплен к прикладному модулю  $w_{i_j}$ .

Шаг 4. Добавить  $w_{i_j}$  к  $\bar{W}$ .

Шаг 5. Расстановка  $\bar{W}$  построена. С помощью процедуры, описанной на шаге 2, вычислить величину

$$T(\bar{W}) = \max_{w \in \bar{W}} t(\Pi(w)).$$

Алгоритм завершен.

В результате работы алгоритма будет построена расстановка  $\overline{W}$ , являющаяся приближением к оптимальной. Вычислительная сложность отдельных шагов алгоритма следующая: шаг 1 –  $O(N)$ ; шаг 2 –  $O(|A|^2 KN)$ , где  $|A|$  – число дуг в сети  $G$ ; шаг 3 –  $O(N)$ ; шаг 4 –  $O(1)$ . Таким образом, сложность алгоритма 7 составляет  $O(|A|^2 KN(K - |Q_0|))$ , т.е. алгоритм 7 имеет полиномиальную вычислительную сложность. Пусть  $T_{\max}$  – длина самого длинного пути в графе  $G$ . Пусть далее

$$T^* = \max(T_{\max}/(K - |Q_0|), \max_{i=1,n}(t(w_i))),$$

если  $K > |Q_0|$ , и  $T^* = T_{\max}$ , если  $K = |Q_0|$ . Для определения отклонения величины  $T(\overline{W})$  от  $T_{opt}$  применима оценка  $T(\overline{W}) - T_{opt} \leq T(\overline{W}) - T^*$ , которая может быть вычислена после работы алгоритма.

**Заключение.** Задача оптимального расположения модулей контроля в вычислительной системе реального времени сформулирована в виде минимаксной задачи. Исследованы различные структуры графа частичного порядка выполнения прикладных модулей: последовательная цепочка, несколько независимых последовательных цепочек, дерево, ориентированное от листьев к корню, дерево, ориентированное от корня к листьям, произвольный граф без циклов. Разработаны точные и приближенные алгоритмы построения оптимальной расстановки модулей контроля. Получены оценки сложности и оценки точности исследованных алгоритмов. Показано, что эти алгоритмы имеют полиномиальную вычислительную сложность.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М. Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1984.
2. Brucker P. Scheduling Algorithms. Heidelberg: Springer, 2007.
3. Лазарев А.А. Теория расписаний. Оценка абсолютной погрешности и схема приближенного решения задач теории расписаний. М.: МФТИ, 2008.
4. Мищенко А.В., Кошелев П.С. Оптимизация управления работами логистического проекта в условиях неопределенности // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 4. С. 86–101.
5. Глонина А.Б., Балашов В.В. О корректности моделирования модульных вычислительных систем реального времени с помощью сетей временных автоматов // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. Т. 25. № 2. С. 174–192.
6. Глонина А.Б. Обобщенная модель функционирования модульных вычислительных систем реального времени для проверки допустимости конфигураций таких систем // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Вычисл. математика и информатика. 2017. Т. 6. № 4. С. 43–59.
7. Глонина А.Б. Инструментальная система проверки выполнения ограничений реального времени для конфигураций модульных вычислительных систем // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2020. № 3. С. 16–29.
8. Алифанов Д.В., Лебедев В.Н., Цурков В.И. Оптимизация расписаний с логическими условиями предшествования // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 6. С. 88–93.
9. Миронов А.А., Цурков В.И. Минимакс в моделях транспортного типа с интегральными ограничениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 4. С. 69–81.
10. Миронов А.А., Цурков В.И. Минимакс при нелинейных транспортных ограничениях // ДАН. 2001. Т. 381. № 3. С. 305–308.
11. Grassi V., Donatiello L., Tucci S. On the Optimal Checkpointing of Critical Tasks and Transaction-Oriented Systems // IEEE Trans. Software Eng. 1992. V. 18. № 1. P. 72–77.
12. Coffman E., Gilbert E. Optimal Strategies for Scheduling Checkpoints and Preventive Maintenance // IEEE Trans. Reliability. 1990. V. 39. № 1. P. 9–18.
13. Bruno J.L., Coffman E.G. Optimal Fault-Tolerant Computing on Multiprocessor Systems // Acta Informatica. 1997. V. 34. P. 881–904.
14. Белый Д.В., Сушков Б.Г. Модель организации рестартов в системах реального времени. М.: ВЦ РАН, 1996. 32 с.
15. Гречук Б.В., Фуругян М.Г. Алгоритмы организации рестартов в системах реального времени с произвольным графом связей. М.: ВЦ РАН, 2004. 32 с.
16. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.
17. Корте Б., Фиген Й. Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: ЦНМО, 2015.

## СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519:301

### СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ОРГАНИЗАЦИИ И ЭФФЕКТИВНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ОЛИГОПОЛИИ КУРНО<sup>1</sup>

© 2023 г. А. В. Королёв<sup>a,\*</sup>, М. А. Котова<sup>a,\*\*</sup>, Г. А. Угольников<sup>b,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Филиал НИУ Высшая школа экономики, Санкт-Петербург, Россия

<sup>b</sup>Южный федеральный ун-т, Ростов-на-Дону, Россия

\*e-mail: danitschi@gmail.com,

\*\*e-mail: makotova\_2@edu.hse.ru

\*\*\*e-mail: ougoln@mail.ru

Поступила в редакцию 26.07.2022 г.

После доработки 23.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Аналитически найдены равновесия Нэша и Штакельберга, а также кооперативные решения для динамических теоретико-игровых моделей олигополии Курно в нормальной форме с однородными агентами. Построены и исследованы кооперативные теоретико-игровые модели олигополии Курно трех лиц в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна и Громоу–Петросяна, включая вычисление вектора Шепли. Проведен сравнительный анализ выигрышей агентов, согласно полученным решениям, для игр в нормальной форме и в форме характеристической функции.

DOI: 10.31857/S0002338823010043, EDN: HENZDJ

**Введение.** Проблема (не)эффективности равновесий хорошо известна в теоретико-игровом моделировании конфликтно-управляемых социально-экономических систем [1–5]. Ее смысл состоит в том, что суммарный выигрыш всех игроков (утилитаристское общественное благосостояние) при независимом поведении или даже иерархической организации оказывается меньше, чем при кооперации. Наиболее популярная количественная мера (не)эффективности – цена анархии, которая определяется как отношение суммарного выигрыша всех игроков в наихудшем из равновесий Нэша к максимальному суммарному выигрышу, который достигается при полной кооперации игроков [6].

Однако представляется целесообразным рассматривать проблему (не)эффективности равновесий в более общем виде. Чрезвычайно важно проводить сравнение не только общественного благосостояния, но и индивидуальных выигрышей. Действительно, совсем не очевидно, что лучший с точки зрения всего общества исход игры окажется таким же для каждого игрока в отдельности. Например, выигрыш ведущего в иерархической игре или даже какого-то игрока в равновесии Нэша может оказаться больше выигрыша, который получается при равном распределении суммарного кооперативного выигрыша или при некотором принципе оптимальности для игры в форме характеристической функции. Тогда такой игрок не согласится участвовать в кооперации и предпочтет сохранять независимость или бороться за лидерство. Авторская методология сравнительного анализа в указанном выше смысле описана в статье [7].

Удобной моделью для проведения сравнительного анализа служит олигополия Курно, описывающая конкуренцию фирм по выпускам на рынке однородного продукта [8–10]. Для построения динамических моделей конфликтно-управляемых систем (в частности, олигополии Курно) используются дифференциальные или разностные игры в нормальной форме, содержащие явное описание изменения переменной состояния. В качестве решения при независимом поведении равноправных игроков принимается равновесие Нэша, а при иерархическом управлении

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом ЮФУ “Цифровой атлас политических и социально-экономических угроз и рисков развития Южнороссийского приграничья: национальный и региональный контекст (“Цифровой Юг”) № СП-14-22-06.

без обратной связи — равновесие Штакельберга [11, 12]. При кооперации дифференциальная игра сводится к задаче оптимального управления, которая решается обычным образом [13].

Другой способ описания кооперации — игры в форме характеристической функции. В этом случае главную роль играют не отдельные игроки, а их подмножества (коалиции). Каждая коалиция характеризуется своим значением характеристической функции, отображающей множество всех коалиций в множество действительных чисел. Главная проблема этого класса игр — распределение выигрыша максимальной коалиции (множества всех игроков) между отдельными игроками. Имеются различные принципы оптимальности (решения) игр в форме характеристической функции: ядро, решение по Нейману—Моргенштерну, вектор Шепли, нуклеолус и др. [14–16].

В течение долгого времени для построения кооперативных игр использовалась только характеристическая функция фон Неймана—Моргенштерна [17]. В этом случае характеристика любой коалиции равна ее значению в антагонистической игре против дополнительной коалиции (антикоалиции). Однако это определение не лишено недостатков. Во-первых, данную функцию часто сложно вычислять. Во-вторых, совсем не очевидно, что в экономических и иных приложениях антикоалиция должна играть строго против некоторой коалиции. Поэтому были предложены другие характеристические функции, например функция Петросяна—Заккура или Громовой—Петросяна [18, 19]. Обсуждение можно найти в [20].

Численное решение динамических игр на основе имитационного моделирования описано в работах [21–23]. В настоящей статье применяется другой подход, апробированный, например, в [24], а именно ищется явное решение игры с помощью уравнений Гамильтона—Якоби—Беллмана. Полученные аналитические решения весьма громоздки, поэтому для сравнения выигрышей все же используется численное моделирование для конкретных значений параметров.

Вклад настоящей статьи заключается в следующем:

построены динамические модели олигополии Курно в нормальной форме и в форме характеристической функции фон Неймана—Моргенштерна и Громовой—Петросяна;

найжены аналитические решения указанных игр при различных способах организации и методах управления: равновесия Нэша и Штакельберга, кооперативное решение, вектор Шепли;

проведено численное сравнение коллективных и индивидуальных выигрышей для конкретных значений модельных параметров.

Полученные результаты можно использовать в практике управления экономическими и организационными системами.

**1. Постановка задачи. Независимое поведение игроков.** В работе рассматривается динамическое обобщение модели Курно с линейным уравнением динамики:

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t} [(a - c_i - \bar{x}(t)) x_i(t) - y(t)] dt \rightarrow \max, \quad \bar{x}(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad (1.1)$$

$$0 \leq x_i(t) \leq \frac{a}{n}, \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^n k x_i(t) - m y(t), \quad y(0) = y_0, \quad (1.3)$$

$$a > n \left( c_i + \frac{k}{\rho + m} \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.4)$$

$$0 < c_1 < \dots < c_i < \dots < c_n < \frac{a}{n}. \quad (1.5)$$

Здесь  $x_i(t)$  — управляющие переменные игроков (объем выпуска товаров  $i$ -й фирмы);  $y(t)$  — переменная состояния (количество загрязняющих веществ (ЗВ) в окружающей среде);  $k$  — коэффициент выброса ЗВ в производстве  $i$ -й фирмы;  $a$  — максимальный объем суммарного выпуска продукции;  $c_i$  — коэффициент затрат  $i$ -й фирмы;  $m$  — коэффициент амортизации;  $n$  — количество фирм;  $\rho$  — коэффициент дисконтирования;  $T$  — длина игры. Таким образом, взаимодействие игроков (конкурирующих фирм) описывается через их управления. Предполагается также, что игроки имеют полную информацию о действиях конкурента. В модели Курно продукт предполагается однородным и является нумерером, т.е. в его (безразмерных) единицах выражаются все

стоимостные величины. Таким образом, переменные  $a$ ,  $x_i$ ,  $c_i$  имеют размерность (руб/с)<sup>1/2</sup>,  $[y] = \text{руб/с}$ ,  $[k] = \text{руб}^{1/2}/\text{с}^{3/2}$ ,  $[m] = \text{с}^{-1}$ ,  $[\rho] = \text{с}^{-1}$ . При независимом поведении игроков каждая фирма решает оптимизационную задачу (1.1)–(1.5). Заметим, что возможны и другие варианты построения модели (1.1)–(1.5). Например, объемы выпуска могут рассматриваться как переменные состояния, а управляющими переменными тогда становятся темпы выпуска (переменные издержки). Однако в статье исследуется влияние выпуска продукции на окружающую среду.

**Л е м м а 1.** Решение уравнения

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1 \quad (1.6)$$

с граничным условием  $\alpha(T) = 0$  имеет вид

$$\alpha(t) = \frac{1}{\rho + m} (e^{(\rho+m)(t-T)} - 1). \quad (1.7)$$

Решение уравнения

$$\beta' - \rho\beta = F(t) \quad (1.8)$$

с граничным условием  $\beta(T) = 0$ , где

$$F(t) = A(\alpha k)^2 + B\alpha k + D, \\ A, B, D, k \in R, \quad \alpha(t) = \frac{1}{\rho + m} (e^{(\rho+m)(t-T)} - 1), \quad t \in [0, T],$$

имеет вид

$$\beta(t) = -\frac{Ak^2}{(\rho + m)^2(\rho + 2m)} (e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) + \left( \frac{2Ak^2}{(\rho + m)^2 m} - \frac{Bk}{(\rho + m)m} \right) (e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) - \\ - \left( \frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho + m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho + m)^2 \rho} \right) (1 - e^{\rho(t-T)}). \quad (1.9)$$

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

**П р е д л о ж е н и е 1.** При выполнении условия

$$\bar{c} - (n+1)c_i \leq \frac{a}{n}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \bar{c} = \sum_{i=1}^n c_i, \quad (1.10)$$

где  $n \geq 2$ , выигрыш  $i$ -го игрока в задаче (1.1)–(1.5) равен

$$J_i^{\max} = \frac{1}{\rho + m} (e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{n^2 k^2}{(n+1)^2 (\rho + m)^2 (\rho + 2m)} (e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) + \\ + \left( \frac{[(n^2 + 1)a - 2n\bar{c} + (n^2 - 1)c_i]k}{(n+1)^2 (\rho + m)m} - \frac{2n^2 k^2}{(n+1)^2 (\rho + m)^2 m} \right) (e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ + \left( \frac{n^2 k^2}{(n+1)^2 (\rho + m)^2 \rho} - \frac{[(n^2 + 1)a - 2n\bar{c} + (n^2 - 1)c_i]k}{(n+1)^2 (\rho + m)\rho} + \frac{[a + \bar{c} - (n+1)c_i]^2}{(n+1)^2 \rho} \right) (1 - e^{-\rho T}). \quad (1.11)$$

Заметим, что если  $n = 3$ , то для выполнения условия (1.10) достаточно, чтобы  $c_2/c_1 \leq 3$ , потому что тогда  $c_2 - 3c_1 \leq 0$ , а значит,  $c_1 + c_2 + c_3 - 4c_1 \leq a/3$ , так как  $c_1 < c_2 < c_3 < a/3$ , и условие  $\bar{c} - 4c_i = c_1 + c_2 + c_3 - 4c_i \leq a/3$ , т.е. (1.10) при  $n = 3$ , верно для  $c_1$  и тем более верно для  $c_2$  и  $c_3$ .

Доказательство предложения 1 приведено в Приложении.

**2. Кооперативное поведение игроков.** 2.1. Общий случай произвольного числа игроков. Все фирмы вместе решают задачу оптимального управления

$$J_c = \int_0^T e^{-\rho t} \left[ \sum_{i=1}^n (a - c_i - \bar{x}(t)) x_i(t) - y(t) \right] dt \rightarrow \max \quad (2.1)$$

при ограничениях (1.2)–(1.5).

**Л е м м а 2.** В задаче (2.1), (1.2)–(1.5) максимум при любом  $t$  может достигаться только на одном из ребер  $n$ -мерного куба (1.2). При этом номер ребра, на котором достигается максимум, — это такое натуральное число  $l = l(n, t)$ , для которого

$$n\alpha k + (n - 2l)a - nc_l \leq 0, \quad (2.2)$$

$$0 \leq n\alpha k + [n - 2(l - 1)]a - nc_l, \quad (2.3)$$

где  $\alpha(t)$  определено (1.7).

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении.

**З а м е ч а н и е.** Поскольку величина  $\alpha$  является функцией времени и за период  $[0, T]$  растет от величины

$$\frac{1}{\rho + m}(e^{-(\rho+m)T} - 1)$$

до 0, то число  $l$ , определяемое условием (2.2)–(2.3), в некоторые моменты времени может увеличиваться на единицу.

**П р е д л о ж е н и е 2.** Если величина  $l$  не меняется на всем промежутке  $[0, T]$ , то суммарный выигрыш коалиции в (2.1), (1.2)–(1.5) равен

$$\begin{aligned} J_c^{\max} = & \frac{1}{\rho + m}(e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)}(e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{(a - c_l)k}{2(\rho + m)m} - \frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m} \right) (e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{(a - c_l)^2}{4\rho} - \frac{a \left[ \sum_{i=1}^{l-1} c_i - (l-1)c_l \right]}{n\rho} - \frac{(a - c_l)k}{2(\rho + m)\rho} + \frac{k^2}{4(\rho + m)^2 \rho} \right) (1 - e^{-\rho T}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Доказательство предложения 2 приведено в Приложении.

**2.2. Кооперативное поведение игроков в случае  $n = 3$ .** **Предложение 3.** В задаче (2.1), (1.2)–(1.5) при  $n = 3$  при любом  $t \in [0, T]$  верно, что  $l(3, t) = 2$ , т.е. максимум достигается на втором ребре.

Доказательство предложения 3 приведено в Приложении.

**С л е д с т в и е 1.** При  $n = 3$  общий выигрыш коалиции равен

$$\begin{aligned} J_c^{\max} = & \frac{1}{\rho + m}(e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)}(e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{k(a - c_2)}{2(\rho + m)m} - \frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m} \right) (e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{3a^2 - 2ac_2 - 4ac_1 + 3c_2^2}{12\rho} + \frac{k(a - c_2)}{2(\rho + m)\rho} - \frac{k^2}{4(\rho + m)^2 \rho} \right) (1 - e^{-\rho T}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

**3. Иерархическая модель поведения игроков.** Пусть первый игрок — ведущий, а все остальные игроки  $i = \overline{2, n}$  — ведомые, которым известна стратегия  $x_1(t)$ ,  $t \in [0, T]$  первого игрока. Каждая фирма-ведомый решает оптимизационную задачу (1.1)–(1.5) при заданной стратегии первого игрока. Обозначим

$$\tilde{x} = \sum_{j=2}^n x_j.$$

Зная зависимость  $\tilde{x}$  от  $x_1$ , первый игрок (ведущий) решает свою оптимизационную задачу:

$$J_1 = \int_0^T e^{-\rho t} [(a - c_1 - x_1(t) + \tilde{x}(t))x_1(t) - y(t)] dt \rightarrow \max \quad (3.1)$$

при ограничениях (1.2)–(1.5).

**Предложение 4.** Выигрыши игроков в иерархической игре (3.1), (1.1)–(1.5) равны

$$\begin{aligned} J_1^{\max} = & \frac{1}{\rho + m} (e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2(\rho+2m)} (e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) + \frac{k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2(\rho+2m)} \times \\ & \times (e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) + \left( \frac{(n^2 - 2n + 2)k}{n^2(\rho+m)m} a - \frac{\tilde{c}k}{n(\rho+m)m} - \frac{2k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2m} \right) \cdot (e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left[ \frac{k}{(\rho+m)\rho} \left( \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2 - 2n + 2}{n^2} a \right) + \left( \frac{n-1}{n^2} a - \frac{nc_1 - \tilde{c}}{n} \right) \frac{a}{n\rho} - \frac{(n-1)k^2}{n(\rho+m)^2\rho} \right] (1 - e^{-\rho T}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} J_i^{\max} = & \frac{1}{\rho + m} (e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{(n-1)^2 k^2}{n^2(\rho+m)^2(\rho+2m)} (e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) - \left\{ \frac{2(n-1)^2 k^2}{n^2(\rho+m)^2m} + \frac{k}{(\rho+m)m} \times \right. \\ & \left. - \left[ \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2 - n + 1}{n^2} a + \frac{n-2}{n} \left( \frac{\tilde{c} - nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2} a \right) \right] \right\} (e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \left\{ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\tilde{c} - nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2} a \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{k}{(\rho+m)\rho} \left[ \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2 - n + 1}{n^2} a + \frac{n-2}{n} \left( \frac{\tilde{c} - nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2} a \right) \right] + \frac{(n-1)^2 k^2}{n^2(\rho+m)^2\rho} \right\} (1 - e^{-\rho T}), \quad i = \overline{2, n}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Доказательство предложения 4 приведено в Приложении.

**Следствие 2.** В случае  $n = 3$  получаем

$$\begin{aligned} J_1^{\max} = & \frac{1}{\rho + m} (e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{2k^2}{3(\rho+m)^2(\rho+2m)} (e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{5k}{9(\rho+m)m} a - \frac{\tilde{c}k}{3(\rho+m)m} - \frac{4k^2}{3(\rho+m)^2m} \right) (e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left[ \frac{k}{(\rho+m)\rho} \left( \frac{\tilde{c}}{3} - \frac{5}{9} a \right) + \left( \frac{2}{9} a - \frac{3c_1 - \tilde{c}}{3} \right) \frac{a}{3\rho} - \frac{2k^2}{3(\rho+m)^2\rho} \right] (1 - e^{-\rho T}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} J_i^{\max} = & \frac{1}{\rho + m} (e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{4k^2}{9(\rho+m)^2(\rho+2m)} (e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) - \\ & - \left\{ \frac{8k^2}{9(\rho+m)^2m} + \frac{k}{(\rho+m)m} \left[ \frac{\tilde{c}}{3} - \frac{7}{9} a + \frac{1}{3} \left( \frac{\tilde{c} - 3c_i}{3} + \frac{2}{9} a \right) \right] \right\} (e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left[ \frac{(3\tilde{c} - 9c_i + 2a)^2}{81\rho} + \frac{(12\tilde{c} - 19a - 9c_i)k}{27(\rho+m)\rho} + \frac{4k^2}{9(\rho+m)^2\rho} \right] (1 - e^{-\rho T}), \quad i = 2, 3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**4. Кооперативная игра в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна для случая  $n = 3$ .** Напомним, что кооперативной игрой в форме характеристической функции называется пара  $\langle N, V \rangle$ , где  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  – множество игроков, а  $V(S)$ ,  $S \subseteq N$  – характеристическая функция. Характеристической функцией называется отображение  $V : 2^N \rightarrow R$ ,  $V(\emptyset) = 0$ , ставящее в соответствие каждой коалиции  $S$  величину выигрыша, который игроки данной коалиции могут себе обеспечить. Вопрос построения характеристических функций является одним из основных в теории кооперативных игр. Характеристическая функция фон Неймана–Моргенштерна [17] вычисляется на базе вспомогательной антагонистической игры  $\Gamma_{S, N \setminus S}$  между коалицией  $S$  и антикоалицией  $N \setminus S$ . Характеристическая функция Петросяна–Заккура [18] строится в два

этапа. Сначала находят равновесные по Нэшу стратегии  $\{u_i^{NE}\}$  всех игроков  $i \in N$ , а затем “замирают” равновесные по Нэшу стратегии  $u_j^{NE}$  игроков  $j \in N \setminus S$ , а для игроков коалиции  $S$  находят максимум их суммарного выигрыша

$$u_S = \sum_{i \in S} u_i.$$

Характеристическая функция Громовой–Петросяна [19] строится также в два этапа. На первом этапе находят набор оптимальных стратегий всех  $n$  игроков, максимизирующий выигрыш большой коалиции. На втором этапе игроки, входящие в коалицию  $K$ , применяют полученные на первом этапе оптимальные стратегии, в то время как игроки из множества  $N \setminus K$  минимизируют выигрыш коалиции  $K$ .

Пусть коалиция состоит из одного  $i$ -го игрока:  $K = \{i\}$ , антикоалиция тогда состоит из двух остальных игроков  $N \setminus K = \{j, k\}$ , причем  $c_j < c_k$ .

**Предложение 5.** Характеристическая функция Неймана–Моргенштерна для коалиции, состоящей из одного игрока, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} v^{NM}(i) = & \frac{1}{\rho + m} (e^{-(\rho+m)T} - 1) y_0 + \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)} (e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) - \\ & - \left( \frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m} - \frac{(5a - 3c_i)k}{6(\rho + m)m} \right) (e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{k^2}{4(\rho + m)^2 \rho} - \frac{(5a - 3c_i)k}{6(\rho + m)\rho} + \frac{(a - 3c_i)^2}{36\rho} \right) (1 - e^{-\rho T}), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Доказательство предложения 5 приведено в Приложении.

Пусть теперь коалиция состоит из двух игроков:  $K = \{i, j\}$ , причем  $c_i < c_j$ , антикоалиция тогда состоит из одного игрока  $N \setminus K = \{k\}$ .

**Предложение 6.** Характеристическая функция Неймана–Моргенштерна для коалиции, состоящей из двух игроков:  $K = \{i, j\}$ , причем  $c_i < c_j$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} v^{NM}(i, j) = & \frac{1}{\rho + m} (e^{-(\rho+m)T} - 1) y_0 + \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)} (e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) - \\ & - \left( \frac{(3c_i - 5a)k}{6(\rho + m)m} + \frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m} \right) (e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{k^2}{4(\rho + m)^2 \rho} + \frac{(3c_i - 5a)k}{6(\rho + m)\rho} - \frac{(2a - 3c_i)(3c_i - 4a)}{36\rho} \right) (1 - e^{-\rho T}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Доказательство предложения 6 приведено в Приложении.

**5. Кооперативная игра в форме характеристической функции Громовой–Петросяна для случая  $n = 3$ .** При вычислении характеристической функции Громовой–Петросяна все игроки из антикоалиции делают максимально возможные инвестиции

$$x_j = \frac{a}{3}, \quad j \in N \setminus K,$$

в то время как все игроки из  $K$  ведут себя как в максимальной коалиции, т.е.  $\left( x_1 = \frac{a}{3}, x_2 = \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6}, x_3 = 0 \right)$ .

Таким образом, в данном случае формулы для выигрышей разных коалиций с одним и тем же числом игроков будут различаться не только индексами этих игроков.

Предложение 7. Характеристическая функция Громовой–Петросяна имеет вид:

$$\begin{aligned} v^{PG}(1,2) = & \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) - \\ & - \left( \frac{2k^2}{(\rho+m)^2 m} + \frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)m} \right) (e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{3a^2-12ac_1+9c_2^2}{36\rho} + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho} + \frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)\rho} \right) (1-e^{-\rho T}), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} v^{PG}(2,3) = & \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) - \\ & - \left( \frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m} + \frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)m} \right) (e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho} + \frac{(3c_2-4a)k}{6(\rho+m)\rho} + \frac{a^2-4ac_2+3c_2^2}{12\rho} \right) (1-e^{-\rho T}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} v^{PG}(1,3) = & \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{2ak}{3(\rho+m)m}(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{(a-3c_1)a}{9\rho} - \frac{2ak}{3(\rho+m)\rho} \right) (1-e^{-\rho T}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} v^{PG}(1) = V_K(0, y(0)) = & \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \\ & = \frac{ak}{(\rho+m)m}(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) - \left( \frac{ak}{(\rho+m)\rho} + \frac{ac_1}{3\rho} \right) (1-e^{-\rho T}), \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} v^{PG}(2) = & \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) - \\ & - \left( \frac{k^2}{2(\rho+m)^2 m} + \frac{(3c_2-5a)k}{6(\rho+m)m} \right) (e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho} + \frac{(3c_2-5a)k}{6(\rho+m)\rho} + \frac{(a-3c_2)^2}{36\rho} \right) (1-e^{-\rho T}), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$v^{PG}(3) = \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{2ak}{3(\rho+m)m}(e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) - \frac{2ak}{3(\rho+m)\rho}(1-e^{-\rho T}). \quad (5.6)$$

Доказательство предложения 7 приведено в Приложении.

**6. Сравнительный анализ.** Главная задача состоит в сравнении выигрышей, полученных игроками в кооперативных играх с различными принципами оптимальности и в играх в нормальной форме. Для случая  $n = 3$  зададимся значениями параметров так, чтобы выполнялись соотношения (1.4), (1.5), (1.10).

Из (1.11) следует, что выигрыши игроков в равновесии Нэша равны

$$\begin{aligned} u_i^{NE} = & \frac{1}{\rho+m}(e^{-(\rho+m)T}-1)y_0 + \frac{9k^2}{16(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{-\rho T}-e^{-2(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{(10a-6\bar{c}+8c_i)k}{16(\rho+m)m} - \frac{18k^2}{16(\rho+m)^2 m} \right) (e^{-\rho T}-e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{9k^2}{16(\rho+m)^2\rho} - \frac{(10a-6\bar{c}+8c_i)k}{16(\rho+m)\rho} + \frac{(a+\bar{c}-4c_i)^2}{16\rho} \right) (1-e^{-\rho T}), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Из (2.5) вытекает, что выигрыш каждого игрока при кооперации равен

$$\begin{aligned} u_1^c = u_2^c = u_3^c = & \frac{1}{3(\rho + m)}(e^{-(\rho+m)T} - 1)y_0 + \frac{k^2}{12(\rho + m)^2(\rho + 2m)}(e^{-\rho T} - e^{-2(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{(a - c_2)k}{6(\rho + m)m} - \frac{k^2}{6(\rho + m)^2 m} \right) (e^{-\rho T} - e^{-(\rho+m)T}) + \\ & + \left( \frac{3a^2 - 4ac_1 - 2ac_2 + 3c_2^2}{36\rho} - \frac{k^2}{12(\rho + m)^2 \rho} + \frac{(a - c_2)k}{6(\rho + m)\rho} \right) (1 - e^{-\rho T}). \end{aligned}$$

Выигрыши игроков в иерархической игре определяются выражениями (3.4)–(3.5). Выигрыши коалиций в кооперативной игре в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна определяются выражениями (4.1)–(4.2). Выигрыш большой коалиции в любой кооперативной игре в форме любой характеристической функции задается выражением (2.5). Выигрыши остальных коалиций кооперативной игре в форме характеристической функции Громовой–Петросяна определяются выражениями (5.1)–(5.6). Компоненты вектора Шепли вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_1(v^{NM}) &= \frac{1}{3}v^{NM}(1) + \frac{1}{6}(v^{NM}(1,2) - v^{NM}(2)) + \frac{1}{6}(v^{NM}(1,3) - v^{NM}(3)) + \\ &+ \frac{1}{3}(v^{NM}(1,2,3) - v^{NM}(2,3)), \\ \Phi_2(v^{NM}) &= \frac{1}{3}v^{NM}(2) + \frac{1}{6}(v^{NM}(1,2) - v^{NM}(1)) + \frac{1}{6}(v^{NM}(2,3) - v^{NM}(3)) + \\ &+ \frac{1}{3}(v^{NM}(1,2,3) - v^{NM}(1,3)), \\ \Phi_3(v^{NM}) &= \frac{1}{3}v^{NM}(3) + \frac{1}{6}(v^{NM}(1,3) - v^{NM}(1)) + \frac{1}{6}(v^{NM}(2,3) - v^{NM}(2)) + \\ &+ \frac{1}{3}(v^{NM}(1,2,3) - v^{NM}(1,2)), \\ \Phi_1(v^{PG}) &= \frac{1}{3}v^{PG}(1) + \frac{1}{6}(v^{PG}(1,2) - v^{PG}(2)) + \frac{1}{6}(v^{PG}(1,3) - v^{PG}(3)) + \\ &+ \frac{1}{3}(v^{PG}(1,2,3) - v^{PG}(2,3)), \\ \Phi_2(v^{PG}) &= \frac{1}{3}v^{PG}(2) + \frac{1}{6}(v^{PG}(1,2) - v^{PG}(1)) + \frac{1}{6}(v^{PG}(2,3) - v^{PG}(3)) + \\ &+ \frac{1}{3}(v^{PG}(1,2,3) - v^{PG}(1,3)), \\ \Phi_3(v^{PG}) &= \frac{1}{3}v^{PG}(3) + \frac{1}{6}(v^{PG}(1,3) - v^{PG}(1)) + \frac{1}{6}(v^{PG}(2,3) - v^{PG}(2)) + \\ &+ \frac{1}{3}(v^{PG}(1,2,3) - v^{PG}(1,2)). \end{aligned}$$

Хотя решения игр получены аналитически, для сравнения выигрышей приходится использовать численные расчеты при конкретных значениях параметров. Задавая случайным образом параметры модели  $k, \rho, m, c_1, c_2, c_3$ , а от датчика случайных чисел с соблюдением условий (1.4), (1.5) и (1.10) и полагая  $y_0 = 0$  и  $T \rightarrow \infty$ , получаем результаты, приведенные в табл. 1–3.

**Заключение.** Как следует из примеров, выигрыш при кооперации всегда значительно (иногда в несколько раз) превосходит суммарный выигрыш при независимом поведении и при иерархии. Суммарный выигрыш при свободной конкуренции, как правило, превосходит суммарный выигрыш при иерархии, однако в некоторых примерах суммарный выигрыш при иерархии немного больше суммарного выигрыша при свободной конкуренции.

Выигрыш наиболее эффективной фирмы в условиях иерархии, когда она является ведущей, в большинстве случаев больше, чем ее выигрыш при независимом поведении фирм. Доля

Таблица 1. Входные данные

| $a$    | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $k$   | $\rho$ | $m$   | $y_0$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|
| 3.102  | 0.090 | 0.243 | 0.931 | 0.022 | 0.081  | 0.535 | 0     |
| 6.914  | 0.521 | 1.275 | 1.757 | 0.286 | 0.256  | 0.719 | 0     |
| 8.954  | 0.862 | 1.665 | 2.524 | 0.345 | 0.998  | 0.760 | 0     |
| 3.088  | 0.105 | 0.186 | 0.419 | 0.614 | 0.314  | 0.812 | 0     |
| 7.117  | 0.372 | 1.087 | 2.040 | 0.039 | 0.934  | 0.303 | 0     |
| 5.006  | 0.195 | 0.583 | 1.194 | 0.053 | 0.082  | 0.269 | 0     |
| 4.362  | 0.168 | 0.398 | 0.958 | 0.395 | 0.863  | 0.597 | 0     |
| 8.074  | 0.738 | 1.160 | 1.748 | 0.652 | 0.573  | 0.141 | 0     |
| 6.215  | 0.109 | 0.267 | 1.197 | 0.748 | 0.281  | 0.908 | 0     |
| 9.036  | 0.795 | 1.303 | 1.971 | 0.988 | 0.956  | 0.000 | 0     |
| 3.383  | 0.070 | 0.134 | 0.825 | 0.392 | 0.737  | 0.907 | 0     |
| 4.805  | 0.822 | 1.401 | 1.428 | 0.178 | 0.865  | 0.729 | 0     |
| 8.228  | 0.465 | 1.202 | 1.976 | 0.142 | 0.011  | 0.258 | 0     |
| 10.669 | 0.956 | 1.912 | 2.714 | 0.646 | 0.062  | 0.851 | 0     |
| 6.620  | 0.731 | 1.236 | 1.565 | 0.462 | 0.152  | 0.854 | 0     |
| 5.282  | 0.063 | 0.084 | 0.693 | 0.570 | 0.611  | 0.145 | 0     |
| 2.693  | 0.216 | 0.268 | 0.555 | 0.173 | 0.817  | 0.154 | 0     |
| 3.215  | 0.219 | 0.243 | 0.781 | 0.460 | 0.813  | 0.797 | 0     |
| 7.460  | 0.809 | 0.962 | 1.667 | 0.944 | 0.798  | 0.808 | 0     |
| 8.437  | 0.941 | 1.121 | 1.919 | 0.828 | 0.818  | 0.164 | 0     |
| 10.790 | 0.633 | 1.521 | 2.494 | 0.821 | 0.965  | 0.077 | 0     |
| 5.824  | 0.097 | 0.280 | 1.269 | 0.444 | 0.900  | 0.318 | 0     |
| 6.604  | 0.568 | 0.985 | 1.445 | 0.871 | 0.897  | 0.332 | 0     |
| 1.603  | 0.052 | 0.128 | 0.219 | 0.166 | 0.727  | 0.830 | 0     |
| 4.627  | 0.814 | 1.031 | 1.113 | 0.263 | 0.527  | 0.782 | 0     |
| 6.846  | 0.690 | 1.062 | 1.739 | 0.438 | 0.747  | 0.144 | 0     |
| 3.918  | 0.071 | 0.122 | 1.119 | 0.081 | 0.886  | 0.785 | 0     |
| 4.224  | 0.105 | 0.154 | 1.107 | 0.109 | 0.766  | 0.017 | 0     |
| 5.977  | 0.544 | 1.523 | 1.616 | 0.200 | 0.074  | 0.499 | 0     |
| 2.280  | 0.266 | 0.558 | 0.598 | 0.169 | 0.408  | 0.713 | 0     |
| 9.636  | 0.836 | 1.592 | 2.115 | 0.238 | 0.136  | 0.118 | 0     |
| 4.188  | 0.420 | 0.913 | 1.039 | 0.200 | 0.823  | 0.109 | 0     |
| 8.560  | 0.439 | 0.919 | 1.526 | 0.812 | 0/307  | 0.319 | 0     |
| 8.591  | 0.422 | 1.135 | 1.863 | 0.492 | 0.056  | 0.527 | 0     |
| 2.162  | 0.060 | 0.176 | 0.224 | 0.463 | 0.893  | 0.793 | 0     |
| 5.227  | 0.347 | 0.916 | 1.569 | 0.049 | 0.170  | 0.860 | 0     |
| 7.052  | 0.163 | 0.427 | 1.426 | 0.570 | 0.724  | 0.009 | 0     |
| 6.972  | 0.533 | 0.654 | 1.626 | 0.070 | 0.040  | 0.077 | 0     |
| 5.358  | 0.868 | 0.948 | 1.321 | 0.367 | 0.704  | 0.723 | 0     |
| 2.698  | 0.057 | 0.141 | 0.593 | 0.154 | 0.674  | 0.293 | 0     |

Таблица 2. Выигрыши игроков при разных информационных регламентах

| $u_1^{NE}$ | $u_2^{NE}$ | $u_3^{NE}$ | $u_1^C$ | $u_2^C$ | $u_3^C$ | $u_1^{ST}$ | $u_2^{ST}$ | $u_3^{ST}$ |
|------------|------------|------------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|
| 11.704     | 8.166      | -0.536     | 9.260   | 9.260   | 9.260   | 12.025     | 7.870      | -0.597     |
| 13.617     | 3.060      | -1.363     | 13.660  | 13.660  | 13.660  | 14.765     | 1.947      | -2.122     |
| 6.189      | 2.509      | 0.001      | 5.474   | 5.474   | 5.474   | 6.820      | 2.003      | -0.278     |
| 5.466      | 2.505      | 0.264      | 3.885   | 3.885   | 3.885   | 5.623      | 2.395      | 0.221      |
| 24.929     | 11.675     | -1.700     | 23.960  | 23.960  | 23.960  | 26.583     | 10.072.3   | -2.519     |
| 6.286      | 2.603      | 0.604      | 4.578   | 4.578   | 4.578   | 6.736      | 2.298      | 0.448      |
| 1.314      | 0.645      | -0.472     | 1.847   | 1.847   | 1.847   | 1.436      | 0.436      | -0.587     |
| 2.749      | -0.504     | -4.001     | 9.329   | 9.329   | 9.329   | 2.935      | -2.481     | -5.480     |
| 5.320      | 3.160      | -5.906     | 12.961  | 12.961  | 12.961  | 5.405      | 1.231      | -6.976     |
| 2.188      | -0.458     | -3.109     | 7.048   | 7.048   | 7.048   | 2.274      | -1.897     | -4.181     |
| 0.921      | 0.737      | -0.544     | 1.394   | 1.394   | 1.394   | 0.977      | 0.580      | -0.604     |
| 1.675      | 0.295      | 0.249      | 1.546   | 1.546   | 1.546   | 1.970      | 0.102      | 0.063      |
| 400.798    | 89.795     | -127.95    | 501.024 | 501.024 | 501.024 | 428.809    | 41.364     | -158.52    |
| 101.907    | 15.973     | -33.622    | 136.496 | 136.496 | 136.496 | 113.962    | -1.291     | -45.508    |
| 12.643     | 1.562      | -3.860     | 20.931  | 20.931  | 20.931  | 15.067     | -1.964     | -6.642     |
| 0.322      | 0.209      | -2.445     | 4.699   | 4.699   | 4.699   | 0.022      | -0.807     | -3.141     |
| 0.346      | 0.252      | -0.145     | 0.703   | 0.703   | 0.703   | 0.430      | 0.112      | -0.232     |
| 0.462      | 0.406      | -0.486     | 1.082   | 1.082   | 1.082   | 0.528      | 0.193      | -0.589     |
| 2.059      | 1.296      | -1.451     | 5.326   | 5.326   | 5.326   | 2.680      | 0.048      | -2.277     |
| 1.827      | 0.823      | -2.683     | 6.848   | 6.848   | 6.848   | 2.325      | -0.911     | -3.858     |
| 6.810      | 1.323      | -2.810     | 9.732   | 9.732   | 9.732   | 7.336      | 0.212      | -3.539     |
| 2.321      | 1.600      | -1.002     | 3.339   | 3.339   | 3.339   | 2.495      | 1.248      | -1.162     |
| 1.463      | -0.213     | -1.610     | 3.968   | 3.968   | 3.968   | 1.565      | -0.966     | -2.176     |
| 0.156      | 0.065      | -0.024     | 0.303   | 0.303   | 0.303   | 0.184      | 0.020      | -0.059     |
| 1.433      | 0.587      | 0.317      | 2.478   | 2.478   | 2.478   | 1.962      | -0.013     | -0.230     |
| 2.805      | 0.977      | -1.388     | 4.719   | 4.719   | 4.719   | 3.288      | 0.155      | -1.903     |
| 1.618      | 1.476      | -0.095     | 1.414   | 1.414   | 1.414   | 1.690      | 1.402      | -0.108     |
| 1.798      | 1.633      | -0.362     | 1.952   | 1.952   | 1.952   | 1.937      | 1.460      | -0.410     |
| 36.059     | -3.076     | -5.441     | 34.715  | 34.715  | 34.715  | 37.672     | -5.191     | -7.380     |
| 0.719      | -0.071     | -0.146     | 0.889   | 0.889   | 0.889   | 0.804      | -0.174     | -0.240     |
| 24.931     | -3.549     | -18.310    | 54.192  | 54.192  | 54.192  | 27.329     | -12.681    | -25.558    |
| 1.336      | 0.104      | -0.116     | 1.503   | 1.503   | 1.503   | 1.496      | -0.054     | -0.251     |
| 3.242      | -4.583     | -12.334    | 22.221  | 22.221  | 22.221  | 0.903      | -9.148     | -15.904    |
| 61.325     | -0.665     | -45.214    | 112.471 | 112.471 | 112.471 | 61.821     | -14.865    | -55.139    |
| 0.073      | -0.085     | -0.140     | 0.494   | 0.494   | 0.494   | 0.063      | -0.179     | -0.228     |
| 15.700     | 6.353      | 0.337      | 11.252  | 11.252  | 11.252  | 16.244     | 5.975      | 0.179      |
| 2.570      | 0.994      | -3.245     | 6.455   | 6.455   | 6.455   | 2.457      | 0.038      | -3.795     |
| 43.067     | 31.010     | -39.109    | 99.606  | 99.606  | 99.606  | 50.591     | 11.179     | -49.955    |
| 1.338      | 1.048      | -0.068     | 2.630   | 2.630   | 2.630   | 1.861      | 0.333      | -0.573     |
| 0.671      | 0.469      | -0.263     | 0.943   | 0.943   | 0.943   | 0.728      | 0.367      | -0.309     |

Таблица 3. Компоненты векторов Шепли для разных характеристических функций

| $\Phi_1(v^{NM})$ | $\Phi_2(v^{NM})$ | $\Phi_3(v^{NM})$ | $\Phi_1(v^{PG})$ | $\Phi_2(v^{PG})$ | $\Phi_3(v^{PG})$ |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 10.412           | 8.645            | 8.724            | 15.538           | 14.879           | −2.636           |
| 15.225           | 10.193           | 15.562           | 24.561           | 23.763           | −7.345           |
| 6.326            | 4.512            | 5.584            | 9.565            | 9.041            | −2.183           |
| 4.913            | 3.387            | 3.355            | 7.199            | 6.410            | −1.952           |
| 26.560           | 19.912           | 25.408           | 41.054           | 40.380           | −9.554           |
| 5.823            | 3.938            | 3.972            | 8.110            | 7.605            | −1.983           |
| 1.753            | 1.440            | 2.348            | 3.199            | 3.028            | −0.687           |
| 7.109            | 5.813            | 15.065           | 13.620           | 17.045           | −2.679           |
| 10.372           | 9.434            | 19.076           | 21.307           | 21.652           | −4.076           |
| 5.409            | 4.361            | 11.373           | 10.898           | 12.690           | −2.445           |
| 1.222            | 1.139            | 1.821            | 2.353            | 2.217            | −0.387           |
| 1.847            | 1.184            | 1.608            | 2.543            | 2.736            | −0.640           |
| 503.016          | 361.525          | 638.532          | 819.673          | 899.294          | −215.894         |
| 133.962          | 95.899           | 179.626          | 227.768          | 241.171          | −59.451          |
| 19.508           | 14.579           | 28.707           | 33.221           | 36.747           | −7.175           |
| 3.111            | 3.065            | 7.921            | 6.910            | 8.267            | −1.079           |
| 0.599            | 0.555            | 0.955            | 1.027            | 1.158            | −0.076           |
| 0.845            | 0.821            | 1.580            | 1.715            | 1.727            | −0.198           |
| 4.273            | 3.937            | 7.768            | 8.124            | 8.605            | −0.747           |
| 5.070            | 4.658            | 10.815           | 9.511            | 1.812            | −0.779           |
| 9.326            | 6.873            | 12.997           | 16.802           | 16.915           | −4.522           |
| 3.068            | 2.729            | 4.219            | 5.544            | 5.447            | −0.975           |
| 1.173            | 2.495            | 6.235            | 6.530            | 6.990            | −1.616           |
| 0.275            | 0.230            | 0.402            | 0.527            | 0.493            | −0.112           |
| 2.333            | 1.928            | 3.174            | 3.283            | 4.117            | 0.035            |
| 4.219            | 3.421            | 6.517            | 7.147            | 8.148            | −1.137           |
| 1.472            | 1.401            | 1.369            | 2.55             | 2.204            | −0.217           |
| 1.893            | 1.812            | 2.151            | 2.994            | 3.121            | −0.259           |
| 39.652           | 22.330           | 42.163           | 65.241           | 66.598           | −27.694          |
| 0.920            | 0.577            | 1.168            | 1.576            | 1.642            | −0.551           |
| 46.268           | 12.358           | 81.904           | 79.092           | 102.300          | −18.817          |
| 1.629            | 1.057            | 1.824            | 2.646            | 2.695            | −0.831           |
| 15.272           | 12.358           | 39.032           | 33.308           | 42.105           | −8.750           |
| 99.209           | 73.081           | 165.124          | 183.262          | 205.724          | −51.573          |
| 0.368            | 0.299            | 0.816            | 0.917            | 0.828            | −0.262           |
| 14.195           | 9.496            | 10.066           | 20.841           | 18.828           | −5.913           |
| 5.118            | 4.458            | 9.787            | 10.059           | 11.329           | −2.025           |
| 79.686           | 74.476           | 144.657          | 127.292          | 176.091          | −4.565           |
| 2.274            | 2.138            | 3.477            | 3.349            | 4.185            | 0.354            |
| 0.874            | 0.778            | 1.177            | 1.523            | 1.552            | −0.246           |

наиболее эффективной фирмы в случае кооперации при равномерном распределении выигрыша может оказаться и больше, и меньше, чем ее выигрыш при независимом поведении фирм и при иерархии, когда данная фирма ведущая. Что касается компоненты вектора Шепли для данной фирмы, здесь также возможны различные соотношения в кооперативной игре в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна. В то же время в кооперативной игре в форме характеристической функции Громовой–Петросяна компонента вектора Шепли для самой эффективной фирмы всегда больше, чем ее выигрыш при свободной конкуренции, в иерархической игре, где она ведущая, и при кооперации в случае равномерного распределения дохода между игроками.

Что касается менее эффективной фирмы, ее выигрыш при кооперации всегда больше ее выигрыша при независимом поведении, который в свою очередь больше ее выигрыша при иерархии, где она является ведомой. Компонента вектора Шепли для такой фирмы в игре в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна всегда меньше, чем выигрыш данной фирмы при кооперации. Компонента вектора Шепли в характеристической функции в форме Громовой–Петросяна всегда больше, чем выигрыши данной фирмы при кооперации или в равновесии Нэша или Штакельберга.

Что касается самой неэффективной фирмы, ее выигрыш при кооперации также всегда больше ее выигрыша при независимом поведении, который в свою очередь больше ее выигрыша при иерархии, в которой она является ведомой. Компонента вектора Шепли для такой фирмы в игре в форме характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна также велика и в большинстве случаев даже больше, чем выигрыш данной фирмы при кооперации в случае равномерного распределения выигрышей. Компонента вектора Шепли в характеристической функции в форме Громовой–Петросяна для такой фирмы всегда мала, в некоторых случаях даже меньше, чем выигрыш при свободной конкуренции, а иногда даже меньше, чем выигрыш при иерархии.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Решая уравнение (1.6), находим

$$\alpha(t) = Ce^{(\rho+m)t} - \frac{1}{\rho+m}.$$

Постоянную  $C$  определим из граничных условий:

$$\alpha(T) = Ce^{(\rho+m)T} - \frac{1}{\rho+m} = 0, \quad C = \frac{1}{\rho+m} e^{-(\rho+m)T},$$

поэтому окончательно получаем выражение (1.7)

Решая уравнение (1.8) методом вариации произвольной постоянной, имеем

$$\beta(t) = C(t)e^{\rho t},$$

где

$$C(t) = \int e^{-\rho t} F(t) dt.$$

Подставляя выражение для  $\alpha(t)$  в  $F(t)$ , получаем

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2} (e^{2(\rho+m)(t-T)} - 2e^{(\rho+m)(t-T)} + 1) + \frac{Bk}{\rho+m} (e^{(\rho+m)(t-T)} - 1) + D = \\ &= \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2} e^{2(\rho+m)(t-T)} + \left( \frac{Bk}{\rho+m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2} \right) e^{(\rho+m)(t-T)} + D - \frac{Bk}{\rho+m} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2 (\rho+2m)} e^{(\rho+2m)t-2(\rho+m)T} + \left( \frac{Bk}{(\rho+m)m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m} \right) e^{mt-(\rho+m)T} - \\ &\quad - \left( \frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2 \rho} \right) e^{-\rho t} + C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\beta(t) = \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2(\rho+2m)} e^{2(\rho+m)(t-T)} + \left( \frac{Bk}{(\rho+m)m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m} \right) e^{(\rho+m)(t-T)} - \left( \frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2 \rho} \right) + Ce^{\rho t}.$$

Постоянную интегрирования  $C$  определим из граничного условия

$$\beta(T) = \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2(\rho+2m)} + \left( \frac{Bk}{(\rho+m)m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m} \right) - \left( \frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2 \rho} \right) + Ce^{\rho T} = 0.$$

Значит,

$$C = -\frac{Ak^2}{(\rho+m)^2(\rho+2m)} e^{-\rho T} - \left( \frac{Bk}{(\rho+m)m} - \frac{2Ak^2}{(\rho+m)^2 m} \right) e^{-\rho T} + \left( \frac{D}{\rho} - \frac{Bk}{(\rho+m)\rho} + \frac{Ak^2}{(\rho+m)^2 \rho} \right) e^{-\rho T}.$$

Окончательно получаем выражение (1.9). Лемма 1 доказана.

Доказательство предложения 1. Введем функцию Беллмана

$$V_i(y, t) = \max_{\substack{x_i(s), \\ t \leq s \leq T}} \int_t^T e^{-\rho(s-t)} [(a - c_i - \bar{x}(s)) x_i(s) - y(s)] ds.$$

Выпишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s), \\ t \leq s \leq T}} \left\{ \frac{\partial V_i}{\partial y} \left( \sum_{j=1}^n k x_j - my \right) + (a - c_i - \bar{x}) x_i - y \right\}. \quad (\text{П.1})$$

Функцию Беллмана считаем линейной:

$$V_i(y, t) = \alpha(t) y + \beta(t).$$

Оптимизируя по  $x_i(s)$  выражение, стоящее в фигурных скобках в (П.1), видим, что

$$\alpha k + a - c_i - \sum_{j \neq i} x_j - 2x_i = 0,$$

так как

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \alpha, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n k x_j = k, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (a - c_i - \bar{x}) x_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( a - c_i - \sum_{j \neq i} x_j \right) x_i - x_i^2 \right] = a - c_i - \sum_{j \neq i} x_j - 2x_i.$$

Таким образом, имеем

$$\alpha k + a - c_i - \bar{x} - x_i = 0. \quad (\text{П.2})$$

Выписав условие (П.2) для каждого  $i = \overline{1, n}$  и просуммировав по  $i$ , получаем

$$\alpha nk + na - \bar{c} - n\bar{x} - \bar{x} = 0,$$

откуда находим

$$\bar{x} = \frac{1}{n+1} (\alpha nk + na - \bar{c}), \quad (\text{П.3})$$

$$x_i = \alpha k + a - c_i - \bar{x} = \frac{1}{n+1}(\alpha k + a + \bar{c} - (n+1)c_i). \quad (\text{П.4})$$

С учетом (П.3) и (П.4), из (П.1) находим:

$$\rho \alpha y + \rho \beta - \alpha' y - \beta' = \alpha k \bar{x} - \alpha m y + (a - c_i - \bar{x}) x_i - y. \quad (\text{П.5})$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $y$  в левой и правой частях уравнения (П.5), получаем дифференциальные уравнения для  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ :

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \quad (\text{П.6})$$

$$\beta' - \rho \beta = -\alpha k \bar{x} - (a - c_i - \bar{x}) x_i, \quad \beta(T) = 0. \quad (\text{П.7})$$

Согласно лемме 1, решение уравнения (П.6) имеет вид (1.7). Проверим, принадлежит ли найденная величина  $x_i(t)$  промежутку  $\left[0, \frac{a}{n}\right]$  при  $t \in [0, t]$ . Из (1.7) следует, что для  $t \in [0, T]$  выполнено соотношение

$$-\frac{1}{\rho + m} < \frac{1}{\rho + m}(e^{-(\rho+m)T} - 1) \leq \alpha(t) \leq 0.$$

Из (П.4) с учетом (1.4) и (1.5) вытекает, что

$$x_i = \frac{1}{n+1}(\alpha k + a + \bar{c} - (n+1)c_i) > \frac{1}{n+1}\left(-\frac{k}{\rho + m} + nc_i + \frac{nk}{\rho + m} + \bar{c} - (n+1)c_i\right) > 0.$$

Условие

$$x_i = \frac{1}{n+1}(\alpha k + a + \bar{c} - (n+1)c_i) \leq \frac{1}{n+1}(a + \bar{c} - (n+1)c_i) \leq \frac{a}{n},$$

т.е.  $\bar{c} \leq \frac{a}{n} + (n+1)c_i$ , при  $n = 3$  всегда выполняется, если  $c_2/c_1 \leq 3$ .

Вычислим правую часть уравнения (П.7), подставляя в него (П.3), (П.4):

$$\begin{aligned} F(t) = & -\alpha k \bar{x} - (a - c_i - \bar{x}) x_i = -(\alpha k)^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 - \\ & - \frac{\alpha k}{(n+1)^2} [(n^2 + 1)a - 2n\bar{c} + (n^2 - 1)c_i] - \frac{[a + \bar{c} - (n+1)c_i]^2}{(n+1)^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Тогда, согласно лемме 1,

$$\begin{aligned} \beta(t) = & \frac{n^2 k^2}{(n+1)^2 (\rho + m)^2 (\rho + 2m)} (e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) + \\ & + \left( \frac{[(n^2 + 1)a - 2n\bar{c} + (n^2 - 1)c_i]k}{(n+1)^2 (\rho + m)m} - \frac{2n^2 k^2}{(n+1)^2 (\rho + m)^2 m} \right) (e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \\ & + \left( \frac{n^2 k^2}{(n+1)^2 (\rho + m)^2 \rho} - \frac{[(n^2 + 1)a - 2n\bar{c} + (n^2 - 1)c_i]k}{(n+1)^2 (\rho + m)\rho} + \frac{[a + \bar{c} - (n+1)c_i]^2}{(n+1)^2 \rho} \right) (1 - e^{\rho(t-T)}). \end{aligned}$$

Таким образом,  $J_i^{\max} = V_i(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$ , окончательно получаем (1.11). Предложение 1 доказано.

**Доказательство леммы 2.** Введем функцию Беллмана

$$V_c(y, t) = \max_{\substack{x_i(s), \\ i=1, n, \\ t \leq s \leq T}} \int_t^T e^{-\rho(s-t)} \left[ \sum_{i=1}^n (a - c_i - \bar{x}(s)) x_i(s) - y(s) \right] ds.$$

Выпишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho V_c - \frac{\partial V_c}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s), \\ i=1, n, \\ t \leq s \leq T}} \left\{ \frac{\partial V_c}{\partial y} \left( \sum_{j=1}^n k x_j - my \right) + \sum_{i=1}^n (a - c_i - \bar{x}) x_i - y \right\}. \quad (\text{П.9})$$

Функцию Беллмана считаем линейной:

$$V_c(y, t) = \alpha(t)y + \beta(t).$$

Оптимизируя (П.10) по  $x_i(s)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , получаем систему уравнений

$$\alpha k + a - c_i - \sum_{j \neq i} x_j - 2x_i - \sum_{j \neq i} x_j = \alpha k + a - c_i - 2\bar{x} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Данная система уравнений при сделанном предположении  $c_1 \neq c_2$  не имеет решений. Максимальное значение функции выигрыша лежит на границе области допустимых значений параметров  $x_i(s)$ .

Введем обозначение:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial V_c}{\partial y} \left( \sum_{j=1}^n k x_j - my \right) + \sum_{i=1}^n (a - c_i - \bar{x}) x_i - y. \quad (\text{П.10})$$

Тогда (П.9) принимает вид

$$\rho V_c - \frac{\partial V_c}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s), \\ i=1, n, \\ t \leq s \leq T}} U(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

В любой момент времени максимум может находиться только на границе области определения управляющих переменных. В рассматриваемом случае строгого неравенства (2.5) максимум может лежать только на многообразии размерности 1 по тем же причинам, по которым он не может находиться внутри области, а именно максимум может быть только на ребре  $n$ -мерного куба.

Из начала координат будем двигаться вдоль того ребра  $n$ -мерного куба, для которого целевая функция быстрее всего растет (т.е. вдоль оси  $x_1$ ). Если на данном ребре мы не встретили локального максимума, то, дойдя до вершины  $(a/n, 0, \dots, 0)$ , изменим направление движения и будем теперь двигаться вдоль того ребра, вдоль которого целевая функция быстрее всего растет (т.е. вдоль оси  $x_2$ ). И т.д. вплоть до точки, в которой производная по выбранному направлению обратится в 0. В этой точке, очевидно, целевая функция достигает локального максимума. Пусть это произойдет на  $l$ -м по счету ребре. В точке максимума имеем

$$\alpha k + a - c_l - 2\bar{x} = \alpha k + a - c_l - \frac{2(l-1)a}{n} - 2x_l = 0,$$

откуда

$$x_l = \frac{n\alpha k + na - nc_l - 2(l-1)a}{2n} = \frac{n\alpha k + [n - 2(l-1)]a - nc_l}{2n}. \quad (\text{П.11})$$

Таким образом, точка максимума имеет координаты

$$\left( x_1 = \frac{a}{n}, \dots, x_{l-1} = \frac{a}{n}, x_l = \frac{n\alpha k + [n - 2(l-1)]a - nc_l}{2n}, x_{l+1} = 0, \dots, x_n = 0 \right). \quad (\text{П.12})$$

При этом

$$0 \leq \frac{n\alpha k + [n - 2(l-1)]a - nc_l}{2n} \leq \frac{a}{n},$$

или

$$0 \leq n\alpha k + (n - 2l + 2)a - nc_l \leq 2a,$$

т.е.  $l$  – такое натуральное число, для которого

$$\begin{aligned} n\alpha k + (n - 2l)a - nc_l &\leq 0, \\ 0 &\leq n\alpha k + [n - 2(l - 1)]a - nc_l. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство предложения 2. Предположим, что величина  $l$  не меняется на всем промежутке  $[0, T]$ . Заметим, что

$$\bar{x} = \frac{(l - 1)a}{n} + \frac{n\alpha k + [n - 2(l - 1)]a - nc_l}{2n} = \frac{n\alpha k + na - nc_l}{2n} = \frac{\alpha k + a - c_l}{2}. \quad (\text{П.13})$$

Подставляя (П.11), (П.12) и (П.13) в (П.9), запишем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha'y - \beta' = \alpha k \bar{x} - \alpha m y + \sum_{i=1}^{l-1} (a - c_i - \bar{x}) \frac{a}{n} + (a - c_l - \bar{x}) x_l - y. \quad (\text{П.14})$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $y$  в левой и правой частях уравнения (П.14), получаем дифференциальные уравнения для  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ :

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \quad (\text{П.15})$$

$$\beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \quad (\text{П.16})$$

где

$$F(t) = -\frac{1}{4}(\alpha k)^2 - \frac{(a - c_l)}{2}\alpha k - \frac{(a - c_l)^2}{4} + \frac{a \left[ \sum_{i=1}^{l-1} c_i - (l - 1)c_l \right]}{n}.$$

Решая уравнение (П.15)–(П.16), согласно лемме 1, находим

$$\begin{aligned} \beta(t) = & \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)} (e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) + \left( \frac{(a - c_l)k}{2(\rho + m)m} - \frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m} \right) (e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \\ & + \left( \frac{(a - c_l)^2}{4\rho} - \frac{a \left[ \sum_{i=1}^{l-1} c_i - (l - 1)c_l \right]}{n\rho} - \frac{(a - c_l)k}{2(\rho + m)\rho} + \frac{k^2}{4(\rho + m)^2 \rho} \right) (1 - e^{\rho(t-T)}). \end{aligned}$$

Таким образом,  $J_c^{\max} = V_c(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$ , окончательно получаем (2.7). Предложение 2 доказано.

Доказательство предложения 3. Максимум функции  $U$  в (П.10) находится на первом ребре, если полученное из условия равенства нулю на первом ребре производной по направлению первого ребра

$$\alpha k + a - c_1 - 2x_1 = 0$$

значение переменной  $x_1$

$$x_1 = \frac{\alpha k + a - c_1}{2}$$

для случая  $n = 3$  окажется меньше  $a/3$ , т.е. если при некотором  $t_1$  верно, что

$$\begin{aligned} \frac{\alpha k + a - c_1}{2} &< \frac{a}{3}, \\ \frac{3k}{\rho + m} (e^{(\rho+m)(t_1-T)} - 1) &< 3c_1 - a. \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

В этом случае при  $t \in [0, t_1]$  максимум находится на первом ребре, а при  $t \in [t_1, T]$  максимум находится на втором ребре, поскольку условие равенства нулю на втором ребре производной целевой функции по направлению второго ребра имеет вид

$$\alpha k + a - c_2 - \frac{2a}{3} - 2x_2 = 0,$$

откуда

$$x_2 = \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6} = \frac{k}{2(\rho + m)} (e^{(\rho+m)(t-T)} - 1) + \frac{a - 3c_2}{6} < \frac{a}{3}$$

при  $t \leq T$ . Однако из (1.4) следует, что условие (П.17) всегда нарушено. Таким образом, для любого  $t \in [t_1, T]$  максимум достигается на втором ребре в точке

$$\left(\frac{a}{3}, x_2(t), 0\right).$$

Предложение 3 доказано.

Доказательство предложения 4. Введем функцию Беллмана

$$V_i(y, t) = \max_{\substack{x_i(s), \\ t \leq s \leq T}} \int_t^T e^{-\rho(s-t)} [(a - c_i - x_1(s) - \tilde{x}(s)) x_i(s) - y(s)] ds,$$

которую мы считаем линейной:

$$V_i(y, t) = \alpha(t)y + \beta(t).$$

Выпишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s), \\ t \leq s \leq T}} \{\alpha(k(x_1 + \tilde{x}) - my) + (a - c_i - x_1 - \tilde{x})x_i - y\}, \quad \tilde{x} = \sum_{j=2}^n x_j. \quad (\text{П.18})$$

Оптимизируя (П.18) по  $x_i(s)$ , находим

$$\alpha k + a - c_i - x_1 - \sum_{\substack{j=2, \\ j \neq i}}^n x_j - 2x_i = 0,$$

или

$$x_i = \alpha k + a - c_i - x_1 - \tilde{x}. \quad (\text{П.19})$$

Суммируя по  $i$  от 2 до  $n$ , получаем

$$\tilde{x} = \alpha(n-1)k + (n-1)a - \tilde{c} - (n-1)x_1 - (n-1)\tilde{x},$$

откуда

$$\tilde{x} = \frac{(n-1)}{n}\alpha k + \frac{(n-1)}{n}a - \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n-1}{n}x_1, \quad \tilde{c} = \sum_{j=2}^n c_j. \quad (\text{П.20})$$

Зная зависимость  $\tilde{x}$  от  $x_1$  (П.20), первый игрок (ведущий) решает свою оптимизационную задачу (3.1) при ограничениях (1.2)–(1.5). Введем функцию Беллмана

$$V_1(y, t) = \max_{\substack{x_1(s), \\ t \leq s \leq T}} \int_t^T e^{-\rho(s-t)} [(a - c_1 - x_1(s) + \tilde{x}(s)) x_1(s) - y(s)] ds,$$

которую считаем линейной:  $V_1(y, t) = \alpha_1(t)y + \beta(t)$ . Выпишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для первого игрока:

$$\rho V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial t} = \max_{\substack{x_1(s), \\ t \leq s \leq T}} \{\alpha_1(k(x_1 + \tilde{x}) - my) + (a - c_1 - x_1 - \tilde{x})x_1 - y\}. \quad (\text{П.21})$$

Из (П.20) получаем

$$x_1 + \tilde{x} = \frac{(n-1)}{n} \alpha_1 k + \frac{(n-1)}{n} a - \frac{\tilde{c}}{n} + \frac{x_1}{n}.$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для первого игрока принимает вид

$$\begin{aligned} \rho V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial t} = \max_{\substack{x_1(s), \\ t \leq s \leq T}} \left\{ \alpha_1 \left( k \left( \frac{(n-1)}{n} \alpha_1 k + \frac{(n-1)}{n} a - \frac{\tilde{c}}{n} + \frac{x_1}{n} \right) - m y \right) + \right. \\ \left. + \left( a - c_1 - \frac{(n-1)}{n} \alpha_1 k - \frac{(n-1)}{n} a + \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{x_1}{n} \right) x_1 - y \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

Оптимизируя (П.22) по  $x_1(s)$ , находим

$$\frac{\alpha_1 k}{n} + a - c_1 - \frac{n-1}{n} \alpha_1 k - \frac{n-1}{n} a + \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{2x_1}{n} = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{2-n}{2} \alpha_1 k + \frac{a}{2} + \frac{\tilde{c} - nc_1}{2}.$$

Из (П.22) находим

$$\rho \alpha_1 y + \rho \beta - \alpha_1' y - \beta' = \alpha_1 k (x_1 + \tilde{x}) - \alpha_1 m y + (a - c_1 - x_1 - \tilde{x}) x_1 - y. \quad (\text{П.23})$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $y$  в левой и правой частях уравнения (П.23), определяем дифференциальные уравнения для  $\alpha_1(t)$  и  $\beta(t)$ :

$$\alpha_1' - (\rho + m) \alpha_1 = 1, \quad \alpha_1(T) = 0, \quad (\text{П.24})$$

$$\beta' - \rho \beta = -\alpha_1 k (x_1 + \tilde{x}) - (a - c_1 - x_1 - \tilde{x}) x_1, \quad \beta(T) = 0. \quad (\text{П.25})$$

Решая уравнение (П.24), согласно лемме1, находим

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\rho + m} (e^{(\rho+m)(t-T)} - 1) = \alpha(t).$$

Заметим, что при  $n \geq 3$

$$x_1 = \frac{n-2}{2} \cdot \frac{k}{\rho + m} (1 - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \frac{a + \tilde{c} - nc_1}{2} > \frac{a}{n},$$

поскольку при ограничениях (1.2)–(1.5) очевидно, что

$$(n-2)a + n\tilde{c} - n^2 c_1 > 0.$$

Поэтому

$$x_1 = \frac{a}{n}, \quad \tilde{x} + x_1 = \frac{(n-1)}{n} \alpha k + \frac{(n-1)}{n} a - \frac{\tilde{c}}{n} + \frac{a}{n^2} = \frac{(n-1)}{n} \alpha k - \frac{\tilde{c}}{n} + \frac{n^2 - n + 1}{n^2} a. \quad (\text{П.26})$$

Обозначим правую часть уравнения (П.25)  $F(t)$ . Подставляя (П.26) в (П.25), получаем

$$F(t) = -\frac{n-1}{n} (\alpha k)^2 + \alpha k \left( \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2 - 2n + 2}{n^2} a \right) + \left( \frac{nc_1 - \tilde{c}}{n} - \frac{n-1}{n^2} a \right) \frac{a}{n}.$$

Согласно лемме 1, решение уравнения (П.25) имеет вид

$$\begin{aligned} \beta(t) = & \frac{k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) + \\ & + \left( \frac{(n^2-2n+2)k}{n^2(\rho+m)m}a - \frac{\tilde{c}k}{n(\rho+m)m} - \frac{2k^2(n-1)}{n(\rho+m)^2m} \right) \cdot (e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \\ & + \left[ \frac{k}{(\rho+m)\rho} \left( \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-2n+2}{n^2}a \right) + \left( \frac{n-1}{n^2}a - \frac{nc_1-\tilde{c}}{n} \right) \frac{a}{n\rho} - \frac{(n-1)k^2}{n(\rho+m)^2\rho} \right] (1 - e^{\rho(t-T)}). \end{aligned}$$

Таким образом,  $J_1 = V_1(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$ , окончательно получаем (3.2).

Вернемся к решению задачи  $i$ -й фирмы-ведомого,  $i = \overline{2, n}$ . Из (П.18) следует

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha'y - \beta' = \alpha k(x_1 + \tilde{x}) - \alpha m y + (a - c_i - x_1 - \tilde{x})x_i - y. \quad (\text{П.27})$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $y$  в левой и правой частях уравнения (П.27), находим дифференциальные уравнения для  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ :

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \quad (\text{П.28})$$

$$\beta' - \rho\beta = -\alpha k(x_1 + \tilde{x}) - (a - c_i - x_1 - \tilde{x})x_i, \quad \beta(T) = 0. \quad (\text{П.29})$$

Решая уравнение (П.28), получим

$$\alpha(t) = \frac{1}{\rho + m}(e^{(\rho+m)(t-T)} - 1).$$

Обозначим правую часть уравнения (П.29) через  $F(t)$ . Подставим (П.19) и (П.26) в (П.29), тогда

$$F(t) = -\left(\frac{n-1}{n}\right)^2(\alpha k)^2 + \alpha k \left[ \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-n+1}{n^2}a + \frac{n-2}{n} \left( \frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a \right) \right] - \left( \frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a \right)^2.$$

Решение уравнения (П.29), согласно лемме 1, равно

$$\begin{aligned} \beta(t) = & \frac{(n-1)^2 k^2}{n^2(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left\{ \frac{2(n-1)^2 k^2}{n^2(\rho+m)^2 m} + \frac{k}{(\rho+m)m} \times \right. \\ & \times \left[ \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-n+1}{n^2}a + \frac{n-2}{n} \left( \frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a \right) \right] \left. \right\} (e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \left\{ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{k}{(\rho+m)\rho} \left[ \frac{\tilde{c}}{n} - \frac{n^2-n+1}{n^2}a + \frac{n-2}{n} \left( \frac{\tilde{c}-nc_i}{n} + \frac{n-1}{n^2}a \right) \right] + \frac{(n-1)^2 k^2}{n^2(\rho+m)^2 \rho} \right\} (1 - e^{\rho(t-T)}). \end{aligned}$$

Таким образом,  $J_i = V_i(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$ , окончательно получаем (3.3). Предложение 4 доказано.

**Доказательство предложения 5.** При вычислении характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна, очевидно,  $x_j = a/3$ ,  $x_k = a/3$ . Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в этом случае принимает вид

$$\rho V_i - \frac{\partial V_i}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s), \\ t \leq s \leq T}} \left\{ \frac{\partial V_i}{\partial y} \left( k \left( x_i + \frac{2a}{3} \right) - my \right) + \left( a - c_i - x_i - \frac{2a}{3} \right) x_i - y \right\}. \quad (\text{П.30})$$

Считаем функцию Беллмана линейной

$$V_i(t, y) = \alpha(t)y + \beta(t).$$

Максимизируя (П.30) по  $x_i$ , находим

$$\alpha k + a - c_i - 2x_i - \frac{2a}{3} = 0,$$

поэтому

$$x_i = \frac{3\alpha k + a - 3c_i}{6}. \quad (\text{П.31})$$

Ясно, что в любой момент времени  $0 < x_i < a/3$ . Подставляя (П.31) в (П.30), получаем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha'y - \beta' = \alpha k x_i + \alpha k \frac{2a}{3} - \alpha m y + \left(\frac{a}{3} - c_i\right) x_i - x_i^2 - y. \quad (\text{П.32})$$

Приравнявая коэффициенты при переменной  $y$  и свободные члены в левой и правой частях равенства (П.32), находим уравнения

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \quad \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \quad (\text{П.33})$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} - \frac{5a - 3c_i}{6} \alpha k - \frac{(a - 3c_i)^2}{36}.$$

Решение (П.33), согласно лемме 1, имеет вид

$$\begin{aligned} \beta(t) = & \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)} (e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left( \frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m} - \frac{(5a - 3c_i)k}{6(\rho + m)m} \right) (e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \\ & + \left( \frac{k^2}{4(\rho + m)^2 \rho} - \frac{(5a - 3c_i)k}{6(\rho + m)\rho} + \frac{(a - 3c_i)^2}{36\rho} \right) (1 - e^{\rho(t-T)}). \end{aligned}$$

Тогда  $v^{NM}(i) = V_i(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$ , окончательно получаем (4.1). Предложение 5 доказано.

**Доказательство предложения 6.** При вычислении характеристической функции фон Неймана–Моргенштерна, очевидно,  $x_k = a/3$ . Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в этом случае принимает вид

$$\rho V_K - \frac{\partial V_K}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s), \\ t \leq s \leq T}} \left\{ \frac{\partial V_K}{\partial y} \left( k \left( x_i + \frac{a}{3} \right) - m y \right) + \left( a - c_i - x_i - \frac{a}{3} \right) x_i - y \right\}, \quad (\text{П.34})$$

поскольку из условия максимума

$$\alpha k + \frac{2a}{3} - c_i - 2x_i = 0$$

следует

$$0 < x_i = \frac{3\alpha k + 2a - 3c_i}{6} < \frac{a}{3},$$

т.е. максимум выигрыша коалиции достигается в точке

$$\left( x_i = \frac{3\alpha k + 2a - 3c_i}{6}, x_j = 0, x_k = \frac{a}{3} \right). \quad (\text{П.35})$$

Подставляя (П.35) в (П.34), получаем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha'y - \beta' = \alpha \left[ k \left( x_i + \frac{a}{3} \right) - m y \right] + (a - c_i - x_i) x_i - y. \quad (\text{П.36})$$

Приравнявая в (П.36) коэффициенты при переменной  $y$  и свободные члены в левой и правой частях равенства, находим уравнения

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \quad \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \quad (\text{П.37})$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} + \frac{\alpha k (3c_i - 5a)}{6} + \frac{(2a - 3c_i)(3c_i - 4a)}{36}.$$

Решаем уравнение (П.37) с помощью леммы 1:

$$\beta(t) = \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left( \frac{(3c_i - 5a)k}{6(\rho+m)m} + \frac{k^2}{2(\rho+m)^2m} \right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \\ + \left( \frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho} + \frac{(3c_i - 5a)k}{6(\rho+m)\rho} - \frac{(2a - 3c_i)(3c_i - 4a)}{36\rho} \right)(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда  $v^{NM}(i, j) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$ , окончательно получаем (4.2). Предложение 6 доказано.

Доказательство предложения 7. 1) Пусть  $K = \{1, 2\}$ ,  $N \setminus K = \{3\}$ . Тогда инвестиции игроков равны

$$\left( x_1 = \frac{a}{3}, x_2 = \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6}, x_3 = \frac{a}{3} \right). \quad (\text{П.38})$$

Заметим, что

$$\bar{x} = \frac{2a}{3} + \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6} = \frac{3\alpha k + 5a - 3c_2}{6}. \quad (\text{П.39})$$

Функцию Беллмана считаем линейной по переменной  $y$ :

$$V(t, y) = \alpha(t)y + \beta(t).$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в этом случае принимает вид

$$\rho V_K - \frac{\partial V_K}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s), \\ i=1,2, \\ t \leq s \leq T}} \{ \alpha(k\bar{x} - my) + (a - c_1 - \bar{x})x_1 + (a - c_2 - \bar{x})x_2 - y \}. \quad (\text{П.40})$$

Подставляя значения переменных (П.38) и (П.39) в уравнение (П.40), получаем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha'y - \beta' = \alpha k \bar{x} - \alpha m y + (a - c_1 - \bar{x})\frac{a}{3} - (a - c_2 - \bar{x})x_2 - y,,$$

откуда

$$\alpha' - (\rho + m)\alpha = 1, \quad \alpha(T) = 0, \quad \beta' - \rho\beta = F(t), \quad \beta(T) = 0, \quad (\text{П.41})$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} + \frac{3c_2 - 4a}{6}\alpha k - \frac{3a^2 - 12ac_1 + 9c_2^2}{36}.$$

Решаем уравнение (П.41), согласно лемме 1:

$$\beta(t) = \frac{k^2}{4(\rho+m)^2(\rho+2m)}(e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left( \frac{2k^2}{(\rho+m)^2m} + \frac{(3c_2 - 4a)k}{6(\rho+m)m} \right)(e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \\ + \left( \frac{3a^2 - 12ac_1 + 9c_2^2}{36\rho} + \frac{k^2}{4(\rho+m)^2\rho} + \frac{(3c_2 - 4a)k}{6(\rho+m)\rho} \right)(1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда  $v^{PG}(1, 2) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$ , окончательно получаем (5.1).

2) Пусть  $K = \{2, 3\}$ ,  $N \setminus K = \{1\}$ . Тогда инвестиции игроков равны

$$\left( x_1 = \frac{a}{3}, x_2 = \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6}, x_3 = 0 \right). \quad (\text{П.42})$$

Заметим, что

$$\bar{x} = \frac{a}{3} + \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6} = \frac{3\alpha k + 3a - 3c_2}{6} = \frac{\alpha k + a - c_2}{2}. \quad (\text{П.43})$$

Функцию Беллмана считаем линейной по переменной  $y$ :

$$V(t, y) = \alpha(t)y + \beta(t).$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в этом случае принимает вид

$$\rho V_K - \frac{\partial V_K}{\partial t} = \max_{\substack{x_i(s), \\ i=2,3, \\ t \leq s \leq T}} \{ \alpha(k \bar{x} - my) + (a - c_2 - \bar{x})x_2 - y \}. \quad (\text{П.44})$$

Подставляя значения переменных (П.42) и (П.43) в уравнение (П.44), получаем

$$\rho \alpha y + \rho \beta - \alpha' y - \beta' = \alpha(k \bar{x} - my) + (a - c_2 - \bar{x})x_2 - y,$$

откуда

$$\begin{aligned} \alpha' - (\rho + m)\alpha &= 1, & \alpha(T) &= 0, \\ \beta' - \rho\beta &= F(t), & \beta(T) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{П.45})$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} + \frac{3c_2 - 4a}{6} \alpha k - \frac{a^2 - 4ac_2 + 3c_2^2}{12}.$$

Решая уравнение (П.45), согласно лемме 1, находим

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)} (e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left( \frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m} + \frac{(3c_2 - 4a)k}{6(\rho + m)m} \right) (e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \\ &+ \left( \frac{k^2}{4(\rho + m)^2 \rho} + \frac{(3c_2 - 4a)k}{6(\rho + m)\rho} + \frac{(a - c_2)(a - 3c_2)}{12\rho} \right) (1 - e^{\rho(t-T)}). \end{aligned}$$

Тогда  $v^{PG}(2, 3) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$ , окончательно получаем (5.2).

3) Пусть  $K = \{1, 3\}$ ,  $N \setminus K = \{2\}$ . Тогда инвестиции игроков равны

$$\left( x_1 = \frac{a}{3}, x_2 = \frac{a}{3}, x_3 = 0 \right). \quad (\text{П.46})$$

Подставляя значения переменных (П.46) в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, находим

$$\rho \alpha y + \rho \beta - \alpha' y - \beta' = \alpha(k \bar{x} - my) + (a - c_1 - \bar{x})x_1 - y,$$

откуда

$$\begin{aligned} \alpha' - (\rho + m)\alpha &= 1, & \alpha(T) &= 0, \\ \beta' - \rho\beta &= F(t), & \beta(T) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{П.47})$$

где

$$F(t) = -\frac{2a}{3} \alpha k - \frac{(a - 3c_1)a}{9}.$$

Решаем уравнение (П.47):

$$\beta(t) = \frac{2ak}{3(\rho + m)m} (e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \left( \frac{(a - 3c_1)a}{9\rho} - \frac{2ak}{3(\rho + m)\rho} \right) (1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда  $v^{PG}(1, 3) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$ , окончательно получаем (5.3).

4) Пусть  $K = \{1\}$ ,  $N \setminus K = \{2, 3\}$ . Тогда инвестиции игроков равны

$$\left( x_1 = \frac{a}{3}, x_2 = \frac{a}{3}, x_3 = \frac{a}{3} \right). \quad (\text{П.48})$$

Подставляем значения переменных (П.48) в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho \alpha y + \rho \beta - \alpha' y - \beta' = \alpha(k \bar{x} - my) + (a - c_1 - \bar{x})x_1 - y,$$

откуда

$$\begin{aligned}\alpha' - (\rho + m)\alpha &= 1, & \alpha(T) &= 0, \\ \beta' - \rho\beta &= F(t), & \beta(T) &= 0,\end{aligned}\quad (\text{П.49})$$

где

$$F(t) = -a\alpha k + \frac{ac_1}{3}.$$

Решая уравнение (П.49), находим

$$\beta(t) = \frac{ak}{(\rho + m)m} (e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) - \left( \frac{ak}{(\rho + m)\rho} + \frac{ac_1}{3\rho} \right) (1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда  $v^{PG}(1) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$ , окончательно получаем (5.4).

5) Пусть  $K = \{2\}$ ,  $N \setminus K = \{1, 3\}$ . Тогда инвестиции игроков равны

$$\left( x_1 = \frac{a}{3}, x_2 = \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6}, x_3 = \frac{a}{3} \right). \quad (\text{П.50})$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2a}{3} + \frac{3\alpha k + a - 3c_2}{6} = \frac{3\alpha k + 5a - 3c_2}{6}, \\ a - c_2 - \bar{x} &= a - c_2 - \frac{3\alpha k + 5a - 3c_2}{6} = \frac{a - 3c_2 - 3\alpha k}{6}.\end{aligned}$$

Подставляя значения переменных (П.50) в уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана, получаем

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha'y - \beta' = \alpha(k\bar{x} - my) + (a - c_2 - \bar{x})x_2 - y,$$

откуда

$$\begin{aligned}\alpha' - (\rho + m)\alpha &= 1, & \alpha(T) &= 0, \\ \beta' - \rho\beta &= F(t), & \beta(T) &= 0,\end{aligned}\quad (\text{П.51})$$

где

$$F(t) = -\frac{(\alpha k)^2}{4} + \frac{3c_2 - 5a}{6}\alpha k - \frac{(a - 3c_2)^2}{36}.$$

Решая уравнение (П.51), находим

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \frac{k^2}{4(\rho + m)^2(\rho + 2m)} (e^{\rho(t-T)} - e^{2(\rho+m)(t-T)}) - \left( \frac{k^2}{2(\rho + m)^2 m} + \frac{(3c_2 - 5a)k}{6(\rho + m)m} \right) (e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) + \\ &+ \left( \frac{k^2}{4(\rho + m)^2 \rho} + \frac{(3c_2 - 5a)k}{6(\rho + m)\rho} + \frac{(a - 3c_2)^2}{36\rho} \right) (1 - e^{\rho(t-T)}).\end{aligned}$$

Тогда  $v^{PG}(2) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$ , окончательно получаем (5.5).

6) Пусть  $K = \{3\}$ ,  $N \setminus K = \{1, 2\}$ . Тогда инвестиции игроков в равновесии равны

$$\left( x_1 = \frac{a}{3}, x_2 = \frac{a}{3}, x_3 = 0 \right). \quad (\text{П.52})$$

Подставляем значения переменных (П.52) в уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана:

$$\rho\alpha y + \rho\beta - \alpha'y - \beta' = \alpha(k\bar{x} - my) - y,$$

откуда

$$\begin{aligned}\alpha' - (\rho + m)\alpha &= 1, & \alpha(T) &= 0, \\ \beta' - \rho\beta &= -\frac{2a}{3}\alpha k, & \beta(T) &= 0,\end{aligned}\quad (\text{П.53})$$

Решая уравнение (П.53), находим

$$\beta(t) = \frac{2ak}{3(\rho + m)m} (e^{\rho(t-T)} - e^{(\rho+m)(t-T)}) - \frac{2ak}{3(\rho + m)\rho} (1 - e^{\rho(t-T)}).$$

Тогда  $v^{PG}(2) = V_K(0, y(0)) = \alpha(0)y_0 + \beta(0)$ , окончательно получаем (5.6). Предложение 7 доказано.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Algorithmic Game Theory. Eds *N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirany*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
2. *Dubey P.* Inefficiency of Nash equilibria // *Math. Operations Research*, 1986. V. 11(1). P. 1–8.
3. *Johari R., Tsitsiklis J.N.* Efficiency Loss in a Network Resource Allocation Game // *Math. Oper. Res.* 2004. V. 29(3). P. 407–435.
4. *Moulin H., Shenker S.* Strategy Proof Sharing of Submodular Costs: Budget Balance Versus Efficiency // *Econ. Theory*. 2001. V. 18(3). P. 511–533.
5. *Roughgarden T.* Selfish Routing and the Price of Anarchy. Cambridge: MIT Press, 2005.
6. *Papadimitriou C.H.* Algorithms, Games, and the Internet // *Proc. 33rd Sympos. Theory of Computing*. Cambridge: 2001. P. 749–753.
7. *Угольников Г.А.* Методика сравнительного анализа эффективности способов организации активных агентов и методов управления // *Проблемы управления*. 2022. Т. 3. С. 29–39.
8. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985. 200 с.
9. *Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R.* Microeconomic Theory. Oxford: Oxford University Press, 1995.
10. *Vives X.* Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools. Cambridge: MIT Press, 1999.
11. *Basar T., Olsder G.Y.* Dynamic Non-Cooperative Game Theory. Philadelphia: SIAM, 1999. 506 p.
12. *Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G.* Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 382 p.
13. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
14. *Petrosjan L.A., Zenkevich N.A.* Game Theory. Basel: World Scientific Publishing, 1996.
15. *Petrosyan L.A., Yeung D.W.K.* Shapley Value for Differential Network Games: Theory and Application // *J. Dynamics and Games*. 2021. V. 8(2). P. 151–166.
16. *Shapley L.* A Value for  $n$ -person Games // *Contributions to the Theory of Games*. Vol. II Eds H.W. Kuhn, A.W. Tucker. Princeton: 1953.
17. *Neumann J. von, Morgenstern O.* Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton University Press, 1953.
18. *Petrosjan L., Zaccour G.* Time-consistent Shapley Value Allocation of Pollution Cost Reduction // *J. Economic Dynamics and Control*. 2003. V. 27(3). P. 381–398.
19. *Gromova E.V., Petrosyan L.A.* On an Approach to Constructing a Characteristic Function in Cooperative Differential Games // *Automation and Remote Control*. 2017. V. 78. P. 1680–1692.
20. *Gromova E., Marova E., Gromov D.* A Substitute for the Classical Neumann–Morgenstern Characteristic Function in Cooperative Differential Games // *J. Dynamics and Games*. 2020. V. 7(2). P. 105–122.
21. *Угольников Г.А., Усов А.Б.* Исследование дифференциальных моделей иерархических систем управления путем их дискретизации // *АиТ*. 2013. № 2. С. 109–122.
22. *Угольников Г.А., Усов А.Б.* Динамические модели коррупции в иерархических системах управления при эксплуатации биоресурсов // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2014. № 6. С. 168–176.
23. *Угольников Г.А., Усов А.Б.* Алгоритмы решения дифференциальных моделей иерархических систем управления // *АиТ*. 2016. № 5. С. 148–158.
24. *Korolev A.V., Ougolnitsky G.A.* Optimal Resource Allocation in the Difference and Differential Stackelberg Games on Marketing Network // *J. Dynamics and Games*. 2020. V. 7(2). P. 141–162.

---

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ  
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

---

УДК 519.81

## **ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА УРОВНИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ МАЖОРИТАРНОГО ГРАФА**

© 2023 г. С. О. Смерчинская<sup>а,\*</sup>, Н. П. Яшина<sup>а,\*\*</sup>

<sup>а</sup>МАИ (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

\*e-mail: svetlana\_os@mail.ru

\*\*e-mail: nina\_p\_yashina@mail.ru

Поступила в редакцию 21.07.2022 г.

После доработки 25.08.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Рассматриваются задачи принятия решений с большим числом альтернатив. Предлагается предварительно сузить исходное множество альтернатив, исключив заведомо худшие варианты. С этой целью проводится декомпозиция исходной задачи на уровни предпочтения мажоритарного графа. Уровни графа, содержащие наименее предпочтительные альтернативы, удаляются. Разработан алгоритм построения агрегированного полного квазипорядка для упорядочения множества наилучших альтернатив. Уровни предпочтения мажоритарного графа используются для ранжирования альтернатив с помощью Гамильтоновых путей в орграфе. Предлагается алгоритм нахождения Гамильтоновых путей в орграфе методом возведения в степень матрицы смежности. Представлена прикладная задача упорядочения моделей дронов с помощью алгоритма построения полного квазипорядка.

**DOI:** 10.31857/S0002338823010109, **EDN:** JATRSU

**Введение.** Рассматривается задача проведения декомпозиции множества альтернатив с последующим упорядочиванием подмножества наиболее предпочтительных вариантов. При решении задач с большим числом альтернатив возникает необходимость использовать полиномиальные алгоритмы, так как современные вычислительные средства не в состоянии решать алгоритмы класса NP (non-deterministic polynomial) за приемлемое время [1]. Но многие переборные алгоритмы обладают преимуществом перед полиномиальными, обеспечивая наибольшую степень согласованности агрегированного отношения с профилем исходных предпочтений (экспертов или по критериям качества). Задачи с большим числом альтернатив возникают, в частности, при выборе наиболее успешных проектов или предприятий с целью инвестирования каким-либо венчурным фондом. В этом случае целесообразно предварительно отбросить заведомо худшие варианты и работать далее с подмножеством наиболее предпочтительных альтернатив.

Практически все алгоритмы группового выбора требуют от экспертов ранжирования альтернатив, что невозможно осуществить при большом количестве вариантов. Алгоритмы, предложенные в статье, основываются на профиле исходных предпочтений, содержащем произвольные бинарные отношения. Ранжирования альтернатив не требуется, достаточно попарно сравнить хорошо известные экспертам варианты. При необходимости ЛПР (лицо, принимающее решения) может дополнить информацию, но уже только на множестве наилучших альтернатив.

Статья является продолжением работы [2], в которой предложен алгоритм разбиения орграфа на уровни предпочтения. Уровни предпочтения позволяют провести декомпозицию первоначальной задачи и исключить из рассмотрения заведомо худшие альтернативы, тем самым уменьшить время работы алгоритма и сделать возможным использование даже алгоритмов класса NP.

Одним из наиболее математически обоснованных алгоритмов класса NP является построение медианы Кемени [3] — ранжирования альтернатив, минимально удаленные от экспертных предпочтений. Согласованность предпочтений измеряется расстоянием Хэмминга между матрицами смежности соответствующих им орграфов. Ж.-А. Кондорсе еще в XVIII в. предложил выбирать в качестве группового решения ранжирование альтернатив, соответствующее максимальному числу отданных за него голосов экспертов [4]. Такому ранжированию удовлетворял Гамильтонов путь максимальной длины в нагруженном голосами экспертов орграфе. Эту же идею использует

и М. Шульце [5], предложивший метод выбора победителя в голосовании, который в настоящее время часто применяется. Алгоритмы нахождения Гамильтоновых путей [6] и построения медианы Кемени являются переборными и, следовательно, могут быть применены только для очень небольшого числа альтернатив.

Предлагаемая в статье процедура нахождения подмножества наиболее предпочтительных альтернатив имеет полиномиальную сложность. Она базируется на предварительном построении мажоритарного графа. В [7] показано, что отношение, имеющее минимальное суммарное расстояние до исходных предпочтений, находится по правилу большинства, т.е. соответствует мажоритарному графу. Алгоритм построения мажоритарного графа имеет вычислительную сложность  $O(mn^2)$  от числа экспертов  $m$  и альтернатив  $n$ . И хотя мажоритарный граф может быть нетранзитивным, содержать противоречивые контуры [8, 9], именно его целесообразно выбирать в качестве основы для декомпозиции исходной задачи. Разбиение мажоритарного графа на уровни предпочтения дает возможность в дальнейшем работать только с наилучшими альтернативами, но при необходимости можно ранжировать альтернативы каждого уровня предпочтения.

В статье для ранжирования наиболее предпочтительных альтернатив разработан алгоритм построения агрегированного полного квазипорядка (нестрогое ранжирование), который включает в себя участие ЛПР для получения дополнительной информации о предпочтениях альтернатив.

Строгий линейный порядок (строгое ранжирование) предлагается получить с помощью Гамильтоновых путей максимальной длины [10, 11]. Длина пути соответствует суммарному числу голосов экспертов по всем дугам пути. В статье разработан алгоритм нахождения Гамильтоновых путей в компоненте сильной связности орграфа методом возведения в степень матрицы смежности. Алгоритм базируется на изложенной в [11] процедуре нахождения Гамильтоновых циклов в неориентированном графе. Также предлагается алгоритм нахождения Гамильтоновых путей в исходном орграфе на основе путей, построенных на уровнях предпочтения мажоритарного графа. В этом случае сложность алгоритма нахождения Гамильтонова пути совпадает со сложностью нахождения Гамильтонова пути в компоненте сильной связности орграфа, имеющей наибольшее число вершин.

**1. Постановка задачи.** Задано множество альтернатив  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , причем число альтернатив достаточно велико. Профиль исходных предпочтений (экспертов или по критериям качества) — бинарные отношения  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$  на множестве  $A$ : упорядоченная пара альтернатив из  $A$   $a_i, a_j \in \rho_t$ , где  $t = 1, \dots, m$ , если элемент  $a_i$  не более предпочтителен, чем элемент<sup>1</sup>  $a_j$ . Требуется найти строгое или нестрогое ранжирование  $\tilde{\rho}$  наилучших альтернатив  $\tilde{A} \subseteq A$  по предпочтительности.

Под строгим ранжированием будем понимать отношение строгого порядка (антирефлексивное и транзитивное), при котором все альтернативы попарно сравнимы. Под нестрогим ранжированием — отношение полного квазипорядка (рефлексивное и транзитивное).

Из постановки задачи следует, что ее решение разбивается на две части:

- 1) выделение подмножества наилучших альтернатив  $\tilde{A} \subseteq A$ ;
- 2) ранжирование альтернатив из подмножества  $\tilde{A}$ .

Решение первой части задачи сводится к приведенному авторами алгоритму разбиения мажоритарного графа на уровни предпочтения [2]. Наилучшие альтернативы будут находиться на нулевом уровне предпочтения. Для получения нестрогого и строгого ранжирования альтернатив разработаны два метода:

- 1) построение отношения до полного квазипорядка;
- 2) нахождение Гамильтоновых путей максимальной длины.

Алгоритм в [2] позволяет выделить подмножество наилучших альтернатив  $\tilde{A} \subseteq A$ . Опишем его.

<sup>1</sup> Отношения  $\rho_t$  ( $t = 1, \dots, m$ ) можно выбрать и по-другому:  $\langle a_i, a_j \rangle \in \rho_t \Leftrightarrow$  элемент  $a_i$  не менее предпочтителен, чем элемент  $a_j$ , но стандартные процедуры выбора наилучших альтернатив (ядро, доминирующее подмножество и т.п.) удобнее реализовывать для отношения «менее предпочтителен».

Произвольному бинарному отношению  $\rho$ , заданному на множестве  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , поставим в соответствие орграф  $G = \langle A, \rho \rangle$  с множеством вершин  $A$  и множеством дуг  $\rho$ . Множество дуг — это множество упорядоченных пар  $\langle a_i, a_j \rangle$  ( $a_i, a_j \in A$ ), входящих в отношение  $\rho$ .

Матрица смежности орграфа  $R = \|r_{ij}\|$  определяется как квадратная матрица порядка  $n$  с элементами:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } \langle a_i, a_j \rangle \in \rho; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, профиль исходных предпочтений  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$  будем задавать матрицами смежности  $R^1, R^2, \dots, R^m$  соответствующих орграфов.

Проведем декомпозиции исходной задачи на уровни предпочтения мажоритарного графа. На первом этапе построим мажоритарный граф  $G_\Sigma = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$ , классический [7] или дополнительно нагруженный весами (голосами экспертов) на дугах [8, 9]. Процедура нахождения мажоритарного графа (правило большинства) сводится к суммированию матриц смежности  $R^1, R^2, \dots, R^m$  исходных предпочтений. Таким образом вычислительная сложность алгоритма будет  $O(mn^2)$ , где  $m$  — число экспертов,  $n$  — число альтернатив. На втором этапе декомпозиции разобьем мажоритарный граф на уровни предпочтения, воспользовавшись алгоритмом, приведенным в [2].

Опишем суть алгоритма разбиения на уровни предпочтения произвольного орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$  с множеством вершин  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ( $A \neq \emptyset$ ) и множеством дуг  $\rho$ , хотя в рассматриваемых в статье задачах будем использовать мажоритарный граф  $G_\Sigma = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$ .

Для орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$  построим граф конденсации  $\bar{G} = \langle \bar{A}, \bar{\rho} \rangle$  с множеством вершин-компонент сильной связности графа  $G$ :  $\bar{A} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ , дуга  $\langle S_i, S_j \rangle \in \bar{\rho}$  тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна дуга в графе  $G$ , исходящая из вершины компоненты сильной связности  $S_i$  и заходящая в вершину компоненты сильной связности  $S_j$ .

Граф конденсации по построению не имеет контуров, следовательно, его можно разбить на уровни, используя алгоритм Демукрона [10] (в разных работах может различаться последовательность уровней, но суть определения и алгоритма не меняется). Обозначим уровни графа конденсации  $\bar{N}_0, \bar{N}_1, \dots, \bar{N}_s$ .

**Определение 1.** *Уровнями предпочтения графа  $G = \langle A, \rho \rangle$  назовем множества вершин  $P_0, P_1, \dots, P_s$ , такие, что уровню  $P_i$  принадлежат вершины компонент сильной связности уровня  $\bar{N}_i$  графа  $\bar{G} = \langle \bar{A}, \bar{\rho} \rangle$  ( $i = 1, \dots, s$ ).*

Из определения 1 следуют основные этапы разбиения произвольного графа  $G = \langle A, \rho \rangle$  на уровни предпочтения.

**Алгоритм 1.** *Разбиение орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$  на уровни предпочтения.*

1. Найдем компоненты сильной связности  $S_1, S_2, \dots, S_k$  орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$ .
2. Построим для орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$  граф конденсации  $\bar{G} = \langle \bar{A}, \bar{\rho} \rangle$ .
3. Воспользовавшись алгоритмом Демукрона, разобьем граф  $\bar{G} = \langle \bar{A}, \bar{\rho} \rangle$  на уровни  $\bar{N}_0, \bar{N}_1, \dots, \bar{N}_s$ .
4. Вершины уровней предпочтения  $P_0, P_1, \dots, P_s$  являются вершинами соответствующих компонент сильной связности уровней  $\bar{N}_0, \bar{N}_1, \dots, \bar{N}_s$  графа  $\bar{G} = \langle \bar{A}, \bar{\rho} \rangle$ .
5. Восстановим дуги орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$ .

В [2] предложен и обоснован более простой алгоритм разбиения орграфа на уровни предпочтения.

Отношение  $\rho$  на  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  разобьем на симметричную  $S_{\text{sym}}$  и асимметричную  $A_{\text{sym}}$  части. К  $S_{\text{sym}}$  относятся все такие пары, для которых выполняется следующее условие:  $\langle a_i, a_j \rangle \in \rho$  и  $\langle a_j, a_i \rangle \in \rho$  одновременно ( $a_i, a_j \in A$ ). Асимметричная часть:  $A_{\text{sym}} = \rho \setminus S_{\text{sym}}$  (если  $\langle a_i, a_j \rangle \in A_{\text{sym}}$ , то  $\langle a_j, a_i \rangle \notin A_{\text{sym}}$ ). Обозначим через  $T_{\text{tr}}$  транзитивное замыкание отношения  $\rho$  — наименьшее транзитивное отношение, содержащее  $\rho$ .

Алгоритм 2. Разбиение орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$  на уровни предпочтения.

1. Строим оргграф  $G_{As} = \langle A, As(Trp) \rangle$  отношения  $As(Trp)$ .
2. Разбиваем оргграф  $G_{As} = \langle A, As(Trp) \rangle$  на уровни, используя алгоритм Демукрона.
3. Восстанавливаем дуги исходного орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$ .

Полученные в п. 2 уровни будем сразу обозначать  $P_0, P_1, \dots, P_s$ , поскольку они содержат вершины уровней предпочтения исходного орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$ .

Пример 1. Выбор наилучших моделей дронов для наблюдения за возникновением пожаров. Разбиение мажоритарного графа на уровни предпочтения. В МЧС было принято решение закупить дроны для наблюдения за возникновением лесных пожаров. По стоимости и дальности полета было отобрано 12 моделей  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{12}\}$ . Затем пять экспертов провели попарное сравнение моделей, в результате чего были получены отношения  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$  и соответствующие им матрицы  $R^1, R^2, R^3, R^4, R^5$ .

По данному профилю экспертных предпочтений на множестве  $A$  был построен нагруженный мажоритарный граф [9]. Используя алгоритм 2, разобьем мажоритарный граф на уровни предпочтения.

Матрица смежности мажоритарного графа  $G_\Sigma = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$  имеет следующий вид:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим матрицу смежности  $TrR_\Sigma$ , воспользовавшись формулой

$$TrR = R \vee R^2 \vee \dots \vee R^{n-1}$$

или модифицированным алгоритмом Уоршалла [6]:

$$TrR_\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу  $As(TrR_{\Sigma})$  по определению асимметричной части отношения: заменим на нули в матрице  $TrR_{\Sigma}$  симметричные относительно главной диагонали единицы (вместе с диагональю). Затем, используя алгоритм Демукрона, разобьем оргграф асимметричной части с матрицей смежности  $As(TrR_{\Sigma})$  на уровни:

$$As(TrR_{\Sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & * \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & * & * \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 6 & 0 & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Согласно алгоритму Демукрона, суммируем элементы строк и записываем сумму в первый столбец матрицы итераций  $L$ . Соответствующие нулям первого столбца  $L$  альтернативы принадлежат нулевому уровню:  $a_5, a_7, a_8, a_{10}, a_{11}, a_{12} \in P_0$ . Обнуляем столбцы с соответствующими номерами альтернатив (обводим  $1 - \boxed{1}$ ). И опять суммируем элементы строк, считая  $\boxed{1}$  нулями. Записываем сумму во второй столбец матрицы итераций  $L$ , а элементы уровня  $P_0$  помечаем звездочкой. Соответствующие нулям второго столбца  $L$  альтернативы принадлежат первому уровню предпочтения:  $a_3, a_9 \in P_1$ . Обнулив третий и девятый столбцы (обводим  $1 - \boxed{1}$ ), получим  $As(TrR_{\Sigma}) = (0)$ . Следовательно, все оставшиеся альтернативы принадлежат второму уровню предпочтения (см. третий столбец  $L$ ):  $a_1, a_2, a_4, a_6 \in P_2$ .

Расположим вершины-альтернативы по уровням предпочтения и восстановим все дуги оргграфа  $G_{\Sigma} = \langle A, p_{\Sigma} \rangle$  (рис. 1).

Проведение декомпозиции задачи с помощью разбиения множества альтернатив на уровни предпочтения позволяет удалить из рассмотрения наименее предпочтительные альтернативы, расположенные на уровнях  $P_1$  и  $P_2$ , оставив наилучшие альтернативы уровня  $P_0$ : подмножество  $\tilde{A} = \{a_5, a_7, a_8, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$ .

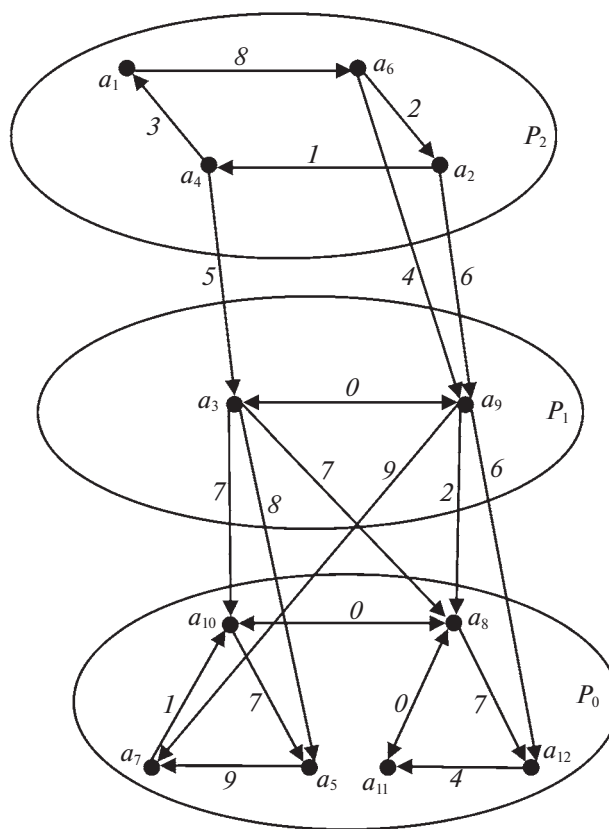


Рис. 1. Уровни предпочтения мажоритарного графа

На дугах нагруженного мажоритарного графа проставлены веса — разность числа экспертов, предпочитающих одну альтернативу другой. Они понадобятся в следующем разделе для упорядочения наилучших альтернатив подмножества  $\tilde{A}$ .

**2. Построение произвольного отношения до полного квазиупорядка.** Для упорядочения наилучших альтернатив  $\tilde{A}$  уровня  $P_0$  будем использовать процедуру непротиворечивого агрегирования отношений [9]. В качестве агрегированного будем строить отношение квазиупорядка (рефлексивное и транзитивное отношение). Алгоритм нахождения отношения квазиупорядка основывается на предварительном построении нагруженного мажоритарного графа, который может содержать дуги из симметричной и асимметричной частей отношения. Дуги из симметричной части указывают на равноценность соответствующих альтернатив.

Для нахождения агрегированного квазиупорядка  $\hat{r}$  предварительно разрушим противоречивые контуры мажоритарного графа  $G_\Sigma = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$ , если они есть. Контур отношения  $\rho_\Sigma$  будем считать противоречивым, если в нем хотя бы одна пара  $\langle a_i, a_j \rangle$  принадлежит асимметричной части отношения:  $\langle a_i, a_j \rangle \in \text{Asr}_\Sigma$  ( $a_i, a_j \in A$ ). Отношение  $\rho$  называется противоречивым, если оно содержит противоречивый контур. Таким образом, агрегированное отношение не должно содержать контуров, в которых не все элементы равноценны. Отсутствие таких контуров — необходимое условие для осуществления однозначного непустого выбора наилучших альтернатив. Этому условию удовлетворяет отношение квазиупорядка.

**А л г о р и т м 3.** Построение отношения  $\rho$ , не содержащего противоречивых контуров по  $\rho_\Sigma$ .

1. Проверяем граф  $G_\Sigma = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$  на наличие противоречивых контуров. Если таких контуров нет, то граф  $G_\Sigma = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$  без весов на дугах и есть искомым граф  $G = \langle A, \rho \rangle$  и  $\rho_\Sigma = \rho$ . Если противоречивые контуры есть, переходим к п. 2.

2. Из графа  $G_\Sigma = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$  удаляем все дуги  $\langle a_i, a_j \rangle \in \text{Asr}_\Sigma$  ( $a_i, a_j \in A$ ), которые принадлежат какому-либо противоречивому контуру и имеют наименьший вес. Переходим к п. 1.

Искомое агрегированное отношение предпочтения  $\hat{p}$  должно быть квазипорядком. Найдем  $\hat{p}$  по формуле:  $\hat{p} = e \cup \text{Tr}p$ , где  $e$  – тождественное отношение. Матрица смежности  $\hat{R}$  отношения  $\hat{p}$  согласно формуле, имеет вид

$$\hat{R} = E \vee \text{Tr}R.$$

Работа данного алгоритма основывается на нахождении отношения  $p_K$ , содержащего контуры отношения  $p_\Sigma$ . Матрицу смежности  $R_K$  графа отношения  $p_K$ , содержащего все контуры отношения  $p_\Sigma$ , вычислим по формуле:

$$R_K = \hat{R}_\Sigma \& (\hat{R}_\Sigma)^T \& R_\Sigma,$$

где  $\hat{R}_\Sigma$  – матрица смежности отношения  $\text{Tr}p_\Sigma$ ,  $T$  – транспонирование матрицы.

При реализации алгоритма для построения отношения  $p$ , не содержащего противоречивых контуров, можно выделить только дуги противоречивых контуров из  $Asp_\Sigma$ . Матрица  $AsR_K = AsR_\Sigma \& \text{Sym}(\text{Tr}R_\Sigma)$ . Заметим, что для произвольного отношения  $q$  с матрицей смежности  $Q$  матрицы смежности отношений  $Asq$  и  $\text{Sym}q$  находятся соответственно следующим образом:

$$\text{Sym}Q = Q \& Q^T, \quad AsQ = Q - \text{Sym}Q.$$

Таким образом, для построения агрегированного квазипорядка на множестве наилучших альтернатив необходимо:

- 1) разрушить противоречивые контуры уровня  $P_0$ ;
- 2) построить агрегированный квазипорядок по формуле  $\hat{R} = E \vee \text{Tr}R$ .

Отношение квазипорядка допускает наличие несравнимых альтернатив, что не позволит найти ранжирование всех альтернатив. При необходимости квазипорядок можно достроить до полного.

Отношение квазипорядка  $q$  на  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , при котором все элементы из  $A$  сравнимы между собой, называется полным квазипорядком. По определению полный квазипорядок является нестрогим ранжированием элементов множества  $A$ .

Приведем определение и утверждения, которые необходимы для построения полного квазипорядка. Отношение квазипорядка  $q$  порождает разбиение множества  $A$ , на котором он задан, на классы эквивалентности.

**О п р е д е л е н и е 2.** Классом эквивалентности  $[a_i]_q$ , порожденным элементом  $a_i \in A$  относительно квазипорядка  $q$ , называется подмножество  $A$ , состоящее из всех тех элементов  $a_j \in A$ , для которых одновременно выполняется  $\langle a_i, a_j \rangle \in q$  и  $\langle a_j, a_i \rangle \in q$ .

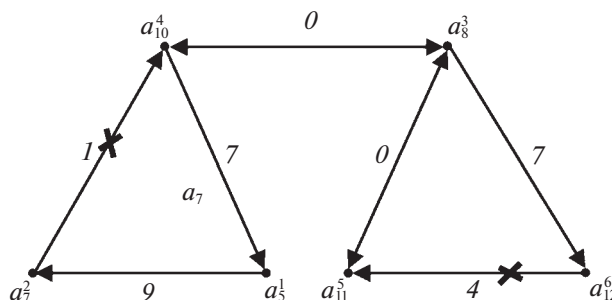
Таким образом, классы эквивалентности отношения квазипорядка состоят из равноценных альтернатив. Следующее утверждение позволит легко найти классы эквивалентности произвольного квазипорядка  $q$ , заданного на множестве  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Рассмотрим симметричную часть квазипорядка  $q : (\text{Sym}q = q \cap q^{-1})$  и матрицу смежности  $\text{Sym}Q = Q \& Q^T$  соответствующего этому отношению орграфа.

**У т в е р ж д е н и е 1.** Для любого класса эквивалентности  $C = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ , порожденного квазипорядком  $q$  на  $A$ , номера элементов этого класса полностью совпадают с единицами хотя бы одной из строк матрицы смежности  $\text{Sym}Q = \|sq_{ji}\|$ , т.е. в  $\text{Sym}Q$  существует  $j$ -я строка, такая, что  $sq_{ji} = 1$  для всех  $i = i_1, \dots, i_k$ .

Для доказательства утверждения 1 нам потребуется лемма.

**Л е м м а.** Всякое отношение квазипорядка  $q$  на  $A$  порождает разбиение множества  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  на классы эквивалентности относительно этого отношения.

Доказательства утверждения 1 и леммы приведены в Приложении.

Рис. 2. Подграф уровня  $P_0$ 

Алгоритм 4. Построение квазипорядка до полного.

1. Находим классы эквивалентности в отношении квазипорядка (утверждение 1).
2. Упорядочиваем несравнимые классы эквивалентности произвольным образом. При этом достаточно сравнить любые два элемента из разных классов, а затем взять транзитивное замыкание полученного отношения.

При практической реализации алгоритма упорядочение классов эквивалентности осуществляется в диалоговом режиме с ЛПР. Непротиворечивость введенной ЛПР информации обеспечивается взятием транзитивного замыкания текущего отношения после каждого проведенного ЛПР сравнения альтернатив.

На последнем этапе ранжирования альтернатив уровня  $P_0$  опять разбиваем построенный полный квазипорядок на уровни предпочтения. Получаем нестрогое ранжирование альтернатив. В случае необходимости ЛПР может попарно сравнить альтернативы и на других уровнях предпочтения орграфа агрегированного отношения, например для исключения из рассмотрения худших альтернатив.

**Пример 2.** Нестрогое ранжирование моделей дронов. Построение полного квазипорядка для подмножества наилучших альтернатив. Найдем агрегированный квазипорядок  $\tilde{r}$  на множестве наилучших альтернатив  $\tilde{A} \subseteq A$  уровня  $P_0$  из примера 1. Для удобства составления матриц добавим альтернативам верхний индекс — номер по порядку:  $a_5 \rightarrow a_5^1$ ,  $a_7 \rightarrow a_7^2$ ,  $a_8 \rightarrow a_8^3$ ,  $a_{10} \rightarrow a_{10}^4$ ,  $a_{11} \rightarrow a_{11}^5$ ,  $a_{12} \rightarrow a_{12}^6$ . Подграф уровня  $P_0$  изображен на рис. 2.

Легко видеть, что все дуги принадлежат противоречивым контурам. Разрушим эти контуры, удалив дуги наименьшего веса из  $Asp_{\Sigma}$ . Очевидно, что придется удалить две дуги: весом 1 —  $\langle a_7^2, a_{10}^4 \rangle$  и весом 4 —  $\langle a_{12}^6, a_{11}^5 \rangle$  (на рис. 2 зачеркнуты крестиком). Матрица смежности полученного подграфа без противоречивых контуров имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу смежности агрегированного квазипорядка найдем по формуле  $\hat{R} = E \vee TrR$ . В данном примере матрица  $TrR$  легко записывается по рис. 2. По определению транзитивного замыкания отношения, если существует путь из вершины  $a_i$  в  $a_j$ , то элемент матрицы  $TrR$  с индексами  $(ij)$  равен единице. Добавив единицы на диагонали, окончательно получим:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу  $Sym \hat{R}$ , по которой легко определим классы эквивалентности:

$$Sym \hat{R} = \hat{R} \& \hat{R}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Sym \hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем классы эквивалентности, используя утверждение 1. Каждая строка матрицы  $Sym \hat{R}$  определяет класс эквивалентности:  $C_1 = \{a_5^1\}$ ,  $C_2 = \{a_7^2\}$ ,  $C_3 = \{a_8^3, a_{10}^4, a_{11}^5\}$ ,  $C_4 = \{a_{12}^6\}$ . Упорядочим эти классы. Необходимо сравнить элементы  $a_5^1$  и  $a_{12}^6$ ,  $a_7^2$  и  $a_{12}^6$  из классов с несравнимыми элементами. Для пар альтернатив ЛПР задается вопрос, является ли одна из альтернатив предпочтительнее другой, или они равноценны (достаточно из каждого класса эквивалентности взять по одному любому элементу)? Введенная ЛПР информация не может быть противоречивой, так как на каждом шаге опроса берется транзитивное замыкание текущего отношения. Пусть в данном примере ЛПР ответило, что альтернатива  $a_{12}^6$  менее предпочтительна, чем  $a_5^1$ . Так как  $a_5^1$  менее предпочтительна, чем  $a_7^2$ , по транзитивности получим, что  $a_{12}^6$  менее предпочтительна, чем  $a_7^2$ , и все классы, а значит, и все альтернативы сравнимы между собой. Матрица смежности полного квазипорядка имеет вид

$$\hat{\hat{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По упорядочению элементов из различных классов делаем вывод, что классы эквивалентности, начиная с наилучшего, упорядочены следующим образом:  $C_2 - C_1 - C_4 - C_3$ . В общем случае порядок классов эквивалентности можно установить разбиением орграфа на уровни предпочтения, классы эквивалентности в отношении квазипорядка соответствуют компонентам сильной связности. На рис. 3 изображен орграф полного квазипорядка с вершинами, расположенными по уровням предпочтения.

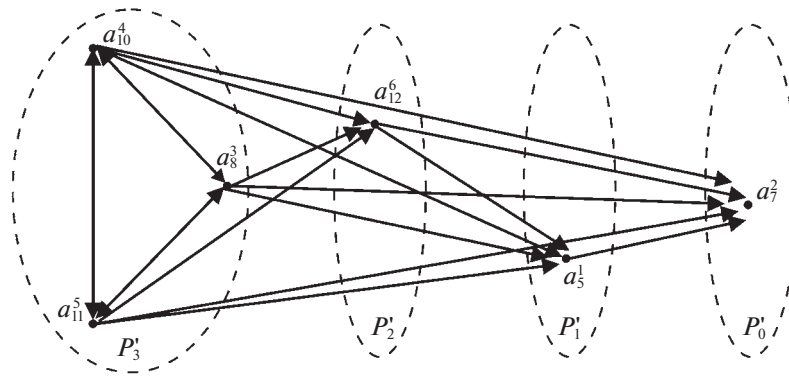


Рис. 3. Уровни предпочтения полного квазипорядка

Полученное разбиение задает нестрогое ранжирование альтернатив (полный квазипорядок  $\tilde{r}$ ) на множестве наилучших альтернатив  $\tilde{A} \subseteq A$  уровня  $P_0$ :

$$\begin{pmatrix} a_7^2 \\ a_5^1 \\ a_{12}^6 \\ a_8^3 - a_{10}^4 - a_{11}^5 \end{pmatrix}.$$

Наилучшей является модель дрона  $a_7$  ( $a_7^2$ ).

**3. Строгое ранжирование альтернатив с помощью Гамильтоновых путей максимальной длины в орграфе.** Рассмотрим алгоритмы нахождения агрегированного строгого ранжирования альтернатив, соответствующего Гамильтонову пути в нагруженном мажоритарном графе. Напомним, что Гамильтоновым называется путь, проходящий через все вершины графа, причем ровно по одному разу. В качестве искомого ранжирования выбирают последовательность альтернатив, соответствующую Гамильтонову пути с заданными характеристиками: максимальная длина или наибольшая сила [4, 5]. Максимальная длина пути отождествляется с максимальным числом голосов экспертов, отданных за соответствующее вершинам пути ранжирование альтернатив, наибольшая сила — наибольшая по сравнению со всеми Гамильтоновыми путями в данном орграфе минимальная длина дуги пути.

Алгоритмы нахождения Гамильтоновых путей принадлежат классу сложности NP и обычно применяются только для графов с небольшим числом вершин. Уменьшить вычислительную сложность данной задачи, предварительно проведя декомпозицию мажоритарного графа на уровни предпочтения. В этом случае сложность алгоритма будет равна сложности выбранной процедуры поиска Гамильтоновых путей для компоненты сильной связности с наибольшим числом вершин.

Как и в разд. 1, опишем алгоритм в общем случае для произвольного орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$ , хотя для упорядочения альтернатив будем использовать мажоритарный граф  $G_\Sigma = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$ .

Пусть для орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$  с множеством вершин  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  построен граф конденсации  $\bar{G} = \langle \bar{A}, \bar{\rho} \rangle$ . Используя алгоритм Демукрона, разобьем его на уровни  $\bar{N}_0, \bar{N}_1, \dots, \bar{N}_s$ . Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Если в графе конденсации  $\bar{G} = \langle \bar{A}, \bar{\rho} \rangle$  одному уровню принадлежат несколько вершин, то орграф  $G = \langle A, \rho \rangle$  не содержит Гамильтоновых путей.

Доказательство утверждения 2 приведено в Приложении.

**Следствие 1.** Если орграф содержит Гамильтонов путь, то все уровни разбиения его графа конденсации содержат ровно по одной вершине. (Соответственно каждый из уровней предпочтения орграфа  $P_0, P_1, \dots, P_s$  содержит вершины одной компоненты сильной связности.)

Доказательство непосредственно следует из утверждения 2.

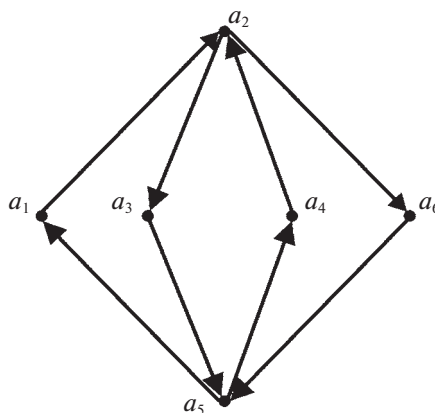


Рис. 4. Сильно связный орграф, не содержащий Гамильтоновых путей

Будем считать, что компонента сильной связности с одной вершиной содержит Гамильтонов путь длиной 0. Для простоты описания алгоритма переобозначим номера компонент сильной связности: полагаем, что вершины компоненты  $S_i$  совпадают с вершинами уровня предпочтения  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, s$ . Тогда справедливо утверждение.

**Утверждение 3.** В Гамильтоновом пути орграфа вершины любой компоненты сильной связности стоят последовательно. Другими словами, в Гамильтоновом пути орграфа не существует двух вершин из одной компоненты сильной связности, между которыми стоят вершины из других компонент сильной связности.

**Следствие 2.** Если хотя бы одна компонента сильной связности орграфа не содержит Гамильтоновых путей, то и сам орграф не содержит Гамильтоновых путей.

Доказательства утверждения 3 и следствия 2 приведены в приложении.

Следующий пример показывает, что в сильно связанном орграфе может не быть Гамильтоновых путей.

**Пример 3.** Сильно связный орграф, не содержащий Гамильтоновых путей. Легко убедиться, что орграф, изображенный на рис. 4, сильно связный и не содержит Гамильтоновых путей. В орграфе есть пути длиной 5, но они не являются Гамильтоновыми.

Пусть для орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$  построены уровни предпочтения  $P_0, P_1, \dots, P_s$ , и пусть каждому уровню принадлежит ровно одна компонента сильной связности орграфа, причем компонента  $S_i$  принадлежит уровню  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, s$ . Каждая компонента сильной связности  $S_i$  содержит Гамильтоновы пути.

**Алгоритм 5.** Построение Гамильтоновых путей орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$  по Гамильтоновым путям компонент сильной связности  $S_0, S_1, \dots, S_s$ .

1. Разобьем орграф  $G = \langle A, \rho \rangle$  на уровни предпочтения  $P_0, P_1, \dots, P_s$ . Если на каждом уровне все вершины принадлежат только одной компоненте сильной связности, переходим к п. 2, иначе в орграфе  $G = \langle A, \rho \rangle$  Гамильтоновых путей нет.

2. Для каждой компоненты сильной связности  $S_i$ ,  $i = 0, \dots, s$ , найдем Гамильтоновы пути. Если в какой-то компоненте Гамильтоновых путей нет, то и орграф  $G = \langle A, \rho \rangle$  Гамильтоновых путей не содержит. Иначе переходим к п. 3.

3. Последовательно соединяем Гамильтоновы пути уровней предпочтения  $P_0, P_1, \dots, P_s$ . Из последней вершины Гамильтонова пути уровня  $P_k$  должна исходить дуга и заходить в первую вершину Гамильтонова пути уровня  $P_{k-1}$  для  $k = s, \dots, 1$ . Перечислив все возможные варианты, получим Гамильтоновы пути мажоритарного графа.

Для нахождения Гамильтоновых путей в компонентах сильной связности модифицируем алгоритм для нахождения Гамильтоновых циклов [11] в неориентированном графе. Следующее утверждение необходимо для обоснования алгоритма поиска Гамильтоновых путей.

Рассмотрим оргграф  $G = \langle A, \rho \rangle$  отношения  $q$  с множеством вершин  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  и матрицей смежности  $Q$ .

**Утверждение 4.** Число путей длиной  $k$  из вершины  $a_i$  в  $a_j$  оргграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$  с матрицей смежности  $Q = \|q_{ij}\|$  определяет элемент  $q_{ij}^k$  матрицы  $Q^k = \|q_{ij}^k\|$ .

В этом утверждении при возведении в степень используется обычная алгебраическая операция умножения матриц. Пусть  $Q$  – матрица смежности оргграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$ .

**Алгоритм 6.** *Нахождение Гамильтоновых путей по матрице смежности  $Q$  оргграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$ .*

0. Обозначим последовательно вершины  $a_1, a_2, \dots, a_n$  графа буквами  $a, b, c, \dots$  (чтобы не возникали дополнительные трудности с индексами).

Выпишем вспомогательную матрицу  $H$  следующим образом: на место единиц в матрице смежности  $Q$  напомним буквы, обозначающие вершины, причем в первом столбце –  $a$ , во втором –  $b$  и т. д.

1. Положим  $Q_1 = Q$ .

2. Вычислим  $Q_2' = HQ_1$  и  $Q_2 = F(Q_2')$ . В матрицах  $Q_i'$  указаны промежуточные вершины путей длины  $i = 2, \dots, n-1$ . Первая вершина добавляется в начало пути в соответствии со строкой матрицы, а последняя – в соответствии со столбцом;  $F(Q_i')$  – преобразование обнуления элементов матрицы  $Q_i'$ , если они соответствуют путям с повторяющимися вершинами, в частности, контурам. Поскольку все диагональные элементы соответствуют контурам, можно ставить нули еще в матрицах  $Q_i'$ .

3. Вычислим  $Q_3' = HQ_2$ , где  $Q_3 = F(Q_3')$ .

.....

$(n-1), Q_{n-1}' = HQ_{n-2}$ , где  $Q_{n-1} = F(Q_{n-1}')$ .

Если элементы матриц состоят из нескольких слагаемых, следовательно, существует несколько путей.

Обоснование алгоритма 6 приведено в Приложении.

**Пример 4.** *Нахождение Гамильтоновых путей оргграфа по Гамильтоновым путям компонент сильной связности.* Найдем Гамильтоновы пути максимальной длины в мажоритарном графе из примера 1 как на множестве наилучших альтернатив  $\tilde{A} \subseteq A$  уровня  $P_0$ , так и на множестве всех вершин  $A$  оргграфа. Гамильтонов путь максимальной длины уровня  $P_0$  будет определять строгое ранжирование  $\tilde{\rho}$  на множестве наилучших альтернатив  $\tilde{A} \subseteq A$ .

Оргграф уже разбит на уровни предпочтения  $P_0, P_1, P_2$ , каждый из которых содержит вершины одной компоненты сильной связности:  $P_0 \rightarrow S_0, P_1 \rightarrow S_1, P_2 \rightarrow S_2$  (рис. 1). Гамильтоновы пути в компонентах сильной связности  $S_1$  и  $S_2$  легко найти из рис. 1. Компонента  $S_1$  содержит два Гамильтоновых пути:  $a_3, a_9, a_9, a_3$ , компонента  $S_2$  – четыре Гамильтоновых пути:  $a_1, a_6, a_2, a_4$ ;  $a_2, a_4, a_1, a_6$ ;  $a_4, a_1, a_6, a_2$ ;  $a_6, a_2, a_4, a_1$ .

Найдем Гамильтоновы пути в компоненте сильной связности  $S_0$ , используя алгоритм 5. Будем придерживаться обозначений этого алгоритма. Выпишем матрицу смежности  $Q$  оргграфа компоненты  $S_0$  (рис. 1 и 2). Чтобы не мешали индексы, вершины переобозначим следующим образом:  $a_5 \rightarrow a, a_7 \rightarrow b, a_8 \rightarrow c, a_{10} \rightarrow d, a_{11} \rightarrow e, a_{12} \rightarrow f$ :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

0. Согласно алгоритму, выпишем вспомогательную матрицу  $H$ , соответствующую матрице смежности с обозначением вершин буквами:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & e & f \\ a & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Положим  $Q_1 = Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Вычислим  $Q_2'$  и  $Q_2$ :

$$\begin{aligned} Q_2' = HQ_1 &= \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & e & f \\ a & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ d & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & d+e & 0 & f & 0 \\ 0 & a & 0 & c & c & c \\ 0 & 0 & 0 & c & c & c \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Q_2 = F(Q_2') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ d & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & c & c \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & c \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обнулим контуры длиной 2 на диагонали.

$$\begin{aligned} 3. Q_3' = HQ_2 &= \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & e & f \\ a & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ d & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & c & c \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & c \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} bd & 0 & bd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & da & 0 & 0 & dc & dc \\ 0 & da & fe & ec & dc & dc+ec \\ cd & 0 & 0 & ab & cf & 0 \\ cd & 0 & 0 & 0 & cf & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ec & 0 & ec \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обнулим контуры длиной 3 на диагонали (можно было сразу поставить нули) и пути с повторяющимися вершинами:

$$Q_3 = F(Q'_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dc & dc \\ 0 & da & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & cf & 0 \\ cd & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ec & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4. \ Q'_4 = HQ_3 = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & e & f \\ a & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & bd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dc & dc \\ 0 & da & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & cf & 0 \\ cd & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ec & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & bdc & bdc \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dcf & 0 \\ ecd & 0 & 0 & fec & dcd & 0 \\ 0 & cda & abd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ecd & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обнулим пути с повторяющимися вершинами:

$$Q_4 = F(Q'_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & bdc & bdc \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dcf & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ecd & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5. \ Q'_5 = HQ_4 = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & e & f \\ a & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & bdc & bdc \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dcf & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ecd & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & bdcf & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ fecd & ecda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & abdc & abdc \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ecda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обнулим пути с повторяющимися вершинами:

$$Q_5 = F(Q'_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & bdcf & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ecda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подграф уровня  $P_0$  содержит два Гамильтоновых пути:  $a, b, d, c, f, e$  и  $f, e, c, d, a, b$ . В обозначениях мажоритарного графа  $a_5, a_7, a_{10}, a_8, a_{12}, a_{11}$  и  $a_{12}, a_{11}, a_8, a_{10}, a_5, a_7$ .

Найдем Гамильтоновы пути в мажоритарном графе (рис. 1), соединив пути трех уровней предпочтения. Согласно алгоритму 4, из последней вершины Гамильтонова пути уровня  $P_2$  должна исходить дуга и заходить в первую вершину Гамильтонова пути уровня  $P_1$ , а из последней вершины Гамильтонова пути уровня  $P_1$  должна исходить дуга и заходить в первую вершину Гамильтонова пути уровня  $P_0$ . Получим Гамильтоновы пути мажоритарного графа:  $a_1, a_6, a_2, a_4, a_3, a_9, a_{12}, a_{11}, a_8, a_{10}, a_5, a_7$  и  $a_2, a_4, a_1, a_6, a_9, a_3, a_5, a_7, a_{10}, a_8, a_{12}, a_{11}$  и  $a_4, a_1, a_6, a_2, a_9, a_3, a_5, a_7, a_{10}, a_8, a_{12}, a_{11}$ .

Используя веса на дугах мажоритарного графа (рис. 1), выберем путь максимальной длины. Этому пути будет соответствовать искомое упорядочение альтернатив по предпочтению:

путь  $a_1, a_6, a_2, a_4, a_3, a_9, a_{12}, a_{11}, a_8, a_{10}, a_5, a_7$  — длина 42,

путь  $a_2, a_4, a_1, a_6, a_9, a_3, a_5, a_7, a_{10}, a_8, a_{12}, a_{11}$  — длина 45,

путь  $a_4, a_1, a_6, a_2, a_9, a_3, a_5, a_7, a_{10}, a_8, a_{12}, a_{11}$  — длина 48.

Искомое упорядочение альтернатив соответствует третьему пути длиной 48:

$$a_{11} - a_{12} - a_8 - a_{10} - a_7 - a_5 - a_3 - a_9 - a_2 - a_6 - a_1 - a_4.$$

Наиболее предпочтительная альтернатива —  $a_{11}$ .

В этом примере ту же наилучшую альтернативу дадут и Гамильтоновы пути уровня  $P_0$ : путь  $a_{12}, a_{11}, a_8, a_{10}, a_5, a_7$  имеет длину 20; а путь  $a_5, a_7, a_{10}, a_8, a_{12}, a_{11}$  большей длины — 21. Ему соответствует строгое ранжирование  $\tilde{r}$  наилучших альтернатив  $\tilde{A} \subseteq A$ :  $a_{11} - a_{12} - a_8 - a_{10} - a_7 - a_5$ .

Итак, существенно сократив перебор при поиске Гамильтоновых путей, удалось уменьшить сложность алгоритма: вместо поиска путей в мажоритарном графе с 12 вершинами требуется найти пути максимально с 6 вершинами в компоненте сильной связности  $S_0$ .

**Заключение.** В задачах принятия решений при получении агрегированного отношения с большим числом альтернатив целесообразно предварительно провести декомпозицию на уровни предпочтения орграфа. Это поможет значительно уменьшить вычислительную сложность алгоритма и при необходимости для ранжирования альтернатив использовать даже переборные («медленные») процедуры принятия решений. По желанию ЛПР можно упорядочить альтернативы на всех уровнях предпочтения мажоритарного графа. Предложены два метода ранжирования альтернатив: построение полного квазипорядка и нахождение Гамильтоновых путей максимальной длины.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Пусть  $q$  — отношение квазипорядка на  $A$ , т.е. рефлексивное и транзитивное. Покажем, что в этом случае  $Symq = q \cap q^{-1}$  — отношение эквивалентности:

1) рефлексивность  $Symq$  следует из рефлексивности  $q$ ,

2) симметричность вытекает из определения  $Symq = q \cap q^{-1}$ .

3) транзитивность следует из транзитивности  $q$  и очевидных свойств произвольных бинарных отношений: если  $q_1, q_2$  — транзитивные бинарные отношения на  $A$ , то  $q_1^{-1}$ ,  $q_1 \cap q_2$  — транзитивны на  $A$ .

Для завершения доказательства заметим, что отношение эквивалентности  $Symq$  на множестве  $A$  порождает разбиение множества  $A$  на классы эквивалентности, совпадающие с классами эквивалентности по квазипорядку  $q$ . Лемма доказана.

**Доказательство утверждения 1.** Из леммы следует, что нам достаточно найти классы эквивалентности в отношении  $Symq$  на  $A$ . Будем искать их по матрице смежности соответствующего орграфа этого отношения  $SymQ = \|sq_{ij}\|$ .

Рассмотрим  $j$ -ю строку матрицы  $SymQ$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ). Пусть в ней единицы стоят на  $i_1, \dots, i_k$  местах:  $sq_{ji_1} = 1, \dots, sq_{ji_k} = 1$ . Тогда  $\langle a_j, a_{i_1} \rangle \in Symq, \dots, \langle a_j, a_{i_k} \rangle \in Symq$  и по определению класса эквивалентности  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k} \in [a_j]_{Symq}$ , т.е. одному классу. Если  $sq_{ji_r} = 0$ , то  $\langle a_j, a_{i_r} \rangle \notin Symq$  и  $a_{i_r} \notin [a_j]_{Symq}$ . Утверждение 1 доказано.

**Доказательство утверждения 2.** Рассмотрим граф конденсации  $\bar{G}$  с множеством вершин  $\bar{A} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  — компонент сильной связности орграфа  $G = \langle A, \rho \rangle$  и уровнями  $\bar{N}_0, \bar{N}_1, \dots, \bar{N}_s$ . Докажем утверждение от противного: предположим, что компоненты сильной связности  $S_i$  и  $S_j$  принадлежат одному уровню  $\bar{N}_t$  ( $t = 0, \dots, s$ ), но в орграф  $G = A, \rho$  существует Гамильтонов путь  $a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_d}, \dots, a_{p_n}$ . Пусть в этом пути из компонент  $S_i$  и  $S_j$  первой встретилась вершина  $a_{p_d} \in S_i$ . Из определения уровней орграфа образы вершин уровня  $\bar{N}_t$  принадлежат  $\bigcup_{l=0}^{t-1} \bar{N}_l$ , следовательно, вершины компонент  $S_i$  и  $S_j$  не могут быть смежными.

Тогда  $G_{a_{p_d}}$  принадлежит компонентам сильной связности уровней  $\bar{N}_0, \bar{N}_1, \dots, \bar{N}_t$ , но не  $S_j$ . Аналогично и образы вершин Гамильтонова пути  $a_{p_{(d+1)}}, \dots, a_{p_n}$  не принадлежат  $S_j$ . Таким образом, вершины компоненты  $S_j \in \bar{N}_t$  не содержатся в пути  $a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_d}, \dots, a_{p_n}$ , и, следовательно, этот путь не является Гамильтоновым. Противоречие. Утверждение 2 доказано.

**Доказательство утверждения 3.** Пусть орграф  $G = \langle A, \rho \rangle$  содержит Гамильтонов путь. Согласно следствию 1, вершины уровней предпочтения орграфа  $P_0, P_1, \dots, P_s$  совпадают соответственно с вершинами компонент сильной связности  $S_0, S_1, \dots, S_s$ . В этом случае из определения уровней предпочтения орграфа следует, что если дуга  $\langle a_i, a_j \rangle \in \rho$ , а вершины  $a_i, a_j$  принадлежат разным компонентам сильной связности:  $a_i \in S_r, a_j \in S_t$ , а следовательно, разным уровням предпочтения ( $a_i \in P_r, a_j \in P_t$ ), то  $r > t$ .

Предположим, что в Гамильтоновом пути орграфа  $G = A, \rho$  между двумя вершин  $a_{i_1}, a_{i_2}$  одной компоненты сильной связности  $S_t$  стоят вершины  $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_d}$  из других компонент сильной связности  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_d}$  соответственно. Получим последовательность дуг фрагмента Гамильтонова пути между вершинами  $a_{i_1}, a_{i_2} \in S_t$ :  $\langle a_{i_1}, a_{j_1} \rangle, \langle a_{j_1}, a_{j_2} \rangle, \dots, \langle a_{j_d}, a_{i_2} \rangle$ . Тогда для индексов компонент сильной связности  $S_t, S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_d}, S_t$  будет выполняться  $t > t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_d > t$ . Полученное противоречие показывает, что в Гамильтоновом пути орграфа не существует двух вершин из одной компоненты сильной связности, между которыми стоят вершины из других компонент сильной связности. Утверждение 3 доказано.

**Доказательство следствия 2.** По утверждению 3 в Гамильтоновом пути орграфа вершины любой компоненты сильной связности стоят последовательно. Если это не все вершины одной компоненты сильной связности, то она не имеет Гамильтоновых путей и оставшиеся вершины из этой компоненты не войдут в Гамильтонов путь орграфа, т.е. орграф также не содержит Гамильтоновых путей. Следствие 2 доказано.

**Обоснование алгоритма 6.** Этапы работы алгоритма основаны на утверждении 4 и алгоритме нахождения Гамильтоновых циклов в орграфе [11]. Гамильтонов путь по определению содержит  $(n - 1)$  дугу. По утверждению 4 для определения существования пути длиной  $(n - 1)$  нам надо возвести матрицу смежности  $Q$  в  $(n - 1)$ -ю степень, что и делает данный алгоритм. Для определения вершин пути изначально в матрице смежности  $Q$  ставим на место единиц буквы, последовательно обозначающие вершины, например, первом столбце —  $a$ , во втором —  $b$ , и т.д. Далее находим итерационно пути длиной  $2, 3, \dots, (n - 1)$  без повторяющихся вершин. Так как мы ищем Гамильтоновы пути, элементы матриц, соответствующие путям с повторяющимися вершинами, в частности контуры, обнуляются. Алгоритм 6 обоснован.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кормен Т., Лейсерзон Ч., Риверст Р., Штайн К.* Алгоритмы. Построение и анализ. М.: Вильямс, 2006.
2. *Smerchinskaya S.O., Yashina N.P.* Preference Levels for Clusters of Alternatives // Intern. J. Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2019. V. 10. Iss. 4. <https://doi.org/10.1142/S1793962319500193>
3. *Жуков М.С., Орлов А.И.* Задача исследования и итогового ранжирования мнений группы экспертов с помощью медианы Кемени // Научный журнал КубГАУ. 2016. № 122(08).
4. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
5. *Schulze M.* A New Monotonic, Clone-independent, Reversal Symmetric, and Condorcet-consistent Single-winner Election Method // Social Choice and Welfare. 2011. V. 36. P. 267–303.
6. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980.
7. *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
8. *Нефедов В.Н., Осипова В.А., Смерчинская С.О., Яшина Н.П.* Непротиворечивое агрегирование отношений строгого порядка // Изв. вузов. Математика. 2018. № 5. С. 71–85.
9. *Нефедов В.Н., Смерчинская С.О., Яшина Н.П.* Непротиворечивое агрегирование отношений квазипорядка // Прикладная дискретная математика. 2019. № 45. С. 113–126.
10. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука, 1975.
11. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.

## СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 621.396

### МНОГОАГЕНТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ИНФОРМАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ САМООРГАНИЗУЮЩЕЙСЯ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ НАЗЕМНО-ВОЗДУШНОЙ СИСТЕМЫ МОНИТОРИНГА<sup>1</sup>

© 2023 г. В. В. Бородин<sup>a,\*</sup>, Д. А. Клецков<sup>b,\*\*</sup>,  
А. В. Тимошенко<sup>c,\*\*\*</sup>, В. А. Щевцов<sup>a,\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

<sup>b</sup> Ярославское высшее военное училище ПВО, Ярославль, Россия

<sup>c</sup> АО «РТИ имени академика А.Л. Минца», Москва, Россия

\*e-mail: doc\_bor1@mail.ru

\*\*e-mail: major7786@mail.ru

\*\*\*e-mail: u567ku78@gmail.com

\*\*\*\*e-mail: vs@mai.ru

Поступила в редакцию 25.04.2022 г.

После доработки 31.05.2022 г.

Принята к публикации 01.08.2022 г.

Представлена аналитическая модель информационного взаимодействия структурных элементов системы мониторинга, учитывающая динамику информационного обмена при ее децентрализованном функционировании на основе многоагентного подхода в рамках формирования коалиции абонентских терминалов. Актуальность разработки данной модели обусловлена сложностью и пространственной распределенностью современных информационных систем. Научная новизна рассмотренной модели заключается в изучении множества стратегий управления абонентскими терминалами (агентами) децентрализованной сети передачи, приведенных в логико-лингвистическом и теоретико-множественном виде, аналитических выражений показателей взаимной полезности и когнитивного диссонанса, возникающего при воздействии деструктивных факторов на структурные элементы многоуровневой сети передачи данных. Применение разработанной модели в отличие от существующих позволяет исследовать сети передачи данного вида по показателю устойчивости информационного взаимодействия между структурными элементами на различных временных интервалах в отсутствие единого центра управления.

DOI: 10.31857/S0002338822060051, EDN: BHTCFQ

**Введение.** Новые системы мониторинга, применяемые на различных промышленных магистралях (газо- и нефтепроводы), в оборонной промышленности при создании систем специального назначения, в настоящее время вызывают значительный научный интерес. Так, одной из важнейших проблем трубопроводного транспорта является сохранение нормального состояния линейных участков (ЛУ) промысловых и магистральных газопроводов (МГ). Подземные газопроводы, эксплуатируемые при нормальных режимах, могут сохраняться несколько десятков лет в рабочем состоянии. Этому способствует большое внимание, которое уделяется систематическому контролю технического состояния (ТС) подземных и надземных МГ и своевременная ликвидация возникающих дефектов [1]. Дефекты на МГ появляются в результате коррозии и реже — из-за механических воздействий. Определение места коррозии и повреждений всегда связано с большими трудностями и материальными затратами. Вскрытие газопровода для его непосредственного визуального обследования экономически невыгодно. Кроме того, обследование

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-19-00481). <https://rscf.ru/project/21-19-00481/>.

только внешней поверхности трубы, как правило, ничего не дает. Поэтому актуальна проблема мониторинга технического состояния подземных и надземных промысловых, магистральных продуктопроводов без их вскрытия. Эта проблема связана с большими техническими трудностями, однако бурно развивающиеся современные методы и средства измерительной техники позволяют ее решить. Данные технические средства в свою очередь отличаются заложенными в методы исследования физическими явлениями, принципом действия устройств, чувствительностью, областью применения, локальностью или глобальностью диагностирования, масштабом охвата географической территории прокладки газотранспортной сети и другими характеристиками. Именно огромная протяженность и разветвленность газопроводов в Российской Федерации (РФ), прохождение их по сложным территориям и различным климатическим зонам, а также отсутствие развитой системы коммуникаций существенно ограничивают применение многих из этих методов при диагностировании технического состояния магистралей [1]. Решение данной проблемы возможно при использовании в системе мониторинга распределенной беспроводной сенсорной сети передачи данных дополнительных устройств которые, в режиме реального времени позволили бы контролировать утечки газа (КУГ) из объектов газотранспортной сети (ГТС) и передавать данную информацию посредством беспроводных телекоммуникационных технологий. С целью приема и передачи информационных потоков с соответствующих средств мониторинга (СМ), т.е. сенсоров, установленных на МГ, особенно в труднодоступных территориальных районах, необходимо применять как наземные, так и воздушные СМ (например, беспилотные летательные аппараты (БПЛА), квадрокоптеры и т.д.) [1–4].

В настоящее время использование сенсорных сетей, представляющих собой распределенные самоорганизующиеся сети, которые устойчивы к отказу отдельных устройств и передают информацию с помощью технологии беспроводной связи, является актуальной областью исследований. Каждый элемент данной сети имеет автономный источник энергии, приемно-передающее устройство, микрокомпьютер и составляет область покрытия от нескольких метров до десятков и сотен километров в зависимости от типа беспроводного модуля и антенны, а также за счет ретрансляции пакета данных от одного элемента к другому с учетом топологии сети. Для расширения радиуса действия сенсорной сети между конечными устройствами используются ретрансляторы, позволяющие увеличить дальность работы и качество принимаемого сигнала. Исследованию характеристик беспроводных сенсорных сетей, в первую очередь алгоритмов функционирования и информационного взаимодействия, посвящены работы зарубежных и отечественных ученых [1, 5]. Актуальным решением задачи устойчивого и своевременного обеспечения информационного взаимодействия множества разнородных СМ является разработка многоагентной динамической модели сети передачи данных системы мониторинга на основе самоорганизации и децентрализованного управления элементами сети в различные моменты времени (динамика) в условиях воздействия различных деструктивных факторов. Известный научно-методический аппарат моделирования информационного взаимодействия между структурными элементами такого рода систем в полной мере не позволяет аналитически описать процесс информационного взаимодействия и оценить эффективность функционирования сети в части устойчивости и своевременности информационного обмена в виду сложного глобального поведения системы в результате деятельности большого количества структурных элементов. Многоагентные модели дают возможность исследовать достаточно широкий круг задач и проблем, для которых строгие аналитические методы оказываются неэффективными. Вариант многоуровневой распределенной децентрализованной сети передачи данных системы мониторинга МГ с применением БПЛА и с пунктами управления (ПУ) представлен на рис. 1.

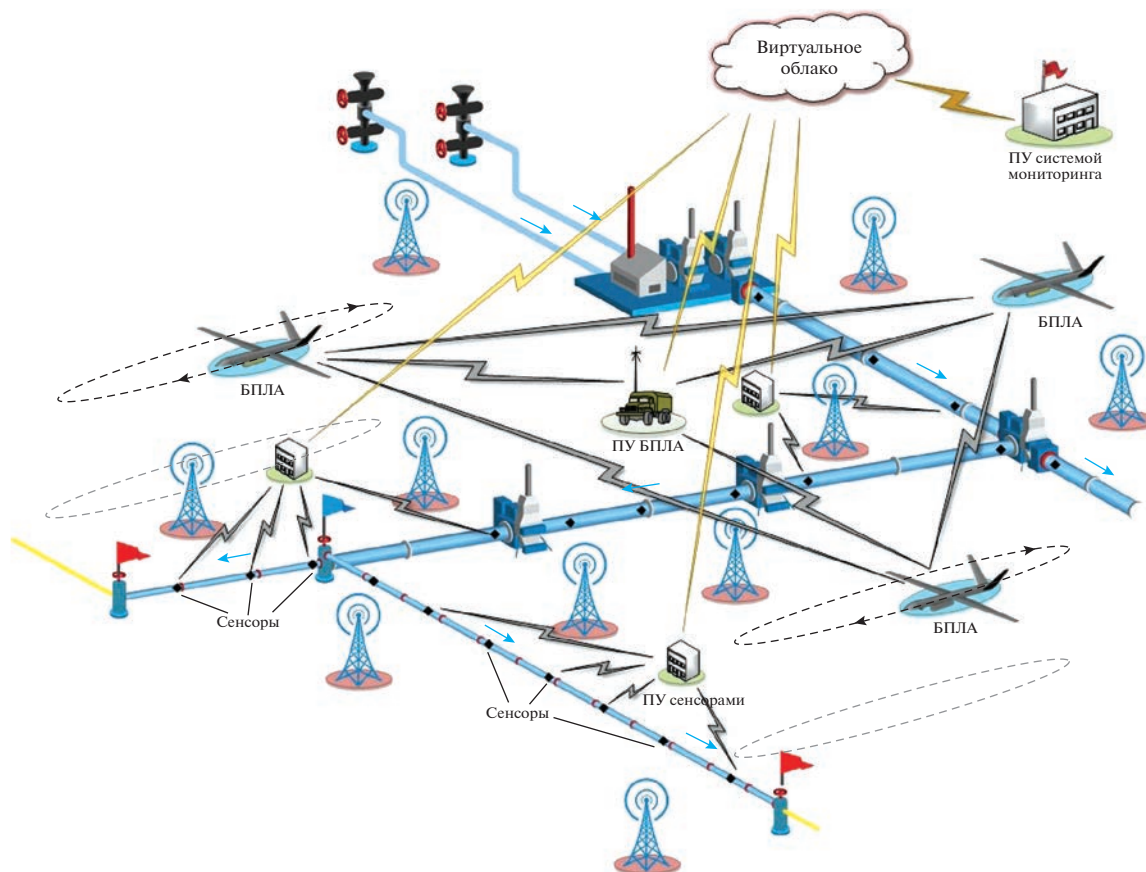
Функционирование беспроводной самоорганизующейся сенсорной сети с целью обеспечения устойчивости и своевременности информационного взаимодействия между ее структурными элементами основано на децентрализованном информационном обмене данными. Следовательно, на отдельных участках МГ применяется децентрализованное управление, достоинства которого заключаются в следующем [6–8]:

адаптация топологии и параметров сети передачи данных системы мониторинга к внешним деструктивным воздействиям;

устойчивость функционирования и информационного взаимодействия (обмена) между структурными элементами сети передачи данных системы мониторинга;

своевременность доставки информационной нагрузки от СМ системы мониторинга до центров обработки информации (ЦОИ);

масштабируемость сети передачи данных при установке новых СМ на всей протяженности МГ;



**Рис. 1.** Вариант многоуровневой распределенной децентрализованной сети передачи данных системы мониторинга МГ

перераспределение информационной нагрузки между структурными элементами сети передачи данных системы мониторинга.

Для реализации самоорганизующейся сети передачи данных беспроводной сенсорной системы мониторинга необходимо разработать модель информационного взаимодействия, учитывающую показатели устойчивости информационного обмена между сенсорами-агентами по критерию взаимной полезности и когнитивного диссонанса, применение которой позволит разработать стратегии управления и правила информационного взаимодействия СМ, выявить закономерности информационного обмена между ними.

Целью статьи является изучение модели информационного взаимодействия структурных элементов сети передачи данных системы мониторинга МГ, отличающейся от существующих моделей самоорганизующихся сетей передачи данных новыми стратегиями управления информационным взаимодействием между структурными элементами сети, применяемыми критериями устойчивости сети передачи данных на основе показателей взаимной полезности агентов и их когнитивного диссонанса при воздействии деструктивных факторов.

Использование данной аналитической модели дает возможность разработать имитационную модель информационного взаимодействия структурных элементов самоорганизующейся сети передачи данных в среде агентного моделирования “AnyLogic”. Исследование модели в “Anylogic” позволит выявить закономерности передачи данных между узлами сети, адаптировать алгоритмы маршрутизации под функционирование в децентрализованной среде, а также оценить показатели устойчивости и своевременность доставки сообщений в условиях воздействия деструктивных факторов.

**1. Многоагентная динамическая модель сети передачи данных наземно-воздушной системы мониторинга.** Применение БПЛА в составе многоуровневой распределенной децентрализованной сети передачи данных системы мониторинга МГ с расположенными на них техническими сред-

ствами контроля и радиосвязи позволяет внести ряд допущений и представить совокупность структурных элементов наземно-воздушной системы мониторинга как совокупность разнотипных СМ с интегрированными абонентскими терминалами (АТ), обеспечивающими информационное взаимодействие в части передачи служебных сообщений канала управления, телеметрии и информационных сообщений с данными о техническом состоянии элементов МГ. Информационное взаимодействие между СМ, установленными на элементах МГ, осуществляется на основе беспроводной сенсорной сети передачи данных [1, 2].

Для исследования вопросов информационного взаимодействия между структурными элементами рассматриваемой сети передачи данных в части устойчивости и своевременности информационного обмена необходимо разработать аналитическую модель многокритериального информационного взаимодействия с учетом использования децентрализованного управления с элементами самоорганизации.

Существующие модели функционирования и информационного взаимодействия структурных элементов беспроводных сетей передачи данных многоуровневых систем мониторинга и связи основаны на применении научно-методического аппарата теории вероятности, системной динамики, систем массового обслуживания, динамических графов [9–11]. Использование моделей сетей передачи данных на базе указанного научно-методического аппарата дает возможность оценить устойчивость и своевременность функционирования сети в целом на основе показателей связности, готовности и важности информационных направлений между узлами сети, коэффициентов кластеризации и посредничества, при этом в полной мере не описывают в различных масштабах и интервалах времени процессы поведения отдельного структурного элемента сети передачи данных, их коллективного информационного взаимодействия и управления.

Данные модели не учитывают условия кооперации структурных элементов сети передачи данных как агентов для достижения цели функционирования соответствующей системы, не позволяют оценить устойчивость и своевременность информационного обмена между узлами сети при децентрализованном управлении [12–14]. Основные недостатки существующих моделей представлены в табл. 1.

В научных исследованиях [15–17] представлена система оценки показателей устойчивости и своевременности сети связи. При этом в данной системе оценки не учитываются особенности взаимодействия и поведения элементов сети, их влияние друг на друга при информационном обмене в условиях децентрализованного управления. Моделирование информационного взаимодействия между структурными элементами беспроводной сенсорной сети передачи данных в условиях децентрализованного управления с целью оценки устойчивости и своевременности информационного обмена возможно с помощью применения научно-методического аппарата теории многоагентных систем в части формирования кооперации агентов, т.е. коалиции АТ по критериям взаимной полезности и когнитивного диссонанса.

Использование данного научно-методического аппарата позволяет формировать [18–21] открытые динамических коалиций АТ, состав которых может меняться в процессе решения задачи. АТ могут входить в состав коалиции или выходить из нее в процессе функционирования сети передачи данных системы мониторинга, обеспечивая концепцию самоорганизующейся сети передачи данных (ССПД). Когнитивную карту СПД  $Net^{(ССПД)}$  [18, 22] представим множеством АТ и СМ следующего вида

$$N^{(AT)} = \{n_1^{(AT)}, n_2^{(AT)}, \dots, n_{k-1}^{(AT)}, n_k^{(AT)}\}, \quad (1.1)$$

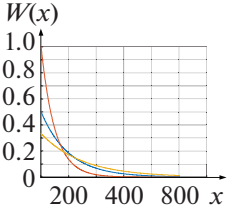
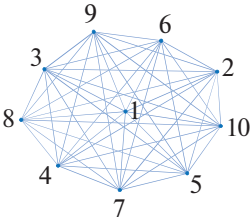
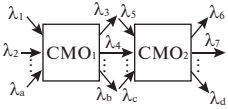
$$N^{(CM)} = \{n_1^{(CM)}, n_2^{(CM)}, \dots, n_{k-1}^{(CM)}, n_k^{(CM)}\}, \quad (1.2)$$

где  $n_k^{(AT)}$  – АТ  $k$ -го структурного элемента наземно-воздушного сегмента многоуровневой системы мониторинга;  $n_k^{(CM)}$  –  $k$ -е СМ наземно-воздушного сегмента многоуровневой системы мониторинга.

Динамика информационного взаимодействия между АТ задается системой конечно-разностных логико-лингвистических уравнений, представляемых следующим выражением

$$Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})} = (Sp Y_{t_{x-1}}^{(n_u^{(AT)})}) \cup (Sp Y_{t_{x-2}}^{(n_u^{(AT)})}) \cup \dots \cup (Sp Y_{t_2}^{(n_u^{(AT)})}) \cup (Sp Y_{t_1}^{(n_u^{(AT)})}), \quad u = \overline{1, k}, \quad (1.3)$$

**Таблица 1.** Обобщенный анализ существующего научно-методического аппарата моделирования информационного взаимодействия в сетях передачи данных

| Название класса моделей                                                                                                     | Вид математической модели  | Название теории                                 | Недостатки                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Статистическо-вероятностные модели<br>     | Аналитическая имитационная | Теория вероятностей и математической статистики | Не обеспечивается возможность описания сложного индивидуального и группового поведения элементов системы их взаимодействия в соответствии с заданной целью функционирования<br><br>Не обеспечивается возможность описания информационного взаимодействия при децентрализованном управлении<br><br>Сложность аналитического описания процесса информационного взаимодействия между элементами системы<br><br>Требуются вычислительные затраты при значительном росте числа элементов системы |
| Графовые модели<br>                      | Аналитическая имитационная | Теория графов                                   | Не в полной мере обеспечивается возможность формализации информационного взаимодействия между структурными элементами системы при децентрализованном управлении<br><br>Требуется дополнение моделей логико-лингвистическим описанием информационного взаимодействия элементов системы<br><br>Требуются значительная ресурсоемкость вычислительных затрат при росте числа элементов системы                                                                                                  |
| Модели систем массового обслуживания<br> | Аналитическая имитационная | Теория массового обслуживания                   | Не обеспечивается возможность описания сложного индивидуального и группового поведения элементов системы их взаимодействия в соответствии с заданной целью функционирования<br><br>Не обеспечивается возможность описания информационного взаимодействия при децентрализованном управлении                                                                                                                                                                                                  |

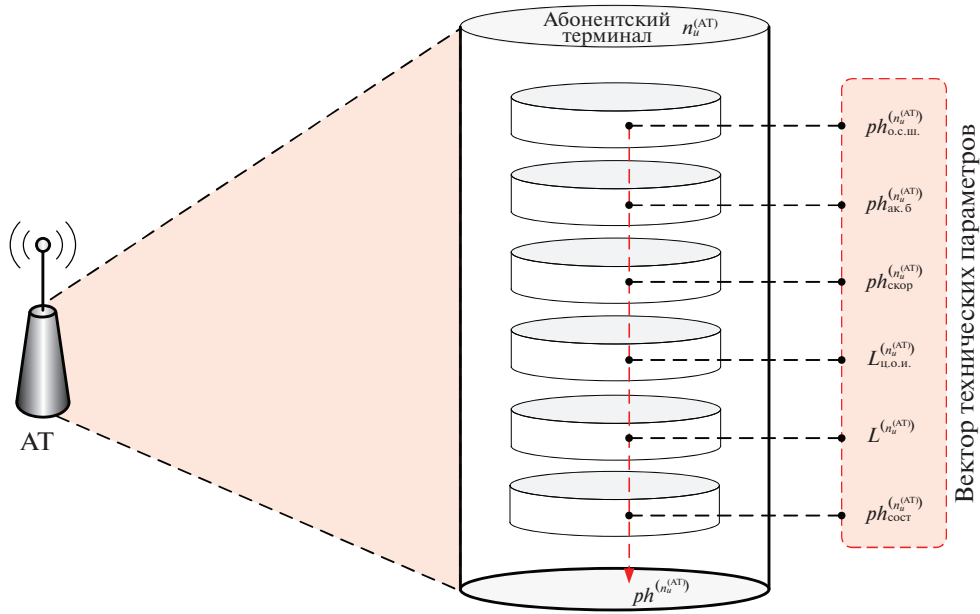


Рис. 2. Графическое представление вектора технических параметров  $n_u^{(AT)}$  AT

где  $Sp$  – причинно-следственное отношение вида “Если условие, то действие”, применяемое при переходе  $n_u^{(AT)}$  AT в соответствующее состояние функционирования при определенных условиях;  $Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})}$  – состояние  $n_u^{(AT)}$  AT в момент времени  $t_x$ .

Каждый AT характеризуется совокупностью параметров, представленных кортежем:

$$Pr^{(n_u^{(AT)})} = (G^{(n_u^{(AT)})}, S^{(n_u^{(AT)})}, E^{(n_u^{(AT)})}, \mu(Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})}, g_\beta^{(n_u^{(AT)})}), ph^{(n_u^{(AT)})}), \quad (1.4)$$

где  $G^{(n_u^{(AT)})}$  – множество целей и их лингвистических значений для  $n_u^{(AT)}$  AT:

$$G^{(n_u^{(AT)})} = (g_1^{(n_u^{(AT)})}, g_2^{(n_u^{(AT)})}, \dots, g_{h-1}^{(n_u^{(AT)})}, g_h^{(n_u^{(AT)})}); \quad (1.5)$$

$S^{(n_u^{(AT)})}$  – множество стратегий управления (действия)  $n_u^{(AT)}$  AT для достижения цели  $g_\beta^{(n_u^{(AT)})}$ :

$$S^{(n_u^{(AT)})} = (s_1^{(n_u^{(AT)})}, s_2^{(n_u^{(AT)})}, \dots, s_{l-1}^{(n_u^{(AT)})}, s_l^{(n_u^{(AT)})}); \quad (1.6)$$

$E^{(n_u^{(AT)})}$  – значение эффективности достижения  $n_u^{(AT)}$  AT цели из множества  $G^{(n_u^{(AT)})}$ , которое определяется затратами  $v(s_\chi^{(n_u^{(AT)})})$  AT для достижения цели и значимостью факта достижения цели  $u(g_\beta^{(n_u^{(AT)})})$ ;  $\mu(Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})}, g_\beta^{(n_u^{(AT)})})$  – значение возможности достижения  $n_u^{(AT)}$  AT  $g_\beta^{(n_u^{(AT)})}$  цели за счет собственных ресурсов за  $x$  шагов;  $ph^{(n_u^{(AT)})}$  – вектор технических параметров  $n_u^{(AT)}$  AT, представленных выражением

$$ph^{(n_u^{(AT)})} = \langle ph_{о.с.ш.}^{(n_u^{(AT)})}, ph_{ак.б.}^{(n_u^{(AT)})}, ph_{скор}^{(n_u^{(AT)})}, L_{ц.о.и.}^{(n_u^{(AT)})}, L^{(n_u^{(AT)})}, ph_{сост}^{(n_u^{(AT)})} \rangle, \quad (1.7)$$

где  $ph_{о.с.ш.}^{(n_u^{(AT)})}$  – значение отношения уровня полезного сигнала к уровню помехи (шума) радиоприемного устройства  $n_u^{(AT)}$  AT;  $ph_{ак.б.}^{(n_u^{(AT)})}$  – значение уровня заряда источника электропитания  $n_u^{(AT)}$  AT по типу аккумуляторной батареи;  $ph_{скор}^{(n_u^{(AT)})}$  – значение скорости передачи информации радиопередающего устройства  $n_u^{(AT)}$  AT;  $L_{ц.о.и.}^{(n_u^{(AT)})}$  – значение дальности радиотрассы от  $n_u^{(AT)}$  AT до  $n_\alpha^{(AT)}$  AT

центра обработки информации сети передачи данных;  $L^{(n_u^{(AT)})}$  — вектор значений дальностей радиотрасс от  $n_u^{(AT)}$  АТ до соответствующих АТ сети передачи данных

$$L^{(n_u^{(AT)})} = \langle L_{n_1^{(AT)}}^{(n_u^{(AT)})}, L_{n_2^{(AT)}}^{(n_u^{(AT)})}, L_{n_3^{(AT)}}^{(n_u^{(AT)})}, \dots, L_{n_{e-1}^{(AT)}}^{(n_u^{(AT)})}, L_{n_e^{(AT)}}^{(n_u^{(AT)})} \rangle; \quad (1.8)$$

$ph_{\text{сост}}^{(n_u^{(AT)})}$  — состояние функционирования  $n_u^{(AT)}$  АТ (готов или не готов к приему и передаче пакетов с информационными или служебными сообщениями).

При выборе  $n_u^{(AT)}$  АТ  $s_{\chi}^{(n_u^{(AT)})}$  стратегии управления для достижения  $g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})}$  цели, прогнозирование процесса информационного обмена на интервале времени  $[t_0, t_x]$  можно представить выражением (1.3) при условии  $Y_{t_0}^{(n_u^{(AT)})} = s_{\chi, t_0}^{(n_u^{(AT)})}$ .

Графически вектор технических параметров  $n_u^{(AT)}$  АТ представлен на рис. 2.

Одно из основных требований, определяющих эффективность функционирования сети передачи данных, является устойчивость информационного взаимодействия между АТ. В теории многоагентных систем для оценки устойчивости информационного взаимодействия коалиции АТ применяются показатели взаимной полезности и когнитивного диссонанса. Перейдем к рассмотрению данных показателей.

**2. Оценка устойчивости информационного взаимодействия коалиции абонентских терминалов системы мониторинга.** Целью каждого АТ сети передачи данных при информационном взаимодействии является доставка сообщения (пакета данных) заданному абоненту. Для определения возможности достижения  $n_u^{(AT)}$  АТ  $g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})}$  цели задается метрика  $M_{\text{д.ц}}$ . Тогда возможность достижения цели  $n_u^{(AT)}$  АТ определяется как близость значения прогнозного состояния  $Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})}$  и значения цели  $g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})}$

$$\mu(Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})}, g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})}) = M_{\text{д.ц}}(Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})}, g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})}). \quad (2.1)$$

Совокупность АТ сети передачи данных формирует коалицию на основе критерия близости их целей  $K^{(6.ц)}$ , т.е.  $M_{\text{д.ц}}(g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})}, g_{\beta}^{(n_d^{(AT)})}) \leq K^{(6.ц)}$ .

Информационное взаимодействие коалиции АТ в сети передачи данных основано на принципе взаимной полезности, при этом  $n_u^{(AT)}$  и  $n_d^{(AT)}$  АТ являются взаимно полезными при условии, что объединение их стратегий управления  $s^{(n_u^{(AT)})}$  и  $s^{(n_d^{(AT)})}$  увеличивает возможность достижения их собственных целей, т.е. доставки сообщения заданному абоненту. Показатель  $S_{u,d}^{(n)}$  степени взаимной полезности  $n_d^{(AT)}$  АТ для  $n_u^{(AT)}$  АТ определяется выражением

$$S_{u,d}^{(n)} = 1 - \frac{\mu(Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})} \cup Y_{t_x}^{(n_d^{(AT)})}, g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})})}{\mu(Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})}, g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})})}, \quad (2.2)$$

при этом область значений показателя степени взаимной полезности  $n_d^{(AT)}$  АТ для  $n_u^{(AT)}$  АТ задается как

$$S_{u,d}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{при } M_{\text{д.ц}}(Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})} \cup Y_{t_x}^{(n_d^{(AT)})}, g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})}) = 0, \quad g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})} \in G^{(n_u^{(AT)})}, \\ 0 & \text{при } \mu(Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})} \cup Y_{t_x}^{(n_d^{(AT)})}, g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})}) = \mu(Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})}, g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})}), \quad g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})} \in G^{(n_u^{(AT)})}, \\ -1 & \text{при } \mu(Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})} \cup Y_{t_x}^{(n_d^{(AT)})}, g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})}) > \mu(Y_{t_x}^{(n_u^{(AT)})}, g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})}), \quad g_{\beta}^{(n_u^{(AT)})} \in G^{(n_u^{(AT)})}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Значение показателя степени полезности  $S_{k,d}^{(n)} = 1$  соответствует максимальной степени полезности  $n_d^{(AT)}$  АТ для  $n_u^{(AT)}$  АТ. При значении показателя степени полезности  $S_{u,d}^{(n)} = -1$   $n_d^{(AT)}$  АТ оказывает отрицательное воздействие на  $n_u^{(AT)}$  АТ. В соответствии с критерием взаимной полезности

устойчивая коалиция АТ в самоорганизующейся сети передачи данных формируется при  $S^{(n)} \rightarrow 1$  и равных значениях эффективности достижения цели  $E^{(n^{(AT)})}$  для каждой пары АТ.

С целью оценки устойчивости коалиции АТ сети передачи данных в части непрерывного информационного взаимодействия требуется оценивать обобщенную взаимную полезность сети в целом. Обобщенный показатель взаимной полезности  $N^{(AT)}$  сети передачи данных  $Net^{(CCPD)}$  определяется выражением

$$S_{Net^{(CCPD)}}^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{N^{(AT)}} \sum_{j=1}^{N^{(AT)}} S_{i,j}^{(n)} S_{j,i}^{(n)}}{2N^{(AT)}}, \quad i \neq j. \quad (2.4)$$

Функционирование совокупности АТ сети передачи данных в условиях преднамеренных и непреднамеренных деструктивных воздействий в соответствии с критерием когнитивного диссонанса снижает устойчивость коалиции. Значение показателя когнитивного диссонанса  $D_{u,d}^{(к.д.п)}$  по показателю степени взаимной полезности  $n_d^{(AT)}$  АТ для  $n_u^{(AT)}$  АТ задается как

$$D_{u,d}^{(к.д.п)} = \frac{|S_{u,d}^{(n)} - S_{d,u}^{(n)}|}{|S_{u,d}^{(n)} + S_{d,u}^{(n)}|}. \quad (2.5)$$

Значение показателя когнитивного диссонанса  $D_{u,d}^{(к.д.э)}$  по показателю эффективности  $n_d^{(AT)}$  АТ для  $n_u^{(AT)}$  АТ определяется отношением вида

$$D_{u,d}^{(к.д.э)} = \frac{|E^{(n_d^{(AT)})} - E^{(n_u^{(AT)})}|}{|E^{(n_d^{(AT)})} + E^{(n_u^{(AT)})}|}. \quad (2.6)$$

С целью оценки устойчивости коалиции АТ сети передачи данных в части непрерывного информационного взаимодействия требуется оценивать обобщенный когнитивный диссонанс сети по показателю степени взаимной полезности  $D_{Net^{(CCPD)}}^{(к.д.п)}$  и показателю эффективности  $D_{Net^{(CCPD)}}^{(к.д.э)}$  в целом. Обобщенный когнитивный диссонанс сети по показателю степени взаимной полезности  $D_{Net^{(CCPD)}}^{(к.д.п)}$  и показателю эффективности  $D_{Net^{(CCPD)}}^{(к.д.э)}$  сети передачи данных  $Net^{(CCPD)}$  задается как

$$D_{Net^{(CCPD)}}^{(к.д.п)} = \frac{\sum_{i=1}^{N^{(AT)}} \sum_{j=1}^{N^{(AT)}} D_{i,j}^{(к.д.п)}}{2N^{(AT)}}, \quad i \neq j, \quad (2.7)$$

$$D_{Net^{(CCPD)}}^{(к.д.э)} = \frac{\sum_{i=1}^{N^{(AT)}} \sum_{j=1}^{N^{(AT)}} D_{i,j}^{(к.д.э)}}{2N^{(AT)}}, \quad i \neq j. \quad (2.8)$$

Коалиция АТ сети передачи данных устойчива, если значения показателей когнитивного диссонанса по критерию взаимной полезности и по показателю эффективности для всех АТ из множества  $N^{(AT)}$  стремятся к нулю, т.е. выполняются следующие условия

$$\forall (n_u^{(AT)} \wedge n_d^{(AT)}): \quad D_{u,d}^{(к.д.п)} \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad S_{u,d}^{(n)} = S_{d,u}^{(n)}, \quad n_u^{(AT)} \in N^{(AT)}, \quad n_d^{(AT)} \in N^{(AT)}, \quad u \neq d, \quad (2.9)$$

$$\forall (n_u^{(AT)} \wedge n_d^{(AT)}): \quad D_{u,d}^{(к.д.э)} \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad E^{(n_d^{(AT)})} = E^{(n_u^{(AT)})}, \quad n_u^{(AT)} \in N^{(AT)}, \quad n_d^{(AT)} \in N^{(AT)}, \quad u \neq d. \quad (2.10)$$

**3. Формирование состояний функционирования и стратегий управления коалиции абонентских терминалов при их информационном взаимодействии.** Основной целью информационного взаимодействия множества АТ в сети передачи данных является прием и передача множества

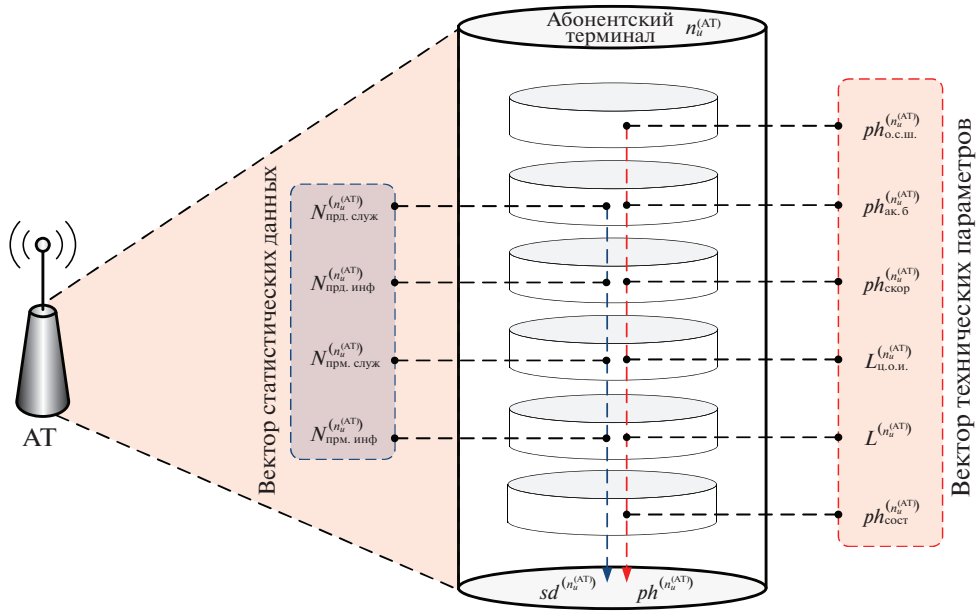


Рис. 3. Графическое представление вектора статистических данных  $n_u^{(AT)}$  АТ

сообщений  $M^{(сообщ)}$ , представляющих собой объединение множества информационных  $M^{(инф)}$  и множества служебных  $M^{(служ)}$  сообщений:

$$M^{(инф)} = \{m_1^{(инф)}, m_2^{(инф)}, m_3^{(инф)}, \dots, m_z^{(инф)}\}, \quad (3.1)$$

$$M^{(служ)} = \{m_1^{(служ)}, m_2^{(служ)}, m_3^{(служ)}, \dots, m_v^{(служ)}\}, \quad (3.2)$$

$$M^{(сообщ)} = M^{(инф)} \cup M^{(служ)}. \quad (3.3)$$

Учет числа принятых и переданных сообщений  $n_u^{(AT)}$  АТ осуществляется за счет формирования вектора статистических данных  $sd^{(n_u^{(AT)})}$ :

$$sd^{(n_u^{(AT)})} = \langle N_{\text{пр.с.л.ж}}^{(n_u^{(AT)})}, N_{\text{пр.инф}}^{(n_u^{(AT)})}, N_{\text{пр.с.л.ж}}^{(n_u^{(AT)})}, N_{\text{пр.инф}}^{(n_u^{(AT)})} \rangle, \quad (3.4)$$

где  $N_{\text{пр.с.л.ж}}^{(n_u^{(AT)})}$  – число переданных служебных сообщений  $n_u^{(AT)}$  АТ;  $N_{\text{пр.инф}}^{(n_u^{(AT)})}$  – число переданных информационных сообщений  $n_u^{(AT)}$  АТ;  $N_{\text{пр.с.л.ж}}^{(n_u^{(AT)})}$  – число принятых служебных сообщений  $n_u^{(AT)}$  АТ;  $N_{\text{пр.инф}}^{(n_u^{(AT)})}$  – число принятых информационных сообщений  $n_u^{(AT)}$  АТ.

Графически вектор статистических данных  $n_u^{(AT)}$  АТ представлен на рис. 3.

Состояние функционирования сети передачи данных  $Y_i^{(сост)}$  в части передачи информационного  $m_i^{(инф)}$  или  $m_j^{(служ)}$  служебного сообщения можно представить в пространстве  $\mathbb{R}^2$  вектором с координатами положения  $St_{t_i}^{(n_u^{(AT)})}$  для всех АТ и соответствующего сообщения в последовательные моменты времени  $t_i \in [t_0, t_x]$ :

$$Y_{t_i}^{(сост)} = (St_{t_i}^{(n_1^{(AT)})}, St_{t_i}^{(n_2^{(AT)})}, St_{t_i}^{(n_3^{(AT)})}, \dots, St_{t_i}^{(n_u^{(AT)})}, St_{t_i}^{(m_i)}), \quad u = \overline{1, k}, \quad m_i \in M^{(сообщ)}, \quad (3.5)$$

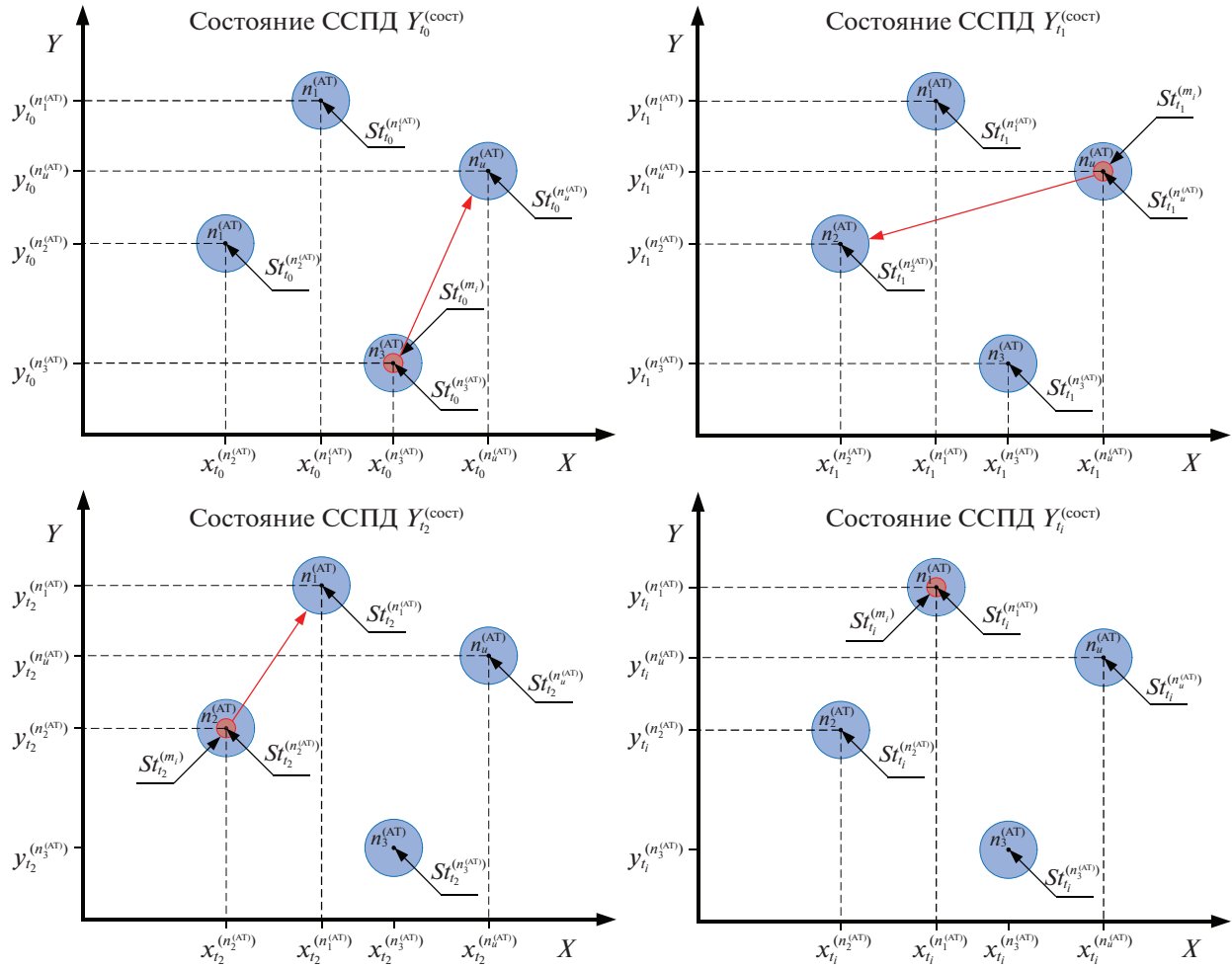


Рис. 4. Состояния функционирования сети передачи данных

где  $St_{t_i}^{(n_u^{(AT)})}$  – координаты  $n_u^{(AT)}$  АТ в пространстве  $\mathbb{R}^2$  в момент времени  $t_i$ , причем

$$St_{t_i}^{(n_u^{(AT)})} = (x_{t_i}^{(n_u^{(AT)})}, y_{t_i}^{(n_u^{(AT)})}), \quad u = \overline{1, k}, \quad (3.6)$$

$St_{t_i}^{(m_i)}$  – координаты  $m_i$  сообщения в пространстве  $\mathbb{R}^2$  в момент времени  $t_i$ , причем

$$St_{t_i}^{(m_i)} = (x_{t_i}^{(m_i)}, y_{t_i}^{(m_i)}), \quad m_i \in M^{(\text{сообщ})}. \quad (3.7)$$

Последовательность состояний функционирования сети передачи данных  $Y_{t_i}^{(\text{софт})}$ , представлена на рис. 4.

Информация о координатах воздушных объектов в зоне ответственности многоуровневой системы мониторинга от наземных и воздушных бортовых радиолокационных комплексов посредством использования множества  $N^{(AT)}$  АТ сети передачи данных поступает в центр обработки информации, где также установлен АТ.

Тогда основной целью  $g^{(n_u^{(AT)})}$  АТ является передача сообщения  $n_\alpha^{(AT)}$  АТ центра обработки информации, т.е.

$$\forall n_u^{(AT)} \in N^{(AT)}, \quad g_i^{(n_u^{(AT)})} = ((x_{t_i}^{(m_i)}, y_{t_i}^{(m_i)}) \mid (x_{t_i}^{(m_i)}, y_{t_i}^{(m_i)}) \in St_{t_i}^{(n_\alpha^{(AT)})}), \quad m_i \in M^{(\text{сообщ})}. \quad (3.8)$$

Таблица 2. Стратегии управления  $n_u^{(AT)}$  АТ в момент времени  $t_i$ 

| Формализованное представление стратегии управления | Логико-лингвистическое представление стратегии управления                                                                                 | Теоретико-множественное представление стратегии управления                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $s_{1,t_i}^{(n_u^{(AT)})}$                         | Прием информационного сообщения $m_i^{(инф)} \in M^{(инф)}$ от $n_d^{(AT)}$ АТ в момент времени $t_i$                                     | $s_{1,t_i}^{(n_u^{(AT)})} : St_{t_i}^{(m_i^{(инф)})} \rightarrow St_{t_i}^{(n_u^{(AT)})}$<br>$m_i^{(инф)} \in M^{(инф)}, St_{t_{i-1}}^{(m_i^{(инф)})} = St_{t_{i-1}}^{(n_d^{(AT)})}$ ,<br>$u = \overline{1, k}$        |
| $s_{2,t_i}^{(n_u^{(AT)})}$                         | Передача информационного сообщения $m_i^{(инф)} \in M^{(инф)}$ на $n_d^{(AT)}$ АТ в момент времени $t_i$                                  | $s_{2,t_i}^{(n_u^{(AT)})} : St_{t_i}^{(m_i^{(инф)})} \rightarrow St_{t_i}^{(n_d^{(AT)})}$<br>$m_i^{(инф)} \in M^{(инф)}, St_{t_{i-1}}^{(m_i^{(инф)})} = St_{t_{i-1}}^{(n_u^{(AT)})}$ ,<br>$u = \overline{1, k}$        |
| $s_{3,t_i}^{(n_u^{(AT)})}$                         | Прием служебного сообщения $m_i^{(служ)} \in M^{(служ)}$ от $n_d^{(AT)}$ АТ в момент времени $t_i$                                        | $s_{3,t_i}^{(n_u^{(AT)})} : St_{t_i}^{(m_i^{(служ)})} \rightarrow St_{t_i}^{(n_u^{(AT)})}$ ,<br>$m_i^{(служ)} \in M^{(служ)}, St_{t_{i-1}}^{(m_i^{(служ)})} = St_{t_{i-1}}^{(n_d^{(AT)})}$ ,<br>$u = \overline{1, k}$  |
| $s_{4,t_i}^{(n_u^{(AT)})}$                         | Передача служебного сообщения $m_i^{(служ)} \in M^{(служ)}$ на $n_d^{(AT)}$ АТ в момент времени $t_i$                                     | $s_{4,t_i}^{(n_u^{(AT)})} : St_{t_i}^{(m_i^{(служ)})} \rightarrow St_{t_i}^{(n_d^{(AT)})}$ ,<br>$m_i^{(служ)} \in M^{(служ)}, St_{t_{i-1}}^{(m_i^{(служ)})} = St_{t_{i-1}}^{(n_u^{(AT)})}$ ,<br>$u = \overline{1, k}$  |
| $s_{5,t_i}^{(n_u^{(AT)})}$                         | Передача информационного сообщения $m_i^{(инф)} \in M^{(инф)}$ на $n_\alpha^{(AT)}$ АТ центра обработки информации в момент времени $t_i$ | $s_{5,t_i}^{(n_u^{(AT)})} : St_{t_i}^{(m_i^{(инф)})} \rightarrow St_{t_i}^{(n_\alpha^{(AT)})}$ ,<br>$m_i^{(инф)} \in M^{(инф)}, St_{t_{i-1}}^{(m_i^{(инф)})} = St_{t_{i-1}}^{(n_u^{(AT)})}$ ,<br>$u = \overline{1, k}$ |

Таблица 3. Возможные состояния функционирования  $n_u^{(AT)}$  АТ в момент времени  $t_i$ 

| Формализованное представление состояния функционирования АТ | Описание состояния функционирования АТ                                                                                                                                                                                                                | Значение состояния функционирования АТ |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| $sf_{0,t_i}^{(n_u^{(AT)})}$                                 | “Работоспособное” состояние $n_u^{(AT)}$ АТ сети передачи данных системы мониторинга                                                                                                                                                                  | 1                                      |
| $sf_{1,t_i}^{(n_u^{(AT)})}$                                 | “Состояние отказа” $n_u^{(AT)}$ АТ сети передачи данных системы мониторинга, когда АТ отказ не диагностировал и продолжает использовать канал связи и приемо-передающую аппаратуру как работоспособные                                                | 0                                      |
| $sf_{2,t_i}^{(n_u^{(AT)})}$                                 | “Состояние ожидания” $n_u^{(AT)}$ АТ сети передачи данных системы мониторинга, когда АТ диагностировал отказ приемо-передающей аппаратуры и канала связи, но ожидает их восстановления                                                                | 0.25                                   |
| $sf_{3,t_i}^{(n_u^{(AT)})}$                                 | “Состояние реконфигурации” $n_u^{(AT)}$ АТ, когда АТ диагностировал, что восстановления приемо-передающей аппаратуры и канала связи не произошло, и был запущен процесс изменения собственных параметров в интересах восстановления работоспособности | 0.5                                    |

Для достижения основной цели взаимодействия между АТ необходимо определить стратегии управления АТ, т.е. действия над множеством сообщений в процессе функционирования сети передачи данных в заданные моменты времени  $t_i \in [t_0, t_x]$ . При этом любое действие соответствующего АТ над информационным или служебным сообщениями приводит к изменению состояния функционирования сети передачи данных  $Y_i^{(сост)}$ . Действия над множеством сообщений, циркулирующих в сети передачи данных в момент времени  $t_i$ , представлены в табл. 2.

**4. Интегральная оценка возможности достижения цели абонентским терминалом на основе вектора технических параметров.** Полезность каждого АТ сети передачи данных определяется интегральной оценкой его результативных действий. Результативными действиями  $n_u^{(AT)}$  АТ в момент времени  $t_i$  являются передача информационного сообщения  $m_i^{(инф)}$  на соответствующий  $n_d^{(AT)}$  или  $n_\alpha^{(AT)}$  АТ центра обработки информации, т.е. стратегии управления  $s_{2,t_i}^{(n_u^{(AT)})}$  и  $s_{5,t_i}^{(n_u^{(AT)})}$ .

Возможность достижения цели  $n_u^{(AT)}$  АТ определяется ресурсными параметрами, т.е. индивидуальными техническими характеристиками — вектором технических параметров  $ph^{(n_u^{(AT)})}$  АТ и особенностями расположения соответствующего терминала на соответствующем уровне системы мониторинга. При кооперации АТ сети передачи данных необходимо найти правило вычисления собственной полезности  $n_u^{(AT)}$  АТ на основе элементов соответствующего вектора технических параметров  $ph^{(n_u^{(AT)})}$ , т.е. через составляющие возможности достижения цели соответствующим АТ. Сформулируем ряд критериев, применение которых обеспечивает формализацию показателя  $S_{n_u}^{(с.п)}(n_u^{(AT)})$  оценки собственной полезности  $n_u^{(AT)}$  АТ сети передачи данных системы мониторинга.

Критерий оценки состояния функционирования  $Kr_{n_u^{(AT)}, t_i}^{(сост)} n_u^{(AT)}$  АТ представляет собой состояние или режим функционирования  $n_u^{(AT)}$  АТ в момент времени  $t_i \in [t_0, t_x]$ . Возможные состояния функционирования  $n_u^{(AT)}$  АТ рассмотрены в табл. 3.

На состояние функционирования АТ влияют различные факторы, основные из которых это преднамеренные или не преднамеренные деструктивные воздействия.

Критерий близости  $Kr^{(бл)} n_u^{(AT)}$  АТ представляет собой расстояние  $L_{n_u^{(AT)}}^{(n_u^{(AT)})}$  радиотрассы между  $n_u^{(AT)}$  АТ и соседними АТ сети передачи данных, которые находятся в зоне энергетической доступности  $n_u^{(AT)}$  АТ. При этом  $n_u^{(AT)}$  АТ является более полезным для  $n_d^{(AT)}$  АТ, чем другие АТ сети передачи данных, если выполняется условие

$$Kr_{n_u^{(AT)}, n_d^{(AT)}, t_i}^{(бл)} : L_{n_d^{(AT)}}^{(n_u^{(AT)})} < L_{n_d^{(AT)}}^{(n_i^{(AT)})}, \quad \forall n_u^{(AT)}, n_d^{(AT)}, n_i^{(AT)} \in N^{(AT)}, \quad u \neq i, \quad i = \overline{1, (k-1)}, \quad t_i \in [t_0, t_x]. \quad (4.1)$$

При функционировании сети передачи данных системы мониторинга в условиях воздействия деструктивных факторов необходимо оценивать уровень полезного сигнала на входе радиоприемного устройства АТ. Следовательно, использовать критерий значения уровня полезного сигнала к уровню помехи (шума)  $Kr^{(о.с.ш)} n_u^{(AT)}$  на входе радиоприемного устройства  $n_u^{(AT)}$  АТ, т.е.  $n_d^{(AT)}$  АТ более полезен для  $n_u^{(AT)}$  АТ, чем другие АТ сети передачи данных, если верно условие

$$Kr_{n_u^{(AT)}}^{(о.с.ш)} : ph_{о.с.ш}^{(n_u^{(AT)})} < ph_{о.с.ш}^{(n_i^{(AT)})}, \quad \forall n_d^{(AT)}, n_i^{(AT)} \in N^{(AT)}, \quad d \neq i, \quad i = \overline{1, (k-1)}. \quad (4.2)$$

Одним из основных технических параметров АТ сети передачи данных является значение скорости передачи информации  $ph_{скор}^{(n_u^{(AT)})}$  радиопередающего устройства  $n_u^{(AT)}$  АТ от СМ системы мониторинга. На основе данного параметра сформулируем критерий скорости передачи информации  $Kr^{(скор)} n_u^{(AT)}$  АТ, т.е.  $n_u^{(AT)}$  АТ более полезен для  $n_d^{(AT)}$  АТ, чем другие АТ сети передачи данных, если выполняется условие

$$Kr_{n_u^{(AT)}}^{(скор)} : ph_{скор}^{(n_u^{(AT)})} > ph_{скор}^{(n_i^{(AT)})}, \quad \forall n_u^{(AT)}, n_i^{(AT)} \in N^{(AT)}, \quad u \neq i, \quad i = \overline{1, (k-1)}. \quad (4.3)$$

Предложенные критерии охватывают все основные аспекты функционирования  $n_{i(AT)}^{(AT)}$  АТ сети передачи данных системы мониторинга и позволяют формализовать показатель оценки собственной полезности  $S_{n_{i(AT)}}^{(с.п)}$  выражением вида

$$S_{n_{i(AT)}}^{(с.п)} = \{Kr^{(сост)} Kr^{(бл)} Kr^{(скор)} Kr^{(о.с.ш)}\}. \quad (4.4)$$

Значения вектора технических параметров могут иметь различную размерность, следовательно, необходимо выполнить процедуру нормализации рассматриваемых параметров.

Предложенные аналитические выражения дают возможность оценить эффективность информационного взаимодействия структурных элементов самоорганизующейся сети передачи данных наземно-воздушной системы мониторинга с учетом устойчивости информационного обмена. При этом учитываются особенности взаимодействия АТ, определяется их состояние и особенности функционирования с помощью показателя полезности и диссонанса АТ для соответствующих узлов сети.

**Заключение.** Применение разработанной аналитической модели информационного взаимодействия структурных элементов самоорганизующейся сети передачи данных многоуровневой системы мониторинга на базе многоагентного подхода позволяет провести оценку функционирования множества АТ в части показателя устойчивости информационного взаимодействия. Для оценки устойчивости функционирования абонентских терминалов при воздействии разнотипных деструктивных факторов в модели использованы критерии взаимной надежности и когнитивного диссонанса. Получены аналитические выражения для оценки устойчивости сети в целом с помощью обобщения показателей взаимной полезности и когнитивного диссонанса.

На основании полученных аналитических выражений планируется разработка имитационной модели информационного взаимодействия структурных элементов системы мониторинга. Модель будет учитывать динамику информационного обмена при децентрализованном управлении многоуровневой сетью передачи данных, организованной на базе многоагентного подхода в рамках формирования коалиции абонентских терминалов в среде агентного моделирования “Anylogic”. Цель моделирования — получение многокритериальной оценки показателей качества, зависимости данных показателей от технических параметров АТ в функции времени, определения компонент связности при динамическом изменении топологии сети передачи данных, центров кластеризации и оценка устойчивости и своевременности информационного взаимодействия между структурными элементами сети. При изучении имитационной модели сети в отсутствие единого центра управления будут использованы представленные в статье стратегии управления и правила поведения АТ в соответствующие моменты времени в зависимости от оценки показателей взаимной полезности, когнитивного диссонанса и состояния терминалов сети.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бушмелев П.Е. Беспроводная сенсорная телекоммуникационная система контроля утечек метана из магистралей газотранспортной сети: Дис. ... канд. техн. наук. М.: ВШЭ, 2014. 225 с.
2. Аганесов А.В. Анализ качества обслуживания в воздушно-космической сети связи на основе иерархического и децентрализованного принципов ретрансляции информационных потоков // Системы управления, связи и безопасности. 2015. № 3. С. 92–121.
3. Ананьев А.В., Ерзин И.Х., Стафеев М.А. Обоснование рационального выбора беспилотного летательного аппарата для построения аэромобильной сети связи // Фундаментальные исследования. 2016. № 12-2. С. 251–255.
4. Ванг Л., Жу Д., Жу Ю., Матвеев И.А. Многоаспектная кластеризация подпространств методом адаптивной оптимизации глобального графа родства // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 1. С. 41–55.
5. Кычкин А.В., Артемов С.А., Власов В.А. Модульная организация сенсорной и управляющей систем мобильной интеллектуальной платформы // Фундаментальные исследования. 2013. № 10-10. С. 2147–2152. URL: <https://fundamental-research.ru/ru/article/view?id=32725>.
6. Теория управления (дополнительные главы): учебное пособие / Под ред. Д.А. Новикова. М.: ЛЕНАНД, 2019. 552 с.
7. Теория управления: учебное пособие / Под ред. О.В. Симагина. Новосибирск: СибАГС, 2014. 135 с.
8. Жирабок А.Н., Ким Чхун Ир Виртуальные датчики в задаче функционального диагностирования нелинейных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 1. С. 67–75.
9. Рыжиков Ю.И. Численные методы теории очередей: учебное пособие. СПб.: Лань, 2019. 512 с.

10. Прикладная теория графов и сетевые модели: учебное пособие / Под ред. А.А. Кочкарова. М.: КноРус, 2021. 209 с.
11. Замарин А.И., Тавалинский Д.А., Цыганов А.С. Метод анализа и обработки цифровых информационных последовательностей в условиях структурной и параметрической неопределенности // Успехи современной радиоэлектроники. 2017. № 9. С. 8–13.
12. Городецкий В.И., Карасев О.В., Самойлов В.В., Серебряков С.В. Прикладные многоагентные системы группового управления // Искусственный интеллект и принятие решений. 2009. № 2. С. 3–24.
13. Городецкий В.И. Теория, модели, инфраструктуры и языки спецификации командного поведения автономных агентов. Обзор. Ч. 1 // Искусственный интеллект и принятие решений. 2011. № 2. С. 19–30.
14. Кулинич А.А. Модель командного поведения агентов (роботов): когнитивный подход // Управление большими системами. 2014. Вып. 51. С. 174–196.
15. Михайлов Р.Л., Макаренко С.И. Оценка устойчивости сети связи в условиях воздействия на нее дестабилизирующих факторов // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2013. № 4(12). С. 69–79.
16. Боговик А.В., Игнатов В.В. Эффективность систем военной связи и методы ее оценки. СПб.: ВАС, 2006. 183 с.
17. Назаров А.Н., Сычев К.И. Модели и методы расчета показателей качества функционирования узлового оборудования и структурно-сетевых параметров сетей связи следующего поколения. Красноярск: Поликом, 2010. 389 с.
18. Кулинич А.А. Модель поддержки принятия решений для образования коалиций в условиях неопределенности // Искусственный интеллект и принятие решений. 2012. № 2. С. 95–106.
19. Карпов В.Э. Коллективное поведение роботов. Желанное и действительное // Современная мехатроника. Сб. научн. тр. Всероссийской научной школы. Орехово-Зуево, 2011. С. 35–51.
20. Тарасов В.Б. От многоагентных систем к интеллектуальным организациям. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 352 с.
21. Yildirim E., Yucelen T. Control of Multiagent Networks with Misbehaving Nodes // Intern. J. Systems. Science. 2021. V. 52. № 13. P. 2858–2874.  
<https://doi.org/10.1080/00207721.2021.1910875>
22. Olfati-Saber R., Richard M. Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-delays // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. № 9. P. 1520–1533.

---

## ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

---

УДК 623.74

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ПРЕЦЕДЕНТУ В БАЗАХ ЗНАНИЙ БОРТОВЫХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ ТАКТИЧЕСКОГО УРОВНЯ НА ЭТАПАХ ВЫПОЛНЕНИЯ МИССИИ ПОДВИЖНЫМ ОБЪЕКТОМ<sup>1</sup>

© 2023 г. Б. Е. Федун

ФАУ “ГосНИИАС”, Москва, Россия

*e-mail: boris\_fed@gosniias.ru*

Поступила в редакцию 15.07.2022 г.

После доработки 04.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Решение задачи по прецеденту возможно, если накоплен опыт успешного решения аналогичных задач. Представлены предметно независимые структуры экспериментальной матрицы знаний, содержащей информацию по прецедентам, и процедурной матрицы знаний, используемой для решения задачи. Приведен пример решения по прецеденту задачи, возникшей на борту пассажирского самолета в коллизии «Взлет самолета после прерванного пробега по взлетно-посадочной полосе — Задача “Куда лететь после взлета?”».

DOI: 10.31857/S0002338823010018, EDN: IZRYMT

**Введение.** На борту подвижного объекта, выполняющего заданную миссию, тактические задачи возникают, когда появляется коллизия “Выполняемый этап миссии — Непосредственная угроза выполнению миссии” [1]. На борту обитаемого подвижного объекта коллизии обнаруживает бортовая интеллектуальная информационная система “Ситуационная осведомленность экипажа” (ИИС СОЭ), которая среди наблюдаемых потенциальных угроз выявляет коллизии (рис. 1).

В этой же ИИС СОЭ происходит ранжирование обнаруженных непосредственных угроз [2] и подключение бортовой оперативно советующей экспертной системы “Оперативное целеполагание” (БОСЭС-целеполагание), в которой решается задача назначения способа противодействия возникшей непосредственной угрозе. Чаще всего эту задачу можно решить только по прецеденту.

В разд. 1 статьи информация по прецедентам представляется в форме экспериментальной матрицы знаний. Непосредственно для решения задачи по прецеденту применяется процедурная матрица знаний, разработанная на базе экспериментальной матрицы знаний. Процедурной матрице знаний посвящен раздел 2. Отметим, что структуры обеих матриц знаний предметно независимы. В разд. 3 представлен пример решения задачи по прецеденту, возникающей в конкретной предметной области “Взлет самолета после прерванного пробега по взлетно-посадочной полосе (ВПП)”.

**1. Накопление и представление знаний по прецедентам для решения задачи Z.** Для решения по прецеденту некоторой задачи Z нужно, прежде всего, найти в предметной области, в которой возникла задача Z, аналогичные задачи, которые были успешно решены в прошлом, и способы решения которых могут быть применены к задаче Z. Выбираем только те аналогичные задачи, которые возникали в разных условиях.

Разделим все множество найденных аналогичных задач на блоки. В каждый блок поместим аналогичные задачи, которые были решены одним способом и возникали в различных условиях. Число блоков равно числу способов, которыми были решены найденные аналогичные задачи. На этапе накопления знаний каждый способ называют прецедентным решением задачи Z, а соответствующий блок аналогичных задач — прецедентом. Таким образом, понятие прецедент

<sup>1</sup> В работе использованы материалы доклада автора на Форуме KazanDigiteWeek-2022.



**Рис. 1.** Использование метода решения задачи по прецеденту в базе знаний БОСЭС-целеполагание: блоки базы знаний БОСЭС-целеполагание и ее взаимодействие со штатными бортовыми алгоритмами, реализованными в бортовых цифровых вычислительных машинах (штатные БЦВМ-алгоритмы), ИИС СОЭ и информационно-управляющем полем (ИУП) кабины экипажа

включает в себя как способ (прецедентное решение) задачи  $Z$ , так и набор аналогичных задач, которые были решены этим способом.

Условия, в которых возникла каждая аналогичная задача, специалисты чаще всего определяют терминами нескольких лингвистических переменных (ЛП) [3]. Поэтому все многообразие условия, в которых возникали эти успешно решенные задачи, удобно описать одним ситуационным вектором  $SV$  (Задача  $Z$  – Прецеденты), координаты которого суть различные ЛП с набором термов, характерных для этих ЛП. Для последующего использования этой информации каждой ЛП поставим во взаимно-однозначное соответствие с ее терминами свой набор нечетких множеств (НМ). Ансамбли функций принадлежности этих НМ определяются на одном том же универсальном множестве (УМ), характерном для этой ЛП. УМ и функции принадлежности НМ согласовываются со специалистами, которые решали найденные аналогичные задачи. Информацию по этим задачам с упомянутыми НМ оформим экспериментальной матрицей знаний.

Представим предметно независимый облик экспериментальной матрицы знаний для некоторой задачи  $Z$ . Пусть для нее накоплено всего четыре успешно решенных аналогичных задачи (каждая аналогичная задача возникала в условиях, отличных от условий, в которых возникали другие!). Пусть установлено, что эти задачи решались двумя способами и что:

задачи 1.1 и 1.2 решались первым способом, а задачи 2.1 и 2.2 – вторым способом. В обозначения аналогичной задачи первая цифра указывает способ ее решения, вторая цифра – порядковый номер задачи;

различные условия, в которых возникали эти задачи, описаны тремя ЛП: ЛП-1 = (терм-1.1, терм-1.2, терм-1.3), ЛП-2 = (терм-2.1, терм-2.2, терм-2.3) и ЛП-3 = (терм-3.1, терм-3.2, терм-3.3). Вводимые НМ определены соответственно на УМ-1, УМ-2, УМ-3. В этом случае экспериментальная матрица для задачи  $Z$  имеет два блока. Оба блока имеют одинаковую структуру (табл. 1).

**Таблица 1.** Облик экспериментальной матрицы знаний для задачи  $Z$ 

| № п/п задач, аналогичных задаче $Z$ | $SV$ (Задача $Z$ – Прецеденты)     |                                    |                                    | Прецеденты |
|-------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------|
|                                     | ЛП-1 = (термы).<br>НМ термов, УМ-1 | ЛП-2 = (термы).<br>НМ термов, УМ-2 | ЛП-3 = (термы).<br>НМ термов, УМ-3 |            |
|                                     | НМ (терм-1.1)                      | НМ (терм-2.1)                      | НМ (терм-3.1)                      |            |
|                                     | НМ (терм-1.2)                      | НМ (терм-2.2)                      | НМ (терм-3.2)                      |            |
|                                     | НМ (терм-1.3)                      | НМ (терм-2.3)                      | НМ (терм-3.3)                      |            |
| 1.1                                 | НМ (терм-1.1)                      | НМ (терм-2.3)                      | НМ (терм-3.1)                      | Прц-1      |
| 1.2                                 | НМ (терм-1.2)                      | НМ (терм-2.2)                      | НМ (терм-3.2)                      |            |
| 2.1                                 | НМ (терм-1.2)                      | НМ (терм-2.1)                      | НМ (терм-3.2)                      |            |
| 2.2                                 | НМ (терм-1.3)                      | НМ (терм-2.3)                      | НМ (терм-3.1)                      |            |

**Таблица 2.** Облик процедурной матрицы знаний для задачи  $Z$ 

| № п/п задач, аналогичных задаче $Z$ | $SV$ (Задача $Z$ – Прецеденты)     |                                    |                                    | Операция нечеткого отношения (min). Строчные НМ на УМ = $УМ-1 \times УМ-2 \times УМ-3$ | Операция объединения НМ (max). НМ(Прц) на УМ = $УМ-1 \times УМ-2 \times УМ-3$ | Прецеденты |
|-------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
|                                     | ЛП-1 = (термы).<br>НМ термов, УМ-1 | ЛП-2 = (термы).<br>НМ термов, УМ-2 | ЛП-3 = (термы).<br>НМ термов, УМ-3 |                                                                                        |                                                                               |            |
|                                     | НМ (терм-1.1)                      | НМ (терм-2.1)                      | НМ (терм-3.1)                      |                                                                                        |                                                                               |            |
|                                     | НМ (терм-1.2)                      | НМ (терм-2.2)                      | НМ (терм-3.2)                      |                                                                                        |                                                                               |            |
|                                     | НМ (терм-1.3)                      | НМ (терм-2.3)                      | НМ (терм-3.3)                      |                                                                                        |                                                                               |            |
| 1.1                                 | НМ (терм-1.1)                      | НМ (терм-2.3)                      | НМ (терм-3.1)                      | НМ строки 1.1                                                                          | НМ (Прц-1)                                                                    | НМ (Прц-1) |
| 1.2                                 | НМ (терм-1.2)                      | НМ (терм-2.2)                      | НМ (терм-3.2)                      | НМ строки 1.2                                                                          | $УМ = УМ-1 \times УМ-2 \times УМ-3$                                           |            |
| 2.1                                 | НМ (терм-1.2)                      | НМ (терм-2.1)                      | НМ (терм-3.2)                      | НМ строки 2.1                                                                          | НМ (Прц-2)                                                                    |            |
| 2.2                                 | НМ (терм-1.3)                      | НМ (терм-2.3)                      | НМ (терм-3.1)                      | НМ строки 2.2                                                                          | $УМ = УМ-1 \times УМ-2 \times УМ-3$                                           |            |

В первый блок включена информация по задачам 1.1 и 1.2. В первой строке блока в ячейках строки стоят НМ, соответствующие тем термами ЛП-1, ЛП-2 и ЛП-3, которыми описывались условия, в которых решалась задача 1.1. НМ, отнесенные к термам ЛП-1, определены на УМ-1. НМ, отнесенные к термам ЛП-2, определены на УМ-2. НМ, отнесенные к термам ЛП-3, определены на УМ-3. Во второй строке этого блока в ячейках строки стоят НМ, соответствующие тем термами ЛП-1, ЛП-2 и ЛП-3, которыми описывались условия, в которых решалась задача 1.2. Эти НМ определены соответственно на УМ-1, УМ-2, УМ-3. Блоку присваивается название “Прецедент-1” (Прц-1).

Во второй блок включена информация по задачам 2.1 и 2.2. В строках блока в ячейках строк стоят НМ, соответствующие термами ЛП-1, ЛП-2 и ЛП-3, которыми описывались условия, в которых решалась задача 2.1 (первая строка блока), и которыми описывались условия, в которых решалась задача 2.2 (вторая строка блока). Эти НМ определены на тех же УМ-1, УМ-2, УМ-3. Блоку присваивается название “Прецедент- 2” (Прц-2).

Пример экспериментальной матрицы знаний для конкретной предметной области дан в разд. 3.

**2. Решение задачи по прецеденту.** Экспериментальная матрица является исходным материалом для построения процедурной матрицы знаний, которая используется при решении задачи  $Z$  (табл. 2).

Для преобразования экспериментальной матрицы знаний в процедурную матрицу знаний в каждом блоке экспериментальной матрицы знаний введем:

в каждой строке блока матрицы процедуру нечеткого отношения для НМ, стоящих в ячейках строки. При выполнении этой процедуры в строках блока получим свои строчные НМ, определенное на декартовом произведении  $УМ = УМ-1 \times УМ-2 \times УМ-3$ , которое одно для все строк во всех блоках матрицы;

в каждом блоке матрицы процедуру объединения к найденным строчным НМ этого блока. В результате выполнения этой процедуры получим для каждого блока матрицы НМ прецедента этого блока, определенного на  $УМ = УМ-1 \times УМ-2 \times УМ-3$ .

В полученной процедурной матрице знаний прецедент представляется своим НМ, определенным на упомянутом выше УМ, и ссылкой на тот способ (прецедентное решение задачи Z), который был указан в соответствующем блоке экспериментальной матрицы знаний.

**Примечание 1.** Заметим, что точки УМ, на котором определена функция принадлежности НМ, представляющего прецедент, описывается тремя координатами (по числу ЛП, которыми представляются условия возникновения задачи Z) и размерность координат точек УМ состоит из размерностей точек, соответствующих УМ, прикрепленных к ЛП.

Отметим, что для решения задачи Z нужны не сами НМ ее прецедентных решений, а их приоритеты. Обычно для расчета приоритетов этих решений по полученным в процедурной матрице знаний их функциям принадлежности предлагаются различные процедуры определения количественных значений приоритетов прецедентов. Эти процедуры никак не учитывают специфику задачи Z. Однако для оперативного решения задачи Z на борту подвижного объекта можно предложить следующую процедуру расчета приоритетов прецедентов, учитывающих текущие условия, в которых появилась эта задача. Заметим, что каждый ситуационный вектор SV (Задача Z – Прецеденты) с количественными значениями его координат выделяет точку на УМ, на которой в процедурной матрице знаний можно для этой точки определить значение функции принадлежности НМ прецедента.

Используем этот факт, разработаем процедуру расчета количественных значений координат SV (Задача Z – Прецеденты), учитывающую оперативно поступившую информацию о сложившихся условиях возникновения задачи Z. Рассчитаем по этой процедуре значения координат SV (Задача Z – Прецеденты). В точке УМ, соответствующей полученному ситуационному вектору, определим значение функций принадлежности каждого прецедента, которое определяет приоритет прецедента. Прецедент с наибольшим значением приоритета будет решением задачи Z.

Покажем, как это делается. Пусть определились количественные значения координат ситуационного вектора. По этому вектору в процедурной матрице (табл. 2) последовательно активизируются строки матрицы, а в ней последовательно активизируются ячейки.

В активизированной ячейке по признаку столбца, в котором она находится, определяются НМ, которые заданы на одном и том же УМ. По координате ситуационного вектора, соответствующей рассматриваемому столбцу, на упомянутом в активизированной ячейке УМ выделяется точка. В этой точке находится значение функции принадлежности НМ, указанного в активизированной ячейке.

После прохождения всех ячеек активизированной строки по операции нечеткого отношения определяется значение функций принадлежности строчного НМ этой строки. Применяя операцию нечеткого объединения ко всем полученным строчным НМ блока, определим значение функции принадлежности прецедента этого блока в точке УМ, указанной ситуационным вектором. Это значение объявим приоритетом прецедента рассматриваемого блока.

Проведя эти процедуры для всех блоков процедурной матрицы, находим приоритеты всех входящих в матрицу прецедентов. Прецедент с наибольшим приоритетом будет решением задачи Z.

Описанный метод решения задач по прецеденту апробирован в решении двух задач в базах знаний бортовых оперативно советующих экспертных систем (БОСЭС): задачи назначения тактического приема в базе знаний БОСЭС “Ввод группы в воздушный бой” [1] и задачи усмирения дебошира в базе знаний БОСЭС “Оперативное целеполагание” для коллизии «Выполняемый этап полета пассажирского самолета “Маршрут” – Непосредственная угроза выполнению миссии самолета: “Дебошир в пассажирском салоне”» [1].

**3. Пример решения по прецеденту конкретной задачи Z.** Рассмотрим задачу, возникающую на борту пассажирского самолета при появлении коллизии «Взлет после прерванного пробега по ВПП – Задача “Куда лететь после взлета?”».

На борту самолета размещается БОСЭС-целеполагание (рис. 1). На вход БОСЭС-целеполагание поступает из ИИС СОЭ коллизия “Взлет после прерванного пробега по ВПП – Задача “Куда лететь после взлета?””, а из блока “Процедура расчета ...” количественное значение координат ситуационного вектора.

Полученной в процедурной матрице знаний решение задачи предъявляется экипажу на ИУП.

Для решения этой задачи по прецеденту необходимо пройти следующие этапы: 1) накопить прецеденты ее решения, оформив их в виде экспериментальной матрицы знаний для задачи “Куда лететь после взлета?”; 2) разработать процедурную матрицу знаний для решения задачи, 3) создать процедуру расчета количественного значения координат ситуационного вектора  $SV$  (Задача “Куда лететь после взлета?” – Прецеденты), 4) по процедуре (см. п. 3) определить текущие количественные значения координат этого ситуационного вектора, 5) по текущим количественным значениям координат ситуационного вектора в процедурной матрице знаний рассчитать значения приоритетов прецедентов, входящих в процедурную матрицу знаний, 6) способ решения задачи в прецеденте, который имеет наибольший приоритет, использовать для решения задачи “Куда лететь после взлета?”.

Покажем конкретику каждого этапа, отражающую специфику предметной области.

3.1. Прецеденты для решения задачи “Куда лететь после взлета?”. Приведем примеры материалов, использованных для создания экспериментальной матрицы знаний для задачи “Куда лететь после взлета?” [4–6].

1. 2021 г. Рейс Москва (Домодедово) – Калининград (Храброво), самолет Боинг 737–800. Самолет производил посадку в сложных метеоусловиях с сильным попутным ветром при посадке. В процессе выравнивания перед касанием был затяжной пролет над началом ВПП (коллизия «Посадка: фаза “Выравнивание” – “Затяжной пролет над началом ВПП”»). После успешного касания ВПП и пробега по полосе была пересечена крайняя точка для остановки в пределах ВПП (коллизия «Пробег по ВПП – “Пересечение отметки для остановки в пределах ВПП”»). Пилоты приняли решение “Прервать пробег, взлет” и после отрыва от ВПП (коллизия «Отрыв от ВПП – “Над ВПП сильный попутный ветер”») решили “Уйти на второй круг”.

2. 1990 г. Рейс в аэропорту Диксон, самолет Як-40. Заход на посадку происходил ночью в сложных метеоусловиях. Посадка была произведена на скорости, значительно превышающей расчетную. При наличии попутного ветра и поземки торможение оказалось слабым (коллизия “Посадка: фаза “Пробег по ВПП” – Слабое торможение”). Экипаж прервал пробег и совершил взлет (коллизия “Самолет в воздухе – Ухудшение погодных условий”). После взлета уйти на второй круг не позволили ухудшившиеся погодные условия. Самолет ушел на запасной аэродром.

3. 2022 г. Рейс Москва (Шереметьево) – Красноярск (Емельяново), самолет А320. Посадка осуществлялась в сильный снегопад. Самолет коснулся ВПП и во время начала торможения потерял сцепление с ВПП, так как между шасси и поверхностью ВПП образовалась ледяная прослойка из-за резкого нагрева шасси после касания с ВПП (коллизия “Пробег по ВПП – Слабое торможение”). Экипаж прервал пробег и принял решение “Взлетать”. После взлета экипажу сообщили, что на аэродроме для расчистки полосы привлечены все снегоуборочные машины (коллизия “Самолет в воздухе – Расчистка полосы”). Экипаж принял решение “Уйти на второй круг”. Самолет успешно совершил посадку после расчистки полосы.

Анализ этих и других посадок с прерыванием пробега по ВПП и последующим взлетом показал, что:

использовались два способа решения задачи после отрыва от ВПП: уйти на второй круг или уйти на запасной аэродром (прецедентные решения для задачи “Куда лететь после взлета?”),

выделенные координаты ситуационного вектора  $SV$  (Задача “Куда лететь после взлета?” – Прецеденты: “Уйти на второй круг”, “Уйти на запасной аэродром”) представляются ЛП.

Не приводя в статье все координаты ситуационного вектора, для демонстрационного примера выберем только четыре координаты:

ЛП-1 “Погода” = (благоприятная (блп), нормальная (норм), неблагоприятная (нбл), ужасная (ужс)). Термам этой ЛП поставлены в соответствие четыре НМ, определенные на одном УМ [2, 10], точки которого – баллы оценки погоды. Ансамбли функций принадлежности НМ, поставленных в соответствие термам этой ЛП, показаны на рис. 2.

ЛП-2 “Скорость снижения в момент касания ВПП” = (большая (блш), средняя (срд), малая (мал)). Термам этой ЛП поставлены в соответствие три НМ, определенные на одном УМ [0, 20], точки которого – скорость снижения в момент касания ВПП в м/с. Ансамбли функций принадлежности НМ, поставленных в соответствие термам этой ЛП, представлены на рис. 3.

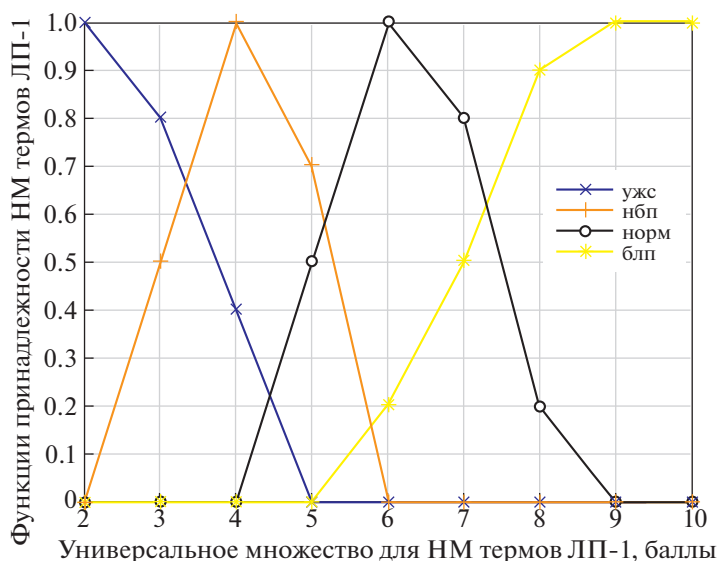


Рис. 2. Представление термов ЛП-1 “Погода” через НМ, определенные на УМ [2, 10], баллы

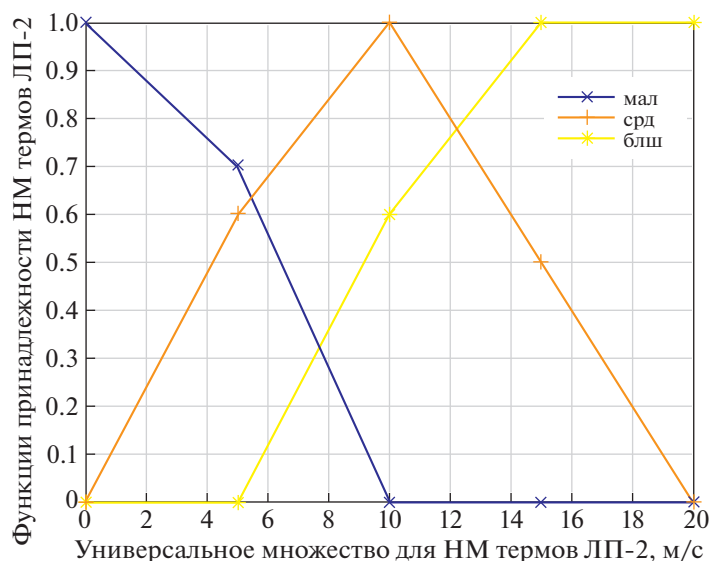
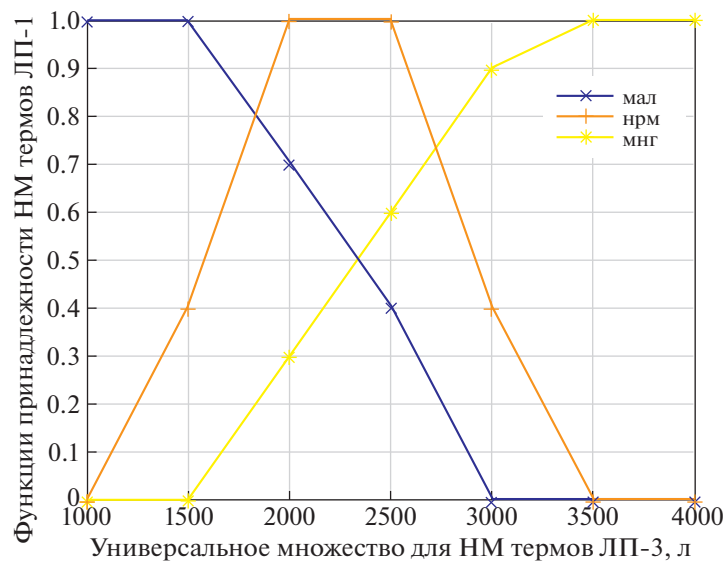


Рис. 3. Представление термов ЛП-2 “Скорость снижения в момент касания ВПП” через НМ, определенные на УМ [0, 20], м/с

ЛП-3 “Количество топлива на пробеге” = (много (мнг), нормально (нрм), мало (мал)). Термам этой ЛП поставлены в соответствие три НМ, определенные на одном УМ [1000, 5000]. Точки УМ — количество топлива в литрах (л). Ансамбли функций принадлежности этих НМ, поставленных в соответствие термам этой ЛП, даны на рис. 4.

ЛП-4 = “Амбиции экипажа” = (большие, средние, маленькие). Термам этой ЛП поставлены в соответствие три НМ, определенные на одном УМ [2, 10], точки которого — баллы оценки амбиции. Ансамбли функций принадлежности этих НМ, поставленные в соответствие термам этой ЛП, показаны на рис. 5.

**Примечание 2.** Следует отметить, что работа со специалистами по определению и согласованию количества термов каждой ЛП и конкретных значений функций принадлежности для каждого НМ, поставленного в соответствие терму ЛП, требует больших временных затрат.



**Рис. 4.** Представление термов ЛП-3 “Количество топлива на пробеге” через НМ, определенные на УМ [1000, 4000], л

Представленные в демонстрационном примере наборы термов ЛП и ансамбли функций принадлежности не прошли такого согласования.

Экспериментальная матрица знаний для решения Задача “Куда лететь после взлета?” дана в табл. 3.

Сравнивая эту экспериментальную матрицу знаний, полученную для конкретной задачи “Куда лететь после взлета?”, со структурой предметно независимой экспериментальной матрицы знаний (см. табл. 1), отметим, что структуры их одинаковы, а конкретика предметной области отразилась только в конкретике ЛП и прецедентов.

**3.2. БОСЭС-целеполагание: база знаний для решения задачи “Куда лететь после взлета?”**. Для решения задачи по прецеденту в базе знаний БОСЭС-целеполагание размещены два блока (рис. 1): “Процедура расчета количественного значения координат ситуационного вектора  $SV$  (Задача  $Z$  – Прецеденты)” (табл. 4) и блок “Процедурная матрица знаний” (табл. 5). Оба блока учитывают специфику предметной области:

процедура расчета количественного значения координат ситуационного вектора  $SV$  (Задача  $Z$  – Прецеденты) настроена на задачу  $Z$  = “Куда лететь после взлета?”,

процедурная матрица знаний задачи  $Z$  настроена на ситуационный вектор этой задачи и на прецеденты ее решения “Уйти на второй круг” или “Уйти на запасной аэродром”.

Покажем работу базы знаний БОСЭС-целеполагание. Пусть в блоке “Процедура расчета количественного значения координат ситуационного вектора  $SV$  (Задача – Прецеденты)” определились количественные значения координат ситуационного вектора,  $SV$  (Задача “Куда лететь после взлета?” – Прецеденты) = (5, 10, 2000, 4) (табл. 6). По этому вектору в процедурной матрице знаний этой задачи последовательно активизируются строки матрицы, а в каждой активизированной строке последовательно активизируются ячейки (табл. 7).

Пусть активизировалась первая строка 1.1 первого блока процедурной матрицы знаний (табл. 7), а в ней активизировалась первая ячейка. В активизированной ячейке определяется НМ (блп). По координате полученного ситуационного вектора ЛП-1 (Погода) = 5 баллов, в столбце активизированной ячейки указывается УМ [2, 10], на котором определено НМ (блп). В упомянутой точке 5 баллов УМ [2, 10] по функции принадлежности НМ (блп) определяется ее значение “0.0”, которое заносится в упомянутую активизированную ячейку (рис. 2).

После прохождения всех ячеек активизированной строки в ней по операции нечеткого отношения, примененной ко всем указанным в строке НМ, определяется значение функций принадлежности “0.0” строчного НМ этой строки в точке (5, 10, 2000, 4) универсального множества  $УМ = [2, 10] \times [0, 20] \times [1000, 5000] \times [2, 10]$ , на котором определено строчное НМ этой строки. После активизации всех строк первого блока определим значения функций принадлежности его

**Таблица 3.** Экспериментальная матрица знаний для задачи “Куда лететь после взлета?”

| № п/п задач, аналогичных задаче “Куда лететь после взлета?” | Координаты ситуационного вектора $SV$ (Задача “Куда лететь после взлета?” – Прецеденты) |                                                                                        |                                                                                  |                                                                   | Прецеденты                |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|---------------------------|
|                                                             | ЛП-1 “Погода” = (термы).<br>НМ термов, УМ [2, 10], баллы                                | ЛП-2 “Скорость снижения в момент касания ВПП” = (термы).<br>НМ термов, УМ [0, 20], м/с | ЛП-3 “Количество топлива на пробеге” = (термы).<br>НМ термов, УМ [1000, 5000], л | ЛП-4 “Амбиции экипажа” = (термы).<br>НМ термов, УМ [2, 10], баллы |                           |
|                                                             | НМ (блп) благоприятная                                                                  | НМ (блш) большая                                                                       | НМ (мнг) много                                                                   | НМ (блш) большие                                                  |                           |
|                                                             | НМ (норм) нормальная                                                                    | НМ (срд) средняя                                                                       | НМ (нрм) нормально                                                               | НМ (срд) средние                                                  |                           |
|                                                             | НМ (нбл) неблагоприятная                                                                | НМ (мал) маленькая                                                                     | НМ (мал) мало                                                                    | НМ (млн) маленькие                                                |                           |
|                                                             | НМ (ужс) ужасная                                                                        | —                                                                                      | —                                                                                | —                                                                 |                           |
|                                                             |                                                                                         |                                                                                        |                                                                                  |                                                                   |                           |
| 1.1                                                         | НМ (блп)                                                                                | НМ (блш)                                                                               | НМ (мал)                                                                         | НМ (млн)                                                          | Уход на второй круг       |
| 1.2                                                         | НМ (блп)                                                                                | НМ (блш)                                                                               | НМ (нрм)                                                                         | НМ (млн)                                                          |                           |
| 1.3                                                         | НМ (норм)                                                                               | НМ (блш)                                                                               | НМ (мнг)                                                                         | НМ (срд)                                                          |                           |
| 2.1                                                         | НМ (ужс)                                                                                | НМ (срд)                                                                               | НМ (мнг)                                                                         | НМ (блш)                                                          | Уход на запасной аэродром |
| 2.2                                                         | НМ (нбл)                                                                                | НМ (срд)                                                                               | НМ (нрм)                                                                         | НМ (срд)                                                          |                           |

**Таблица 4.** Входная информация в блок “Процедура расчета значения координат ситуационного вектора  $SV$  (Задача “Куда лететь после взлета?” – Прецеденты) базы знаний БОСЭС-целесолагание

| Информация                                  | Описание                                    | Источник                          |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------|
| Погода, баллы                               | Состояние метеоусловий, дальность видимости | Данные от диспетчера, ручной ввод |
| Скорость снижения в момент касания ВПП, м/с | Скорость в момент касания ВПП               | Бортовой источник                 |
| Количество топлива на пробеге, л            | Наличие топлива в момент касания ВПП        | Бортовой источник                 |
| Амбиции экипажа, баллы                      | Склонность к риску                          | Ручной ввод                       |

строчных НМ “0.0 0.0 0.3” в точке (5, 10, 2000, 4) того же универсального множества УМ = [2, 10] × [0, 20] × [1000, 5000] × [2, 10].

Применяя операцию нечеткого объединения ко всем полученным строчным НМ первого блока, найдем значения 0.3 функции принадлежности прецедента рассмотренного блока в точке (5, 10, 2000, 4) его универсального множества УМ = [2, 10] × [0, 20] × [1000, 5000] × [2, 10]. Это значение определяет приоритет прецедента данного блока.

Проведя такие же процедуры для второго блока матрицы знаний, найдем значения 0.5 функции принадлежности прецедента этого блока в точке УМ (5, 10, 2000, 4).

В результате определились приоритеты всех входящих в матрицу прецедентов: приоритет прецедента “Уход на второй круг” равен 0.3, а приоритет прецедента “Уход на запасной аэродром” равен 0.5. Отсюда следует, что задачу “Куда лететь после взлета?” следует решать по прецеденту “Уход на запасной аэродром”.

**Таблица 5.** Процедурная матрица знаний для задачи “Куда лететь после взлета?”

| Координаты ситуационного вектора $SV$<br>(Задача “Куда лететь после взлета?” – Прецеденты) |                                                                        |                                                                                                                  |                                                                                                      |                                                                                   | Операция нечеткого отношения (min).<br>Строчные НМ на $УМ = [2, 10] \times [0, 20] \times [1000, 5000] \times [2, 10]$ | Операция нечеткого объединения НМ (max)<br>НМ прецедентов на $УМ = [2, 10] \times [0, 20] \times [1000, 5000] \times [2, 10]$ | Прецеденты                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| № п/п задач, аналогичных задаче “Куда лететь после взлета?”                                | ЛП-1<br>“Погода” =<br>= (термы).<br>НМ термов,<br>УМ [2, 10],<br>баллы | ЛП-2<br>“Скорость<br>снижения в<br>момент<br>касания<br>ВПП” =<br>= (термы).<br>НМ термов,<br>УМ [0, 20],<br>м/с | ЛП-3<br>“Количество<br>топлива на<br>пробеге” =<br>= (термы).<br>НМ термов,<br>УМ [1000,<br>5000], л | ЛП-4<br>“Амбиции<br>экипажа” =<br>= (термы).<br>НМ термов<br>УМ [2, 10],<br>баллы |                                                                                                                        |                                                                                                                               |                                         |
|                                                                                            | НМ (блп)<br>благоприятная                                              | НМ (блш)<br>большая                                                                                              | НМ (мнг)<br>много                                                                                    | НМ (блш)<br>большие                                                               |                                                                                                                        |                                                                                                                               |                                         |
|                                                                                            | НМ (норм)<br>нормальная                                                | НМ (срд)<br>средняя                                                                                              | НМ (нрм)<br>нормально                                                                                | НМ (срд)<br>средние                                                               |                                                                                                                        |                                                                                                                               |                                         |
|                                                                                            | НМ (нбл)<br>неблагоприятная                                            | НМ (мал)<br>маленькая                                                                                            | НМ (мал)<br>мало                                                                                     | НМ (млн)<br>маленькие                                                             |                                                                                                                        |                                                                                                                               |                                         |
|                                                                                            | НМ (ужс)<br>ужасная                                                    | —                                                                                                                | —                                                                                                    | —                                                                                 |                                                                                                                        |                                                                                                                               |                                         |
| 1.1                                                                                        | НМ (блп)                                                               | НМ (блш)                                                                                                         | НМ (мал)                                                                                             | НМ (млн)                                                                          | НМ<br>строки 1.1                                                                                                       | НМ (При-1).<br>$УМ = [2, 10] \times [0, 20] \times [1000, 5000] \times [2, 10]$                                               | НМ<br>(Уход на<br>второй круг)          |
| 1.2                                                                                        | НМ (блп)                                                               | НМ (блш)                                                                                                         | НМ (нрм)                                                                                             | НМ (млн)                                                                          | НМ<br>строки 1.2                                                                                                       |                                                                                                                               |                                         |
| 1.3                                                                                        | НМ (норм)                                                              | НМ (блш)                                                                                                         | НМ (мнг)                                                                                             | НМ (срд)                                                                          | НМ<br>строки 1.3                                                                                                       |                                                                                                                               |                                         |
| 2.1                                                                                        | НМ (ужс)                                                               | НМ (срд)                                                                                                         | НМ (мнг)                                                                                             | НМ (блш)                                                                          | НМ<br>строки 2.1                                                                                                       | НМ (При-2).<br>$УМ = [2, 10] \times [0, 20] \times [1000, 5000] \times [2, 10]$                                               | НМ<br>(Уход<br>на запасной<br>аэродром) |
| 2.2                                                                                        | НМ (нбл)                                                               | НМ (срд)                                                                                                         | НМ (нрм)                                                                                             | НМ (срд)                                                                          | НМ<br>строки 2.1                                                                                                       |                                                                                                                               |                                         |

**Таблица 6.** Количественные значения координат ситуационного вектора  $SV$  (Задача “Куда лететь после взлета?” – Прецеденты)

| Координата $SV$<br>(Задача “Куда лететь после взлета?” – Прецеденты) | Количественное значение координат $SV$<br>(Задача “Куда лететь после взлета?” – Прецеденты) |
|----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| Погода, баллы                                                        | 5                                                                                           |
| Скорость снижения в момент касания ВПП, м/с                          | 10                                                                                          |
| Количество топлива на пробеге, л                                     | 2000                                                                                        |
| Амбиции экипажа, баллы                                               | 4                                                                                           |

**Таблица 7.** Процедурная матрица знаний для задачи “Куда лететь после взлета?” при поступлении ситуационного вектора  $SV$  (Задача “Куда лететь после взлета?” – Прецеденты) = (5, 10, 2000, 4)

| $SV$ (Задача “Куда лететь после взлета?” – Прецеденты) при поступлении ситуационного вектора $SV = (5, 10, 2000, 4)$ |                                                                      |                                                                                                                |                                                                                                    |                                                                                  | Операция нечеткого отношения (min).<br>Строчные НМ. УМ = $[2, 10] \times [0, 20] \times [1000, 5000] \times [2, 10]$ | Операция объединения НМ (max).<br>НМ прецедентов. УМ = $[2, 10] \times [0, 20] \times [1000, 5000] \times [2, 10]$ | Прецеденты                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| № п/ задач, аналогичных задаче “Куда лететь после взлета?”                                                           | ЛП-1<br>“Погода” =<br>(термы).<br>НМ термов.<br>УМ [2, 10],<br>баллы | ЛП-2<br>“Скорость<br>снижения в<br>момент<br>касания<br>ВПП” =<br>(термы).<br>НМ термов.<br>УМ [0, 20],<br>м/с | ЛП-3<br>“Количество<br>топлива на<br>пробеге” =<br>(термы).<br>НМ термов.<br>УМ [1000,<br>5000], л | ЛП-4<br>“Амбиции<br>экипажа” =<br>(термы).<br>НМ термов.<br>УМ [2, 10],<br>баллы |                                                                                                                      |                                                                                                                    |                                                     |
|                                                                                                                      | Благоприятная (блп)                                                  | Большая (блш)                                                                                                  | Много (мнг)                                                                                        | Большие (блш)                                                                    |                                                                                                                      |                                                                                                                    |                                                     |
|                                                                                                                      | Нормальная (норм)                                                    | Средняя (срд)                                                                                                  | Нормально (нрм)                                                                                    | Средние (срд)                                                                    |                                                                                                                      |                                                                                                                    |                                                     |
|                                                                                                                      | Неблагоприятная (нбл)                                                | Маленькая (мал)                                                                                                | Мало (мал)                                                                                         | Маленькие (млн)                                                                  |                                                                                                                      |                                                                                                                    |                                                     |
|                                                                                                                      | Ужасная (ужс)                                                        | —                                                                                                              | —                                                                                                  | —                                                                                |                                                                                                                      |                                                                                                                    |                                                     |
| 1.1                                                                                                                  | 0.0 из НМ (блп)                                                      | 0.6 из НМ (блш)                                                                                                | 0.7 из НМ (мал)                                                                                    | 0.7 из НМ (млн)                                                                  | 0.0                                                                                                                  | 0.3                                                                                                                | НМ<br>(Уход на запасной аэродром).<br>Приоритет 0.3 |
| 1.2                                                                                                                  | 0.0 из НМ (блп)                                                      | 0.6 из НМ (блш)                                                                                                | 1.0 из НМ (нрм)                                                                                    | 0.7 из НМ (млн)                                                                  | 0.0                                                                                                                  |                                                                                                                    |                                                     |
| 1.3                                                                                                                  | 0.5 из НМ (норм)                                                     | 0.6 из НМ (блш)                                                                                                | 0.3 из НМ (мнг)                                                                                    | 0.5 из НМ (срд)                                                                  | 0.3                                                                                                                  |                                                                                                                    |                                                     |
| 2.1                                                                                                                  | 0.0 из НМ (ужс)                                                      | 1.0 из НМ (срд)                                                                                                | 0.3 из НМ (мнг)                                                                                    | 0.0 из НМ (блш)                                                                  | 0.0                                                                                                                  | 0.5                                                                                                                |                                                     |
| 2.2                                                                                                                  | 0.7 из НМ (нбл)                                                      | 1.0 из НМ (срд)                                                                                                | 1.0 из НМ (нрм)                                                                                    | 0.5 из НМ (срд)                                                                  | 0.5                                                                                                                  |                                                                                                                    |                                                     |

**Заключение.** Если для решения возникшей задачи  $Z$  не удастся сконструировать ее математическую модель, то единственным способом ее решения остается метод решения задачи по прецеденту.

Для использования этого метода в задаче  $Z$  необходимо: 1) разыскать достаточное количество задач, аналогичных задаче  $Z$ , 2) выделить те аналогичные задачи, которые в прошлом были успешно решены (прецеденты для задачи  $Z$ ), 3) сконструировать для них ситуационный вектор  $SV$  (Задача  $Z$  – Прецеденты) и экспериментальную матрицу знаний задачи  $Z$ , 4) на базе экспериментальной матрицы знаний разработать процедурную матрицу знаний задачи  $Z$ , определив в ней операции над теми НМ, которые были заявлены в экспериментальной матрице знаний.

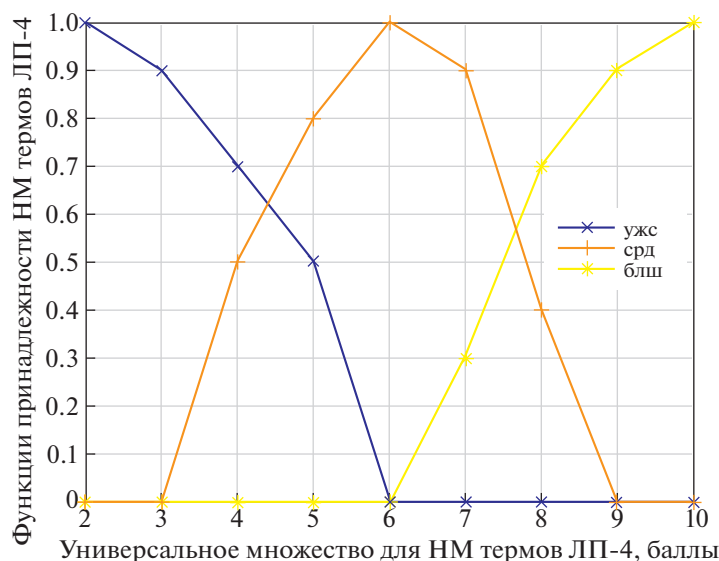


Рис. 5. Представление термов ЛП-4 “Амбиции экипажа” через НМ, определенные на УМ [2, 10], баллы

Процедурная матрица задачи  $Z$  позволяет найти функции принадлежности НМ прецедентов, входящих в эту матрицу. Для определения приоритетов этих прецедентов требуется разработать процедуру вычисления приоритетов прецедентов по их НМ, учитывающую особенность предметной области. Для подвижных объектов, действующих в агрессивной внешней среде, такая процедура предложена.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федунев Б.Е. Бортовые интеллектуальные системы тактического уровня для антропоцентрических объектов (примеры для пилотируемых летательных аппаратов). М.: Де Либри, 2018. 246 с.
2. Грибков В.Ф., Федунев Б.Е. Бортовая информационная интеллектуальная система “Ситуационная осведомленность экипажа боевых самолетов” // “Интеллектуальные системы управления”/ Под. ред. акад. РАН С.Н. Васильева. М.: Машиностроение, 2010. С. 108–116.
3. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений. М.: Радио и связь, 1976.
4. Промежуточный отчет по результатам расследования авиационного происшествия – [Электронный ресурс] – [https://mak-iac.org/upload/iblock/695/report\\_vq-brs.pdf](https://mak-iac.org/upload/iblock/695/report_vq-brs.pdf).
5. Авиационные происшествия, инциденты и авиакатастрофы в СССР и России [Электронный ресурс] – <http://www.airdisaster.ru>.
6. Видео – Extreme Airliner Landings At Wellington Long Version <https://www.youtube.com/watch?v=m0-jnahV81AU>.

## СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 681.7.028.2:629.056.6

### МЕТОД СОГЛАСОВАНИЯ ПРИБОРНЫХ И СВЯЗАННОЙ СИСТЕМ КООРДИНАТ НА ЛЕТАТЕЛЬНОМ АППАРАТЕ<sup>1</sup>

© 2023 г. В. М. Лисицын<sup>а,\*</sup>, К. В. Обросов<sup>а</sup>, Г. Г. Себряков<sup>а</sup>

<sup>а</sup>ФАУ «ГосНИИАС», Москва, Россия

\*e-mail lvm@gosniias.ru

Поступила в редакцию 01.08.2022 г.

После доработки 12.08.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Предложен метод согласования приборных систем координат разных постов оптико-электронной системы летательного аппарата между собой и с инерциальной навигационной системой. Метод не требует предполетной подготовки и основан на обработке потоков видеoinформации, формируемых тепловизионными и телевизионными каналами оптико-электронной системы, и использовании информации инерциальной навигационной и радиолокационной систем при выполнении специальных маневров. Теоретический анализ точности и моделирование показало высокие потенциальные возможности предложенного метода.

DOI: 10.31857/S0002338823010067, EDN: JAEKGG

**Введение.** Современный многофункциональный летательный аппарат (ЛА) (самолет или вертолет) не может обходиться без обзорно-прицельных оптико-электронных систем (ОЭС). Их преимуществом является возможность работы в пассивном режиме для решения задач обеспечения ситуационной осведомленности экипажа. ОЭС часто используются для решения задач мониторинга подстилающей поверхности (ПП) и обнаружения наземных объектов. ОЭС может состоять из нескольких разнесенных по корпусу и крыльям ЛА постов (подсистем). Все посты ОЭС должны работать в единой системе координат (СК), согласованной со связанной СК, которая задается инерциальной системой ЛА. Выполнение этого требования необходимо для обеспечения адекватного обмена информацией об угловых координатах объектов информационными системами между собой и комплексом бортового оборудования. Отсюда очевидна актуальность задачи согласования приборных СК разных постов ОЭС между собой и со связанной СК.

В настоящее время согласование СК осуществляется на основе так называемой статической юстировки, которая производится на заводах-изготовителях при первоначальной установке всех информационных систем на ЛА, а также в процессе эксплуатации при замене оборудования и после регламентных работ. Статическая юстировка заключается в следующем: вывешивая ЛА на домкратах, устанавливают его в строго горизонтальное положение и определяют положение строительной оси ЛА относительно направления на север. После этого производится выставка бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) и согласование осей БИНС со связанной СК ЛА. Для юстировки ОЭС применяются юстировочные мишени. С помощью теодолита, устанавливаемого на специальных узлах крепления ЛА, выставляется центральная точка мишени, соответствующая направлению строительной оси. Положение реперных точек, соответствующих направлению горизонтальных осей приборных СК, определяется по заданным в чертежах ЛА смещениям ОЭС относительно связанной СК. Для юстировки тепловизионных систем в реперных точках устанавливаются излучатели. Юстировка производится путем получения изображения реперных точек и определения их угловых координат в приборной СК (угловых поправок), которые фиксируются в памяти вычислителя и применяются для корректировки измеренных угловых координат объектов в полете при переходе от приборной СК к связанной и от связанной СК к приборной. С помощью статической юстировки взаимное согласование СК

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-08-00613-а в части использования ОЭС, № 20-08-00949-а в части использования РЛС).

ОЭС и БИНС производится не непосредственно между ними, а относительно строительных осей ЛА.

Такие методы хорошо отработаны на практике и используются как основной способ первоначальной юстировки ОЭС и БИНС. Существенным недостатком методов статической юстировки является их высокая трудоемкость, необходимость применения специального оборудования квалифицированным персоналом и трудности проведения в условиях аэродромов при эксплуатации. Кроме того, такие методы не позволяют компенсировать ошибки, которые возникают из-за различия изгибных деформаций корпуса ЛА в полете и при размещении его на домкратах.

Поиск способов, позволяющих отказаться от предполетной юстировки по наземной мишени, привел к разработке метода так называемой динамической юстировки СК на основе векторного согласования. Под ним понимается измерение трех ортогональных проекций как минимум двух неколлинеарных векторов в обеих СК и определение их взаимной ориентации по разности одноименных проекций [1]. При движении ЛА в качестве векторов могут быть использованы данные об угловой скорости движения ЛА, определяемой с помощью датчиков угловых скоростей (ДУС), и измерение суммарного значения линейных ускорений ЛА и вектора силы тяжести Земли с помощью измерителей линейных ускорений (ИЛУ). Выбор векторов, по которым будет производиться согласование СК, может быть различным в зависимости от множества факторов, включая возможности ЛА, особенности оборудования и пр. В частности, это могут быть векторы ускорений и угловых скоростей; векторы скоростей, проинтегрированных скоростей; вектора, задающего угловое положение БИНС, а также варианты, включающие комбинации указанных векторов. При этом необходимо на каждом посту ОЭС устанавливать приборные инерциально-измерительные блоки (ИИБ), оборудованные ДУС и ИЛУ. Маневры носителя и жесткость конструкции приводят к тому, что приборный ИИБ ОЭС движется относительно БИНС, что требует коррекции при сопоставлении измерений. Результаты измерений, как правило, подвергаются фильтрации Калмана [2]. Выбор используемых измерений в математической модели фильтрации Калмана во многом определяет и маневры ЛА, на которых будет происходить динамическая юстировка СК.

В отношении согласования СК ОЭС и БИНС очевидно, что динамическая юстировка требует оснащения всех постов ОЭС ИИБ, что приводит к увеличению массогабаритных характеристик и стоимости, а в некоторых случаях это невозможно в силу ограничений по габаритам. Поэтому в настоящее время поиск путей решения проблемы выставки СК не потерял актуальность [3]. Авторами предлагается новый подход к согласованию приборной СК ОЭС с СК БИНС, который не имеет указанных недостатков.

#### 1. Постановка задачи. Определим системы координат:

начало координат связанной СК находится в центре масс ЛА;

ось  $OX$  направлена вдоль строительной оси;

ось  $OZ$  перпендикулярна плоскости симметрии ЛА и направлена в его правую часть;

ось  $OY$  перпендикулярна плоскости  $XOZ$  и дополняет СК до правой тройки.

Оси приборной СК каждого поста ОЭС имеют направление аналогично связанной СК. В идеале оси приборных СК коллинеарны осям связанной СК. Однако в силу объективных причин, как правило, имеется некоторое рассогласование между направлениями осей. Введем также СК кадра, связанную с датчиком изображения. Центр изображения, соответствующий главной оптической оси датчика и направлению  $OX$  приборной СК, принимается за начало координат. Ось  $OZ$  направлена вправо, ось  $OY$  — вверх.

Предлагаемый метод решения проблем выставки СК заключается в том, что векторами, подлежащими согласованию, являются векторы скорости ЛА: линейной и угловой, проекции которых на оси юстируемых ОЭС измеряются в результате независимой обработки изображений, формируемых этими системами, и сопоставления результатов с информацией БИНС. Измерение ориентации указанных векторов производится не одновременно: измерение ориентации вектора линейной скорости производится при отсутствии угловой, а измерение ориентации вектора угловой скорости — при отсутствии линейного перемещения ЛА.

Рассмотрим случай, когда ЛА совершает прямолинейный горизонтальный полет на относительно небольшой высоте и в поле зрения ОЭС с тепловизионным или телевизионным каналом находится ПП. Если на изображении ПП имеются характерные точки, которые могут быть выделены в результате обработки, то такие точки при стабилизированном в инерциальном пространстве поле зрения ОЭС в каждый момент времени двигаются на изображении по лучам, рас-

ходящимся из одной точки (точки схождения). Эта точка является пересечением вектора скорости ЛА с фокальными плоскостями датчиков изображений независимо от их ориентации в пространстве. Другими словами, положение точки схождения на изображении соответствует направлению вектора скорости ЛА в приборной СК (связанной с полем зрения ОЭС). Для определения координат точки схождения необходимо сопровождать хотя бы две характерные точки. Если предположить, что вектор линейной скорости совпадает с направлением строительной оси ЛА (углы атаки и скольжения равны нулю), то положение рассматриваемой точки схождения относительно центра изображения определяет рассогласование систем координат относительно вертикальной и поперечной осей связанной СК (т.е. угловые поправки по курсу и тангажу) при условии отсутствия крена. Отметим, что рассмотренная процедура может быть выполнена на любом типе ЛА. Для определения параметров таких траекторий и положения точки схождения в [4, 5] был использован метод двух засечек на вложенных интервалах времени с усреднением. В данной работе предложен более адекватный подход, основанный на методах оптимального оценивания.

Для определения рассогласования СК вертолета относительно продольной оси связанной СК (т.е. по крену) предлагается использовать специальный маневр — вращение вертолета, в результате которого измеряется ориентация вектора угловой скорости вращения: параметры углового вращения формируются в БИНС, а оценка направления вектора относительно датчиков изображений производится в результате обработки видеопотока в каждом посту ОЭС. При этом, как уже отмечалось, предполагается отсутствие линейного перемещения аппарата, что при наличии РЛС на борту вертолета обеспечивается с высокой точностью путем идентификации и оценки дальностей до элементов аэродромной инфраструктуры при вращении вертолета [6–8].

Рассмотрим ситуацию, когда вертолет после взлета зависает на небольшой высоте и совершает вращение вокруг вертикальной оси  $OY$  связанной СК. При этом аналогично рассмотренному случаю в поле зрения ОЭС находится ПП и элементы инфраструктуры аэродрома. Будем полагать, что поле зрения ОЭС стабилизировано и в течение всего маневра положение центра масс вертолета и направление вектора угловой скорости не изменяется. На изображении ПП и инфраструктуры аэродрома выделенные характерные точки при вращении вертолета будут перемещаться по экрану ОЭС по разным траекториям. Требуется по результатам идентификации траекторий характерных точек изображений ПП определить направление вектора угловой скорости вертолета в приборной СК ОЭС. Методы детектирования и сопровождения характерных точек будут рассмотрены далее.

**2. Метод измерения ориентации вектора линейной скорости ЛА.** При прямолинейном полете и компенсации стабилизационных колебаний ЛА системой стабилизации ОЭС, как уже отмечалось, характерные точки ПП на изображении будут двигаться по лучам, исходящим из точки схождения, положение которой соответствует направлению вектора скорости. При этом не имеет значения, в какие промежутки времени формируются траектории точек. Другими словами, траектории точек могут регистрироваться и одновременно, и последовательно, а положение точки схождения должно определяться после набора заданного количества таких точек, что повышает точность определения ее координат. Хотя формально для нахождения положения точки схождения достаточно сопровождать лишь две точки. В процессе сопровождения характерных точек могут наблюдаться ошибки определения текущего положения точек вследствие стохастического характера работы алгоритмов в условиях изменения локальных контрастов и масштабов фрагментов изображения в процессе сближения ЛА сопровождаемыми участками ПП. Таким образом, полученные при сопровождении какой-либо точки координаты, вообще говоря, не лежат на одной прямой. Для оценки ее параметров необходимо аппроксимировать полученные координаты прямой линией. Считая, что ошибки измерения текущих координат точки имеют нулевое математическое ожидание, а сами измерения некоррелированные, аппроксимацию можно осуществить с помощью метода наименьших квадратов [9]. Учитывая, что траектории движения сопровождаемых точек могут иметь всевозможные направления в экранной СК, в том числе и вертикальное, уравнение прямой необходимо задать в общем виде, которое может быть сведено к следующему:

$$Ny + Mz = 1.$$

Пусть за время движения точки по полю зрения ОЭС произведено  $n$  измерений ее координат  $(y_1, z_1), (y_2, z_2), \dots, (y_n, z_n)$ . Тогда может быть составлена система линейных уравнений относительно коэффициентов уравнения прямой:

$$\begin{cases} Ny_1 + Mz_1 = 1, \\ Ny_2 + Mz_2 = 1, \\ \dots\dots\dots \\ Ny_n + Mz_n = 1. \end{cases}$$

Метод наименьших квадратов состоит в минимизации следующей суммы:

$$\sum_{i=1}^n (Ny_i + Mz_i - 1)^2 \rightarrow \min_{N, M}.$$

Взяв производные по параметрам  $N$  и  $M$  и приравняв их к нулю, получим систему

$$\begin{cases} N \sum_{i=1}^n y_i^2 + M \sum_{i=1}^n z_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ N \sum_{i=1}^n y_i z_i + M \sum_{i=1}^n z_i^2 = \sum_{i=1}^n z_i. \end{cases}$$

Отсюда находим значения коэффициентов, задающих прямую:

$$N = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n z_i^2 - \sum_{i=1}^n z_i \sum_{i=1}^n z_i y_i}{\sum_{i=1}^n y_i^2 \sum_{i=1}^n z_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n z_i y_i \right)^2}, \quad M = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n z_i y_i}{\sum_{i=1}^n y_i^2 \sum_{i=1}^n z_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n z_i y_i \right)^2}. \quad (2.1)$$

Если взять произвольную пару прямых с номерами  $j$  и  $k$ , то точка их пересечения, т.е. оценка положения точки схождения, определяется на основании решения системы

$$\begin{cases} N_j y + M_j z = 1, \\ N_k y + M_k z = 1. \end{cases}$$

Координаты точки схождения  $Z, Y$ , найденные с использованием  $j$ -й и  $k$ -й траекторий, удобно обозначить соответственно  $z_{jk}, y_{jk}$  с индексным указанием рассматриваемых прямых. Очевидно,

$$z_{jk} = \frac{N_j - N_k}{M_j N_k - M_k N_j}, \quad y_{jk} = \frac{M_j - M_k}{M_j N_k - M_k N_j}. \quad (2.2)$$

Для уменьшения погрешности определения положения точки схождения  $(Y, Z)$  следует произвести усреднение полученных координат по всем парам прямых. Если таких прямых  $m$ , то количество пар составляет  $Q = C_m^2 = m(m-1)/2$ . Однако, как будет показано ниже, чем меньше острый угол  $\gamma$  между прямыми, тем больше ошибка определения положения точки схождения. Поэтому целесообразно проводить весовое суммирование и использовать в качестве весовых коэффициентов величину  $\sqrt{1 - \cos \gamma}$  или, что почти эквивалентно, значение модуля синуса угла  $\gamma$ . Формула для определения усредненных значений координат  $\bar{Z}, \bar{Y}$  в этом случае принимает вид

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m z_{ij} |\sin \gamma_{ij}|}{\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m |\sin \gamma_{ij}|}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m y_{ij} |\sin \gamma_{ij}|}{\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m |\sin \gamma_{ij}|}, \quad (2.3)$$

где  $\gamma_{ij}$  — угол между прямыми с номером  $i$  и  $j$ , который может быть найден [10] как

$$\gamma_{ij} = \arccos \frac{N_i N_j + M_i M_j}{\sqrt{N_i^2 + M_i^2} \sqrt{N_j^2 + M_j^2}}.$$





даемой точки округлены до целых чисел. Перечисленные факторы могут приводить к тому, что искомые коэффициенты в уравнении гипербол будут определяться с недостаточной точностью. Это в свою очередь может привести к возникновению недопустимо больших ошибок при определении рассогласования СК относительно оси ОХ. В связи с этим был предложен альтернативный подход к нахождению упомянутого рассогласования.

**4. Альтернативный подход к определению рассогласования систем координат относительно продольной оси связанной СК.** Подход заключается в следующем. Производится аппроксимация наблюдаемых траекторий сопровождаемых точек прямыми линиями. Если ОЭС не имеет бокового смещения относительно строительной оси вертолета, то гиперболы на экране будут симметричны относительно центральной вертикали. В этом случае угол наклона получаемых прямых будет соответствовать углу рассогласования СК относительно оси ОХ. Если есть боковое смещение, то, как указывалось выше, это приведет к смещению центра гипербол в боковом направлении и аппроксимирующие прямые будут иметь наклон, который должен быть скомпенсирован.

Проведя преобразования, аналогичные рассмотренным выше, можно получить соответствующие выражения для определения параметров аппроксимирующих прямых. Поскольку траектории сопровождаемых точек в данном случае в основном близки к горизонтали, то уравнение прямой можно записать в виде

$$y = az + b. \quad (4.1)$$

Тогда, если имеется  $n$  наблюдений сопровождаемой точки, т.е. зафиксированы координаты  $\{z_i, y_i\}_{i=1, n}$ , то метод наименьших квадратов для нахождения параметров прямой состоит в минимизации выражения:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - az_i - b)^2 \rightarrow \min_{a, b}.$$

Нетрудно показать, что параметры  $a$  и  $b$  принимают следующие значения:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n z_i y_i - n m_z m_y}{\sum_{i=1}^n z_i^2 - n m_z^2}; \quad b = m_y - a m_z, \quad \text{где} \quad m_z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i; \quad m_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (4.2)$$

Угол наклона прямой в экранной СК определяется выражением

$$\alpha = \arctg a.$$

Если есть боковое смещение  $L$  датчика изображения ОЭС относительно строительной оси вертолета или сам вертолет в процессе вращения имел боковую составляющую вектора линейной скорости, то центр гипербол сместится в боковом направлении на соответствующую величину  $\Delta Z$ :

$$\Delta Z = \frac{\arctg(L/R)}{\Delta \varphi},$$

где  $R$  — расстояние от датчика ОЭС до сопровождаемой точки,  $\Delta \varphi$  — угловое разрешение датчика изображения. В этом случае во избежание ошибки определения рассогласования относительно оси ОХ необходимо брать для аппроксимации прямую часть гиперболы, симметричную относительно вычисленного положения ее центра. При этом появляется необходимость измерения дальности до сопровождаемой точки, что обеспечивается в результате обработки информации РЛС [6].

**5. Анализ точности метода определения ориентации вектора линейной скорости ЛА.** В данном разделе решается задача получения аналитических выражений для СКО определения углов ориентации вектора линейной скорости ЛА изложенным выше методом (разд. 2).

Для получения аналитических выражений будем считать измерения координат сопровождаемой характерной точки равноточными с СКО  $\sigma$  на всей траектории ее наблюдения, которая аппроксимируется прямой, описываемой уравнением  $y = az + b$ . Необходимо найти дисперсии

оценок вектора  $\mathbf{G} = (b, a)^T$ , задающего положение аппроксимирующей прямой в СК кадра. В соответствии с [9] корреляционная матрица ошибок оценок вектора  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{R}_G = \begin{pmatrix} \sigma_b^2 & r_{ab} \\ r_{ab} & \sigma_a^2 \end{pmatrix} = (\mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{T}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{T})^{-1}, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{T} = (\mathbf{I}, \mathbf{Z})$  – матрица размерности  $n \times 2$ ,  $n$  – количество измерений,  $\mathbf{I}$  – единичный вектор,  $\mathbf{Z}$  – вектор горизонтальных координат измерений,  $\mathbf{M}$  – корреляционная матрица ошибок измерения. Поскольку измерения координат сопровождаемой точки в каждый момент времени независимы, то корреляционная матрица (5.1) диагональна. Тогда

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i \\ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i & \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_G = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n z_i^2 - \left( \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i \right)^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 & -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i \\ -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i & \frac{n}{\sigma^2} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Найдем входящие в (5.2) выражения для  $\sigma_a^2$ ,  $\sigma_b^2$ ,  $r_{ab}$ :

$$\sigma_a^2 = \frac{n/\sigma^2}{\frac{n}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n z_i^2 - \left( \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i \right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n z_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n z_i \right)^2} = \frac{\sigma^2}{n \left( \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n} \right)^2 \right)}.$$

Для получения аналитических выражений будем считать, что промежутки между измеряемыми горизонтальными координатами сопровождаемой точки одинаковы, т.е.  $z_i - z_{i-1} = \Delta z$  для  $\forall i$ . Такая последовательность может быть сформирована с помощью некоторого прореживания измерений. Поскольку ошибки определения угла ориентации прямой не зависят от положения начального измерения по  $z$ , можно сдвинуть начало координат экранной СК так, чтобы  $z_1 = \Delta z$ . Тогда

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{n \left( \frac{\sum_{i=1}^n (i\Delta z)^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n i\Delta z}{n} \right)^2 \right)} = \frac{1}{n \left( \frac{\Delta z^2}{n} \sum_{i=1}^n i^2 - \left( \frac{n(n+1)\Delta z}{2n} \right)^2 \right)} = \frac{1}{n \Delta z^2 \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 - \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 \right]}.$$

Используя выражение

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

находим

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2}{\Delta z^2 n \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{3n} - \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 \right]} = \frac{12\sigma^2}{\Delta z^2 n(n^2 - 1)}. \quad (5.3)$$

Согласно предыдущим рассуждениям, можно получить

$$\sigma_b^2 = \frac{1}{n_j} \frac{\sigma_1^2 \sum_{i=1}^{n_j} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n_j} x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_j} x_i \right)^2}{n_j}}. \quad (5.4)$$

Относительно координаты  $z_0 = z_1 - \Delta z$  запишем (5.4) в виде

$$\begin{aligned}\sigma_b^2 &= \frac{1}{n} \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n (z_0 + i\Delta z)^2}{\sum_{i=1}^n (z_0 + i\Delta z)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n (z_0 + i\Delta z)\right)^2}{n}} = \frac{12\sigma^2 z_0^2 + (n+1)z_0\Delta z + \frac{\Delta z^2}{12}(4n^2 + 6n + 2)}{\Delta z^2(n^2 - 1)} = \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \left[ 12 \frac{\left(z_0 + \frac{n+1}{2}\Delta z\right)^2}{\Delta z^2(n^2 - 1)} + 1 \right].\end{aligned}\quad (5.5)$$

Аналогично можно получить выражение для коэффициента корреляции:

$$r_{ab} = -\frac{1}{n} \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n z_i}{\sum_{i=1}^n z_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^2}{n}}. \quad (5.6)$$

Сместим начало координат так, чтобы абсцисса  $z = 0$  находилась в середине траектории сопровождаемой точки. В этом случае в выражениях (5.5), (5.6) числитель дроби равен нулю, и таким образом коэффициент корреляции  $r_{ab} = 0$ , а  $\sigma_b^2 = \sigma^2/n$ . Определим приведенную дисперсию  $\sigma_{\text{прив}}^2$  отклонения прямой, аппроксимирующей траекторию точки, в районе точки схождения. Учитывая (5.2), получаем

$$\sigma_{\text{прив}}^2 = \sigma_a^2 \Delta L^2 + \sigma^2/n = \sigma^2 \left( \frac{12\Delta L^2}{\Delta z^2 n(n^2 - 1)} + \frac{1}{n} \right), \quad (5.7)$$

где  $\Delta L$  — расстояние от середины траектории до ожидаемого положения точки схождения. По сути,  $\sigma_{\text{прив}}^2$  определяет СКО точки, лежащей на аппроксимированной прямой в районе точки схождения в направлении, перпендикулярном этой прямой. Если две прямых, имеющих равные  $\sigma_{\text{прив}}^2$ , пересекаются под острым углом  $\gamma$ , то большая ось эллипса рассеяния точек пересечения прямых совпадает с биссектрисой угла  $\gamma$  (в силу симметрии задачи), а максимальное СКО  $\sigma_{\text{max}}$  точки пересечения по этому направлению определяется выражением

$$\sigma_{\text{max}} \approx \frac{\sigma_{\text{прив}}}{\cos(90 - \gamma + \gamma/2)} = \frac{\sigma_{\text{прив}}}{\sin(\gamma/2)} = \frac{\sqrt{2}\sigma_{\text{прив}}}{\sqrt{1 - \cos \gamma}}. \quad (5.8)$$

Если при нахождении положения точки схождения было выделено не менее 10 характерных точек, то ошибки определения ее координат будут на порядок меньше ошибок выделения характерных точек, т.е. меньше углового разрешения ОЭС.

**6. Алгоритмы выделения характерных точек.** Для реализации метода измерения ориентации вектора угловой скорости вертолета необходимо разработать алгоритмы выделения характерных точек на ПП и инфраструктуре аэродромов. При этом следует учитывать следующие особенности, которые могут возникнуть при обработке изображений ОЭС. На территории аэродромов постоянно присутствуют движущиеся объекты. Это могут быть ЛА во время руления, топливозаправщики, прочая техника, а также люди, которые на тепловизионных изображениях имеют высокий контраст. При попадании в поле зрения ОЭС фрагменты их образов могут быть выделены как характерные точки, что приведет к некорректному результату работы предлагаемого метода. Поэтому алгоритмы выделения характерных точек должны обнаруживать в первую очередь верхние (наиболее высоко расположенные) фрагменты стационарных наземных объектов.

Используемые детекторы характерных точек (Моравека, Харриса, Форстнера, Ши-Томаси-Кэнэда и др.) ориентированы на решение других задач (создание панорамных изображений,

привязки изображений и т.п.) [11–13]. Эти детекторы, формируя так называемую “меру отклика угла”, находят не собственно углы, а любые информативно насыщенные участки изображения. Поэтому их использование при обработке изображений, полученных в передней полусфере ЛА, приводит при уменьшении порога для “меры отклика угла” к увеличению количества обнаружений в окрестности нижних фрагментов наземных объектов, где, как правило, наблюдается достаточное разнообразие градиентов яркостного поля. В результате на изображениях в первую очередь выделяются характерные точки, которые с большой вероятностью могут принадлежать движущимся объектам, селекция которых может быть проведена доплеровскими методами [6], и идентификацией радиолокационных (РЛ) и оптико-электронных образов. Поэтому было необходимо создать детектор характерных точек, который имеет свои отличия:

выделяет в основном верхние углы объектов, реагируя на их геометрические свойства;

инвариантен к величинам контрастов, формирующих эти углы;

позволяет провести ранжирование результатов обнаружений, оставив для сопровождения наиболее надежные характерные точки.

Разработанный детектор анализирует интенсивности  $p_{ij}$  в скользящем окне  $9 \times 9$  с вертикальной (направленной вниз) координатой  $y$  и горизонтальной координатой  $z$  ( $i$  – номер строки,  $j$  – номер столбца). Далее индексы приведены в системе координат скользящего окна. Для удобства введем следующие обозначения:  $M[\dots]$  – среднеарифметическое из чисел в квадратных скобках,

$$\Delta\mu_j^H = M[p_{7,j+6}, p_{8,j+6}, p_{9,j+6}] - M[p_{7,j}, p_{8,j}, p_{9,j}],$$

$$\Delta\mu_j^B = M[p_{1,j+6}, p_{2,j+6}, p_{3,j+6}] - M[p_{1,j}, p_{2,j}, p_{3,j}].$$

Алгоритм детектора.

1. Находим нижний максимальный перепад (**НМП**):

$$\text{НМП} = \max \{ |\Delta\mu_1^H|; |\Delta\mu_2^H|; |\Delta\mu_3^H| \}.$$

2. Вычисляем верхний средний перепад (**ВСП**):

$$\text{ВСП} = \left| \frac{\Delta\mu_1^B + \Delta\mu_2^B + \Delta\mu_3^B}{3} \right| = |M[\Delta\mu_1^B, \Delta\mu_2^B, \Delta\mu_3^B]|.$$

3. Оцениваем модуль производных по координате  $z$  по первой разности в центральных точках верхних трех (**В1**, **В2**, **В3**) и нижних трех (**Н1**, **Н2**, **Н3**) строк скользящего окна:

$$\begin{aligned} \text{В1} &= \left| \frac{p_{16} - p_{14}}{2} \right|; & \text{В2} &= \left| \frac{p_{26} - p_{24}}{2} \right|; & \text{В3} &= \left| \frac{p_{36} - p_{34}}{2} \right|, \\ \text{Н1} &= \left| \frac{p_{76} - p_{74}}{2} \right|; & \text{Н2} &= \left| \frac{p_{86} - p_{84}}{2} \right|; & \text{Н3} &= \left| \frac{p_{96} - p_{94}}{2} \right|. \end{aligned}$$

4. Если

$$\begin{aligned} &(\text{Н1} > \eta \text{НМП}) \wedge (\text{Н2} > \eta \text{НМП}) \wedge (\text{Н3} > \eta \text{НМП}) \wedge \\ &\wedge (\text{В1} < \eta \text{ВСП}) \wedge (\text{В2} < \eta \text{ВСП}) \wedge (\text{В3} < \eta \text{ВСП}), \end{aligned}$$

то выполняется п. 5. Иначе переход к новому положению “скользящего окна” по координате  $z$ . Здесь  $\wedge$  – логическое умножение,  $\eta$  – коэффициент, зависящий от абберационных свойств объекта. В нашем случае экспериментально определено  $\eta = 0.2$ .

5. Определяем наклон  $k$  некоторой пеленгационной характеристики:

$$k = \frac{1}{3} M[\Delta\mu_1^H, \Delta\mu_2^H, \Delta\mu_3^H].$$

Находим смещение по нижним строкам:

$$\Delta z_7 = \frac{1}{k} (M[p_{74}, p_{75}, p_{76}] - M[p_{71}, p_{72}, p_{73}]),$$

$$\Delta z_8 = \frac{1}{k} (M[p_{84}, p_{85}, p_{86}] - M[p_{81}, p_{82}, p_{83}]),$$

$$\Delta z_9 = \frac{1}{k} (M[p_{94}, p_{95}, p_{96}] - M[p_{91}, p_{92}, p_{93}]).$$

Среднее смещение  $\Delta z$  от центрального пиксела окна по координате  $z$  равно

$$\Delta z = M[\Delta z_7, \Delta z_8, \Delta z_9].$$

6. Производим операции 1–5, рассматривая вместо строк столбцы и вместо нижней границы левую границу или правую границу скользящего окна. Это позволяет позиционировать угол объекта в окне и определять величины  $\Delta u_7, \Delta u_8, \Delta u_9$  и  $\Delta u$  как в случае левого, так и правого верхнего угла здания.

7. Близость ( $\pm 1$  пиксел) результатов косвенных измерений  $\Delta z_7, \Delta z_8, \Delta z_9$  и  $\Delta u_7, \Delta u_8, \Delta u_9$  используется как еще один признак правильности выделения стороны угла.

В результате применения детектора при обработке кадра обнаруженному углу может соответствовать от одного до четырех срабатываний в области  $2 \times 2$  пиксела, внутри которой находится вершина угла. При каждом из этих срабатываний производится субпиксельная оценка двух экранных координат вершины. Количество срабатываний является мерой для ранжирования обнаружений (при их избытке) с целью ограничения количества сопровождаемых в дальнейшем характерных точек.

При отсутствии на анализируемом изображении выраженных характерных точек для формирования траекторий могут применяться другие алгоритмы, в частности, корреляционного типа. Это очевидно, поскольку за время сопровождения фрагмента изображения не меняются условия наблюдения. Для обеспечения эффективного сопровождения характерных точек (недопущения перепутывания точек) или фрагментов изображения необходимо использовать информацию, поступающую с БИНС и РЛ-системы. Построение области допоиска характерной точки, обнаруженной на предыдущем изображении, осуществляется на основе данных о величине текущей угловой скорости, промежутке времени между моментами формирования изображений и возможных углах наклона траекторий в экранной СК.

Для детектирования характерных точек при прямолинейном полете вертолета может использоваться как предложенный алгоритм, так и другие, упомянутые выше.

**7. Результаты моделирования.** Моделирование проводилось для ОЭС с полем зрения  $40 \times 30^\circ$  и МФПУ  $640 \times 480$  пикселей. При этом предполагалось, что дисторсия объектива, если она присутствует, программно скомпенсирована. Сначала было проведено исследование возможности использования метода, в котором определяются все коэффициенты уравнения гиперболы. Для этого синтезировалась траектория сопровождаемой точки в нижней части экрана, т.е. траектории с возможно большей кривизной с заданными величинами угла поворота и отклонения центра гиперболы по вертикали от центра экрана. Для значительного количества наблюдений (несколько сот) координаты фиксировались с высокой точностью. Затем зафиксированные координаты загружались в программу определения коэффициентов гиперболы, ее центра и угла поворота в соответствии с (3.6), которые сопоставлялись с заданными при формировании гиперболы. Действия производились для одной и той же траектории, но при этом координаты округлялись до все меньшего числа знаков после запятой, вплоть до округления до целого числа. В качестве примера в табл. 1 приведены задаваемые и определяемые коэффициенты уравнения гиперболы  $A, B, C, D, E$  и оценки угла поворота гиперболы  $\alpha$  (в градусах) от количества знаков после запятой координат сопровождаемой точки для случая, когда задаваемый угол поворота гиперболы равен нулю.

Этот простой пример показывает, что для успешного применения рассмотренного метода необходимо увеличить точность определения координат сопровождаемой точки, по крайней мере, на два порядка, что в настоящее время невозможно. Аналогичное моделирование было проведено для альтернативного метода определения рассогласования СК по крену на основе аппроксимации наблюдаемых траекторий сопровождаемых точек прямыми линиями с помощью (4.1), (4.2). В табл. 2 приведена оценка угла поворота гиперболы с помощью аппроксимации от количества знаков после запятой. Была задана гипербола со следующими параметрами:  $A = 0.01, B = 0.001, C = -0.025, D = -3.44, E = 59.68, z_0 = 320, y_0 = 240, \alpha = 13.2222^\circ$ .

На рис. 1 представлена эта гипербола при округлении вертикальной координаты до целых значений и ее аппроксимация прямой линией (за начало координат в данном примере выбран левый нижний угол изображения). Для наглядности масштаб по оси  $OY$  во много раз больше, чем по оси  $OZ$ . Из табл. 2 и рис. 1 очевидно, что данный метод намного более устойчив к уменьшению точности измерения координат сопровождаемой точки. Дальнейшее моделирование проводилось для округления измеряемых координат до целых значений.

Таблица 1

| Количество знаков после запятой в определяемых параметрах | <i>A</i>            | <i>B</i>               | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> | $\alpha$ , град       |
|-----------------------------------------------------------|---------------------|------------------------|----------|----------|----------|-----------------------|
| Округление до целого                                      | $-3 \times 10^{-6}$ | $-1.3 \times 10^{-5}$  | -0.00021 | 0.001575 | 0.014466 | -3.50003              |
| 1 знак                                                    | 0.000317            | $-1.3 \times 10^{-5}$  | -0.00026 | -0.1009  | 0.206549 | -1.27107              |
| 2 знака                                                   | 0.024669            | $-9.8 \times 10^{-6}$  | -0.00379 | -7.89361 | 14.81396 | -0.01968              |
| 3 знака                                                   | 0.096909            | $-3.8 \times 10^{-7}$  | -0.01425 | -31.0109 | 58.146   | $-1.9 \times 10^{-4}$ |
| 4 знака                                                   | 0.10011             | $-5 \times 10^{-9}$    | -0.01472 | -32.0353 | 60.06611 | $-2.5 \times 10^{-6}$ |
| 5 знаков                                                  | 0.099999            | $-2.1 \times 10^{-10}$ | -0.0147  | -31.9997 | 59.99946 | $-1.1 \times 10^{-7}$ |
| 6 знаков                                                  | 0.100001            | $-7.8 \times 10^{-11}$ | -0.0147  | -32.0004 | 60.00037 | $-3.9 \times 10^{-8}$ |
| Заданные параметры                                        | 0.1                 | 0                      | -0.0147  | -32      | 60       | 0                     |

Таблица 2

| Количество знаков после запятой, учитываемых при аппроксимации | 4       | 3       | 2       | 1     | Округление до целого |
|----------------------------------------------------------------|---------|---------|---------|-------|----------------------|
| Оценка угла поворота, угл. мин                                 | 14.0442 | 14.0442 | 14.0461 | 14.07 | 14.1095              |

На рис. 2 приведена зависимость ошибки измерения рассогласования по крену от величины этого рассогласования, т.е. ошибка измерения угла поворота рассмотренной выше гиперболы от этого угла. При этом относительная ошибка в диапазоне измерений от 10 до 130' не превышала 4–6%.

Было проведено моделирование для определения зависимости ошибки измерения рассогласования по крену от степени кривизны траектории сопровождаемой точки. Под кривизной будем понимать отношение максимального расстояния между кривой и хордой, соединяющей ее концы, к длине этой хорды. В силу малости углов для определения степени кривизны  $k$  используем выражение

$$k = \max_i \frac{y_i - y_1 - x_i(y_n - y_1)/(x_n - x_1)}{(x_n - x_1)}. \quad (7.1)$$

На рис. 3 представлена указанная зависимость для случая, когда рассогласование СК равно нулю.

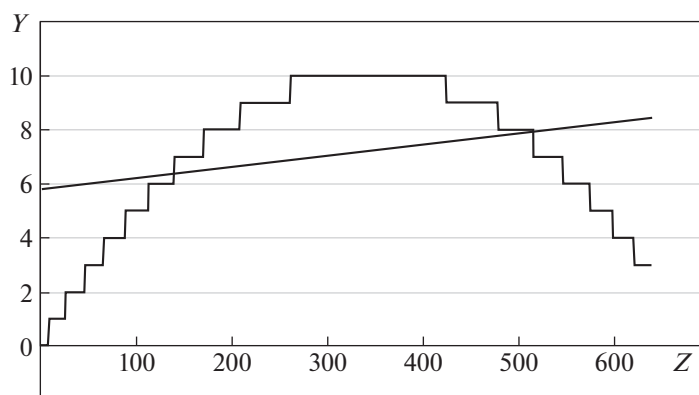
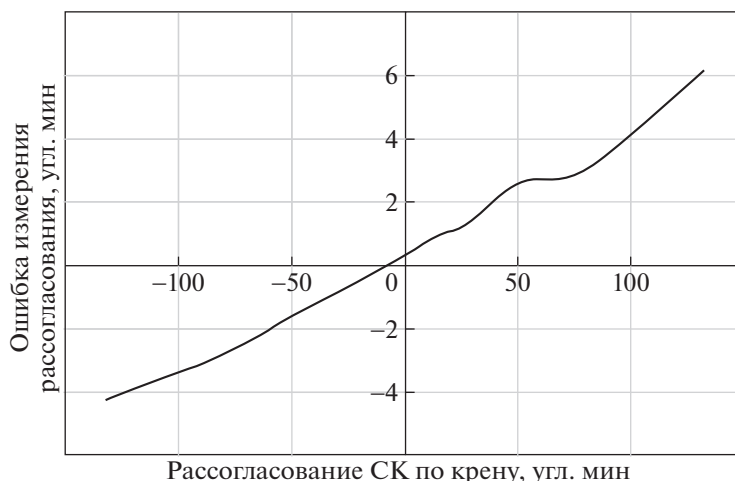
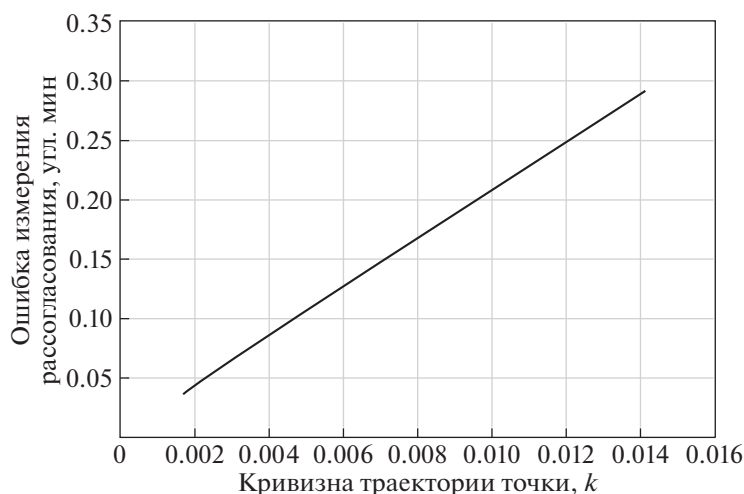


Рис. 1. Аппроксимация гиперболы прямой линией при округлении координат до целых чисел



**Рис. 2.** Зависимость ошибки измерения поправки относительно продольной оси БИНС от величины этой поправки



**Рис. 3.** Зависимость ошибки измерения рассогласования относительно продольной оси БИНС от степени кривизны траектории сопровождаемой точки

Полученная зависимость носит линейный характер. Отсюда очевидно, что при наборе заданного количества траекторий необходимо усреднение результатов измерения за время всего маневра. При этом углам рассогласования, найденным по траекториям с меньшей кривизной, надо придавать больший вес. Если было проведено сопровождение  $m$  точек на ПП, то для определения среднего угла наклона траекторий  $\bar{\alpha}$  может использоваться следующее выражение:

$$\bar{\alpha} = \arctg \frac{\sum_{j=1}^m a_j (1 - qk_j)}{n - q \sum_{j=1}^m k_j}, \quad (7.2)$$

где  $q$  — коэффициент, величина которого может быть выбрана в результате моделирования с реальной аппаратурой.

Можно ожидать, что за время маневра будут детектированы несколько десятков характерных точек на ПП и аэродромной инфраструктуре. В этом случае ошибки оценки углового рассогласования СК по крену составят единицы минут.



**Рис. 4.** Результаты обработки изображения промышленно-городской сцены алгоритмом детектирования характерных точек

На рис. 4 представлены результаты обработки изображения промышленно-городской сцены приведенным алгоритмом детектирования характерных точек. Пятиугольниками обозначены обнаружения при одном срабатывании, кружками — при двух, а квадратами — при трех или четырех срабатываниях детектора, приходящихся на обнаруженную опорную точку.

Статистический анализ результатов обработки изображений промышленных и городских сцен показал, что средние квадратические ошибки оценок горизонтальных и вертикальных координат характерных точек равны 0.36–0.71 пиксела в зависимости от условий проведения регистрации изображений (от простых до ограниченно сложных метеоусловий).

**8. Комплексная обработка видеoinформации и навигационных параметров.** Рассматривая влияние возмущающих факторов на точность согласования СК, необходимо отметить, что идеально выполнить маневр (полет по прямой или вращение) невозможно независимо от того, выполняется маневр автопилотом или летчиком вручную. При выполнении маневра на вертолет будут действовать возмущающие воздействия, приводящие к появлению стабилизационных колебаний, которые будут проявляться в виде отклонений вектора угловой или линейной скорости от среднего положения. При отсутствии стабилизации поля зрения ОЭС в экранной СК это будет проявляться в виде отклонений сопровождаемых точек от идеальных траекторий. Такие отклонения могут быть скомпенсированы с помощью информации, получаемой из БИНС. Для этого необходимо вычислять приращения углов ориентации вертолета по крену, тангажу и курсу за время, прошедшее между моментами формирования предыдущего и текущего изображений, и пересчитывать координаты характерной точки в экранной СК, компенсируя возмущения. Однако реальные временные задержки, связанные с формированием и передачей информации, а также неопределенность моментов обновления параметров могут приводить к недопустимо большим ошибкам при построении траекторий точек. Поэтому для компенсации возмущающих воздействий необходимо использовать возможности стабилизации поля зрения ОЭС. В этом случае погрешность стабилизации изображений существенно меньше углового разрешения датчиков ОЭС. В такой постановке компенсация стабилизационных колебаний сводится к необходимости определения основных требований к выполнению маневров.

Для определения направления линейной скорости и оценок поправок относительно боковой и вертикальной осей БИНС ЛА должен:

- двигаться прямолинейно под управлением автопилота;
- продолжительность полета по прямой должна быть не менее нескольких периодов стабилизационных колебаний (зависит от характеристик ЛА);
- поле зрения ОЭС стабилизировано;
- должно быть детектировано и построено траекторий характерных точек на изображении ПП не менее заданного количества (порядка 8–10).

Для оценки поправки относительно продольной оси БИНС (по крену) вертолету необходимо:

- совершить вращение на месте под управлением автопилота;
- продолжительность вращения должна быть не менее нескольких периодов стабилизационных колебаний (зависит от характеристик вертолета);
- поле зрения ОЭС стабилизировано по крену и тангажу;

должно быть детектировано и построено траекторий характерных точек на ПП не менее заданного количества (порядка 8–10).

При выполнении указанных условий можно ожидать, что ошибки определения угловых поправок предложенным методом не будут превышать углового разрешения ОЭС.

При определении рассогласования приборных СК ОЭС со связанной СК нужно учесть, что БИНС выдает параметры крен, тангаж, курс с заданной частотой, а для определения направления движения по экрану ОЭС сопровождаемых характерных точек изображения ПП необходимо некоторое время. При выполнении маневра на вертолет будут действовать возмущающие силы, приводящие к появлению упомянутых стабилизационных колебаний. Поэтому для определения искомой угловой поправки следует проводить усреднение выдаваемых БИНС значений крена за время выполнения маневра. Этот усредненный крен нужно сопоставить со средним углом наклона прямых (7.2) с учетом кривизны (7.1), аппроксимирующих траектории точек, сопровождаемых на экране ОЭС за все время выполнения маневра. Разность указанных величин определяет поправку приборной СК относительно продольной оси БИНС  $\Delta\gamma$ :

$$\Delta\gamma = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta t}{T} - \bar{\alpha}, \quad (8.1)$$

где  $\gamma_i$  – текущее значение крена, получаемое из БИНС,  $\Delta t$  – период выдачи информации из БИНС,  $T$  – время выполнения маневра,  $n$  – количество периодов за время  $T$ ,  $m$  – количество построенных траекторий характерных точек на ПП,  $\bar{\alpha}$  – средний угол наклона прямых.

Комплексная обработка сигналов БИНС и видеоинформации ОЭС для векторного согласования СК относительно боковой и вертикальной осей связанной СК заключается в следующем.

Положение точки схождения в приборной СК  $(\bar{Y}, \bar{Z})$ , найденное изложенным выше способом (2.1)–(2.3), корректируется на поправку  $\Delta\gamma$  относительно продольной оси БИНС, которая определена на предыдущем этапе согласования СК (8.1):

$$\begin{pmatrix} Y_{\text{кор}} \\ Z_{\text{кор}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\gamma & \sin(-\Delta\gamma) \\ -\sin(-\Delta\gamma) & \cos \Delta\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Навигационные параметры выдаются БИНС в нормальной подвижной СК (НПСК). Поэтому с момента начала и до окончания прослеживания траекторий характерных точек информация, выдаваемая БИНС, преобразуется следующим образом. Определяются проекции вектора путевой скорости, задаваемого текущими значениями вертикальной  $V_H$ , северной  $V_N$  и восточной  $V_E$  составляющих, на оси связанной СК (ССК) с помощью выражений [14]:

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}_{\text{ССК}} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \psi \\ -\cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi + \cos \gamma \cos \vartheta & \cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \\ \sin \gamma \sin \vartheta \cos \psi + -\sin \gamma \cos \vartheta & -\sin \gamma \sin \vartheta \sin \psi + \cos \gamma \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_N \\ V_H \\ V_E \end{pmatrix}_{\text{НПСК}},$$

где  $\Psi$  – курс,  $\vartheta$  – тангаж,  $\gamma$  – крен. Полученные значения проекций вектора путевой скорости в связанной СК преобразуются в вектор направления  $R$  ( $y$ -пеленг  $\text{phi}Y$  и  $z$ -пеленг  $\text{phi}Z$ ) с помощью выражений:

$$\text{phi}Y = -\arctg(R_Z/R_X); \quad \text{phi}Z = -\arctg(R_Y \cos(\text{phi}Y)/R_X).$$

Значения  $y$ -пеленга и  $z$ -пеленга в связанной СК усредняются на время сопровождения характерных точек. Соответствующие разности между проекциями скорректированного положения точки схождения на вертикальную и боковую оси приборной СК, найденные с помощью (8.2), и усредненными значениями пеленгов определяют поправки приборной СК относительно боковой  $\Delta\vartheta$  и вертикальной осей  $\Delta\Psi$  БИНС:

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta &= \overline{\text{phi}Z} - Y_{\text{кор}}, \\ \Delta\Psi &= \overline{\text{phi}Y} - Z_{\text{кор}}, \end{aligned}$$

где  $\overline{\text{phi}Y}$  и  $\overline{\text{phi}Z}$  – усредненные значения  $y$ -пеленга и  $z$ -пеленга вектора направления  $R$ .

**Заключение.** Предложен не имеющий аналогов метод согласования приборных СК разных постов ОЭС вертолета между собой и с инерциальной навигационной системой вертолета. Метод не требует предполетной подготовки и включения в состав каждого поста ИИБ. Метод основан на обработке потоков видеоинформации, формируемых тепловизионными и телевизионными каналами ОЭС, и использовании информации инерциальной навигационной системы. За время совершения специальных маневров, представляющих собой вращение вертолета на небольшой высоте и горизонтальный полет по прямой, выполнение которых можно автоматизировать, на изображениях формируются траектории характерных точек ПП. С помощью анализа этих траекторий определяются направления векторов угловой и линейной скоростей вертолета в приборных системах координат, которые сопоставляются с информацией инерциальной навигационной системы.

Теоретический анализ точности и моделирование показали высокие потенциальные возможности предложенного метода. При использовании метода в реальных условиях ошибки оценки углового рассогласования СК могут составлять единицы угловых минут.

Разработан и исследован на реальных изображениях детектор характерных точек, адекватный предложенному методу. Детектор, в отличие от известных, обнаруживает в основном верхние углы объектов, реагируя на их геометрические свойства, практически инвариантен к величине скачка яркости по сторонам угла, не требует применения дескрипторов для точного определения координат обнаруженных характерных точек, позволяет провести ранжирование результатов обнаружений, оставив для сопровождения наиболее надежные характерные точки. Алгоритм не требует предварительной обработки изображений и обеспечивает субпиксельную оценку экранных координат вершин углов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lipton A.H.* Alignment of Inertial Systems on a Moving Base. Cambridge: Electronics Research Center, 1967.
2. *Schneider A. M.* Kalman Filter Formulation for Transfer Alignment of Strapdown Inertial Units // J. of the Institute of Navigation. 1983. V. 30. № 1.
3. *Бельский А.Б.* Основные задачи и требования к бортовым ОЭС для современных и перспективных вертолетов // Тр. XXV Междунар. научно-техн. конф. и школы по фотоэлектронике и приборам ночного видения. Т. 1. М.: ОФСЕТ МОСКВА, 2018. С. 2–23.
4. *Мужичек С.М., Обросов К.В., Ким В.Я. и др.* Определение направления полета по сигналам оптико-электронной системы переднего обзора // Вестн. компьютерных и информационных технологий. 2013. № 5. С. 8–14.
5. *Мужичек С.М., Обросов К.В., Лисицын В.М. и др.* Способ измерения курса летательного аппарата. Пат. 2556286 Российская Федерация, МПК G01C 21/12 C1. № 2014115385/28; заявл. 17.04.2014; опубл. 10.07.2015, Бюл. № 19. 13 с.
6. *Бобин А.В., Лисицын В.М., Обросов К.В., Сикачева М.И.* Доплеровская селекция наземных объектов, движущихся со случайными изменениями ориентации вектора скорости // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 5. С. 143–151.
7. *Клочко В.К.* 3D-радиовидение на базе бортовой доплеровской РЛС // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2015. Т. 2. Вып. 2. С. 53–57.
8. *Денисов П.В., Зайцев С.Э., Костюк Е.А. и др.* Вопросы дешифрирования радиолокационных снимков при радиовидении // Радиотехника. 2014. № 7. С. 7–14.
9. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
10. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1971. 328 с.
11. *Harris C.G., Stephens M.J.* Combined Corner and Edge Detector // Proc. Fourth Alvey Vision Conf. Manchester, 1988. P. 147–151.
12. *Foerstner W.* A Feature Based Correspondence Algorithm for Image Matching // ISPRS. Commission III Sympos. Rovaniemi. Finland, 1986. V. 26-3/3. P. 150–166.
13. *Сергунов А.А.* Перспективы применения детекторов характерных точек для обнаружения движущихся малоразмерных объектов на сложном фоне // Научная сессия ГУАП: сб. докладов: ВЗ. Ч. II. Технические науки // СПб.: ГУАП, 2010. С. 60–62.
14. ГОСТ 20058–80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере.

УДК 531.36

## ОРГАНИЗАЦИЯ ПОВОРОТА КОРПУСА ВИБРАЦИОННОГО РОБОТА ВОКРУГ ВЕРТИКАЛИ<sup>1</sup>

© 2023 г. М. А. Гарбуз<sup>a,\*</sup>, М. З. Досаев<sup>a</sup>, В. А. Самсонов<sup>a</sup>

<sup>a</sup>НИИ механики МГУ, Москва, Россия

\*e-mail: misha-garbuz@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.08.2022 г.

После доработки 09.09.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Рассматривается движение вибрационного робота, состоящего из корпуса, двух однородных маховиков и дебаланса. Построена математическая модель плоскопараллельного движения. Показана принципиальная возможность управления дебалансом, результатом которого является поворот робота в горизонтальной плоскости. Описаны зависимости угла поворота корпуса от параметров системы. Определены условия полной остановки корпуса после совершения поворота. Проанализировано смещение корпуса из начального положения.

DOI: 10.31857/S0002338823010031, EDN: IZZMOG

**Введение.** Существует класс устройств, способных передвигаться в пространстве за счет неравномерного периодического движения внутренних элементов и сил взаимодействия различной природы между корпусом и внешней средой. Вопрос о возможности создания таких аппаратов возник в 1964 г. в связи с попыткой дискредитации ньютоновой механики, но систематические научные его исследования начались только в последнее время, например с работы [1], и продолжаются до сих пор.

С физической точки зрения способ движения таких устройств близок к виброперемещениям. Теория вибрационной механики была введена в [2]. Будем называть такие устройства вибрационными роботами. Изолированность их движущихся частей от внешних воздействий делает актуальным применение таких роботов в условиях агрессивных сред, например, в глубине водоемов, в экстремальных климатических условиях Арктики, пустынь или на других планетах, а также в медицине [3, 4].

В [5] рассмотрена двумерная задача о наиболее быстром вращении твердого тела при перемещении внутренней массы. Способ управления ориентацией твердого тела при помощи вспомогательных масс, движущихся относительно тела, предложен в [6]. В [7] аналитически и экспериментально исследуется движение по шероховатой горизонтальной плоскости мобильного робота капсульного типа, управляемого периодической упругой силой. Результаты модельных и экспериментальных исследований согласуются между собой.

Среди подобных механических систем особое место занимают мобильные роботы, состоящие из нескольких тел [8, 9], и роботы, перемещающиеся в жидкой среде [10–13]. В частности, в [10] изучается движение в идеальной жидкости произвольного двумерного тела с подвижной внутренней массой и можно добиться перемещения тела в заданную точку. В [14] показано, что мобильные роботы могут использовать высокочастотные параметрические колебания внутренней массы для создания быстрого и эффективного движения по шероховатой поверхности.

Описаны схемы, реализующие прямолинейное и плоское движение [15–18] в сопротивляющейся среде с вязким и сухим трением. Скольжение по шероховатой плоскости параллелепипеда с внутренними маховиком и подвижной точкой приведено в [19]. Показано наличие эффекта поворота тела вокруг вертикальной оси вследствие неравномерности нормального напряжения в области контакта. В [20] рассмотрено плоское движение твердого тела при перемещении двух внутренних масс. Возможен периодический режим движения, состоящий из нескольких фаз:

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 22-21-00303).

покой, скольжение, отрыв, свободное движение над горизонтальной плоскостью, безударный контакт с плоскостью и скольжение по ней до остановки.

В [21] была представлена плоская модель вибрационного робота с несбалансированным внутренним ротором, опирающегося плоским дном на шероховатую плоскость. Предложен метод построения алгоритма управления вращением ротора, реализующий возможность корпуса оторваться от поверхности на практически нулевую высоту и в таком режиме полета совершить поступательное движение. Подобный метод был применен в [22–24] в задаче о плоском движении инерционного робота с одним дебалансом и одним маховиком. Маховик использовался для сохранения горизонтальной ориентации корпуса в режиме полета.

Непрямолинейное движение вибрационного робота по шероховатой плоскости рассмотрено в ряде работ [25–33]. В [25, 27, 28] для поворота использован однородный вращающийся ротор, установленный внутри полости твердого тела, а для линейного смещения – материальная точка с одной степенью свободы. В [26, 29, 32, 33] рассчитаны схемы робота с двумя осциллирующими вдоль заданных направлений материальными точками. В [9, 10] показана модель вибрационной системы с двумя роторами, вращающимися с переменной угловой скоростью. Движение робота вызвано силами инерции и трением между плоскостью и опорными частями корпуса.

В статье рассматривается режим полета пространственной конструкции робота с одним дебалансом и двумя маховиками. Этот режим реализуется посредством ускоренного движения дебаланса. Ось вращения дебаланса смещена от горизонтали на некоторый угол, что позволяет корпусу в режиме “полета” отклоняться от прямолинейного движения и поворачивать на определенный угол вокруг вертикали. Предполагается, что маховики обеспечивают стабилизацию горизонтальной ориентации корпуса в таком режиме. Их вращение в данной работе детально не приводится.

**1. Описание системы и постановка задачи.** Рассматривается движение по шероховатой горизонтальной плоскости вибрационного робота (рис. 1), корпус массы  $m_1$  которого содержит невесомую рамку с дебалансом – материальной точкой  $S$  массой  $m_2$  и два маховика, представляющих собой однородные диски масс  $m_3, m_4$  соответственно. Дно корпуса – плоская платформа с тремя точками опоры:  $P, L, R$ . Дебаланс движется по окружности в плоскости рамки вокруг точки  $S$ , являющейся центром масс корпуса ( $SC = l$ ). Рамка наклонена на установочный угол  $\psi \in (-\pi/2, \pi/2)$  по отношению к плоскости, перпендикулярной платформе. Маховики вращаются вокруг своих осей динамической симметрии, проходящих через их центры  $A$  и  $B$ . Центры маховиков расположены на одинаковой высоте в плоскости, перпендикулярной дну корпуса и проходящей через его продольную ось. Ось вращения ротора  $A$  параллельна продольной оси дна, а ось ротора  $B$  перпендикулярна продольной оси дна.

На систему действуют следующие внешние силы: сила тяжести на каждый элемент системы:  $m_1\vec{g}, m_2\vec{g}, m_3\vec{g}, m_4\vec{g}$  ( $\vec{g}$  – ускорение силы тяжести), а также в случае контакта с опорой силы реакций  $\vec{F}_P, \vec{F}_L$  и  $\vec{F}_R$  в точках  $P, L, R$  соответственно. Силы реакции опоры имеют вертикальные  $\vec{N}_P, \vec{N}_L$  и  $\vec{N}_R$  и горизонтальные  $\vec{R}_P, \vec{R}_L$  и  $\vec{R}_R$  составляющие. При скольжении тела по опоре они связаны между собой по закону Кулона:  $|\vec{R}_P| = \mu |\vec{N}_P|, |\vec{R}_L| = \mu |\vec{N}_L|, |\vec{R}_R| = \mu |\vec{N}_R|$ , где  $\mu$  – коэффициент трения между телом и опорной плоскостью. Аэродинамическими силами пренебрегаем. В дальнейшем можно учесть влияние воздействия на объект среды, в которой происходит движение, (воздуха/жидкости). Такое усложнение модели можно реализовать, опираясь на квазистатический подход к описанию взаимодействия твердого тела со средой, а также можно принимать во внимание эффекты, связанные с так называемыми присоединенными массами (см. [34]), или, используя феноменологические модели, например, вводить присоединенный осциллятор [35]. Учет воздействия среды не внесет принципиальных изменений в подход, применяемый далее для построения алгоритма управления.

Опишем внутренние силы, воздействующие на элементы системы:

момент от двигателя  $\vec{M}_{12}$  влияет со стороны корпуса 1 на дебаланс 2, а со стороны дебаланса 2 на корпус 1 – момент  $\vec{M}_{21}$ ;

момент от двигателя  $\vec{M}_{13}$  действует со стороны корпуса 1 на маховик 3, а со стороны маховика 3 на корпус 1 – момент  $\vec{M}_{31}$ ;

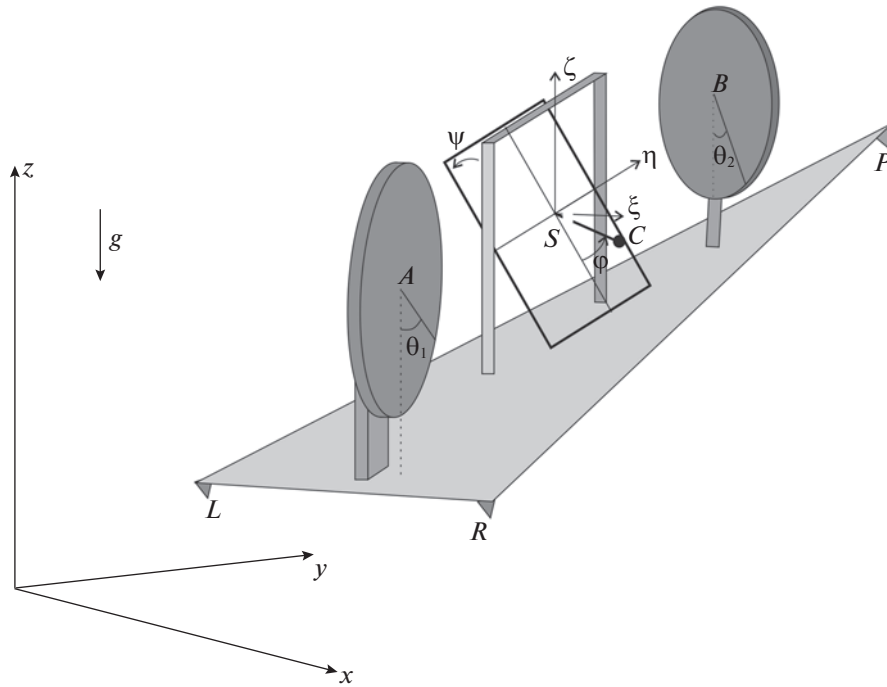


Рис. 1. Схема механической системы

момент от двигателя  $\overline{M}_{14}$  поступает со стороны корпуса 1 на маховик 4, а со стороны маховика 4 на корпус 1 действует момент  $\overline{M}_{41}$ ;

сила реакции от корпуса 1 на дебаланс 2  $\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}$ , здесь  $\overline{F}_{ij}$  — сила, с которой  $i$ -тое тело действует на  $j$ -тое; сила реакции от корпуса 1 на маховик 3  $\overline{F}_{13} = -\overline{F}_{31}$ ;

сила реакции от корпуса 1 на маховик 4  $\overline{F}_{14} = -\overline{F}_{41}$ .

Введем неподвижную систему координат  $Ox\eta z$ : ось  $z$  направлена вертикально вверх, а плоскость  $x\eta$  параллельна опорной поверхности.

Пусть  $S\xi\eta\zeta$  — подвижная система координат, оси которой направлены по главным осям инерции корпуса:  $S\zeta$  перпендикулярна плоскости платформы,  $S\eta$  лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости платформы, и направлена ортогонально  $S\zeta$ ,  $S\xi$  дополняет систему до правой. Положение системы описывается следующими обобщенными координатами:  $x, y, z$  — координаты точки  $S$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы тангажа, крена и рыскания для корпуса соответственно,  $\theta_A, \theta_B$  — углы поворотов маховиков относительно корпуса (циклические координаты),  $\varphi$  — угол поворота дебаланса относительно корпуса, отсчитываемый от положения, максимально приближенного к платформе.

Ориентацию системы  $S\xi\eta\zeta$  зададим углами Крылова:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha \\ -\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\gamma\cos\beta + \sin\beta\sin\gamma & \cos\gamma\sin\beta - \cos\beta\sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}.$$

Угловая скорость подвижной системы координат

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\beta} \cos \gamma - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma \\ \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{pmatrix}.$$

Считаем, что в любой момент времени мы можем задавать необходимые угловые ускорения маховиков и дебаланса. Контролируя вращение дебаланса, можно изменять нормальные реакции в точках опоры, в том числе добиваться обнуления этих реакций. Задача маховиков состоит в том, чтобы поддерживать платформу горизонтальной, обеспечивая нулевой крен и тангаж. В отличие от [6], где для задания ориентации тела используются подвижные материальные точки, и от [36], где ориентация объектов стабилизируется магнитными моментами, горизонтальную стабилизацию платформы осуществляем маховиками. Для реализации этого в системе есть два управляющих ускорения маховиков, поэтому такая задача разрешима. В рамках настоящей работы будем считать, что движение маховиков организовано должным образом, и рассматривать только плоскопараллельное движение корпуса, при котором  $\alpha(t) \equiv 0$ ,  $\beta(t) \equiv 0$ ,  $\vec{\omega} = \dot{\gamma} \vec{e}_\zeta$ .

**2. Математическая модель.** Для каждого элемента механической системы определим уравнения, описывающие их движение.

**2.1. К о р п у с.** Запишем для корпуса теорему о движении центра масс и теорему об изменении кинетического момента относительно центра масс:

$$\begin{cases} m_1 \dot{\vec{v}}_S = m_1 \vec{g} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \vec{F}_P + \vec{F}_L + \vec{F}_R, \\ \frac{d}{dt} (\mathbb{J}_S \vec{\omega}) = \vec{M}_{21} + \vec{M}_{31} + \vec{M}_{41} + [\vec{SA}, \vec{F}_{31}] + [\vec{SB}, \vec{F}_{41}] + [\vec{SP}, \vec{F}_P] + [\vec{SL}, \vec{F}_L] + [\vec{SR}, \vec{F}_R]. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь  $\vec{v}_S$  — скорость центра масс корпуса,  $\mathbb{J}_S$  — тензор инерции корпуса, имеющий в связанных осях  $S\xi\eta\zeta$  диагональный вид  $\mathbb{J}_S = \text{diag}(J_{S\xi}, J_{S\eta}, J_{S\zeta})$ .

**2.2. Д е б а л а н с.** Получим систему уравнений, описывающую движение дебаланса:

$$\begin{cases} m_2 \vec{a}_C = m_2 \vec{g} + \vec{F}_{12}, \\ \frac{d\vec{K}_S}{dt} = \vec{M}_{12}. \end{cases}$$

Ускорение точки  $C$  запишем в следующей форме:

$$\vec{a}_C = \frac{d}{dt} (\vec{v}_S + [\vec{\omega}_C, \vec{SC}]).$$

Здесь  $\vec{\omega}_C = \vec{\omega} + \phi(\cos \psi \vec{e}_\xi + \sin \psi \vec{e}_\zeta)$  — угловая скорость дебаланса,  $\vec{K}_S = [\vec{SC}, \vec{v}_C]$  — момент количества движения дебаланса относительно центра масс,  $\vec{v}_C$  — скорость точки  $C$ , вектор  $\vec{SC}$  можно представить в виде  $\vec{SC} = l(\cos \phi \sin \psi \vec{e}_\xi + \sin \phi \vec{e}_\eta - \cos \phi \cos \psi \vec{e}_\zeta)$ .

**2.3. М а х о в и к и.** Следующая система уравнений описывает движение маховиков:

$$\begin{cases} m_3 \vec{a}_A = m_3 \vec{g} + \vec{F}_{13}, \\ \frac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_{13} \end{cases} \quad \begin{cases} m_4 \vec{a}_B = m_4 \vec{g} + \vec{F}_{14}, \\ \frac{d\vec{K}_B}{dt} = \vec{M}_{14}. \end{cases}$$

Здесь  $\vec{K}_A = \mathbb{J}_A \vec{\omega}_A$ , где  $\vec{\omega}_A = \vec{\omega} + \dot{\theta}_A \vec{e}_\xi$  — угловая скорость маховика 3,  $\vec{K}_B = \mathbb{J}_B \vec{\omega}_B$ , где  $\vec{\omega}_B = \vec{\omega} + \dot{\theta}_B \vec{e}_\eta$  — угловая скорость маховика 4,  $\mathbb{J}_A = \text{diag}(J_{A\xi}, J_{A\eta}, J_{A\zeta})$ ,  $\mathbb{J}_B = \text{diag}(J_{B\xi}, J_{B\eta}, J_{B\zeta})$  — центральные тензоры инерции маховиков в связанных осях  $A\xi\eta\zeta$  и  $B\xi\eta\zeta$ . Ускорение центров масс маховиков  $\vec{a}_A$ ,  $\vec{a}_B$  может быть найдено по формулам

$$\vec{a}_A = \frac{d}{dt} (\vec{v}_S + [\vec{\omega}, \vec{SA}]), \quad \vec{a}_B = \frac{d}{dt} (\vec{v}_S + [\vec{\omega}, \vec{SB}]).$$

Для упрощения предположим, что маховики имеют одинаковую массу  $m_3 = m_4 = m$ , а также что их центры расположены симметрично относительно точки  $S$ , т.е.  $\vec{SA} = -\vec{SB} = \eta_A \vec{e}_\eta$ . Тогда

$$\begin{aligned} [\vec{SA}, \vec{F}_{31}] + [\vec{SB}, \vec{F}_{41}] &= [\vec{SA}, \vec{F}_{31} - \vec{F}_{41}] = m[\vec{SA}, \vec{a}_B - \vec{a}_A] = \\ &= m \left[ \vec{SA}, \frac{d}{dt}(\vec{v}_S + [\vec{\omega}, \vec{SB}]) - \frac{d}{dt}(\vec{v}_S + [\vec{\omega}, \vec{SA}]) \right] = -2m \left[ \vec{SA}, \frac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{SA}] \right] = -2m \frac{d}{dt}[\vec{SA}, [\vec{\omega}, \vec{SA}]], \end{aligned}$$

так как

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{SA}, [\vec{\omega}, \vec{SA}] \right] = 0.$$

Обозначим через  $M$  суммарную массу всех элементов системы. Далее подставим в систему (2.1) выражения для  $\vec{F}_{13}, \vec{F}_{14}$  с учетом  $\vec{a}_A, \vec{a}_B$  и  $\vec{a}_C, \vec{M}_{12}, \vec{M}_{13}, \vec{M}_{14}$ , после чего перегруппируем слагаемые в уравнениях (2.1) и получим систему, описывающую движение робота:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(M\vec{v}_S + m_2[\vec{\omega}_C, \vec{SC}]) = M\vec{g} + \vec{F}_P + \vec{F}_L + \vec{F}_R, \\ J_{Sz} \ddot{\varphi} \vec{e}_z = -\frac{d}{dt}(\vec{K}_A + \vec{K}_B + \vec{K}_S + 2m[\vec{SA}, [\vec{\omega}, \vec{SA}]]) + [\vec{SP}, \vec{F}_P] + [\vec{SL}, \vec{F}_L] + [\vec{SR}, \vec{F}_R]. \end{cases} \quad (2.2)$$

**3. Проекция уравнений движения на вертикаль.** 3.1. Отсутствие контакта корпуса с опорой. Спроектируем первое уравнение системы (2.2) на ось  $z$ :

$$\frac{d}{dt}(M\dot{z} + m_2[\vec{\omega}_C, \vec{SC}], \vec{e}_z) = -Mg + N.$$

Здесь через  $N$  обозначена суммарная нормальная реакция  $\langle \vec{F}_P + \vec{F}_L + \vec{F}_R, \vec{e}_z \rangle$ . Рассмотрим состояние механической системы, при котором нормальные реакции в опорах равны нулю. Принципиальная возможность такого состояния показана в работах [21–24]. В частности, для случая  $\psi = 0$  была описана так называемая фаза полета, при которой  $N = 0$  и корпус не совершает движения вдоль вертикали. И хотя в данной системе рамка дебаланса установлена под углом к вертикали, соответствующее уравнение имеет тот же вид, что и в [23], но с поправкой на установочный угол  $\psi$

$$\frac{d}{dt}(m_2 l \dot{\varphi} \cos \psi \sin \varphi) = -Mg. \quad (3.1)$$

По аналогии с [24] для реализации описанного плоскопараллельного движения необходимо, чтобы положение  $\varphi$  и угловая скорость  $\dot{\varphi}$  дебаланса удовлетворяли соотношению (частному интегралу уравнения 3.1)

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \frac{\sqrt{2Mg(1 + \cos \varphi)/m_2 l \cos \psi}}{|\sin \varphi|} = \frac{\sqrt{Mg/m_2 l \cos \psi}}{\sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (3.2)$$

Предполагаются две основные фазы движения.

**Фаза разгона.** Корпус неподвижен за счет силы трения покоя, при этом дебаланс набирает необходимое количество движения, чтобы величины угла его поворота  $\varphi$  и скорости его вращения  $\dot{\varphi}$  могли достичь значений, удовлетворяющих зависимости (3.2). Вид зависимости (3.2) на фазовой плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$  и алгоритмы осуществления фазы разгона описаны в [23, 24, 29] и не рассматриваются в рамках настоящей статьи. На этой фазе, в частности, возможны изменение угла  $\psi$  рамки и уменьшение угловых скоростей (разгрузка) маховиков.

**Фаза полета.** В этой фазе движения угол  $\varphi$  и угловая скорость  $\dot{\varphi}$  удовлетворяют соотношению (3.2). Дебаланс вначале ( $\varphi < \pi$ ) замедляется и изменяет количество движения и кинетический момент корпуса, в результате чего нормальные реакции уменьшаются до нуля. Корпус устремляется за дебалансом и совершает перемещение с вращением вокруг вертикали. После прохождения положения  $\varphi = \pi$  дебаланс снова ускоряется, из-за чего замедляется вращение корпуса. Как было показано в [23], в начальный ( $t = 0$ ) и конечный моменты ( $t = t_*$ ) фазы полета угловая скорость дебаланса одинакова.

Пусть в начальный момент фазы полета состояние дебаланса следующее:  $\varphi = \varphi_0$ ;  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ . Найдем программное управление дебаланса, обеспечивающее  $N = 0$ . Для этого проинтегрируем выражение (3.1) с начальными условиями  $\dot{\varphi}_0, \varphi_0$ :

$$\varphi(t) = \arccos\left(\frac{Mgt^2}{2m_2l \cos \psi} - 2t\sqrt{Mg/m_2l \cos \psi} \cos \frac{\varphi_0}{2} + \cos \varphi_0\right). \quad (3.3)$$

Частный вид траектории (3.3) для случая  $\psi = 0$  был определен в работе [37]. Отметим, что существуют и другие технические способы управления мотором дебаланса, реализующие фазу полета. Например, формула (3.2) представляет собой обратную связь угловой скорости дебаланса по его положению.

Кроме того, подставим (3.2) в (3.1) и определим обратную связь для ускорения дебаланса от угла поворота:

$$\ddot{\varphi}(\varphi) = -\frac{Mg}{2m_2l \cos \psi} \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}. \quad (3.4)$$

Формулы (3.2)–(3.4), а также следующие из них зависимости  $\dot{\varphi}(t)$ ,  $\ddot{\varphi}(t)$ ,  $\ddot{\varphi}(\varphi)$  могут быть использованы для управления дебалансом при реализации вибрационного робота, исходя из конструктивных особенностей управляющего мотора.

Вычислим время  $t_*$ , которое затрачивается на фазу полета. Из (3.3) вытекает, что

$$\cos(2\pi - \varphi_0) = \frac{Mgt_*^2}{2m_2l \cos \psi} - 2t_*\sqrt{Mg/m_2l \cos \psi} \cos \frac{\varphi_0}{2} + \cos \varphi_0 \Rightarrow t_* = \frac{4 \cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{Mg/m_2l \cos \psi}}.$$

**3.2. Поворот корпуса вокруг вертикали.** Спроектируем второе уравнение системы (2.2) на вертикаль и проинтегрируем его с начальными условиями  $\dot{\gamma}(0) = 0$ ,  $\gamma(0) = 0$ ,  $J_{S\zeta}\dot{\gamma} = -m_3l^2(\dot{\varphi}\sin\psi + \dot{\gamma}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\psi)) - J_{A\zeta}\dot{\gamma} - J_{B\zeta}\dot{\gamma} - 2m\eta_A^2\dot{\gamma} + m_2l^2\dot{\varphi}_0\sin\psi$ , откуда заключаем, что

$$\dot{\gamma} = \frac{(\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi})\sin \psi}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \frac{J_{S\zeta} + J_{A\zeta} + J_{B\zeta} + 2m\eta_A^2}{m_2l^2}}. \quad (3.5)$$

Таким образом, с учетом подстановок (3.2) и (3.3) получаем

$$\gamma(t) = \sin \psi \sqrt{Mg/m_2l \cos \psi} \int_0^t \frac{\frac{1}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\varphi(t)}{2}}}{1 - \cos^2 \varphi(t) \cos^2 \psi + \frac{J_{S\zeta} + J_{A\zeta} + J_{B\zeta} + 2m\eta_A^2}{m_2l^2}} dt. \quad (3.6)$$

**З а м е ч а н и е.** Корпус вибрационного робота имеет нулевую угловую скорость после поворота, так как  $\dot{\varphi}(t_*) = \dot{\varphi}_0$ .

**У т в е р ж д е н и е 1.** Функция  $\gamma(t)$  может быть вычислена в квадратурах.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из (3.2) следует, что

$$dt = \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi / \sqrt{m_2l \cos \psi / Mg}.$$

Подставим это выражение в (3.6):

$$\gamma(\varphi) = \sin \psi \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} - 1}{\frac{J_{S\zeta} + J_{A\zeta} + J_{B\zeta} + 2m\eta_A^2}{m_2 l^2} + 1 - \cos^2 \psi \cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (3.7)$$

Введем обозначения:

$$\cos^2 \psi = a, \quad \frac{J_{S\zeta} + J_{A\zeta} + J_{B\zeta} + 2m\eta_A^2}{m_2 l^2} + 1 = j.$$

Тогда вычисление интеграла (3.7) сводится к нахождению двух интегралов:

$$I_1 = \int \frac{\sin \frac{\varphi}{2} d\varphi}{j - a \cos^2 \varphi}, \quad I_2 = \int \frac{d\varphi}{j - a \cos^2 \varphi}.$$

После подстановок  $u = \cos \frac{\varphi}{2}$  и  $\cos^2 \varphi = (2u^2 - 1)^2$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{-2du}{j - a(2u^2 - 1)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{-2du}{j/a - (2u^2 - 1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{aj}} \int \left( \frac{1}{u^2 - A} - \frac{1}{u^2 + B} \right) du = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{aj}} \left( \frac{1}{2\sqrt{A}} \ln \left| \frac{u - \sqrt{A}}{u + \sqrt{A}} \right| - \frac{1}{\sqrt{B}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{B}} \right), \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{1 + \sqrt{\frac{j}{a}}}{2}, \quad B = \frac{\sqrt{\frac{j}{a}} - 1}{2},$$

$I_2$  вычисляется с помощью подстановки  $v = \operatorname{tg} \varphi$ :

$$I_2 = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{j}{j-a}} \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{j(j-a)}} + C,$$

где  $C$  определяется как

$$C = \begin{cases} 0 & \varphi \in (0, \pi/2), \\ \pi/\sqrt{j(j-a)} & \varphi \in [\pi/2, 3\pi/2), \\ 2\pi/\sqrt{j(j-a)} & \varphi \in [3\pi/2, 2\pi). \end{cases}$$

Таким образом,

$$\gamma(\varphi) = \sin \psi \left[ \frac{\frac{1}{2\sqrt{A}} \ln \left| \frac{\cos \frac{\varphi}{2} - \sqrt{A}}{\cos \frac{\varphi}{2} + \sqrt{A}} \right| - \frac{1}{\sqrt{B}} \operatorname{arctg} \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{B}}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \sqrt{aj}} - \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{j}{j-a}} \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{j(j-a)}} + C \right]_{\varphi_0}^{\varphi}. \quad (3.8)$$

Утверждение 1 доказано.

**4. Горизонтальное смещение.** 4.1. С м е щ е н и е ц е н т р а м а с с. По теореме о сохранении количества движения, во время фазы полета первое уравнение системы (2.2) допускает два первых интеграла:

$$\begin{cases} M\dot{x}(t)/m_2l = \cos \gamma \sin \varphi (\dot{\gamma} + \dot{\varphi} \sin \psi) + \cos \varphi \sin \gamma (\dot{\gamma} \sin \psi + \dot{\varphi}) - \sin \varphi_0 \sin \psi \dot{\varphi}_0, \\ M\dot{y}(t)/m_2l = \sin \gamma \sin \varphi (\dot{\gamma} + \dot{\varphi} \sin \psi) - \cos \gamma \cos \varphi (\dot{\gamma} \sin \psi + \dot{\varphi}) + \cos \varphi_0 \dot{\varphi}_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

На практике наличие горизонтальной скорости, которую приобретет центр масс корпуса в момент завершения фазы полета, является нежелательным, поскольку она может привести к скольжению вибрационного робота по опорной поверхности. Определим условия, позволяющие обеспечить полную остановку корпуса после поворота:

$$\begin{cases} \dot{x}(t_*) = 0 \\ \dot{y}(t_*) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \psi \sin \varphi_0 (1 + \cos \gamma_*) = \cos \varphi_0 \sin \gamma_*, \\ \cos \varphi_0 (1 - \cos \gamma_*) = \sin \varphi_0 \sin \gamma_* \sin \psi. \end{cases} \quad (4.2)$$

**У т в е р ж д е н и е 2.** При совершении поворота корпуса на ненулевой угол  $\gamma_*$ , отличный от  $\pi$ , условия равенства нулю боковой и продольной скорости в момент приземления эквивалентны. При повороте на угол  $\gamma_* = \pi$  общая скорость центра масс корпуса будет нулевой, если и только если начальное положение дебаланса  $\varphi_0 = \pi/2$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если  $\psi = 0$ , то из (3.5) следует, что  $\gamma(t) \equiv 0 = \gamma_*$ , т.е. поворота не происходит, и система (4.2) выполняется тождественно. Проведем доказательство для случая, когда рамка дебаланса отклонена на некоторый угол от вертикали.

Из первого уравнения системы (4.2)

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{1 - \cos \gamma_*}{\sin \gamma_* \sin \psi} = \frac{(1 - \cos \gamma_*)(1 + \cos \gamma_*)}{\sin \gamma_* \sin \psi (1 + \cos \gamma_*)} = \frac{\sin^2 \gamma_*}{\sin \gamma_* \sin \psi (1 + \cos \gamma_*)} = \frac{\sin \gamma_*}{\sin \psi (1 + \cos \gamma_*)}.$$

Таким образом, при  $\gamma_* \neq \pi$  первое и второе условия системы (4.2) эквивалентны. Если же  $\gamma_* = \pi$ , то первое условие системы (4.2) выполняется тождественно, а второе принимает вид  $\cos \varphi_0 = 0$  и, следовательно, выполняется при  $\varphi_0 = \pi/2$ . Утверждение 2 доказано.

**4.2. Т р а е к т о р и я ц е н т р а м а с с.** Система (4.2) может быть представлена в виде

$$\frac{d}{dt} (M(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) + m_2\vec{SC}) = m_2l\dot{\varphi}_0(\cos \varphi_0\vec{e}_y - \sin \varphi_0 \sin \psi \vec{e}_x).$$

Пусть начальное положение корпуса таково, что  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ . Тогда

$$\begin{cases} \frac{M}{m_2l} x(t) + \sin \psi \cos \gamma \cos \varphi - \sin \gamma \sin \varphi = -\dot{\varphi}_0 t \sin \varphi_0 \sin \psi + \sin \psi \cos \varphi_0, \\ \frac{M}{m_2l} y(t) + \sin \varphi \cos \gamma + \sin \psi \cos \varphi \sin \gamma = \dot{\varphi}_0 t \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Система (4.3) описывает траекторию центра масс корпуса  $S$  в горизонтальной плоскости.

**4.3. М а к с и м а л ь н ы й у г о л п о в о р о т а.** Оценим наибольший угол поворота корпуса, после которого его центр масс  $S$  останавливается. Для этого запишем первое уравнение системы (4.2) в следующей форме:

$$\gamma_* = 2 \arctg(\sin \psi \operatorname{tg} \varphi_0). \quad (4.4)$$

Это уравнение задает двумерную поверхность в пространстве  $\gamma_*$ ,  $\varphi_0$ ,  $\psi$ . Интересующие нас движения лежат на пересечении этой поверхности с поверхностью всевозможных поворотов, которая задается формулой (3.8) при подстановке  $\varphi = 2\pi - \varphi_0$ . Из физических соображений ясно, что максимальный угол поворота корпуса достигается при стремлении  $\psi \rightarrow \pi/2$ , так как в этом положении рамка горизонтальна, и весь кинетический момент дебаланса направлен на поворот. (Также это можно увидеть из уравнения (3.5), однако оговоримся, что при  $\psi = \pi/2$  не может быть организовано управление  $\varphi(t)$ , обеспечивающее отсутствие контакта корпуса с опорой (3.3).) Поэтому наибольший угол поворота должен удовлетворять соотношению:

$$\gamma_{\max}(\varphi_0) = \lim_{\psi \rightarrow \pi/2} 2 \arctg(\sin \psi \operatorname{tg} \varphi_0) = 2\varphi_0.$$

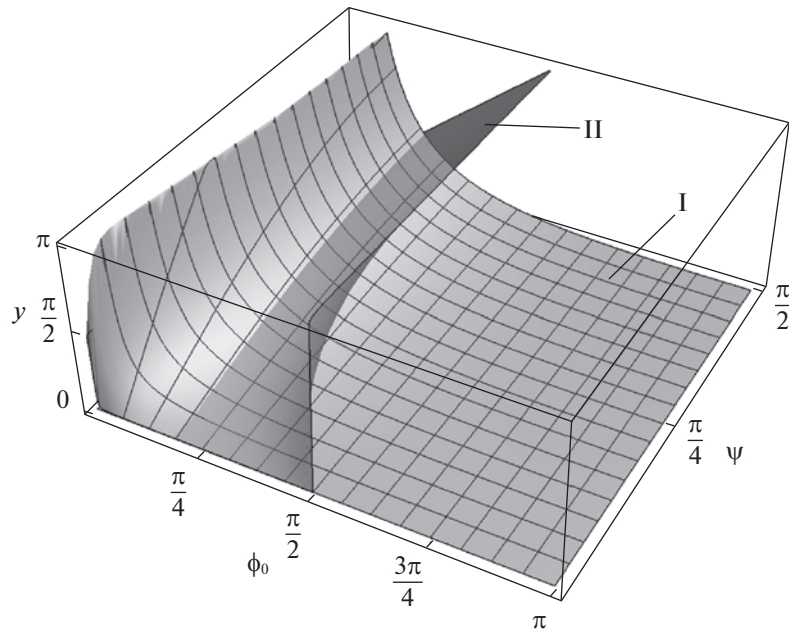


Рис. 2. Зависимость угла поворота корпуса от параметров  $\phi_0, \psi$

С другой стороны, угол поворота должен быть реализован вибрационным роботом и удовлетворять уравнению (3.8) при  $\psi \rightarrow \pi/2$ :

$$\gamma_{\max}(\phi_0) = \lim_{\psi \rightarrow \pi/2} \gamma(2\pi - \phi_0) = \frac{2}{j} \left( \phi_0 - \pi + 2 \operatorname{ctg} \frac{\phi_0}{2} \right).$$

Вышесказанное рассуждение можно сформулировать в следующем виде.

**Утверждение 3.** Максимальный угол поворота корпуса при полной остановке центра масс после завершения фазы полета равен  $\gamma_{\max} = 2\varphi^*$ , где  $\varphi^*$  определяется из уравнения

$$2\varphi^* = \frac{2}{j} \left( \varphi^* - \pi + 2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi^*}{2} \right).$$

**5. Численное моделирование движения.** 5.1. **Поворот робота.** Зафиксируем параметры системы следующим образом:  $M = 15$  кг,  $m_2 = 10$  кг,  $\eta_A = 1$ ;  $(J_{S\zeta} + J_{A\zeta} + J_{B\zeta} + 2m\eta_A^2)/m_2 l^2 = 5$ . На рис. 2 поверхность I описывает зависимость возможных углов поворота корпуса  $\gamma_*$  от параметров  $\phi_0, \psi$ . Она построена по формуле (3.8) при подстановке  $\varphi = 2\pi - \phi_0$ . Поверхность II задана уравнением (4.4) — пересечение этих множеств соответствует таким поворотам вибрационного робота, после которых корпус будет иметь нулевую скорость. Согласно утверждению 3, наибольший угол поворота при условии остановки корпуса составляет  $71.1^\circ$ .

Из общего вида поверхностей можем заключить, что они пересекаются по прямой  $\gamma_* = 0$ ;  $\psi = 0$ , которая соответствует смещению корпуса в продольном направлении без поворота, а также некоторой кривой в пространстве  $\phi_0, \psi, \gamma$ . Эта кривая обладает следующим свойством: переменная  $\psi$  растет и убывает одновременно с переменной  $\phi_0$ . Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 4.** Для каждого установочного угла рамки  $\psi \neq 0$  существует единственное начальное положение дебаланса  $\phi_0$ , при котором корпус останавливается после поворота. Угол этого поворота возрастает с увеличением  $\psi$ , а  $\phi_0$  лежит в диапазоне  $(34.7; 35.7^\circ)$ .

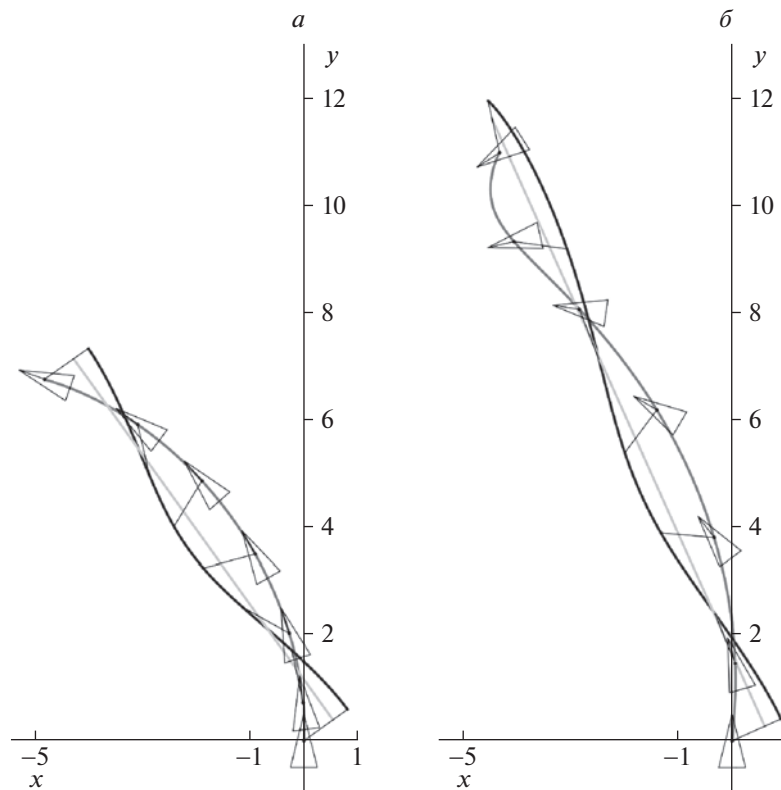


Рис. 3. Траектории точек системы в горизонтальной плоскости при совершении поворота

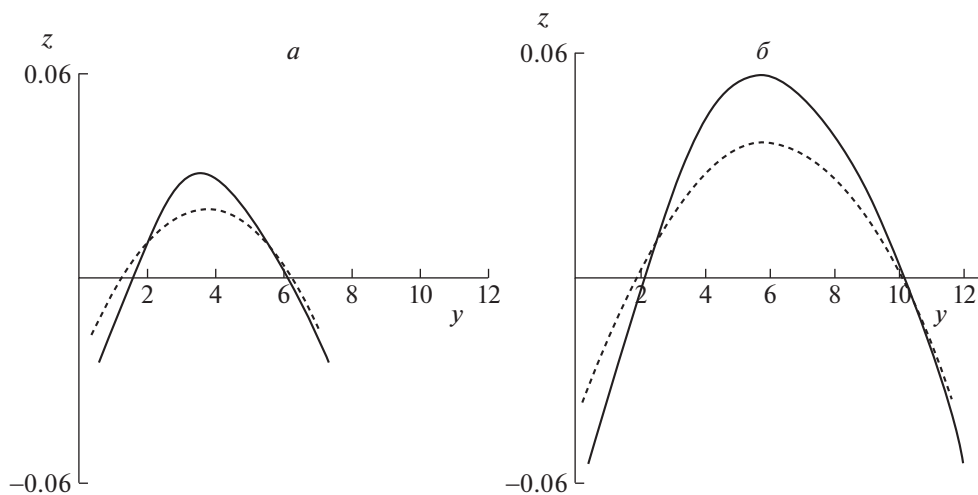


Рис. 4. Траектории точек системы в вертикальной плоскости при совершении поворота

5.2. Т р а е к т о р и я к о р п у с а. Рассмотрим траекторию центра масс на плоскости  $xy$  во время фазы полета. Рисунки 3, 4 иллюстрируют движение вибрационного робота в горизонтальной и вертикальных плоскостях соответственно при:

а)  $\varphi_0 = 35.69^\circ$ ,  $\psi = 88^\circ$ , выбранных из условий (3.8) и (4.4); угол поворота корпуса при этих параметрах составляет  $70^\circ$ ;

б)  $\varphi_0 = 24^\circ$ ,  $\psi = 86^\circ$ , не соответствующих условиям (3.8) и (4.4); в этом случае корпус поворачивает вокруг вертикали на  $127.5^\circ$ .

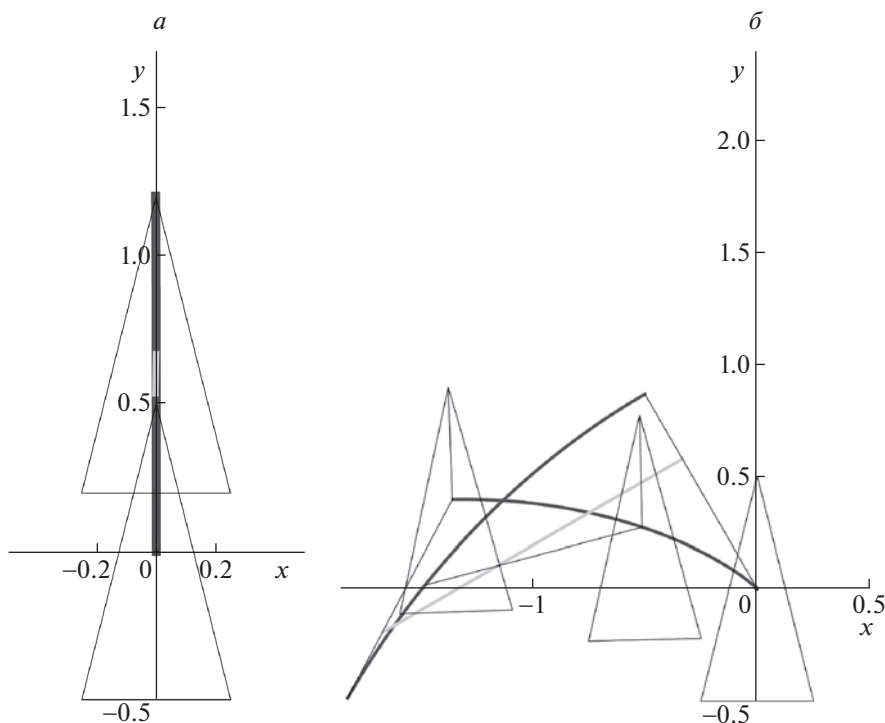


Рис. 5. Траектории точек системы в горизонтальной плоскости при  $\varphi_0 > \pi/2$

Черным цветом представлены траектории центра масс корпуса  $S$ , серым — траектории дебаланса  $C$ , пунктиром — траектории центра масс системы. При отсутствии контакта с опорой на систему действует единственная внешняя по отношению к ней сила — сила тяжести. Однако проекция этой силы на горизонтальную плоскость нулевая, в связи с чем центр масс системы в плоскости  $xu$  движется по инерции равномерно и прямолинейно.

Еще одна особенность рассматриваемой системы заключается в том, что выбор параметров, отвечающих остановке вибрационного робота после поворота, обеспечивает постоянную ориентацию корпуса вдоль касательной к траектории точки  $S$  (рис. 3, *a*). Результат проверен численно для возможных углов поворотов  $\gamma_*$  в диапазоне  $(0, 71.1^\circ]$ .

Однако если параметры  $\varphi_0, \psi$  не соответствуют условиям (3.8) и (4.4), то корпус будет отклоняться от касательной к траектории точки  $S$  и в конце фазы полета направление скорости его центра масс будет отлично от ориентации вибрационного робота (рис. 3, *b*).

На рис. 4 представлены проекции точек системы на вертикальную плоскость. Под действием силы тяжести центр масс системы движется по параболе с ускорением  $-g\vec{e}_z$ . Наивысшая точка траектории достигается в момент прохождения дебалансом положения  $\varphi = \pi$ .

Любопытно, что если  $\varphi_0 > \pi/2$ , то центр масс всей системы движется назад относительно корпуса, а сам корпус смещается в положительном направлении по оси  $y$ , хотя и на малое расстояние. Так, наибольшее смещение достигается при вертикальном положении рамки (рис. 5, *a*), а наибольший угол поворота не превосходит  $8^\circ$  и реализуется при горизонтальном положении рамки (рис. 5, *b*). Из вида поверхности на рис. 2 следует, что на описанном классе движений поворот робота несовместим с остановкой после завершения фазы полета.

**Заключение.** Рассмотрено плоскопараллельное движение в поле силы тяжести вибрационного робота, представленного корпусом, дебалансом, закрепленным в центре корпуса, и двумя однородными маховиками. Плоскость вращения дебаланса может быть отклонена от вертикали на фиксированный угол. Управление роботом происходит за счет выбора углового ускорения дебаланса и маховиков. В результате работы была построена математическая модель движения робота, и для него были найдены шесть режимов управления, которые реализуют поворот робота на некоторый угол.

Представлен параметрический анализ системы, в рамках которого продемонстрирована зависимость угла поворота корпуса от начального положения дебаланса и установочного угла рамки в фазе полета. Показано, что поворот корпуса сопряжен с общим смещением корпуса в продольном и боковом направлениях. При этом возможность выбора параметров, обеспечивающих полную остановку корпуса после поворота, доказана аналитически. Также оценен максимальный угол поворота робота, после которого его корпус останавливается.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. 2006. № 6. Т. 70. С. 915–941.
2. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
3. Yan Y., Zhang B., Chávez J.P., Liu Y. Optimising the Locomotion of a Vibro-impact Capsule Robot Self-propelling In the Small Intestine // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2022. № 1. V. 3. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-81170-9\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-81170-9_12)
4. Liao M., Zhang J., Liu Y., Zhu D. Speed Optimisation and Reliability Analysis of a Self-propelled Capsule Robot Moving in an Uncertain Frictional Environment // Intern. J. Mechanical Sciences. 2022. V. 221. № 107156. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107156>.
5. Черноусько Ф.Л., Шматков А.М. Оптимальное управление поворотом твердого тела при помощи внутренней массы // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 3. С. 10–23. <https://doi.org/10.1134/S0002338819030065>
6. Черноусько Ф.Л. Об использовании нескольких подвижных масс для переориентации тела // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2022. Т. 503. № 1. С. 52–56.
7. Nuniparov A., Becker F., Bolotnik N. et al. Dynamics and Motion Control of a Capsule Robot with an Opposing Spring. Arch Appl Mech. 2019 V. 89. P. 2193–2208. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01571-8>.
8. Досаев М.З., Климина Л.А., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Плоскопараллельное движение робота-змеи при наличии анизотропного сухого трения и единственного управляющего сигнала // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5. С. 134–143. <https://doi.org/10.31857/S0002338822050067>
9. Черноусько Ф.Л. Управление движением многозвенников на шероховатой плоскости // Тр. ИММ УрО РАН. 2000. Т. 6. № 1. С. 277–287.
10. Ветчанин Е.В., Килин А.А. Свободное и управляемое движение в жидкости тела с подвижной внутренней массой при наличии циркуляции вокруг тела // ДАН. 2016. Т. 466. № 3. С. 293–297.
11. Килин А.А., Кленов А.И., Тенев В.А. Управление движением тела с помощью внутренних масс в вязкой жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10. № 4. С. 445–460.
12. Pollard B., Tallapragada P. Passive Appendages Improve the Maneuverability of Fishlike Robots // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2019. V. 24. № 4. P. 1586–1596.
13. Волкова Л.Ю., Яцун С.Ф. Управление движением трехмассового робота, перемещающегося в жидкой среде // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 4. С. 845–857.
14. Tallapragada P., Gandra C. A Mobile Mathieu Oscillator Model for Vibrational Locomotion of a Bristlebot // J. Mechanisms and Robotics. 2021. V. 13. № 5. P. 054501.
15. Кугушев Е.И., Попова Т.В., Сазонов С.В. О движении системы с перемещающимся внутренним элементом при наличии внешнего вязкого трения // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2020. № 5. С. 50–56.
16. Фигурина Т.Ю. Оптимальное управление системой материальных точек на прямой с сухим трением // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 3–9.
17. Болотник Н.Н., Губко П.А., Фигурина Т.Ю. О возможности безреверсного периодического прямолинейного движения системы двух тел на шероховатой плоскости // ПММ. 2018. Т. 82. № 2. С. 138–148.
18. Черноусько Ф.Л. Плоские движения тела, управляемого при помощи подвижной массы // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 494. № 1. С. 69–74.
19. Иванов А.П., Сахаров А.В. Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 4. С. 763–772.
20. Бардин Б.С. О безударных прыжках тела, несущего подвижные массы // Матер. XVIII Междунар. симпоз. “Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем” DYVIS-2015. М., 2015. С. 42–49.
21. Голицына М.В. Периодический режим движения вибрационного робота при ограничении по управлению // ПММ. 2018. № 1. С. 627–636.
22. Dosaev M., Samsonov V., Holub A. Plane-Parallel Motion of a Friction-Powered Robot Moving Along a Rough Horizontal Plane // Advances in Mechanism and Machine Science. IFToMM WC 2019. Mechanisms and Machine Science 73. Cham: Springer, 2019.

23. *Dosaev M., Samsonov V., Hwang S.* Construction of Control Algorithm in the Problem of the Planar Motion of a Friction-powered Robot with a Flywheel and an Eccentric Weight // *Applied Mathematical Modelling* 2021. V. 89. Pt 2. P. 1517–1527.
24. *Dosaev M.* Algorithm for Controlling an Inertoid Robot with a Flywheel and an Unbalance in Conditions of Restrictions on the Angular Acceleration of the Unbalance // *Applied Mathematical Modelling*. 2022. V. 109. P. 797–807. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.05.021>.
25. *Сахаров А.В.* Поворот тела без внешних движителей при помощи ротора // *Тр. МФТИ*. 2014. Т. 6. № 2. С. 80–91.
26. *Сахаров А.В.* Поворот тела с двумя подвижными внутренними массами на шероховатой плоскости // *ПММ*. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 196–209.
27. *Черноусько Ф.Л.* Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // *ДАН*. 2016. Т. 470. № 4. С. 406–410.
28. *Черноусько Ф.Л.* Управление плоскими движениями тела при помощи подвижной массы // *ПММ*. 2021. Т. 85. Вып. 4. С. 414–425.
29. *Huda M.N., Yu H.* Modelling and Motion Control of a Novel Double Parallel Mass Capsbot // *IFAC Proceedings Volumes*. 2011. V. 44. Iss. 1. P. 8120–8125.
30. *Semendyaev S.V., Tsyganov A.A.* Model and Investigation of Dynamics of Solid System with Two Massive Eccentrics on a Rough Plane // *ECCOMAS Congress. Proc. 7th Europ. Cong. Comp. Meth. in Appl. Sci. and Eng. Crete, 2016*. V. 3. P. 4572–4583.
31. *Semendyaev S.V.* Solid System with Two Massive Eccentrics on a Rough Plane: Rotational Case // *IFAC-PapersOnLine*. 2018. V. 51 (2). P. 884–889.
32. *Zhan X., Xu J., Fang H.* Planar Locomotion of a Vibration-driven System with Two Internal Masses // *Applied Mathematical Modelling*. 2016. V. 40. № 2. P. 871–885.
33. *Zhan X., Xu J., Fang H.* A Vibration-driven Planar Locomotion Robot Shell // *Robotica* 2018. V. 36. № 9. P. 1402–1420.
34. *Klimina L.A.* Rotational Modes of Motion for an Aerodynamic Pendulum with a Vertical Rotation Axis // *Moscow Univ. Mech. Bull.* 2009. V. 64. P. 126–129. <https://doi.org/10.3103/S0027133009050069>
35. *Селюцкий Ю.Д.* Предельные циклы в динамике упруго закрепленного аэродинамического маятника // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2022. № 1. С. 133–144. <https://doi.org/10.31857/s0572329922010093>
36. *Tikhonov A.A.* Natural Magneto-velocity Coordinate System for Satellite Attitude Stabilization: The Concept and Kinematic Analysis // *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021. V. 7 (4). P. 2113–2119. <https://doi.org/10.22055/JACM.2021.37817.3094>
37. *Голицына М.В.* Анализ, управление и оптимизация движения вибрационного робота // *Кандидатская диссертация по специальности 01.02.01 — Теоретическая механика*. 2018.