

ISSN 0002-3388

Номер 3

Май - Июнь 2023

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ



www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Номер 3, 2023

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Безреверсное движение системы взаимодействующих тел
вдоль шероховатой горизонтальной прямой

Н. Н. Болотник, Т. Ю. Фигурина

3

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

Улучшение неполной многоаспектной кластеризации
тензорным восстановлением графа связности

Х. Жанг, С. Чен, Ю. Жу, И. А. Матвеев

14

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Методы и модели управления ресурсами проекта в условиях неопределенности

О. А. Косоруков, Д. В. Лемтюжникова, А. В. Мищенко

38

Оптимизация функционала риска для управления составом
и структурой разнородной группировки сенсоров обнаружения в трехмерном пространстве

В. А. Дюков, А. М. Казанцев, И. Ю. Макушев, М. С. Путилин, А. В. Тимошенко

57

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Обучение с подкреплением для модельных задач оптимального управления

С. С. Семенов, В. И. Цурков

76

Восстановление структурной информации об антропогенных объектах
из одиночных аэрокосмических изображений

Н. В. Антипова, О. Г. Гвоздев, В. А. Козуб, А. Б. Мурынин, А. А. Рихтер

90

СЛОЖНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ

Оценивание углового положения летательного аппарата на основе
измерений параметров его линейного движения

О. Н. Корсун, А. В. Стуловский

106

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

Обобщение формулы Резерфорда и синтез траекторий
с гравитационными маневрами

Ю. Ф. Голубев, А. В. Грушевский, В. В. Корянов, А. Г. Тучин, Д. А. Тучин

120

Аналитический синтез управления по выходу боковым движением
воздушного судна при отсутствии измерений углов скольжения и крена

Н. Е. Зубов, Е. Ю. Зыбин, А. В. Лапин

133

Управление движением многоцелевого лабораторного модуля
с помощью двигательной установки

А. В. Сумароков

141

РОБОТОТЕХНИКА

Управление мобильным робототехническим комплексом
для обслуживания вертикальных поверхностей

М. Алхаддад, В. Г. Чащухин

156

УПРАВЛЕНИЕ
В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 62-50

**БЕЗРЕВЕРСНОЕ ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ ВДОЛЬ ШЕРОХОВАТОЙ
ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ¹**

© 2023 г. Н. Н. Болотник^{а,*}, Т. Ю. Фигурин^{а,**}

^аИПМех РАН, Москва, Россия

*e-mail: bolotnik@ipmnet.ru

**e-mail: t_figurina@mail.ru

Поступила в редакцию 15.11.2022 г.

После доработки 21.01.2023 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Рассматривается локомоционная система в виде цепочки конечного числа тел (материальных точек), движущихся по прямой на горизонтальной шероховатой плоскости за счет сил взаимодействия между телами. Эти силы служат управляющими переменными. Между телами и плоскостью действует сухое кулоново трение. Получены необходимые и достаточные условия, при которых возможно безреверсное перемещение всех тел системы на одно и то же расстояние в предположении, что в начальном и конечном положениях скорости всех тел равны нулю. Под безреверсным движением понимается движение, при котором ни одно из тел не изменяет направления своей скорости в процессе перемещения.

DOI: 10.31857/S0002338823030022, EDN: EUDCXT

Введение. Объект исследования данной работы — локомоционные системы, выполненные в виде цепочек тел, последовательно соединенных друг с другом призматическими (поступательными) шарнирами. Тела системы взаимодействуют между собой и с внешней средой. Силы взаимодействия тел, внутренние по отношению к рассматриваемой механической системе, играют роль управляющих переменных. Силы взаимодействия тел с внешней средой (силы трения) являются внешними силами. Управляющие силы изменяют скорости тел системы относительно среды, благодаря чему изменяются силы трения, действующие на эти тела. Таким образом, управляя внутренними силами, можно управлять внешними силами, что позволяет контролировать движение цепочки тел как целого, перемещая ее на произвольное расстояние в различных режимах, в частности так, что расстояния между телами и скорости этих тел относительно среды изменяются периодически.

Рассматриваемые системы относятся к широкому классу локомоционных (мобильных) систем с изменяемой конфигурацией, которые могут перемещаться в сопротивляющихся средах без специальных движителей (ног, колес, гусениц, гребных винтов и т.п.) за счет изменения относительного положения тел, составляющих систему, при неизменных областях контакта этих тел со средой. Управление такими системами осуществляется внутренними силами, посредством которых тела взаимодействуют друг с другом. Многие системы с изменяемой конфигурацией имитируют движение различных животных, которые не имеют конечностей и перемещаются за счет изменения формы своего тела (змеи, черви, некоторые виды рыб и земноводных). К системам этого класса в настоящее время наблюдается растущий интерес ученых в области механики (в частности, биомеханики) и управления, а также инженеров, занимающихся созданием мобильных роботов. Систематические исследования проблем управления мобильными системами с изменяемой конфигурацией, ориентированные на технические приложения, инициированы работами [1–4] и в настоящее время активно ведутся в России [5–14], Китае [15–17], Германии [18, 19], Великобритании [20–24] и ряде других стран. Упомянутые работы не отражают всего разнообразия исследований по этой тематике. Проблемам динамики и управления

¹ Работа выполнена в соответствии с государственным заданием АААА-А20-120011690138-6 при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 20-01-00378-а; 21-51-12004-ННИО).

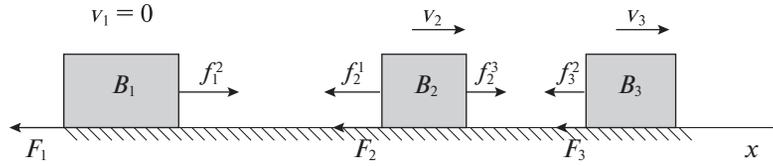


Рис. 1. Механическая система.

движением мобильных систем с изменяемой конфигурацией посвящена монография [5], в которой, в частности, дан обзор российских и зарубежных публикаций и приведен их библиографический список.

В статье рассматривается цепочка из произвольного конечного числа тел, перемещающаяся поступательно вдоль прямой по шероховатой горизонтальной плоскости. Между телами и плоскостью перемещения действует сухое кулоново трение. Массы тел и коэффициенты их трения о плоскость перемещения в общем случае различны. Динамике, управлению движением и оптимизации режимов перемещения цепочек тел вдоль прямой посвящены работы [25–36]. Для цепочек тел, перемещающихся вдоль прямой с сухим трением, важна возможность движения в безреверсном режиме, при котором ни одно из тел системы не изменяет направление скорости своего движения. Основное преимущество безреверсного движения состоит в том, что оно обеспечивает абсолютный минимум затрат энергии на компенсацию работы сил сухого трения при перемещении цепочки между любыми двумя заданными положениями на прямой. Проблема существования безреверсного движения была поставлена и решена в [36] для системы двух тел при дополнительном условии, что расстояние между телами и их скорости изменяются периодически. Доказано, что безреверсное периодическое движение системы двух тел возможно, если и только если силы трения скольжения тел различны и масса тела с большей силой трения скольжения не больше массы тела с меньшей силой трения скольжения. Это условие, в частности, не допускает безреверсного периодического движения системы двух тел с одинаковыми коэффициентами сухого трения о плоскость перемещения. В настоящей работе для цепочки, состоящей из произвольного конечного числа тел, решается задача о безреверсном перемещении всех тел на одно и то же расстояние при условии, что в начальном и конечном положениях скорости всех тел равны нулю. Доказываются необходимые и достаточные условия реализуемости требуемого режима перемещения.

1. Постановка задачи. Рассматривается система n взаимодействующих тел B_1, \dots, B_n , $n \geq 3$, движущихся поступательно вдоль прямой по горизонтальной плоскости при наличии сухого кулонова трения между телами и плоскостью. Тела моделируются материальными точками. Обозначим: m_i – масса тела B_i ; x_i – координата тела B_i на прямой движения системы; v_i – скорость тела B_i ; f_i^j – сила, приложенная к телу B_i телом B_j ; F_i – сила сухого кулонова трения, действующая на тело B_i ; k_i – коэффициент сухого трения между плоскостью и телом B_i ; g – ускорение силы тяжести. Описанная механическая система изображена на рис. 1 для случая трех тел, $n = 3$.

На относительные положения тел никаких ограничений не налагается.

Согласно третьему закону Ньютона, для сил f_j^i взаимодействия между телами имеет место равенство

$$f_j^i = -f_i^j, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j. \quad (1.1)$$

Для удобства будем использовать это соотношение и при $i = j$, что не приведет к ошибке, поскольку из (1.1) при $i = j$ получаем $f_i^i = 0$, $i = \overline{1, n}$, т.е. тела не взаимодействуют сами с собой.

В дальнейшем будем считать, что хотя бы один из коэффициентов трения k_i не равен нулю. Если все $k_i = 0$, то внутренними силами невозможно вывести центр масс системы из состояния покоя. Занумеруем тела в порядке невозрастания произведений их масс на коэффициенты трения о плоскость движения:

$$k_1 m_1 \geq k_2 m_2 \geq \dots \geq k_n m_n. \quad (1.2)$$

Динамика описанной механической системы подчиняется совокупности дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = v_i, \quad m_i \dot{v}_i = \sum_{j=1}^n f_i^j + F_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.3)$$

Без ограничения общности можно считать, что каждое из тел $B_i, i = \overline{2, n-1}$, взаимодействует с двумя телами B_{i-1} и B_{i+1} , тело B_1 взаимодействует только с телом B_2 , а тело B_n — только с телом B_{n-1} . При этом систему тел можно представлять в виде цепочки тел, каждое из “внутренних” тел которой взаимодействует только с двумя соседними телами, а крайние тела — только с одним соседним телом. Это утверждение следует из того, что для любой совокупности сил взаимодействия между каждой парой тел $f_i^j, i, j = \overline{1, n}$, существует совокупность сил взаимодействия между соседними телами $\tilde{f}_i^{i+1}, i = \overline{1, n-1}$, такая, что суммарная сила, действующая на любое из тел, одинакова, а именно

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n f_1^j &= \tilde{f}_1^2, \\ \sum_{j=1}^n f_i^j &= \tilde{f}_i^{i-1} + \tilde{f}_i^{i+1}, \quad i = \overline{2, n-1}, \\ \sum_{j=1}^n f_n^j &= \tilde{f}_n^{n-1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

С учетом равенств $\tilde{f}_i^{i+1} = -\tilde{f}_{i+1}^i$, вытекающих из третьего закона Ньютона, из системы уравнений (1.4) однозначно находим

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1^2 &= \sum_{j=1}^n f_1^j, \\ \tilde{f}_i^{i+1} &= \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^n f_k^j, \quad i = \overline{2, n-1}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Сделав подстановку (1.4) в (1.3) и опустив тильды в обозначении сил взаимодействия соседних тел, получим уравнения движения следующего вида:

$$\dot{x}_i = v_i, \quad m_i \dot{v}_i = f_i^{i-1} + f_i^{i+1} + F_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.6)$$

Здесь формально доопределены величины f_1^0, f_n^{n+1} :

$$f_1^0 = f_n^{n+1} = 0. \quad (1.7)$$

Сила сухого кулонова трения подчиняется соотношениям

$$F_i = \begin{cases} -k_i m_i g \operatorname{sign} v_i, & v_i \neq 0, \\ -(f_i^{i-1} + f_i^{i+1}), & v_i = 0, \quad |f_i^{i-1} + f_i^{i+1}| \leq k_i m_i g, \\ -k_i m_i g \operatorname{sign}(f_i^{i-1} + f_i^{i+1}), & v_i = 0, \quad |f_i^{i-1} + f_i^{i+1}| > k_i m_i g. \end{cases} \quad (1.8)$$

Для описанной механической системы поставим задачу управления.

Задача. Управляя силами взаимодействия тел $f_i^{i+1}(t), i = \overline{1, n-1}$, привести систему (1.6)–(1.8) из начального состояния

$$x_i(0) = 0, \quad v_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.9)$$

за конечное (заранее не фиксированное) время T в терминальное состояние

$$x_i(T) = L, \quad v_i(T) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad L > 0, \quad (1.10)$$

при условии, что тела не изменяют направления своего движения:

$$v_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T]. \quad (1.11)$$

Ограничений на управляющие силы $f_j^{i+1}(t)$ не налагается, допускается мгновенное (ударное) взаимодействие тел, при котором скорости тел меняются скачком.

Таким образом, в задаче требуется перевести систему тел в безреверсном режиме (ни одно из тел не изменяет направления своего движения) из начального состояния покоя в конечное состояние покоя при условии тождественности ее конфигурации в начальном и конечном состояниях (все тела перемещаются на одно и то же расстояние L). Предположение о равенстве нулю координат всех тел в начальном состоянии не ограничивает общности. Если $x_i(0) = x_i^0 \neq 0$, то заменой переменной $x'_i = x_i - x_i^0$, относительно которой уравнения движения (1.6)–(1.8) инвариантны, достигается равенство $x'_i(0) = 0$. Предположение о равенстве нулю скоростей всех тел системы в начальном и конечном состояниях ограничивает общность и вводится для простоты.

Эту задачу можно рассматривать как частный (с условием обращения в нуль скоростей всех тел в некоторый момент времени) случай задачи о периодическом безреверсном перемещении системы тел. Так как уравнения движения системы инвариантны к сдвигу времени, движение, являющееся решением поставленной задачи, можно продолжить на бесконечное время, при этом скорости всех тел будут T -периодическими функциями времени и за каждый период все тела будут перемещаться на одно и то же расстояние L .

Безреверсный периодический режим движения возможен не всегда. Так, в [36] показано, что при $n = 2$ периодический безреверсный режим возможен, если и только если $m_1 k_1 > m_2 k_2$ и $m_1 \leq m_2$ или $m_1 k_1 < m_2 k_2$ и $m_1 \geq m_2$. Решение задачи включает определение условий, при которых безреверсный режим движения возможен при $n \geq 3$.

2. Частный случай. Предположим, что выполнено неравенство

$$k_1 m_1 < \sum_{j=2}^n k_j m_j, \quad (2.1)$$

из которого с учетом (1.2) вытекают неравенства

$$m_i k_i < \sum_{j \neq i} m_j k_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Тогда безреверсное перемещение системы из состояния (1.9) в состояние (1.10) возможно, причем это перемещение можно осуществить многими способами. Приведем один из них.

При выполнении соотношения (2.1) любое тело B_i , $i = \overline{1, n}$, может при покоящихся остальных телах двигаться в положительном направлении, разгоняясь с ускорением w_i^+ или замедляясь с ускорением $-w_i^-$, где

$$\begin{aligned} w_i^+ &= \frac{1}{m_i} \left(\sum_{j \neq i} m_j k_j g - m_i k_i g \right), \\ w_i^- &= \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^n m_j k_j g. \end{aligned} \quad (2.3)$$

При этом на движущееся тело со стороны покоящихся тел действует суммарная сила, равная по абсолютной величине сумме максимально возможных для этих тел сил трения покоя; поэтому w_i^+ и w_i^- есть максимально возможные абсолютные величины ускорения тела B_i при его разгоне и торможении соответственно.

Силы взаимодействия тел, f_j^{j+1} , $j = \overline{1, n-1}$, реализующие разгон тела B_i с ускорением w_i^+ , определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 f_j^{j-1} &= \sum_{s=1}^{j-1} m_s k_s g, \quad j \leq i, \\
 f_j^{j+1} &= \sum_{s=j+1}^n m_s k_s g, \quad j \geq i.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Силы, обеспечивающие торможение тела B_i с ускорением $-w_i^-$, отличаются от сил (2.4) знаком.

Будем перемещать тела B_i по очереди. Вначале будем перемещать тело B_n , используя следующий закон движения:

$$\ddot{x}_n = w_n^+, \quad 0 \leq t < \tau_n; \quad \ddot{x}_n = -w_n^-, \quad \tau_n \leq t \leq T_n.
 \tag{2.5}$$

Для определения параметров τ_n и T_n нужно решить дифференциальное уравнение (2.5) с начальными условиями $x_n(0) = 0, \dot{x}_n(0) = 0$ и полученное решение $x_n(t)$ подчинить терминальным условиям $x_n(T_n) = L, \dot{x}_n(T_n) = 0$.

Затем будем перемещать тело B_{n-1} так, что:

$$\ddot{x}_{n-1} = w_{n-1}^+, \quad T_n \leq t < T_n + \tau_{n-1},
 \tag{2.6}$$

$$\ddot{x}_{n-1} = -w_{n-1}^-, \quad T_n + \tau_{n-1} \leq t \leq T_n + T_{n-1}.
 \tag{2.7}$$

Аналогично по очереди переместим все тела. Длительность этапа разгона τ_i и общее время движения T_i тела B_i определяются формулами

$$\tau_i = \sqrt{\frac{2Lw_i^-}{w_i^+(w_i^- + w_i^+)}} \quad T_i = \sqrt{\frac{2L(w_i^- + w_i^+)}{w_i^+w_i^-}}, \quad i = \overline{1, n}.
 \tag{2.8}$$

Таким образом, безреверсное движение системы в случае (2.1) построено.

3. Решение задачи в общем случае. Рассмотрим теперь общий случай, при котором неравенство (2.1) может быть не выполнено. Обозначим через x и $v = \dot{x}$ координату и скорость центра масс системы, через p – суммарный импульс системы, а через M – суммарную массу тел:

$$x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad v = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i v_i, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i, \quad p = Mv.
 \tag{3.1}$$

Л е м м а. Решение задачи существует тогда и только тогда, когда оно существует в классе переменных движений тел, таких, что в каждый момент времени одно из тел движется, а все остальные покоятся.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задано безреверсное движение $x_i(t), t \in [0, T], i = \overline{1, n}$, решающее задачу. Рассмотрим интервал времени $[t_1, t_2] \in [0, T]$, такой, что каждое из тел либо покоится, либо движется на всем этом интервале. Построим на этом интервале другое безреверсное движение системы, такое, что тела движутся по очереди, скорости всех тел в моменты времени t_1 и t_2 совпадают в исходном и построенном движениях и каждое из тел проходит одинаковое расстояние в исходном и построенном движениях. Перенумеруем тела так, что тела $B_i, i = \overline{1, \tilde{n}}$, покоятся, а тела $B_j, j = \overline{\tilde{n} + 1, n}$, движутся с положительной скоростью. По-прежнему будем считать, что взаимодействуют только пары тел с соседними номерами. Обозначим через Δx_j расстояния, пройденные телами B_j на интервале времени $[t_1, t_2]$. Для системы подвижных тел $B_j, j = \overline{\tilde{n} + 1, n}$, внешними являются только силы трения и сила, действующая на тело $B_{\tilde{n}+1}$ со стороны тела $B_{\tilde{n}}$. Поскольку тела $B_i, i = \overline{1, \tilde{n}}$, неподвижны, то импульс всей системы подчиняется уравнению

$$\dot{p} = f_{\tilde{n}+1}^{\tilde{n}} - \sum_{j=\tilde{n}+1}^n k_j m_j g.
 \tag{3.2}$$

Построим безреверсное движение, при котором тела движутся попеременно, т.е. в каждый момент времени движется только одно тело, а все остальные покоятся. Передадим в момент времени t_1 весь импульс системы телу B_n ; в этот момент времени скорости всех тел, кроме B_n , стано-

вятся равными нулю. На интервале $[t_1, t_1 + \tau_n]$ зададим силы взаимодействия тел следующим образом. Силы $f_i^{i+1}(t)$, $i = 1, \dots, \tilde{n}$, действующие между телами, неподвижными в исходном движении, а также между телом $B_{\tilde{n}}$ и телом $B_{\tilde{n}+1}$, оставим неизменными. Остальные силы определим так:

$$f_{i+1}^i = f_{\tilde{n}+1}^{\tilde{n}} - \sum_{j=\tilde{n}+1}^i k_j m_j g, \quad i = \overline{\tilde{n}+1, n-1}. \quad (3.3)$$

При этом сила, действующая на тело B_i со стороны соседних тел, вычисляется как

$$f_i^{i+1} + f_i^{i-1} = k_i m_i g, \quad i = \overline{\tilde{n}+1, n-1},$$

а соответствующая сила трения равна $F_i = -k_i m_i g$, поэтому все тела B_i , $i = \overline{\tilde{n}+1, n-1}$, остаются в состоянии покоя на интервале $[t_1, t_1 + \tau_n]$.

Сила, действующая на тело B_n со стороны тела B_{n-1} , имеет вид

$$f_n^{n-1} = f_{\tilde{n}+1}^{\tilde{n}} - \sum_{j=\tilde{n}+1}^{n-1} k_j m_j g. \quad (3.4)$$

Поскольку сила трения, действующая на B_n , равна $-k_n m_n g$, а все остальные тела, кроме B_n , покоятся, получаем, что уравнение для импульса системы в построенном движении совпадает с уравнением (3.2). Определим длительность τ_n движения тела B_n . В качестве момента времени $t_1 + \tau_n$ выберем момент, в который путь, пройденный телом B_n , будет равен Δx_n . Такой момент времени существует. Действительно, импульс системы $p(t)$ построенного движения совпадает с импульсом исходного движения. Поскольку в исходном движении центр масс на интервале времени $[t_1, t_2]$ перемещается на расстояние

$$\Delta x = \frac{1}{M} \sum_{i=\tilde{n}+1}^n m_i \Delta x_i, \quad (3.5)$$

а в новом движении центр масс перемещается на расстояние Δx^* , меньшее, чем Δx :

$$\Delta x^* = \frac{1}{M} m_n \Delta x_n < \Delta x, \quad (3.6)$$

то момент времени, в который тело B_n проходит путь Δx_n , существует и принадлежит интервалу $[t_1, t_2]$.

В момент времени $t_1 + \tau_n$ передадим мгновенно импульс телу B_{n-1} и на интервале времени $[t_1 + \tau_n, t_1 + \tau_n + \tau_{n-1}]$ все тела, кроме B_{n-1} , будут покоиться, а тело B_{n-1} будет двигаться вперед. Повторяя почти дословно рассуждения, с помощью которых была доказана возможность перемещения тела B_n на расстояние Δx_n за время τ_n , меньшее, чем $t_2 - t_1$, можно показать, что тело B_{n-1} может быть перемещено на расстояние Δx_{n-1} за время τ_{n-1} , меньшее, чем $t_2 - t_1 - \tau_n$. Будем передавать импульс последовательно телам B_{n-2} , B_{n-3} и т.д. до тела $B_{\tilde{n}+1}$. Получим, что к моменту времени t_2 каждое из тел B_j , $j = \overline{\tilde{n}+1, n}$, проходит расстояние Δx_j , такое же, как и в исходном движении. Импульс системы p на интервалах движения каждого из тел подчиняется уравнению (3.2) и на всем отрезке $[t_1, t_2]$ совпадает с импульсом в исходном движении, поэтому можно перераспределить его между телами в момент времени t_2 , так чтобы и скорости тел в момент времени t_2 совпадали со скоростями в исходном движении. Таким образом, на интервале $[t_1, t_2]$ построено безреверсное движение системы тел, такое, что тела движутся по очереди, при этом каждое из них проходит то же расстояние, что и в исходном движении, и скорости каждого из тел в построенном и исходном движениях совпадают в момент времени t_1 , а также в t_2 .

Разобьем интервал движения системы $[0, T]$ на сумму конечного числа непересекающихся отрезков $[t_1^j, t_2^j]$, таких, что на каждом из этих отрезков каждое тело либо движется, либо покоится на всем отрезке. Получим, что на каждом из этих отрезков, а значит, и на всем отрезке $[0, T]$ ис-

ходное движение может быть заменено на безреверсное движение, в котором тела движутся поочередно.

Безреверсность попеременного движения тел следует из того, что по построению импульс системы в таком движении совпадает с импульсом системы в исходном движении. Этот импульс неотрицателен, поскольку исходное движение безреверсное и скорости движущихся тел положительны. Поэтому и при попеременном движении импульс движущегося тела положителен и тела перемещаются в одном и том же (положительном) направлении, что и означает безреверсность.

Итак, для каждого движения, решающего задачу, существует движение, решающее задачу, в котором тела движутся попеременно. Лемма доказана.

Будем искать решение задачи о безреверсном движении в классе попеременных движений тел системы, таких, что в каждый момент времени движется одно тело, а все остальные тела покоятся. Рассмотрим вспомогательную задачу о максимизации импульса системы для попеременных движений.

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть существует движение, приводящее систему (1.6)–(1.8) из начального состояния

$$x_i(0) = 0, \quad v_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.7}$$

за конечное (заранее не фиксированное) время T_1 в терминальное состояние

$$x_i(T_1) = a_i, \quad a_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.8}$$

при условии, что тела движутся поочередно и не изменяют направления своего движения:

$$v_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T_1]. \tag{3.9}$$

Тогда максимальный импульс системы p_{\max} в конечный момент движения системы, берущийся по всем таким возможным движениям, удовлетворяет соотношению

$$p_{\max}^2 = 2g \sum_{i=1}^n m_i a_i \left(\sum_{s \neq i} k_s m_s - k_i m_i \right). \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим движение системы, удовлетворяющее условиям (3.7)–(3.9). Пусть каждое из тел B_i в этом движении движется α_i раз, смещаясь на расстояния a_i^j , $j = \overline{1, \alpha_i}$, причем

$$\sum_{j=1}^{\alpha_i} a_i^j = a_i. \tag{3.11}$$

Пусть p_- – импульс системы в начале одного из таких движений, а p_+ – импульс в конце этого движения. Найдем максимум p_+ при заданном p_- и заданном смещении a_i^j . Максимальная суммарная сила, приложенная к телу B_i со стороны всех остальных покоящихся тел, равна сумме максимальных сил трения покоя этих тел, при этом движение тела B_i подчиняется уравнению

$$m_i \dot{v}_i = \sum_{s \neq i} k_s m_s g - k_i m_i g. \tag{3.12}$$

При таком движении импульсы системы в конце и начале движения связаны соотношением

$$p_+^2 = 2gm_i a_i^j \left(\sum_{s \neq i} k_s m_s - k_i m_i \right) + p_-^2. \tag{3.13}$$

Это соотношение следует из теоремы об изменении кинетической энергии. Формула (3.13) дает выражение для максимально возможного значения p_+ , при заданном значении p_- и заданном расстоянии a_i^j , пройденном телом B_i . Заметим, что значение p_+ монотонно возрастает при возрастании p_- . Максимизируем аналогично описанному выше импульс на правом конце каждого из интервалов времени движения каждого из тел при заданном значении его импульса на левом конце. При этом каждое из тел на каждом отрезке своего движения будет двигаться вправо с максимально возможным ускорением. Состыкуем полученные движения, полагая импульс системы

в начале каждого следующего отрезка равным импульсу в конце предыдущего отрезка. Получим при условии $p(0) = 0$, что импульс в конце движения будет равен

$$p^2 = 2g \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^{\alpha_j} a_i^j \left(\sum_{s \neq i} k_s m_s - k_i m_i \right). \quad (3.14)$$

С учетом равенства (3.11) имеем

$$p^2 = p_{\max}^2 = 2g \sum_{i=1}^n m_i a_i \left(\sum_{s \neq i} k_s m_s - k_i m_i \right). \quad (3.15)$$

Заметим, что из данного равенства следует, что порядок чередования движения тел не важен. Не важно также, сколько раз движется каждое из тел. Максимизация импульса в конце движения при заданном порядке чередования движущихся тел и заданных расстояниях, пройденных телами, приводит к одному и тому же результату, зависящему только от суммарных расстояний a_i , пройденных телами. Поэтому можно менять порядок движения тел; в частности, можно считать, что каждое из тел движется один раз. Единственное ограничение на порядок движения тел состоит в том, что импульс системы не должен, в силу требования безреверсности движения тел, быть меньше нуля. Это может произойти, только когда движется тело B_1 , у которого значение произведения массы на коэффициент трения максимально (1.2); при этом импульс системы $p(t)$ может убывать со временем. Чтобы избежать такой ситуации, достаточно считать, что тело B_1 движется последним. В этом случае из неотрицательности импульса системы при $t = T_1$ в построенном движении (что следует из неотрицательности импульса в исходном движении) следует неотрицательность импульса на всем отрезке движения тела B_1 . Итак, можно считать, что каждое из тел движется за все время движения один раз, причем тело B_1 движется последним.

Таким образом, показано, что максимальное значение импульса системы в конце движения при безреверсном перемещении каждого из тел на заданное расстояние a_i удовлетворяет формуле (3.15), что и доказывает утверждение.

С л е д с т в и е 1. Систему (1.6), (1.8) можно привести из начального состояния (3.7) в терминальное состояние (3.8) при условиях безреверсного и поочередного движения тел тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^n m_i a_i \left(\sum_{s \neq i} k_s m_s - k_i m_i \right) \geq 0. \quad (3.16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если такое движение существует, то, согласно утверждению 1, существует и движение, при котором импульс в конце движения выражается формулой (3.15), что доказывает необходимость неравенства (3.16). Достаточность его доказывает построенное в утверждении 1 движение, в котором все тела движутся по одному разу и последним движется тело B_1 .

У т в е р ж д е н и е 2. Решение задачи существует тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{s \neq i} k_s m_s - k_i m_i \right) \geq 0. \quad (3.17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в (3.16) все значения a_i одинаковыми и равными L , получаем необходимость выполнения этого неравенства. Достаточность докажем, построив явно движение, решающее задачу.

Положим все величины a_i из утверждения 1 одинаковыми и равными a . Тогда систему можно за конечное время T_1 переместить на любое расстояние a так, что максимальный импульс в конце движения будет определяться формулой (3.15), где следует положить $a_i = a$, $i = \overline{1, n}$, т.е.

$$p^2(T_1) = 2g \sum_{i=1}^n m_i a \left(\sum_{s \neq i} k_s m_s - k_i m_i \right). \quad (3.18)$$

Перераспределим в момент времени T_1 импульс системы между телами так, чтобы скорости всех тел стали равными:

$$v_i(T_1) = p(T_1)/M, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.19)$$

После этого будем тормозить всю систему как единое твердое тело с силой трения, равной

$$-\sum_{i=1}^n k_i m_i g.$$

Тормозной путь S при этом определяется выражением

$$S = \frac{p^2(T_1)}{2Mg \sum_{i=1}^n k_i m_i} = \frac{a \sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{s \neq i} k_s m_s - k_i m_i \right)}{2M \sum_{i=1}^n k_i m_i}. \quad (3.20)$$

Решив уравнение $a + S = L$ с учетом последнего равенства, найдем значение a , которое обеспечивает решение исходной задачи. Утверждение доказано.

С л е д с т в и е 2. Если

$$\sum_{s \neq i} k_s m_s > k_i m_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.21)$$

то решение задачи существует.

Действительно, при условии (3.21) неравенство (3.17) выполняется, поскольку каждая из скобок в его левой части положительна. Данный случай подробно рассмотрен в разд. 2.

С л е д с т в и е 3. Если

$$\sum_{s \neq i} m_s > m_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.22)$$

то решение задачи существует.

Действительно, перегруппировав слагаемые в левой части неравенства (3.17), представим его в виде

$$\sum_{i=1}^n k_i m_i \left(\sum_{s \neq i} m_s - m_i \right) \geq 0. \quad (3.23)$$

Поскольку каждая из скобок в левой части этого неравенства положительна в силу (3.22), то неравенство (3.23) выполнено.

Неравенства (3.21) и (3.22) дают достаточные условия существования решения задачи.

Для иллюстрации использования неравенства (3.17) рассмотрим случай, в котором массы всех тел, кроме B_1 , одинаковы и равны m , тело B_1 имеет массу M и коэффициенты трения всех тел о плоскость перемещения одинаковы и равны k . Положив в (3.17)

$$\begin{aligned} m_1 &= M, & m_i &= m, & i &= \overline{2, n}, \\ k_i &= k, & i &= \overline{1, n}, \end{aligned}$$

получим неравенство

$$(M + (n-1)m)^2 - 2M^2 - 2(n-1)m^2 \geq 0, \quad (3.24)$$

выражающее необходимое и достаточное условие разрешимости задачи при сделанных допущениях. Обозначим $\mu = M/m$ и представим неравенство (3.24) в виде

$$\mu^2 - 2(n-1)\mu - (n-1)(n-3) \leq 0. \quad (3.25)$$

Решение этого неравенства относительно μ для $\mu > 0$ дает

$$\mu \leq n-1 + \sqrt{2(n-1)(n-2)}. \quad (3.26)$$

Достаточное условие разрешимости задачи, выражаемое неравенством (3.22), в данном случае имеет вид

$$\mu \leq n-1. \quad (3.27)$$

Это условие не дает полного множества значений μ , при которых задача разрешима. Полное множество значений μ , определяемое неравенством (3.26), шире множества, задаваемого неравенством (3.27).

Система двух тел ($n = 2$) также может быть исследована методами, изложенными выше для $n \geq 3$. Однако в этом случае потребуется дополнительно предположить, что $k_1 m_1 \neq k_2 m_2$, поскольку при $k_1 m_1 = k_2 m_2$ нельзя начать движение из состояния покоя так, чтобы двигалось только одно из тел; начнут двигаться оба тела, причем в противоположных направлениях. Неравенства $k_1 m_1 \neq k_2 m_2$ и (3.17) при $n = 2$ дают необходимые и достаточные условия для возможности безреверсного перемещения системы двух тел на произвольное заданное расстояние из состояния покоя так, чтобы перемещения обоих тел были одинаковыми и по окончании движения скорости тел были нулевыми. Эти условия имеют вид

$$k_1 m_1 \neq k_2 m_2, \quad (k_1 m_1 - k_2 m_2)(m_2 - m_1) \geq 0$$

и совпадают с условиями, полученными в [36].

Заключение. Решена задача о перемещении системы взаимодействующих тел из начального состояния покоя в конечное состояние покоя вдоль прямой на горизонтальной шероховатой плоскости при условии, что каждое тело перемещается на одно и то же расстояние и не изменяет направления движения (безреверсный режим). Трение между плоскостью перемещения и телами системы считается кулоновым. Управление осуществляется силами взаимодействия тел, которые являются внутренними силами по отношению к системе. Ограничения на управляющие силы не налагаются. Найдено необходимое и достаточное условие, при котором такое перемещение возможно. Данное условие выражено неравенством, в которое входят массы тел и коэффициенты трения между этими телами и плоскостью перемещения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. Движение многозвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 8–18.
2. Черноусько Ф.Л. Волнообразные движения многозвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 518–531.
3. Черноусько Ф.Л. О движении трехзвенника по плоскости // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 15–20.
4. Черноусько Ф.Л. Управляемые движения двузвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 578–591.
5. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н. Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: Физматлит, 2022.
6. Ворочаева Л.Ю., Наумов Г.С., Яцун С.Ф. Моделирование движения трехзвенного робота с управляемыми силами трения по горизонтальной шероховатой поверхности // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 156–170.
7. Ворочаева Л.Ю., Пановко Г.Я., Савин С.И., Яцун А.С. Моделирование движения пятизвенного ползающего робота с управляемым трением // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2017. № 6. С. 12–19.
8. Голицына М.В. Периодический режим вибрационного робота при ограничении по управлению // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 3–15.
9. Голицына М.В., Самсонов В.А. Оценка области допустимых параметров системы управления вибрационным роботом // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 85–101.
10. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное по энергетическим затратам движение виброробота в среде с сопротивлением // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 620–632.
11. Егоров А.Г., Захарова О.С. Энергетически оптимальное движение виброробота в среде с наследственным законом сопротивления // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 168–176.
12. Иванов А.П., Сахаров А.В. Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 4. С. 763–772.
13. Сахаров А.В. Поворот тела с двумя подвижными внутренними массами на шероховатой плоскости // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 196–209.
14. Досаев М.З., Климина Л.А., Самсонов В.А., Селютский Ю.Д. Плоскопараллельное движение робота-змеи при наличии анизотропного сухого трения и единственного управляющего сигнала // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5. С. 152–161.
15. Xu J., Fang H. Improving Performance: Recent Progress on Vibration-driven Locomotion systems // Nonlinear Dynamics. 2019. V. 98. № 4. P. 2651–2669.

16. Zhan X., Xu J., Fang H. Planar Locomotion of a Vibration-driven System with Two Internal Masses // *Applied Mathematical Modelling*. 2016. V. 40. № 2. P. 871–885.
17. Zhan X., Xu J., Fang H. A Vibration-driven Planar Locomotion Robot – Shell // *Robotica*. 2018. V. 36. № 9. P. 1402–1420.
18. Zimmermann K., Zeidis I., Behn C. *Mechanics of Terrestrial Locomotion with a Focus on Nonpedal Motion Systems*. Heidelberg: Springer, 2010.
19. Steigenberger J., Behn C. *Worm-like Locomotion Systems: an Intermediate Theoretical Approach*. Munich: Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2012.
20. Liu Y., Islam S., Pavlovskaya E., Wiercigroch M. Optimization of the Vibro-impact Capsule System // *J. Mech. Eng.* 2016. V. 62. P. 430–439.
21. Liu Y., Pavlovskaya E., Hendry D., Wiercigroch M. Vibro-impact Responses of Capsule System with Various Friction Models // *Intern. J. Mechanical Sciences*. 2013. V. 72. P. 39–54.
22. Liu Y., Pavlovskaya E., Wiercigroch M. Experimental Verification of the Vibro-impact Capsule Model // *Non-linear Dynamics*. 2016. V. 83. P. 1029–1041.
23. Liu Y., Pavlovskaya E., Wiercigroch M., Peng Z.K. Forward and Backward Motion Control of a Vibro-impact Capsule System // *Intern. J. Nonlinear Mechanics*. 2015. V. 70. P. 30–46.
24. Liu Y., Wiercigroch M., Pavlovskaya E., Yu Y. Modelling of a Vibro-impact Capsule System // *Intern. J. Mechanical Sciences*. 2013. V. 66. P. 2–11.
25. Черноусько Ф.Л. Оптимальное прямолинейное движение двухмассовой системы // *ПММ*. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 3–9.
26. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация прямолинейного движения двухмассовой системы // *ПММ*. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 707–717.
27. Фигурина Т.Ю. Оптимальное управление системой материальных точек на прямой с сухим трением // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2015. № 5. С. 3–9.
28. Черноусько Ф.Л. Поступательное движение цепочки тел в сопротивляющейся среде // *ПММ*. 2017. Т. 81. Вып. 4. С. 380–388.
29. Zimmermann K., Zeidis I., Bolotnik N., Pivovarov M. Dynamics of a Two-module Vibration-driven System Moving along a Rough Horizontal Plane // *Multibody System Dynamics*. 2009. V. 22. P. 199–219.
30. Zimmermann K., Zeidis I., Pivovarov M., Behn C. Motion of Two Interconnected Mass Points under Action of Non-symmetric Viscous Friction // *Arch. Appl. Mech.* 2010. V. 80. № 11. P. 1317–1328.
31. Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K. The Undulatory Motion of a Chain of Particles in a Resistive Medium // *ZAMM*. 2011. V. 91. № 4. P. 259–275.
32. Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K. The Undulatory Motion of a Chain of Particles in a Resistive Medium in the Case of a Smooth Excitation Mode // *ZAMM*. 2013. V. 93. № 12. P. 895–913.
33. Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K. The Motion of a Two-body Limbless Locomotor along a Straight Line in a Resistive Medium in the Case of a Smooth Excitation Mode // *ZAMM*. 2016. V. 96. № 4. P. 429–452.
34. Bolotnik N., Schorr P., Zeidis I., Zimmermann K. Periodic Locomotion of a Two-body Crawling System along a Straight Line on a Rough Inclined Plane // *ZAMM*. 2018. V. 98. № 11. P. 1930–1946.
35. Wagner G., Lauga E. Crawling scallop: Friction-based Locomotion with One Degree of Freedom // *J. Theor. Biol.* 2013. V. 324. P. 42–51.
36. Болотник Н.Н., Губко П.А., Фигурина Т.Ю. О возможности безреверсного периодического прямолинейного движения системы двух тел на шероховатой плоскости // *ПММ*. 2018. Т. 82. № 2. С. 138–148.

УДК 004.93'14,004.021,519.177

УЛУЧШЕНИЕ НЕПОЛНОЙ МНОГОАСПЕКТНОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ
ТЕНЗОРНЫМ ВОССТАНОВЛЕНИЕМ ГРАФА СВЯЗНОСТИ¹© 2023 г. Х. Жанг^a, С. Чен^{a,*}, Ю. Жу^b, И. А. Матвеев^{c,**}^aКолледж математики Нанкинского ун-та авионавигации и космонавтики, Нанкин, КНР^bФакультет экспериментального фундаментального обучения,
Нанкинский ун-т авионавигации и космонавтики, Нанкин, КНР^cФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: lyandcxh@nuaa.edu.cn

**e-mail: matveev@ccas.ru

Поступила в редакцию 21.12.2022 г.

После доработки 08.01.2023 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

С развитием технологий сбора данных появляется множество многоаспектных данных, и их кластеризация стала актуальной темой. Большинство методов *многоаспектной кластеризации* (multi-view clustering) предполагают, что все аспекты полностью наблюдаемы. Но во многих случаях это не так. Для работы с неполными многоаспектными данными были предложены некоторые тензорные методы. Однако традиционная тензорная норма требует больших вычислительных затрат, и такие методы, как правило, не могут обрабатывать неполные выборки и дисбаланс различных аспектов. Предлагается новый метод кластеризации неполных многоаспектных данных. Определяется новая тензорная норма для восстановления графа связности, графы регуляризируются до согласованного низкоразмерного представления образцов. Затем веса итеративно обновляются для каждого аспекта. По сравнению с существующими, предложенный метод не только определяет согласованность между аспектами, но и получает низкоразмерное представление образцов с помощью полученной проекционной матрицы. Для решения разработан эффективный оптимизационный алгоритм на основе метода неопределенных множителей Лагранжа. Экспериментальные результаты на четырех наборах данных демонстрируют эффективность метода.

DOI: 10.31857/S0002338823030137, EDN: EVCFML

Введение. Многоаспектные данные могут дать больше информации, чем данные с одним аспектом, во многих практических задачах. Многоаспектная кластеризация (МАК) стала актуальной в связи с получением большого количества таких данных [1]. Большинство существующих методов хорошо работают в предположении, что данные являются полными, т.е. для каждого образца есть его представление в каждом аспекте. Однако это предположение не всегда справедливо на практике. Например, при диагностике болезни Альцгеймера [2] по разным причинам не все виды обследований пациента доступны, что приводит к неполным многоаспектным данным. Соответственно кластеризация таких данных в последнее время привлекает все больше внимания.

В последние годы были разработаны некоторые методы *многоаспектной кластеризации неполных данных* (также *неполная многоаспектная кластеризация*, НМАК) (incomplete multi-view clustering, IMVC), некоторые из них кратко описаны в разд. 1. НМАК на основе графов привлекла внимание многих исследователей благодаря тому, что граф является мощным инструментом для анализа взаимосвязей [3]. Неполная многоаспектная спектральная кластеризация с адаптивным обучением графов (incomplete multi-view spectral clustering with adaptive graph learning, IMSC_AGL) [4] использует графы, построенные из низкорангового подпространства каждого аспекта для формирования согласованного низкоразмерного представления каждого образца. Обобщенная НМАК с гибким распространением структуры локальности (generalized

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-51-53019); Государственного фонда естественных наук Китая (гранты № 11971231; 12111530001).

incomplete multi-view clustering with flexible locality structure diffusion, GIMC_FLSD) [5] комбинирует обучение графов и факторизацию матриц для получения унифицированного представления, которое сохраняет информацию графа. Неполное обучение неотрицательного представления с несколькими графами (incomplete multi-view non-negative representation learning, IMNRL) [6] выполняет факторизацию матриц нескольких неполных графов для получения согласованного неотрицательного представления с ограничениями на графы. Адаптивная кластеризация неполных графов на основе пополнения графов (adaptive graph completion based incomplete multi-view clustering, AGC_IMC) [7] выполняет последовательное обучение на представлениях, используя представление графа каждого аспекта в качестве регуляризации неполных данных других аспектов, и далее получает согласованное низкоразмерное представление. Эти методы применяют обучение графов для фиксации локальной топологии представления. Однако при этом учитывается только внутриаспектное сходство представленных образцов и игнорируется межаспектное сходство. Поэтому эта группа методов не может эффективно найти дополнительную информацию, скрытую в различных аспектах.

Корреляция – классическая мера, которую можно применить для получения дополнительной информации из многоаспектных данных. Для работы с неполными многоаспектными данными, содержащими информацию о корреляции между аспектами, предложено несколько тензорных методов. В работе [8] используются представления подпространства с тензорными ограничениями низкого ранга, чтобы исследовать внутри- и межаспектные связи между образцами и одновременно улавливать корреляции высокого порядка между несколькими аспектами. Неполная многоаспектная тензорная спектральная кластеризация с выводом отсутствующих представлений (incomplete multi-view tensor spectral clustering with missing view inferring, IMVTSC-MVI) [9] объединяет в единую структуру пространство признаков, пополненное отсутствующими представлениями, и пространство многообразий, основанное на обучении графов сходства. Стоит отметить, что IMVTSC-MVI рассматривает каждый аспект одинаково, т.е. с одинаковым весом. В [10] предлагается получать полный граф для каждого аспекта, учитывая сходство графов между аспектами и применяя метод дополнения тензоров. Хотя вышеупомянутые методы на основе тензоров достигли хороших результатов, все еще существуют некоторые проблемы. В большинстве известных работ ограничение низкого ранга действует для преобразованного графа, что значительно увеличивает вычислительные затраты. Это связано с тем, что необходимо выполнение сингулярного разложения на каждом фронтальном срезе тензора $n \times m \times n$, где n и m – количество образцов и аспектов соответственно. С этой целью в данной работе для уменьшения вычислительной сложности определяется ядерная норма тензора, использующая полуортогональную матрицу.

Предлагаемый метод называется *улучшение неполной многоаспектной кластеризации пополнением тензорного графа* (enhancing incomplete multi-view clustering via tensor graph completion, EIMC_TGC). Метод объединяет пополнение тензорного графа, адаптивное взвешивание аспектов и последовательную кластеризацию подпространств в единую структуру. Отличительная особенность метода – переопределение ядерной нормы тензора на основе полуортогональной матрицы для сокращения вычислений и определение оператора сжатия для получения аналитических решений подзадач. Вклад данной работы сводится к следующим выводам.

1. Предлагается метод НМАК, использующий тензорное пополнение. В отличие от существующего метода МАК на основе тензорной нормы, мы переопределяем тензорную ядерную норму через полуортогональную, что снижает вычислительные затраты, и адаптивно назначаем веса каждому аспекту.

2. Для получения аналитического решения подзадачи с переопределенной ядерной нормой предусмотрен оператор сжатия. Предлагается алгоритм оптимизации на основе расширенного метода множителей Лагранжа (augmented Lagrange multiplier, ALM).

3. Эксперименты на четырех наборах данных подтверждают, что этот метод эффективен в задачах кластеризации.

Структура данной работы следующая. В разд. 1 кратко представлены известные аналогичные работы. В разд. 2 изложен предлагаемый метод и дан алгоритм решения. В разд. 3 описана проверка эффективности метода численными экспериментами. В разд. 3.4 подводятся итоги работы.

1. Известные аналоги. В этом разделе представлены известные из литературы последних лет методы обработки неполных многоаспектных данных, а также некоторые обозначения и базовые определения. Методы НМАК можно разделить на пять категорий по основному используемому

тому подходу: кластеризация подпространств, факторизация неотрицательных матриц, обучение графов, глубокие нейронные сети, вероятностный подход.

Методы кластеризации подпространства [11–16] проецируют все существующие аспекты в общее низкоразмерное подпространство и выравнивают все представления в этом подпространстве для получения согласованного низкоразмерного представления. Например, в [15] используется разреженное низкоранговое представление подпространства для совместного измерения внутриаспектных и межаспектных отношений. В [12] предложен полупарный обобщенный корреляционный анализ с частичным обучением (semi-paired and semi-supervised generalized correlation analysis, S²GCA) на основе канонического корреляционного анализа (canonical correlation analysis, CCA), который обрабатывает неполные данные и применим к сценарию с частичным привлечением учителя.

Методы на базе неотрицательной матричной факторизации (non-negative matrix factorization, NMF) [17–22] направлены на разложение матрицы данных каждого аспекта на произведение одной общей (базисной) матрицы и матрицы, соответствующей каждому из аспектов. Например, в [17] предложена частичная МАК на основе NMF для изучения общего представления для полных выборок и частного скрытого представления с той же матрицей базиса. Многоаспектное обучение с неполными аспектами (multi-view learning with incomplete views, MVL-IV) [18] факторизует матрицу неполных данных каждого аспекта как произведение общей матрицы и базисной матрицы соответствующего аспекта, имеющей низкий ранг.

Методы на основе обучения графа [23–27] строят общую матрицу графа связности (или матрицу ядра), так чтобы сохранить геометрическую структуру. Эти методы используют спектральную кластеризацию и многоядерное обучение. Например, НМАК адаптивным пополнением графа (adaptive graph completion based incomplete multi-view clustering, AGC-IMC) [7] получает общий граф с помощью специальной регуляризации и далее добивается согласованного низкоразмерного представления образцов. Метод неполных многоядерных k -средних с взаимным дополнением ядер (incomplete multiple kernel k -means with mutual kernel completion, МККМ-IK-МКС) [23] получает неполные матрицы ядер и осуществляет интерполяцию.

Методы на основе глубоких нейронных сетей [28–32] используют мощную способность нейронной сети к выделению признаков. Например, в [29] разработан новый метод НМАК, который проецирует все данные нескольких видов на полное и единое представление с ограничением присущей геометрической структуры. В [31, 32] предложена НМАК с применением генеративной состязательной сети [33], которая порождает недостающие данные на основе имеющихся. В [34] единое представление получается путем максимизации взаимной информации между различными аспектами посредством контрастного обучения, недостающие данные восстанавливаются путем минимизации условной энтропии различных аспектов.

Методы, основанные на вероятностном подходе [35–38], обычно используют байесовскую статистику, гауссовские модели, вариационный вывод и другие инструменты для моделирования многоаспектных данных с вероятностной точки зрения. Например, в [37] применяется модель латентных переменных общего гауссовского процесса для моделирования неполных многоаспектных данных для кластеризации. В [36] для обработки неполных многоаспектных данных предложено объединение байесовского канонического корреляционного анализа [39] и обучения с учителем [40].

Существует два подхода к использованию тензоров в многоаспектном обучении. Первый заключается в том, чтобы рассматривать различные аспекты как подпространства пространства высокой размерности и обрабатывать их соответственно. Представителем первого подхода является тензорный канонический корреляционный анализ (tensor canonical correlation analysis, ТССА) [41]. ТССА определяет ковариационный тензор для обработки многоаспектных данных с произвольным количеством аспектов, расширяя матрицу взаимной ковариации в каноническом корреляционном анализе. Глубокий ТССА (deep ТССА, DTССА) [42] объединяет ТССА с глубоким обучением нейросетей. DTССА может не только обрабатывать данные с произвольным количеством аспектов, но и не требует хранения всего тензора, что означает, что он может обрабатывать большое количество данных. В [43] рассматривались многоаспектные данные как тензор размерности 3, для вычисления низкоразмерного представления образцов использовано разложение Такера.

Второй подход предполагает, что графы различных представлений похожи, т.е. тензор данных имеет низкий ранг. Низкоранговая тензорная многоаспектная кластеризация подпространств (low-rank tensor constrained multi-view subspace clustering, LT-MSC) [44] рассматривает совокупность матриц данных различных аспектов как тензор, ранг которого должен быть ограничен, что

Таблица 1. Некоторые используемые обозначения

Обозначение	Описание
$\mathcal{X}_{(i,j,k)}$	Элемент i -й строки, j -го столбца, k -го слоя тензора \mathcal{X}
$\mathcal{X}^{(i)}$	i -й слой тензора \mathcal{X}
$\mathcal{X}_{(:,i,:)}$	i -й боковой срез тензора \mathcal{X}
$\mathcal{X}_{(i,j)}$	Элемент i -й строки, j -го столбца матрицы X
$X_{(:,i)}$	i -й столбец матрицы X
X^T	Транспонированная матрица X
$\ X\ _*$	Ядерная (следовая) норма матрицы X
$\ X\ _F$	Норма Фробениуса матрицы X , согласно (2.2)
$\ \mathcal{X}\ _F$	Норма Фробениуса тензора \mathcal{X} , согласно (2.3)
$\sigma_i(X)$	i -е наименьшее сингулярное значение матрицы X
$\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$	Скалярное произведение тензоров \mathcal{X} и \mathcal{Y} , т.е. $\sum_{i,j,k} \mathcal{X}_{(i,j,k)} \mathcal{Y}_{(i,j,k)}$
$\nabla f(x)$	Градиент функции $f(x)$
x_i	i -й элемент вектора x

уменьшает избыточность данных и повышает качество кластеризации. В [45] применен известный своей устойчивостью метод анализа главных компонент, сохраняющий низкий ранг тензора, построенного на основе вероятностных переходных матриц.

1.1. О б о з н а ч е н и я. Матрицы обозначаются курсивными прописными буквами, например $X \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$. Элемент матрицы задается двумя индексами (номера строки и столбца), таким образом матрица имеет *размерность* 2. Несколько матриц размерности 2 одного размера можно объединить в матрицу размерности 3, далее называемую *тензором*². Матрицы, составляющие тензор, называются *слоями*. Тензоры обозначаются заглавными каллиграфическими буквами, например $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ – тензор из n_1 строк, n_2 столбцов и n_3 слоев. Некоторые основные обозначения приведены в табл. 1.

О п р е д е л е н и е 1. Рассмотрим тензор $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$. Слой с номером k представляет собой матрицу, составленную из элементов тензора \mathcal{X} , с третьим индексом, равным k : $\mathcal{X}_{(:, :, k)} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $k = \overline{1, n_3}$. Для краткости будем обозначать $X^{(k)} \equiv \mathcal{X}_{(:, :, k)}$. Также можно называть слой *фронтальным срезом*.

О п р е д е л е н и е 2. Аналогично j -м *боковым срезом* назовем матрицу, составленную из элементов тензора с фиксированным вторым индексом (номером столбца): $\mathcal{X}_{(:, j, :)} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_3}$, $j = \overline{1, n_2}$.

О п р е д е л е н и е 3. *Трубкой* тензора \mathcal{X} назовем вектор, составленный из элементов тензора с двумя фиксированными индексами. Здесь используются трубки с фиксированными первыми двумя индексами: $x = \mathcal{X}_{(i, j, :)} \in \mathbb{R}^{n_3}$.

О п р е д е л е н и е 4. Для тензора $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ введем операцию *разворачивания*:

$$\text{unfold}(\mathcal{X}) = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ \vdots \\ X^{(n_3)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1 n_3 \times n_2}, \quad (1.1)$$

² Данное определение не совпадает с общепринятым в математике, поскольку не задана система координат и закон преобразования при ее изменении. Однако в информатике имеет место именно такое понимание термина.

которая переводит его в матрицу.

Определение 5. Обратная операция *сворачивания* переводит матрицу в тензор:

$$\text{fold}(\text{unfold}(\mathcal{X})) = \mathcal{X}. \quad (1.2)$$

Определение 6. Для тензора $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ и матрицы $\Phi \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_3}$ определим *трансформированный тензор* $\mathcal{X}_\Phi \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, составленный из боковых срезов исходного тензора, умноженных на матрицу Φ , так что $\mathcal{X}_{\Phi(i,:,:) } = \mathcal{X}_{(:,i,:)} \Phi$.

2. Предлагаемый метод. Канонический корреляционный анализ (ККА) является классическим и эффективным методом для многоаспектного обучения. ККА может обрабатывать только два аспекта. По этой причине для обработки данных с большим числом аспектов предлагается обобщенный ККА (generalized CCA, GCCA) [46]. В частности, дается выборка из n образцов в m аспектах $\{X_i \in \mathbb{R}^{d_i \times n}\}_{i=1}^m$, где d_i – размерность i -го аспекта. Тогда модель GCCA представляется как

$$\begin{aligned} \min_{A, \{W_i\}_{i=1}^m} \sum_{i=1}^m \|A - W_i^\top X_i\|_F^2 \\ \text{s.t. } AA^\top = I, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где запись s.t. обозначает “при условии”, I – единичная матрица, $\|A\|_F$ – норма Фробениуса матрицы A :

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} A_{(i,j)}^2}. \quad (2.2)$$

Норма Фробениуса для тензора определяет аналогично:

$$\|\mathcal{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} \mathcal{A}_{(i,j,k)}^2}. \quad (2.3)$$

Символы A и $\{W_i\}_{i=1}^m$ в уравнении (2.1) – это последовательное низкоразмерное представление образцов и матрица проекции каждого аспекта соответственно. Геометрическая структура среди образцов является достоверной априорной информацией, которая может быть эффективно закодирована графом. Следовательно, для получения согласованного низкоразмерного представления с сохранением структуры предлагается графовый многоаспектный ККА (graph multi-view CCA, GMCCA) [47], целевая функция приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \min_{A, \{W_i\}_{i=1}^m} \sum_{i=1}^m \|A - W_i^\top X_i\|_F^2 + \lambda \text{tr}(AL_G A^\top) \\ \text{s.t. } AA^\top = I, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где L_G – матрица лапласиана предварительно построенного графа G , а $\lambda > 0$ – параметр регуляризации.

К сожалению, вышеупомянутый метод применим только к полным многоаспектным данным. Здесь на основе GMCCA и восстановления тензоров разработан новый метод для неполных многоаспектных данных. Для заданного неполного набора данных $\{X_i \in \mathbb{R}^{d_i \times n}\}_{i=1}^m$ с m аспектами и n образцами, недостающие экземпляры которых заполняются нулевыми векторами, т.е. если j -й экземпляр i -го представления отсутствует, то $X_{i(j)} = \bar{0}$. Недостающая информация каждого представления записывается в диагональную матрицу $\{P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}\}_{i=1}^m$. P_i определяется следующим образом:

$$P_{i(j,j)} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й образец описан в } i\text{-м аспекте,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Символ d_i обозначает размерность признака i -го представления. Наивная модель для обработки неполных многоаспектных данных, основанная на (2.4), выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \min_{A, \{W_i\}_{i=1}^m} & \sum_{i=1}^m (\| (A - W_i^\top X_i) P_i \|_F^2 + \lambda \text{tr}(A L_{G_i} A^\top)) \\ \text{s.t.} & \quad A A^\top = I, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где L_{G_i} – матрица лапласиана предварительно построенного графа G_i i -го представления. Стоит отметить, что модель (2.6) рассматривает каждое представление одинаково, что обычно нереалистично. По этой причине аналогично [48] вводятся веса $\{\bar{\delta}_i\}_{i=1}^m$ для взвешивания важности различных представлений:

$$\bar{\delta}_i = \frac{1}{\sqrt{\| (A - W_i^\top X_i) P_i \|_F^2 + \lambda \text{tr}(A L_{G_i} A^\top)}}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.7)$$

Интуитивно понятно, что если i -й аспект может предоставить больше полезной информации, то $\| (A - W_i^\top X_i) P_i \|_F^2$ и $\text{tr}(A L_{G_i} A^\top)$ должны быть малы, и поэтому вес $\bar{\delta}_i$ для этого аспекта будет большим в соответствии с уравнением (2.7) и наоборот. Однако если представление имеет высокий процент пропусков, то вес этого представления также будет больше. Это происходит потому, что высокий процент пропусков приводит к тому, что P_i содержит больше нулей, что в свою очередь делает $\bar{\delta}_i$ больше. Чтобы избежать этого явления, вес изменен на

$$\delta_i = n_i \bar{\delta}_i, \quad (2.8)$$

где n_i – количество доступных экземпляров i -го аспекта.

Невозможно напрямую построить полный граф G_i для каждого аспекта из-за неполноты данных. Поэтому его необходимо дополнить [7, 23]. Согласованность между аспектами является важным свойством реальных данных. Соответственно графы различных аспектов должны быть очень похожими. Это свойство хорошо отражается низким рангом тензора, составленного из этих графов (матриц смежности). Следовательно, исходя из восстановления тензора, целевая функция для восстановления графов выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{G}} & \quad \|\mathcal{G}\|_{\Phi, w, S_p}^p + \frac{\gamma}{2} \|P_\Omega(\mathcal{G}) - P_\Omega(\mathcal{M})\|_F^2 \\ \text{s.t.} & \quad G_i \geq 0, \quad G_i \mathbf{1} = 1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{n \times m \times n}$ и $\mathcal{G}_{(:,i,:)} = G_i$, $\mathbf{1}$ – вектор соответствующей размерности со всеми единичными компонентами, $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n \times m \times n}$ – тензор предварительно построенного неполного графа с недостающими позициями, заполненными нулями, где $\mathcal{M}_{(:,i,:)} = M_i$ – предварительно построенный граф i -го аспекта, $P_\Omega(\cdot)$ – ортогональная проекция на линейное подпространство тензора, определенного на $\Omega = \{(i, j, k) \mid \mathcal{M}_{(i,j,k)} \text{ не пропущено}\}$:

$$P_\Omega(\mathcal{M})_{(i,j,k)} = \begin{cases} \mathcal{M}_{(i,j,k)}, & \text{если } (i, j, k) \in \Omega, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Тензорная норма $\|\cdot\|_{\Phi, w, S_p}$ определена следующим образом.

О п р е д е л е н и е 7. Пусть задан тензор $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, $h = \min(n_1, n_3)$, вектор весов $w \in \mathbb{R}^h$, при этом $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_h \geq 0$, $0 < p \leq 1$, и матрица преобразования $\Phi \in \mathbb{R}^{n_3 \times r}$, тогда

$$\|\mathcal{X}\|_{\Phi, w, S_p} = \left(\sum_{i=1}^{n_3} \|X_\Phi^{(i)}\|_{w, S_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n_3} \sum_{j=1}^h w_j \sigma_j \left(X_\Phi^{(i)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.11)$$

где $X_\Phi^{(i)}$ – i -й фронтальный срез тензора \mathcal{X} , трансформированного матрицей Φ .

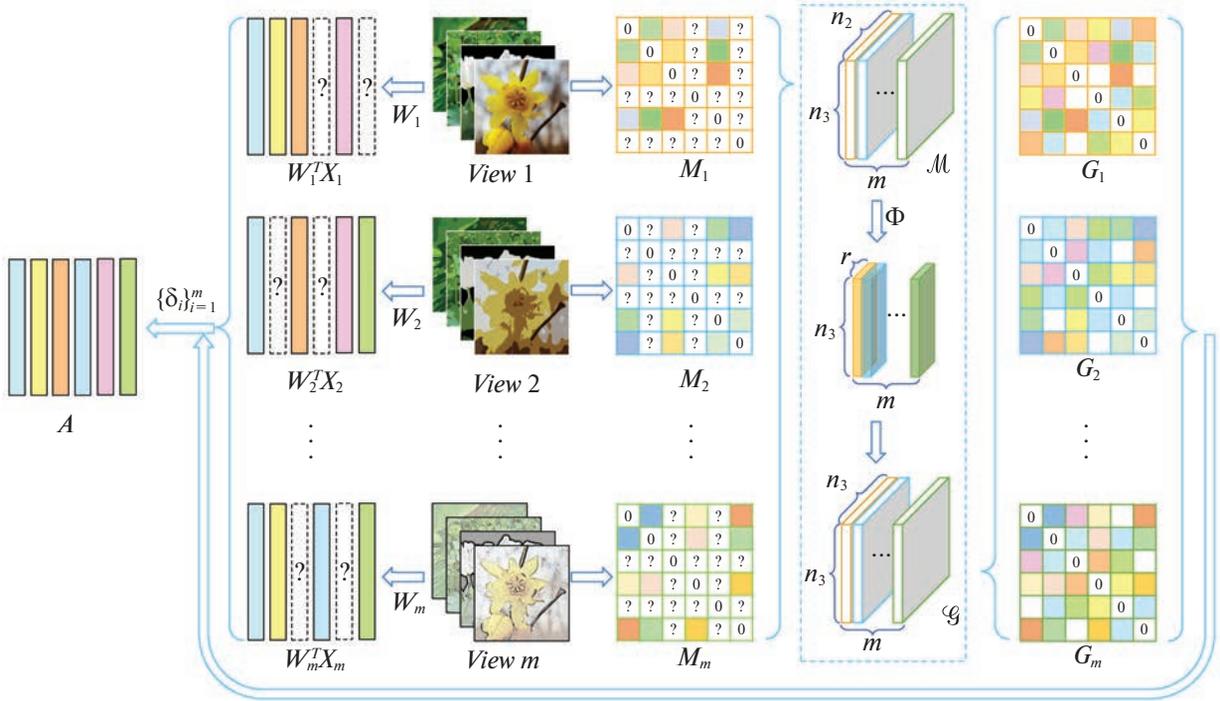


Рис. 1. Схема метода EIMC_TGC

Примечание 1. Заметим, что в литературе [9, 10] матрица преобразования обычно является ортогональной квадратной матрицей, т.е. $\Phi^T \Phi = I$ и $r = n_3$. Наше эмпирическое исследование показывает, что в этом нет необходимости. Поэтому в данной работе в качестве матрицы преобразования используется полуортогональная матрица, т.е. $\Phi^T \Phi = I$ и $r < n_3$. Это позволит сократить вычислительные затраты, т.е. если раньше требовалось n_3 разложения по сингулярным значениям, то теперь требуется только r . Экспериментальное исследование в разд. 3.4 показывает, что $r = n_3$ может быть не оптимальным.

Объединив модель восстановления графов (2.9) с (2.6) и введя веса $\{\delta_i\}_{i=1}^m$ согласно (2.7) и (2.8), получаем следующую модель:

$$\begin{aligned} \min_{A, \{W_i\}_{i=1}^m, \mathcal{G}} \left\{ \sum_{i=1}^m n_i \sqrt{\|A - W_i^T X_i\|_F^2 + \lambda \text{tr}(A L_G A^T)} + \right. \\ \left. + \mu \|\mathcal{G}\|_{\Phi, w, s_p}^p + \frac{\gamma}{2} \|P_{\Omega}(\mathcal{G}) - P_{\Omega}(M)\|_F^2 \right\} \quad (2.12) \\ \text{s.t. } AA^T = I, \quad G_i \geq 0, \quad G_i \mathbf{1} = \mathbf{1}, \end{aligned}$$

где $\mu > 0$ – параметр регуляризации. Схема предложенного метода дана на рис. 1.

Примечание 2. Известно [49], что количество нулевых собственных значений матрицы Лапласиана L_G должно быть равно количеству связных компонент графа G . Другими словами, для графа с c компонент связности

$$\sum_{i=1}^c \sigma_i(L_G) = 0. \quad (2.13)$$

Имеет место следующее уравнение:

$$\sum_{i=1}^c \sigma_i(L_G) = \min_{FF^T = I, F \in \mathbb{R}^{c \times n}} \text{tr}(F L_G F^T). \quad (2.14)$$

Поскольку правая часть (2.14) формально идентична члену $\text{tr}(AL_{G_i}A^\top)$ в целевой функции (2.12), можно ожидать, что решение задачи (2.12) породит разбиение на малое число компонент, т.е. хорошую кластеризацию. Примечательно, что наш метод может работать с неполными выборками с выученными $\{W_i\}_{i=1}^m$.

2.1. Решение. Для эффективного решения задачи (2.12) нам необходимо ввести вспомогательную переменную \mathcal{Y} , чтобы разделить взаимозависимые члены так, чтобы они могли быть решены независимо. Таким образом, можно переформулировать задачу (2.12) в следующую эквивалентную форму:

$$\begin{aligned} \min_{A, \{W_i\}_{i=1}^m, \mathcal{G}} \left\{ \sum_{i=1}^m \left(\delta_i \|A - W_i^\top X_i P_i\|_F^2 + \lambda \delta_i \text{tr}(AL_{G_i}A^\top) \right) + \right. \\ \left. + \mu \|\mathcal{Y}\|_{\Phi, w, S_p}^p + \frac{\gamma}{2} \|P_\Omega(\mathcal{G}) - P_\Omega(\mathcal{M})\|_F^2 \right\} \\ \text{s.t. } AA^\top = I, \quad G_i \geq 0, \quad G_i \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \mathcal{G} = \mathcal{Y}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где δ_i задается (2.7). Воспользовавшись недавними достижениями в области методов переменных направлений, предложим эффективный алгоритм, основанный на методе неопределенных множителей Лагранжа (inexact augmented Lagrange multipliers, IALM) для решения (2.15). Расширенная функция Лагранжа задается следующим образом:

$$\begin{aligned} L_p(A, \{W_i\}_{i=1}^m, \mathcal{G}, \mathcal{Y}, \mathcal{C}) = \sum_{i=1}^m (\delta_i \|A - W_i^\top X_i P_i\|_F^2 + \lambda \delta_i \text{tr}(AL_{G_i}A^\top)) + \\ + \mu \|\mathcal{Y}\|_{\Phi, w, S_p}^p + \frac{\gamma}{2} \|P_\Omega(\mathcal{G}) - P_\Omega(\mathcal{M})\|_F^2 + \langle \mathcal{C}, \mathcal{G} - \mathcal{Y} \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{G} - \mathcal{Y}\|_F^2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\rho > 0$ – штрафной параметр, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n \times m \times n}$ – множители Лагранжа. В этом разделе используются надстрочные знаки для обозначения количества итераций, т.е. A^k или A^{k+1} и т.д.

2.1.1. Пересчет A^{k+1} и $\{W_i^{k+1}\}_{i=1}^m$ с фиксированными \mathcal{G}^k и $\{\delta_i^k\}_{i=1}^m$. Для обновления A^{k+1} и $\{W_i^{k+1}\}_{i=1}^m$ рассмотрим следующие задачи оптимизации:

$$\begin{aligned} A^{k+1}, \{W_i^{k+1}\}_{i=1}^m = \\ = \arg \min_{A, \{W_i\}_{i=1}^m} \sum_{i=1}^m \left(\delta_i^k \|A - W_i^\top X_i P_i\|_F^2 + \lambda \delta_i^k \text{tr}(AL_{G_i^k}A^\top) \right) \\ \text{s.t. } AA^\top = I. \end{aligned} \quad (2.17)$$

После простых алгебраических операций задача (2.17) может быть преобразована в следующую задачу на собственные значения:

$$\left(\sum_{i=1}^m \delta_i^k \left(P_i - P_i X_i^\top (X_i P_i X_i^\top)^{-1} X_i P_i + \lambda L_{G_i^k} \right) \right) A^\top = A^\top \Sigma, \quad (2.18)$$

где Σ – диагональная матрица собственных значений. Тогда A^\top можно получить из собственного вектора, соответствующего первым d наибольшим собственным значениям, где d – размерность последовательного низкоразмерного представления (т.е. $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$). Имея A^{k+1} , можно получить $W_i^{k+1} = (X_i P_i X_i^\top)^{-1} X_i P_i A^{k+1 \top}$ для $i = \overline{1, m}$. После получения A^{k+1} и $\{W_i^{k+1}\}_{i=1}^m$ веса $\{\delta_i^{k+1}\}_{i=1}^m$ могут быть обновлены в соответствии с определением (2.7).

2.1.2. Пересчет \mathcal{G}^{k+1} с фиксированными A^{k+1} , $\{\delta_i^{k+1}\}_{i=1}^m$, \mathcal{Y}^k , \mathcal{C}^k и ρ^k . Чтобы получить \mathcal{G}^{k+1} , фиксируем другую переменную и решаем следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{k+1} = \arg \min_{\mathcal{G}} & \left\{ \lambda \sum_{i=1}^m \delta_i^{k+1} \operatorname{tr} \left(A^{k+1} L_{G_i} A^{k+1\top} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{2} \|P_{\Omega}(\mathcal{G}) - P_{\Omega}(\mathcal{M})\|_F^2 + \frac{\rho^k}{2} \left\| \mathcal{G} - \mathcal{Y}^k + \frac{\mathcal{C}^k}{\rho^k} \right\|_F^2 \right\} \\ \text{s.t. } & G_i \geq 0, \quad G_i \mathbf{1} = \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Задача (2.19) – это задача наименьших квадратов с ограничениями. Заметим, что каждая трубка тензора задачи (2.19) независима, поэтому она может быть преобразована в nm независимых подзадач. Без потери общности пусть $g \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}^n$ – определенные трубки тензоров \mathcal{G} , \mathcal{M} , \mathcal{Y} , Ω , \mathcal{C} и \mathcal{T} соответственно, где $\mathcal{T}_{(i,j,l)}^k = \lambda \delta_l^{k+1} \|A_{(:,i)}^{k+1} - A_{(:,i)}^{k+1}\|_F^2 / 2$. Таким образом, можно получить следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned} g^{k+1} = \arg \min_g & \frac{1}{\rho^k} t^{k\top} g + \frac{\gamma}{2\rho^k} \|P_{\omega}(g) - P_{\omega}(z)\|_F^2 + \frac{1}{2} \left\| g - y^k + \frac{c^k}{\rho^k} \right\|_F^2 \\ \text{s.t. } & g \geq 0, \quad \mathbf{1}^\top g = 1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Функцию Лагранжа для (2.20) запишем как

$$\begin{aligned} L(g, \alpha, \beta) = & \frac{1}{\rho^k} t^{k\top} g + \frac{\gamma}{2\rho^k} \|P_{\omega}(g) - P_{\omega}(z)\|_F^2 + \frac{1}{2} \left\| g - y^k + \frac{c^k}{\rho^k} \right\|_F^2 - \\ & - \alpha(\mathbf{1}^\top g - 1) - \beta^\top g, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R}^n$ являются множителями. Если взять производную функции Лагранжа по g и положить ее равной нулю, то получится уравнение

$$g - y^k + \frac{c^k}{\rho^k} + \frac{\gamma}{\rho^k} (P_{\omega}(g) - P_{\omega}(z)) + \frac{1}{\rho^k} t^k - \alpha \mathbf{1} - \beta = 0. \quad (2.22)$$

Согласно условию ККТ, т.е. $\mathbf{1}^\top g = 1$, имеем

$$\alpha = \frac{1}{n} \left(1 - \mathbf{1}^\top y^k + \mathbf{1}^\top \frac{c^k}{\rho^k} + \frac{\gamma}{\rho^k} \mathbf{1}^\top (P_{\omega}(g) - P_{\omega}(z)) + \frac{1}{\rho^k} \mathbf{1}^\top t^k - \mathbf{1}^\top \beta \right). \quad (2.23)$$

Сочетая (2.22) и (2.23), получим

$$\begin{aligned} g + \frac{\gamma}{\rho^k} P_{\omega}(g) = & y^k - \frac{c^k}{\rho^k} + \frac{\gamma}{\rho^k} P_{\omega}(z) - \frac{1}{\rho^k} t^k - \\ & - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \left(y^k - \frac{c^k}{\rho^k} + \frac{\gamma}{\rho^k} P_{\omega}(z) - \frac{1}{\rho^k} t^k \right) + \frac{1}{n} \mathbf{1} + \\ & + \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \left(\frac{\gamma}{\rho^k} P_{\omega}(g) - \beta \right) + \beta. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Далее, согласно дополнительной релаксации в условии ККТ, имеем

$$g_i^{k+1} + \frac{\gamma}{\rho^k} P_{\omega}(g^{k+1})_i = \left(u_i^k - \frac{1}{n} \mathbf{1}^\top u^k + \frac{1}{n} + v^k \right)_+, \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned} u^k &= y^k - \frac{c^k + \gamma P_\omega(z) - t^k}{\rho^k}, \\ v^k &= \frac{1}{n} \mathbf{1}^\top \left(\frac{\gamma P_\omega(g^{k+1})}{\rho^k} - \beta \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

и применяется обозначение $(\cdot)_+ = \max(0, \cdot)$. Итак, можно получить

$$g_i^{k+1} = \begin{cases} \left(u_i^k - \frac{1}{n} \mathbf{1}^\top u^k + \frac{1}{n} + v^k \right)_+, & \text{если } i \in \omega, \\ \frac{\rho^k}{\rho^k + \gamma} \left(u_i^k - \frac{1}{n} \mathbf{1}^\top u^k + \frac{1}{n} + v^k \right)_+, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.27)$$

Поскольку $\mathbf{1}^\top g^{k+1} = 1$, значение v^k можно найти как корни следующей функции:

$$f(v) = \sum_{i=1}^n g_i^{k+1} - 1. \quad (2.28)$$

Уравнение (2.28) может быть решено методом Ньютона. Производная первого порядка от $f(v)$ имеет вид

$$\nabla f(v) = \sum_{i=1}^n \nabla g_i^{k+1}, \quad (2.29)$$

где

$$\nabla g_i^{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \omega, \\ \frac{\rho^k}{\rho^k + \gamma} & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.30)$$

Решение задачи (2.20) (получение \mathcal{G}) представим алгоритмом 1.

Алгоритм 1.

Вход: $t^k, \rho^k, \omega, z, c^k, t^k$.

Выход: Тензор \mathcal{G}^{k+1} .

Шаг 1. Инициализация: Номер шага $q = 0, v^0 = 0$.

Шаг 2. Вычислить u^k , согласно (2.26).

Шаг 3. Вычислить $f(v^q)$, согласно (2.28).

Шаг 4. Если $|f(v^q)| \leq 10^{-10}$, то перейти к шагу 8.

Шаг 5. Вычислить градиент $f(v)$ в точке v^q , согласно (2.29).

Шаг 6. Пересчитать $v^{q+1} = v^q - f(v^q) / \nabla f(v^q)$.

Шаг 7. $q \leftarrow q + 1$ и перейти к шагу 3.

Шаг 8. Вычислить g^{k+1} , согласно (2.27).

Шаг 9. Составить тензор \mathcal{G}^{k+1} из трубок g^{k+1} .

2.1.3. Пересчет \mathcal{Y}^{k+1} с фиксированными \mathcal{G}^{k+1} , \mathcal{C}^k и ρ^k . При сохранении всех остальных переменных \mathcal{G}^{k+1} может быть получено путем решения следующей оптимизационной задачи:

$$\mathcal{Y}^{k+1} = \arg \min_{\mathcal{Y}} \frac{\mu}{\rho^k} \|\mathcal{Y}\|_{\Phi, w, S_p}^p + \frac{1}{2} \left\| \mathcal{G}^{k+1} + \frac{\mathcal{C}^k}{\rho^k} - \mathcal{Y} \right\|_F^2. \quad (2.31)$$

Чтобы решить ее, сначала введем теорему 1, которая доказывается в Приложении.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, $l = \min\{n_1, n_2\}$, $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_l \geq 0$. Для модели

$$\min \tau \|\mathcal{X}\|_{\Phi, w, S_p}^p + \frac{1}{2} \|\mathcal{X} - \mathcal{A}\|_F^2 \quad (2.32)$$

оптимальным решением является

$$\mathcal{X}^* = \left(\text{fold} \left(\text{unfold} \left(\mathcal{S}_{\tau, w, p}(\mathcal{A}_\Phi) \right); \text{unfold} \left(\mathcal{A}_{\Phi^c} \right) \right) \right)_{\overline{\Phi}^\top}, \quad (2.33)$$

где $\mathcal{S}_{\tau, w, p}(\mathcal{A}_\Phi)$ – тензор, i -й фронтальный срез которого $S_{\tau, w, p}(A_\Phi^{(i)})$.

Поэтому оптимальным решением (2.31) будет

$$\mathcal{Y}^{k+1} = \left(\text{fold} \left(\text{unfold} \left(\mathcal{S}_{\frac{\mu}{\rho}, w, p}(\mathcal{B}_\Phi^k) \right); \text{unfold} \left(\mathcal{B}_{\Phi^c}^k \right) \right) \right)_{\overline{\Phi}^\top}, \quad (2.34)$$

где $\mathcal{B}^k = \mathcal{G}^{k+1} + \frac{\mathcal{C}^k}{\rho^k}$, $\mathcal{S}_{\frac{\mu}{\rho}, w, p}(\mathcal{B}_\Phi^k)$, как показано в доказательстве теоремы 1 в Приложении. На основе вышеприведенного описания псевдокод сведен в алгоритм 2 решения задачи (2.12).

Алгоритм 2.

Вход: $\{X_i\}_{i=1}^m$, $\{P_i\}_{i=1}^m$, w , M , λ , μ , γ .

Выход: A , $\{W_i\}_{i=1}^m$.

Шаг 1. Инициализация: Номер шага $k = 0$, $\eta = 1.1$, $\rho^0 = 10^{-4}$, $\left\{ \delta_i^0 = \frac{1}{m} \right\}_{i=1}^m$, $\mathcal{C}^0 = 0$, $\mathcal{G}^0 = \mathcal{Y}^0 = M$.

Шаг 2. Рассчитать A^{k+1} , согласно (2.18).

Шаг 3. Рассчитать W_i^{k+1} как $(X_i P_i X_i^\top)^{-1} X_i P_i A^{k+1 \top}$ для всех i .

Шаг 4. Рассчитать δ_i^{k+1} , согласно определению для всех i .

Шаг 5. Рассчитать \mathcal{G}^{k+1} алгоритмом 1.

Шаг 6. Рассчитать \mathcal{Y}^{k+1} , согласно (2.34).

Шаг 7. Рассчитать $\mathcal{C}^{k+1} = \mathcal{C}^k + \rho^k (\mathcal{G}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1})$.

Шаг 8. Рассчитать $\rho^{k+1} = \eta \rho^k$.

Шаг 9. Если алгоритм сошелся, то выдать $A = A^{k+1}$, $W_i = W_i^{k+1}$ для всех i .

Шаг 10. $k \leftarrow k + 1$ и перейти к шагу 2.

2.2. Анализ сходимости. Проанализируем сходимость алгоритма 2. Сначала покажем ограниченность последовательностей в лемме 1, которая доказана в Приложении. Затем сходимость будет исследована в теореме 2, которая также доказана в Приложении.

Лемма 1. Последовательности $\{\mathcal{C}^k\}$, $\{\mathcal{Y}^k\}$, $\{A^k\}$, $\left\{ \left\{ W_i^k \right\}_{i=1}^m \right\}$, $\{\mathcal{G}^k\}$ и расширенная функция Лагранжа (2.16), которые генерируются алгоритмом 2, ограничены.

Теорема 2. Последовательности $\{\mathcal{G}^k\}$ и $\{\mathcal{Y}^k\}$, порожденные алгоритмом 2, удовлетворяют следующим требованиям:

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}^k - \mathcal{Y}^k\|_F = 0$,
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}^{k+1} - \mathcal{G}^k\|_F = 0$,
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{Y}^k\|_F = 0$.

Таблица 2. Описание многоаспектных баз данных

База данных	Количество			
	классов	аспектов	образцов	признаков в аспектах
Цифры	10	5	2000	240/76/216/47/64
3_Sources	6	3	169	3560/3631/3036
BBC Sport	5	4	116	1991/2063/2113/2158
Orl	40	4	400	41/399/399/41

3. Вычислительные эксперименты. Наборы данных. Четыре набора данных, использованные в эксперименте, показаны в табл. 2 и описаны ниже.

1. *Цифры* [50]. Набор данных содержит 10 классов объектов, т.е. изображения рукописных цифр 0–9. В каждом классе есть 200 образцов. Известны шесть аспектов: средние значения пикселей, коэффициенты Фурье, корреляции профилей, момент Цернике, коэффициенты Карунена–Лоэва и морфологические. В данном эксперименте задействованы только первые пять.

2. *3_Sources* [51]. Набор данных содержит 948 историй из трех онлайн-ресурсов – BBC, Reuters и Guardian. В данном эксперименте для сравнения с другими методами используется подмножество, содержащее 169 историй, о которых сообщалось на всех ресурсах. Эти 169 историй разделены на шесть классов: бизнес, развлечения, здоровье, политика, спорт и технологии.

3. *BBC Sport* [52]. Набор данных содержит 737 документов о новостях спорта, которые выражены 2–4 мнениями и разделены на пять категорий. Для наших экспериментов мы выбрали подмножество образцов, описанных по 4 раза, в нем 116 элементов.

4. *Orl* [53]. Очень популярный набор данных лиц, содержащий 400 изображений лиц, предоставленных 40 лицами, каждое из которых состоит из 10 фотографий. Поскольку *Orl* – это набор данных с одним аспектом, мы извлекли LBP, GIST и пирамиду гистограммы ориентированных градиентов и объединили их с пиксельными характеристиками, чтобы сформировать набор данных с четырьмя аспектами.

Построение неполных многоаспектных данных. Для каждого из вышеперечисленных наборов данных случайным образом выбираем $p\%$ ($p \in \{90, 70, 50, 30\}$) образцов и превращаем их в неполные путем удаления данных из случайно выбранного аспекта.

Сравниваемые методы. Следующие методы, которые могут работать с неполными многоаспектными данными, использованы для сравнения.

1. *BSV* [54]. *BSV* выполняет кластеризацию k -средних и классификацию ближайших соседей на всех аспектах и сообщает оптимальные результаты кластеризации и классификации, где недостающие экземпляры дополняются средним экземпляром соответствующего аспекта.

2. *Concat* [54]. Объединение всех аспектов в один и применение k -средних и ближайших соседей для получения окончательных результатов кластеризации и классификации, где недостающие экземпляры также заполняются средним экземпляром, как *BSV*.

3. *DAIMC* [20]. Метод использует два способа для согласованного представления всех аспектов: матричное разложение на основе выравнивания информации об экземплярах и разреженную регрессию на основе базисных матриц.

4. *IMSC_AGL* [4]. Метод получает консенсусное низкоразмерное представление при помощи спектральной кластеризации и строит графы низкорангового представления.

5. *TCIMC* [10]. Метод получает полный граф путем тензорного восстановления для каждого вида и отличается от представленного здесь метода тензорной нормой.

Наш метод сначала получает низкоразмерное представление A всех образцов, а затем применяет метод k -средних для A . Поскольку метод чувствителен к начальному значению, вычисления производятся несколько раз и результат усредняется. Найденные центры служат для построения графа каждого представления:

$$M_{i(k,l)} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\|X_{i(k,:)} - X_{i(l,:)}\|_2^2}{2\sigma^2}\right), & \text{если } X_{i(k,:)} \in k\text{-NN}(X_{i(l,:)}), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.1)$$

где $k = 10$, $\sigma = 1$. Недостающие позиции в M_i заполняются нулями. Значения p , w и Φ в тензорной норме $\|\cdot\|_{\Phi,w,S_p}$ задаются 0.6, $\mathbf{1}$ и дискретным косинусным преобразованием соответственно.

Меры качества. Оценка качества производится тремя известными мерами: точностью (accuracy, ACC), нормализованной взаимной информацией (normalized mutual information, NMI), чистотой (purity).

3.1. Результаты. Таблица 3 показывает результаты кластеризации шести методов на четырех наборах данных. Из нее можно сделать следующие выводы.

1. Представленный метод имеет лучшие результаты в большинстве случаев по сравнению с другими пятью методами. В задаче кластеризации предложенный метод примерно на 5 и 10% лучше, чем другие, на данных Orl и Handwritten, соответственно. Неизбежны некоторые данные, для которых та или иная мера не является оптимальной, например задача кластеризации наборов данных Handwritten, 3Sources и BBC Sport.

2. Таблица 3 демонстрирует, что IMSC_AGL, TCIMC и наш метод имеют лучшее качество кластеризации, чем DAIMC на всех наборах данных. Это указывает на то, что графовые инструменты могут улучшить качество кластеризации. TCIMC и наш метод основаны на тензорном заполнении графа, в них отличается тензорная норма. Эксперименты показывают, что наш метод имеет лучшую производительность кластеризации, чем TCIMC, на большинстве наборов данных.

3. Из результатов эксперимента, приведенных в табл. 3, видно, что качество кластеризации снижается на большинстве наборов данных при увеличении доли пропущенных аспектов. Таким образом, обучение эффективному согласованному представлению на наборе данных с высоким уровнем пропусков затруднено. Отсутствующих экземпляров так много, что предварительной информации недостаточно, включая консенсус и взаимодополняемость между представлениями. Согласно результатам экспериментов на всех наборах данных, наш метод имеет более значительное преимущество в случае более высокого уровня пропусков.

3.2. Анализ чувствительности к параметрам. В этом разделе анализируется чувствительность трех параметров λ , μ и γ на наборах данных Handwritten, 3Sources, BBC Sport и Orl. Проверяются параметры λ со значениями $\{1, 4, 5, 7, 9\}$ и μ со значениями $\{10, 30, 50, 70, 90\}$. Предложенный метод кластеризации выполняется с различными комбинациями двух параметров (λ & μ). Также выполняется кластеризация с различными γ из множества $\{10^p, p \in \overline{-2,6}\}$. Рисунки 2 и 3 показывают качество кластеризации в зависимости от параметра масштаба λ & μ и γ на четырех наборах данных с уровнем пропусков 70% соответственно. Согласно этим результатам, наш метод относительно стабилен для гиперпараметров λ , μ и γ , а производительность кластеризации обычно оптимальна для $\lambda = 3$, $\mu = 10$ и $\gamma = 100$.

3.3. Анализ сходимости. В разд. 2.3 показано, что алгоритм 2 сходится. Описаны численные эксперименты для проверки сходимости. Проведены эксперименты на наборах данных Handwritten, 3 Sources, BBC Sport и Orl с уровнем пропусков 70%. На рис. 4 показана сходимость алгоритма и качество кластеризации модели при увеличении числа итераций. Из рис. 4 видно, что предложенный метод оптимизации имеет хорошую сходимость, при которой $\|\mathcal{G}^{k+1} - \mathcal{G}^k\|_F$, $\|\mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{Y}^k\|_F$, и $\|\mathcal{C}^k - \mathcal{Y}^k\|_F$ может быстро уменьшаться и стремиться к нулю во всех четырех наборах данных. Результаты кластеризации также стабилизируются с увеличением числа итераций.

3.4. Влияние параметра r . Исследуем влияние параметра r на результат эксперимента. Вводим r от $n \times 10\%$ до $n \times 100\%$ для каждого эксперимента на наборах данных Handwritten, 3 Sources, BBC Sport и Orl с уровнем пропусков 70%, т.е. $r \in \{n \times 10\%, n \times 20\%, \dots, n \times 100\%\}$.

Таблица 3. Средние и стандартные значения ACC, NMI и Purity (в процентах) семи методов для четырех наборов данных

Dataset	Rate/methods		BSV	Concat	DAIMC	IMSC_AGL	TCIMV	EIMC_TGC	
Hand-written	ACC	0.9	47.15B±2.86	39.96B±3.37	84.51B±0.00	94.14B±0.00	86.79B±0.98	99.60B±0.00	
		0.7	52.04B±24.95	44.37B±10.75	85.21B±0.06	94.32B±0.00	86.35B±1.26	99.95B±0.00	
		0.5	62.51B±19.99	48.95B±2.88	87.13B±0.04	95.40B±0.00	85.90B±0.36	91.50B±0.00	
	NMI	0.3	67.47B±35.51	53.12B±5.01	86.61B±0.05	96.04B±0.00	85.15B±1.01	88.65B±0.00	
		0.9	38.79B±1.09	32.91B±1.51	73.23B±0.01	88.07B±0.00	88.95B±1.34	98.94B±0.00	
		0.7	45.34B±9.94	37.91B±4.83	76.64B±0.01	88.12B±0.01	89.77B±0.54	99.86B±0.00	
	Purity	0.5	54.09B±8.35	43.27B±1.73	77.17B±0.03	90.01B±0.00	89.81B±2.36	93.97B±0.00	
		0.3	60.78B±11.11	49.02B±1.12	77.24B±0.02	91.34B±0.00	89.58B±0.95	93.57B±0.00	
		0.9	47.15B±2.83	40.65B±1.71	84.51B±0.01	94.14B±0.00	88.01B±1.32	99.60B±0.00	
	3_Sources	ACC	0.7	52.77B±17.79	46.22B±4.08	86.75B±0.01	94.34B±0.00	88.40B±2.01	99.95B±0.00
			0.5	62.51B±17.69	51.27B±1.21	87.18B±0.02	95.40B±0.00	88.40B±0.66	91.50B±0.00
			0.3	68.80B±23.08	57.06B±2.66	86.73B±0.23	96.04B±0.00	88.10B±1.32	89.40B±0.00
NMI		0.9	35.50B±3.11	37.33B±6.96	46.86B±0.00	60.95B±1.55	68.64B±0.00	74.41B±0.16	
		0.7	35.74B±12.46	38.04B±30.50	53.37B±1.93	57.45B±1.20	69.23B±0.00	78.70B±0.14	
		0.5	36.09B±8.01	40.35B±47.45	50.29B±0.00	65.62B±5.94	56.80B±0.00	59.76B±0.06	
Purity		0.3	35.62B±15.77	46.39B±35.41	49.76B±0.04	68.11B±2.83	69.82B±0.00	59.16B±0.08	
		0.9	8.53B±11.81	7.96B±14.37	44.29B±0.00	59.17B±0.19	63.85B±0.00	63.97B±0.22	
		0.7	9.29B±12.87	11.36B±69.01	46.03B±3.02	60.55B±0.10	54.34B±0.02	66.29B±0.11	
BBC Sport		ACC	0.5	8.56B±11.76	13.87B±75.81	45.38B±0.16	57.89B±6.65	52.50B±0.00	52.47B±1.14
			0.3	7.92B±6.29	22.97B±98.79	47.53B±0.35	61.18B±0.86	57.98B±0.00	60.20B±0.20
			0.9	38.99B±5.24	39.40B±18.61	62.13B±0.00	77.75B±0.09	79.23B±0.00	79.28B±0.09
	NMI	0.7	39.88B±12.93	42.48B±61.37	68.52B±0.68	77.28B±0.09	75.14B±0.00	82.25B±0.14	
		0.5	39.64B±16.10	45.32B±74.47	68.28B±0.10	76.56B±6.08	72.19B±0.00	70.41B±0.06	
		0.3	39.17B±12.20	52.60B±61.97	67.57B±0.06	76.69B±1.26	78.10B±0.00	74.56B±0.00	
	Purity	0.9	33.88B±4.46	33.36B±4.79	60.69B±0.19	66.21B±0.13	81.03B±0.00	83.62B±0.00	
		0.7	34.13B±7.63	34.91B±21.35	66.38B±1.98	78.45B±0.00	81.62B±0.00	81.90B±0.00	
		0.5	35.26B±4.86	33.62B±3.30	61.81B±1.33	69.66B±0.79	79.31B±0.00	82.76B±0.00	
	Ori	ACC	0.3	34.65B±14.00	37.58B±61.13	62.16B±5.85	75.00B±0.00	81.89B±0.00	80.17B±0.00
			0.9	5.82B±3.72	5.81B±2.24	46.45B±0.95	51.17B±0.83	78.20B±0.00	83.03B±0.00
			0.7	6.23B±5.19	6.27B±7.76	55.52B±0.55	69.55B±0.00	83.58B±0.00	79.91B±0.00
NMI		0.5	6.11B±10.06	5.37B±5.26	45.28B±2.29	57.68B±0.31	71.07B±0.00	77.31B±0.00	
		0.3	6.54B±19.41	11.01B±63.76	37.05B±19.07	68.60B±0.40	76.19B±0.00	74.50B±0.00	
		0.9	35.00B±3.34	34.65B±2.61	68.10B±0.83	76.55B±0.13	91.03B±0.00	93.11B±0.00	
Purity		0.7	35.17B±6.73	36.55B±19.19	75.26B±1.49	87.93B±0.00	93.82B±0.00	93.96B±0.00	
		0.5	36.21B±5.11	35.29B±4.03	68.62B±1.51	82.58B±0.79	88.79B±0.00	92.24B±0.00	
		0.3	35.60B±13.71	39.14B±55.19	65.00B±7.46	87.84B±0.07	90.21B±0.00	90.52B±0.00	
Ori		ACC	0.9	43.10B±2.98	16.08B±0.88	56.18B±6.47	71.20B±4.95	86.50B±1.06	92.10B±2.04
			0.7	40.70B±1.22	15.22B±2.23	58.71B±4.36	75.58B±4.16	84.95B±0.85	88.72B±4.83

Таблица 3. Окончание

Dataset	Rate/methods	BSV	Concat	DAIMC	IMSC_AGL	TCIMV	EIMC_TGC	
	NMI	0.5	42.27B±1.92	16.87B±2.88	61.08B±1.89	71.45B±2.02	85.45B±0.54	87.87B±2.37
		0.3	42.40B±1.60	21.50B±135.6	65.05B±5.19	73.85B±4.44	84.00B±2.04	89.45B±1.76
		0.9	47.81B±0.20	24.28B±2.91	70.98B±1.91	83.22B±1.39	91.06B±0.09	95.02B±0.24
		0.7	47.93B±0.80	24.72B±5.56	73.70B±2.07	86.79B±0.36	92.94B±0.07	95.25B±0.36
		0.5	48.58B±0.79	29.04B±9.52	76.18B±1.89	84.57B±0.57	92.27B±0.17	94.98B±0.16
	Purity	0.3	48.62B±0.13	35.14B±178.1	79.90B±2.60	86.10B±0.57	91.24B±0.41	96.23B±0.28
		0.9	46.18B±1.20	19.10B±0.57	58.82B±4.76	74.13B±3.80	87.40B±0.09	92.65B±1.07
		0.7	44.47B±0.42	18.25B±2.09	61.05B±4.71	77.90B±1.86	88.35B±0.03	90.63B±1.88
		0.5	45.92B±1.04	19.82B±2.97	63.70B±3.15	74.12B±2.18	87.35B±0.17	90.07B±0.75
		0.3	45.72B±0.17	24.90B±146.8	68.15B±4.96	76.75B±2.19	86.60B±0.41	92.30B±1.27

Производительность кластеризации нашего метода на наборах данных Handwritten и Orl уменьшается при увеличении r/n (рис. 5). На наборах данных 3 Sources и BBC Sport производительность предложенной модели существенно не меняется при увеличении r/n . Рисунок 6 показывает, что время работы для решения \mathcal{U} становится больше с увеличением значения r/n на четырех наборах данных. Отметим, что $r = n$ не является оптимальным выбором, в данном методе имеет смысл использовать $r < n$.

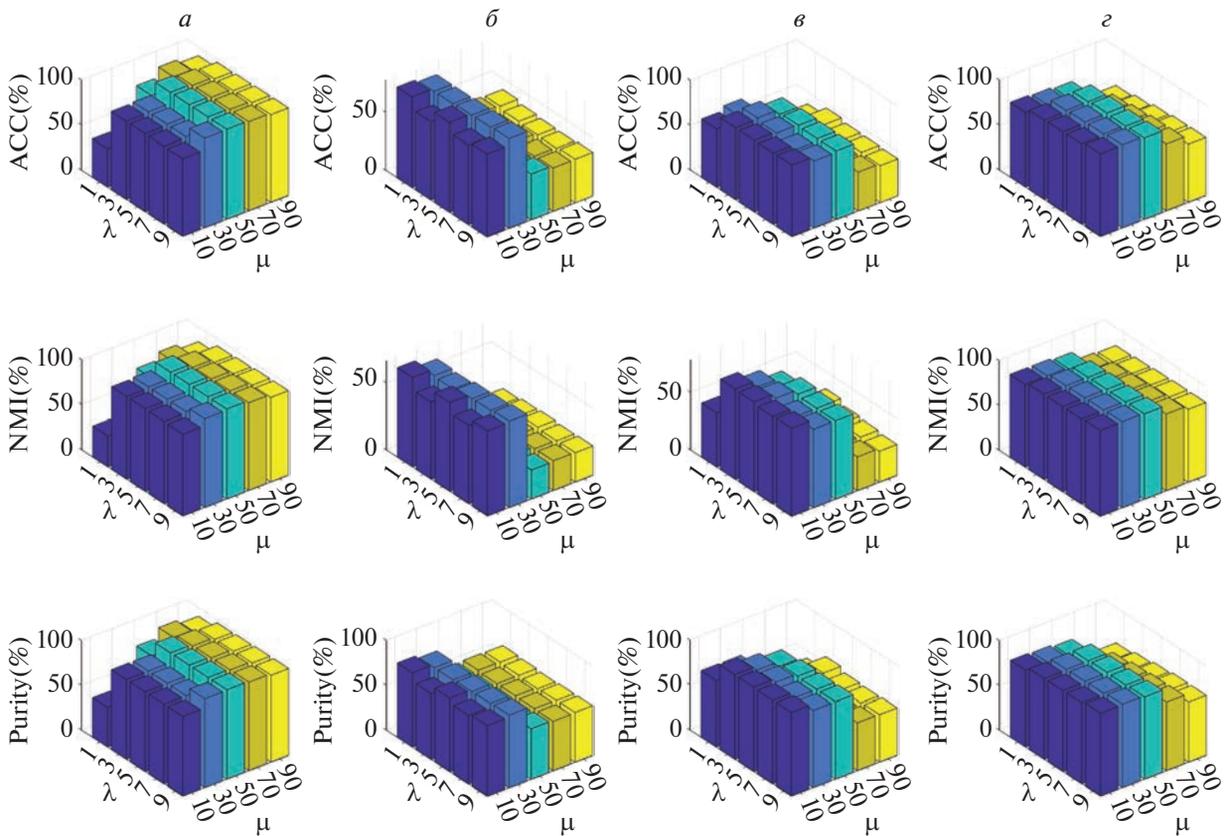


Рис. 2. Качество кластеризации при различных комбинациях параметров λ и μ на наборах данных Handwritten (а), 3 Sources (б), BBC Sport (в) и Orl (з) с уровнем пропусков 70%

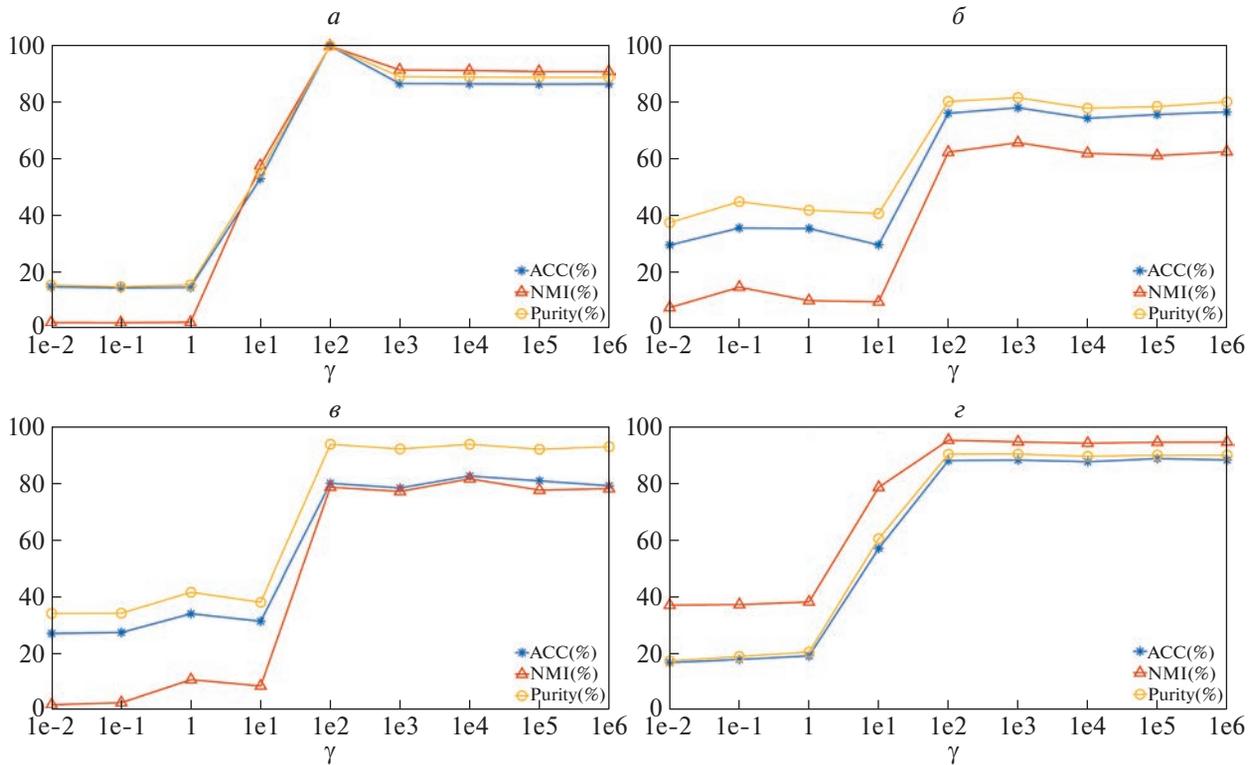


Рис. 3. Качество кластеризации при различных значениях параметра γ на наборах данных Handwritten (а), 3 Sources (б), BBC Sport (в) и Orl (г) с уровнем пропусков 70%

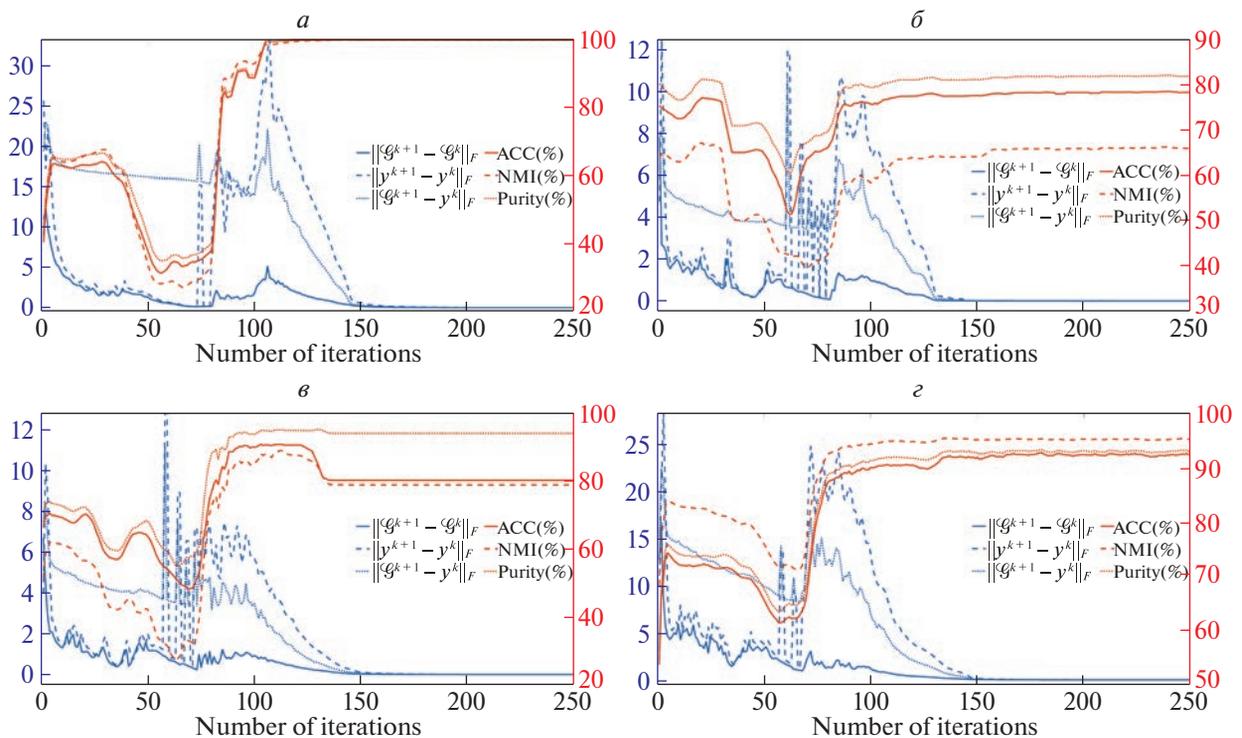


Рис. 4. Зависимость качества кластеризации от количества итераций на наборах данных Handwritten (а), 3 Sources (б), BBC Sport (в) и Orl (г) с уровнем пропусков 70%

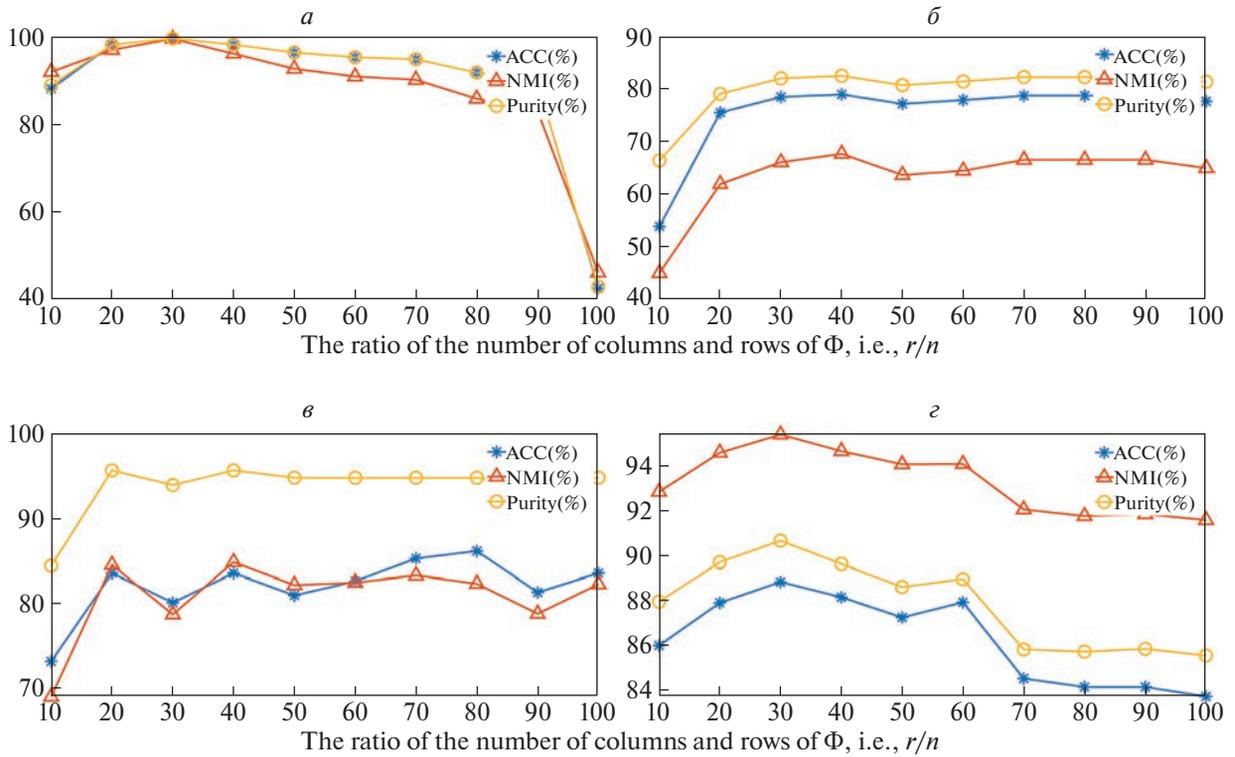


Рис. 5. Качество кластеризации для различных пропорций параметра r к n на наборах данных Handwritten (а), 3 Sources (б), BBC Sport (в) и Ori (г) с уровнем пропусков 70%

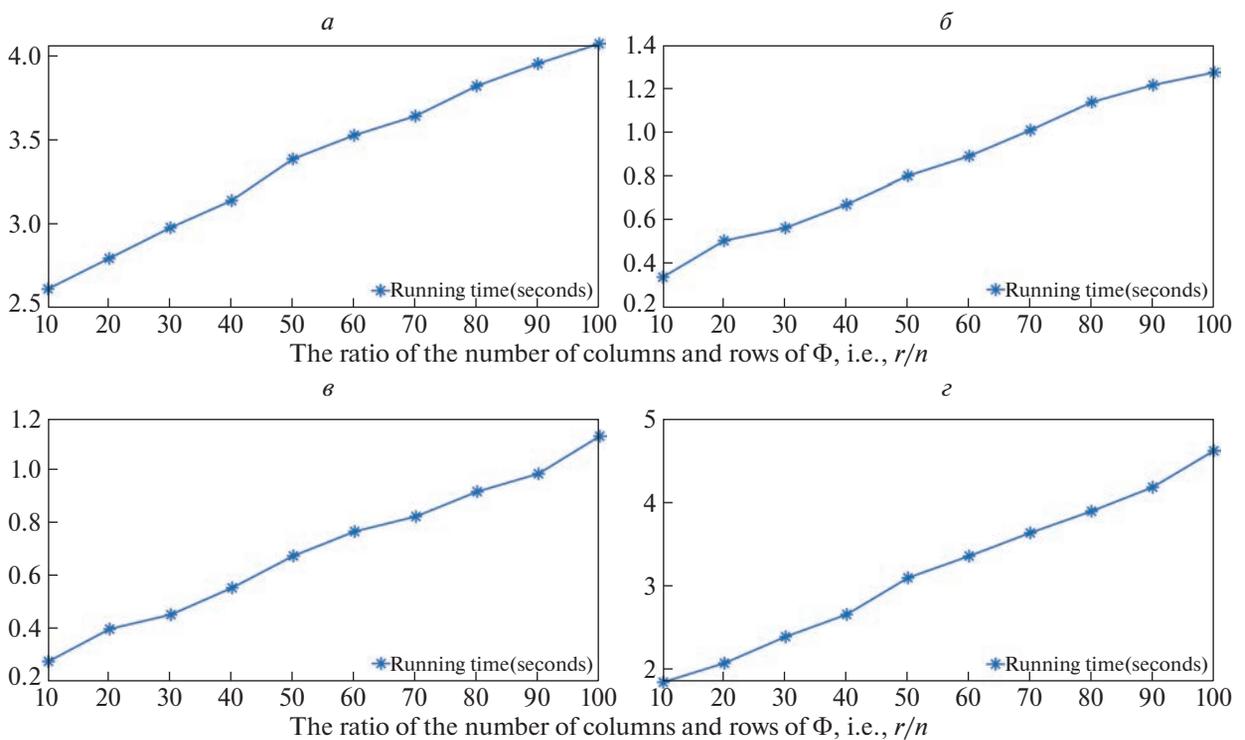


Рис. 6. Время работы для различных отношений параметра r к n на наборах данных Handwritten (а), 3 Sources (б), BBC Sport (в) и Ori (г) с уровнем пропусков 70%

Заключение. Представлен метод кластеризации неполных данных с несколькими аспектами, который применяет графы связности, дополненные путем тензорного восстановления. Это позволяет найти согласованное низкоразмерное подпространство, сохраняющее топологию (взаимное расположение) образцов. Построенная модель решается на основе метода неопределенных множителей Лагранжа, анализируется сходимость. Качество работы предложенного метода проверено на реальных наборах данных.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теорем 1, 2 и леммы 1. Перед доказательством теоремы 1, приведем леммы 2 и 3, представленные в [55].

Лемма 2. Пусть для оптимизационной задачи

$$\min_{x>0} \frac{1}{2}(x - \sigma)^2 + wx^p \quad (\text{П.1})$$

при заданных p и w определен порог

$$\tau_p(w) = (2w(1-p))^{1/2-p} + wp(2w(1-p))^{p/2-p}. \quad (\text{П.2})$$

Можно заключить, что:

1) если $\sigma \leq \tau_p(w)$, то оптимальное решение $x_p(\sigma, w)$ из (П.1) равно нулю;

2) если $\sigma > \tau_p(w)$, то оптимальным решением является $x_p(\sigma, w) = \text{sign}(\sigma)S_p(\sigma, w)$, где $S_p(\sigma, w)$

можно получить из $S_p(\sigma, w) - \sigma + wp(S_p(\sigma, w))^{p-1} = 0$.

Лемма 3. Пусть $Y = U_Y \Sigma_Y V_Y^\top$ – сингулярное разложение $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\tau > 0$, $l = \min(m, n)$, $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_l \geq 0$. Тогда глобальным оптимумом задачи

$$\min_X \tau \|X\|_{w, S_p}^p + \frac{1}{2} \|X - Y\|_F^2 \quad (\text{П.3})$$

будет

$$S_{\tau, w, p}(Y) = U_Y P_{\tau, w, p}(Y) V_Y^\top, \quad (\text{П.4})$$

где $P_{\tau, w, p}(Y) = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l)$ и $\gamma_i = x_p(\sigma_i(Y), \tau w_i)$ могут быть получены, согласно лемме 2.

Доказательство теоремы 1. Для заданной полуортогональной матрицы $\Phi \in \mathbb{R}^{n_3 \times r}$ существует полуортогональная матрица $\Phi^c \in \mathbb{R}^{n_3 \times (n_3 - r)}$, удовлетворяющая $\overline{\Phi}^\top \overline{\Phi} = I$, где $\overline{\Phi} = [\Phi, \Phi^c] \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_3}$. Согласно определению, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^* &= \arg \min_{\mathcal{X}} \tau \|\mathcal{X}\|_{\Phi, w, S_p}^p + \frac{1}{2} \|\mathcal{X} - \mathcal{A}\|_F^2 = \arg \min_{\mathcal{X}} \tau \sum_{i=1}^r \|X_{\Phi}^{(i)}\|_{w, S_p}^p + \frac{1}{2} \|\mathcal{X} - \mathcal{A}\|_F^2 = \\ &= \arg \min_{\mathcal{X}} \tau \sum_{i=1}^r \|X_{\Phi}^{(i)}\|_{w, S_p}^p + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \|X_{\Phi}^{(i)} - A_{\Phi}^{(i)}\|_F^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_3-r} \|X_{\Phi^c}^{(j)} - A_{\Phi^c}^{(j)}\|_F^2. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

В (П.5) переменные $X_{\Phi}^{(i)}$ и $X_{\Phi^c}^{(j)}$ независимы. Таким образом, задача может быть разделена на n_3 независимых подзадач:

$$\min_{X_{\Phi}^{(i)}} \tau \|X_{\Phi}^{(i)}\|_{w, S_p}^p + \frac{1}{2} \|X_{\Phi}^{(i)} - A_{\Phi}^{(i)}\|_F^2, \quad i = \overline{1, r}, \quad (\text{П.6})$$

и

$$\min_{X_{\Phi^c}^{(j)}} \frac{1}{2} \|X_{\Phi^c}^{(j)} - A_{\Phi^c}^{(j)}\|_F^2, \quad j = \overline{1, n_3 - r}. \quad (\text{П.7})$$

Согласно лемме 3, оптимальными решениями (П.6) и (П.7) являются $X_{\Phi}^{(i)*} = U_{A_{\Phi}^{(i)}} P_{\tau, w, \rho} (A_{\Phi}^{(i)}) V_{A_{\Phi}^{(i)}}^{\top}$ и $X_{\Phi^c}^{(j)*} = A_{\Phi^c}^{(j)}$ соответственно. Таким образом, получаем оптимальные решения

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\Phi}^* &= \text{fold} \left(X_{\Phi}^{(1)*}; X_{\Phi}^{(2)*}; \dots; X_{\Phi}^{(r)*}; X_{\Phi^c}^{(1)*}; X_{\Phi^c}^{(2)*}; \dots; X_{\Phi^c}^{(n_3-r)*} \right) = \\ &= \text{fold} \left(\mathcal{S}_{\tau, w, \rho} (A_{\Phi}^{(1)}); \dots; \mathcal{S}_{\tau, w, \rho} (A_{\Phi}^{(r)}); A_{\Phi^c}^{(1)}; \dots; A_{\Phi^c}^{(n_3-r)} \right) = \\ &= \text{fold} \left(\text{unfold} \left(\mathcal{S}_{\tau, w, \rho} (\mathcal{A}_{\Phi}) \right); \text{unfold} (\mathcal{A}_{\Phi^c}) \right). \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Далее оптимальным решением (2.32) станет $\mathcal{X}^* = \left(\mathcal{X}_{\Phi}^* \right)_{\Phi^{\top}}$.

Доказательство леммы 1. Из ограничения на \mathcal{C} в (2.12) ясно, что $\{\mathcal{C}^k\}$ должно быть ограничено. Далее, согласно (2.18), известно, что $\{A^k\}$ и $\left\{ \left\{ W_i^k \right\}_{i=1}^m \right\}$ также ограничены. На k -й итерации в алгоритме 2 имеем

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{C}^{k+1} \right\|_F &= \left\| \mathcal{C}^k + \rho^k \left(\mathcal{G}^{k+1} - \mathcal{Y}^{k+1} \right) \right\|_F = \rho^k \left\| \mathcal{G}^{k+1} + \frac{\mathcal{C}^k}{\rho^k} - \mathcal{Y}^{k+1} \right\|_F = \\ &= \rho^k \left\| \left(\mathcal{G}^{k+1} + \frac{\mathcal{C}^k}{\rho^k} - \mathcal{Y}^{k+1} \right) \right\|_{\Phi} = \rho^k \left\| \mathcal{B}_{\Phi}^k - \mathcal{Y}_{\Phi}^{k+1} \right\|_F. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Из (2.34) получаем

$$\mathcal{Y}_{\Phi}^{k+1} = \text{fold} \left(\text{unfold} \left(\mathcal{S}_{\frac{\mu}{\rho^k}, w, \rho} (\mathcal{B}_{\Phi}^k) \right); \text{unfold} (\mathcal{B}_{\Phi^c}^k) \right). \quad (\text{П.10})$$

Подставляя (П.10) в (П.9), имеем

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{C}^{k+1} \right\|_F &= \rho^k \left\| \mathcal{B}_{\Phi}^k - \text{fold} \left(\text{unfold} \left(\mathcal{S}_{\frac{\mu}{\rho^k}, w, \rho} (\mathcal{B}_{\Phi}^k) \right); \text{unfold} (\mathcal{B}_{\Phi^c}^k) \right) \right\|_F = \\ &= \rho^k \left\| \mathcal{B}_{\Phi}^k - \mathcal{S}_{\frac{\mu}{\rho^k}, w, \rho} (\mathcal{B}_{\Phi}^k) \right\|_F \leq \rho^k \sqrt{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\min(n_1, n_2)} \left(\frac{J w_j \mu}{\rho^k} \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\min(n_1, n_2)} (J w_j \mu)^2}, \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

где J – число итераций при решении задачи (П.1). Таким образом, $\{\mathcal{C}^k\}$ ограничено. Далее, согласно (2.34), видим, что

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{Y}^{k+1} \right\|_F &= \left\| \text{fold} \left(\text{unfold} \left(\mathcal{S}_{\frac{\mu}{\rho^k}, w, \rho} (\mathcal{B}_{\Phi}^k) \right); \text{unfold} (\mathcal{B}_{\Phi^c}^k) \right) \right\|_F \leq \\ &\leq \left\| \mathcal{S}_{\frac{\mu}{\rho^k}, w, \rho} (\mathcal{B}_{\Phi}^k) \right\|_F + \left\| \mathcal{B}_{\Phi^c}^k \right\|_F \leq \sum_{i=1}^r \left\| P_{\tau, w, \rho} (\mathcal{B}_{\Phi}^{k(i)}) \right\|_F + \left\| \mathcal{B}_{\Phi^c}^k \right\|_F. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Уже упоминалось, что $\{\mathcal{C}^k\}$ и $\{\mathcal{G}^k\}$ ограничены, поэтому $\{\mathcal{B}^k\}$ ограничено, а значит, $\{\mathcal{Y}^k\}$ также ограничено.

Ниже доказывается, что расширенная функция Лагранжа (2.16) ограничена. Заметим, что нельзя утверждать, что (2.16) ограничена на основании того, что все переменные ограничены, так как $\{\rho^k\}$ не ограничена. Сначала докажем, что

$$L_{\rho^k} \left(A^{k+1}, \left\{ W_i^{k+1} \right\}_{i=1}^m, \mathcal{G}^k, \mathcal{Y}^k, \mathcal{C}^k \right) \leq L_{\rho^k} \left(A^k, \left\{ W_i^k \right\}_{i=1}^m, \mathcal{G}^k, \mathcal{Y}^k, \mathcal{C}^k \right). \quad (\text{П.13})$$

Вспомним (2.17), пусть $f(A, W_i) = \|(A - W_i^\top X_i) P_i\|_F^2 + \lambda \text{tr}(A L_{G_i^k} A^\top)$ и, сочетая с $\delta_i^k = n_i / \sqrt{f(A^k, W_i^k)}$, можно вывести

$$\sum_{i=1}^m \frac{n_i f(A^{k+1}, W_i^{k+1})}{2\sqrt{f(A^k, W_i^k)}} \leq \sum_{i=1}^m \frac{n_i f(A^k, W_i^k)}{2\sqrt{f(A^k, W_i^k)}}. \quad (\text{П.14})$$

Для любых положительных чисел a и b выполняется следующее неравенство:

$$a - \frac{a^2}{2b} \leq b - \frac{b^2}{2b}. \quad (\text{П.15})$$

А так как $f(A, W_i) \geq 0$, то имеем

$$\sum_{i=1}^m n_i \left(\sqrt{f(A^{k+1}, W_i^{k+1})} - \frac{f(A^{k+1}, W_i^{k+1})}{2\sqrt{f(A^k, W_i^k)}} \right) \leq \sum_{i=1}^m n_i \left(\sqrt{f(A^k, W_i^k)} - \frac{f(A^k, W_i^k)}{2\sqrt{f(A^k, W_i^k)}} \right). \quad (\text{П.16})$$

Комбинируя (П.14) и (П.16), получаем

$$\sum_{i=1}^m n_i \sqrt{f(A^{k+1}, W_i^{k+1})} \leq \sum_{i=1}^m n_i \sqrt{f(A^k, W_i^k)}. \quad (\text{П.17})$$

Таким образом, выводится уравнение (П.13). В разд. 2.2.2 и 2.2.3 так как подзадачи \mathcal{G} и \mathcal{Y} имеют оптимальное решение, то очевидно, что

$$\begin{aligned} L_{\rho^k} \left(A^{k+1}, \{W_i^{k+1}\}_{i=1}^m, \mathcal{G}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{C}^k \right) &\leq L_{\rho^k} \left(A^{k+1}, \{W_i^{k+1}\}_{i=1}^m, \mathcal{G}^k, \mathcal{Y}^k, \mathcal{C}^k \right) \leq \\ &\leq L_{\rho^k} \left(A^k, \{W_i^k\}_{i=1}^m, \mathcal{G}^k, \mathcal{Y}^k, \mathcal{C}^k \right). \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_{\rho^k} \left(A^k, \{W_i^k\}_{i=1}^m, \mathcal{G}^k, \mathcal{Y}^k, \mathcal{C}^k \right) &= L_{\rho^{k-1}} \left(A^k, \{W_i^k\}_{i=1}^m, \mathcal{G}^k, \mathcal{Y}^k, \mathcal{C}^{k-1} \right) + \frac{\rho^k - \rho^{k-1}}{2} \|\mathcal{C}^k - \mathcal{Y}^k\|_F^2 + \\ &+ \left\langle \mathcal{C}^k - \mathcal{C}^{k-1}, \mathcal{G}^k - \mathcal{Y}^k \right\rangle = L_{\rho^{k-1}} \left(A^k, \{W_i^k\}_{i=1}^m, \mathcal{G}^k, \mathcal{Y}^k, \mathcal{C}^{k-1} \right) + \\ &+ \frac{\rho^k - \rho^{k-1}}{2} \left\| \frac{\mathcal{C}^k - \mathcal{C}^{k-1}}{\rho^{k-1}} \right\|_F^2 + \left\langle \mathcal{C}^k - \mathcal{C}^{k-1}, \frac{\mathcal{C}^k - \mathcal{C}^{k-1}}{\rho^{k-1}} \right\rangle = \\ &= L_{\rho^{k-1}} \left(A^k, \{W_i^k\}_{i=1}^m, \mathcal{G}^k, \mathcal{Y}^k, \mathcal{C}^{k-1} \right) + \frac{\rho^k + \rho^{k-1}}{2(\rho^{k-1})^2} \|\mathcal{C}^k - \mathcal{C}^{k-1}\|_F^2. \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

Пусть b_c является границей $\|\mathcal{C}^k - \mathcal{C}^{k-1}\|_F^2$. Сочетая уравнения (П.18), получаем

$$L_{\rho^k} \left(A^{k+1}, \{W_i^{k+1}\}_{i=1}^m, \mathcal{G}^{k+1}, \mathcal{Y}^{k+1}, \mathcal{C}^k \right) \leq L_{\rho^0} \left(A^1, \{W_i^1\}_{i=1}^m, \mathcal{G}^1, \mathcal{Y}^1, \mathcal{C}^0 \right) + b_c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k + \rho^{k-1}}{2(\rho^{k-1})^2}. \quad (\text{П.20})$$

Так как $\rho > 1$, то имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k + \rho^{k-1}}{2(\rho^{k-1})^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{(\rho^{k-1})^2} = \eta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^{k-1}} < +\infty. \quad (\text{П.21})$$

Комбинируя (П.19)–(П.21), расширенная функция Лагранжа (2.16) ограничена.

Доказательство теоремы 2. Согласно лемме 1, знаем, что $\{\mathcal{C}^k\}$, $\{\mathcal{G}^k\}$ и $\{\mathcal{Y}^k\}$ все ограничены. Теорема Больцано–Вейерштрасса гласит, что каждая ограниченная последовательность вещественных чисел имеет сходящуюся подпоследовательность. Поэтому существует по

крайней мере одна точка накопления для $\{\mathcal{C}^k\}$, $\{\mathcal{G}^k\}$ и $\{\mathcal{O}^k\}$ соответственно. В частности, можно получить

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}^k - \mathcal{O}^k\|_F = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^k} \|\mathcal{C}^k - \mathcal{C}^{k-1}\|_F = 0. \quad (\text{П.22})$$

Как и в разд. 2.2.2, каждая трубка из \mathcal{G}^k может быть проанализирована независимо. Если вспомнить, что g^{k+1} обновляется способом (2.27), то выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|g^{k+1} - g^k\|_F &= \left\| \frac{\rho^k}{\rho^k + \gamma} \max \left(P_w \left(u^k - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top u^k + \frac{1}{n} \mathbf{1} + v \mathbf{1} \right), 0 \right) \right\|_F \leq \\ & \left\| \max \left(P_{w^c} \left(u^k - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top u^k + \frac{1}{n} \mathbf{1} + v \mathbf{1} \right), 0 \right) - g^k \right\|_F \\ & \leq \left\| \frac{\rho^k}{\rho^k + \gamma} \left(u^k - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top u^k + \frac{1}{n} \mathbf{1} + v \mathbf{1} - \frac{\rho^k + \gamma}{\rho^k} g^k \right) \right\|_F + \left\| u^k - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top u^k + \frac{1}{n} \mathbf{1} + v \mathbf{1} - g^k \right\|_F. \end{aligned} \quad (\text{П.23})$$

Проанализируем первый и второй члены (П.23) отдельно:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\rho^k}{\rho^k + \gamma} \left(u^k - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top u^k + \frac{1}{n} \mathbf{1} + v \mathbf{1} - \frac{\rho^k + \gamma}{\rho^k} g^k \right) \right\|_F = \\ & = \left\| \frac{\rho^k}{\rho^k + \gamma} \begin{pmatrix} y^k - \frac{c^k}{\rho^k} + \frac{\gamma}{\rho^k} P_w(m) - \frac{1}{\rho^k} t^k \\ -\frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \left(y^k - \frac{c^k}{\rho^k} + \frac{\gamma}{\rho^k} P_w(m) - \frac{1}{\rho^k} t^k \right) \\ + \frac{1}{n} \mathbf{1} - g^k - \frac{\gamma}{\rho^k} g^k + v \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\|_F = \\ & = \left\| \frac{\rho^k}{\rho^k + \gamma} \begin{pmatrix} \frac{c^{k-1} - 2c^k}{\rho^k} + \frac{\gamma}{\rho^k} P_w(m) - \frac{1}{\rho^k} t^k \\ -\frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \left(\frac{c^{k-1} - 2c^k}{\rho^k} + \frac{\gamma}{\rho^k} P_w(m) - \frac{1}{\rho^k} t^k \right) \\ -\frac{\gamma}{\rho^k} g^k + v \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\|_F \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

и

$$\begin{aligned} & \left\| u^k - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top u^k + \frac{1}{n} \mathbf{1} + v \mathbf{1} - g^k \right\|_F = \\ & = \left\| \begin{pmatrix} y^k - \frac{c^k}{\rho^k} + \frac{\gamma}{\rho^k} P_w(m) - \frac{1}{\rho^k} t^k + \frac{1}{n} \mathbf{1} + v \mathbf{1} - g^k \\ -\frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \left(y^k - \frac{c^k}{\rho^k} + \frac{\gamma}{\rho^k} P_w(m) - \frac{1}{\rho^k} t^k \right) \end{pmatrix} \right\|_F = \\ & = \left\| \begin{pmatrix} \frac{c^{k-1} - c^k}{\rho^k} + \frac{\gamma}{\rho^k} P_w(m) - \frac{1}{\rho^k} t^k + v \mathbf{1} \\ -\frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \left(\frac{c^{k-1} - c^k}{\rho^k} + \frac{\gamma}{\rho^k} P_w(m) - \frac{1}{\rho^k} t^k \right) \end{pmatrix} \right\|_F. \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

Ниже показано, что v стремится к 0, когда k стремится к бесконечности. В соответствии с определением u^k имеет место следующее уравнение:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - g^k\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| g^k + \frac{c^{k-1} - 2c^k}{\rho^k} + \frac{\gamma}{\rho^k} P_w(m) - \frac{1}{\rho^k} t^k - g^k \right\|_2 = 0. \quad (\text{П.26})$$

Сопоставление (2.27) и (2.28), (П.26) влечет $f(0) = 0$, когда k стремится к бесконечности, т.е. v стремится к 0. В итоге, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g^{k+1} - g^k\|_2 = 0$ и, следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}^{k+1} - \mathcal{G}^k\|_F = 0. \quad (\text{П.27})$$

Для \mathcal{Y}^k справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{Y}^k\|_F &= \|\mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{G}^{k+1} - \mathcal{Y}^k + \mathcal{G}^k + \mathcal{G}^{k+1} - \mathcal{G}^k\|_F \leq \\ &\leq \|\mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{G}^{k+1}\|_F + \|\mathcal{Y}^k - \mathcal{G}^k\|_F + \|\mathcal{G}^{k+1} - \mathcal{G}^k\|_F. \end{aligned} \quad (\text{П.28})$$

Таким образом, комбинируя (П.22) и (П.27), имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{Y}^{k+1} - \mathcal{Y}^k\|_F = 0. \quad (\text{П.29})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhao J., Xie X., Xu X., Sun S. Multi-view Learning Overview: Recent Progress and New Challenges // Information Fusion. 2017. V. 38. P. 43–54.
2. Liu Y., Fan L., Zhang C., Zhou T., Xiao Z., Geng L., Shen D. Incomplete Multi-modal Representation Learning for Alzheimer's Disease Diagnosis // Medical Image Analysis. 2021. V. 69. P. 101953.
3. Qiao L., Zhang L., Chen S., Shen D. Data-driven Graph Construction and Graph Learning: A Review // Neurocomputing. 2018. V. 312. P. 336–351.
4. Wen J., Xu Y., Liu H. Incomplete Multiview Spectral Clustering with Adaptive Graph Learning // IEEE Trans. Cybernetics. 2020. V. 50. № 4. P. 1418–1429.
5. Wen J., Zhang Zheng, Zhang Zhao, Fei L.K., Wang M. Generalized Incomplete Multiview Clustering with Flexible Locality Structure Diffusion // IEEE Trans. Cybernetics. 2021. V. 51. № 1. P. 101–114.
6. Zhang N., Sun S. Incomplete Multiview Nonnegative Representation Learning with Multiple Graphs // Pattern Recognition. 2022. V. 123. P. 108412.
7. Wen J., Yan K., Zhang Z., Xu Y., Wang J.Q., Fei L.K., Zhang B. Adaptive Graph Completion Based Incomplete Multiview Clustering // IEEE Trans. Multimedia. 2021. V. 23. P. 2493–2504.
8. Liu J., Teng S., Zhang W., Fang X., Fei L., Zhang Z. Incomplete Multiview Subspace Clustering with Low-rank Tensor // Proc. IEEE Intern. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing. Toronto, Canada, 2021. P. 3180–3184.
9. Wen J., Zhang Zheng, Zhang Zhao, Zhu L., Fei L.K., Zhang B., Xu Y. Unified Tensor Framework for Incomplete Multiview Clustering and Missing-view Inferring // Proc. 35th AAAI Conf. Artificial Intelligence. AAAI Press: Palo Alto, CA, USA. 2021. V. 35. P. 10273–10281.
10. Xia W., Gao Q., Wang Q., Gao X. Tensor Completion-based Incomplete Multiview Clustering // IEEE Trans. Cybernetics. 2022. V. 52. № 12. P. 13635–13644.
11. Blaschko M.B., Lampert C.H., Gretton A. Semi-supervised Laplacian Regularization of Kernel Canonical Correlation Analysis // Proc. Joint Europ. Conf. Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases. Antwerp, Belgium, 2008. P. 133–145.
12. Chen X., Chen S., Xue H., Zhou X. A Unified Dimensionality Reduction Framework for Semi-paired and Semi-supervised Multiview Data // Pattern Recognition. 2012. V. 45. № 5. P. 2005–2018.
13. Zhou X., Chen X., Chen S. Neighborhood Correlation Analysis for Semi-paired Two-view Data // Neural Processing Letters. 2013. V. 37. № 3. P. 335–354.
14. Yuan Y., Wu Z., Li Y., Qiang J., Gou J., Zhu Y. Regularized Multiset Neighborhood Correlation Analysis for Semi-paired Multiview Learning // Intern. Conf. Neural Information Processing. Vancouver, Canada, 2020. P. 616–625.
15. Yang W., Shi Y., Gao Y., Wang L., Yang M. Incomplete Data Oriented Multiview Dimension Reduction via Sparse Low-rank Representation // IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems. 2018. V. 29. № 12. P. 6276–6291.
16. Zhu C., Chen C., Zhou R., Wei L., Zhang X. A New Multiview Learning Machine with Incomplete Data // Pattern Analysis and Applications. 2020. V. 23. № 3. P. 1085–1116.
17. Li S., Jiang Y., Zhou Z. Partial Multiview Clustering // Proc. AAAI Conf. artificial intelligence. Québec City, Canada, 2014. V. 28. № 1.
18. Xu C., Tao D., Xu C. Multiview Learning with Incomplete Views // IEEE Trans. Image Processing. 2015. V. 24. № 12. P. 5812–5825.

19. *Wen J., Zhang Z., Xu Y., Zhong Z.* Incomplete Multiview Clustering via Graph Regularized Matrix Factorization // Proc. European Conf. Computer Vision Workshops. Munich, Germany, 2018. P. 1–16.
20. *Hu M., Chen S.* Doubly Aligned Incomplete Multiview Clustering // Proc. Intern. Joint Conf. Artificial Intelligence. Stockholm, Sweden, 2018. P. 2262–2268.
21. *Hu M., Chen S.* One-pass Incomplete Multiview Clustering // Proc. AAAI Conf. Artificial Intelligence. Honolulu, Hawaii, USA, 2019. V. 33. P. 3838–3845.
22. *Liu J., Teng S., Fei L., Zhang W., Fang X., Zhang Z., Wu N.* A Novel Consensus Learning Approach to Incomplete Multiview Clustering // Pattern Recognition. 2021. V. 115. P. 107890.
23. *Liu X., Zhu X., Li M., Wang L., Zhu E., Liu T., Kloft M., Shen D., Yin J., Gao W.* Multiple Kernel k-means with Incomplete Kernels // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2019. V. 42. № 5. P. 1191–1204.
24. *Wen J., Sun H., Fei L., Li J., Zhang Z., Zhang B.* Consensus Guided Incomplete Multiview Spectral Clustering // Neural Networks. 2021. V. 133. P. 207–219.
25. *Zhuge W., Luo T., Tao H., Hou C., Yi D.* Multiview Spectral Clustering with Incomplete Graphs // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 99820–99831.
26. *Liu X., Zhu X., Li M., Wang L., Tang C., Yin J., Shen D., Wang H., Gao W.* Late Fusion Incomplete Multiview Clustering // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2018. V. 41. № 10. P. 2410–2423.
27. *Zheng X., Liu X., Chen J., Zhu E.* Adaptive Partial Graph Learning and Fusion for Incomplete Multiview Clustering // Intern. J. Intelligent Systems. 2022. V. 37. № 1. P. 991–1009.
28. *Xie M., Ye Z., Pan G., Liu X.* Incomplete Multiview Subspace Clustering with Adaptive Instance Sample Mapping and Deep Feature Fusion // Applied Intelligence. 2021. V. 51. № 8. P. 5584–5597.
29. *Zhao L., Chen Z., Yang Y., Wang Z.J., Leung V.C.* Incomplete Multiview Clustering via Deep Semantic Mapping // Neurocomputing. 2018. V. 275. P. 1053–1062.
30. *Zhang C., Han Z., Fu H., Zhou J.T., Hu Q.* CPM-nets: Cross Partial Multiview Networks // Advances in Neural Information Processing Systems. 2019. V. 32.
31. *Wang Q., Ding Z., Tao Z., Gao Q., Fu Y.* Partial Multiview Clustering via Consistent GAN // Proc. IEEE Intern. Conf. Data Mining. Singapore, 2018. P. 1290–1295.
32. *Xu C., Liu H., Guan Z., Wu X., Tan J., Ling B.* Adversarial Incomplete Multiview Subspace Clustering Networks // IEEE Trans. Cybernetics. 2022. V. 52. № 10. P. 10490–10503.
33. *Goodfellow I., Pouget-Abadie J., Mirza M., Xu B., Warde-Farley D., Ozair S., Courville A., Bengio Y.* Generative Adversarial Networks // Comm. ACM. 2020. V. 63. № 11. P. 139–144.
34. *Lin Y., Gou Y., Liu Z., Li B., Lv J., Peng X.* Completer: Incomplete Multiview Clustering via Contrastive Prediction // Proc. IEEE/CVF Conf. Computer Vision and Pattern Recognition. Nashville, TN, USA, 2021. P. 11174–11183.
35. *Zhang B., Hao J., Ma G., Yue J., Shi Z.* Semi-paired Probabilistic Canonical Correlation Analysis // Intelligent Information Processing VII. IFIP Advances in Information and Communication Technology. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. V. 432.
36. *Matsuura T., Saito K., Ushiku Y., Harada T.* Generalized Bayesian Canonical Correlation Analysis with Missing Modalities // 15th Europ. Conf. Computer Vision (ECCV). Munich, Germany, 2018. V. 11134. P. 641–656.
37. *Li P., Chen S.* Shared Gaussian Process Latent Variable Model for Incomplete Multiview Clustering // IEEE Trans. Cybernetics. 2018. V. 50. № 1. P. 61–73.
38. *Kamada C., Kanazaki A., Harada T.* Probabilistic Semi-canonical Correlation Analysis // Proc. 23rd ACM Intern. Conf. Multimedia. Brisbane, Australia, 2015. P. 1131–1134.
39. *Wang C.* Variational Bayesian Approach to Canonical Correlation Analysis // IEEE Trans. Neural Networks. 2007. V. 18. № 3. P. 905–910.
40. *Kimura A., Sugiyama M., Nakano T., Kameoka H., Sakano H., Maeda E., Ishiguro K.* SemiCCA: Efficient Semi-supervised Learning of Canonical Correlations // Information and Media Technologies. 2013. V. 8. № 2. P. 311–318.
41. *Luo Y., Tao D., Ramamohanarao K., Xu C., Wen Y.* Tensor Canonical Correlation Analysis for Multiview Dimension Reduction // IEEE Trans. Knowledge and Data Engineering. 2015. V. 27. № 11. P. 3111–3124.
42. *Wong H., Wang L., Chan R., Zeng T.* Deep Tensor CCA for Multiview Learning // IEEE Trans. Big Data. 2021. V. 8. P. 1664–1677.
43. *Cheng M., Jing L., Ng M.K.* Tensor-based Low-dimensional Representation Learning for Multiview Clustering // IEEE Trans. Image Processing. 2018. V. 28. № 5. P. 2399–2414.
44. *Zhang C., Fu H., Liu S., Liu G., Cao X.* Low-rank Tensor Constrained Multiview Subspace Clustering // Proc. IEEE Intern. Conf. Computer Vision. Santiago, Chile, 2015. P. 1582–1590.
45. *Wu J., Lin Z., Zha H.* Essential Tensor Learning for Multiview Spectral Clustering // IEEE Trans. Image Processing. 2019. V. 28. № 12. P. 5910–5922.
46. *Carroll J.* Generalization of Canonical Correlation Analysis to Three or More Sets of Variables // Proc. 76th Annual Convention of the American Psychological Association. 1968. V. 3. P. 227–228.

47. *Chen J., Wang G., Giannakis G.B.* Graph Multiview Canonical Correlation Analysis // IEEE Trans. Signal Processing. 2019. V. 67. № 11 P. 2826–2838.
48. *Nie F., Li J., Li X.* Self-weighted Multiview Clustering with Multiple Graphs // Intern. Joint Conf. Artificial Intelligence. Melbourne, Australia, 2017. P. 2564–2570.
49. *Fan K.* On a Theorem of Weyl Concerning Eigenvalues of Linear Transformations // Proc. National Academy of Sciences. 1949. V. 35. № 11. P. 652–655.
50. *van Breukelen M., Duin R.P.W., Tax D.M.J., den Hartog J.E.* Handwritten Digit Recognition by Combined Classifiers // Kybernetika. 1998. V. 34. № 4. P. 381–386.
51. *Greene D.* 3 Sources Dataset // Электронный ресурс: <http://erdos.ucd.ie/datasets/3sources.html>. Дата доступа: 7 января 2023 г.
52. *Greene D., Cunningham P.* Practical Solutions to the Problem of Diagonal Dominance in Kernel Document Clustering // Proc. 23rd Intern. Conf. Machine Learning. Pittsburgh, PA, USA, 2006. P. 377–384.
53. *Samaria F.S., Harter A.C.* Parameterisation of a Stochastic Model for Human Face Identification // Proc. IEEE Workshop on Applications of Computer Vision. Sarasota, FL, USA, 1994. P. 138–142.
54. *Zhao H., Liu H., Fu Y.* Incomplete Multi-modal Visual Data Grouping // Proc. Intern. Joint Conf. Artificial Intelligence. N.Y., USA, 2016. P. 2392–2398.
55. *Xie Y., Gu S., Liu Y., Zuo W., Zhang W., Zhang L.* Weighted Schatten p-norm Minimization for Image Denoising and Background Subtraction // IEEE Trans. Image Processing. 2016. V. 25. № 10. P. 4842–4857.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.853,517.977.5

МЕТОДЫ И МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ РЕСУРСАМИ ПРОЕКТА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ¹

© 2023 г. О. А. Косоруков^{a,*}, Д. В. Лемтюжникова^{b,c,**}, А. В. Мищенко^{d,***}

^aМГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^bИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

^cМАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

^dТехнологический ун-т им. дважды Героя Советского Союза, летчика-космонавта А.А. Леонова,
Королев, Моск. обл., Россия

*e-mail: kosorukovoa@mail.ru

**e-mail: darabbt@gmail.com

***e-mail: alnex4957@rambler.ru

Поступила в редакцию 23.09.2022 г.

После доработки 05.10.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Рассматриваются методы оптимизации расписаний выполнения работ проекта для критерия минимизации средневзвешенного времени их выполнения. В том случае, когда длительности работ заданы детерминировано, предложен точный и приближенный метод решения задачи выбора оптимального расписания. Если возможны изменения длительности работ, создан аналитический инструментарий оценки устойчивости расписаний как для ситуации интервального задания длительностей работ, так и для ситуации изменения длительностей работ при возможных возмущениях внешней среды. В том случае, если длительности работ заданы стохастически, предлагается механизм оценки эффективности расписания по двум критериям и предложена процедура количественной оценки риска расписания.

DOI: 10.31857/S0002338823020117, EDN: JEPAKF

Введение. При оценке эффективности проекта необходимо учитывать такой показатель, как продолжительность инвестиционной фазы проекта. Этот показатель, в частности, отвечает на вопрос: за какое время может быть создано то или иное предприятие, производящее конечную продукцию или оказывающее определенные услуги потребителю, реализация которых обеспечивает окупаемость проекта по созданию предприятия. При формировании календарного плана выполнения работ проекта большое значение имеет оценка жизненного цикла выпускаемой продукции или оказываемых услуг, так как соотношение продолжительности инвестиционной фазы проекта и жизненного цикла выпускаемой продукции существенным образом влияет на его окупаемость. В статье рассмотрены методы и модели оптимизации инвестиционной фазы проекта, позволяющие формировать наиболее рациональные решения при формировании календарного плана выполнения работ проекта.

Общая постановка этих задач заключается в том, чтобы упорядочить во времени выполнение определенных действий при соблюдении ряда условий. Каждое действие состоит из элементарных операций, называемых работами (заявками или заданиями), которые могут быть либо подготовлены заранее, либо поступать динамически. Организация выполнения работ осуществляется таким образом, чтобы минимизировать один из следующих показателей: время выполнения всех работ, среднее взвешенное время завершения работ, объем незавершенной обработки заявок за определенный период, потери времени на ожидание обработки заявок. Моделирование распределения ограниченных ресурсов часто сводится к решению линейных и нелинейных задач дискретной оптимизации, большинство которых относится к NP-трудным, которые характеризуются экспоненциальным ростом объема вычислений при увеличении размерности задачи [1].

¹ Результаты исследований, представленные в разд. 3–5, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 22-71-10131).

Это обстоятельство, а также то, что находить оптимальное решение часто приходится в условиях неточной исходной информации, определяет актуальность разработки эффективных методов управления ограниченными ресурсами. В предлагаемой статье основное внимание будет уделено оптимизации управления проектом при изменяющихся длительностях работ. Несмотря на то, что на текущий момент времени созданы многочисленные методы и модели оптимизации управления ресурсами проектов, тем не менее, при решении проблемы минимизации инвестиционной фазы проекта в условиях неопределенности и риска существует определенный дефицит соответствующего количественного инструментария. При этом именно инвестиционная фаза как наиболее трудоемкая и капиталоемкая играет существенную роль в успехе всего проекта. Ошибки планирования на этом периоде, вызванные неучтенным риском, могут привести к значительным потерям. Рассмотрена детерминированная модель теории расписаний, предполагающая использование нескладируемых ресурсов с учетом матричного задания времени выполнения операций исполнителями и предложен метод ветвей и границ получения оптимального решения. Получены методы оценки устойчивости расписаний при выполнении непрерываемых работ проекта при различных способах задания изменения их длительности. В ситуации, когда длительности работ заданы как случайные величины, предложена двухкритериальная модель оценки эффективности расписания. Модели оптимального управления ограниченными ресурсами рассматривались в ряде публикаций отечественных и зарубежных авторов. Например, оптимизационные задачи оценки эффективности производственных программ в условиях неопределенности исследуются в [2, 3]. Методы оценки устойчивости расписаний при изменении параметров задачи анализируются в [4, 5]. Динамические и статические модели и методы управления ограниченными ресурсами на транспорте рассмотрены в [6–8]. Точные и приближенные алгоритмы построения оптимальных расписаний для планирования работы многопроцессорной вычислительной техники представлены в [9–11]. Модели и методы управления ограниченными ресурсами, которые сводятся к решению минимаксных задач, приведены в [12–18].

1. Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим, ситуацию выполнения n работ проекта с использованием нескладируемых ресурсов, объем которых задан вектором $b = (b_1, \dots, b_n)$. Технологическая последовательность выполнения работ задана ориентированным ациклическим графом $G(m, n)$, где m – дуги орграфа, n – вершины орграфа, соответствующие работам проекта. Для выполнения работы i необходимы нескладируемые ресурсы в объеме $\bar{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$, $i = \overline{1, n}$. Длительности работ заданы вектором $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Необходимо сформировать оптимальное расписание выполнения работ проекта, не нарушающее технологических ограничений на последовательность выполнения работ, заданных орграфом $G(m, n)$, и ограничение на объем используемых нескладируемых ресурсов в каждый момент времени выполнения работ проекта. В качестве критерия эффективности расписания будем применять средневзвешенное время завершения всех работ проекта, т.е. в оптимальном расписании необходимо минимизировать:

$$\sum_{i=1}^n \tau_i \alpha_i \rightarrow \min. \quad (1.1)$$

Здесь τ_i – время завершения работы i ; α_i – весовой коэффициент, определяющий, насколько важно скорейшее завершение работы i , $i = \overline{1, n}$. Далее будем предполагать, что работы проекта не прерываемы, т.е. если ресурсы выделены некоторой работе K , то они должны быть ею использованы до полного ее выполнения.

1.1. Метод ветвей и границ. В представленной выше формулировке задача принадлежит к классу NP-трудных задач целочисленной оптимизации, для решения которых применяется подход, получивший название “метод ветвей и границ”. Ниже предлагается описание метода ветвей и границ для данной задачи.

Шаг 1. Вычисляется нижняя оценка оптимального расписания с помощью критерия (1.1). При этом предполагается, что ресурсные ограничения отсутствуют и работы выполняются в последовательности, заданной орграфом $G(m, n)$. Таким образом, определяется момент окончания работы τ_i :

$$\tau_i^H = \max_{l=1, L_i} \left\{ \sum_{g \in K_l^i} t_g \right\} + t_i. \quad (1.2)$$

Здесь τ_i^H – нижняя оценка момента окончания работы i ; K_i^l – множество работ предшественников для работы i в пути с номером l , L_i – число путей, в которые входит работа i ; t_i – продолжительность работы i .

Вычислив все величины τ_i^H , $i = \overline{1, n}$, найдем величину нижней оценки эффективности оптимального расписания T_H :

$$T_H = \sum_{i=1}^n \tau_i^H \alpha_i. \quad (1.3)$$

Шаг 2. Рассчитывается верхняя оценка значения целевой функции на оптимальном решении. Для этого формируется некоторое допустимое расписание (с учетом последовательности выполнения работ, заданных орграфом $G(m, n)$, и ресурсных ограничений). Соответствующие моменты завершения работ обозначим через τ_i^B , $i = \overline{1, n}$, и вычислим значение верхней оценки оптимального расписания T_B :

$$T_B = \sum_{i=1}^n \tau_i^B. \quad (1.4)$$

Если $T_B = T_H$, то оптимальное решение определено, оно сформировано на шаге 2. Если $T_B > T_H$, переходим к шагу 3.

Шаг 3. На этом шаге определяются так называемые текущие нижние оценки. Это вычисление происходит каждый раз при формировании очередного расписания после завершения одной из работ проекта в момент τ по следующей формуле:

$$T_H^{\text{тек}}(\tau) = \sum_{i \in R(\tau)} \tau_i \alpha_i + T_H(N \setminus R(\tau)). \quad (1.5)$$

Здесь N – множество всех работ проекта; $R(\tau)$ – множество работ, выполненных к моменту времени τ ; τ_i – моменты завершения работ из множества $R(\tau)$; $T_H(N \setminus R(\tau))$ – нижняя оценка на множестве работ, заданных графом $G(m, n)$, с учетом того, что работы множества $R(\tau)$ завершены полностью и, значит, их длительности равны нулю. Некоторые работы выполнены частично и, следовательно, их длительности должны быть скорректированы при расчетах $T_H(N \setminus R(\tau))$. Таким образом, первое слагаемое в формуле (1.5) – значение целевой функции (1.1) для выполненных работ, а вторая часть формулы (1.5) – нижняя оценка целевой функции (1.1) для невыполненных работ формируемого расписания.

Если получили, что $T_H^{\text{тек}}(\tau) \geq T_B$, то прерывается формирование текущего расписания и переход на формирование другого расписания. Если $T_H^{\text{тек}}(\tau) < T_B$, то осуществляется выбор очередной невыполненной работы и выделяются необходимые ресурсы для ее выполнения. Далее вычисляется очередной момент $\tau^1 > \tau$, связанный с окончанием одной из работ, определяется $T_H^{\text{тек}}(\tau^1)$ по формуле (1.5). В зависимости от результата формируемое расписание либо отбраковывается, либо его формирование продолжается. Эта итеративная процедура вычисления $T_H^{\text{тек}}(\tau)$ приведет таким образом либо к ситуации отбраковки расписания, либо к ситуации, когда все работы будут выполнены, и получим сформированное расписание, у которого значение целевой функции (1.1) T^* будет меньше T_B . Во втором случае корректируем значение T_B , полагая, что $T_B = T^*$. Таким образом мы сократили интервал (T_H, T_B) . Если при этом T_H стало равно T_B , то последнее сформированное расписание будет оптимальным.

Если $T_H < T_B$, то переходим к анализу очередного варианта формирования расписания с вычислением текущих нижних оценок. Вычислительная процедура получения оптимального решения завершится, когда будет сформировано решение, значение целевой функции на которой равно T_H . Если это не произойдет и будут проанализированы все допустимые расписания, то в качестве оптимального выбирается то, которое соответствует последнему (минимальному) значению T_B .

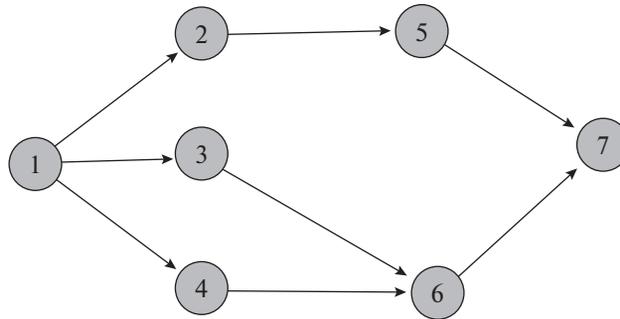


Рис. 1. Ориентированный граф $G(m, n)$, задающий последовательность выполняемых работ

Переборный характер предлагаемого метода и, возможно, большой объем вычислений с учетом того, что исследуемая задача является NP – трудной, приводит к необходимости использовать приближенную схему, основанную на идеологии метода ветвей и границ.

Особенность так называемого усеченного метода ветвей и границ позволяет сократить количество анализируемых расписаний за счет того, что анализ допустимых расписаний осуществляется до тех пор, пока не будет выполняться неравенство:

$$T_{\text{в}} - T_{\text{н}} \leq \Delta.$$

Здесь Δ – требуемая близость верхней и нижней оценок. Также может применяться оценка относительной близости $T_{\text{в}}$ и $T_{\text{н}}$, такая, как

$$\frac{T_{\text{в}} - T_{\text{н}}}{T_{\text{в}}} 100 \% \leq K\%,$$

K – это относительная точность полученного приближенного решения в процентах.

1.2. Пример использования метода ветвей и границ. Рассмотрим этот пример для следующего перечня работ, последовательности выполнения которых заданы графом $G(m, n)$ (рис. 1).

Будем полагать, что для выполнения каждой работы требуется один исполнитель, а всего исполнителей два. Длительности работы заданы по правилу $t_i = i$, т.е. $t = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Весовые коэффициенты α_i равны: $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 2$; $\alpha_3 = 3$; $\alpha_4 = 4$; $\alpha_5 = 5$; $\alpha_6 = 6$; $\alpha_7 = 7$.

Шаг 1. Вычисляем $T_{\text{н}}$ с помощью алгоритма, предложенного в методе ветвей и границ. Используя формулы (1.2) и (1.3), получим:

$$\begin{aligned} \tau_1^{\text{н}} &= t_1 = 1; & \tau_2^{\text{н}} &= 1 + 2 = 3; & \tau_3^{\text{н}} &= 1 + 3 = 4, \\ \tau_4^{\text{н}} &= 1 + 4 = 5; & \tau_5^{\text{н}} &= 1 + 2 + 5 = 8, \\ \tau_6^{\text{н}} &= \max\{1 + 3; 1 + 4\} + 6 = 5 + 6 = 11, \\ \tau_7^{\text{н}} &= \max\{1 + 2 + 5; 1 + 3 + 6; 1 + 4 + 6\} + 7 = 18, \\ T_{\text{н}} &= 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 11 \cdot 6 + 18 \cdot 7 = 170. \end{aligned}$$

Таким образом $T_{\text{н}} = 170$.

Шаг 2. Для вычисления $T_{\text{в}}$ сформируем следующее допустимое расписание для заданных длительностей работ.

Горизонтальная ось – время; вертикальная ось – номера исполнителей 1 и 2. Согласно диаграмме Ганта (рис. 2), получим расписание: $\tau_1 = 1$; $\tau_2 = 3$; $\tau_3 = 4$; $\tau_4 = 8$; $\tau_5 = 8$; $\tau_6 = 14$; $\tau_7 = 21$. Следовательно, значение целевой функции на этом расписании, а значит, и значение верхней оценки равны:

$$T_{\text{в}} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 14 + 7 \cdot 21 = 324.$$

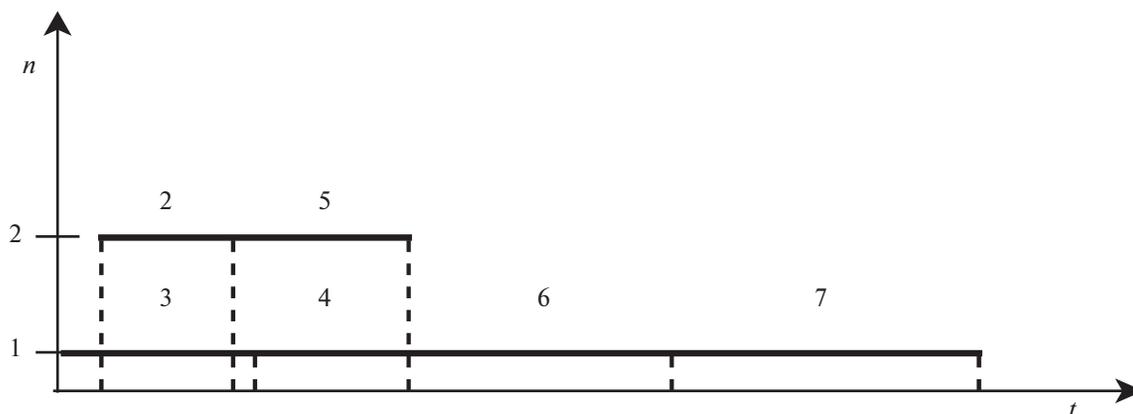


Рис. 2. Диаграмма Ганта для первого допустимого расписания

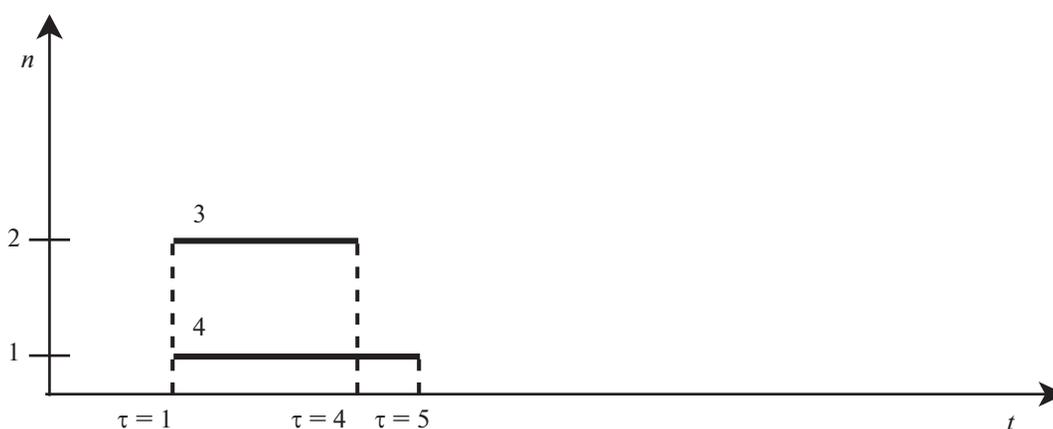


Рис. 3. Фрагмент диаграммы Ганта для вычисления $T_n^{\text{тек}} (\tau = 4)$

С учетом того, что $T_b > T_n$, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Начинаем формировать очередное расписание с вычислением $T_n^{\text{тек}} (\tau)$ с использованием формулы (1.5). Вначале, как и в первом пояснении, выполняем работу 1, а затем ставим на выполнение работы 3 и 4 (рис. 3):

$$T_n^{\text{тек}} (\tau = 4) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 11 \cdot 5 + 11 \cdot 6 + 17 \cdot 7 = 280.$$

Так как $T_n^{\text{тек}} < T_b = 324$, то продолжаем формировать расписание (рис. 4):

$$T_n^{\text{тек}} (\tau = 5) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 11 \cdot 5 + 11 \cdot 6 + 17 \cdot 7 = 280.$$

С учетом того, что $T_n^{\text{тек}} (\tau = 5) < T_b$, продолжаем формировать расписание (рис. 5):

$$T_n^{\text{тек}} (\tau = 5) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 11 \cdot 5 + 11 \cdot 6 + 18 \cdot 7 = 287.$$

Поскольку $T_n^{\text{тек}} (\tau = 6) < T_b$, продолжаем формировать расписание (рис. 6):

$$T_n^{\text{тек}} (\tau) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 11 \cdot 5 + 11 \cdot 6 + 18 \cdot 7 = 287 < T_b.$$

С учетом того, что в момент $\tau = 11$ ставится на выполнение работа 7 и момент ее завершения равен 18, получаем новое расписание (рис. 7), значение целевой функции T на котором равно:

$$T = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 11 \cdot 5 + 11 \cdot 6 + 18 \cdot 7 = 287.$$

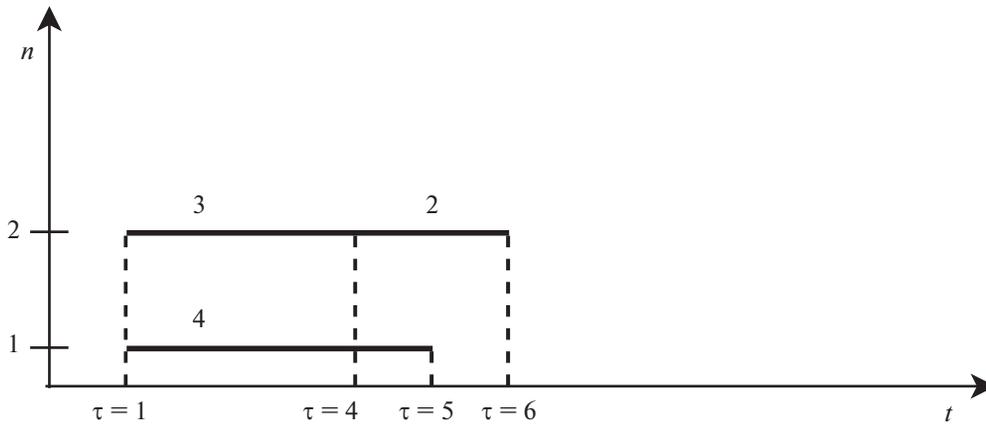


Рис. 4. Фрагмент диаграммы Ганта для вычисления $T_H^{\text{тек}} (\tau = 5)$

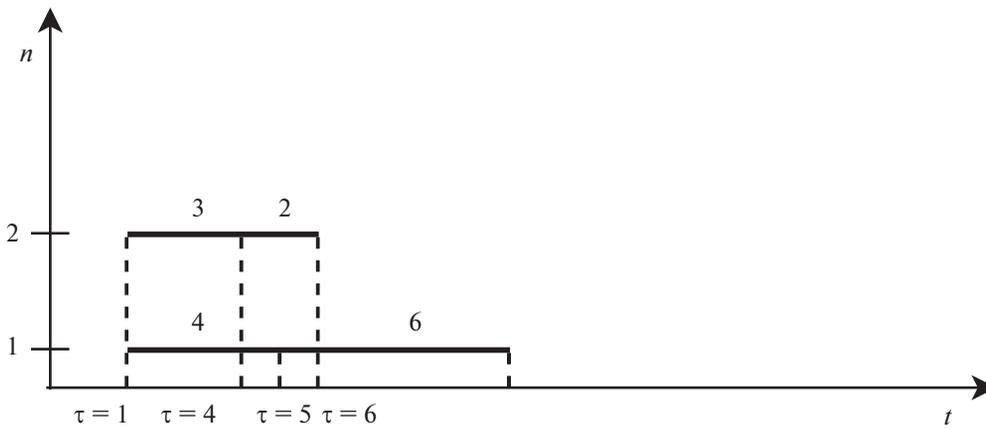


Рис. 5. Фрагмент диаграммы Ганта для вычисления $T_H^{\text{тек}} (\tau = 6)$

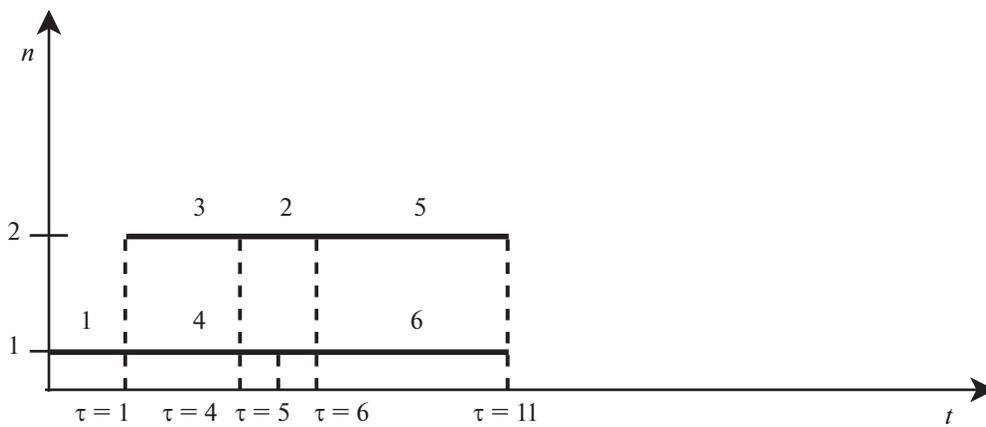


Рис. 6. Фрагмент диаграммы Ганта для вычисления $T_H^{\text{тек}} (\tau = 11)$

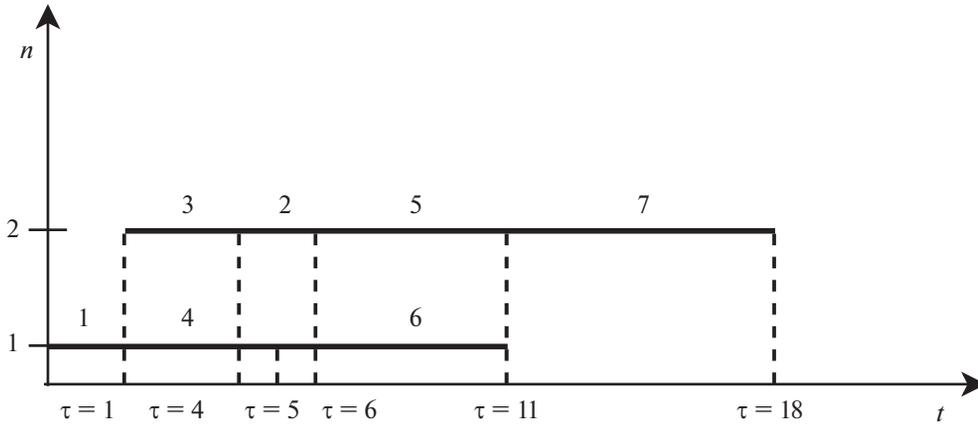


Рис. 7. Диаграмма Ганта для второго расписания, значение целевой функции на котором $T = \sum_{i=1}^n \tau_i \alpha_i = 287$

При условии, что значение целевой функции на втором расписании лучше, чем на первом, присваиваем T_B значение 287, т.е. $T_B = 287$.

Далее вычисления по оптимизации расписания выполнения работ проводятся, согласно описанию, приведенного выше, метода ветвей и границ.

2. Управление работами проекта с учетом интервального задания их длительностей. Рассмотрим ситуацию оптимизации расписания выполнения работ по критерию (1.1) в условиях, когда длительности работ заданы интервально. Это означает, что продолжительность работы i может принимать любое значение из интервала $[t_i^1, t_i^2]$, т.е. $t_i \in [t_i^1, t_i^2]$. Необходимо в этой ситуации определить оптимальные расписания выполнения работ для всех значений продолжительностей работ, т.е.

$$t \in \prod_{i=1}^n [t_i^1, t_i^2].$$

Здесь $t = (t_1, \dots, t_n)$. Отметим, что для ситуации критерия быстродействия эта модель была рассмотрена в [4].

2.1. Метод формирования области устойчивости оптимального расписания. Для решения поставленной задачи рассмотрим списковую форму представления расписания выполнения работ.

Определение 1. Расписанием выполнения работ R в списковой форме называется совокупность подмножества работ $M_1, \dots, M_L (L \leq n)$ и совокупность подмножеств работ $m_1, \dots, m_L (L \leq n)$, обладающих следующими свойствами:

- 1) $\bigcup_{i=1}^L M_i = N$, где N – множество всех работ,
- 2) $m_i \subseteq M_i, i = \overline{1, n}$,
- 3) $m_k \cap m_l = \emptyset$, где \emptyset – пустое множество, $k = \overline{1, n}, l = \overline{1, n}, k \neq l$,
- 4) $\bigcup_{i=1}^L m_i = N$.

Выполнение работ по расписанию R заключается в том, что вначале выполняются работы множества M_1 до тех пор, пока не будут выполнены все работы множества m_1 , затем выполняются работы множества M_2 , пока не завершится выполнение работ множества m_2 , и т.д. до тех пор, пока не будет завершено выполнение работ множества m_L . При этом формирование множеств $\{M_i\}, \{m_i\}, i = \overline{1, L}$, происходит таким образом, чтобы при выполнении работ, согласно расписанию в списковой форме, не нарушались ограничения, накладываемые графом $G(m, n)$, и ограничения на потребляемые ресурсы в любой момент времени $\tau \in (0, T_r)$. Такое расписание будем на-

зывать допустимым. Если на некотором допустимом расписании достигается минимум целевой функции (1.1), то это расписание будет оптимальным. В этом определении $(0, T_r)$ – временной интервал, на котором выполняются работы множества N . Как видно из определения расписания в списковой форме, изменение множества выполняемых работ не привязано к какому-либо моменту времени, а связано с завершением выполнения некоторого подмножества работ m_i , $i = \overline{1, L}$. Таким образом момент завершения работы i равен продолжительности этой работы плюс сумма продолжительностей некоторого подмножества работ из множества N .

С учетом этого, а также формулы (1.2) значение целевой функции (1.1) при длительности работ t_j для расписания r может быть представлено следующим образом:

$$F_r = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n a_{jr}^i t_j, \quad r = \overline{1, \tilde{R}}. \quad (2.1)$$

Здесь $a_{jr}^i \in Z^+$, где $Z^+ = \{0, 1\}$ – множество, состоящее из 0 и 1; \tilde{R} – число допустимых расписаний. Представление целевой функции (1.1) на расписании r по формуле (2.1) связано с тем, что момент завершения работы i может быть представлен, как сумма длительностей некоторого подмножества работ из множества N .

Если длительности работ меняются на интервале $[t_i^1, t_i^2]$, то значение целевой функции F_r будет меняться на интервале $[F_r^1, F_r^2]$, где F_r^1 – значение целевой функции (2.1) при длительностях работ $t_i = t_{i1}$, а F_r^2 – значение целевой функции (2.1) при длительностях работ $t_i = t_{i2}$.

Таким образом, сравнивая два допустимых расписания p и q , возможны две ситуации:

$$1) [F_p^1, F_p^2] \cap [F_q^1, F_q^2] = \emptyset.$$

И в этом случае одно из расписаний p или q дает лучшее значение целевой функции (2.1) для всех длительностей работ $t_i \in [t_i^1, t_i^2]$, $i = \overline{1, n}$. Здесь \emptyset – пустое множество.

$$2) [F_p^1, F_p^2] \cap [F_q^1, F_q^2] \neq \emptyset.$$

В этой ситуации многомерный параллелепипед

$$P = \prod_{i=1}^n [t_i^1, t_i^2],$$

на котором меняются длительности работ, может быть разбит на два многогранника, на одном из которых будет лучше расписание Rp , а на другом – Rq .

Аналитическое задание этих многогранников осуществляется следующим образом.

Для расписания Rp :

$$t_i^1 \leq t_i \leq t_i^2, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n a_{jp}^i t_j \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n a_{jq}^i t_j. \quad (2.3)$$

Для расписания Rq :

$$t_i^1 \leq t_i \leq t_i^2,$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n a_{jq}^i t_j \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n a_{jp}^i t_j.$$

Если длительности работ t_i будут таковы, что

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n a_{jq}^i t_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n a_{jp}^i t_i,$$

то очевидно, что на этом множестве точек параллелепипеда $P = \prod [t_i^1, t_i^2]$, значение целевой функции (2.1) для расписаний Rp и Rq совпадают.

Таким образом, на основе предыдущего анализа можно сделать следующее заключение.

У т в е р ж д е н и е 1. Если длительности работ $t_i \in [t_i^1, t_i^2]$ заданы интервально, то многомерный параллелепипед

$$P = \prod_{i=1}^n [t_i^1, t_i^2]$$

может быть разбит на множество многогранников Q_1, \dots, Q_k таким образом, что:

$$1) \bigcup_{j=1}^k Q_j = P,$$

2) если длительность работ меняется на множестве Q_j , то оптимальным остается некоторое расписание R_j , заданное в списковой форме для всех значений длительностей $t = (t_1, \dots, t_n)$, таких, что $t \in Q_j$.

Таким образом, многогранник Q_j можно назвать областью устойчивости для оптимального расписания R_j в списковой форме.

2.2. Пример формирования области устойчивости оптимального расписания. Рассмотрим пример формирования области устойчивости расписаний для ситуации интервального задания длительности работ.

Пусть есть три работы проекта, выполняемых двумя исполнителями, длительность которых задана интервально:

$$t_1 \in [1;5]; \quad t_2 \in [1;5]; \quad t_3 \in [1;5], \quad G(m, n) \equiv G(0, 3).$$

Рассмотрим два расписания R1 и R2 в списковой форме:

$$R1: M_1^1 = \{3,2\}; \quad M_2^1 = \{3,1\}; \quad M_3^1 = \{1\},$$

$$m_1^1 = \{2\}; \quad m_2^1 = \{3\}; \quad m_3^1 = \{1\},$$

$$R2: M_1^2 = \{3,1\}; \quad M_2^2 = \{1,2\}; \quad M_3^2 = \{2\},$$

$$m_1^2 = \{3\}; \quad m_2^2 = \{1\}; \quad m_3^2 = \{2\}.$$

Будем считать $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 2$; $\alpha_3 = 3$.

Вычислим соответственно значения левой и правой границ целевой функции на первом и втором расписании.

Для первого расписания левая граница целевой функции F_1^1 равна:

$$F_1^1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 7.$$

Правая граница значения целевой функции F_1^1 на первом расписании равна:

$$F_1^2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 10 = 35.$$

Таким образом, значение целевой функции F_1^1 на первом расписании меняется на интервале $[7; 35]$, т.е. $F_1 \in [7; 35]$.

Рассчитаем соответственно левую и правую границу целевой функции (2.1) на втором расписании:

$$F_1^1 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 8,$$

$$F_1^2 = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 10 = 40.$$

Поскольку значение целевой функции на любом допустимом расписании может быть представлено по формуле (2.1) для любых значений $t_i \in [t_i^1, t_i^2]$, получим

$$F_1 = 3t_3 + 2t_2 + 1(t_1 + t_2) = 3t_3 + 3t_2 + t_1,$$

$$F_2 = 3t_3 + 1t_1 + 2(t_3 + t_2) = 5t_3 + 2t_2 + t_1.$$

С учетом формулы (2.2) и (2.3) область изменения длительностей работ оптимального расписания $R1$ задается следующей системой неравенств:

$$\begin{aligned} 1 \leq t_i \leq 5, \quad i = 1, 2, 3, \\ 3t_3 + 3t_2 + t_1 \leq 5t_3 + 2t_2 + t_1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Неравенство (2.4) можно переписать как

$$2t_3 - t_2 \geq 0.$$

Соответственно область изменения длительности работ, на которой оптимальным будет решение $R2$, задается следующей системой неравенств:

$$\begin{aligned} 1 \leq t_i \leq 5, \quad i = 1, 2, 3, \\ 2t_3 - t_2 \leq 0. \end{aligned}$$

3. Управление работами проекта с учетом внешних возмущений. Планирование выполнения работ проекта может охватывать длительный временной период (от года и больше), что в свою очередь приводит к тому, что точно оценить продолжительность выполняемых работ проекта часто невозможно. Это происходит, в частности, в силу изменяющейся внешней среды, которая влияет на продолжительность выполняемых работ. Такое влияние внешней среды на процесс реализации проекта еще называют возмущением.

Видами таких возмущающих воздействий может быть: изменяющиеся природно-климатические условия, дефицит трудовых ресурсов, изменение курса национальной валюты по отношению к иностранным валютам, затраты на обучение специалистов и т.д. Влияние перечисленных факторов приводит к отклонению длительностей работ от их прогнозируемых значений.

В общем случае длительность работы в этом случае может применяться по закону:

$$t_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = t_i + \sum_{i=1}^n \varphi_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k). \tag{3.1}$$

Здесь $\varphi_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ – некоторая неубывающая функция от переменных $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$; ε_i – величина возмущающего воздействия i -го вида.

Рассмотрим частный случай использования формулы (3.1), полагая, что длительность работы $i, i = \overline{1, n}$, зависит линейно только от одного вида возмущений, т.е.

$$t_i(\varepsilon) = t_i + k_i \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.2}$$

Здесь $t_i(\varepsilon)$ – длительность работы i при уровне возмущения ε ; k_i – положительная константа; t_i – длительность работы i без учета внешнего возмущения.

Согласно формулы (2.1), продолжительность расписания r с учетом возмущения ε равна:

$$F_r(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n a_{jr}^i (t_j + k_j \varepsilon) \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n a_{jr}^i t_j + \varepsilon \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n k_j a_{jr}^i, \quad r = \overline{1, R}, \tag{3.3}$$

где R – число допустимых расписаний. Согласно формуле (3.3), $F_r(\varepsilon)$ является монотонно возрастающей линейной функцией от ε и ее первая производная равна

$$\frac{d(F_r(\varepsilon))}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n k_j a_{jr}^i.$$

Очевидно, что если расписание R – оптимально при отсутствии внешнего возмущения и

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n k_j a_{jp}^i = \min_{p=1, R} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n k_j a_{jp}^i \right\}, \tag{3.4}$$

то оно остается оптимальным для любого уровня возмущения ε при условии, что длительности работ меняются по формуле (3.2).

В ситуации, если соотношение (3.4) не выполняется, т.е. существует расписание l , для которого

$$\frac{dF_l(\varepsilon)}{d\varepsilon} < \frac{dF_p(\varepsilon)}{d\varepsilon}.$$

Это означает, что целевая функция (1.1) на расписании l растет медленнее, чем на расписании p , и, следовательно, учитывая линейность этих функций, существует такое ε_e , что будет выполняться неравенство

$$F_l(\varepsilon) < F_p(\varepsilon) \quad \text{для всех} \quad \varepsilon \geq \varepsilon_e; \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда, при уровне возмущения $\varepsilon \geq \varepsilon_e$ предпочтительнее будет расписание l с точки зрения критерия (1.1).

Учитывая приведенный анализ, а также конечность числа допустимых расписаний, можно сформулировать следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 2. Если длительность работ меняется по формуле (3.2) и критерием оптимальности является средневзвешенное время завершения всех работ (формула (1.1)), то любой интервал изменения возмущений $\varepsilon \in (0, \omega)$ может быть разбит на конечное число отрезков таким образом, что при любом изменении ε в границах одного отрезка оптимальное расписание сохраняется.

Рассмотрим ситуацию, когда увеличение длительности работ от величины внешнего возмущения ε носит более общий характер, например:

$$t_i + \varphi_i(\varepsilon), \quad i = \overline{1, n},$$

где $\varphi_i(\varepsilon)$ является дифференцируемой функцией по ε и

$$\frac{d\varphi_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \geq 0.$$

Условие конечности разбиения на интервалы отрезка изменения возмущения $\varepsilon \in (0, \omega)$ может не соблюдаться, так как в этом случае переход на любое оптимальное решение возможен при различных значениях ε , являющихся решением уравнений:

$$F_k(\varepsilon) = F_j(\varepsilon), \quad j = \overline{1, R}; \quad k = \overline{1, R}.$$

Здесь R – количество допустимых расписаний, которое является следствием того, что нелинейное уравнение может иметь более одного решения.

В силу нелинейности функций $F_k(\varepsilon)$ и $F_j(\varepsilon)$ число переходов с одного оптимального решения на другое на любом ограниченном интервале $(0, \omega)$ изменения ε может быть достаточно большим. Если же $\omega \rightarrow \infty$, то и число переходов от одного оптимального расписания к другому может быть сколько угодно большим.

4. Оценка эффективности расписаний выполнения работ проекта с учетом риска. Рассмотрим ситуацию, когда длительности работ проекта заданы как случайная величина с известным законом распределения, т.е. $t_i^1 - P_1, \dots, t_i^m - P_m, P_j \geq 0$:

$$\sum_{j=1}^m P_j = 1.$$

В этой ситуации в качестве продолжительности работ может быть выбрано математическое ожидание продолжительностей работ. В этом случае формула, по которой вычисляется значение целевой функции (1.1) на расписании (аналог формулы (2.1)) r , будет следующей:

$$F_r = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n a_{jr}^i \bar{t}_j, \quad (4.1)$$

где \bar{t}_j – математическое ожидание длительности работ j .

Таким образом, формула (4.1) задает средневзвешенное время завершения работ для расписания r в условиях, когда длительности работ заданы как случайные величины.

Таблица 1. Длительности работ

Вероятность	Работа		
	первая	вторая	третья
$\frac{1}{2}$	0.9	2.2	3.2
$\frac{1}{3}$	1.3	2.1	3
$\frac{1}{6}$	1.1	1.9	2.8

4.1. Метод оценки эффективности расписания с учетом риска. С учетом изменчивости длительностей выполняемых работ еще одной характеристикой расписания является его риск, который количественно может быть оценен как суммарная дисперсия значения целевой функции (4.1) при различных реализациях случайной величины t_i по формуле:

$$\omega_r = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 d_i + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} cov_{ij} d_i d_j. \tag{4.2}$$

Здесь ω_r – риск календарного плана r , σ_i^2 – дисперсия продолжительности работы i ; cov_{ij} – ковариация продолжительностей работ i и j , d_i – доля работы i в величине целевой функции (4.1),

$$d_i = \frac{\alpha_i \sum_{j=1}^n a_{jr}^i \bar{t}_j}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n a_{jr}^i \bar{t}_j}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.3}$$

Таким образом, в ситуации задания длительности работ как случайных величин эффективность расписания оценивается по двум критериям: 1) математическое ожидание средневзвешенного времени завершения работ данного расписания (формула (4.1)) и 2) количественная оценка риска расписания (формула (4.3)).

4.2. Пример оценки эффективности расписания с учетом риска. Рассмотрим пример двухкритериальной оценки расписания.

Пусть есть проект, состоящий из трех работ. Работы могут выполняться в любой последовательности, и их длительности заданы как случайные величины, имеющие следующие распределения вероятностей (табл. 1):

Будем полагать, что работы выполняются двумя исполнителями и для этого каждой работе нужен один исполнитель. Величины весовых коэффициентов равны $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$. Рассчитаем математические ожидания длительностей работ:

$$\bar{t}_1 = 0.9 \cdot \frac{1}{2} + 1.3 \cdot \frac{1}{3} + 1.1 \cdot \frac{1}{6} = 0.96,$$

$$\bar{t}_2 = 1.2 \cdot \frac{1}{2} + 2.1 \cdot \frac{1}{3} + 1.9 \cdot \frac{1}{6} = 2.1,$$

$$\bar{t}_3 = 3.2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 2.8 \cdot \frac{1}{6} = 3.05.$$

Рассмотрим следующее расписание (рис. 8).

Таким образом, математическое ожидание средневзвешенного времени завершения работ равно:

$$F = 3.05 \cdot 3 + 2.1 \cdot 2 + 3.06 \cdot 1 = 9.15 + 4.2 + 3.06 = 16.41.$$

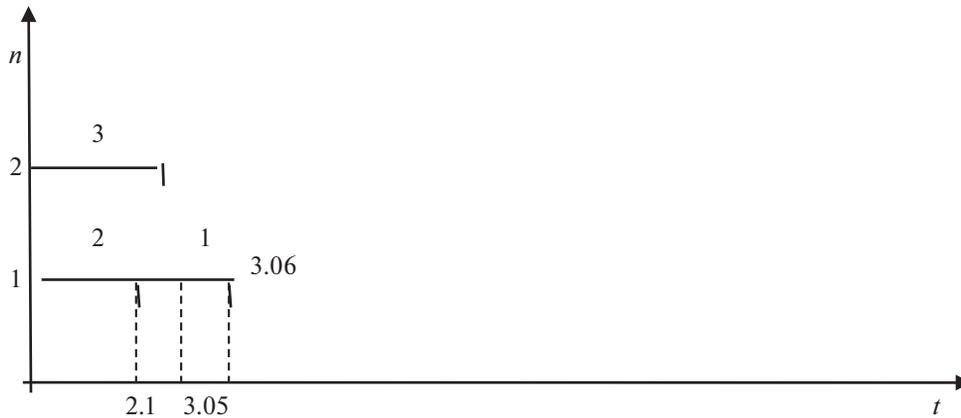


Рис. 8. Диаграмма Ганта расписания выполнения работ

Для оценки риска календарного плана рассчитаем d_i , $i = 1, 2, 3$:

$$d_1 = \frac{3.06}{16.41} = 0.18,$$

$$d_2 = \frac{2.1 \cdot 2}{16.41} = 0.25,$$

$$d_3 = \frac{3 \cdot 3.05}{16.41} = 0.57.$$

Используя таблицу, вычислим σ_1^2 , σ_2^2 , σ_3^2 и cov_{12} , cov_{22} , cov_{23} :

$$\sigma_1^2 = (0.96 - 0.9)^2 \cdot \frac{1}{2} + (0.96 - 1.3)^2 \cdot \frac{1}{3} + (0.96 - 1.1)^2 \cdot \frac{1}{6} = 0.009 + 0.05 + 0.0012 = 0.05102,$$

$$\sigma_2^2 = (2.1 - 2.2)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2.1 - 2.1)^2 \cdot \frac{1}{3} + (2.1 - 1.9)^2 \cdot \frac{1}{6} = 0.005 + 0 + 0.004 = 0.009,$$

$$\sigma_3^2 = (3.05 - 3.2)^2 \cdot \frac{1}{2} + (3.05 - 3)^2 \cdot \frac{1}{3} + (3.05 - 2.8)^2 \cdot \frac{1}{6} = 0.0125 + 0.0008 + 0.001 = 0.0136,$$

$$cov_{12} = (0.96 - 0.9)(2.1 - 2.2) \cdot \frac{1}{2} + (0.96 - 1.3)(2.1 - 2.1) \cdot \frac{1}{3} + (0.96 - 1.1)(2.1 - 1.9) \cdot \frac{1}{6} = 0.004,$$

$$cov_{13} = (0.96 - 0.9)(3.05 - 3.2) \cdot \frac{1}{2} + (0.96 - 1.3)(3.05 - 3) \cdot \frac{1}{3} + (0.96 - 1.1)(3.05 - 2.8) \cdot \frac{1}{6} = 0.0053,$$

$$cov_{23} = (2.1 - 2.2)(3.05 - 3.2) \cdot \frac{1}{2} + (2.1 - 2.1)(3.05 - 3) \cdot \frac{1}{3} + (2.1 - 1.9)(3.05 - 2.8) \cdot \frac{1}{6} = 0.008.$$

Оценим риск календарного плана, изображенного на рис. 8 с использованием формулы (2.1):

$$\begin{aligned} \omega &= 0.05102 \cdot 0.18 + 0.009 \cdot 0.25 + 0.0136 \cdot 0.57 + \\ &+ 2(0.004 \cdot 0.18 \cdot 0.25 + 0.0053 \cdot 0.18 \cdot 0.57 + 0.008 \cdot 0.25 \cdot 0.57) = 0.01324. \end{aligned}$$

Здесь количественная оценка риска – это дисперсия значения целевой функции (2.1) на расписании, изображенном на рис. 8.

5. Методы управления работами проекта в условиях различной производительности исполнителей. Рассмотрим ситуацию минимизации средневзвешенного времени выполнения работ проекта (критерий (1.1)) в условиях, когда работа может быть сделана несколькими исполнителями, при различной производительности каждого. Множество исполнителей определяется перед началом выполнения работы и не меняется до ее полного завершения. Иными словами, задана матрица (t_{ij}) $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$, и элемент t_{ij} этой матрицы есть время, за которое исполнитель j выполнит работу i .

В том случае если работу i выполняет подмножество исполнителей $M_i \subseteq M$ (M – множество всех исполнителей), то ее длительность $t_i(M_i)$ равна

$$t_i(M_i) = \frac{1}{\sum_{j \in M_i} t_{ij}}$$

Если работа i выполняется исполнителями $M_i \subseteq M$, $i = \overline{1, n}$, то минимальное время завершения работы t_i^h можно вычислить как

$$\tau_i^h = \min_{j \in \mathcal{L}_i} S_j + t_j(M_i), \tag{5.1}$$

где \mathcal{L}_i – множество путей, проходящих через работу i , S_j – длина частичного пути j от начальной работы до работы i при условии, что длительность работ, входящих в путь S_j оценивается как $t_\ell(M_\ell) \forall \ell \in S_j$, здесь M_ℓ – множество исполнителей, которые могут выполнять работу ℓ , $t_i(M_i)$ – продолжительность работы i при условии выполнения ее исполнителями множества M_i .

Таким образом, для того чтобы оценить значение целевой функции (1.1) на каждом расписании выполнения работ в ситуации различных производительностей исполнителей, необходимо не только задать последовательность выполнения работ, но и определить состав исполнителей для каждой работы.

5.1. Метод ветвей и границ для случая различных производительностей исполнителей. Рассмотрим метод ветвей и границ для определения оптимального расписания по критерию (1.1) поставленной задачи.

Шаг 1. Вычислим нижнюю оценку оптимального значения целевой функции. Пусть технологическая последовательность выполнения работ проекта задается циклическим ориентированным графом G . Оценим минимально возможную длительность работы i :

$$t_i^{\min}(M) = \frac{1}{\sum_{j=1}^m t_{ij}}. \tag{5.2}$$

Далее определим время завершения τ_i^h каждой работы по формуле (5.1) при условии, что длительность каждой работы минимальна, т.е. задана выражением (5.2), и вычислим значение целевой функции (1.1) в предложенных условиях. Это значение выберем в качестве нижней оценки T_n .

Шаг 2. Расчет верхней оценки оптимального значения целевой функции T_b осуществляется путем формирования какого-либо допустимого расписания и вычисления целевой функции (1.1) на этом расписании.

Шаг 3. Если $T_b = T_n$, то оптимальное решение найдено. Если $T_b > T_n$, то происходит переход на анализ очередного расписания с определением текущих нижних оценок в момент времени τ , связанных с окончанием одной из работ:

$$T_n^{\text{тек}}(\tau) = \sum_{i \in N(\tau)} \alpha_i \tau_i + T_n(N \setminus N(\tau)). \tag{5.3}$$

Здесь $T_n^{\text{тек}}(\tau)$ – текущая нижняя оценка целевой функции на формируемом расписании, $N(\tau)$ – множество работ, завершающихся к моменту времени τ , $T_n(N \setminus N(\tau))$ – нижняя оценка целевой функции (1.1) на множестве работ $N \setminus N(\tau)$, незавершенных к моменту времени τ .

Если $T_n^{\text{тек}}(\tau) \geq T_b$, то отбраковываем формируемое расписание, если $T_n^{\text{тек}}(\tau) < T_b$, то вычисляем минимальное $\tau_1 > \tau$. Когда произойдет очередное завершение работы формируемого расписания, вычисляем очередное значение $T_n^{\text{тек}}(\tau_1)$ и сравниваем его с T_b . Продолжая описанную итерационную процедуру вычисления $T_n^{\text{тек}}(\tau)$, мы либо отбракуем формируемое расписание, либо получим новое расписание, значение целевой функции на котором T^* будет меньше T_b .

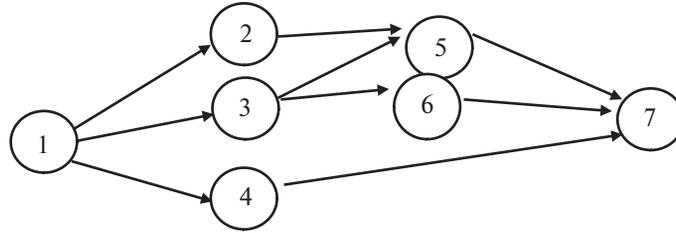


Рис 9. Ориентированный граф $G(m, n)$, определяющий последовательность выполнения работ проекта

В этом случае полагаем $T_b = T^*$ и сравниваем новое значение T_b с T_n . Если $T_b = T_n$, то оптимальное решение построено. Если $T_b > T_n$, то происходит переход на анализ очередного расписания.

Метод ветвей и границ прекращает свою работу, когда произойдет одно из событий.

1. При очередной корректировке T_b получим, что $T_b = T_n$. Оптимальным решением будет то, которое соответствует этому T_b .

2. Все варианты формирования допустимых расписаний проанализированы, и последнее значение $T_b > T_n$.

В этом случае оптимальное решение то, которое соответствует последнему (минимальному) значению T_b .

5.2. Пример использования метода ветвей и границ. Пусть при формировании оптимального расписания задан ориентированный граф (рис. 9), определяющий технологическую последовательность выполнения работ проекта. Далее будем полагать, что для выполнения каждой работы необходим один исполнитель, а всего исполнителей два. Производительность каждого исполнителя на каждой работе задана матрицей $T = (t_{ij})$, $i = \overline{1,7}$; $j = 1, 2$:

$$T = \begin{pmatrix} 1; 1.2 \\ 2; 2.4 \\ 3; 3.4 \\ 4; 4.6 \\ 5; 5.6 \\ 6; 6.8 \\ 7; 7.6 \end{pmatrix}.$$

Вычислим минимально возможное время выполнения каждой работы. Очевидно, что это время будет получено в условиях выполнения каждой работы двумя исполнителями:

$$t_1^{\min} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}} = 0.55,$$

$$t_2^{\min} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4}} = 1.2,$$

$$t_3^{\min} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3.4}} = 1.6,$$

$$t_4^{\min} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4.6}} = 2.4,$$

$$t_5^{\min} = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{5.8}} = 2.8,$$

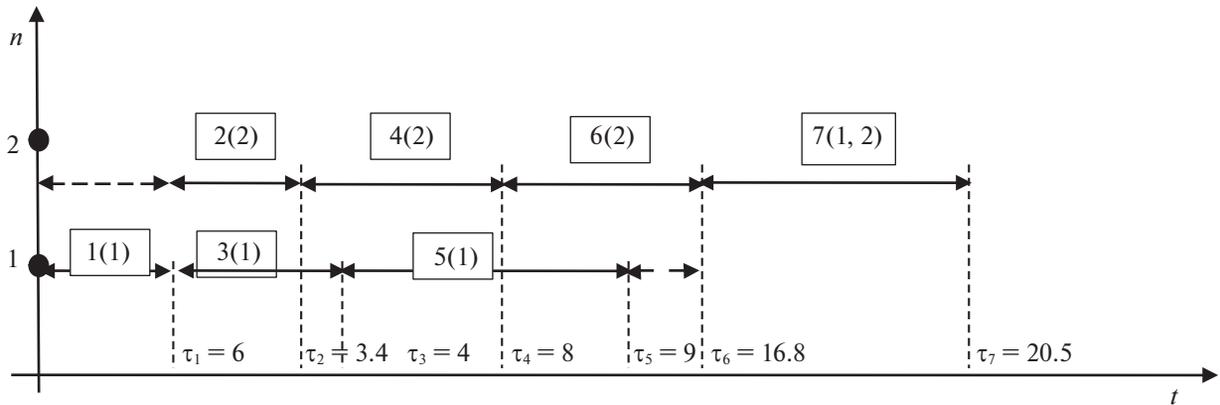


Рис. 10. Диаграмма Ганта выполнения работ проекта с учетом различной производительности исполнителей

$$t_6^{\min} = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6.8}} = 3.4,$$

$$t_7^{\min} = \frac{1}{\frac{1}{7} + \frac{1}{7.6}} = 3.7.$$

Рассчитаем минимально возможные моменты завершения работ τ_i^{\min} , $i = \overline{1,7}$, при условии, что их длительности равны t_i^{\min} , $i = \overline{1,7}$:

$$\tau_1^{\min} = 0.55,$$

$$\tau_2^{\min} = \tau_1^{\min} + \tau_2^{\min} = 0.55 + 1.2 = 1.75,$$

$$\tau_3^{\min} = \tau_1^{\min} + \tau_3^{\min} = 0.55 + 1.6 = 2.15,$$

$$\tau_4^{\min} = \tau_1^{\min} + \tau_4^{\min} = 0.55 + 2.4 = 2.95,$$

$$\tau_5^{\min} = \tau_5^{\min} + \max\{\tau_1^{\min} + \tau_2^{\min}; \tau_1^{\min} + \tau_3^{\min}\} = 2.8 + \max\{1.75; 2.15\} = 2.8 + 2.15 = 4.95,$$

$$\tau_6^{\min} = \tau_6^{\min} + \tau_1^{\min} + \tau_3^{\min} = 3.4 + 0.55 + 1.6 = 5.55,$$

$$\tau_7^{\min} = \tau_7^{\min} + \max\{\tau_1^{\min} + \tau_2^{\min} + \tau_5^{\min}; \tau_1^{\min} + \tau_3^{\min} + \tau_5^{\min}; \tau_1^{\min} + \tau_3^{\min} + \tau_6^{\min}; \tau_1^{\min} + \tau_4^{\min}\} = 3.7 + \max\{4.95; 5.55; 4.8; 2.95\} = 3.7 + 5.55 = 9.25.$$

Далее будем полагать, что в целевой функции (1.1) весовые коэффициенты заданы следующим образом: $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 2$; $\alpha_3 = 3$; $\alpha_4 = 4$; $\alpha_5 = 5$; $\alpha_6 = 6$; $\alpha_7 = 7$.

В этих условиях вычислим нижнюю оценку оптимального значения целевой функции T_n для рассматриваемой задачи:

$$T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i^{\min} \alpha_i = 0.55 \cdot 1 + 1.75 \cdot 2 + 2.15 \cdot 3 + 2.95 \cdot 4 + 4.95 \cdot 5 + 5.55 \cdot 6 + 9.25 \cdot 7 = 150.1.$$

Перейдем к вычислению верхней оценки T_B . Для этого сформулируем некоторое допустимое расписание и вычислим на нем значение целевой функции (1.1). Это расписание изобразим с помощью следующей диаграммы Ганта (рис. 10).

На диаграмме Ганта (рис. 10) предполагается, что все работы проекта, за исключением седьмой, выполняет один исполнитель (в скобках указан номер исполнителя). Седьмую работу выполняют оба исполнителя, и в этом случае ее продолжительность равна 3.9 единицы времени.



Рис. 11. Фрагмент второго расписания после выполнения первой, второй и четвертой работ

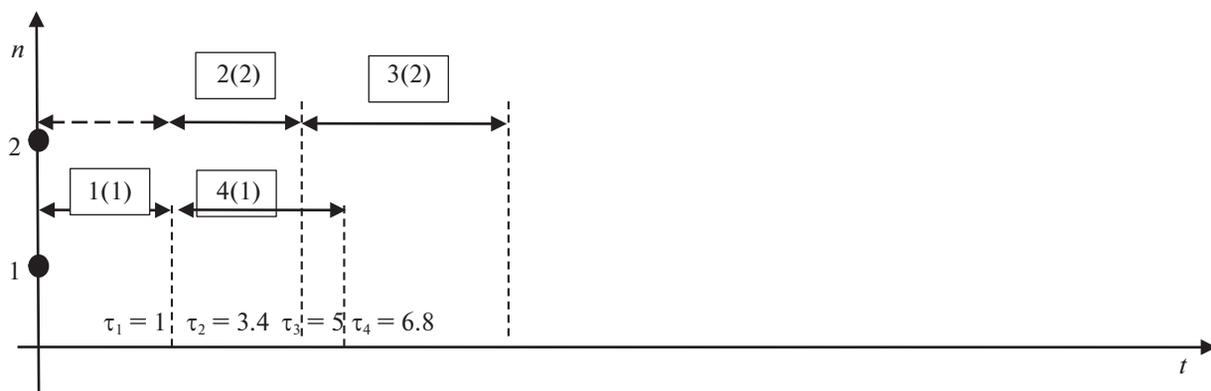


Рис. 12. Фрагмент второго формируемого расписания после выполнения первой, второй, четвертой и третьей работ

С учетом сформированного расписания вычислим значение целевой функции (1.1), которое и будет верхней оценкой:

$$T_B = \sum_{i=1}^7 \tau_i \alpha_i = 1 \cdot 1 + 3.4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 16.8 \cdot 6 + 20.7 \cdot 7 = 342.3.$$

Исходя из того, что $T_B > T_H$, переходим к формированию очередного допустимого расписания с вычислением $T_H^{\text{тек}}(\tau)$ в момент τ , связанного с завершением какой-либо работы проекта по формуле (4.6). При формировании второго расписания поставим на выполнение после завершения первой, вторую и четвертую работы (рис. 11).

Рассчитаем $T_H^{\text{тек}}(\tau)$ для момента завершения второй работы ($\tau_2 = 3.4$):

$$\begin{aligned} T_H^{\text{тек}}(\tau) &= 1 \cdot 1 + 3.4 \cdot 2 + T_H^{\text{тек}}(N \setminus N(\tau)) = \\ &= 1 + 6.8 + 5 \cdot 4 + 4.95 \cdot 5 + 2.15 \cdot 3 + 5.55 \cdot 6 + 9.47 \cdot 7 = 170.5. \end{aligned}$$

С учетом того, что $T_B > T_H^{\text{тек}}(\tau = 3.4)$, продолжаем формировать второе расписание и после завершения второй работы поставим на выполнение третью работу (рис. 12).

Вычислим $T_H^{\text{тек}}(\tau)$ для момента завершения четвертой работы, т.е. момента $\tau_3 = 5$:

$$\begin{aligned} T_H^{\text{тек}}(\tau_3) &= 1 \cdot 1 + 3.4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6.8 \cdot 3 + 4.95 \cdot 5 + 5.55 \cdot 6 + 9.47 \cdot 7 = \\ &= 1 + 6.8 + 20 + 20.1 + 29.4 + 33 + 69.1 = 183.1. \end{aligned}$$

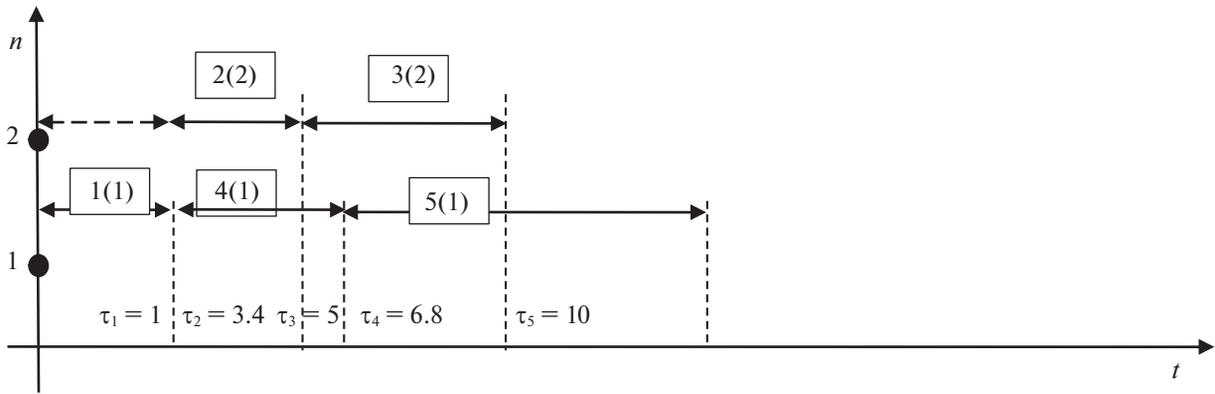


Рис. 13. Фрагмент формирования второго расписания после выполнения первой, второй, четвертой, третьей и пятой работ

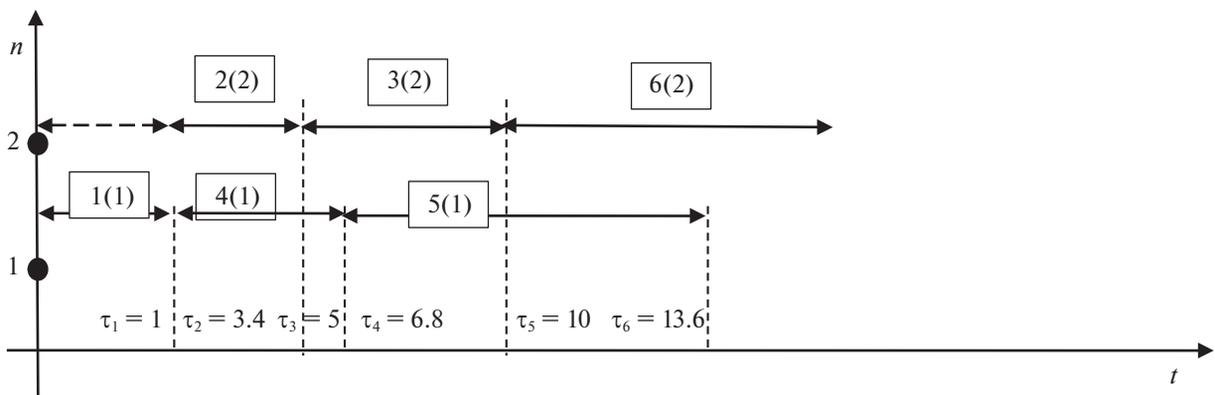


Рис. 14. Фрагмент формирования второго расписания после выполнения первой, второй, четвертой, третьей, пятой и шестой работ

Учитывая, что $T_B > T_H^{тек}(\tau_3 = 5)$, продолжаем формировать текущее расписание и в момент времени $\tau_3 = 5$, т.е. когда закончено выполнение четвертой работы, поставим на выполнение пятую работу (рис. 13).

В момент времени $\tau_4 = 6.8$ закончится выполнение третьей работы, поэтому вычисляем $T_H^{тек}(\tau_4)$:

$$T_H^{тек}(\tau_3) = 1 \cdot 1 + 3.4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6.8 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 5.55 \cdot 6 + 9.47 \cdot 7 = 208.7.$$

С учетом того, что $T_B > T_H^{тек}(\tau_4)$, продолжаем формирование текущего расписания и в момент времени $\tau_4 = 6.8$, когда пятая работа не завершена, ставим на выполнение шестую работу (рис. 14). В момент времени $\tau_5 = 10$ произошло завершение пятой работы, поэтому вычисляем значение $T_H^{тек}(\tau_5)$:

$$T_H^{тек}(\tau_5) = 1 \cdot 1 + 3.4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6.8 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 13.6 \cdot 6 + 9.47 \cdot 7 = 257.5.$$

После завершения шестой работы в момент времени $\tau_6 = 13.6$ седьмая работа может быть выполнена двумя исполнителями и ее продолжительность будет равна

$$t_7 = \frac{1}{\frac{1}{7} + \frac{1}{7.6}} = 3.9.$$

Следовательно, значение целевой функции T^* на формируемом расписании вычислим как

$$T^* = 1 \cdot 1 + 3.4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6.8 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 13.6 \cdot 6 + 17.5 \cdot 7 = 313.8.$$

Учитывая, что $T_B > T^*$, новое значение $T_B = 313.8$ и переходим к анализу других вариантов формирования расписаний.

Заключение. Рассмотрены методы оптимизации расписаний выполнения работ проекта для критерия минимизации средневзвешенного времени их выполнения. В том случае, когда длительности работ заданы детерминировано, предложен точный и приближенный метод решения задачи выбора оптимального расписания. Если возможны изменения длительности работ, предложен аналитический инструментарий оценки устойчивости расписаний как для ситуации интервального задания длительностей работ, так и для ситуации изменения длительностей работ при возможных возмущениях внешней среды. В том случае если длительности работ заданы стохастически, предлагается механизм оценки эффективности расписания по двум критериям и предложена процедура количественной оценки риска расписания. В разд. 5 статьи исследована ситуация возможности выполнения каждой работы несколькими исполнителями и предложен метод оптимизации расписаний выполнения работ для этого случая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. *Мищенко А.В., Халиков М.А.* Распределение ограниченных ресурсов в задаче оптимизации производственной деятельности предприятия // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 6.
3. *Мищенко А.В., Пилюгина А.В.* Динамические модели управления научно-производственными системами // Вестн. МГТУ им. Баумана. Сер. Приборостроение. 2019. № 2.
4. *Мищенко А.В., Сушков Б.Г.* Задача оптимального распределения ресурсов на сетевой модели при линейных ограничениях на время выполнения работ // ЖВМ и МФ. 1980. Т. 10. № 5.
5. *Мищенко А.В., Коголовский В.М.* Проблемы устойчивости задач производственного планирования в машиностроении // Экономика и мат. методы. 1992. № 3.
6. *Мищенко А.В.* Устойчивость решений в задаче перераспределения транспортных средств в случае экстренного закрытия движения на участке метрополитена // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 3.
7. *Мищенко А.В.* Задача распределения транспортных средств по автобусным маршрутам при неточно заданной матрице корреспонденций пассажиропотока // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1992. № 2.
8. *Катюхина О.А., Мищенко А.В.* Динамические модели управления транспортными ресурсами на примере организации работы автобусного парка // Аудит и финансовый анализ. 2016. № 2. С. 156–167.
9. *Косоруков Е.О., Фуругян М.Г.* Некоторые алгоритмы распределения ресурсов в многопроцессорных системах // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2009. № 4. С. 34–37.
10. *Фуругян М.Г.* Планирование вычислений в многопроцессорных АСУ реального времени с дополнительным ресурсом // АиТ. 2015. № 3.
11. *Косоруков Е.О., Фуругян М.Г.* Алгоритмы распределения ресурсов в многопроцессорных системах с нефиксированными параметрами // Некоторые алгоритмы планирования вычислений и организации контроля в системах реального времени. М.: ВЦ РАН, 2011. С. 40–51.
12. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Transport-type Problems with a minimax Criterion // АиТ. 1995. № 12. С. 109–118.
13. *Миронов А.А., Цурков В.И.* Наследственно-минимаксные матрицы в моделях транспортного типа // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 6. С. 104–121.
14. *Mironov A.A., Levkina T.A., Tsurkov V.I.* Minimax Estimations of Expectates of Arc Weights in Integer Networks with Fixed Node Degrees // Applied and Computational Mathematics. 2009. Т. 8. № 2. С. 216–226.
15. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Class of Distribution Problems with Minimax Criterion // Doklady Akademii Nauk. 1994. V. 336. № 1. P. 35–38.
16. *Tizik A.P., Tsurkov V.I.* Iterative Functional Modification Method for Solving a Transportation Problem // Automation and Remote Control. 2012. V. 73. № 1. P. 134–143.
17. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Hereditarily Minimax Matrices in Models of Transportation Type // J. Computer and Systems Sciences International. 1998. V. 37. № 6. P. 927–944.
18. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Minimax in Transportation Models with Integral Constraints. 1 // J. Computer and Systems Sciences International. 2003. V. 42. № 4. P. 562–574.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 517.977;519.876.5;681.5.01

ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА РИСКА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ
СОСТАВОМ И СТРУКТУРОЙ РАЗНОРОДНОЙ ГРУППИРОВКИ
СЕНСОРОВ ОБНАРУЖЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹

© 2023 г. В. А. Дюков^а, А. М. Казанцев^{б,*},
И. Ю. Макушев^с, М. С. Путилин^а, А. В. Тимошенко^д

^аНациональный исследовательский ун-т “МИЭТ”, Москва, Россия

^бАО “Радиотехнический институт имени академика А.Л. Минца”, Москва, Россия

^сПАО “МАК “Вымпел”, Москва, Россия

^дМАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: kazantsev.andrei@gmail.com

Поступила в редакцию 27.06.2022 г.

После доработки 08.08.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Неуклонный рост массовости и динамики применения воздушных средств в ходе различных конфликтов обуславливает необходимость постановки и решения задач построения систем их обнаружения, близких к реальности. Следует отметить, что в настоящее время вектор приоритетов в развитии сенсоров обнаружения изменяется с решения задач по повышению их характеристик на оптимизацию и адаптивность в их управлении. В качестве объекта рассматривается разнородная группировка сенсоров, решающая задачи обнаружения подвижного воздушного объекта. Предметом служит методология построения моделей управления разнородными сенсорами обнаружения. На основе анализа антагонистического взаимодействия разнородной группировки и воздушных объектов, процессов их функционирования предложен геометрический подход к решению задачи обнаружения подвижного объекта, в котором используется адаптированный и усовершенствованный функционал риска как один из возможных показателей для дальнейшего синтеза алгоритмов управления. С помощью имитационного моделирования приведено обоснование практической эффективности применения данного функционала и представлено сравнение с другими показателями эффективности.

DOI: 10.31857/S0002338823020075, EDN: JEZOLY

Введение. Задача обнаружения подвижного объекта (ПО) в конфликтной среде (равно как и похожая на нее задача о нахождении оптимальной траектории ПО в конфликтной среде) изучается достаточно давно [1–11]. Под конфликтной средой, согласно [2], понимается совокупность объектов (они называются конфликтующими), сближение с которыми для управляемого объекта нежелательно в ходе выполнения им основной задачи. Как правило, ПО представляет собой воздушную цель, которая должна достигнуть контрольной точки (x_0, y_0, z_0) либо пересечь определенную область пространства V_0 . Цель ПО – таким образом изменять траекторию движения и свои физические параметры (например, скорость), чтобы свести к минимуму воздействие, оказываемое со стороны сенсоров конфликтующей стороны. Цель конфликтующей стороны (сенсоров обнаружения) прямо противоположна – подобрать собственные физические параметры и так изменить свою траекторию движения, чтобы максимизировать воздействие, оказываемое на ПО.

Данная задача решена аналитически для случая пассивной радиолокации в двумерном пространстве вариационным методом для одного сенсора [1]; в случае нескольких сенсоров используется численный счет [3], основанный на алгоритме Дейкстры [12]. В [2] для тех же целей применялся метод конформных отображений, при этом был произведен учет возможных ограниче-

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-19-00481, <https://rscf.ru/project/21-19-00481/>.

ний на траекторию и величину скорости ПО. Также существует возможность решать поставленную задачу с ограничениями на длину траектории методами дискретной оптимизации [4], причем как в случае пассивной, так и в случае активной радиолокации.

Существует ряд исследований (например, [11, 13]), в которых задача выбора оптимальной траектории ПО в конфликтной среде решена с помощью вероятности обнаружения подвижного объекта. В качестве альтернативы вероятности обнаружения для управления сенсором и/или ПО в ряде исследований применяется функционал риска.

В некоторых работах рассмотрена задача с нечетким положением сенсоров обнаружения. Так, в [6] приводится статистический критерий для вариационной задачи о построении оптимальной траектории движения ПО в трехмерном пространстве. Точные координаты наблюдателя полагаются неизвестными, при этом они распределены в пространстве в соответствии с некоторым априори заданным вероятностным распределением. При решении задачи управления сенсорами обнаружения относительно небольшое число работ (например, [5, 14]) затрагивают вопрос об учете особенностей рельефа, над которым совершает движение ПО.

В случае непосредственного использования представленных выше подходов в процессе управления составом и структурой разнородной группировкой сенсоров обнаружения в конфликтной среде возникают следующие трудности:

процесс взаимодействия противоборствующих сторон (ПО и сенсоров обнаружения) рассматривается как плоскостная задача, причем моделирование взаимодействия проводится в двумерном пространстве с учетом эквидистантного движения ПО (на постоянной высоте над рельефом), в то время как функционирование и сенсоров обнаружения, и ПО осуществляется в трехмерном пространстве;

ресурс сенсоров обнаружения и ПО (число и тип сенсоров, зоны их размещения, дальности полета воздушных сенсоров и др.) статичен в каждый момент времени, не рассматриваются закономерности изменения параметров и характеристик обеих сторон в динамике противоборства, обусловленные как влиянием дестабилизирующих факторов на сенсоры, так и влиянием перегрузок и других физических ограничений на характеристики ПО.

Целью настоящей работы является формализация показателя эффективности управления разнородной группировкой на основе эвристических методов, который учитывал бы физические особенности и принципы работы сенсоров обнаружения. При этом данный показатель должен обеспечивать эффективное управление составом и структурой разнородной группировкой сенсоров в конфликтной среде на заданном рельефе в трехмерном пространстве.

1. Постановка задачи. Рассматривается разнородная группировка сенсоров, решающая задачи радиолокационного обнаружения ПО, которые проникают в зону ее ответственности (рис. 1). Группировка состоит из сенсоров наземного базирования, включающая радиолокационные станции (РЛС), которые работают на принципах активной радиолокации и сенсоров воздушно-го базирования – беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) с РЛС бокового обзора.

Целью рассматриваемой группировки является своевременное обнаружение ПО для последующей выдачи сигнала оповещения потребителю информации (надсистеме). При этом ПО имеют противоположную цель, заключающуюся в незаметном проникновении и прохождении рабочей зоны разнородной группировки сенсоров [1, 2]. Необходимо отметить, что сенсоры указанной группировки и ПО функционируют в трехмерном пространстве с учетом особенностей рельефа местности.

Противоборство между конфликтующими сторонами происходит следующим образом. Будем полагать, что атакующая сторона имеет информацию о местоположении наземных сенсоров, но не обладает информацией о местоположении сенсоров воздушного базирования и их количестве. Полет ПО осуществляется по оптимальным траекториям из начальной (случайной по одной из координат, но фиксированной по двум другим) в конечную (заданную) точки, при этом все ПО начинают свое движение одновременно. Конфликтующая сторона не обладает информацией о том, в каком количестве и с какого направления движутся ПО, но она может изменять векторы параметров наземных сенсоров (например, выбирать мощность и рабочий диапазон РЛС), а также выбирать траекторию движения БПЛА таким образом, чтобы их зоны патрулирования обеспечивали прикрытие наиболее проблемных зон с точки зрения возможности обнаружения ПО.

ПО считается обнаруженным сенсором воздушного базирования в том случае, если он попал в сектор обзора бортовой РЛС БПЛА либо находился в секторе обзора наземной РЛС в течение

Отметим, что при решении задач управления воздушными средствами довольно успешно используются методы теории управления. Например, в [17] воздушная дуэль между БПЛА и ПО противника рассматривается с позиции игровой задачи. В работе получен алгоритм гарантирующего управления траекторией беспилотного перехватчика на этапе его сближения с маневрирующей воздушной целью, пригодный для потенциальной бортовой реализации, в серии вычислительных экспериментов доказана его эффективность. Задача решается с использованием матричных методов, а также методов численного моделирования. К недостаткам данного исследования можно отнести предположение о том, что любому из конфликтующих ПО доступна информация о его собственном текущем состоянии (положении, скорости), а также о положении и скорости ПО противника. Данное предположение существенно ограничивает потенциальную применимость алгоритма.

В [18] описаны архитектура и алгоритмы интеллектуальной системы управления ударно-разведывательной группы БПЛА, представлен метод планирования предполетной миссии, основанный на триангуляции Делоне, а также алгоритмы распознавания тактических ситуаций и принятия решений. В качестве примера рассмотрен алгоритм управления групповым полетом БПЛА типа “ведущий-ведомый”, базирующийся на пропорциональном интегродифференциальном регуляторе. Показано, что представленный вариант реализации системы управления ведомого БПЛА обеспечивает выдерживание заданной конфигурации строя даже при многократном маневрировании ведущего БПЛА по скорости и курсу. Заметим, что задача решена в двумерном пространстве. В трехмерном случае используемый метод может перестать соответствовать физической реальности. Так, например, вследствие наличия рельефа местности и вектора характеристик источников угрозы, отличного от двумерного, изменятся области потенциальной угрозы, и решение, полученное с помощью простейшего трехмерного обобщения метода Делоне, станет неэффективным.

Отметим также, что алгоритмы, базирующиеся на решении игровых задач по противоборству сторон в конфликтной среде, применимы для задач поражения ПО и практически бесполезны в задачах обнаружения ПО, где в качестве показателя должна быть задействована вероятность обнаружения или же какой-либо альтернативный показатель. Это происходит из-за того, что в задачах обнаружения отсутствует непосредственный контакт между ПО конфликтующих сторон, а противодействие зачастую происходит в условиях недостатка информации о состоянии и стратегии противника.

Альтернативой вероятности обнаружения, важным показателем для управления сенсором и/или ПО, является функционал риска. Согласно определению, данному в [2] для задач пассивной радиолокации, риск — это величина, пропорциональная интегральному уровню принятого наблюдателем сигнала, излученного подвижным объектом и прошедшего через среду распространения за время движения объекта по маршруту. Различают такие понятия, как полный и мгновенный риск. Полный риск определяет риск для ПО быть обнаруженным за время всего движения объекта до контрольной точки, мгновенный — в данный момент времени.

В зависимости от метода решения может использоваться как функционал, так и функция риска. Здесь и далее без ограничения общности и памятуя о том, что изначально задача обнаружения подвижного объекта в конфликтной среде решалась методами вариационного исчисления, будем говорить о функционале риска. Отметим, что риск коррелирует с вероятностью обнаружения ПО, но не сводится к вероятности в классическом смысле, поскольку не выполняется условие нормировки.

Формула риска, как правило, задается эвристически исходя из определенных физических соображений. В ряде исследований используется так называемая степенная модель, в которой риск r за единицу времени (или за единицу траектории) пропорционален уровню интенсивности сигнала I_i , принимаемого на входе i -го сенсора. Данный риск зависит как от скорости ПО v , так и от расстояния ρ от ПО до сенсора обнаружения:

$$r_i \sim I_i \sim \frac{v^m}{\rho^n}. \quad (2.2)$$

Необходимо отметить, что физическая интерпретация сигнала может быть различной в зависимости от источника сигнала и рассматриваемого поля [3]. Например, для гидроакустического поля $m = 1$, $n = 2$ (2.2). Это соответствует изменению уровня интенсивности излучаемого сигнала пропорционально квадрату скорости объекта и распространению сигнала в среде по сферическому закону.

При этом во многих моделях риск аддитивен: полный риск R за единицу времени для данного ПО равен сумме рисков обнаружения для различных сенсоров:

$$R = \sum_{i=1}^N r_i. \quad (2.3)$$

Другими словами, в качестве полного риска может выступать интегральный уровень сигнала, принятый системой из N наземных сенсоров за все время движения. Для этого нужно проинтегрировать полученное значение “мгновенного” риска либо по всему времени движения ПО до контрольной точки, либо по всей траектории движения:

$$R = \int_0^T r dt, \quad (2.4)$$

$$R = \int_0^L r ds, \quad (2.5)$$

где $r(t)$, $r(s)$ – “мгновенный” риск обнаружения ПО сенсором в момент времени t и участке траектории s соответственно; T – общее время движения ПО; L – общая длина траектории движения ПО.

Такой способ задания функционала риска является популярным, но отнюдь не единственным. В [1, 2] используется функционал риска следующего вида ($n = 2$):

$$R = \int_0^T \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^m}{x^2 + y^2} dt, \quad (2.6)$$

где $m > 0$ – произвольный показатель степени; $x(t)$, $y(t)$ – текущие координаты ПО; $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $\dot{y} = \dot{y}(t)$ – составляющие векторы текущей скорости ПО.

В [3] риск для N сенсоров задан с учетом их местоположения:

$$R = \int_0^T \sum_{i=1}^N \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^m}{((x(t) - a_i)^2 + (y(t) - b_i)^2)^{n/2}} dt, \quad (2.7)$$

где (a_i, b_i) – точка расположения i -го сенсора, n – характеристика физического поля, в котором осуществляется обнаружение ПО.

В [4] применяют следующий функционал риска для N сенсоров:

$$R = \int_A^B \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{\rho_i^2} ds, \quad (2.8)$$

где σ_i – константа для i -го сенсора, $\rho_i = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$ – евклидово расстояние, (x, y) – точка расположения ПО, (a_i, b_i) – точка расположения i -го сенсора. Скорость V_0 ПО полагается постоянной, $ds = V_0 dt$.

Ключевым недостатком риска в выражениях (2.6)–(2.8) является отсутствие учета в функционале риска технических характеристик сенсоров обнаружения. Как правило, в качестве наземного сенсора выступает РЛС с вполне определенным вектором параметров, в который входит дальность действия, рабочий диапазон частот, форма диаграммы направленности и т.п. [19, 20]. Именно эти параметры определяют эффективность работы наземного сенсора по обнаружению ПО. Более того, ПО обладает таким важным параметром, как эффективная площадь рассеяния. Функционал риска в формуле (2.4)–(2.7) не учитывает ЭПР, а в формуле (2.8) учитывает ЭПР, но не учитывает вектор параметров наземного сенсора. Кроме того, как функционалы (2.4)–(2.7), так и функционал (2.8) справедливы лишь для решения плоскостных задач.

Существует ряд попыток рассмотреть задачу с нечетким положением сенсоров обнаружения. Так, в [6] рассматривается статистический критерий для вариационной задачи о построении оптимальной траектории движения ПО в трехмерном пространстве. Точные координаты наблюдателя полагаются неизвестными, распределенными в пространстве в соответствии с некоторым априори заданным вероятностным распределением. В качестве функционала риска вариацион-

ной задачи принимается математическое ожидание интегрального функционала потерь детерминированной задачи, зависящего от некоторого случайного параметра, который задается формулами (2.2)–(2.4). Недостаток у приведенной работы все тот же – отсутствует учет вектора параметров сенсора обнаружения.

Некоторые исследования проводятся в предположении, что распределение риска в пространстве задано и известно подвижному объекту. В [7] представлена стратегия движения ПО в области вероятностной угрозы, карта которой известна заранее. Оптимальные траектории находятся с помощью деревьев решений. Риски сенсоров обнаружения задаются в виде гауссовой функции плотности вероятностного распределения:

$$f_i(x, y) = \left\{ \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(K_i)}} \right\} \exp \left[-\frac{1}{2} (X - \mu_i)^T K_i^{-1} (X - \mu_i) \right], \quad (2.9)$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mu_i = \begin{bmatrix} \mu_i(x) \\ \mu_i(y) \end{bmatrix}, \quad K_i = \begin{bmatrix} \sigma_i(x)^2 & 0 \\ 0 & \sigma_i(y)^2 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

где f_i – функция плотности вероятностного распределения риска обнаружения i -го ПО; σ_i – среднеквадратическое отклонение функции f_i ; μ_i – вектор средних значений случайного вектора X , K_i – его ковариационная матрица. Однако указанная задача решена в двумерном пространстве со всеми вытекающими отсюда недостатками.

Зачастую при расчете оптимальной траектории движения объектов в конфликтной среде используются методы динамического программирования. Так, в [8] рассматривается двумерная задача поиска оптимальных траекторий ПО в конфликтной среде. Функционал риска экспоненциально убывает с расстоянием от источника, что удобно для построения математической модели, но не имеет внятной интерпретации с точки зрения физического смысла:

$$R(\rho_i) = Ke^{-\alpha\rho_i}, \quad \rho_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \quad (2.11)$$

где α и K – положительные константы, выбираемые из условия разной степени опасности приближения к тем или иным ограничениям. Возможно применение известного алгоритма оптимального размещения средств обнаружения с помощью решения функционального уравнения Беллмана.

Весьма перспективными для управления составом и структурой разнородной группировкой сенсоров на заданном рельефе в конфликтной среде являются генетические алгоритмы. В [9] используется генетический алгоритм поиска оптимальной траектории ПО на плоскости, учитывающего особенности рельефа. В этом случае применяется следующий функционал риска:

$$r(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}, \quad (2.12)$$

где (x_i, y_i) и Γ_i – позиция и интенсивность обнаружения i -го сенсора соответственно. Полный риск определяется формулой (2.5). Однако эта задача решена на плоскости, а не в пространстве, что не позволяет осуществить полноценное управление составом и структурой группировки сенсоров обнаружения в режиме реального времени.

В [10] решена детерминированная трехмерная задача определения оптимальной траектории ПО в конфликтной среде с переменной ЭПР. Эффективная поверхность рассеяния подвижного объекта описывается эллипсоидом с площадью поверхности S_i и константой σ_i , представляющей технические параметры сенсора (дальность обнаружения, мощность, рабочий диапазон). Для i -го сенсора обнаружения риск имеет вид

$$r_i = \frac{RSC_i}{\|\rho_i\|^2} = \frac{\sigma_i S_i}{\|\rho_i\|^2}, \quad (2.13)$$

где RSC_i – радиолокационное сечение ПО; $\rho_i = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2}$ – расстояние от ПО с координатами (x, y, z) до i -го сенсора с координатами (a_i, b_i, c_i) ; $S_i = \pi b \sqrt{a^2 \sin^2 \theta_i + b^2 \cos^2 \theta_i}$ – площадь проекции эллипсоида на плоскость, ортогональную вектору ρ_i .

Полный риск можно найти при использовании методического аппарата, представленного в (2.3), (2.5) и (2.13), в которых приведены как аналитические, так и численные методы решения: аналитически получено решение в квадратурах с помощью вариационного метода (метода множителей Лагранжа) для случая одного сенсора. Численно задача решается для нескольких сенсоров обнаружения с помощью методов дискретной оптимизации. Технические параметры сенсора обнаружения представлены отдельной константой. В качестве недостатков данной работы можно отметить зависимость найденного решения от параметра ЭПР (формы эллипсоида) и недостаточный учет других характеристик РЛС, а также пренебрежение физическими особенностями движения ПО.

Таким образом, главным недостатком большей части описанных работ является модельное двумерное рассмотрение, что во многом обусловлено вычислительными особенностями — добавление еще одной координаты создает существенные трудности в численных решениях; в некоторых аналитических решениях переход к пространству с большей размерностью становится непреодолимой проблемой. Вместе с тем все современные ПО обладают в трехмерном пространстве высокими маневренными характеристиками. Возможность изменять высоту в широком диапазоне приводит к тому, что для ряда практически важных задач, требующих высокой точности либо учета изменения положения объектов в реальном времени, двумерное рассмотрение оказывается неприменимым. При данных обстоятельствах возникает необходимость разработки показателя эффективности, который нивелировал бы вышеуказанные ограничения.

3. Формализация показателя управления разнородной группировкой средств обнаружения. Рассмотрим вопрос построения показателя эффективности управления разнородной группировкой средств обнаружения. В качестве основных исходных данных примем:

методологию функционала риска для оптимального размещения сенсоров обнаружения и динамического управления ими;

степенную модель риска — формула (2.2), для которого должен выполняться принцип суперпозиции (2.3); формула полного риска должна иметь вид (2.4);

риск должен быть универсальным показателем, характеризующим эффективность группировки в целом, при этом он должен иметь смысл вероятностной меры, т.е. коррелировать с вероятностью обнаружения ПО.

Для того, чтобы учесть в функционале риска физические принципы работы наземных сенсоров, рассмотрим принцип функционирования РЛС кругового обзора. В высокоточных наземных сенсорах кругового обзора реализуется в основном последовательный обзор пространства узким лучом, сканирующим каждую его точку пространства в пределах своей рабочей зоны с определенным периодом T . Вероятность попадания ПО в луч в одной точке, принадлежащей пространству зоны обнаружения сенсора, определяется следующим образом:

$$P_{\text{луч}} = \frac{\gamma\varphi}{2\pi\beta},$$

где γ и φ — ширина сканирующего луча в азимутальной и угломестной плоскостях, β — ширина сектора сканирования луча в угломестной плоскости (рис. 2).

При этом вероятность обнаружения ПО на дальности, не превышающей заданную в технических характеристиках сенсора, будет равна $P \approx 1$, в остальных случаях $P \approx 0$. Отметим, что многие РЛС состоят из системы фазированных антенных решеток (ФАР), причем совокупная диаграмма направленности системы ФАР может иметь различный вид [21] (рис. 3). Отметим, что, во-первых, диаграмма направленности, как правило, обладает аксиальной симметрией. Во-вторых, сканирование воздушного пространства — это периодический процесс, поэтому представляется возможным провести усреднение движения сканирующего луча по пространству.

Для наземных РЛС с большой дальностью обнаружения объем сканирующего луча гораздо меньше объема зоны обнаружения, что позволяет представить средство обнаружения в виде пространственно-распределенного тела его рабочей зоны, в пределах которого обнаружение ПО с заданными характеристиками производится с вероятностью не ниже заданной. Для средства кругового обзора данное тело получается вращением фигуры — образующей конуса — относительно вертикали, описывающей зону обзора пространства в вертикальной плоскости. При этом конус позволяет менять угол места, радиус наземного средства, а также координаты его расположения и дальность обнаружения.

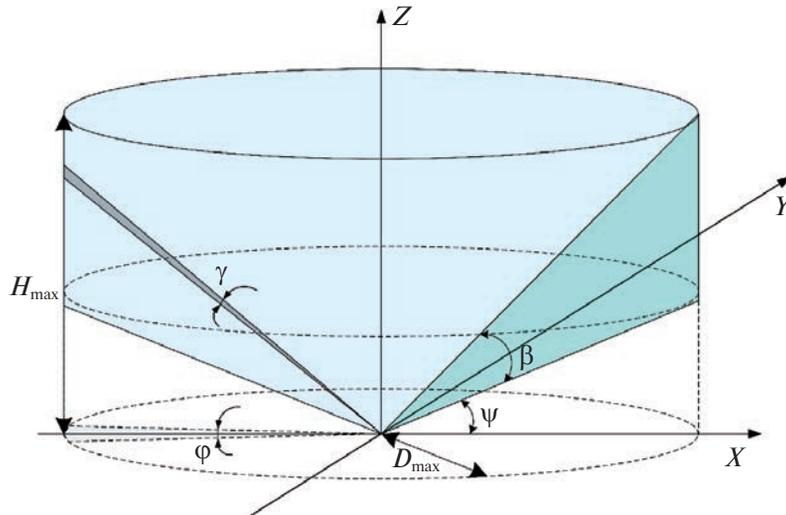


Рис. 2. Иллюстрация принципа работы наземной РЛС кругового обзора

Модель воздушного сенсора аналогично задается фигурой, представленной на рис. 4 в виде конуса. Исходными данными являются координаты начального местоположения сенсора $(x_{в.с}, y_{в.с}, z_{в.с})$, высота его полета $H_{в.с}$, ширина сектора зоны обнаружения β , угол наклона ε .

Таким образом, вектор параметров сенсоров обнаружения фактически задает геометрические параметры полученного конуса, т.е. вопрос обнаружения ПО в некотором смысле сводится к геометрической задаче.

Определим аналитическое выражение критерия обнаружения ПО для наземного сенсора. Пусть ПО пролетает зону обнаружения системы мониторинга за время τ , зависящее от скорости его движения и выбранной траектории. Наземный сенсор производит последовательное сканирование пространства лучом; он обнаруживает цель с вероятностью $P = 1$ при условии, что ПО находится в зоне обнаружения сенсора и $T < \tau$. Вероятность обнаружения ПО можно представить как функцию от дискретного времени с равномерным законом распределения. В таком случае вероятность обнаружения ПО сенсором будет равна

$$\begin{cases} P_{\text{обн}} = \sum_0^T f(t) \Delta t = p\tau, & (x(t), y(t), z(t)) \in V_j, \\ P_{\text{обн}} = 0 & (x(t), y(t), z(t)) \notin V_j, \end{cases}$$

где $p = 1/T$ – частота сканирования наземного сенсора; T – период сканирования сенсора; τ – время нахождения ПО в зоне обнаружения сенсора; $(x(t), y(t), z(t))$ – координаты местоположения ПО; V_j – объем зоны обнаружения j -го сенсора.

Процесс пространственного размещения сенсоров решается как задача оптимизации на основе максимизации вероятности обнаружения в зоне ответственности разнородной группировки. В качестве исходных данных используются число, типы и характеристики сенсоров. Данная задача решается в два этапа: на первом этапе осуществляется расстановка сенсоров наземного базирования, а на втором – выбор районов базирования сенсоров воздушного базирования.

Средства наземного базирования размещаются по принципу максимального охвата зоны, подконтрольной группировке, как с учетом тактико-технических характеристик сенсоров на конкретном рельефе местности, так и с учетом характерных высот зон обнаружения. Оптимальное размещение сенсоров воздушного базирования направлено на компенсацию недостатков в зоне обнаружения наземных сенсоров, прежде всего на высотах полета ПО $H_{\text{ПО}}$ (рис. 5). ПО выбирает свою траекторию таким образом, чтобы в процессе полета не попадать в зоны обзора наземных сенсоров обнаружения.

Модель наземного сенсора (рис. 2) позволяет задать пространственное распределение зоны обнаружения, которое описывается фигурой вращения, определяемой следующим образом:

$$Z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg}(\psi),$$

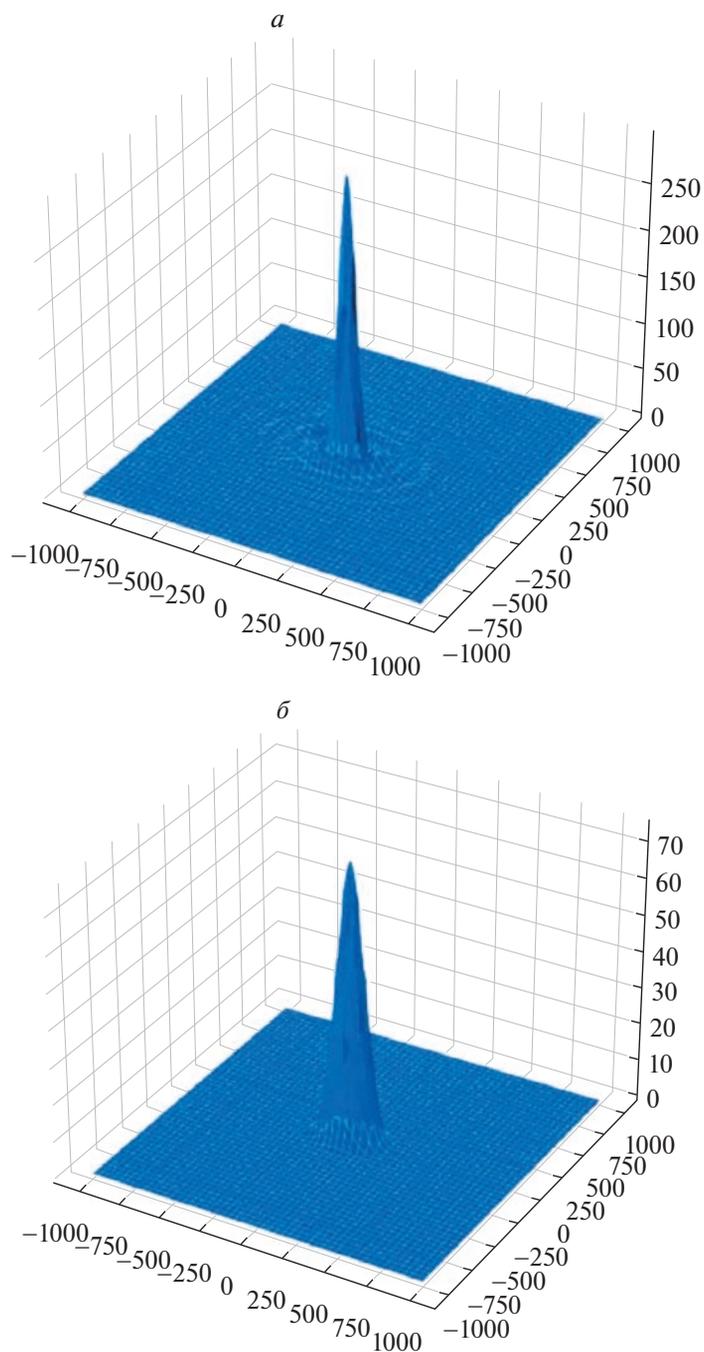


Рис. 3. Трехмерное моделирование диаграммы направленности РЛС: $a - \sin^2 x$, $b - \cos^2 x$

где ψ – угол между горизонтальной плоскостью и поверхностью конуса при расположении вершины в начале координат, позволяющий учитывать характеристики сенсоров, такие, как угол нижней границы зоны обнаружения.

В искомое выражение, очевидно, должны входить координаты расположения сенсора обнаружения. Имеем

$$(z - z_i) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \operatorname{tg}(\psi),$$

где (x_i, y_i, z_i) – координаты вершины конуса (расположения i -го сенсора).

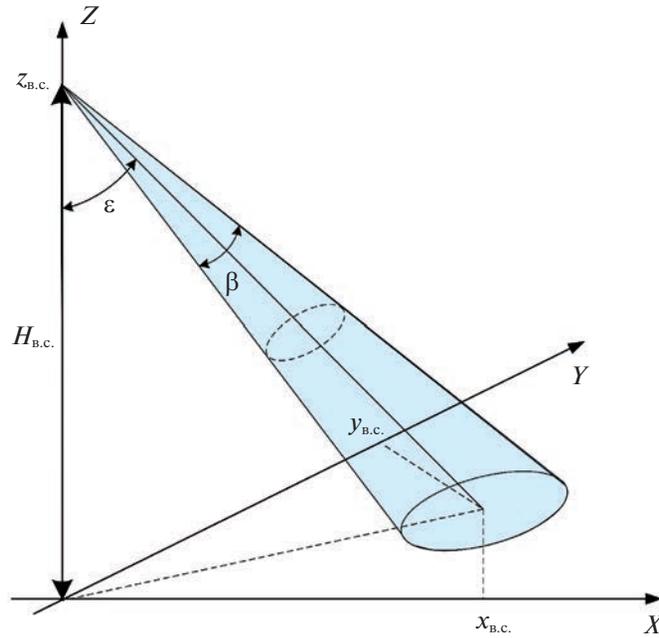


Рис. 4. Иллюстрация принципа работы воздушных сенсоров

Представленная выше формула позволяет определить, находится ли рассматриваемая точка пространства внутри конуса, на его поверхности или же располагается вне конуса:

$$\frac{z - z_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \operatorname{tg}(\psi)} > 1 \quad \text{— внутри конуса,}$$

$$\frac{z - z_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \operatorname{tg}(\psi)} = 1 \quad \text{— на поверхности конуса,}$$

$$\frac{z - z_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \operatorname{tg}(\psi)} < 1 \quad \text{— вне конуса.}$$

Отметим, что в знаменатель получаемого выражения необходимо добавить малое слагаемое δ — так называемое регуляризационное слагаемое. Данное малое положительное слагаемое необходимо вводить, чтобы избавиться от бесконечно большого риска на вертикальной оси, проходящей через сенсор. Возникновение бесконечного риска на оси может приводить к нежелательным последствиям при численном счете.

В результате для функционала риска наземного сенсора было получено следующее выражение:

$$r_i(x, y, z) = \sigma_i \frac{z - z_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + \delta} \operatorname{tg}(\psi_i)} \frac{1}{H(z_i - z^{\max})} H(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} - r^{\max}), \quad (3.1)$$

где (x_i, y_i, z_i) — координаты местоположения i -го наземного средства с учетом рельефа местности, $H(z_i - z^{\max})$ — функция Хевисайда, ограничивающая максимальную высоту конуса величиной z^{\max} (учет изовысотного участка), которая определяется исходя из тактико-технических характеристик (ТТХ) наземного сенсора, $H(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} - r^{\max})$ — функция Хевисайда, ограничивающая конус сферой радиуса r^{\max} , который также определяется исходя из ТТХ наземного сенсора (учет изодальностного участка). Заметим, что на малых высотах ограничение конуса величиной z^{\max} сверху, а также ограничение сферой по боковой поверхности не играют роли, поэтому при решении задачи в маловысотной области эти множители можно убрать из рассмотрения для

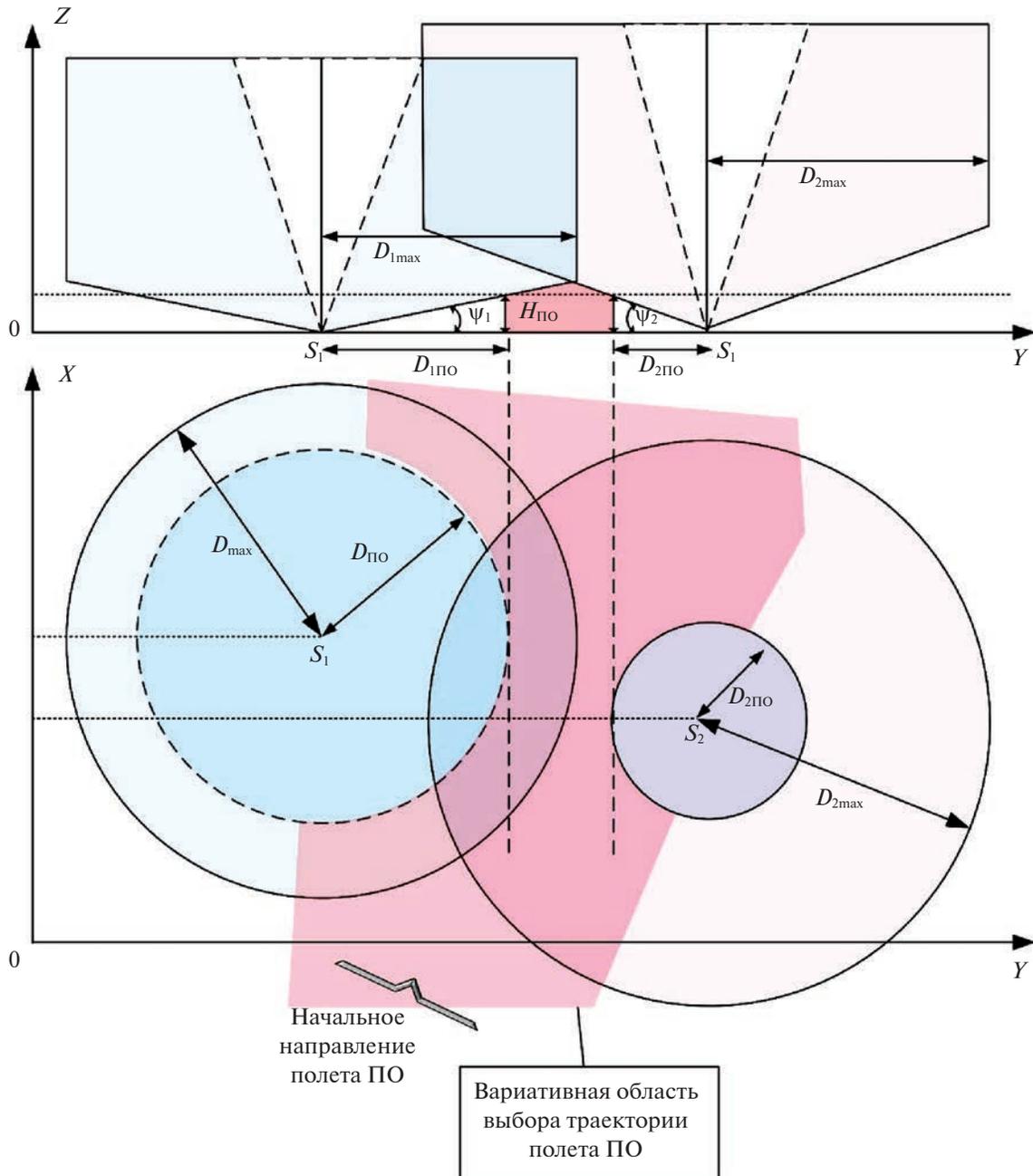


Рис. 5. Иллюстрация к выбору траектории полета ПО

ускорения вычислений. На рис. 6 представлен пример конуса, ограниченного плоскостью сверху и сферой по боковой поверхности, $r^{\max} = 300$ км и $z^{\max} = 100$ км. Видно, что при $z < 20...30$ введенные ограничения можно не учитывать.

С помощью функции Хевисайда $H(z - \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg}(\psi_i))$ можно вырезать “мертвую” воронку в центральной части конуса, так как излишняя детализация почти не влияет на результаты, σ_i – множитель, отвечающий за вектор характеристик i -го наземного средства. При исправном средстве $\sigma_i = 1$, в случае технических неисправностей $\sigma_i < 1$, при полном выходе сенсора из строя $\sigma_i = 0$. Другими словами, множитель σ_i напрямую связан с возможными отказами в работе сенсоров обнаружения: при возникновении неисправностей зона обнаружения i -го сенсора сужается вплоть до полного выхода сенсора из строя, а дальность обнаружения – пропорционально; ψ_i – угол между линией горизонта и нижней границей зоны обнаружения i -го наземного сенсора.

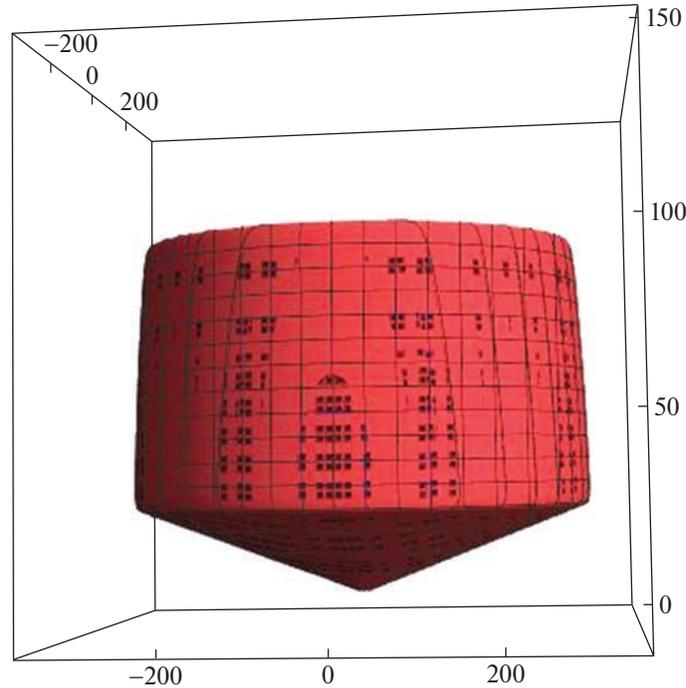


Рис. 6. Пример конуса, ограниченного плоскостью сверху и сферой по боковой поверхности, $r^{\max} = 300$ км, $z^{\max} = 100$ км. Масштаб по горизонтальной и по вертикальной осям различен

Для группировки N наземных сенсоров в силу принципа суперпозиции функционал риска может быть представлен в виде

$$R(x, y, z) = \sum_i^N \sigma_i \frac{z - z_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + \delta \operatorname{tg}(\psi_i)}} H(z_i - z_i^{\max}) H(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} - r_i^{\max}), \quad (3.2)$$

Введенный функционал риска имеет следующий смысл: чем больше данный функционал, тем выше вероятность того, что ПО, находящийся в данной точке пространства, будет обнаружен группировкой сенсоров обнаружения. Важно отметить, что риск не пропорционален интегральному уровню принятого наблюдателем сигнала, излученного воздушным объектом и прошедшего через среду распространения за время движения объекта по маршруту, как это было в степенной модели (2.2). Таким образом, необходимо определить минимум функции $R(x, y, z)$. Окрестности точки минимума и определяют местоположение зоны обнаружения и самого сенсора воздушного базирования. Добавление еще одной зоны обнаружения изменяет значение функции риска R , что требует ее пересчета с учетом особенностей вновь добавленной зоны, которые заключаются, кроме отличий по форме и ее направленностью на земную поверхность (рис. 4), в геометрической интерпретации при повороте конуса.

Отметим, что в случае воздушного сенсора функционал риска (3.1) несколько видоизменится за счет естественного поворота системы координат, в которой описывается конус. Пересчет функции риска выражается путем введения дополнительного слагаемого, учитывающего особенности сенсора воздушного базирования. Отличия от выражения (2.2) в случае воздушного расположения сенсора заключаются в изменении определения параметров h и ρ (рис. 7), характеризующих расстояние между оцениваемой точкой и зоной обзора сенсора воздушного базирования.

Для оценки значения функции риска в точке O (рис. 7) исходными данными являются векторы $(\vec{p}_1, \vec{p}_1, \vec{q})$, соответствующие зоне обзора сенсора и точке O . Выразим из них величины h и ρ , входящие в функцию риска (3.3):

$$\vec{l} = \vec{p}_0 - \vec{p}_1, \quad \vec{x} = \vec{q} - \vec{p}_1, \quad (3.3)$$

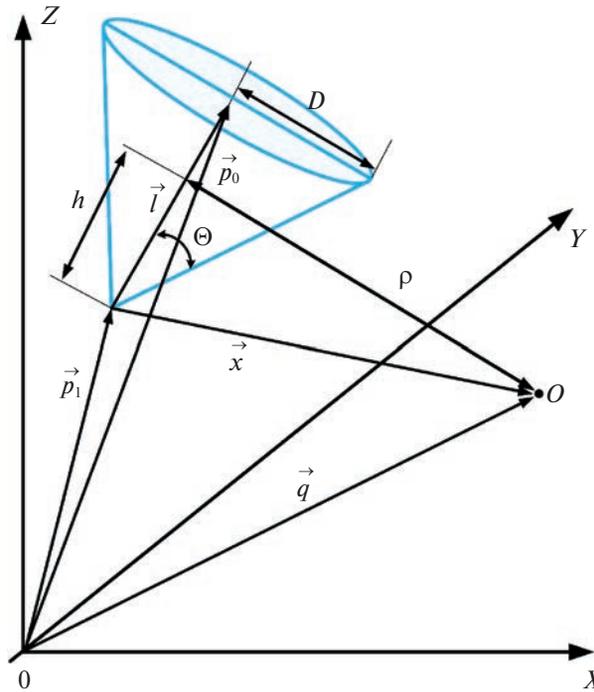


Рис. 7. Геометрическое пояснение оценки функции риска для сенсора воздушного базирования

$$h = |Pr_{\vec{l}}\vec{x}| = \left| \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} \vec{x} \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} \right|, \tag{3.4}$$

$$\rho = |\vec{x} - Pr_{\vec{l}}\vec{x}| = \left| \vec{x} - \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} \vec{x} \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} \right|, \tag{3.5}$$

$$\tan(\Theta) = \frac{D}{|\vec{l}|}. \tag{3.6}$$

Подставляя уравнения (3.3)–(3.6) в функционал риска (3.1), получаем выражение для функционала риска, обусловленное j -м сенсором воздушного базирования:

$$r_j(\vec{l}, \vec{x}) = \sigma_i \frac{\left| \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} \vec{x} \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} \right|}{\left| \vec{x} - \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} \vec{x} \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} \right|} \frac{D}{|\vec{l}|} H. \tag{3.7}$$

В выражении (3.7) H – множитель, аналогичный по смыслу функциям Хевисайда из (3.2). Данный множитель ограничивает конус по высоте. Обобщая (3.2) и (3.7) для множества сенсоров N – наземного и M – воздушного базирования функционал риска может быть представлен как

$$R = \sum_i^N \sigma_i \frac{z - z_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + \delta \operatorname{tg}(\psi_i)}} + \sum_j^M r_j(\vec{l}, \vec{x}). \tag{3.8}$$

Использование полученного функционала риска (3.8) обеспечивает решение задач обоснования и выбора оптимальных мест дислокации сенсоров воздушного базирования, связанных с рисками пропуска ПО и разработки дальнейших стратегий по их перемещению в условиях неизменной или сокращающейся неопределенности.

Представленный функционал риска может быть проиллюстрирован следующим образом. На рис. 8 показан функционал риска одиночного наземного сенсора, рассчитанный с помощью формулы (3.1). Величина риска изображена цветом: чем светлее цвет, тем выше мгновенный риск в данной точке. Самый высокий риск ожидаемо располагается на оси сенсора. Вне зоны обнаружения сенсора (вне конуса) риск равен нулю.

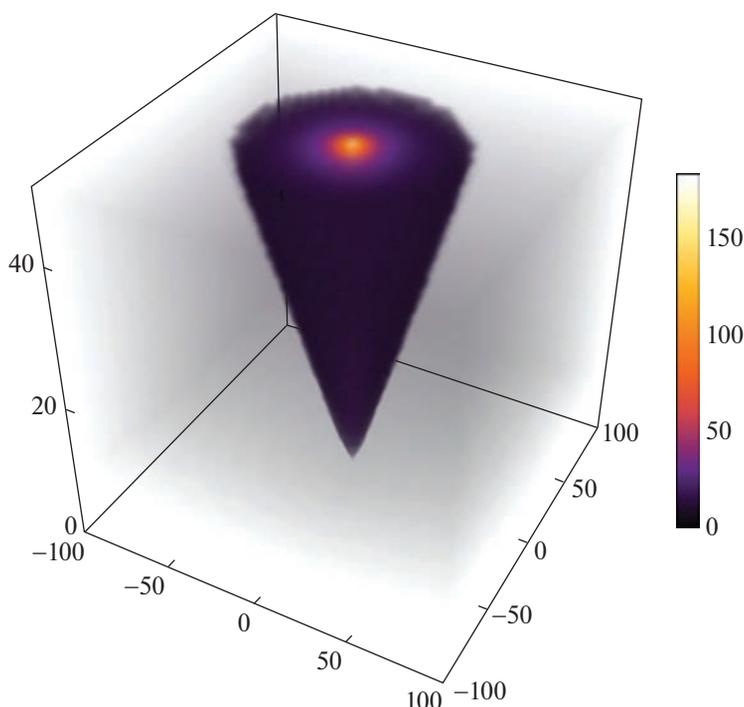


Рис. 8. Функционал риска наземного сенсора кругового обзора

На рис. 9 приведен суммарный функционал риска для двух наземных сенсоров с заданными координатами. Наблюдается аддитивный эффект — риск увеличился в области между сенсорами, также можно проследить выполнение принципа суперпозиции (2.3).

4. Результаты математического моделирования. Эффективность применения функционала риска (3.8) при управлении разнородной группировкой сенсоров обнаружения была подтверждена имитационным моделированием задачи обнаружения ПО и сравнением результатов с другими показателями эффективности. В качестве исходных данных рассматривались:

1. Трехмерное пространство размерами $200 \times 200 \times 5$ км, с шагом дискретной сетки по оси OX — 0.3 км, по оси OY — 0.3 и 0.1 км по оси OZ соответственно, шаг по времени был равен 1 с.

2. Разнородная группировка средств обнаружения состоит из 5 наземных сенсоров кругового обзора и пяти воздушных сенсоров (БПЛА), которые перемещаются по полю боя с постоянной скоростью 120 км/ч на высоте 5 км над заданным рельефом. Рельеф представляет собой карту высот z над плоскостью (x, y) , для моделирования которого использовались открытые базы данных NASA [22].

3. Группа ПО представляет собой 20 маловысотных объектов, перемещающихся в пространстве из произвольной начальной (по координатам x и z) точки с фиксированной y -координатой ($y_{\text{нач}} = 200$) в произвольную конечную (по координатам x и z) точку с y -координатой ($y_{\text{конеч}} = 0$) со скоростью 1200 км/ч с учетом кинематических физических ограничений на возможные траектории движения. Перемещение ПО осуществляется при помощи алгоритма A-star (рис. 10), который основывается на выборе траектории полета с минимальной “стоимостью”. В качестве “стоимости” в данном случае выступает полный риск.

Моделирование траекторий движения двух ПО в обход наземных сенсоров рассмотрены на рис. 11. Очевидно, для ПО достаточно облететь зону обнаружения наземных сенсоров (конусы РЛС), чтобы не быть обнаруженными. Сравнивая результаты с рисунка 9, можно сделать вывод, что даже между двумя наземными сенсорами имеется область с чрезвычайно малым риском. Следовательно, ПО при достаточно низкой высоте полета и достаточно большом пространстве взаимодействия может облететь любые наземные расстановки наземных сенсоров кругового обзора, поэтому для их обнаружения целесообразно использовать подвижные сенсоры (например, БПЛА).

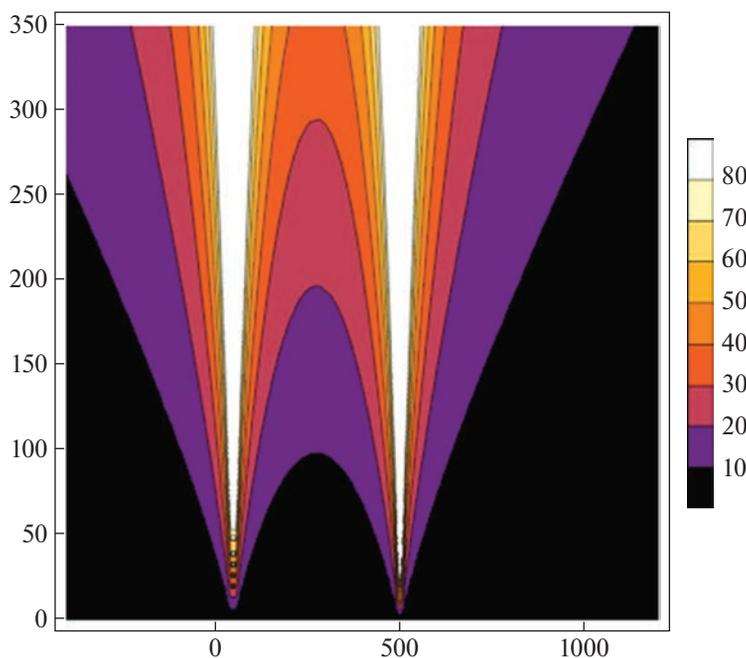


Рис. 9. Суммарный функционал риска для двух наземных сенсоров (сечение плоскостью $y = 0$, центры сенсоров расположены в точках $x = 50, y = 0, z = 0$ и $x = 500, y = 0, z = 0$)

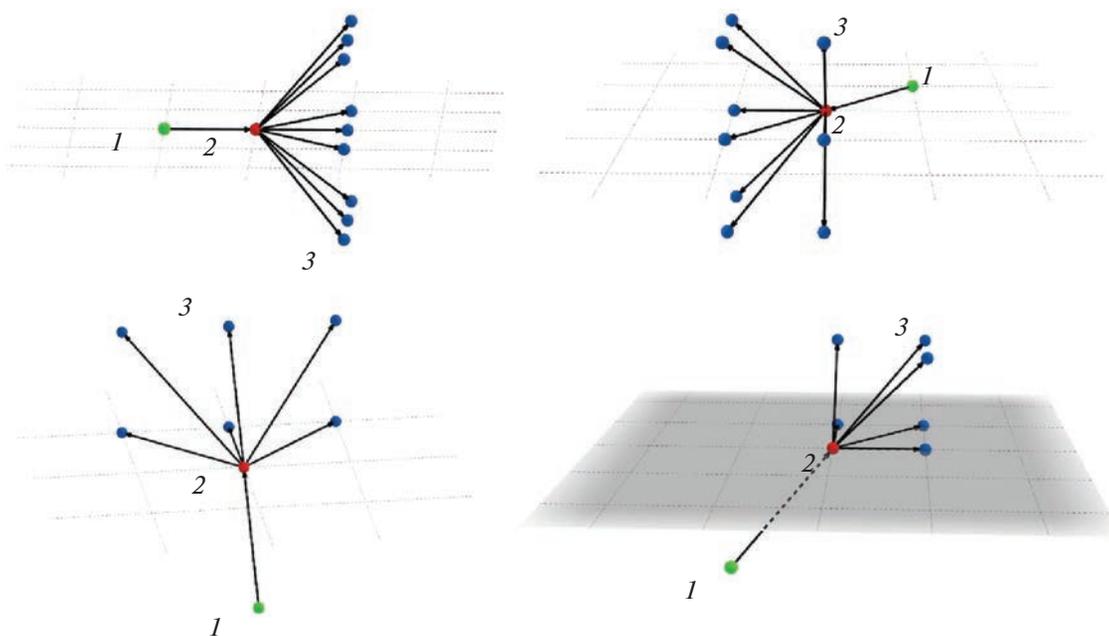


Рис. 10. Трехмерные шаблоны алгоритма выбора следующей точки для разных направлений движения ПО: 1 – предыдущая точка, 2 – текущая точка, 3 – следующие

На рис. 12 показано, как группа крылатых ракет с заданными начальными и конечными точками может облететь одиночный наземный сенсор.

4. Функционал риска R для каждой точки поля пространства с координатами (x, y, z) определяет вещественное число N . Набор таких вещественных чисел $\{N\}$ для всех точек трехмерного пространства также называется полем риска. Данный способ задания поля риска широко принят в литературе [1–11]. Чем больше число N , тем выше вероятность того, что ПО, оказавшись в точке

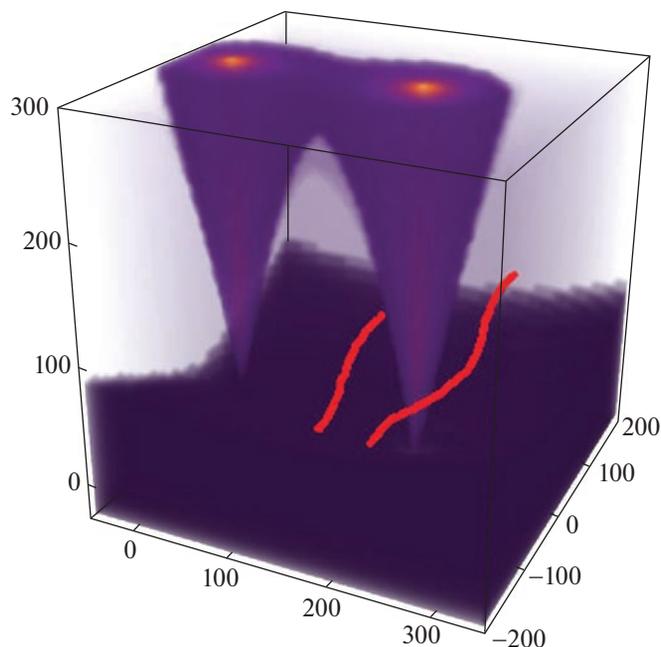


Рис. 11. Траектории ПО с заданными начальными, конечными точками и высотой полета, построенные в обход наземных сенсоров (сенсоры расположены в точках $x = 0, y = 0, z = 0$ и $x = 200, y = 0, z = -30$)

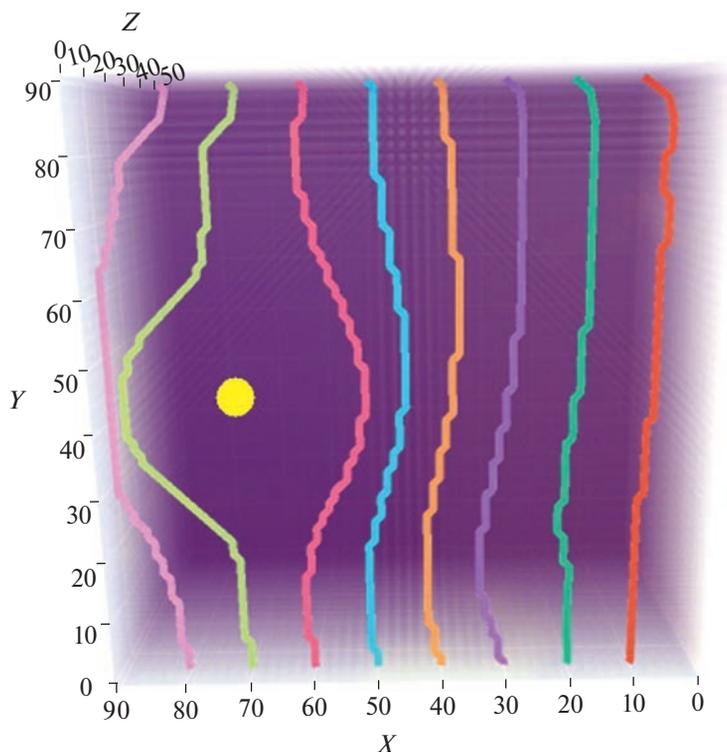


Рис. 12. Траектории группы ПО с заданными начальными и конечными точками и заданной высотой полета, построенные в обход наземного сенсора

(x, y, z) в данный момент времени, будет обнаружена. Отметим, что информация о поле риска $\{M\}$ крайне важна для сенсоров обнаружения для управления составом и структурой группировки в режиме реального времени, так как с помощью данного поля риска можно предсказать наиболее вероятные траектории полета ПО и вовремя “закрыть” проблемные, например с помощью подвижных сенсоров – БПЛА.

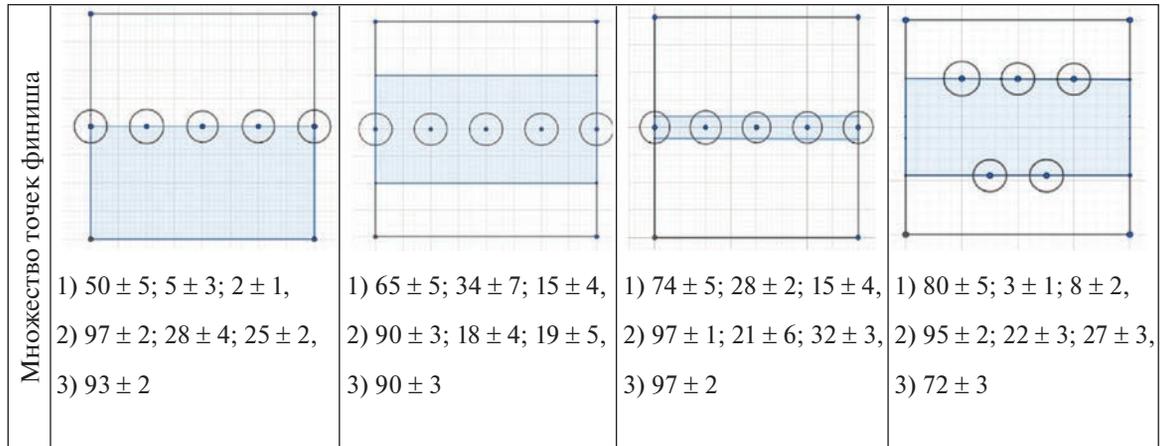


Рис. 13. Результаты имитационного моделирования

5. Алгоритмически возможны различные способы перемещения БПЛА при заданном поле риска, рассмотрение данных способов также выходит за рамки настоящего исследования [23].

6. Начальная расстановка сенсоров основана на внemodelных соображениях – текущей оперативно-тактической обстановке, условиях рельефа и т.д.

Вследствие малой продолжительности конфликтного взаимодействия (время взаимодействия ПО и разнородной группировки меньше времени передислокации и развертывания подвижных наземных сенсоров обнаружения) все наземные средства являются условно неподвижными. После расстановки наземных сенсоров (задания их координат в пространстве) рассчитывается функционал риска во всех точках пространства (поле риска), исходя из которого происходит размещение БПЛА на начальных позициях – минимумы этого поля закрываются воздушными средствами обнаружения.

Необходимо отметить, что из-за неподвижности наземных сенсоров поле риска во времени в результате действия только наземных сенсоров не изменяется, однако при перемещении БПЛА или выхода из строя одного или нескольких сенсоров обнаружения поле риска изменится. Следовательно, необходимо пересчитывать для каждого подобного случая изменения обстановки.

Результаты имитационного моделирования приведены на рис. 13, где схематично изображена расстановка наземных сенсоров и зона полета БПЛА (серый прямоугольник). В качестве стратегий движения воздушных сенсоров рассматривались следующие стратегии:

1) патрулирование: БПЛА проводит поиск и обнаружение ПО вдоль заданной границы зоны полета;

2) барражирование: БПЛА осуществляет поиск и обнаружение ПО вокруг минимума функционала риска в заданной области пространства;

3) адаптивная: БПЛА реализует поиск и обнаружение ПО на каждом шаге траектории своего движения, пересчитывая поле риска $\{N\}$ и учитывая как взаимодействие БПЛА с наземными сенсорами обнаружения, так и взаимодействие воздушных сенсоров между собой.

В качестве функционалов риска выбраны (2.7) (при $n = 1$), (2.11) и (3.8).

Результаты моделирования представлены на одном и том же рельефе, при этом для каждой фиксированной стратегии и фиксированного функционала риска проводилось 20 запусков модели со случайными точками вылета ПО противника.

Процент обнаруженных ПО при моделировании функционала риска в виде (3.8), как показано на рис. 13, существенно выше, чем при использовании степенной модели (2.7) или экспоненциально спадающего функционала (2.11). Во многом это связано с тем, что глобальные минимумы поля риска для каждого функционала оказываются разными. Данное обстоятельство влияет на начальное расположение БПЛА и, как следствие, на эффективность работы стратегий. Необходимо отметить, что адаптивная стратегия непосредственно связана с функционалом риска (3.8), поэтому имитационное моделирование стратегии (3) для других функционалов не проводилось. В результате для различных расстановок наземных сенсоров и для разных зон полета БПЛА применение функционала риска (3.8) привело к высоким показателям эффектив-

ности: ни в одной стратегии средний процент обнаруженных ПО не был ниже 50%, при этом для каждой расстановки наземных сенсоров можно подобрать такую стратегию движения, при которой эффективность обнаружения по заданному критерию будет выше 90%.

Результаты моделирования позволяют сделать следующие выводы. Построение разнородной группировки сенсоров обнаружения в условиях антагонистического взаимодействия с ПО противника необходимо выполнять на основе анализа возможных стратегий и действий противостоящей стороны, что позволит повысить адаптивность группировки в условиях информационной неопределенности. Предложенная модель сенсоров как наземного, так и воздушного базирования дала возможность формализовать функционал риска, позволяющий сформировать управляющие воздействия в разнородной группировке сенсоров обнаружения с целью повышения качества ее функционирования. При этом на его основе можно определить такое управление разнородной группировкой сенсоров, что задача обнаружения ПО будет выполнена даже при массовом одновременном налете ПО из случайных начальных точек.

Заключение. Необходимость своевременного и высокоточного обнаружения любых ПО разнородной группировкой сенсоров обнаружения диктуется скоротечностью развития самого конфликта, при этом заблаговременное обнаружение ПО повышает вероятность оперативного принятия решений вышестоящей системой. Одним из вариантов повышения эффективности обнаружения ПО является оптимальность в управлении имеющимися ресурсами группировки в зоне ее ответственности. Повышение качества управления может быть достигнуто за счет оценки и анализа характеристик как отдельных сенсоров, так и всей группировки в динамике ее функционирования и выбора показателей, на основании которых синтезируется управляющее воздействие.

Предложенная модель сенсора обнаружения в виде пространственно-распределенного тела его рабочей зоны, в пределах которого обнаружение объектов локации производится с вероятностью не ниже заданной, определяет вектор параметров данного средства в виде параметров геометрической фигуры (конуса), что в свою очередь снижает вычислительные нагрузки средств автоматизации.

Проведенный анализ показателей эффективности управления разнородной группировкой сенсоров обнаружения позволил обосновать применение функционала риска как критерия выбора оптимальных траекторий полета ПО. Адаптированный вариант данного функционала использовался при обосновании и выборе решений по размещению сенсоров воздушного базирования, связанных с рисками пропуска ПО, и разработке дальнейших стратегий по их перемещению в условиях неизменной или сокращающейся неопределенности.

Применение показателя функционала риска дает возможность:

разработать алгоритмы управления структурой и составом разнородной группировки как решения задачи адаптации процесса обнаружения ПО в различных режимах ее работы;

совершенствовать модели сенсоров обнаружения, заключающиеся в расширении классов используемых сенсоров – не только по пространственному признаку, но и по физическим принципам, положенным в основу их работы, а также по режимам работы (кругового обзора, секторного обзора и т.п.);

увеличить в модели сенсоров количество варьируемых параметров и характеристик разнородной группировки.

Дальнейшими направлениями исследований являются:

расширение дестабилизирующих воздействий на разнородную группировку со стороны объектов локации, строящиеся на принципе: разведка, выбор оптимального дестабилизирующего (деструктивного) воздействия, реализация воздействия на группировку;

совершенствование функционала риска за счет добавления в него составляющих, которые позволяют повысить адекватность оценки стратегий, проникающих в зону ответственности группировки ПО, и стратегий ее реакций на проникновения;

оптимизация вычислительных процессов и совершенствование алгоритмов взаимодействия разнородной группировкой сенсоров с ПО.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галяев А.А., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я.* Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 3. С. 134–140.
2. *Галяев А.А., Маслов Е.П.* Оптимизация закона уклонения подвижного объекта от обнаружения при наличии ограничений // АиТ. 2012. № 6. С. 73–88.
3. *Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Яхно В.П.* Уклонение подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей // Проблемы управления. 2010. № 5. С. 73–79.
4. *Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P.* Optimal Risk Path Algorithms // Cooperative Control and Optimization. Applied Optimization. 2002. V. 66. P. 273–298.
5. *Петров М.Ю.* Построение маршрута полета летательного аппарата на малых высотах // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 3. С. 140–146.
6. *Шайкин М.Е.* О статистическом функционале риска в задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 1. С. 22–31.
7. *Dogan A., Ugur Z.* Unmanned Aerial Vehicle Dynamic-Target Pursuit by Using Probabilistic Threat Exposure Map // AIAA Guidance, Dynamics and Control. 2006. V. 29. № 4. P. 944–954.
8. *Воронин А.Н., Зиятдинов Ю.К., Пермьяков А.Ю., Варламов И.Д.* Синтез компромиссно-оптимальных траекторий мобильных объектов в конфликтной среде // Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. 2015. № 1 (22). С. 40–49.
9. *Kumar G.N., Dadarya S., Verandani A., Sarkar A.K., Talole S.E.* Cruise Missile Mission Planning Using Genetic Algorithm // Proc. Intern. Conf. on Modern Research in Aerospace Engineering. Noida, NCR-Delhi, 2018. P. 353–362.
10. *Zabarankin M., Uryasev S., Murphey R.* Aircraft Routing Under the Risk of Detection // Naval Research Logistics. 2006. V. 53. P. 728–747.
11. *Zhang Z., Wu J., Dai J., He C.* A Novel Real-Time Penetration Path Planning Algorithm for Stealth UAV in 3D Complex Dynamic Environment // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 122757–122771.
12. *Dijkstra E.* A Note of Two Problems in Connection with Graphs // Numerische Mathematik. 1959. V. 1. P. 269–271.
13. *Jong-Jin S., Hyochoong B.* UAV Path Planning under Dynamic Threats Using an Improved PSO Algorithm // Intern. Aerospace Engineering. 2020. V. 10. P. 1–17.
14. *Miller B., Stepanyan K., Miller A., Andreev M.* 3D Path Planning in a Threat Environment // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conf. Orlando, FL, USA, 2011. P. 6864–6869.
15. *Ежов Г.В.* Алгоритмы нахождения пути, их сравнение и визуализация на базе движка Unity // Молодой ученый. 2020. № 50 (340). С. 15–24.
16. *Hart P.E., Nilsson N.J., Raphael B.A.* Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths // IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics SSC4. 1968. V. 4. № 2. P. 100–107.
17. *Евдокименков В.Н., Красильщиков М.Н., Ляпин Н.А.* Гарантирующее управление траекторией беспилотного летательного аппарата при сближении с маневрирующей воздушной целью // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 40–53.
<https://doi.org/10.31857/S000233880002851-5>
18. *Евдокименков В.Н., Красильщиков М.Н., Себряков Г.Г.* Распределенная интеллектуальная система управления группой беспилотных летательных аппаратов: архитектура и программно-математическое обеспечение // Системы управления, связи и безопасности. 2019. № 3. С. 1–13.
<https://doi.org/10.24411/2410-9916-2019-10301>
19. Справочник офицера воздушно-космической обороны / Под общ. ред. С.К. Бурмистрова. Тверь: ВА ВКО, 2006. 564 с.
20. *Тяпкин В.Н., Фомин А.Н., Гарин Е.Н. и др.* Основы построения радиолокационных станций радиотехнических войск: учебник / Под общ. ред. В.Н. Тяпкина. Красноярск: Сибирск. федер. ун-т, 2016. 536 с.
21. *Пантенков Д.Г., Гусаков Н.В.* Компьютерное моделирование активной фазированной антенной решетки // Космическая техника и технологии. 2013. № 1. С. 34–39.
22. <https://earthexplorer.usgs.gov/>
23. *Valavanis K.P., Vachtsevanos G.J.* Handbook of Unmanned Aerial Vehicles. Dordrecht: Springer, 2015.

УДК 004.81;004.852;004.855.5

ОБУЧЕНИЕ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2023 г. С. С. Семенов^{a,*}, В. И. Цурков^{b,**}

^aМФТИ, Долгопрудный, МО, Россия

^bФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: semenov.ss@phystech.edu

**e-mail: tsur@ccas.ru

Поступила в редакцию 10.11.2022 г.

После доработки 08.01.2023 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Оптимизируются функционалы динамических систем различного вида с помощью современных методов обучения с подкреплением. Рассматриваются линейная задача распределения ресурсов, задача оптимального потребления и ее стохастические модификации. В обучении с подкреплением использовались методы градиента стратегии.

DOI: 10.31857/S0002338823030125, EDN: EVAFAM

Введение. К настоящему времени известны широко применяемые классические подходы в оптимальном управлении, такие, как принцип максимума Понтрягина, принцип оптимальности Беллмана, численные методы и т.д. Однако круг их использования ограничен. В последнее время в данной области получило развитие машинное обучение на нейронных сетях.

Обучение с подкреплением формулирует задачу оптимального управления на языке марковского процесса принятия решений и осуществляет переход к эквивалентной задаче оптимизации. Задача оптимального управления может быть переведена на язык принятия решения. Для осуществления перехода к эквивалентной задаче оптимизации вводятся такие объекты, как агент и среда. Среда – это некоторый марковский процесс принятия решений, который характеризуется пространством действий $s \in S$, пространством состояний $a \in A$, динамикой среды \mathcal{P}_{ss}^a , функцией вознаграждения \mathcal{R}_s^a и дисконтирующим фактором γ . Агент представляет собой некоторый стохастический алгоритм, который принимает на вход состояние среды s и возвращает действие a , которое необходимо принять, чтобы максимизировать итоговое вознаграждение. Взаимодействуя со средой, агент накапливает опыт игры и с каждой новой попыткой улучшает стратегию своей игры. Осуществив сотни тысяч попыток, стратегия агента сходится к оптимальной. Полученная стратегия максимизирует дисконтированную награду агента по траекториям при взаимодействии со средой и, как следствие, решает исходную задачу оптимального управления.

В настоящее время существуют два основных семейства алгоритмов обучения с подкреплением, в основе которых лежат различные принципы, а именно семейство Actor-Critic и семейство Policy Gradient. В решении практических задач наиболее эффективными являются алгоритмы DDPG [1], TRPO [2] из Policy Gradient и алгоритмы SAC [3], A2C [4] из Actor-Critic. В данной работе используется алгоритм Proximal Policy Optimization [5–7], который базируется на идее обновления весов не только с помощью подсчета градиента стратегии как в Policy Gradient, но и на выборе наиболее релевантного действия актором и оценке правдоподобия выбранного действия критиком как в Actor-Critic. Обучение с подкреплением успешно применяется в работах [8–12].

Рассматриваются три модельных задачи. В первой алгоритм эффективно строит точки переключения в разрывных управлениях. Во второй происходит совпадение с решением, полученным с помощью рекуррентных соотношений Беллмана. Наконец, в третьей строятся оптимальные решения для различных видов случайных параметров.

1. Постановка задачи. 1.1. Л и н е й н а я з а д а ч а о п т и м а л ь н о г о у п р а в л е н и я. Имеем простейшую динамическую модель распределения ресурсов с двумя подсистемами. Близкие задачи оптимального управления широко представлены в книге [13]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= x_1(T) + x_2(T) \rightarrow \max, \\ \frac{dx_1}{dt} &= a_1(t)u_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_2(t)u_2(t), \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_1 + u_2 &\leq W = \text{const}, \\ t &\in [0, T], \quad u = [u_1, u_2]^T, \\ x_1(0) &= x^1, \quad x_2(0) = x^2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $u_1(t), u_2(t)$ – управления, $x_1(t), x_2(t)$ – фазовые переменные, $t \in \mathbb{R}_+$ – время, $T \in \mathbb{R}_+$ – конечное время, $a_1(t), a_2(t)$ – заданные функции, W, x^1, x^2 – константы.

1.2. Задача оптимального потребления [14]. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \int_0^T \exp(-\alpha t)g(u(t))dt \rightarrow \max, \\ \dot{x} &= \rho x - u, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \\ u(t) &\geq 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $u(t)$ – интенсивность потребления или мгновенное значение потребления в момент времени t ; $x(t)$ – денежный капитал в момент времени t ; $g(u)$ – функция полезности потребления; α – ставка дисконтирования; ρ – банковская депозитная ставка.

Функция полезности потребления $g(u)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $g(u) \geq 0$,
- 2) $g(u)$ строго возрастает для $u \geq 0$,
- 3) $g(u)$ строго вогнутая дифференцируемая функция в области $u \geq 0$.

1.3. Д и с к р е т н а я с т о х а с т и ч е с к а я з а д а ч а. Пусть депозитная ставка является случайной величиной:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \mathbb{E}_\rho \sum_{k=0}^K \exp(-\alpha k)g(u_k) \rightarrow \max, \\ x_{k+1} - x_k &= \rho x_k - u_k, \\ x_0 &= a, \quad x_K = 0, \\ u_k &\geq 0, \quad t \in \overline{0, K}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где ρ – депозитная ставка; x_k – значение капитала в момент времени k ; u_k – значение потребления в момент времени k ; $\mathbb{E}_\rho[f]$ – математическое ожидание f по ρ , k и $K \in \mathcal{F} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Будут представлены дискретное распределение вероятностей, винеровский процесс и пуассоновский процесс.

Рассмотрим дискретное распределение вероятностей. Пусть $\{t\}_{t \in \mathbb{N}}$ – процесс, заданный в виде последовательности независимых и одинаково распределенных случайных величин. Пример случайного распределения представлен на рис. 1 с параметрами:

$$\mathbb{P}(\rho = r) = p, \quad r \in \{1.05, 1.06, 1.07, 1.08, 1.09\}, \tag{1.4}$$

где $\mathbb{P}(\rho = r)$ – вероятность того, что ρ принимает значение r .

Рассмотрим винеровский процесс. Пусть $\{\rho_t\}_{t \in [0, T]}$ – геометрическое броуновское движение, т.е. процесс, подчиняющийся дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\rho_t}{\rho_t} = \alpha dt + \sigma dW_t, \tag{1.5}$$

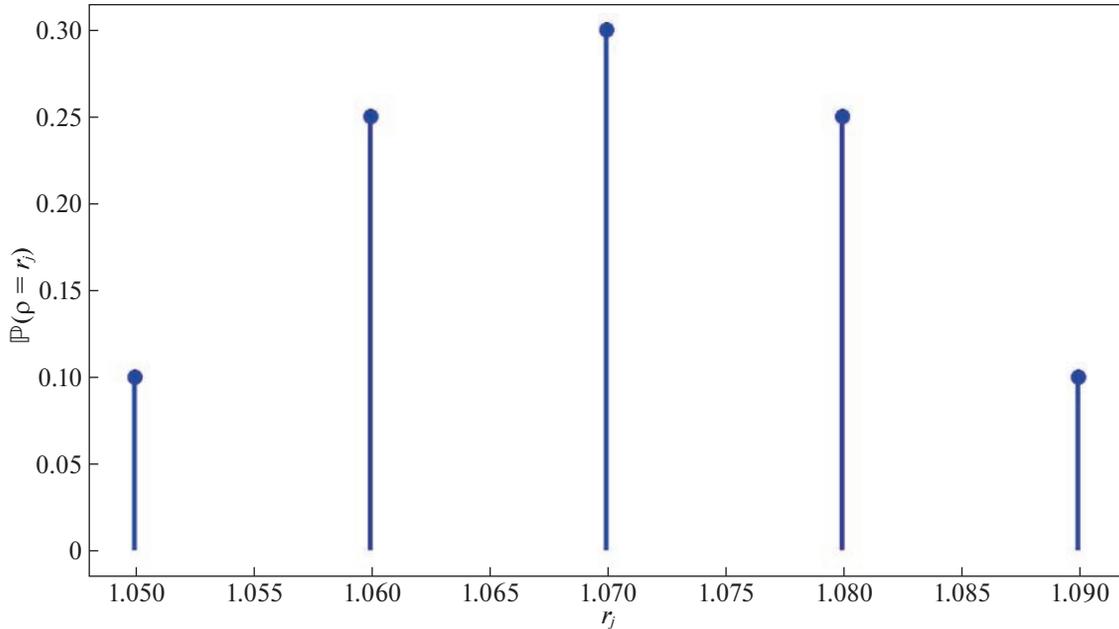


Рис. 1. Коэффициент прироста капитала как дискретное распределение вероятностей

где W_t – винеровский процесс, dW_t – дифференциал винеровского процесса $t \in \mathbb{R}_+$.

Для решения этого уравнения нам понадобится лемма Ито, сформулированная и доказанная, например, в [15].

О п р е д е л е н и е 1. Процесс X_t будем называть процессом Ито, если

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(t, \omega) dW_t,$$

$$dX_t = udt + v dW_t.$$

Л е м м а И т о. Пусть X_t – процесс Ито, задаваемый дифференциалом:

$$dX_t = udt + v dW_t,$$

и пусть $g(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Тогда $Y_t = g(t, X_t)$ – снова есть процесс Ито и

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (dX_t)^2,$$

где $(dX_t)^2$ вычисляется с использованием следующих правил:

$$dtd \sim dtdW_t \sim 0, \quad dW_t dW_t \sim dt.$$

Воспользовавшись леммой Ито, получаем

$$\rho_t = \rho_0 \exp\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right).$$

Поведение траекторий представлено на рис. 2.

Рассмотрим пуассоновский процесс. Пусть $\{\rho_t\}_{t \in [0, T]}$ – случайная функция, подчиняющаяся дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\rho_t}{\rho_t} = (\alpha - \lambda)dt + \sigma dN_t, \quad (1.6)$$

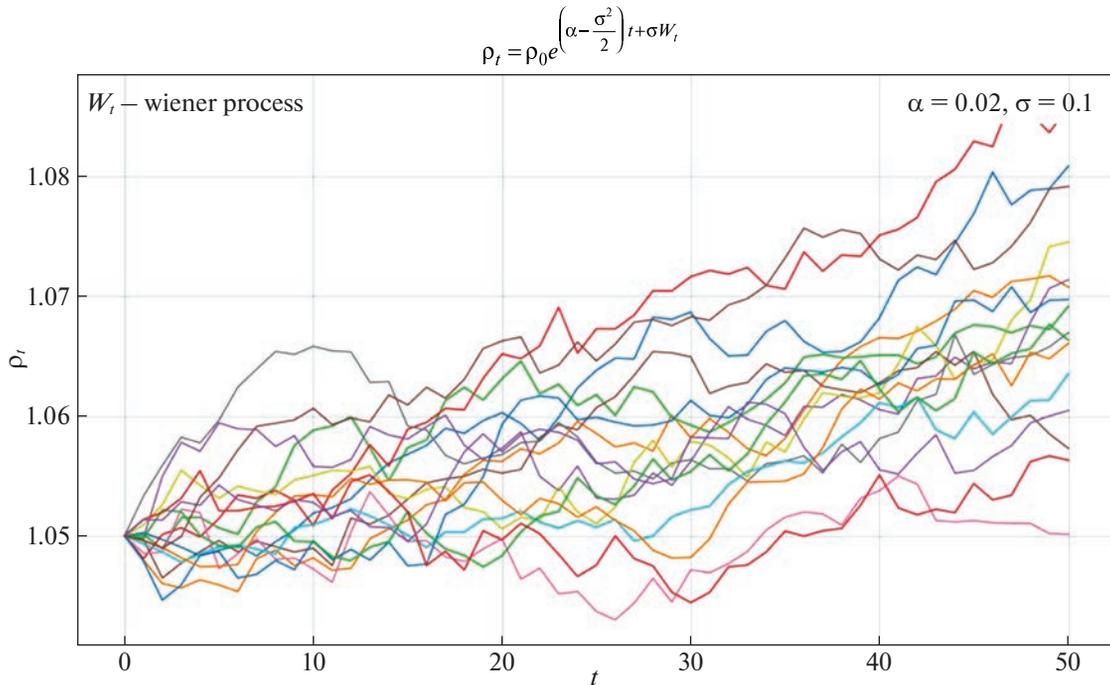


Рис. 2. Коэффициент прироста капитала как марковский процесс (16 реализаций)

где N_t – счетчик пуассоновского процесса с интенсивностью λ . Решение стохастического дифференциального уравнения получается с использованием леммы Ито аналогично случаю винеровского процесса. Имеем

$$\rho_t = \rho_0 \exp((\alpha - \lambda)t + N_t \ln(1 + \sigma)).$$

Поведение траекторий представлено на рис. 3.

2. Решения детерминированных задач. 2.1. Линейная задача распределения ресурсов ρ . Для задачи (1.1) применим принцип максимума Понтрягина (см., например, в [16]).

Определим класс (множество) допустимых управлений как множество m -мерных вектор-функций $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$, кусочно-непрерывных на заданном отрезке $\mathbf{T} = [0, T]$ с условием (ограничением) $u(t) \in \mathcal{U}, t \in \mathbf{T}$, где $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ – заданное множество. В формальной записи множество допустимых управлений \mathcal{W} имеет следующий вид:

$$\mathcal{W} = \{u \in \mathcal{C}_m(T), u(t) \in \mathcal{U}, t \in \mathbf{T}\}.$$

Рассмотрим обобщенный вариант простейшей задачи для линейной по состоянию системы с неразделенными переменными x, u :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \langle c, x(t_1) \rangle \rightarrow \min, \quad u \in \mathcal{W}, \\ \dot{x} &= A(u, t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x_0, \\ \mathcal{W} &= \{u \in \mathcal{C}_m(T), u(t) \in \mathcal{U}, t \in T = [0, T]\}, \\ A &\in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad b \in \mathbb{R}^2, \quad c \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение.

Пусть множество \mathcal{U} допустимых значений управления является компактом в \mathbb{R}^n . Пусть матричная функция $A(u, t)$ и вектор-функция $b(u, t)$ непрерывны на произведении $\mathcal{U} \times \mathcal{T}$.

Рассмотрим функцию Гамильтона–Понтрягина для (2.1):

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A^T(u, t)x + b(u, t) \rangle,$$

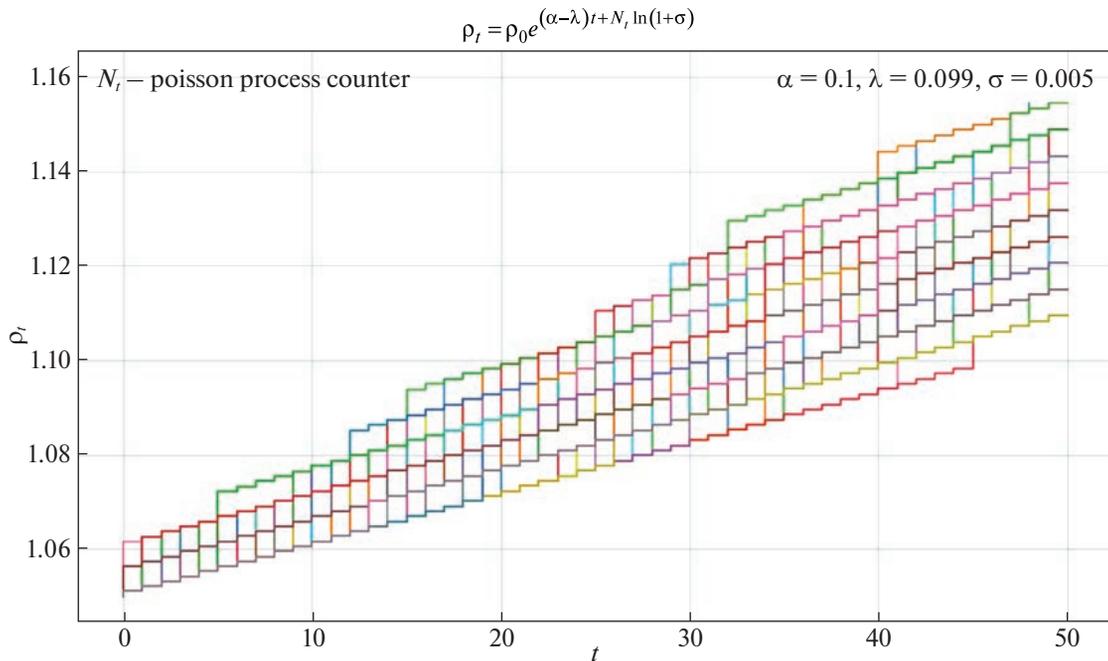


Рис. 3. Коэффициент прироста капитала как пуассоновский процесс (16 реализаций)

а также сопряженную систему:

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = -\mathbf{A}^T(\mathbf{u}, t)\psi, \quad \psi(t_1) = -\mathbf{c},$$

где ψ и \mathbf{c} – двумерные векторы, причем $\mathbf{c} = (1, 1)^T$.

Чтобы допустимое управление $u(t)$, $t \in \mathbf{T}$ было оптимально в задаче (2.1), необходимо, чтобы всюду на \mathbf{T} выполнялось условие

$$\mathbf{u}(t) = \arg \max_{v \in \mathcal{U}} H(\psi(t, \mathbf{u}), \mathbf{x}(t, \mathbf{u}), v, t).$$

Для задачи (1.1) получаем окончательно

$$H = a_1 y_1 \psi_1(t) + a_2 y_2 \psi_2(t),$$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{\partial H}{\partial x_2} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\partial H}{\partial x_2} = 0,$$

$$\psi = \text{const},$$

$$\psi(t_1) = -\mathbf{c} = \mathbf{1},$$

где $\mathbf{1}$ – единичный вектор.

Решение выглядит так:

$$u_1^* = \begin{cases} W, & a_1(t) \geq a_2(t), \\ 0, & a_1(t) < a_2(t), \end{cases} \quad (2.2)$$

$$u_2^* = \begin{cases} 0, & a_1(t) \geq a_2(t), \\ W, & a_1(t) < a_2(t). \end{cases}$$

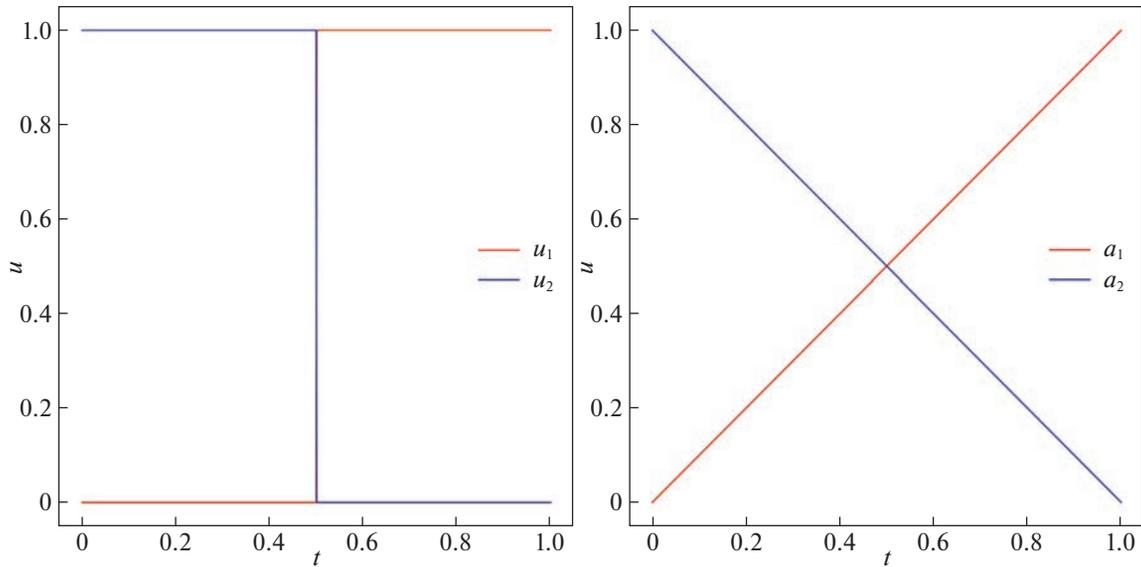


Рис. 4. Аналитическое решение линейной задачи оптимального управления с одной точкой переключения

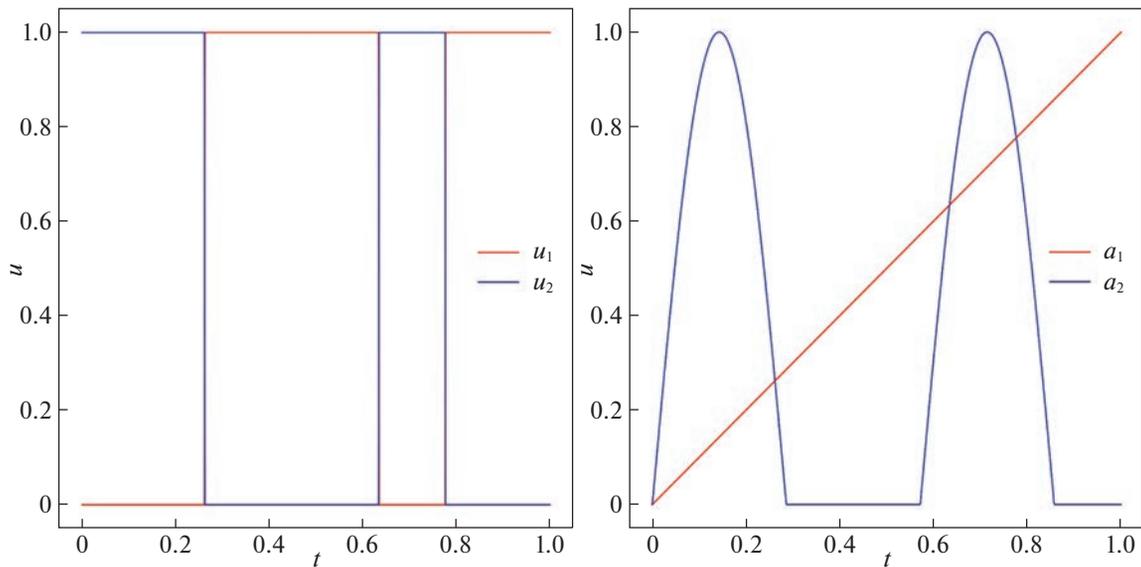


Рис. 5. Аналитическое решение линейной задачи оптимального управления с тремя точками переключения

Если $a_1(t) = t$, $a_2(t) = 1 - t$, $t \in [0, 1]$, то решение иллюстрирует рис. 4. Имеем одну точку переключения. Если $a_1(t) = t$, $a_2(t) = \sin(3.5\pi t)$, $t \in [0, 1]$, то решение иллюстрируется с помощью рис. 5. Имеем три точки переключения.

2.2. Задача оптимального потребления. Безусловно, эту задачу можно было решать принципом максимума, но можно и принципом Беллмана.

Для нас самое важное то, что нейросети получат то же самое решение, если мы используем обучение с подкреплением.

Дискретизация (1.2) по времени дает:

$$\sum_{t=0}^T \beta^t \ln(u_t) \rightarrow \max_{u_t},$$

$$x_{t+1} = \alpha x_t - u_t, \tag{2.3}$$

$$x_0 = a,$$

$$x_T = 0.$$

Найдем решение с помощью принципа оптимальности Беллмана (см., например, в [14]).

Функция Беллмана имеет вид, где k – текущий номер:

$$S_k(x) = \max_{u_t, t=k, T} \sum_{t=k}^T \beta^t \ln u_t$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \alpha x_t - u_t, \\ x_k &= x. \end{aligned}$$

Запишем рекуррентное соотношение Беллмана

$$S_t(x) = \max_{u_t} \{\beta^t \ln(u_t) + S_{t+1}(\alpha x - u_t)\}$$

с терминальным значением

$$S_T(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ -\infty, & x < 0. \end{cases}$$

Имеем

$$u_k(x) = \frac{\alpha x}{\sum_{i=0}^{T-k} \beta^i}. \quad (2.4)$$

В самом деле, подставим решение в правую часть уравнения Беллмана:

$$S_j(x) = \max_{u_j \geq 0} \left[\beta^j \ln(u_j) + \beta^{j+1} \sum_{t=0}^{T-j-1} \left\{ \beta^t \ln \left[\frac{\alpha(\alpha x - u_j)(\alpha\beta)^t}{\sum_{i=0}^{T-j-1} \beta^i} \right] \right\} \right]. \quad (2.5)$$

Максимум получим дифференцированием правой части (2.5):

$$\frac{\beta^j}{u_j} - \beta^{j+1} \sum_{t=0}^{T-j-1} \frac{\beta^t}{\alpha x - u_j} = 0 \Rightarrow u_j = \frac{\beta^j \alpha x}{\beta^j + \beta^{j+1} \sum_{t=0}^{T-j-1} \beta^t} = \frac{\alpha x}{\sum_{t=0}^{T-j} \beta^t}. \quad (2.6)$$

Знак второй производной проверяется аналогично.

При подстановке (2.6) в правую часть соотношения (2.5) получаем

$$\begin{aligned} S_j(x) &= \beta^j \ln \left[\frac{\alpha x}{\sum_{i=0}^{T-j} \beta^i} \right] + \beta^{j+1} \sum_{t=0}^{T-j-1} \left\{ \beta^t \ln \left[\alpha \left(\alpha x - \frac{\alpha x}{\sum_{i=0}^{T-k} \beta^i} \right) (\alpha\beta)^t \left(\sum_{i=0}^{T-j-1} \beta^i \right)^{-1} \right] \right\} = \\ &= \beta^j \ln \left[\frac{\alpha x}{\sum_{i=0}^{T-j} \beta^i} \right] + \beta^{j+1} \sum_{t=0}^{T-j-1} \left\{ \beta^t \ln \left[\frac{x \alpha^2 (\alpha\beta)^t \beta}{\sum_{i=0}^{T-j} \beta^i} \right] \right\} = \beta^j \ln \left[\frac{\alpha x}{\sum_{i=0}^{T-j} \beta^i} \right] + \beta^{j+1} \sum_{u=0}^{T-j} \left\{ \beta^{u-1} \ln \left[\frac{x \alpha^2 (\alpha\beta)^{u-1} \beta}{\sum_{i=0}^{T-j} \beta^i} \right] \right\} = \\ &= \beta^j \ln \left[\frac{\alpha x}{\sum_{i=0}^{T-j} \beta^i} \right] + \beta^j \sum_{u=0}^{T-j} \left\{ \beta^u \ln \left[\frac{x \alpha (\alpha\beta)^u}{\sum_{i=0}^{T-j} \beta^i} \right] \right\} = \beta^j \sum_{t=0}^{T-j} \left\{ \beta^t \ln \left[\frac{\alpha x (\alpha\beta)^t}{\sum_{i=0}^{T-j} \beta^i} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Решение уравнения Беллмана запишем как

$$S_k(x) = \beta^k \sum_{t=0}^{T-k} \left\{ \beta^t \ln \left[\frac{\alpha x (\alpha \beta)^t}{\sum_{i=0}^{T-k} \beta^i} \right] \right\}. \quad (2.7)$$

3. Построение решений с помощью обучения с подкреплением. В работе основой для построения численного решения задач оптимального управления служит алгоритм Proximal Policy Optimization [5]. Вводится ряд понятий.

Определение 2. Марковский процесс принятия решений: $\langle S, A, P, R, \gamma \rangle$, где S – пространство состояний; A – пространство действий, $P_{ss'}^a = \mathbb{P}(s_{t+1} = s' | s_t = s, a_t = a)$ – динамика среды или вероятность перехода агента из состояния s в состояние s' при условии действия a в момент времени t ; $R_s^a = \mathbb{E}[r_t | s_t = s, a_t = a]$ – функция вознаграждения. Она характеризует среднее вознаграждение агента в состоянии s при условии действия a в момент времени t ; $\gamma \in (0, 1]$ – дисконтирующий фактор.

Определение 3. Стратегия агента:

$$\pi_\theta(a | s) = \mathbb{P}(a_t = a | s_t = s, \theta).$$

Определение 4. Награда за эпизод:

$$r_t = \mathbb{E}[r | a_t = a, s_t = s],$$

$$G_t = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \dots + \gamma^{T-t-1} r_T = \sum_{t'=t}^{T-1} \gamma^{t'-t} r_{t'+1}.$$

Определение 5. Полезность состояния:

$$V(s) = \mathbb{E}_\pi[G_t | s_t = s].$$

Определение 6. Полезность состояния-действия:

$$Q(a, s) = \mathbb{E}_\pi[G_t | s_t = s, a_t = a].$$

Определение 7. Функция преимущества:

$$A(a, s) = Q(a, s) - V(s).$$

3.1. Двойственная задача оптимизации. Определим отношение вероятностей $r_t(\theta)$ как

$$r_t(\theta) = \frac{\pi_\theta(a_t | s_t)}{\pi_{\theta_{old}}(a_t | s_t)}, \quad r(\theta_{old}) = 1,$$

где θ_{old} – параметры текущей стратегии.

TRPO [2] максимизирует суррогатный функционал:

$$L^{CLI}(\theta) = \hat{\mathbb{E}}_t \left[\frac{\pi_\theta(a_t | s_t)}{\pi_{\theta_{old}}(a_t | s_t)} \hat{A}_t \right],$$

где $\hat{\mathbb{E}}_t$ – математическое ожидание по времени, \hat{A}_t – функция преимущества в момент времени t .

Без дополнительных ограничений максимизация L^{CLI} приведет к чрезмерно большому обновлению стратегии. Введем дополнительный штраф за изменения стратегии, которые удаляют $r_t(\theta)$ от 1.

Двойственная задача оптимизации

$$L^{CLIP}(\theta) = \hat{\mathbb{E}}_t \left[\min\{r_t(\theta) \hat{A}_t, \text{clip}(r_t(\theta), 1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \hat{A}_t\} \right],$$

$$L^{CLIP}(\theta) \rightarrow \max_{\theta \in \mathbb{R}^n}$$

где ϵ – гиперпараметр, а

$$\text{clip}(x, a, b) = \begin{cases} a, & \text{если } x < a, \\ x, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ b, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

3.2. Proximal Policy Optimization (PPO). В [5] PPO содержит две независимые параметризации для актора и критика. Процесс принятия решений обеспечивается актором, который имеет параметризацию θ . Процедура оценки полезности действий актора осуществляется критиком, который имеет параметризацию ϕ .

Веса актора обновляются максимизацией функции преимущества по парам состояние-действие для полученных траекторий. Веса критика обновляются минимизацией среднеквадратичной ошибки между отложенными дисконтированными значениями вознаграждения и параметризованной функцией полезности.

4. Результаты вычислений. Для решения поставленных задач наряду с PPO применялись различные алгоритмы обучения с подкреплением семейства Policy Gradient, а именно TRPO [2], DDPG [1], SAC [3], A2C [4].

Для проведения экспериментов использовались фреймворки обучения с подкреплением RLlib и stablebaselne3.

4.1. Линейная задача оптимального управления (1.1). Аналитическое решение задачи (1.1) задается формулой (2.2). Для задачи (1.1) применяем дискретизацию по времени:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{u}) &= x_K^1 + x_K^2 \rightarrow \max, \\ x_{k+1}^1 - x_k^1 &= a_k^1 u_k^1 \Delta t, \quad x_{k+1}^2 - x_k^2 = a_k^2 u_k^2 \Delta t, \\ u_k^1 &\geq 0, \quad u_k^2 \geq 0, \quad x_0 = 0, \\ u_k^1 + u_k^2 &\leq W, \quad k \in \overline{0, K}, \\ x_k &= x(t_k), \quad k \in \overline{0, K}, \quad t_{k+1} - t_k = \Delta t. \end{aligned}$$

Использование алгоритмов обучения с подкреплением требует формулировки задачи оптимального управления на языке принятия решений. Марковский процесс принятия решений подразумевает задание пространства действий, пространства состояний, функции вознаграждения, динамики среды и дисконтирующего фактора.

Под состоянием будем понимать вектор из четырех компонент:

$$s = (a_t^1, a_t^2, t, T - t),$$

где a_t^1 , и a_t^2 – значения динамических коэффициентов в текущий момент времени, t – текущее время с момента начала эпизода и $T - t$ – оставшееся время до конца эпизода.

Остановимся на функции вознаграждения. Ввиду специфики задачи оптимизации и граничных условий наиболее естественным будет определить функцию вознаграждения для марковского процесса принятия решений следующим образом. Выразим $x_1(t)$ и $x_2(t)$ из уравнения (1.1):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t u_1(t) a_1(t) dt, \\ x_2(t) &= \int_0^t u_2(t) a_2(t) dt. \end{aligned}$$

Проведем дискретизацию по времени ($x_k = x(t_k)$, $k \in \overline{0, K}$, $t_{k+1} - t_k = \Delta t$):

$$\begin{aligned} x_t^1 &= \sum_{i=0}^t u_i^1 a_i^1 \Delta t, \\ x_t^2 &= \sum_{i=0}^t u_i^2 a_i^2 \Delta t. \end{aligned}$$

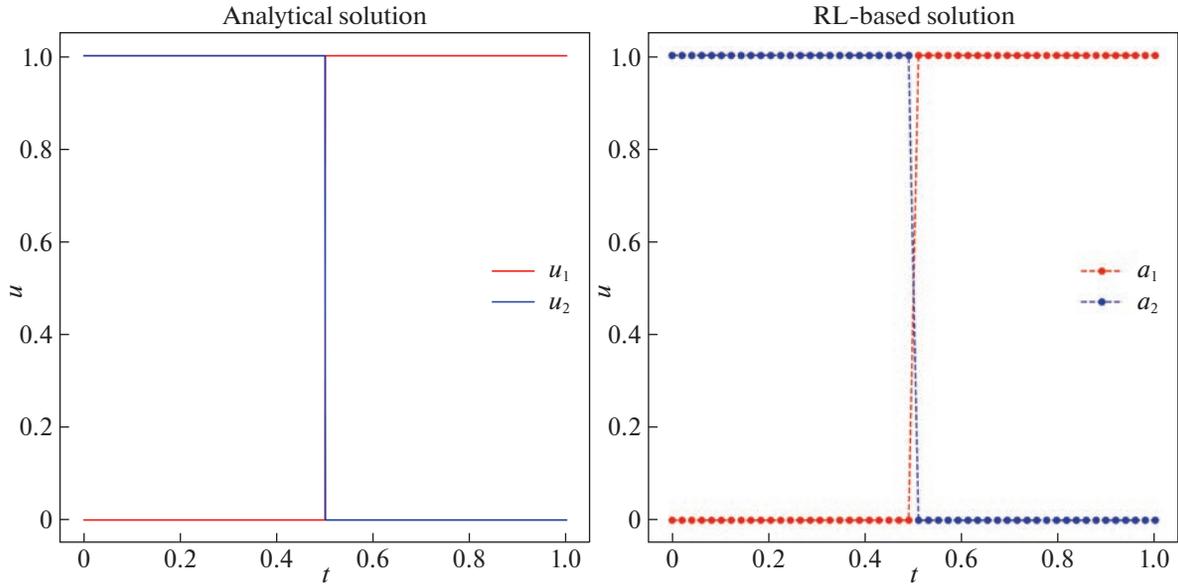


Рис. 6. Аналитическое и численное решения линейной задачи оптимального управления при $a_1(t) = t$, $a_2(t) = 1 - t$

Запишем мгновенные вознаграждения в случае действия $[u_t^1, u_t^2]^T$ в момент времени t :

$$r_t^1 = u_t^1 a_t^1, \quad r_t^2 = u_t^2 a_t^2, \\ r_t = r_t^1 + r_t^2.$$

Рассмотрим пространство действий

$$u = [u^1, u^2]^T, \\ u^i \in [\epsilon, +\infty).$$

Для реализации ограничений на допустимые значения управления $u_t^1 + u_t^2 \leq W$ существует два основных приема, а именно маскирование заведомо нерелевантных действий или с помощью штрафа за нарушение ограничений. В данном случае нарушение условия $u_t^1 + u_t^2 \leq W$ влечет за собой наложение штрафа и завершение эпизода. Штраф полагается равным максимально возможной награде за эпизод. Подобный сценарий форсирует агента на использование значений действия из допустимого множества и позволяет ему избежать нарушения поставленных ограничений.

Рассмотрим дисконтирующий фактор. Среда эпизодическая, поэтому необходимости в явном использовании γ нет. Здесь и далее $\gamma = 1$, т.е. дисконтирование отсутствует. Динамика среды представляет собой детерминированную функцию, которая не зависит от принятого агентом действия:

$$s_{t+1} = (a_{t+1}^1, a_{t+1}^2, t + 1, T - t - 1).$$

Результаты работы РРО таковы. Рассмотрим задачу распределения ресурсов. Согласно принципу максимума Понтрягина, аналитическое решение имеет вид ступенчатых функций:

$$u_1^* = \begin{cases} 1, & t \geq 0.5, \\ 0, & t < 0.5, \end{cases} \\ u_2^* = \begin{cases} 0, & t \geq 0.5, \\ 1, & t < 0.5. \end{cases}$$

На рис. 6 получено совпадение с этим решением, когда применяется обучение с подкреплением, на рис. 7 – то же самое для трех точек переключения.

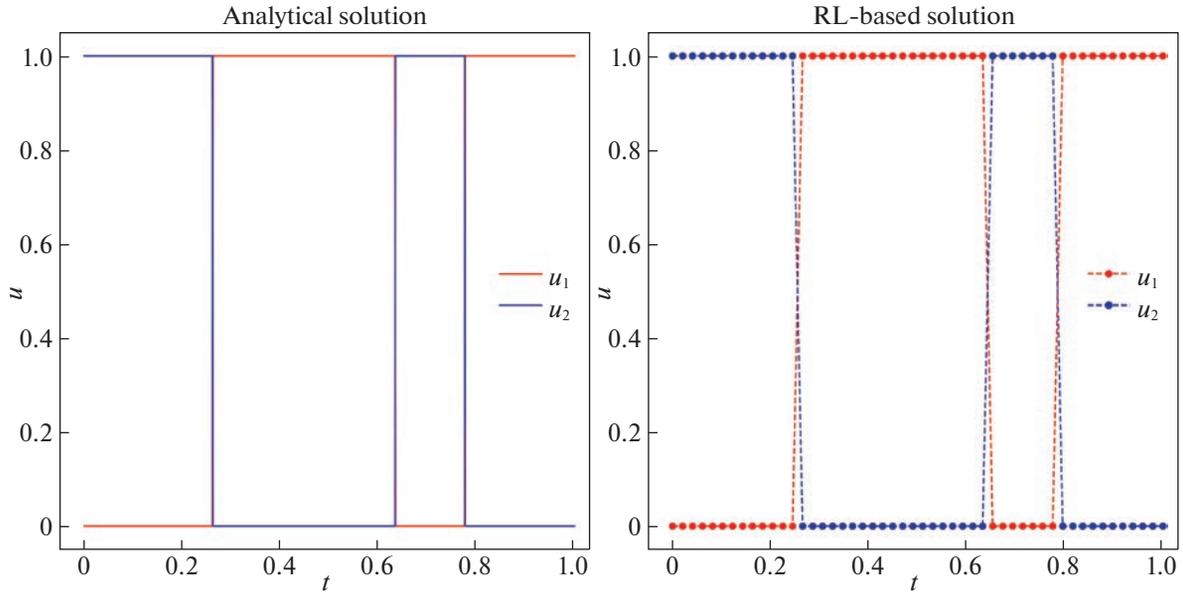


Рис. 7. Аналитическое и численное решения линейной задачи оптимального управления при $a_1(t) = t$, $a_2(t) = \max\{\sin(3.5\pi t), 0\}$

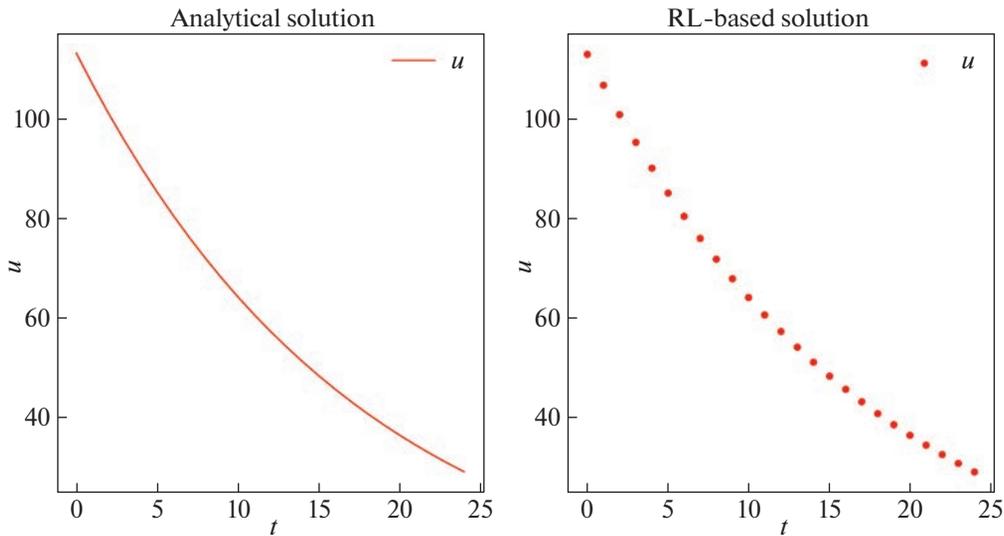


Рис. 8. Управление для задачи оптимального потребления

Проанализировав полученные решения, приходим к выводу, что решения задач оптимального управления, найденные с помощью обучения с подкреплением, совпадают с аналитическими с точностью до дискретизации.

4.2. Задача оптимального потребления (1.2). Аналитическое решение задачи (1.2) задается формулой (2.7). Под состоянием будем понимать вектор из трех компонент:

$$s = (c, t, T - t),$$

где c — значение доступного капитала в текущий момент времени, t — текущее время с момента начала эпизода и $T - t$ — оставшееся время до конца эпизода.

Определим дисконтирующий фактор как $\gamma = \beta$, а вознаграждение — как полезность потребления в текущий момент времени.

$$r_t = \log(u_t).$$

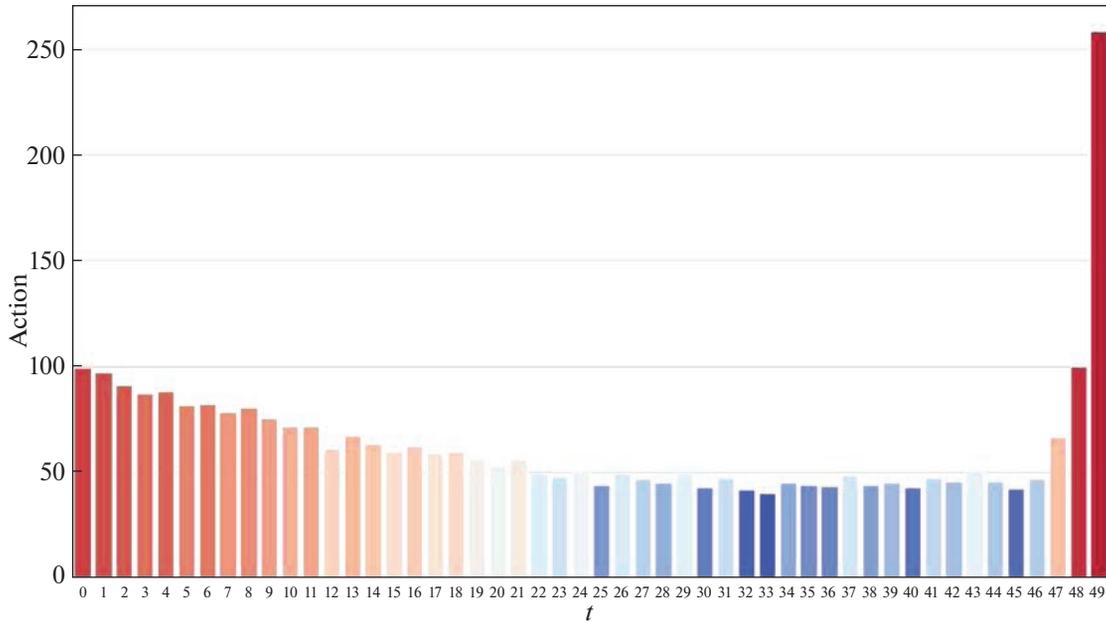


Рис. 9. Управление для задачи оптимального потребления, где коэффициент прироста капитала представлен как дискретное распределение вероятностей

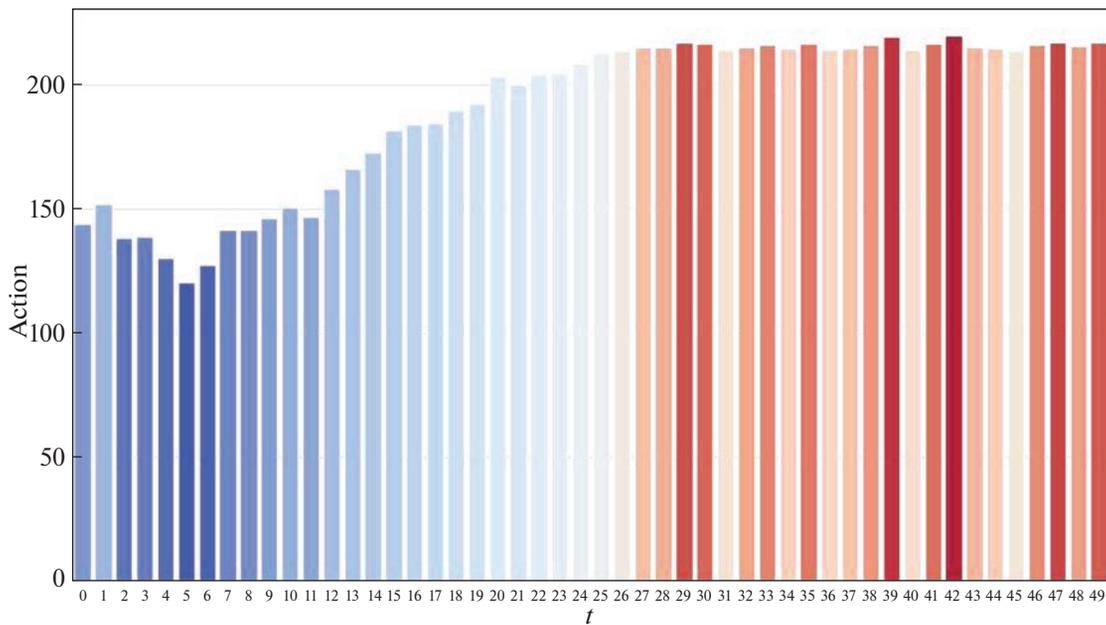


Рис. 10. Управление для задачи оптимального потребления, где коэффициент прироста капитала представлен как диффузионный процесс

Складывая все дисконтированные вознаграждения в каждый момент времени, получим итоговое дисконтированное значение вознаграждения за эпизод, которое совпадает со значением функционала:

$$G_0 = \sum_{i=0}^{T-1} \gamma^i r_i = \sum_{i=0}^{T-1} \beta^i \log(u_i).$$

В отличие от линейной задачи оптимального управления динамика среды для задачи оптимального потребления обладает более сложной структурой и зависит от действия,

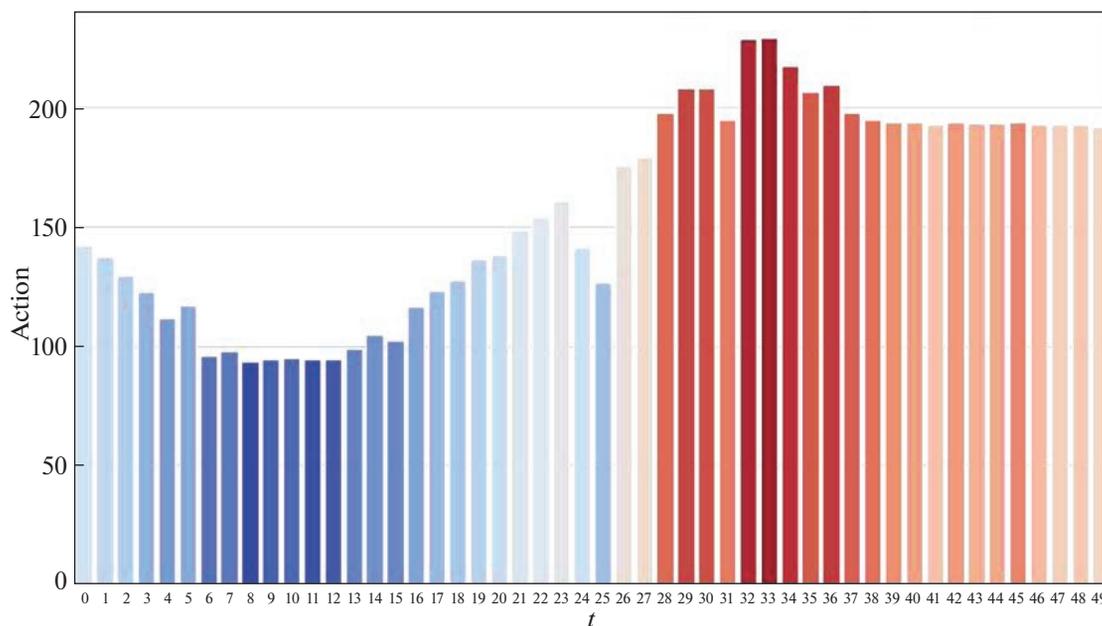


Рис. 11. Управление для задачи оптимального потребления, где коэффициент прироста капитала представлен как пуассоновский процесс

предпринятого на выбранном шаге. Тем не менее динамика среды остается детерминированной функцией.

Применяя оптимизацию градиента стратегии, РРО обеспечивает абсолютную сходимость численного решения при фиксированном исходном значении капитала x в (2.4) (см. рис. 8) к аналитическому с точностью до дискретизации.

4.3. Задача стохастического кредитования (1.3). Эта задача сложнее предыдущих из-за недетерминированности среды. Данная задача не имеет аналитического решения, поэтому не удастся сравнить с эталонным.

Марковский процесс принятия решений для задачи стохастического кредитования задается аналогично детерминированному случаю. Ниже представлены решения трех типов задач (1.4)–(1.6) стохастического кредитования, полученные с использованием алгоритма оптимизации градиента стратегии. Для наших трех случаев решения представлены на рис. 9–11. В данном случае удалось добиться сходимости алгоритмов обучения с подкреплением.

Заключение. Итак, обучение с подкреплением строит решения для детерминированных задач оптимального управления. Они совпадают с найденными посредством классических алгоритмов. Также получаются разрывные управления. Для стохастических задач оптимального управления данный подход дает сходящуюся последовательность. Однако не следует забывать, что количество итераций при обучении может быть очень большим (в нашем случае – несколько миллионов). Это имеет место, в частности, при росте количества точек дискретизации. Метод обучения с подкреплением демонстрирует свою эффективность для широкого класса задач. Тем не менее всегда нужно выбирать, когда он успешно конкурирует с традиционными аналитическими и численными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sewak M.* Deterministic Policy Gradient and the DDPG: Deterministic-Policy-Gradient-Based Approaches. 2019.
2. *Schulman J.* Trust Region Policy Optimization. 2015. <https://arxiv.org/abs/1502.05477>.
3. *Haarnoja T.* Soft Actor-Critic: Off-Policy Maximum Entropy Deep Reinforcement Learning with a Stochastic Actor. 2018. <https://arxiv.org/abs/1801.01290>.
4. *Huang S.* A2C is a special case of PPO. 2022. <https://arxiv.org/abs/2205.09123>.
5. *Schulman J.* Proximal Policy Optimization Algorithms. 2017. <https://arxiv.org/abs/1707.06347>.

6. *Zhang L.* Penalized Proximal Policy Optimization for Safe Reinforcement Learning. 2022. <https://arxiv.org/abs/2205.11814>.
7. *Chen X.* The Sufficiency of Off-policy: PPO is insufficient according to an Off-policy Measure. 2022. <https://arxiv.org/abs/2205.10047>.
8. *Ghosh A.* Provably Efficient Model-Free Constrained RL with Linear Function Approximation. 2022. <https://arxiv.org/abs/2206.11889>.
9. *Song Z.* Safe-FinRL: A Low Bias and Variance Deep Reinforcement Learning Implementation for High-Freq Stock Trading. 2022. <https://arxiv.org/abs/2206.05910>.
10. *Kaledin M.* Variance Reduction for Policy-Gradient Methods via Empirical Variance Minimization. 2022. <https://arxiv.org/abs/2206.06827>.
11. *Luo Q.* Finite-Time Analysis of Fully Decentralized Single-Timescale Actor-Critic. 2022. <https://arxiv.org/abs/2206.05733>.
12. *Deka A.* ARC – Actor Residual Critic for Adversarial Imitation Learning. 2022. <https://arxiv.org/abs/2206.02095>.
13. *Цурков В.И.* Динамические задачи большой размерности. М.: Наука, 1988. 287 с.
14. *Бекларян Л.А., Флёрова А.Ю., Жукова А.А.* Методы оптимального управления: учеб. пособие. М.: Наука, 2018.
15. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003.
16. *Понтрягин Л.С.* Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Наука, 2004.

УДК 004.932.2;004.032.2

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СТРУКТУРНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ АНТРОПОГЕННЫХ ОБЪЕКТАХ ИЗ ОДИНОЧНЫХ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ¹

© 2023 г. Н. В. Антипова^{a,b,*}, О. Г. Гвоздев^{a,c,**}, В. А. Козуб^{a,***},
А. Б. Мурынин^{a,b,****}, А. А. Рихтер^{a,*****}

^aНИИ “АЭРОКОСМОС”, Москва, Россия

^bФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

^cФГБОУ ВО “Московский государственный университет геодезии и картографии” (МИИГАиК),
Москва, Россия

*e-mail: antipova@phystech.edu

**e-mail: gvozdev@miigaik.ru

***e-mail: postbox-kozub@ya.ru

****e-mail: amurynin@bk.ru

*****e-mail: urfin17@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.01.2023 г.

После доработки 20.01.2023 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Описан метод трехмерной реконструкции зданий по одиночному аэрокосмическому изображению, состоящий из двух этапов — извлечение семантической информации и восстановление геометрии. Рассмотрена топология искусственных нейронных сетей по семантической сегментации компонентов зданий и эталонных объектов. По второму этапу представлены некоторые математические преобразования: по расчету фотометрических параметров изображения на базе метаданных или эталонных объектов, по преобразованию пространственных координат в осевые и плоские координаты изображения и др. Показаны два примера по вычислению фотометрических параметров и трехмерной модели здания по одиночным спутниковому изображению и аэрофотоснимку.

DOI: 10.31857/S0002338823030010, EDN: EUCSLC

Введение. Задача трехмерной реконструкции исследуется в научном сообществе уже более 20 лет. Трехмерные модели могут использовать, например, для симуляции распространения шума, света и электромагнитных волн, что может быть очень полезно при создании планов застройки и планирования расположения объектов телекоммуникационной инфраструктуры [1]. Рост интереса к данной проблеме в последние годы вызван бурным развитием вычислительной техники и алгоритмов глубокого обучения, позволившим создавать намного более робастные алгоритмы, что в свою очередь привело к значительному улучшению качества таких алгоритмов и повышению уровня автоматизации решения данной проблемы. Тем не менее, задача построения устойчиво работающего алгоритма трехмерной реконструкции по одному оптическому изображению с приемлемым уровнем детализации все еще остается нерешенной.

3D-реконструкция объектов по данным дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) заключается в обнаружении объектов и определении их трехмерных свойств, таких как высота и форма. Как правило, результат работы конечного алгоритма представляет собой набор векторных моделей. Для описания точности получаемых моделей обычно используют уровни детализации LoD (level of details) [2], из которых стоит отметить LoD1 и LoD2. В зависимости от конкретного метода уровень детализации может немного различаться, но обычно под уровнем LoD1 понимают призматическую модель здания (восстанавливается форма основания и высота), в то время как модель LoD2 дополнительно содержит информацию о форме крыши (без формообразующих

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках соглашения № 075-15-2020-776.

элементов, таких, как вентиляционные трубы, слуховые окна и т.д.). Проблема является плохо поставленной, поэтому стандартным подходом будет ее декомпозиция на более простые и четко сформулированные подзадачи. В свою очередь определение подзадач опирается, главным образом, на тот набор данных (их природу и качество), которые будут поданы на вход алгоритма реконструкции. В работе в качестве входных данных используется одно оптическое спутниковое изображение сверхвысокого разрешения (< 1 м/пк). Существует также большое количество методов, опирающихся на применение многопозиционной съемки [3–5] или результаты лидарного сканирования местности [6–8]. Однако они в некоторой степени отличаются от методов восстановления по одному аэрокосмическому изображению и поэтому рассматриваться здесь не будут.

1. Анализ существующих методов решения задачи. Представленные в литературе способы трехмерной реконструкции можно условно разделить на два типа: основанные на моделях и на данных.

Первый тип предполагает наличие некоторой библиотеки моделей. Задача реконструкции в этом случае заключается в определении для каждого объекта подходящей модели с уточнением параметров этой модели. Среди ранних работ в данном направлении можно отметить [9], где использовалась библиотека из восьми форм оснований, а сегментация проводилась на базе специально подобранной функции энергии. С помощью методов, адаптированных к работе только с оптическими изображениями, фактическим стандартом стало применение искусственных нейронных сетей (ИНС) для семантического анализа изображений. Только эта технология способна на данный момент обеспечить достаточно высокое качество извлечения семантики сцены. В некоторых методах задача трехмерной реконструкции решается полностью с помощью нейросетевых алгоритмов. Например, в [10] реализован алгоритм реконструкции, аппроксимирующий здания кубоидами, параметры которых определяются непосредственно с помощью сверточной сети детекции. Преимуществом модельного подхода является меньшая подверженность ошибкам из-за шума в данных, за что в свою очередь приходится платить ограниченностью форм восстанавливаемых объектов теми вариантами, которые заранее определены разработчиками в библиотеке моделей.

Методы, основанные на данных, предлагают определение всех геометрических форм объектов через набор простых элементов (прямых, углов, плоскостей и т.д.) и не ограничивают возможности их взаимного расположения. Так, в [11] рассмотрен подход реконструкции по одному аэрофотоснимку. Для реконструкции разработан алгоритм, основанный на правилах и геометрических построениях, который в качестве входных данных использует сегментацию линий (изгибов) крыш и нормализованную цифровую модель поверхности (NDSM). Для построения NDSM и масок сегментации применяется Y-образная сверточная сеть с двумя декодерами. Другой интересный способ реконструкции предложен в [12], где авторы описывают image-to-mesh ИНС архитектуру, результатом работы которой является непосредственно 3D-модель здания. Метод не рассчитан на работу со спутниковой съемкой в качестве входного изображения, зато имеется возможность работы с наземной или аэрофотосъемкой.

Подходы, основанные на данных, теоретически позволяют восстанавливать объекты более разнообразной формы, нежели подходы, основанные на моделях. Однако они сильно зависят от качества нахождения используемых базовых элементов. В случае плохой сегментации элементов результат может выходить крайне нереалистичным, чего не может случиться для методов, основанных на моделях. Тем не менее, бурное развитие технологий глубокого обучения дало возможность производить быструю и качественную сегментацию даже очень сложных объектов. Можно полагать, что качество работы сверточных нейронных сетей (СНС) в ближайшее время будет только расти. Поэтому для разработки собственного решения был выбран подход, основанный на данных, как наиболее перспективный.

2. Предлагаемый подход. 2.1. Основная идея. Предлагаемый метод реконструкции состоит из двух этапов (или блоков).

Извлечение семантической информации. Подразумевает семантическую сегментацию изображения по определенному набору классов, производящуюся с использованием СНС. Наиболее важными классами являются стены, крыши и тени зданий, а также производные от них. Для определения эталонов возможно выделение других классов: автомобильной полосы или железнодорожной колеи, автомобильных или железнодорожных столбов (при подходящем пространственном разрешении). Выбор и формализация классов являются важной задачей, от решения которой зависит качество последующей реконструкции [13–15].

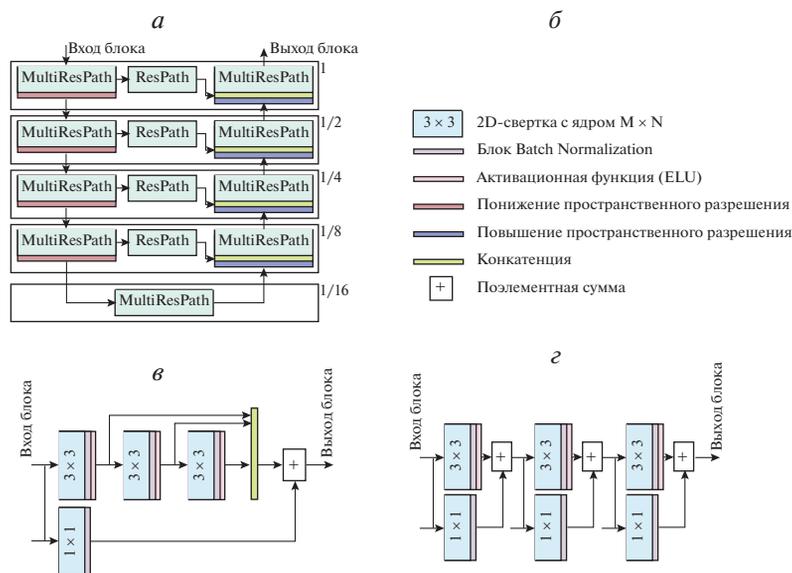


Рис. 1. Схемы параметрической топологии, разработанной на базе MultiResUNet: *а* – принципиальная схема; *б* – условные обозначения, используемые в схемах нейросетевых моделей; *в* – плотносвязанный остаточный путь (MultiResPath); *г* – простой остаточный путь (ResPath)

Восстановление геометрии. Основан на детерминированных необучаемых алгоритмах проективной геометрии, статистических методах, а также наборе правил (предположений) об объектах. В общем случае восстановление геометрии можно разделить на следующие стадии:

- введение системы координат в пространстве и на плоскости;
- выделение опорных точек по результатам сегментации и определение их координат на плоскости изображения;
- определение связей между опорными точками;
- нахождение пространственных координат опорных точек;
- построение модели объекта.

Данное разделение имеет ряд преимуществ. Во-первых, блочная структура позволяет независимо менять (обновлять) отдельные части алгоритма, важно лишь сохранение интерфейса. Во-вторых, для каждого этапа в отдельности легче построить систему оценки качества.

2.2. Извлечение семантической информации с помощью ИНС. Наибольший интерес в задаче реконструкции имеют объекты хозяйственной инфраструктуры, которые ввиду большого разнообразия геометрических и текстурных признаков невозможно сегментировать с надлежащим качеством при помощи классических методов машинного обучения. Поэтому для решения этой задачи использовались искусственные сверточные нейронные сети (ИСНС).

Первые опыты проводились с топологиями на основе U-net [16], состоящими из одного кодировщика и нескольких декодеров [13]. Однако, как показали дальнейшие исследования, более предпочтительной для данной задачи является топология MultiResUNet [17]. Во множестве проведенных экспериментов она стабильно показывала высокие результаты как с точки зрения качества получаемого результата, так и с точки зрения скорости обучения. Топология представляет собой улучшенный вариант U-net с возможностью параметрического масштабирования. Схематичное изображение архитектуры MultiResUnet представлено на рис. 1. Используемые параметры масштабирования вместе с их описанием представлены в табл. 1, 2.

Приведенная параметрическая структура стала основой для разработанных базовой и усиленной топологий сегментации. Базовая топология (рис. 2,а) представляет собой MultiResUnet-сеть, дополненную в начале сверткой с размером фильтра 7×7 , а также сверткой 1×1 с сигмоидальной функцией активации в конце. Усиленная топология (рис. 2,б) представляет комбинацию из двух MultiResUnet-сетей, дополненных остаточными соединениями с конкатенацией,

Таблица 1. Используемые параметры топологии MultiResUNet

Обозначение/формула	Значение по умолчанию	Описание
N	5	Количество слоев
M	2	Множитель слоя
U	32	Базовое количество ядер
α	1.67	Коэффициент количества ядер
n		Текущий слой $n \in \overline{1, N}$
$1/n$		Текущий масштабный уровень
$b = \lfloor \alpha U M^n \rfloor$		Базовый коэффициент количества ядер в группах плотносвязанных остаточных путей
$\frac{b}{6}$		Количество ядер в первой группе плотносвязанного остаточного пути
$\frac{b}{3}$		Количество ядер во второй группе плотносвязанного остаточного пути
$\frac{b}{2}$		Количество ядер в третьей группе плотносвязанного остаточного пути
$N - n - 1$		Количество операций свертки в простом остаточного пути слоя n
N		Количество ядер в операциях свертки простого остаточного пути слоя n

Таблица 2. Параметры и соотношения параметризации топологии MultiResUNet, предложенные в проекте

Масштабный уровень	Количество ядер свертки		
	Кодировщик	Skip-connection	Декодировщик
1	8, 17, 26	32, 32, 32, 32	8, 17, 26
1/2	17, 35, 53	64, 64, 64	17, 35, 53
1/4	31, 72, 106	128, 128	31, 72, 106
1/8	71, 142, 213	256	71, 142, 213
1/16		142, 284, 427	

сверткой с размером фильтра 7×7 в начале, а также двумя свертками с размером фильтра 1×1 , батч-нормализацией и сигмоидальной функцией активации в конце.

Целевым источником данных для разрабатываемого метода являются изображения дистанционного зондирования. Космические аппараты дистанционного зондирования имеют свои особенности аппаратуры, что приводит к значительным различиям в поступающей от них информации даже при совпадающем пространственном разрешении. Поэтому для получения качественной сегментации необходимо иметь набор размеченных данных с целевого аппарата, в частности Ресурс-П. Однако собранное количество данных все еще достаточно мало. Для решения проблемы была разработана техника аугментации, позволяющая, с одной стороны, расширить количество данных для обучения (с помощью линейных искажений и шума), а с другой – сбалансировать классы, симулируя больше участков из мест, где представлены редкие классы [18, 19]. Оценка качества сегментации для основных классов: “здания целиком” – $F1 = 0.8962$, $IoU = 0.8119$; “крыши зданий” – $F1 = 0.8963$, $IoU = 0.8121$; “тени зданий” – $F1 = 0.8717$, $IoU = 0.7726$, где $F1$ и IoU – количественные меры при оценке качества сегментации. Вычисляются по формулам:

$$accuracy = \frac{S(tp \cup tn)}{S(tp \cup tn \cup fp \cup fn)}, \quad precision = \frac{S(tp)}{S(tp \cup fp)}, \quad recall = \frac{S(tp)}{S(tp \cup fn)}$$

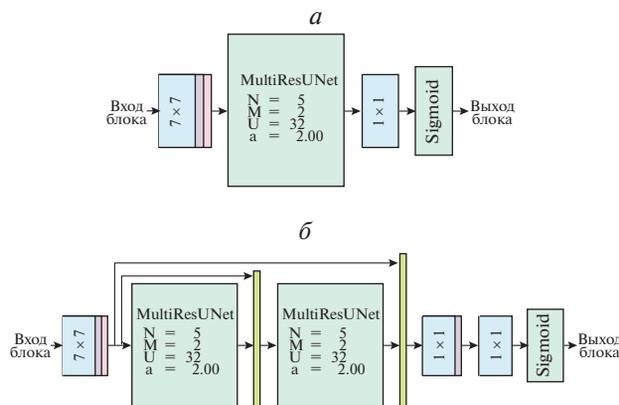


Рис. 2. Принципиальные схемы базовой (а) и усиленной (б) топологий

$$f1 = 2 \frac{S(\text{precision} \cap \text{recall})}{S(\text{recision} \cup \text{recall})}, \quad IOU = \frac{S(tp)}{S(tp \cup fp \cup fn)},$$

tp и tn – области истинно положительных (сегментации есть в местах, где класс есть) и истинно отрицательных (сегментаций нет в местах, где класса нет) сегментаций класса на изображениях, fp и fn – области ошибочно положительных (сегментации есть в местах, где класса нет) и ошибочно отрицательных (сегментаций нет в местах, где класс есть) сегментаций класса на изображениях, $accuracy$ – мера правильности, или $accuracy$ -мера (доля правильных ответов классификатора от общего числа правильных и неправильных ответов), $precision$ – мера точности (доля правильных положительных ответов классификатора), $recall$ – мера полноты (способность классификатора “угадывать” как можно большее число положительных ответов из ожидаемых), $f1$ – $F1$ -мера (характеристика качества классификатора, “балансирующая” между $precision$ и $recall$), IoU – мера “пересечения через объединение” (доля положительных ответов классификатора, которые действительно являются положительными), $S(u)$ – площадь области u (число пикселей области u).

2.3. Восстановление геометрии. Рассматривались в основном объекты из набора классов, стандартного для такой задачи: здания, автомобильные и железные дороги, вагоны, столбы [13, 20–23].

В данном случае изображение представляется как двумерная проекция трехмерного пространства. В работах приводятся два типа проекций: ортогональные и перспективные. Очевидно, что при проектировании часть информации теряется. Объекты интереса, такие, как здания, раскладываются на геометрические примитивы: линии, плоские и пространственные (такие, как цилиндры, пирамиды) фигуры. Примитивы можно описать набором геометрических точек (углов) и связей (отрезков) между ними.

Для восстановления пространственной формы объекта привлекаются различные предположения, в частности:

плоскости стен здания являются ортогональными между собой и по отношению к поверхности земли;

для зданий с плоской крышей ее поверхность параллельна плоскости земли;

направления линий окон перпендикулярны между собой и параллельны соответствующим линиям контуров стен.

3. Разработанные алгоритмы. В рамках описанной концепции были исследованы два метода реконструкции.

3.1. Трехмерная реконструкция по спутниковому изображению [13, 20–22]. Позволяет в общем случае получать призматические (LoD1) модели зданий, а в некоторых случаях – модели уровня детализации LoD2. Содержит следующие принципиальные этапы обработки:

применение к сегментационным маскам морфологических операций для уменьшения влияния ошибок на этапе сегментации;

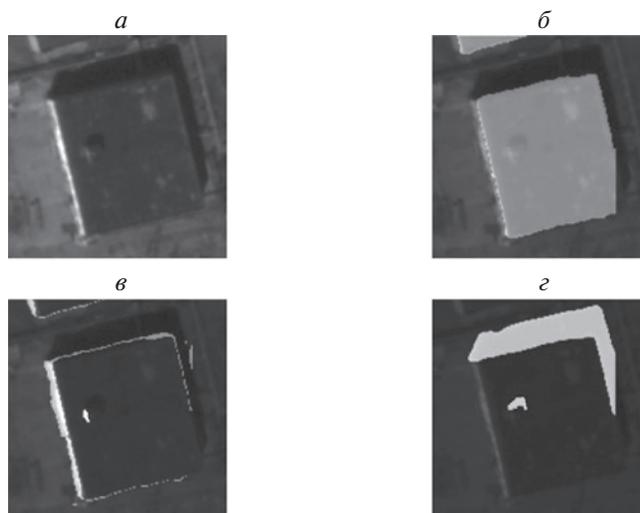


Рис. 3. Изображение здания C_1 (а), а также сегментационные маски крыш (б), стен (в) и теней (г), наложенные на изображение этого здания

приближение контуров крыш и стен кусочно-линейными кривыми (линеаризация);

определение на изображении вертикального направления и направления падения тени;

определение высоты здания из метаданных съемки и средней высоты стены;

построение призматической модели в предположении, что контур фундамента совпадает с контуром крыши;

форма крыши оценивается на основе профилей стен, а также с привлечением дополнительной информации о гранях крыши.

Пример 1. Построим трехмерную модель здания C_1 по его спутниковому изображению (рис. 3,а). Местоположение объекта: адрес – Красноярский край, г. Норильск, Вокзальная ул., 2Б; географические координаты – $69^{\circ}21'23.50''\text{C}$, $88^{\circ}08'59.31''\text{B}$. Предполагаем, что входными данными алгоритма являются сегментационные маски стен, крыши и тени здания, которые создаются в автоматическом режиме с использованием ИСНС.

Для удобства дальнейших построений, на изображениях для элементов объектов будем различать фотометрические и теневые проекции. Обозначим фотометрические проекции строчными буквами, а сами трехмерные объекты – прописными; I и S – изображение и тенеобразование объекта, которые идентифицируются набором фотометрических параметров. Преобразование некоторого физического или геометрического объекта A в его фотометрическую проекцию a запишем как $a = I(A)$, а в теневую проекцию A' – в виде $A' = S(A)$. Таким образом, полагаем a двумерным, A и A' – трехмерными, опорными точками являются A_0, \dots, A_9 . При этом также определяется соответствие точек и их теневых проекций по формулам:

$$A_3 = S(A_3), \quad A_4 = S(A_4), \quad A_8 = S(A_8), \quad A_9 = S(A_5) \Rightarrow A_8 A_9 = S(A_8 A_5).$$

После ряда морфологических преобразований и линеаризации контуров сегментационных масок (рис. 3, б–г) выделяются опорные точки, на основании которых производится реконструкция здания. Изображения опорных точек A_0, \dots, A_9 , $a_0 = I(A_0), \dots, a_9 = I(A_9)$ представлены на рис. 4. В свою очередь координаты a_0, \dots, a_9 в системе координат (СК) изображения (p, q) – в табл. 3. Точки A_0, \dots, A_4 соответствуют стыкам стен с крышей или поверхностью земли (либо являются тенями таких точек) и необходимы для восстановления формы здания уровня LoD1. Кроме того, на крыше есть надстройка (будка выхода или машинное отделение лифта). Поэтому для более детального восстановления формы к опорным добавляются: A_5, A_6, A_7 – точки вдоль карниза надстройки, A_8 – точка в углу основания надстройки.

Таблица 3. Координаты опорных точек на изображении

i	p_i	q_i
0	136	59
1	217	40
2	158	152
3	127	56
4	137	38
5	159	91
6	166	90
7	161	101
8	154	90
9	159	84

Будем использовать пространственную СК $OX_1X_2X_3$, привязанную к объекту C_1 . Считаем, что C_1 имеет прямоугольную крышу и ортогонально ориентированные несущие стены; $O = A_0$ – на углу крыши, OX_1 и OX_2 – вдоль карниза крыши, OX_3 – по стыку несущих стен; OX_1, OX_2, OX_3 задаются по точкам O и A_1, A_2, A_3 , т.е.

$$o = I(O) = I(A_0); \quad ox_i = I(OX_i).$$

В начале определяются основные фотометрические параметры для ортотрансформированного изображения [13, 14, 21]:

$$\zeta = \{\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}, \overline{n_s}, m_1, m_2, m_3, m_s\},$$

где $\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}$ – направляющие векторы осей ox_1, ox_2, ox_3 ; m_1, m_2, m_3 – масштабирующие коэффициенты (разрешения) вдоль $\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}$; $\overline{n_s}$ – направляющий вектор оси $ox_s = I_S(OX_s)$, где OX_s – ось, противоположная направлению от точки O к Солнцу. Также необходимо отметить следующие параметры: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_s$ – наклоны векторов $\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}, \overline{n_s}$ в системе координат wxu относительно оси wx , где wxu – СК-изображения, в которой начало координат w находится в точке (1, 1) изображения (его левый верхний угол), ось wx проходит в направлении от (1, 1) до (2, 1), ось wu – в направлении от (1, 1) до (1, 2).

Параметры ζ могут быть оценены как без использования метаданных, так и с помощью них.

I. По эталонным размерам. По сегментациям эталонных объектов на базе определенных алгоритмов находятся опорные точки этих объектов. Если для эталонных объектов предполагаются эталонные размеры (линейные размеры в данных точках), то можно оценить ζ :

$$\overline{n_j} = \frac{\overline{b_j}}{b_j}, \quad \overline{b_j} = I(\overline{B_j}), \quad j = 1, 3; \quad \overline{n_s} = \frac{\overline{b_s}}{b_s}, \quad \overline{b_s} = I_S(-\overline{B_s}), \quad (3.1)$$

$$m = \frac{B}{b}, \quad b = I(B); \quad m_3 = \frac{B'}{b'}, \quad b' = I(B'); \quad m_s = \frac{B''}{b''}, \quad b'' = I_S(B'')$$

Здесь $\overline{B_j}$ – некоторые векторы в опорных точках, сонаправленные осям OX_j ; B и B' – некоторые отрезки в опорных точках, параллельные соответственно плоскости OX_1X_2 и оси OX_3 .

В нашем случае $\overline{B_j} = \overline{OA_j}$. Тогда $\overline{b_j} = \overline{oa_j} = \overline{a_0a_j}$, $j = \overline{1, 3}$, а $\overline{b_s} = I(S(-\overline{OA_3})) = I(\overline{A_3A_4}) = \overline{a_3a_4}$. Отсюда находим $\{\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}, \overline{n_s}\}$.

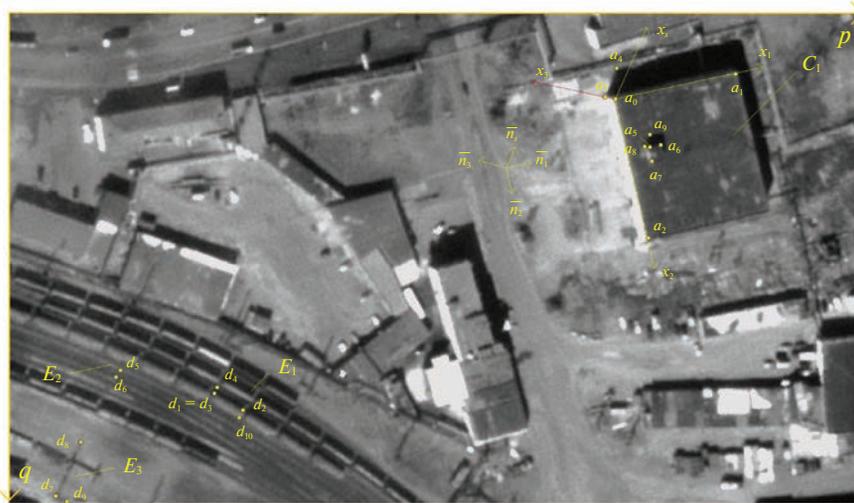


Рис. 4. Изображение здания, эталонных объектов, разметка опорных точек

В табл. 4 и на рис. 4 представлены примеры эталонных объектов в составе железнодорожной инфраструктуры и расчетов параметров $\{m, m_3, m_s\}$ по опорным точкам $\{d_j\}$.

II. По метаданным. Для разных спутниковых систем структуры данных в файлах метаданных разные. В табл. 5 отражены метаданные $\{\tau_j\}$ и их токены для Ресурс-П, экстрагируемые из файлов метаданных, для вычисления ζ' :

$$\bar{n}_3 = [\cos n_1 \sin \tau_1], \quad \bar{n}_s = [\cos \tau_2 \sin \tau_2], \quad m = \tau_5, \quad m_3 = \frac{\tau_5}{\cos \tau_3}, \quad m_s = \tau_5 \operatorname{tg} \tau_4.$$

Ясно, что $\varphi_3 = \tau_1, \varphi_s = \tau_2$. Векторы \bar{n}_1, \bar{n}_2 находятся по формуле (3.1). Расчеты по способу I дают:

$$\bar{n}_1 = [0.9736 \ -0.2284], \quad \bar{n}_2 = [0.2302 \ 0.9731],$$

$$\bar{n}_3 = [-0.9487 \ -0.3162], \quad \bar{n}_s = [-0.4856 \ 0.8742],$$

$$m = 0.5012 \text{ м/пк}, \quad m_3 = 1.3908 \text{ м/пк}, \quad m_s = 0.6408 \text{ м/пк}.$$

Таблица 4. Примеры эталонных объектов и расчетов фотометрических параметров

Эталонный объект	Опорные точки	Эталонные размеры	Расчет $\{m, m_3, m_s\}$
E ₁ Железнодорожный вагон: вагон-цистерна	D ₁ , D ₂ , D ₁₀ – на “крыше” вагона, D ₃ – в основании, D ₄ – тень точки D ₁	Длина B = D ₁ D ₂ (B = 10.77 м) Ширина B = D ₂ D ₁₀ (B = 3.23 м) Высота B' = D ₁ D ₃ (B' = 4.625 м)	b = I(B) = d ₁ d ₂ , m = B/b b = I(B) = d ₂ d ₁₀ , m = B/b b' = I(B) = d ₁ d ₃ = 0, m ₃ = = B'/b' – не определено b'' = I _S (B) = I _S (D ₁ D ₃) = = I(D ₁ D ₄) = d ₁ d ₄ , m _s = B'/b''
E ₂ Железнодорожная колея	D ₅ , D ₆ – на рельсах колеи напротив друг друга	Ширина колеи B = D ₅ D ₆ (B = 1.52 м)	b = I(B) = d ₅ d ₆ , m = B/b
E ₃ Железнодорожный столб: ригельная опора контактной сети для гибких поперечин	D ₇ – в основании столба, D ₉ – на пике столба, D ₈ – тень точки D ₉	Высота B' = D ₇ D ₉ (B' = 12 м)	b' = I(B) = d ₇ d ₉ , m ₃ = B'/b' b'' = I _S (B) = I _S (D ₇ D ₉) = = I(D ₇ D ₈) = d ₇ d ₈ , m _s = B'/b''

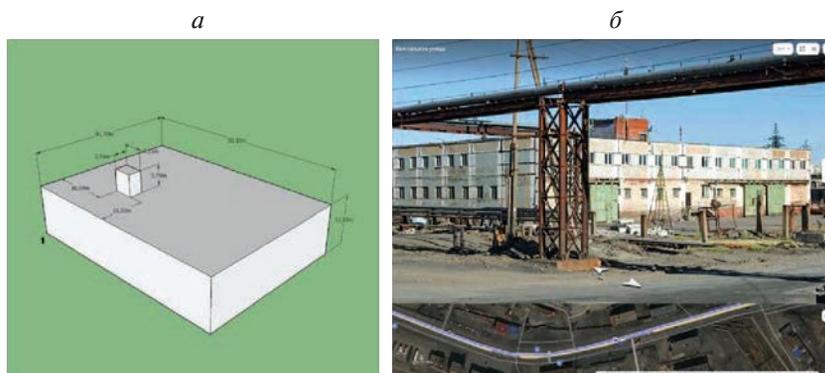


Рис. 5. Трехмерная модель объекта C_1 [Sketch Up] (а) и ее сопоставление с наземной фотографией (б) [Яндекс Карты]

После определения фотометрических параметров восстанавливается пространственная информация об объекте. Запишем горизонтальные L и вертикальные L' размеры:

$$L = ml; \quad L' = (m_3 l' + m_s l'')/2,$$

где $l = I(L), l' = I(L'), l'' = I_S(L')$. Тогда получим:

габариты основной части:

$$A_0 A_1 = m a_0 a_1 = 41.7 \text{ м}; \quad A_0 A_2 = m a_0 a_2 = 58.1 \text{ м},$$

$$A_0 A_3 = 0.5(m_3 I(A_0 A_3) + m_s I_S(A_0 A_3)) = 0.5(m_3 a_0 a_3 + m_s a_0 a_4) = 13.2 \text{ м};$$

габариты надстройки:

$$A_5 A_6 = m a_5 a_6 = 3.54 \text{ м}; \quad A_5 A_7 = m a_5 a_7 = 5.1 \text{ м},$$

$$A_5 A_8 = 0.5(m_3 I(A_5 A_8) + m_s I_S(A_5 A_8)) = 0.5(m_3 a_5 a_8 + m_s a_5 a_9) = 5.8 \text{ м};$$

положение надстройки:

$$r = \overline{A_3 A_5} = \overline{m a_3 a_5} = [11.5, 16.0] \text{ м};$$

наклон здания и надстройки (наклон оси OX_1 от направления на Север):

$$\alpha = \angle \overline{A_0 A_1} = a \cos \frac{p_1 - p_0}{a_0 a_1} = 13.2^\circ.$$

На рис. 5 рассмотрена простейшая геометрическая модель объекта $C_1(a)$, выполненная для демонстрации в программе Sketch Up, и ее соотнесение с наземным изображением (Яндекс Карты, панорамный режим съемки). Визуальная оценка высоты здания, включая чердачный пролет

Таблица 5. Метаданные для вычисления параметров изображения, Ресурс-П

Параметр	Название	Атрибут	Формат	Токен (на примере снимка)
τ_1	Азимут сканирования	aAzimutScan	GGG:MM:SS.SSSSSS	<aAzimutScan>191:47:52.640213</aAzimutScan>
τ_2	Азимут Солнца	aSunAzim	GGG:MM:SS.SSSSSS	<aSunAzim>157:42:39.382120</aSunAzim>
τ_3	Угол наклона съемки	aAngleSum	GGG:MM:SS.SSSSSS	<aAngleSum>28:47:46.016694</aAngleSum>
τ_4	Высота Солнца	aSunElevC	GGG:MM:SS.SSSSSS	<aSunElevC>36:10:22.919741</aSunElevC>
τ_5	Пространственное разрешение	nPixelImg	Double	<nPixelImg>0.688857049648087</nPixelImg>

и цоколь, с учетом стандартной высоты окна 1.53 м – примерно $8 \cdot 1.53 = 12.24$ м, что дает точность оценки высоты 92%.

3.2. Трехмерная реконструкция по перспективному изображению. Вводятся декартовы координаты $OX_1X_2X_3$ в пространстве и плоские координаты wpq на изображении. По информации об условиях и типе съемки определяется форма проецирования и отображение пространственных координат в плоские (уравнение проектирования) $\Pi : (X_1, X_2, X_3, \zeta) \rightarrow (p, q)$, где ζ – набор фотометрических параметров.

В качестве входных данных алгоритм принимает следующие наборы.

Набор опорных точек $\Xi = \{a_i = (p_i, q_i) | i = \overline{1, n}\}$ объекта и системы координат на изображении объекта. Предполагается, что точки определяются автоматически с использованием методов компьютерного зрения. Очевидно, что наибольший интерес в данном случае представляют угловые точки (т.е. точки стыка стен с крышей и ландшафтом, точки стыка граней крыши, углы окон и т.д.).

Набор функциональных связей о расположении точек, дающий информацию о форме объекта, который можно определить в виде множества $\Phi = \{\phi_j(A_1, \dots, A_n, K_j) = 0 | j = \overline{1, m}\}$, где $\Pi(A_i, \zeta) = a_i \forall i \in \overline{1, r}$, а K_j – набор параметров связи ϕ_j . Примеры некоторых связей:

три или более точек лежат на одной прямой;

четыре или более точек лежат в одной плоскости;

два отрезка параллельны;

непосредственно значение одной или нескольких пространственных координат точки.

На основе описанной выше информации составляется система уравнений:

$$\begin{cases} \phi_j(A_1, \dots, A_n, K_j) = 0, & j = \overline{1, r}, \\ \Pi(A_i) = a_i, & i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Далее производится попытка численно разрешить систему относительно неизвестных ζ и $\{K_j\}$. Решение системы можно вычислить при условии, что она содержит достаточное количество независимых уравнений.

Удобным является введение так называемых осевых координат. Для некоторой точки $A = (X_{A1}, X_{A2}, X_{A3})$, изображение которой есть $a = \Pi(A, \zeta)$, осевые координаты определяются по формуле

$$x_{ai} = \|\Pi(O, \zeta) - \Pi(X_{Ai} \bar{n}_i, \zeta)\|_2, \quad i = \overline{1, 3},$$

где \bar{n}_i – направляющие векторов ox_i , а $\|\cdot\|_2$ – Евклидова норма (корень суммы квадратов разности компонент векторов).

На рис. 6 представлены иллюстрации, поясняющие суть осевых координат для случая ортогонального (а) и перспективного (б) изображений. В каждом из случаев wpq – система плоских декартовых координат на изображении (как правило, оси p и q направлены вдоль его граней, а w – его левый верхний угол). В этой системе спроецированы оси некоторой пространственной СК $OX_1X_2X_3$ (оси обозначаются соответственно ox_1, ox_2, ox_3). Точки g_1, g_2, g_3 являются изображениями проекций некоторой точки A (ее изображение есть a) на соответствующие пространственные оси (т.е. $g_i = \Pi(X_{Ai} \bar{n}_i, \zeta), i = \overline{1, 3}$), также $o = \Pi(O, \zeta)$ – изображение центра пространственных координат O . При введенных обозначениях осевые координаты точки A есть нормы плоских векторов $x_{ai} = \|\overline{og}_i\|_2, i = \overline{1, 3}$.

При центральном проецировании преобразование из осевых координат в пространственные имеет вид

$$X_{Ai} = \log \left(\frac{1 - \frac{x_{mi}}{x_{fi}}}{1 - \frac{x_{ai}}{x_{fi}}} \right) X_{mi}. \quad (3.2)$$

Здесь $\{x_{fi}, x_{mi}, X_{mi}\}, i = \overline{1, 3}$, – некоторые фотометрические параметры; $x_{fi} = of_i, f_i$ – некоторые точки (так называемые фокусы), постоянные для выбранной СК, условий и типа съемки; x_{mi} – эталоны осевых координат, которым соответствуют эталоны пространственных координат X_{mi} .

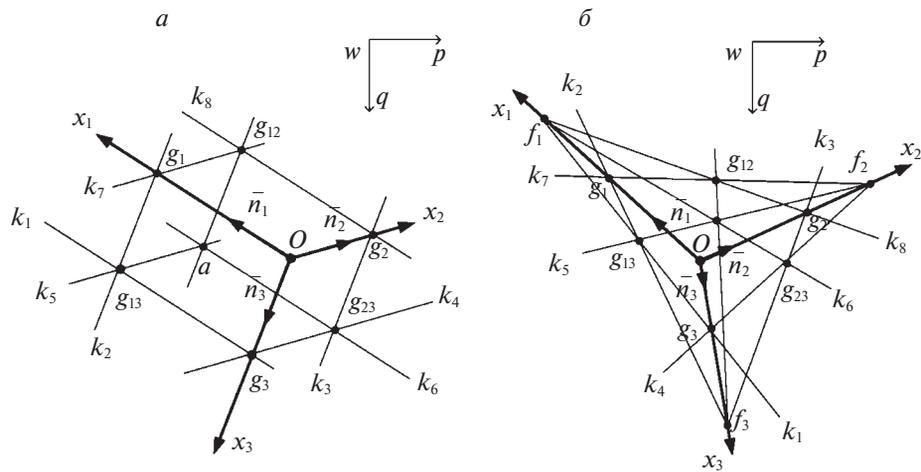


Рис. 6. Пояснение к введенным системам координат для случая ортогонального (а) и перспективного (б) изображений

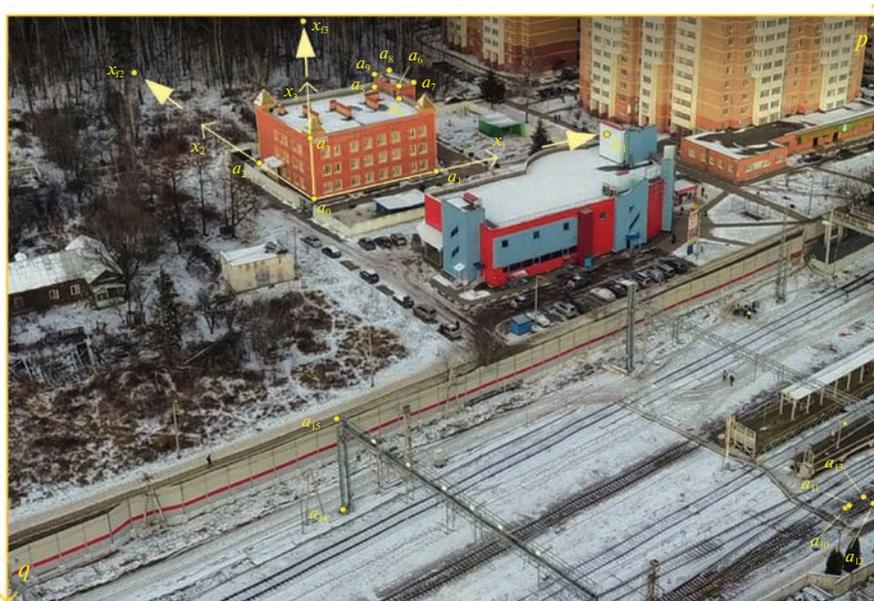


Рис. 7. Изображение здания, эталонных объектов, разметка опорных точек

Для перспективных изображений x_{fi} конечно (рис. 6,б), для ортотрансформированных $x_{fi} \rightarrow \infty$ (рис. 6,а). В последнем случае перепишем (3.2):

$$X_{Ai} = \frac{\ln(1 + y_i)}{\ln(1 + y_{mi})} X_{mi}, \quad y_i = -\frac{x_{ai}}{x_{fi}}, \quad y_{mi} = -\frac{x_{mi}}{x_{fi}}. \quad (3.3)$$

Так как $|y_i| < 1, |y_{mi}| < 1$, разложим числитель и знаменатель в (3.3) в ряды Маклорена и найдем предел дроби при $x_{fi} \rightarrow \infty$:

$$X_{Ai} = X_{mi} \lim_{x_{fi} \rightarrow \infty} \frac{y_i - y_i^2/2 + y_i^3/3 - \dots}{y_{mi} - y_{mi}^2/2 + y_{mi}^3/3 - \dots} = X_{mi} \frac{y_i}{y_{mi}} = X_{mi} \frac{x_{ai}}{x_{mi}} = m_i x_{ai},$$

где $m_i = X_{mi}/x_{mi}$ – масштабирующий коэффициент (разрешение) вдоль \bar{n}_i .

Пример 2. Проведем реконструкцию здания С₂ по его аэрофотоснимку (рис. 7). Местоположение объекта: адрес – Московская область, г. Балашиха, мкр. Железнодорожный,

Таблица 6. Координаты опорных точек на изображении

i	p_i	q_i
0	454	273
1	632	228
2	374	218
3	448	181
4	576	123
5	576	106
6	601	101
7	563	82
8	542	88
9	761	750

Лесопарковая ул., 5; географические координаты – $55^{\circ}45'12.87''\text{C}$, $38^{\circ}00'25.25''\text{B}$ (полное изображение доступно по ссылке <https://clck.ru/338Nog>).

Аналогично конструктивному подходу имеем опорные точки A_i , $i = \overline{1,9}$, изображения которых $a_i = I(A_i)$ представлены на рис. 7. В свою очередь координаты (p_i, q_i) (в пикселях) точек a_i отражены в табл. 6.

Система координат $OX_1X_2X_3$ привязана к объекту C_2 . Считаем, что C_2 имеет прямоугольную крышу и ортогонально ориентированные несущие стены; $O = A_0$ – на углу основания, OX_1 и OX_2 – вдоль основания, OX_3 – по стыку несущих стен, A_3 – в углу крыши, видимой на изображении. Координаты OX_1, OX_2, OX_3 задаются по точкам O и A_1, A_2, A_3 ; $o = I(O)$, $ox_i = I(OX_i)$. У стены есть пристройка (для размещения лестничной коробки и/или лифтовой шахты), подобная зданию по форме. Опорные точки $A_4 - A_9$ соответствуют точкам в видимых углах этой пристройки.

Основные фотометрические параметры для перспективного изображения [13, 22]:

$$\zeta = \{\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}, x_{f1}, x_{f2}, x_{f3}, x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, X_{m1}, X_{m2}, X_{m3}\},$$

где $\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}$ – направляющие векторы осей ox_1, ox_2, ox_3 ; x_{f1}, x_{f2}, x_{f3} – осевые координаты фокусов вдоль $\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}$; x_{m1}, x_{m2}, x_{m3} – эталоны осевых координат, соответствующие эталонам пространственных координат X_{m1}, X_{m2}, X_{m3} . Параметры ζ оцениваются по эталонным размерам или по метаданным.

По сегментациям эталонных объектов на базе определенных алгоритмов находятся опорные точки этих объектов. Если для эталонных объектов предполагаются эталонные размеры (линейные и угловые размеры в данных точках), то можно оценить ζ :

$$\overline{n_j} = \frac{\overline{b_j}}{b_j}, \quad \overline{b_j} = I(\overline{B_j}), \quad j = \overline{1,3}; \quad x_{ff} = of_j, \quad f_j = v_j \cap ox_j, \quad v_j = I(V_j).$$

Здесь $\overline{B_j}$ – некоторые векторы в опорных точках, сонаправленные осям OX_j ; $V_j = \overline{B_j}B_j''$ – отрезок, параллельный OX_j , длина которого известна. В нашем случае $\overline{B_j} = \overline{OA_j}$. Тогда $\overline{b_j} = \overline{oa_j} = \overline{a_0a_j}$, $j = \overline{1,3}$. Отсюда находим $\{\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}\}$.

Таблица 7. Примеры эталонных объектов и расчетов фотометрических параметров

Эталонный объект	Опорные точки	Эталонные размеры	Расчет $\{x_{mj}, X_{mj}\}$ по формуле
E ₄ Железнодорожная колея	D ₁ , D ₂ – на одной рельсе на соседних шпалах	Расстояние между шпалами B ₁ ' = D ₁ , B ₁ '' = D ₂ (V ₁ = 0.6 м), j = 1, j' = 2	(3.4)
	D ₃ , D ₄ – на рельсах колеи напротив друг друга	Ширина колеи B ₁ ' = D ₃ , B ₁ '' = D ₄ (V ₂ = 1.52 м), j = 2, j' = 1	(3.4)
E ₅ Железнодорожный столб: ригельная опора контактной сети для жестких поперечин	D ₅ – в основании столба, D ₆ – на пике столба	Высота B ₃ ' = D ₅ , B ₃ '' = D ₆ (V ₃ = 12 м), j = 3, j' = 1, j'' = 2	(3.5)
E ₆	D ₇ – в основании столба, D ₈ – на пике столба	Высота B ₃ ' = D ₇ , B ₃ '' = D ₈ (V ₃ = 12 м), j = 3, j' = 1, j'' = 2	(3.5)
E ₇	D ₉ – в основании столба, D ₁₀ – на пике столба	Высота B ₃ ' = D ₉ , B ₃ '' = D ₁₀ (V ₃ = 12 м), j = 3, j' = 1, j'' = 2	(3.5)

Параметры $\{x_{mj}, X_{mj}\}$ оцениваются по отрезкам V_j по-разному в зависимости от их пространственного положения. Приведем два случая.

I. $V_j \subset OX_j X_{j'}, V_j \parallel OX_j$:

$$\hat{b}_j' = f_j \cdot b_j' \cap ox_j, \quad \hat{b}_j'' = f_j \cdot b_j'' \cap ox_j,$$

$$x_{mj} = o\hat{b}_j', \quad X_{mj} = B_j' B_j'' \left| \log_{\left(1 - \frac{x_{mj}}{x_{jj}}\right)} \left(1 - \frac{x_{b_j''}}{x_{jj}} \right) - 1 \right|^{-1}, \quad (3.4)$$

где $|\dots|$ – абсолютная величина числа.

II. $V_j \parallel OX_j, B_j' \subset OX_j X_{j''}$:

$$\hat{b}_j'' = f_j \cdot b_j'' \cap ox_j, \quad \tilde{b}_j = f_j \cdot \hat{b}_j'' \cap ox_j,$$

$$x_{mj} = o\tilde{b}_j, \quad X_{mj} = V_j. \quad (3.5)$$

В табл. 7 и на рис. 7 рассмотрены примеры эталонных объектов в составе железнодорожной инфраструктуры и расчетов параметров $\{x_{mj}, X_{mj}\}$ по опорным точкам $\{d_i\}$. Расчеты дают:

$$\bar{n}_1 = [0.9695 - 0.2451], \quad \bar{n}_2 = [-0.8240 - 0.5665], \quad \bar{n}_3 = [0.065 \ 10.9979];$$

$$x_{f1} = 4203.2 \text{ пк}, \quad x_{f2} = 1265.2 \text{ пк}, \quad x_{f3} = 5070.7 \text{ пк};$$

$$x_{m1} = -186.3 \text{ пк}, \quad x_{m2} = -648 \text{ пк}, \quad x_{m3} = -88.1 \text{ пк};$$

$$X_{m1} = -30.2 \text{ м}, \quad X_{m2} = -83.3 \text{ м}, \quad X_{m3} = 12 \text{ м}.$$

После определения фотометрических параметров восстанавливается пространственная информация об объекте. Пространственные координаты X_{A_j} точек A_i здания рассчитываются по (3.2), где

$$\Pi : X_{A_j} = \log_{\left(1 - \frac{x_{mj}}{x_{jj}}\right)} \left(1 - \frac{x_{A_j}}{x_{jj}} \right) X_{mj},$$

а ϕ_j – исходя из геометрических связей: $A_1 \in OX_1, A_2 \in OX_2, A_3 \in OX_3, A_4 A_7 \parallel OX_1, A_4 A_5 \parallel OX_2, A_4 A_6 \parallel OX_3$ и др. (см. рис. 7). Результаты вычислений представлены в табл. 8.

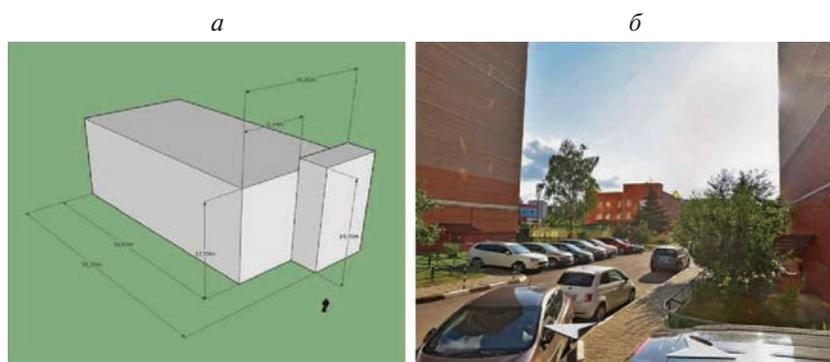
Таблица 8. Результаты расчетов осевых и пространственных координат точек здания

i	x_{i1} , ПК	x_{i2} , ПК	x_{i3} , ПК	X_{i1} , м	X_{i2} , м	X_{i3} , м
0	0	0	0	0	0	0
1	183.6001	0	0	31.5915	0	0
2	0	97.0824	0	0	16.0903	0
3	0	0	—	0	0	12.5504
4	183.6001	50.0861	—	31.5915	8.1407	12.5504
5	183.6001	97.0824	—	31.5915	16.0903	12.5504
6	183.6001	50.0861	—	31.5915	8.1407	14.0076
7	204.6138	50.0861	—	35.2989	8.1407	14.0076
8	204.6138	97.0824	—	35.2989	16.0903	14.0076
9	183.6001	97.0824	—	31.5915	16.0903	14.0076

Таблица 9. Результаты оценки точности восстановления горизонтальных элементов

Размер	Реконструкция (м)	Оценка, м	Точность (%)
Основание по оси OX_1	27	31.59	83
Основание по оси OX_2	22	16.09	73
Основание пристройки по оси OX_1	3.25	3.7	78
Основание пристройки по оси OX_2	9	7.95	88
Отступ пристройки от основной части вдоль оси OX_2	13	8.14	63

На рис. 8 показана простейшая геометрическая модель объекта $C_2(a)$, выполненная для демонстрации в программе Sketch Up, и ее соотнесение с наземным изображением (Яндекс Карты, панорамный режим съемки, вид справа со двора жилого массива). Также продемонстрировано соотнесение с аэрофотоснимком (рис. 1, вид сверху), визуальная оценка высоты основного здания, включая парапет, чердачный пролет и цоколь (2 м), с учетом стандартной высоты одного этажа для здания детского сада (3.3 м) — $2 + 3 \cdot 3.3 \approx 12$ м, что дает точность оценки высоты 95%. Высота пристройки равна высоте основной части плюс выступающая ее часть над крышей: с учетом высоты дверного проема (2 м) она равна примерно 15 м, что дает точность 93%. Точность определения горизонтальных размеров сравнивалась с оценками, полученными в геоинформационных системах (ГИС) Google Maps и Яндекс Maps с помощью линейки, результаты сравнения представлены в табл. 9.

**Рис. 8.** Трехмерная модель объекта C_1 [Sketch Up] (а) и ее сопоставление с наземной фотографией (б) [Яндекс Карты]

Высотные размеры (ориентированные по OX_3 оценены более точно, чем размеры, ориентированные по OX_1 и OX_2 . Данное обстоятельство обусловлено точностью определения фокуса f_j , которое зависит от количества взятых отрезков по каждой оси, причем определяемые впоследствии размеры весьма чувствительны к рассчитанным положениям фокусов. В нашем случае по каждой оси взято только по одному отрезку.

4. Полученные результаты. Описаны два подхода к трехмерной реконструкции зданий: по спутниковому и перспективному изображениям. В обоих случаях при расчете фотометрических параметров практически для каждого оцениваемого параметра следует получить выборку его значений, в частности: выборку m_j по E_1 и E_3 по нескольким эталонным объектам (см. пример 1) или облако точек f_j по нескольким прямым, параллельным j -й оси (см. пример 2). Результирующие оценки можно найти, прибегнув к различным статистическим характеристикам (выборочное среднее, выборочная медиана и т.д.). Комплементарным подходом является расчет фотометрических параметров по метаданным с учетом их оценки по эталонным объектам. Линейные и угловые связи между опорными точками могут определяться как методами компьютерного зрения, так и исходя из набора предположений (например, если группа точек принадлежит одной стене здания, то они лежат в одной плоскости).

Разработаны базовые алгоритмы расчета трехмерных параметров изображенного объекта в условиях дефицита входных данных. Фотометрические параметры могут быть оценены как по метаданным изображения, так и без них (по сегментациям эталонных объектов). Приведены примеры расчета геометрических параметров по одному изображению, в основе которых лежит сегментация главных компонентов зданий (крыша, стена, тень). По ним вычисляется призматическая модель здания, в том числе с учетом его надстроек и пристроек.

Заключение. В рамках представленной концепции трехмерной реконструкции описано два подхода: по спутниковому и перспективному изображениям.

Особенности предлагаемой концепции:

- оценка трехмерной модели ригидного объекта проводится по одному изображению;
- машинное обучение в условиях дефицита обучающих данных;
- допустимо невысокое качество сегментации информативных классов, в частности растры компонентов объектов могут иметь произвольную форму границ и с наличием пустот;
- качество оценки трехмерной модели объекта зависит от полноты известной растровой информации об этом объекте;
- используются предположения о видах, размерах и пространственной ориентации видимых элементов на изображении.

Также допускается вариативность входных данных, которая состоит в том, что:

- возможности использования изображений с различными наборами спектральных каналов, в том числе полутонных изображений;
- метаданные изображения на входе опциональны, и при их отсутствии на входе альтернативой является наличие эталонных стандартизированных объектов;
- полная или частичная видимость объектов на изображении;
- вариативность входных данных на этапе векторизации объектов по растрам.

В настоящее время проводится дальнейшая разработка алгоритмов, производится разметка новых данных и дообучение на них подобранных нейросетевых архитектур сегментации, работы над программой и ее тестированием по извлечению фотометрической информации из изображений, расчета трехмерных параметров и моделирования представленных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biljecki F., Stoter J., Ledoux H., Zlatanova S., Çöltekin A.* Applications of 3D City Models: State of the Art Review // ISPRS Intern. J. Geo-Information. 2015. V. 4. № 4. P. 2842–2889.
2. *Tang L., Li L., Ying S., Lei Y.* A Full Level-of-Detail Specification for 3D Building Models Combining Indoor and Outdoor Scenes // ISPRS Intern. J. Geo-Information. 2018. V. 7. № 11. P. 419.
3. *Yu D., Ji S., Liu J., Wei S.* Automatic 3D Building Reconstruction from Multi-view Aerial Images with Deep Learning // ISPRS J. Photogrammetry and Remote Sensing. 2021. V. 171. P. 155–170.
4. *Leotta M.J., Long C., Jacquet B., Zins M., Lipsa D., Shan J., Xu B., Li Z., Zhang X., Chang S.F. et al.* Urban Semantic 3D Reconstruction From Multiview Satellite Imagery // IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW). California, 2019. P. 1451–1460.

5. *Anzhu Y., Wenyue G., Bing L., Xin C., Xin W., Xuefeng C., Bingchuan J.* Attention Aware Cost Volume Pyramid Based Multi-view Stereo Network for 3D Reconstruction // *ISPRS J. Photogrammetry and Remote Sensing*. 2021. V. 175. P. 448–460.
6. *Yi C., Zhang Y., Wu Q., Xu Y., Remil O., Wei M., Wang J.* Urban Building Reconstruction from Raw LiDAR Point Data // *Computer-Aided Design*. 2017. V. 93. P. 1–14.
7. Reconstructing 3D Buildings from Aerial LiDAR with Deep Learning. 2020. URL: <https://developers.arcgis.com/python/samples/building-reconstruction-using-mask-rcnn/>
8. *Wang R., Peethambaran J., Chen D.* LiDAR Point Clouds to 3-D Urban Models: A Review // *IEEE J. Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*. 2018. V. 11. № 2. P. 606–627.
9. *Karantzalos K., Paragios N.* Automatic Model-based Building Detection from Single Panchromatic High Resolution Images // *The Intern. Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. 2008. V. 37. № 3Ba.
10. *Wang K., Frahm J.M.* Single View Parametric Building Reconstruction from Satellite Imagery // *International Conf. on 3D Vision (3DV)*. Qingdao, 2017. P. 603–611.
11. *Alidoost F., Arefi H., Hahn M.* Y-shaped Convolutional Neural Network for 3D roof Elements Extraction to Reconstruct Building Models from a Single Aerial Image // *ISPRS Annals of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. 2020. V. 2. P. 321–328.
12. *Biljecki F., Pang H.E.* 3D Building Reconstruction from Single Street View Images Using Deep Learning // *Intern. J. of Applied Earth Observation and Geoinformation*. 2022. V. 112.
13. *Гвоздев О.Г., Козуб В.А., Рихтер А.А., Мурынин А.Б., Кошелева Н.В.* Построение трехмерных моделей ригидных объектов по спутниковым изображениям высокого пространственного разрешения с использованием сверточных нейронных сетей // *Исслед. Земли из космоса*. 2020. № 5. С. 78–96.
14. *Kazaryan M., Richter A., Gvozdev O., Murynin A., Kozub V., Pukhovskiy D., Shakhramanyan M., Semeni-shchev E.* Reconstruction of 3-D Models of Infrastructure Objects from Satellite Images Based on Typed Elements // *Proc. SPIE 12269, Conf. Remote Sensing Technologies and Applications in Urban Environments VII, 122690J*. Edinburgh, 2022.
15. *Мурынин А.Б., Рихтер А.А.* Особенности применения методов и алгоритмов реконструкции трехмерной формы ригидных объектов по данным панорамной съемки // *Машинное обучение и анализ данных*. 2018. V. 4. № 4. P. 235–247.
16. *Ronneberger O., Fischer P., Brox T.* U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation // *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI 2015)* Springer International Publishing. 2015. P. 234–241.
17. *Nabil I., M. Sohel R.* MultiResUNet: Rethinking the U-Net Architecture for Multimodal Biomedical Image Segmentation // *Neural Networks*. 2020. V. 121. P. 74–87.
18. *Гвоздев О.Г., Касинская К.А., Мурынин А.Б., Рихтер А.А.* Получение информации об антропогенном замусоривании земной поверхности по данным спутниковой съемки // *Тез. докл. второй Междунар. конф. “Ситуация, язык, речь. Модели и приложения”*. Москва, Россия–Рим, Италия, 2019. P. 50–51.
19. *Гвоздев О.Г., Мурынин А.Б., Рихтер А.А.* Комплекс прикладных решений по построению и обучению искусственных нейронных сетей для семантической сегментации аэрокосмических изображений произвольной канально-спектральной структуры в условиях дефицита обучающих данных // *Матер. 19-й Всеросс. конф. с междунар. участием: Математические методы распознавания образов (ММРО-2019)*. М.: Российская академия наук, 2019. С. 344–348.
20. *Gvozdev O., Kosheleva N., Murynin A., Richter A.* 3D-modeling Infrastructure Facilities Using Deep Learning Based on High Resolution Satellite Images // *20th Intern. Multidisciplinary Scientific GeoConf. SGEM*. Alben, 2020. P. 149–156.
21. *Гвоздев О.Г., Козуб В.А., Кошелева Н.В., Мурынин А.Б., Рихтер А.А.* Нейросетевой метод построения трехмерных моделей ригидных объектов по спутниковым изображениям // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2021. V. 22 (1). P. 48–55.
22. *Рихтер А.А., Гвоздев О.Г., Мурынин А.Б., Козуб В.А., Кошелева Н.В.* Восстановление геометрических моделей объектов железнодорожной инфраструктуры по спутниковым изображениям на основе искусственных нейронных сетей // *Матер. 18-й Всероссийской открытой конф. “Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса”*. М., 2020. P. 41.
23. *Gvozdev O.G., Kozub V.A., Kosheleva N.V., Murynin A.B., Richter A.A.* Constructing 3D Models of Rigid Objects from Satellite Images with Spatial Resolution Using Convolutional Neural Networks // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2020. V. 56. № 12. P. 1664–1677.

СЛОЖНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ

УДК 629.7:004:331.101.1

ОЦЕНИВАНИЕ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА ОСНОВЕ ИЗМЕРЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ЕГО ЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ¹

© 2023 г. О. Н. Корсун^{а,*}, А. В. Стуловский^а

^аФАУ «ГосНИИАС», Москва, Россия

*e-mail: marmotto@rambler.ru

Поступила в редакцию 19.12.2022 г.

После доработки 09.01.2023 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Рассматривается метод определения значений углов ориентации летательного аппарата. Для предлагаемого метода исходными данными являются значения перегрузок в связанной и проекций скорости в нормальной земной системах координат. Предлагается, используя подходы прямых методов поиска оптимального управления, параметризовать углы тангажа, крена и рыскания, а затем найти значения параметров на основе исходных данных. Решить полученную оптимизационную задачу можно при помощи популяционного алгоритма.

DOI: 10.31857/S0002338823030083, EDN: EUNCRS

Введение. В последние годы малоразмерные беспилотные летательные аппараты (ЛА) получили значительный стимул к развитию, в том числе в связи с ростом вычислительных мощностей микроконтроллеров [1] и систем навигации [2].

Учитывая имеющиеся габаритно-массовые характеристики таких аппаратов, накладываются ограничения на установку датчиков и возможность их резервирования [3]. В этой связи перспективным подходом является комплексная обработка сигналов. В общем случае она позволяет уменьшить количество необходимых на борту средств измерения, используя информацию, которая уже имеется на борту, и возросший потенциал вычислителей [4, 5]. Комплексование также позволяет восстанавливать измерительную информацию в случае отказа датчиков, а также при расследовании летных происшествий.

В работе рассматривается возможность восстановления данных об угловом положении ЛА при помощи информации о перегрузках и проекциях скорости, т.е. предлагается из данных, предоставляемых, например, акселерометрами и приемниками спутниковых навигационных систем, извлечь значения углов ориентации. Тем самым устраняется потребность в отдельных датчиках для измерения угловых скоростей и углов ориентации.

Применяемый подход строится на методах теории оптимального управления – выполняется параметризация искомого сигнала, а значения параметров находятся из решения задачи оптимизации. Таким образом, точность нахождения углов ориентации ЛА будет зависеть от качества математической модели, которая для динамики движения ЛА разработана достаточно подробно, и от особенностей постановки задачи, например, единственности возможного решения.

1. Общий подход. Для нахождения значений углов ориентации применяется подход, использующий идеи прямого метода решения задач поиска оптимального управления [6–10]. В его рамках искомые сигналы задаются конечным числом параметров, что переводит решаемую задачу в класс задач численной оптимизации.

Физические свойства углов тангажа, крена и рыскания позволяют с достаточной точностью описать их изменение во времени при помощи кубических сплайнов. Значения параметров сплайнов можно найти, решив задачу оптимизации, которая формулируется как минимизация квадрата рассогласования между известными значениями сигналов.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-08-00449-а).

В рассматриваемой задаче предполагается, что значения проекций скорости в нормальной земной системе координат и значения перегрузок в связанной измеряются соответственно спутниковой навигационной системой и бортовыми акселерометрами, т.е. считаются заданными. Согласно известным уравнениям динамики полета [11], они связаны между собой однозначными математическими соотношениями, которые определяются значениями углов ориентации. Это предоставляет возможность получить оценки углов ориентации.

Так как в общем случае искомые сигналы могут определяться большим числом параметров, то для решения поставленной задачи целесообразно использовать популяционные или генетические алгоритмы [12–14]. В статье применяется метод роя частиц [6, 15].

1.1. Математическая модель. Пусть известны значения перегрузок ЛА в связанной системе координат и проекций скорости на оси земной нормальной системы координат. Требуется, используя эту информацию, найти значения углов ориентации ЛА и его угловые скорости. Такая задача может иметь место, когда данные измерителей по тем или иным причинам недоступны (отказ или отсутствие соответствующих датчиков) или при расследовании летных происшествий (повреждение носителей информации).

Решение задачи основывается на известных формулах, связывающих между собой нормальную земную и связанную системы координат [16].

Пусть известны значения перегрузок в связанной системе координат. Тогда можно определить проекции ускорения на оси этой системы [11]:

$$\begin{aligned} a_x &= g(n_x - \sin \vartheta), \\ a_y &= g(n_y - \cos \vartheta \cos \gamma), \\ a_z &= g(n_z + \cos \vartheta \sin \gamma), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где a_{xg}, a_{yg}, a_{zg} – значения проекций ускорений, приведенные в нормальной земной системе координат; n_x, n_y, n_z – перегрузки, измеренные относительно осей связанной системы координат; ϑ, γ – углы тангажа и крена.

Воспользовавшись матрицей перехода из связанной системы в нормальную земную [16], можно пересчитать ускорения в этой системе:

$$\begin{bmatrix} a_{xg} \\ a_{yg} \\ a_{zg} \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

где

$$U = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma & \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \cos \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma \\ -\sin \psi \cos \vartheta & \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma & \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma \end{bmatrix},$$

ψ – угол рыскания. Проинтегрировав их, получим значения проекций скоростей:

$$\begin{aligned} V_{xg}(t) &= V_{xg}(t_0) + \int_{t_0}^t a_{xg}(\tau) d\tau, \\ V_{yg}(t) &= V_{yg}(t_0) + \int_{t_0}^t a_{yg}(\tau) d\tau, \\ V_{zg}(t) &= V_{zg}(t_0) + \int_{t_0}^t a_{zg}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где V_{xg}, V_{yg}, V_{zg} – значения проекции вектора скорости в нормальной земной системе координат; t_0 – время начала интервала.

Эти операции можно производить и в обратном порядке: выполнить интегрирование скоростей в связанной системе координат:

$$\begin{aligned} V_x &= V_x(t_0) + \int_{t_0}^t [\omega_z V_y - \omega_y V_z + g(n_x - \sin \vartheta)] d\tau, \\ V_y &= V_y(t_0) + \int_{t_0}^t [\omega_x V_z - \omega_z V_x + g(n_y - \cos \vartheta \cos \gamma)] d\tau, \\ V_z &= V_z(t_0) + \int_{t_0}^t [\omega_y V_x - \omega_x V_y + g(n_z + \cos \vartheta \sin \gamma)] d\tau, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – угловые скорости относительно осей связанной системы координат, и перевести скорости в нормальную земную систему:

$$\begin{bmatrix} V_{xg} \\ V_{yg} \\ V_{zg} \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

С математической точки зрения оба способа совершенно эквивалентны, но имеет смысл сравнить их при численных расчетах. Можно ожидать, что интегрирование ускорений в связанной системе по уравнениям (1.4) повысит точность оценок угла рыскания, так как оно учитывает угловые скорости тангажа и рыскания в явном виде.

В основе подхода лежит идея, что измерения перегрузок и скоростей могут быть получены с высокой точностью и от не зависящих друг от друга систем, использующих различные физические принципы: ускорения определяются по показаниям акселерометров, а проекции скоростей в земной системе – по данным спутниковой системы навигации. В то же время формулы пересчета определяются значениями углов ориентации ЛА, прежде всего тангажом и креном. Это позволяет предположить, что, добившись хорошего соответствия между перегрузками и проекциями скорости, удастся определить значения Эйлеровых углов, дифференцируя которые можно получить оценки угловых скоростей [11].

С другой стороны, из динамики полета известно, что угол рыскания слабо связан с другими параметрами полета. Поэтому поставленная задача может оказаться плохо обусловленной и для ее решения может потребоваться дополнительная информация.

Один из возможных путей решения состоит в рассмотрении дополнительных условий, связывающих между собой значения углов, которые характеризуют траекторию, и углов ориентации. В динамике полета [17] известны следующие соотношения:

$$\sin \Theta = \cos \alpha \cos \beta \sin \vartheta - (\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma) \cos \vartheta, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \sin \Psi \cos \Theta &= \cos \alpha \cos \beta \sin \psi \cos \vartheta + \sin \alpha \cos \beta (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) - \\ &- \sin \beta (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где α, β – углы атаки и скольжения, Θ, Ψ – углы наклона и поворота траектории.

Из равенств (1.6), (1.7) видно, что они зависят от значений угла рыскания. Кроме того, они связывают значения углов атаки и скольжения, которые задают направление вектора скорости относительно связанной системы координат, с углами наклона и поворота траектории Θ и Ψ , определяющими направление вектора скорости в земной нормальной системе координат [16].

Значения углов атаки и скольжения могут быть оценены при помощи проекций скорости в связанной системе координат, получаемых при помощи матрицы преобразования из (1.2):

$$\alpha = -\operatorname{arctg} \left(\frac{V_y}{V_x} \right), \quad (1.8)$$

$$\beta = \operatorname{arcsin} \left(\frac{V_z}{V} \right), \quad (1.9)$$

где $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

Более подробное описание можно найти в [18]. Аналогичные формулы могут быть применены и для оценки углов наклона и поворота траектории, если подставить в них значения проекций скорости в земной системе координат.

Таким образом, плохую обусловленность исходной задачи можно преодолеть, добавив выражения (1.8) и (1.9) в состав применяемой математической модели и добавив слагаемые, определяемые соотношениями (1.6) и (1.7), в минимизируемый функционал.

В общем виде полученная оптимизационная задача запишется так:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in U}, \quad (1.10)$$

где \mathbf{x} – вектор фазовых переменных системы, определяемой уравнениями (1.1)–(1.3) или (1.4), (1.5); \mathbf{u} – вектор искомых сигналов, аналогичный вектору управления в классических задачах оптимального управления; U – множество возможных значений управляющих сигналов.

Для описанной выше конкретной постановки функционал принимает вид

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^T (\mathbf{V}_g - \tilde{\mathbf{V}}_g)^T (\mathbf{V}_g - \tilde{\mathbf{V}}_g) dt, \quad \mathbf{u} \in U, \quad (1.11)$$

где t_0 , T – время начала и конца участка соответственно; $\mathbf{u} = [\vartheta \ \gamma \ \psi]^T$ – вектор углов ориентации; $\mathbf{V}_g = [V_{xg} \ V_{yg} \ V_{zg}]^T$ – вектор скорости в земной нормальной системе координат, $\tilde{\mathbf{V}}_g$ – известный вектор скорости в земной нормальной системе координат.

Для формулы (1.11) U представляет собой множество возможных значений углов ориентации $\vartheta\gamma\psi$. Границы этого множества задаются априорно при помощи системы неравенств по каждому углу.

Учитывая изложенные выше соображения об угле рыскания, введем также аналогичный (1.11) функционал, отличие которого состоит в том, что управляющие сигналы \mathbf{u} включают в себя только углы тангажа и крена:

$$\mathbf{u} = [\vartheta \ \gamma]^T. \quad (1.12)$$

Будем предполагать, что при этом угол рыскания является известным. Обозначим такую формулировку задачи (1.12).

Используемые экспериментальные данные, т.е. значения трех проекций скорости в земной системе координат и трех проекций перегрузки в связанной системе координат, содержат случайные погрешности измерений. В случае ЛА эти погрешности, как правило, являются высокочастотными. С другой стороны, математическая модель объекта представляет собой естественный фильтр низких частот, подавляющий высокочастотные составляющие. Поэтому при выполнении численного интегрирования дифференциальных уравнений модели объекта, что является обязательным элементом предлагаемого подхода, случайные погрешности измерений существенно ослабляются.

1.2. Эрмитовы сплайны. Предложенный метод требует параметризации рассматриваемого сигнала. Поскольку углы ориентации представляют собой гладкие сигналы, то было принято решение аппроксимировать их при помощи сплайнов третьего порядка.

В данном исследовании были применены кубические сплайны дефекта 2, которые также называются Эрмитовыми сплайнами. Их особенность заключается в разрывности второй производной, поэтому требуется задавать в узлах сплайна значения как самой функции, так и ее первой производной. Более подробно этот вид сплайнов описывается в [19].

Данная параметризация не является единственно возможной. Можно, например, предложить использовать интерполяционные кубические сплайны [19], имеющие в узлах сплайна непрерывную вторую производную. Это условие задает систему уравнений, которая разрешается относительно значений производной в узлах. Она описывается трехдиагональной матрицей, и для ее решения существует хорошо разработанный способ, называемый “методом прогонки” [19].

Преимуществом данной параметризации является то, что, связав значения производных при помощи системы уравнений, удастся почти в 2 раза сократить количество параметров, задающих сплайн – необходимо найти только значения функции в узлах и ее производной по краям участка, что существенно сокращает вычисления и время поиска оптимального решения. К сожалению, при этом повышаются требования к гладкости функций, а значит, сужается класс потенциальных сигналов.

Сравнение этих двух видов сплайнов для рассматриваемой задачи проводится в разд. 2.4.

1.3. Метод роя частиц. Предлагаемый метод преобразует задачу нахождения сигнала к задаче численной оптимизации. Для ее решения предлагается использовать алгоритм, называемый методом роя частиц, идея которого впервые была предложена в [20].

Общая концепция алгоритмов роя состоит в следующем. Задается пространство поиска, размерность которого соответствует числу искомых параметров. Каждая точка пространства поиска соответствует некоторому набору значений параметров, а значит, задает некоторое решение задачи. После этого в пространство поиска “вбрасываются” частицы. С этой целью выбираются случайным образом несколько точек пространства. Каждой из них приписывается вектор скорости, величина и направление которого также формируются случайно. Для каждой такой частицы вычисляется значение целевого функционала, определяемое тем решением, которому она соответствует.

На рабочем шаге алгоритма частицы смещаются в пространстве под влиянием своей начальной скорости, а также информации о своем положении раньше и положении частиц роя, которые достигли лучшего значения целевого функционала. Учет подобных влияний производится посредством весовых коэффициентов. Выбор коэффициентов, характеризующих инерцию движения частицы, влияние на нее когнитивной и социальной компоненты, позволяет регулировать для алгоритма скорость сходимости и вероятность того, что частицы будут захвачены локальными экстремумами [21].

На настоящий момент существует множество модификаций алгоритма роя [14, 22]. Описание основных идей алгоритма приводится в [15, 23]. Реализованный в статье алгоритм подробно описан в [24].

2. Описание экспериментов. Для проверки предложенных алгоритмов на пилотажном стенде были смоделированы полетные данные. Далее исследование осуществлялось в несколько этапов. Сначала были выработаны требования к сплайнам, касающиеся необходимого количества узлов и границ области поиска. Для этого требовалось учесть характеристики рассматриваемых сигналов. Например, сигналы угловых скоростей являются более высокочастотными, чем сигналы углов ориентации, а сигналы углов крена и тангажа подвержены более динамичным изменениям, чем сигнал угла рыскания.

Количество узлов сплайна, необходимое для описания управляющего сигнала, определялось путем решения задачи аппроксимации. При рассмотрении участков продолжительностью 7 с для задания углов тангажа и крена применялись сплайны из 8 узлов, а угла рыскания – из 4. При этом требовалось решить задачу оптимизации для 40 параметров, что персональный компьютер, оснащенный процессором Intel Core 2 Duo с частотой 2.4 ГГц и оперативной памятью 1.99 Гб, выполнял за 20–30 мин.

2.1. Выбор типа сплайна. Сложности при выборе сплайнов и их характеристик для аппроксимации сигналов хорошо иллюстрирует рисунок 1, изображающий полученные при моделировании угловые скорости и аппроксимирующие их сплайны дефектов 2 (Эрмитов кубический сплайн) и 1 (интерполяционный кубический сплайн).

С одной стороны, гладкость первой производной интерполяционного Эрмитова сплайна не всегда позволяет ему хорошо приблизить сигнал, что видно на графике угловой скорости крена. Эта проблема имеет достаточно простое решение, связанное с увеличением числа узлов, но в этом случае количество параметров начинает приближаться к тому, которое нужно для Эрмитова сплайна, сводя на нет преимущество в скорости вычислений.

С другой стороны, разрывность второй производной Эрмитова сплайна также может создавать дополнительные погрешности. Как можно видеть на графике угловой скорости рыскания (второй график рис. 1), при избыточной плотности узлов это приводит к возникновению заметных искажений сигнала (интервал 4.5–5 с).

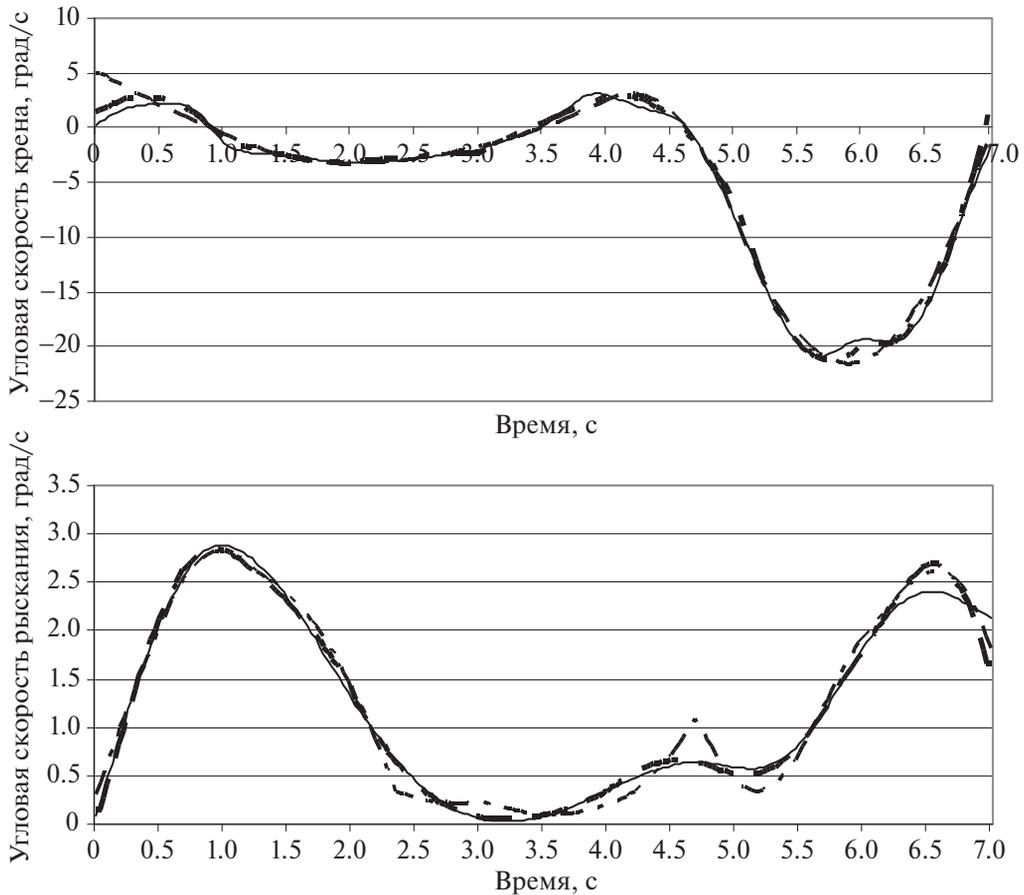


Рис. 1. Угловые скорости: истинные (сплошная линия), аппроксимация сплайном дефекта 2 (штрихпунктирная) и сплайном дефекта 1 (штриховая)

2.2. Выбор математической модели. Чтобы сравнить модели (1.1)–(1.3) и (1.4), (1.5), рассматривалась задача с известным значением угла рыскания, т.е. в постановке (1.12). Результаты сравнения приводятся на рис. 2.

Можно видеть, что интегрирование скоростей по уравнениям (1.4), (1.5) дает несколько худшие результаты по сравнению с интегрированием скоростей в нормальной системе. Это подтверждается и значениями среднеквадратичных отклонений (СКО), приведенных в табл. 1. Поэтому в дальнейшем приводилось решение задачи для модели объекта, задаваемой уравнениями (1.1)–(1.3).

Для модели (1.4), (1.5) рассматривалась также возможность использования сплайнов для аппроксимации угловых скоростей, а не самих углов. Существенных преимуществ это не дало. Сказывается тот факт, что угловые скорости изменяются более динамично, что требует большего числа узлов сплайнов для получения достаточно точных приближений. Поэтому в данной работе рассматривается только аппроксимация значений углов ориентации. Значения

Таблица 1. Значения СКО для углов ориентации ЛА при сравнении математических моделей (1.1)–(1.3) и (1.4), (1.5) в постановке задачи (1.12)

Измеряемая величина, град.	Математическая модель (1.1)–(1.3)	Математическая модель (1.4), (1.5)
СКО угла тангажа	0.19	0.98
СКО угла крена	0.28	1.01

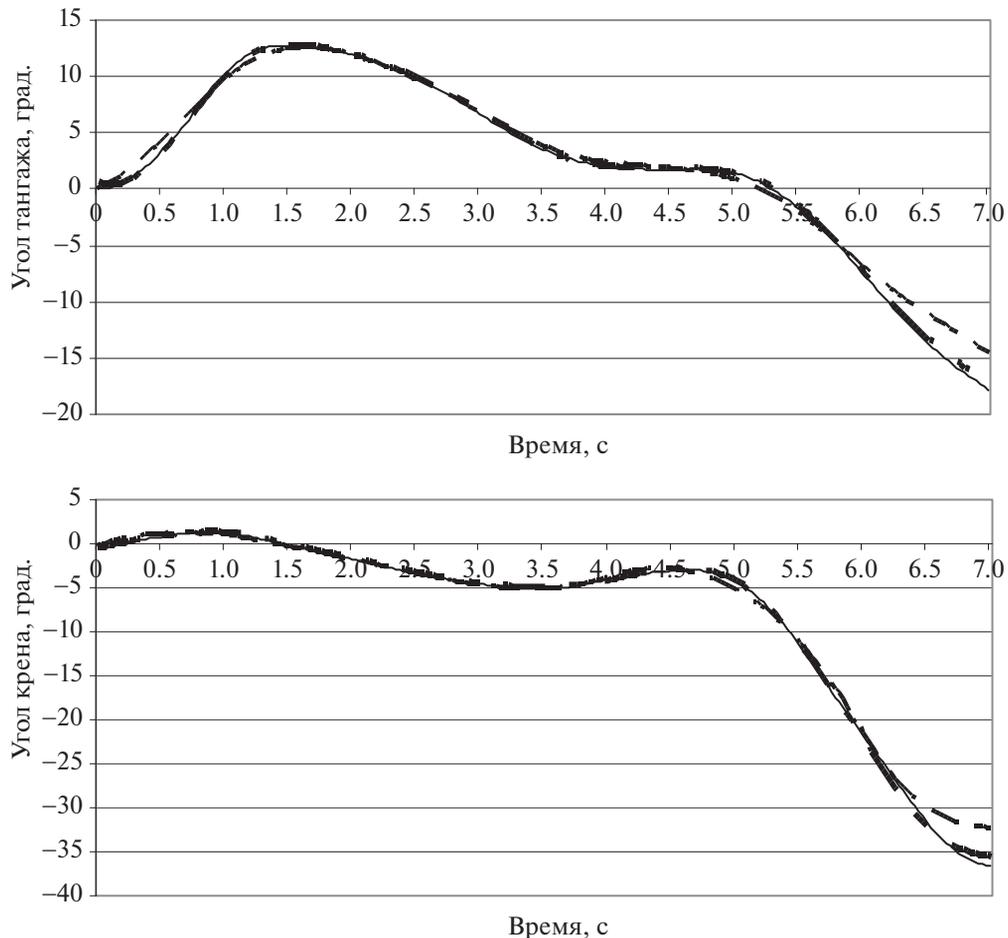


Рис. 2. Углы тангажа и крена: истинные (сплошная линия), полученные решением задачи оптимизации на основе модели (1.1)–(1.3) (штрихпунктирная) и (1.4), (1.5) (штриховая)

угловых скоростей вычислялись из производных углов, полученных численным дифференцированием [25], на основе кинематических уравнений Эйлера [11].

2.3. Восстановление значений углов ориентации по информации о проекциях перегрузки и скорости. При решении задачи поиска трех углов ориентации ЛА было установлено, что в рамках рассматриваемой модели не удастся однозначно их восстановить. Оценки тангажа, крена и рыскания, полученные с использованием соотношений (1.1)–(1.3), содержат существенные погрешности, особенно по углу рыскания. Это иллюстрируется рис. 3.

Как предполагалось выше, сформулированная на основе модели (1.1)–(1.3) и целевого функционала (1.11) задача получается плохо обусловленной, поэтому решение не удастся восстановить однозначно. Это приводит в первую очередь к существенным погрешностям при определении сигнала рыскания (рис. 3).

Рассмотрим способы повышения качества оценок углов, привлекая для этого дополнительную информацию. Воспользуемся выражением (1.7). Для этого добавим в состав математической модели оценки углов атаки и скольжения по формулам (1.8) и (1.9), а также значения углов наклона и поворота траектории по аналогичным формулам. Это позволяет оценить разность между левой и правой частями равенства (1.7) и внести ее в функционал с некоторым весовым коэффициентом. Целевой функционал приобретает вид

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^T \left[(\mathbf{V}_g - \tilde{\mathbf{V}}_g)^T (\mathbf{V}_g - \tilde{\mathbf{V}}_g) + k_2 A_2 \right] dt, \quad (2.1)$$

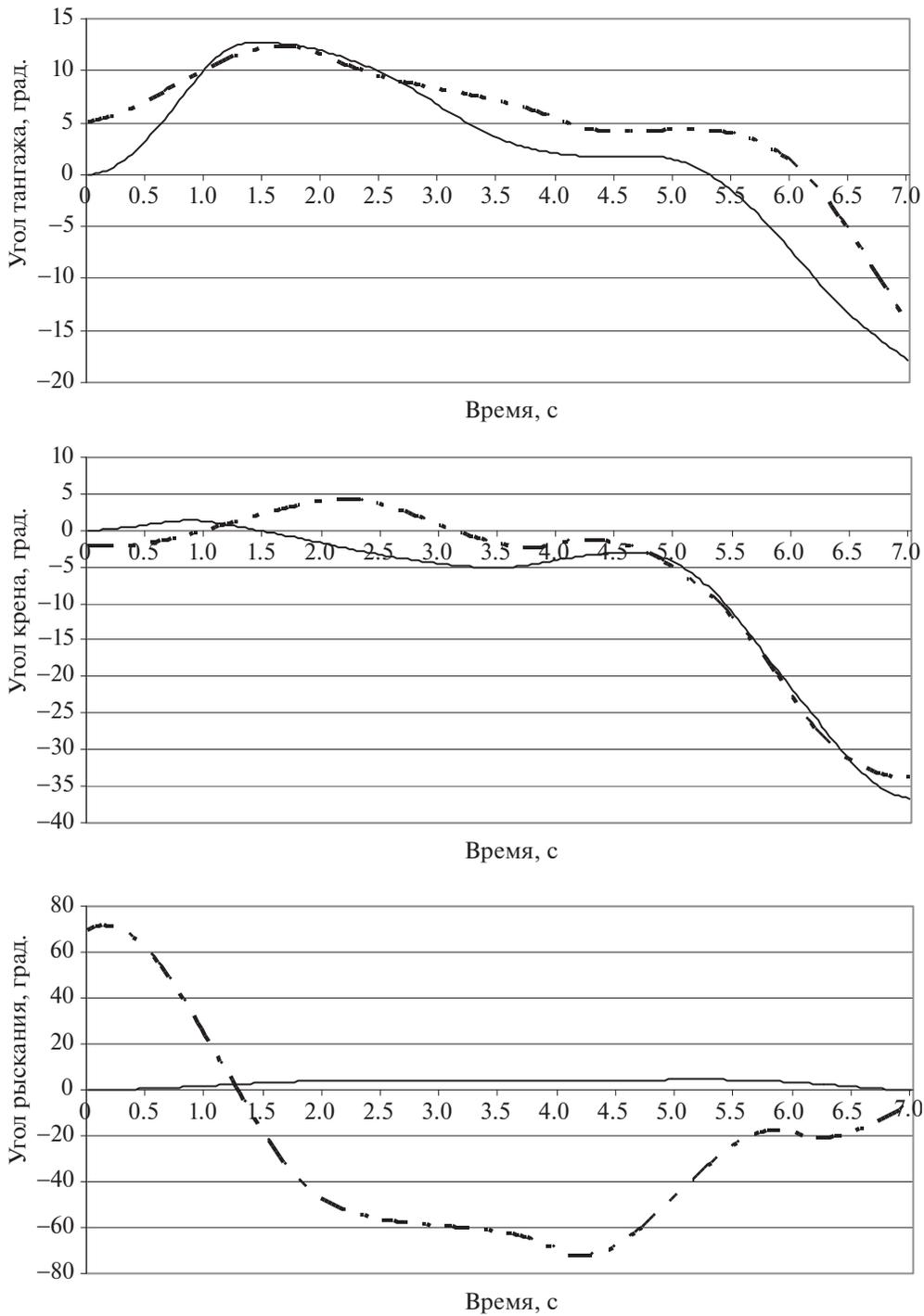


Рис. 3. Углы тангажа, крена и рыскания: истинные (сплошная линия) и полученные при решении задачи оптимизации (штрихпунктирная)

где k_2 – весовой коэффициент, подбираемый эвристически,

$$A_2 = \sin \Psi \cos \Theta - [\cos \alpha \cos \beta \sin \psi \cos \vartheta + \sin \alpha \cos \beta (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) - \sin \beta (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma)].$$

Как следует из рис. 4, использование функционала (2.1) позволяет получить значения углов тангажа и крена достаточно близкие к эталонным, но погрешность определения угла

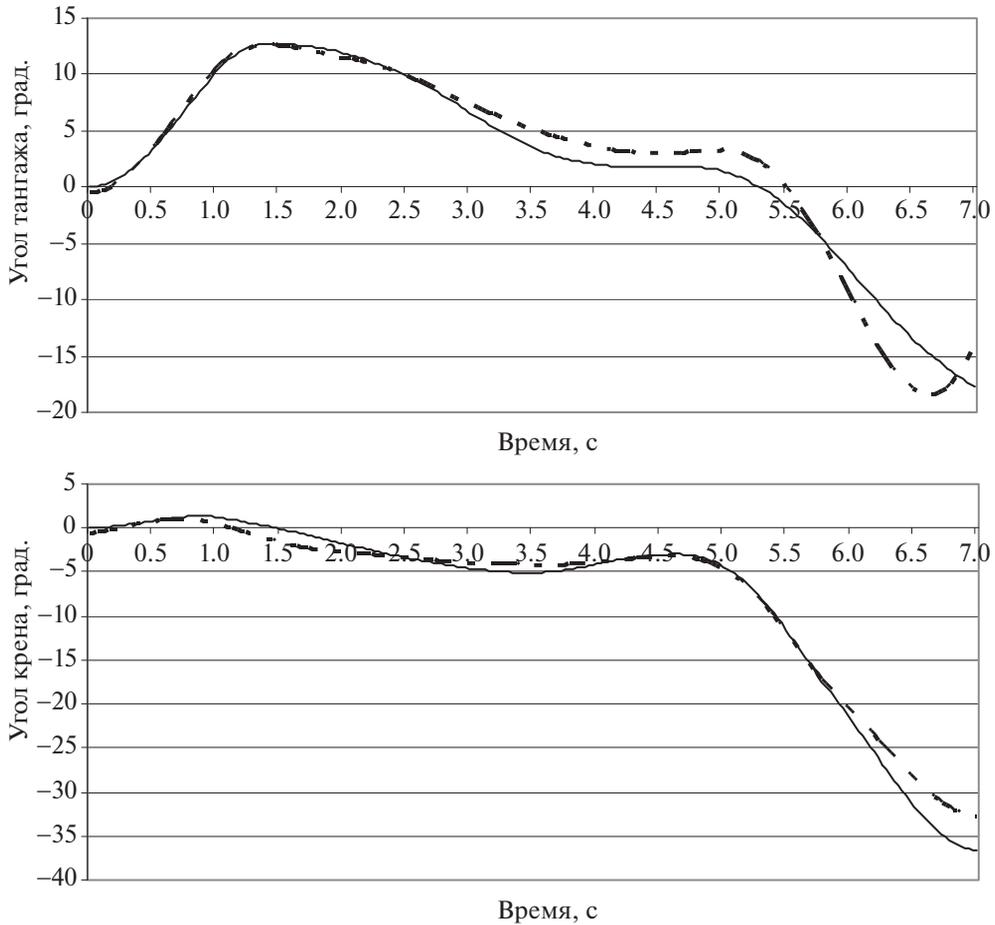


Рис. 4. Углы тангажа и крена: истинные (сплошная линия) и полученные при решении задачи оптимизации с функционалом (2.1) (штрихпунктирная)

рыскания сохраняется недопустимо высокой. Значения найденных при этом СКО приводятся в табл. 2.

Дальнейшего уменьшения погрешностей для углов тангажа и крена можно добиться, если учесть также выражение (1.6). Соответствующий функционал имеет вид

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^T \left[(\mathbf{V}_g - \tilde{\mathbf{V}}_g)^T (\mathbf{V}_g - \tilde{\mathbf{V}}_g) + k_1 A_1 + k_2 A_2 \right] dt, \tag{2.2}$$

где k_1, k_2 – весовые коэффициенты, подбираемые эвристически,

$$A_1 = \sin \Theta - [\cos \alpha \cos \beta \sin \vartheta - (\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma) \cos \vartheta].$$

Таблица 2. Значения СКО для углов тангажа и рыскания при различных модификациях целевого функционала

Измеряемая величина, град.	Добавление в функционал слагаемого A_2 (2.1)	Добавление в функционал слагаемых A_1 и A_2 (2.2)	Добавление в функционал слагаемых A_1, A_2 и рассогласования по перегрузкам (2.3)
СКО угла тангажа	1.64	0.65	0.43
СКО угла крена	1.29	0.47	0.75

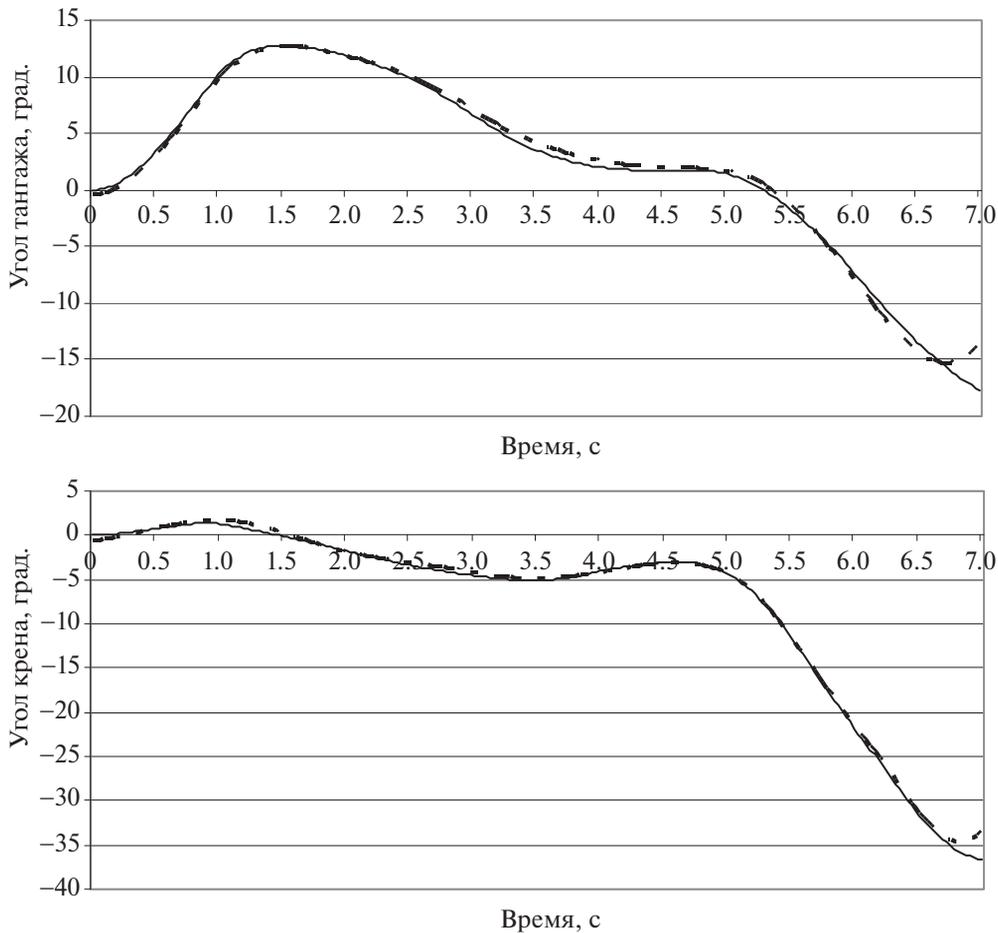


Рис. 5. Углы тангажа и крена: истинные (сплошная линия) и полученные при решении задачи оптимизации с функционалом (2.2) (штрихпунктирная)

Полученные для целевого функционала (2.2) значения углов ориентации приводятся на рис. 5, соответствующие значения СКО – в табл. 2.

Можно развить эту идею еще дальше, включив в функционал не только проекции скорости в нормальной системе координат, но также и перегрузки. В этом случае задача решается в обоих направлениях: значения скоростей вычисляются из перегрузок, а значения перегрузок рассчитываются из скоростей. Это увеличивает объем используемых данных. Функционал принимает вид

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^T \left[(\mathbf{V}_g - \tilde{\mathbf{V}}_g)^T (\mathbf{V}_g - \tilde{\mathbf{V}}_g) + k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 (\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}})^T (\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}) \right] dt, \quad (2.3)$$

где k_1, k_2, k_3 – весовые коэффициенты, подбираемые эвристически, $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ – вектор перегрузок в связанной системе координат.

Значения весовых коэффициентов подбирались из соображений примерного равенства вклада различных слагаемых в функционал. В рассматриваемой задаче они составили $k_1 = 64$, $k_2 = 64$, $k_3 = 20$. Коэффициенты получаются безразмерными, поскольку ставились перед выражениями, составленными из тригонометрических функций, или безразмерными величинами.

Как можно судить по значениям СКО, приведенным в табл. 2, использование функционала (2.3) не дает существенных улучшений по сравнению с предыдущим вариантом. Погрешности определения угла тангажа несколько уменьшаются, в то время как погрешность угла крена

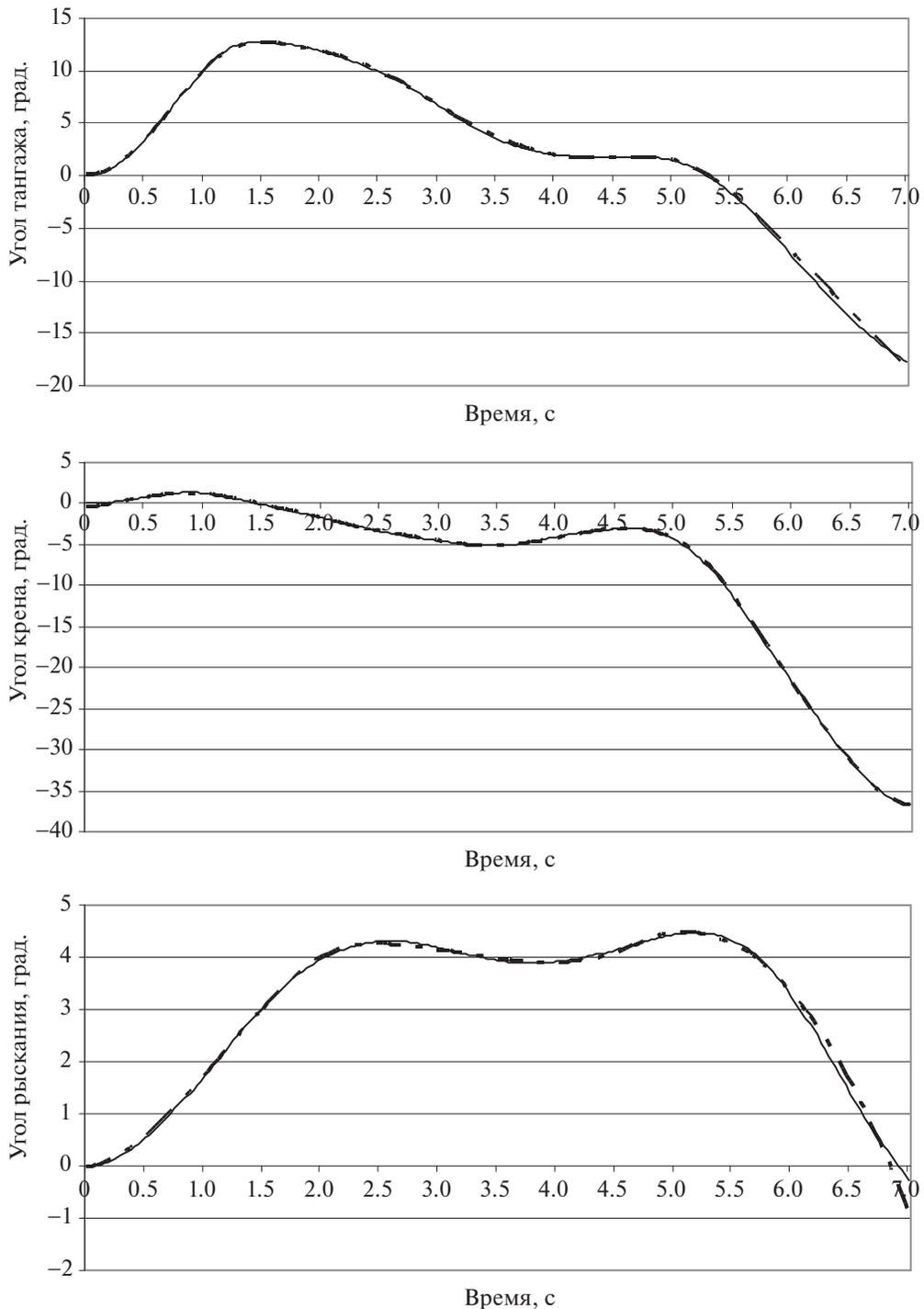


Рис. 6. Углы ориентации: истинные (сплошная линия) и полученные при решении задачи оптимизации при известном угле скольжения (штрихпунктирная)

увеличивается. Ни одна из рассмотренных выше модификаций (2.1)–(2.3) не позволяет добиться хорошего приближения при оценивании угла рыскания.

Главный вывод, который можно сделать из анализа табл. 2, заключается в том, что информация, предоставляемая соотношениями (1.6), (1.7), позволяет улучшить обусловленность задачи и повысить точность оценок углов тангажа и крена, однако низкая точность оценок угла рыскания сохраняется.

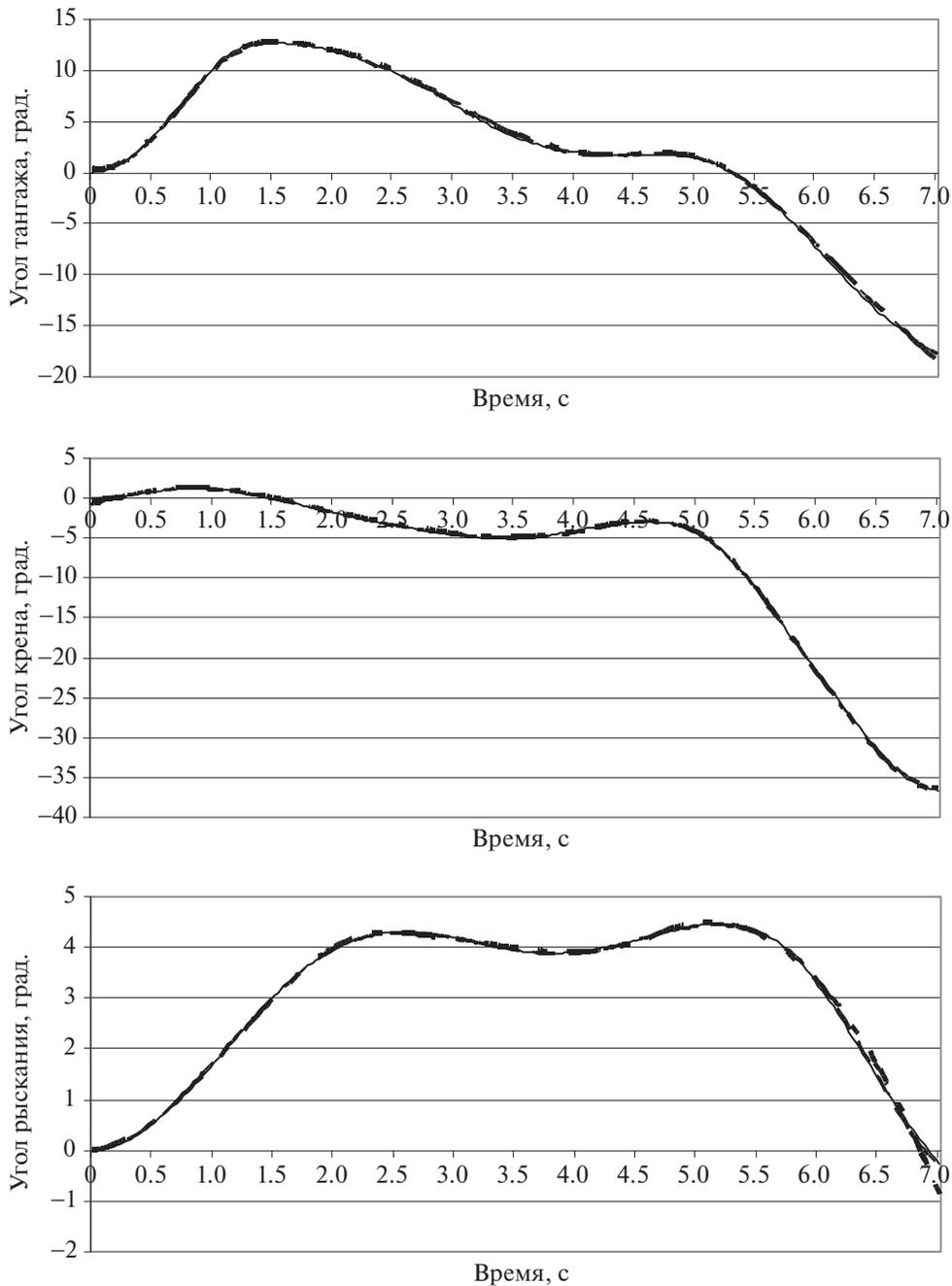


Рис. 7. Углы ориентации: истинные (сплошная линия), аппроксимация Эрмитовым сплайном (штрихпунктирная) и интерполяционным сплайном (штриховая)

Для решения этой проблемы было предложено рассмотреть случай с известным углом скольжения. Такое допущение позволяет получить достаточно хорошие оценки значений углов тангажа и крена, как можно видеть на рис. 6. Кроме того, при этом существенно уменьшаются погрешности при определении угла рыскания.

Оценки углов тангажа и крена при этом оказываются сопоставимы с оценками, получаемыми в предположении об известном угле рыскания (табл. 3).

Допущение о том, что угол скольжения известен, не является слишком жестким, в работе [18] показана возможность получения оценок угла скольжения при отсутствии соответствующего датчика на основе информации об аэродинамическом коэффициенте боковой силы.

Таблица 3. Значения СКО для углов ориентации ЛА

Измеряемая величина, град.	Известный угол рыскания	Известный угол скольжения
СКО угла тангажа	0.19	0.2
СКО угла крена	0.28	0.11
СКО угла рыскания	–	0.1

Таблица 4. Значения СКО для углов ориентации ЛА при применении различных сплайнов для параметризации искомого сигнала

Измеряемая величина, град.	Эрмитов кубический сплайн (сплайн дефекта 2)	Кубический интерполяционный сплайн (сплайн дефекта 1)
СКО угла тангажа	0.2	0.18
СКО угла крена	0.11	0.17
СКО угла рыскания	0.1	0.03

2.4. Сравнение видов сплайнов. Для рассматриваемой задачи проводилось, кроме того, сравнение Эрмитовых кубических сплайнов и интерполяционных кубических сплайнов. Оба вида сплайна применялись в решении задачи при предположении об известном значении угла скольжения. Соответствующие значения СКО приводятся в табл. 4, а изображения результатов – на рис. 7.

Рассмотрев результаты, можно прийти к выводу, что оба сплайна дают достаточно близкий результат. В качестве преимуществ интерполяционного сплайна стоит отметить его меньшее число параметров, а также большую гладкость получаемых сигналов, что важно при необходимости расчета угловых скоростей ЛА.

Заключение. Статья посвящена проблеме комплексной обработки данных бортовых измерений. В ней рассматривается метод восстановления значений углов ориентации ЛА при известных данных о перегрузках в связанной системе и проекциях скорости в земной системе координат. В его основу положен подход прямых методов решения задач оптимального управления – задание искомого сигнала при помощи параметров, что сводит рассматриваемую задачу к задаче численной оптимизации.

Преимуществом предложенного метода является, как показано, принципиальная возможность, ориентируясь только на показания датчиков различной физической природы (например, акселерометров и системы спутниковой навигации), определить значения углов тангажа и крена, не прибегая к помощи специализированных датчиков измерения углов или угловых скоростей. В то же время определение угла рыскания со сколько-нибудь достаточной точностью требует дополнительной информации об угле скольжения. Она может быть получена на борту от системы воздушных сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биард Р.У., МакЛэйн Т.У. Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика. М.: Техносфера, 2015. 311 с.
2. Kassas Z.M., Closas P., Gross J. Navigation Systems Panel Report. Navigation Systems for Autonomous and Semiautonomous Vehicles: Current Trends and Future Challenges // IEEE Aerospace and Electronic System Mag. 2019. № 5 (34). P. 82–84.
3. Dorobantu A., Murch A., Mettler B., Balas G. System Identification for Small, Low-cost, Fixed-wing Aircraft // J. Aircraft. 2013. № 4 (50). P. 1117–1130.
4. Корсун О.Н., Поплавский Б.К. Оценивание систематических погрешностей бортовых измерений углов атаки и скольжения на основе интеграции данных спутниковой навигационной системы и идентификации скорости ветра // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 1. С. 133–146.
5. Пушков С.Г., Ловицкий Л.Л., Корсун О.Н. Методы определения скорости ветра при проведении летных испытаний авиационной техники с применением спутниковых навигационных систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 9. С. 65–70.
6. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: Изд. МГТУ им. Баумана, 2004. 656 с.

7. *Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувьрин Г.Н.* Вариационное исчисление и оптимальное управление (3-е изд.). М.: Изд. МГТУ им. Баумана, 2006. 488 с.
8. *Rao A.V.* Survey of Numerical Methods for Optimal Control // *Advances Astronautical Sciences*. 2010. V. 135. P. 497–528.
9. *Conway B.A.* A Survey of Methods Available for Numerical Optimization of Continuous Dynamic Systems // *J. Optimization Theory Appl.* 2012. V. 152. № 2. P. 271–306.
10. *Корсун О.Н., Стуловский А.В.* Прямой метод формирования оптимального программного управления летательным аппаратом // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2019. № 2. С. 75–89.
11. *Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов* / Под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Наука. Физмалит, 1998. 816 с.
12. *Дивеев А.И., Константинов С.В.* Исследование эволюционных алгоритмов для решения задачи оптимального управления // *Тр. МФТИ*. 2017. № 3 (35). С. 76–85.
13. *Пантелеев А.В., Евдокимова М.Д.* Методы “роевого” интеллекта в задачах оптимизации параметров технических систем // *Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации*. 2017. № 2. С. 6–15.
14. *Advances in Swarm Intelligence. Variations and Adaptations for Optimization Problems* / Eds S. Mirjalili, A. Biswas, C. V. Kalayci. Switzerland, AG: Springer Nature, 2022. 416 p.
15. *Olsson A.E.* Particle Swarm Optimization: Theory, Techniques and Applications. Hauppauge, USA: Nova Science Publishers, 2011. 305 p.
16. *ГОСТ 20058-80.* Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. М.: Изд-во стандартов, 1981. 54 с.
17. *Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 615 с.
18. *Корсун О.Н., Данеко А.И., Мотлич П.А., Ом М.Х.* Оценка углов атаки и скольжения беспилотного летательного аппарата при отсутствии датчиков аэродинамических углов // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2022. № 5. С. 274–280.
19. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
20. *Eberhardt R.C., Kennedy J.A.* Particle Swarm Optimization // *Proc. IEEE Intern. Conf. on Neural Networks*. Piscataway, NJ, 1995. P. 1942–1948.
21. *Ермаков Б.С.* Метод роя частиц с адаптивными социальной и когнитивными компонентами // *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2019. № 3 (26). С. 6.
22. *Gad A.G.* Particle Swarm Optimization Algorithm and its Applications: a Systematic Review // *Computational Methods in Engineering*. 2022. № 29. P. 2531–2561.
23. *Nature-inspired Optimizers: Theories, Literature Reviews and Applications* / Eds S. Mirjalili, J.S. Dong, A. Lewis. Switzerland, AG: Springer Nature, 2020. 239 p.
24. *Корсун О.Н., Стуловский А.В.* Восстановление параметров движения летательного аппарата с использованием алгоритмов оптимального управления // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2023. № 1.
25. *Васильченко К.К., Леонов В.А., Пашковский И.М., Поплавский Б.К.* Летные испытания самолетов. М.: Машиностроение, 1996. 719 p.

**СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ**

УДК 629.78

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ РЕЗЕРФОРДА И СИНТЕЗ ТРАЕКТОРИЙ С ГРАВИТАЦИОННЫМИ МАНЕВРАМИ

© 2023 г. Ю. Ф. Голубев^{a,*}, А. В. Грушевский^{a,**}, В. В. Корянов^{a,***},
А. Г. Тучин^{a,****}, Д. А. Тучин^{a,*****}

^aИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*e-mail: golubev@keldysh.ru

**e-mail: alexgrush@rambler.ru

***e-mail: korianov@keldysh.ru

****e-mail: tag@kiam1.rssi.ru

*****e-mail: den@kiam1.rssi.ru

Поступила в редакцию 15.11.2022 г.

После доработки 10.12.2022 г.

Принята к публикации 06.02.2023 г.

Статья посвящена разработке новых эффективных методов проектирования траекторий космических аппаратов для миссий с использованием предложенного авторами обобщения формулы Резерфорда рассеивания заряженных частиц на случай гравитационного рассеивания. Для управляемых гравитационных маневров космических аппаратов сформулировано правило, позволяющее целенаправленно создавать в результате совершения гравитационного маневра пучки траекторий с заданными свойствами. Представлены модификации этого правила, создающие возможность осуществления эффективных и надежных пучковых рекуррентных процедур поиска баллистических сценариев межпланетных перелетов. Особую роль приобретает синтез последовательностей гравитационных маневров, которые обеспечивают заданное изменение асимптотической скорости космического аппарата относительно планеты-мишени.

DOI: 10.31857/S0002338823030058, EDN: EUKUGY

Введение. Проектирование современных межпланетных космических экспедиций в значительном числе случаев предполагает естественное использование малозатратного целевого изменения скорости космического аппарата (КА) при совершении гравитационных маневров (ГМ). Ставшие классикой первый в истории человечества ГМ КА “Луна 3”, как и длительная межпланетная одиссея “Вояджеров”, общеизвестны и служат примером для проектирования будущих миссий в дальнем космосе с учетом их ограниченных бюджетов по характеристической скорости. Вместе с тем использование ГМ в баллистических схемах экспедиций несет и значительное усложнение их разработки, связанное с гиперболической неустойчивостью, которая возникает при сквозном пролете сфер действия целевых планет и, особенно, при резкой смене масштабов сложных гравитационных полей. Выявить в таких условиях требуемую точную траекторию КА (при интегрировании в полных эфемеридах) – отдельная проблема, зачастую не поддающаяся решению рекуррентными итерационными процедурами в силу их плохой сходимости. В этом случае значимую роль приобретают пучковые алгоритмы [1, 2], позволяющие извлечь такую траекторию КА из пучка ее “виртуальных попутчиков” посредством численного интегрирования всего множества траекторий пучка через сферу действия планеты-цели с учетом эфемерид. Достаточное число (а значит, трудоемкость метода) виртуальных траекторий КА для обнаружения следующего, единичного пролета целевой планеты зависит от свойств гравитационного искривления пучка полем очередной целевой планеты и может исчисляться сотнями тысяч вариантов [1–3]. Здесь баллистики-проектанты при поиске подходящих траекторий сталкиваются с проблемами, связанными с существенной неоднородностью пучка виртуальных траекторий КА, рассеянного планетой при совершении ГМ. Число существенно отклонившихся от начального направления траекторий на выходе из сферы действия планеты-цели оказывается на порядок меньше общего числа траекторий, хотя именно они наиболее ценны для возможности про-

должения поиска. Попытки решения этой проблемы привели авторов к необходимости обратиться к опытам Э. Резерфорда по кулоновскому рассеиванию пучков α -частиц [3–5] и учесть известную аналогию между кулоновским и гравитационным взаимодействиями [6]. Соответствующее обобщение формулы Резерфорда на случай гравитационного рассеивания, представленное в данной статье, позволило не только выявить и объяснить возникающее при проведении ГМ неоднородное рассеивание пучка виртуальных траекторий КА, но и разработать алгоритм для его регуляризации. В итоге при численном моделировании цепочек ГМ около массивных тел Солнечной системы удастся существенно уменьшить необходимое число виртуальных траекторий КА в пучке, обеспечивающих надежную реализацию итерационной процедуры поиска баллистических сценариев межпланетных миссий.

1. Кулоновское и гравитационное рассеивание. В астродинамике баллистический анализ полетов КА в дальнем космосе с использованием ГМ (фактически – гравитационного рассеивания пробных частиц массивными телами Солнечной системы) проводится обычно с помощью традиционного решения конечного набора задач Коши и Ламберта [1–3]. Изучение и описание аналогичных процессов в физике (кулоновское рассеивание заряженных частиц) осуществляется в ином ключе – с введением в рассмотрение пучка заряженных частиц – сонаправленного компактного потока однородных частиц [4–6]. В последние годы, при решении задач баллистического анализа и построении адаптивных сценариев проведения КА ГМ, в астродинамике также наметилась тенденция по использованию пучковых алгоритмов с целью синтеза точных требуемых траекторий КА в полных эфемеридах [1–3]. Здесь уже вместо ансамбля траекторий заряженных частиц фигурирует пучок виртуальных траекторий КА, которые обладают свойством почти совпадающих асимптотических скоростей [1–3]. В этом контексте для возможности успешного решения конкретных задач баллистического синтеза траекторий КА представляет интерес сопоставление гравитационного рассеивания [1–3] и кулоновского [4–6] рассеивания.

Сначала рассмотрим кулоновское рассеивание [4–6]. Выпишем силовую функцию $U_{Coulomb}$ кулоновского взаимодействия частиц [5, 6]:

$$U_{Coulomb} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_{aim}}{r},$$

где $\epsilon_0 \approx 8.85418781762 \times 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, q_α, q_{aim} – одноименные заряды частицы и рассеивающей цели соответственно, r – расстояние между их центрами.

Для угла φ рассеивания (угла между исходным и отраженным векторами асимптотической скорости заряженной альфа-частицы $\mathbf{V}_{\infty,in}$ и $\mathbf{V}_{\infty,out}$) будет верно соотношение (рис. 1, а)

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_\alpha q_{aim}|}{mbV_\infty^2}, \tag{1.1}$$

где $V_\infty = \|\mathbf{V}_{\infty,in}\| = \|\mathbf{V}_{\infty,out}\|$, $m = m_\alpha m_{aim} / (m_\alpha + m_{aim})$ – приведенная масса, b – величина прицельной дальности [2, 5].

Учитывая, что если $m_{aim} \gg m_\alpha$, то $m \approx m_\alpha$, а для угла рассеивания φ будет выполнено

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_\alpha q_{aim}|}{m_\alpha b V_\infty^2}. \tag{1.2}$$

Заметим, что формулы (1.1), (1.2) остаются справедливыми и в том случае, когда заряды разноименные.

Поскольку структуры силовой функции гравитационного взаимодействия двух массивных тел U_{grav} и кулоновского электрического поля для двух разноименно заряженных частиц $U_{Coulomb}$ оказываются аналогичными, появляется возможность применения аналогов формул (1.1) и (1.2) в случае гравитационного рассеивания. Аналогом альфа-частицы с зарядом q_α становится КА с массой m_{sc} , аналогом ускорения от рассеивающей цели $\mathbf{a}_{aim} = -q_{aim} \mathbf{r} / (4\pi\epsilon_0 r^3)$ – гравитационное воздействие малого тела (планеты, спутника планеты или астероида) с массой m_p , воздействию которого соответствует ускорение $\mathbf{a}_p = -\mu_p \mathbf{r} / r^3$ с гравитационным параметром $\mu_p = Gm_p$, где G – гравитационная постоянная.

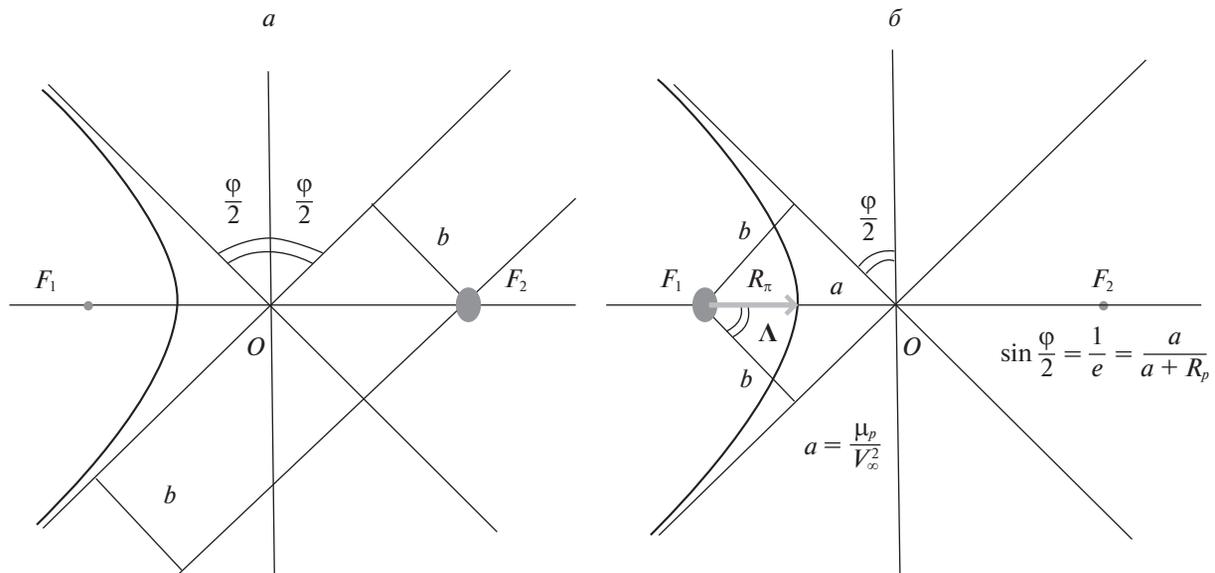


Рис. 1. Геометрия кулоновского и гравитационного рассеивания

Гравитационное рассеивание определяется вектором Лапласа Λ [7]:

$$\Lambda = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \frac{\mu_p}{r} \mathbf{r},$$

направленным из центра цели в сторону перигелия орбиты. Для бесконечно удаленной точки орбиты будет выполнено $\mathbf{r}/r = -\mathbf{V}_\infty/V_\infty$. Следовательно,

$$\Lambda = V_\infty^2 \mathbf{b} + \frac{\mu_p}{V_\infty} \mathbf{V}_\infty, \quad (1.3)$$

где \mathbf{b} – вектор прицельной дальности. Видим, что при изменении \mathbf{b} вектор Лапласа поворачивается вокруг центра планеты-цели, смещая в пространстве соответствующим образом перигелий пролетной орбиты. Угол гравитационного рассеивания φ есть угол, дополнительный до π к углу между двумя асимптотами траектории, а вектор Лапласа определяет биссектрису угла между асимптотами. Поэтому

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\mu_p}{b V_\infty^2}. \quad (1.4)$$

Очевидно, что эта формула служит аналогом формулы (1.2) и формально может быть получена из (1.2) с помощью замены:

$$m_\alpha \rightarrow m_{sc}, \quad q_\alpha \rightarrow m_{sc}, \quad q_{aim} \rightarrow m_p, \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow G.$$

З а м е ч а н и е 1. В астродинамике φ называется углом поворота вектора асимптотической скорости при совершении ГМ. При его вычислении вместо прицельной дальности b чаще используется минимальное расстояние до КА от центра планеты R_π (очевидно – расстояние перигелия пролетной гиперболы) [2, 3, 8], при этом вместо (1.4) чаще применяется выражение

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{e} = \frac{1}{1 + \frac{R_\pi V_\infty^2}{\mu_p}},$$

где e – эксцентриситет пролетной гиперболы. Это выражение не используется в физике элементарных частиц по понятным причинам: в отличие от прицельной дальности b экспериментальное определение R_π для α -частиц трудно реализуемо.

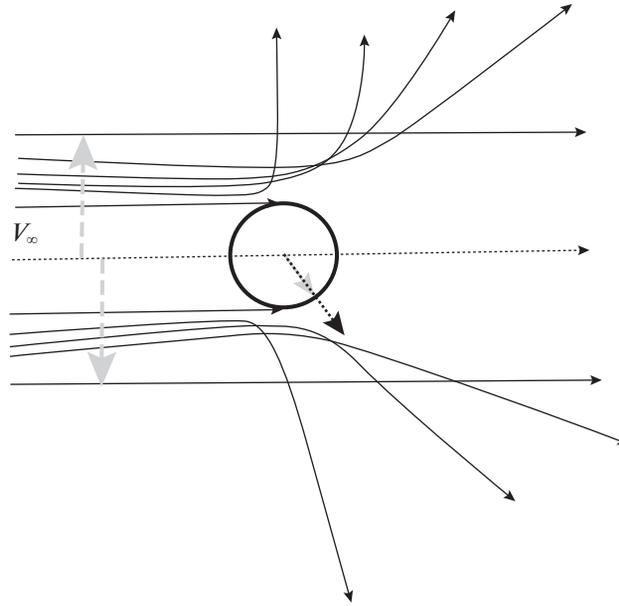


Рис. 2. Структура кулоновского рассеивания (“кубок”)

Очевидно, что R_{π} не может быть меньше радиуса планеты R_p , поэтому для максимального угла поворота вектора асимптотической скорости φ_{\max} будет выполнено

$$\sin \frac{\varphi_{\max}}{2} = \frac{1}{1 + (R_p/\mu_p)V_{\infty}^2} = \frac{1}{1 + V_{\infty}^2/V_{pc}^2}, \quad (1.5)$$

где $V_{pc} = \sqrt{\mu_p/R_p}$ – первая космическая скорость около поверхности планеты. Указанному случаю соответствует минимально допустимое значение прицельной дальности в пучке b_{\min} , обеспечивающее проведение ГМ.

Подставляя в (1.4) выражение для прицельной дальности b [2, 3, 8]

$$b = R_{\pi} \sqrt{1 + 2 \frac{\mu_p}{R_{\pi} V_{\infty}^2}} \quad (1.6)$$

и воспользовавшись тождеством $\operatorname{ctg}^2(\varphi/2) = \sec^2(\varphi/2) - 1$, приходим к классическому “астрономическому” результату для $\sin(\varphi/2)$, что еще раз подтверждает эквивалентность обоих способов описания угла поворота φ : кулоновского и гравитационного [2, 4–6].

Отличие геометрии рассеивания заряженных частиц и гравитационного рассеивания виртуальных траекторий КА при ГМ иллюстрируется на рис. 1, а, б (на рис. 1, б изображен вектор Лапласа Λ).

Практически, разница заключается в инверсии номера фокуса, в котором расположено возмущающее тело.

Структуры гравитационного и кулоновского рассеивания схематически представлены на рис. 2, 3. На рис. 2 все соседние траектории расходятся с обязательным пересечением. Кругом представлено рассеивающее заряженное ядро. На рис. 3, а кругом радиуса R_p изображена рассеивающая планета-цель, R_d – радиус основания трубки траекторий, равный радиусу сферы действия планеты. На рис. 3, б точки входа занимают примерно половину сферы действия, а соседние траектории расходятся, не пересекаясь.

З а м е ч а н и е 2. В предположении о пренебрежимой малости размеров сфер действия планет относительно протяженности межпланетных дуг (метод сопряженных конических сечений – МСКС) либо малости размеров рассеивающего центра относительно рассеянных кулоновских траекторий разница между структурами рассеивания кулоновского (при разноименных зарядах)

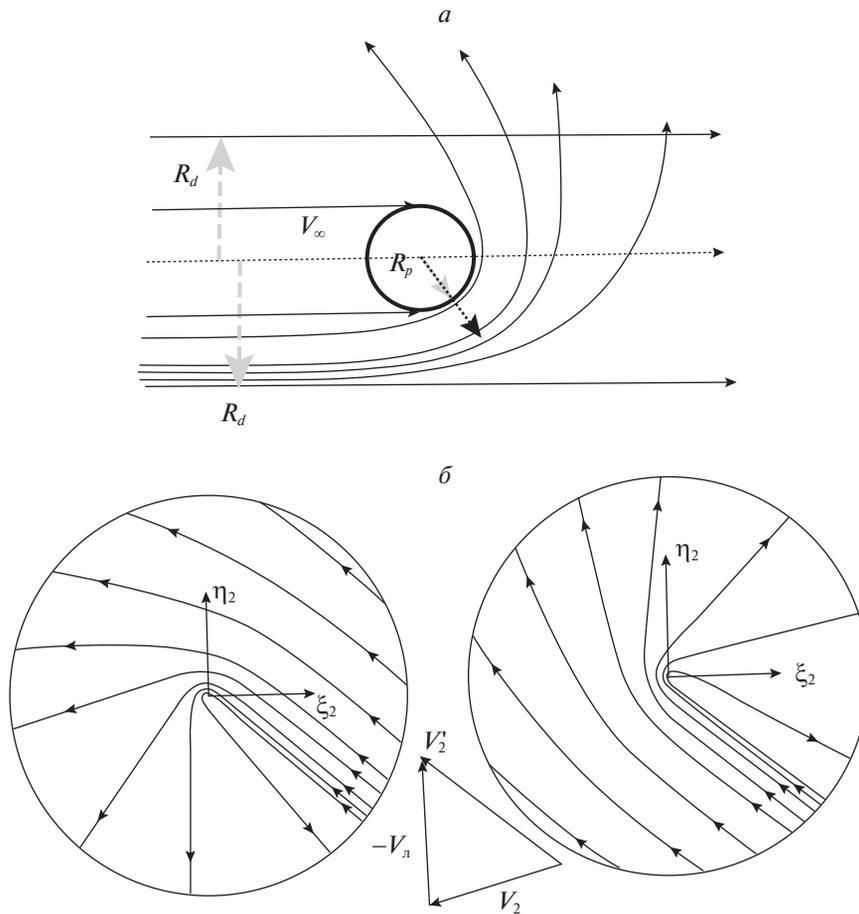


Рис. 3. Структура гравитационного рассеивания (а), структура гравитационного рассеивания на прототипах пучковых диаграмм, полученных В.А. Егоровым [9] (б)

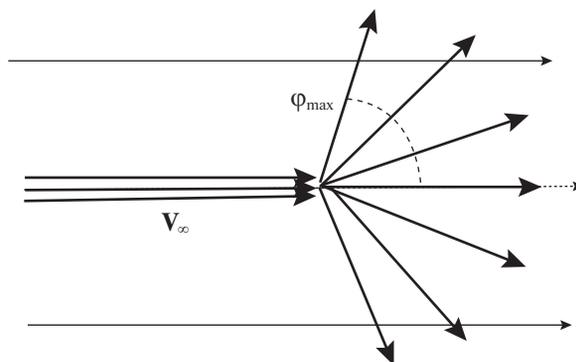


Рис. 4. Общая схема рассеивания в рамках МСКС

и гравитационного становится неразличимой и похожей на структуру типа рассеивающей линзы, действие которой схематично изображено на рис. 4.

В пространственном 3D-случае структуру гравитационного и кулоновского рассеивания может эффективно представить V_∞ -сфера [2, 3, 10] (рис. 5), которая строится следующим образом. Рассматривается область, образованная концами возможных, исходящих из одной точки, векторов асимптотической скорости V_∞ , получаемых после совершения ГМ, при различных векторах прицельных дальностей для каждого фиксированного вектора входной асимптотической

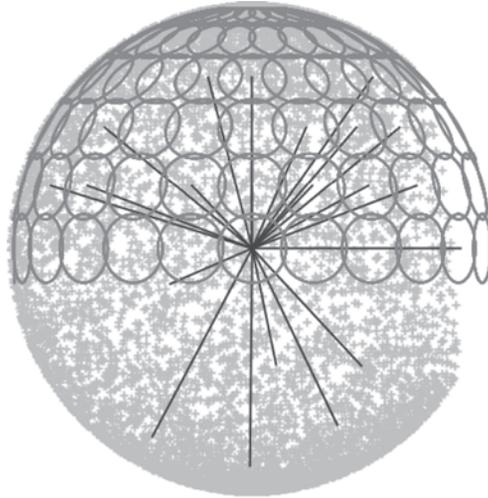


Рис. 5. 3D-структура гравитационного рассеивания в рамках МСКС

скорости. Эта область представляет собой пересечение V_∞ -сферы и телесного угла с раствором, равным Φ_{\max} (сферической шапочкой). Центр шапочки соответствует траекториям, лежащим на границе сферы действия планеты, а граница шапочки отвечает траекториям, для которых прицельная дальность равна эффективному радиусу планеты. Для разных направлений входных асимптотических скоростей получим набор сферических шапочек, покрывающих V_∞ -сферу, как это показано на рис. 5. Направления изображены прямыми линиями.

2. Обобщение формулы Резерфорда для гравитационных воздействий. Для описания поведения ансамбля траекторий пучку одноименно заряженных не взаимодействующих между собой частиц сопоставляется пучок (трубка) динамически допустимых траекторий КА с одинаковым вектором V_∞ асимптотической скорости КА относительно рассеивающей цели (планеты). Поведение пучка заряженных частиц при рассеивании описывается формулой Резерфорда [4–6]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q_\alpha q_{aim}}{8\pi\epsilon_0 m_\alpha V_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Phi}{2}}, \tag{2.1}$$

где $d\sigma$ – элементарная площадка нерассеянного пучка (так что число проходящих через нее частиц $dN = n d\sigma$, n – интенсивность пучка, характеризующая число частиц, проходящих через перпендикулярную пучку единичную площадку за единицу времени), $d\Omega$ – телесный угол, в который попадают соответствующие альфа-частицы после рассеивания (рис. 5–7). Единицей измерения телесного угла в системе СИ является стерadian, $d\sigma$ измеряется в m^2 .

Представим универсализацию формулы Резерфорда на случай рассеивания виртуальных траекторий КА при гравитационном маневре (при гравитационном рассеивании). Рассмотрим структуру рассеянного множества траекторий, которые до ГМ принадлежали цилиндрической виртуальной трубке траекторий (ВИРТ). В дальнейшем предполагается, что центр планеты лежит на оси ВИРТ, а радиус ВИРТ равен радиусу R_d сферы действия планеты. Для оценки расхождения соседних виртуальных траекторий КА проварьируем по b выражение (1.3) при заданных фиксированных значениях V_∞ и μ_p . Нетрудно видеть, что из (1.3) следует

$$\frac{d\frac{\Phi}{2}}{\cos^2 \frac{\Phi}{2}} = -\frac{\mu_p db}{V_\infty^2 b^2}, \tag{2.2}$$

откуда с учетом тождества

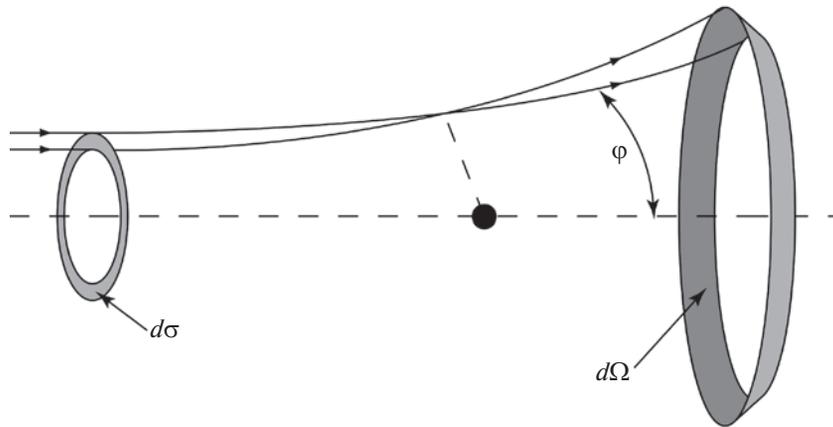


Рис. 6. Элементарная кольцевая площадка $d\sigma$ и соответствующий ей телесный угол $d\Omega$ после рассеивания

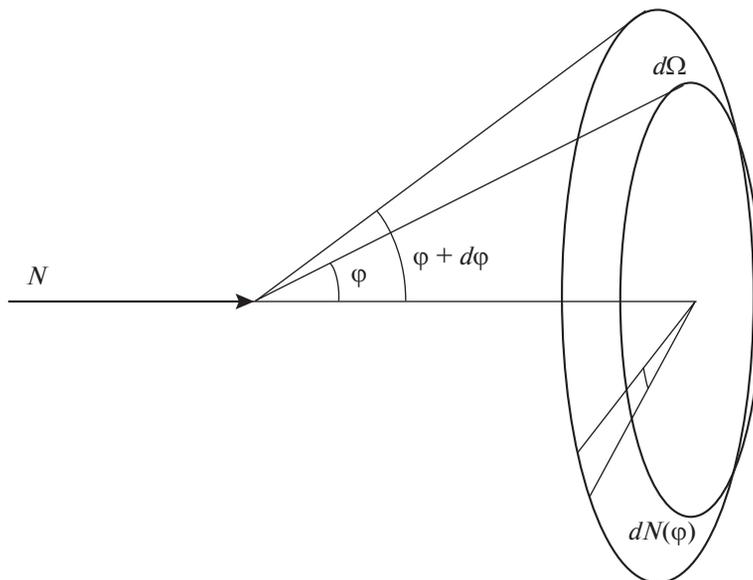


Рис. 7. Телесный угол $d\Omega$ при рассеивании

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\Phi}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\Phi}{2} = 1 + \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2 b} \right)^2 \quad (2.3)$$

получим

$$db = -\frac{V_\infty^2}{2\mu_p} \left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4} \right) d\varphi. \quad (2.4)$$

Знак “–” в выражении (2.4) характеризует убывающую зависимость угла φ от b . Обычно в дальнейших вычислениях этот знак (за несущественностью) опускается [5], но мы этого делать не будем.

Пусть dN_φ – число виртуальных траекторий КА, рассеиваемых на углы, которые лежат в интервале $[\varphi, \varphi + d\varphi]$, n_b – “поверхностная плотность ВИРТ”, т.е. число прообразов траекторий, проходящих через единицу площади поперечного сечения ВИРТ. В простейшем случае при равномерном засевании всей (или части) трубки ВИРТ имеем $n_b = N/S_{beam}$, где N – общее число

пробных траекторий, а S_{beam} – площадь поперечного сечения ВИРТ, через которую проходят виртуальные траектории.

В силу (1.3) отображение $\varphi \Leftrightarrow b$ взаимно-однозначно, и каждому телесному углу 3D-пространства Ω_φ , отвечающему интервалу плоского угла $[\varphi, \varphi + d\varphi]$, соответствует определенная кольцевая область поперечного сечения ВИРТ шириной $d\sigma = 2\pi b db$ для интервала прицельной дальности $[b, b + db]$.

З а м е ч а н и е 3. Для анализа гравитационного рассеивания планет в поперечном сечении ВИРТ целесообразно выделить *пертурбационное кольцо* [11], внешний радиус которого равен радиусу сферы действия планеты R_d , а внутренний радиус (“минимальная прицельная дальность”) равен ее полному эффективному радиусу $R_{\varphi}^{полн} = \sqrt{R_p^2 + 2R_p\mu_p/V_\infty^2}$ [8]. В таком случае $S_{beam} = \pi(R_d^2 - R_p^2 - 2R_p\mu_p/V_\infty^2)$. Таблица характеристических размеров пертурбационных колец для планет Солнечной системы, рассчитанная с использованием [12, 13], приведена в [11].

Для числа dN_φ виртуальных образов из интервала $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ (им соответствует полая трубка, вырезанная из сплошной ВИРТ) верно соотношение $dN_\varphi = n_b d\sigma$. Другими словами, траектории при пертурбационном маневре не теряются. Тогда

$$dN_\varphi = n_b 2\pi b db, \tag{2.5}$$

откуда с учетом (2.4) следует, что

$$dN_\varphi = -\frac{\pi n_b b V_\infty^2}{\mu_p} \left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4} \right) d\varphi. \tag{2.6}$$

Знак “–” в формуле (2.6) лишь компенсирует тот факт, что угол φ убывает с ростом b , и поэтому здесь надо считать $d\varphi < 0$. Чтобы избавиться от этого неудобства, достаточно перейти к дополнительному углу $\psi = \pi - \varphi$, который задает тот же вектор асимптотической скорости после ГМ, но отсчитывается от направления, обратного направлению ВИРТ.

При переходе от прообраза рассеянного пучка – плоского кольцевого элемента $d\sigma$ к его образу – элементу телесного угла $d\Omega_\varphi$, заключенному между конусами с углами раствора $\varphi, \varphi + d\varphi$, куда попадают рассеянные траектории КА после ГМ (рис. 6, 7), воспользуемся соотношением $d\Omega_\varphi = 2\pi \sin \psi d\psi = -2\pi \sin \varphi d\varphi$ (см., например, [5, 6]). Тогда из (2.6) немедленно следует, что

$$dN_\varphi = \frac{1}{2} \frac{V_\infty^2}{\mu_p} \frac{n_b b}{\sin \varphi} \left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4} \right) d\Omega_\varphi. \tag{2.7}$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi/2} = b^2 \frac{V_\infty^4}{\mu_p^2} + 1$$

и, принимая во внимание, что, согласно (1.3),

$$b = \frac{\mu_p \sin \varphi}{V_\infty^2 2 \sin^2 \varphi/2}, \quad \frac{b}{\sin \varphi} = \frac{\mu_p}{2V_\infty^2 \sin^2 \varphi/2} = \frac{1}{2} \frac{\mu_p}{V_\infty^2} \left(b^2 \frac{V_\infty^4}{\mu_p^2} + 1 \right),$$

из (2.7) с учетом (1.5) получим, что

$$n_\varphi = \frac{dN_\varphi}{d\Omega_\varphi} = \frac{1}{4} \frac{n_b V_\infty^4}{\mu_p^2} (b^2 + (\mu_p/V_\infty^2)^2)^2 = \frac{R_p^2}{4} \left(\left(\frac{b}{R_p} \frac{V_\infty}{V_{pc}} \right)^2 + 1 \right)^2 n_b, \tag{2.8}$$

где $V_{pc} = \sqrt{\mu_p/R_p}$ – круговая скорость относительно планеты, а n_φ – плотность пучка траекторий, попавших в элемент $d\Omega_\varphi$ соответствующего телесного угла. Полученное выражение (2.8) представляет собой *обобщение формулы Резерфорда (ОФР)* [5, 6] для образа гравитационного рассеивания, *по параметрам на “левом конце”*. Оно выражает зависимость плотности распределения рассеянных траекторий КА от прицельной дальности. Формула (2.8) показывает, что *число*

Таблица 1. Гравитационное рассеивание для различных углов φ (параметр на правом конце). Общее число пробных траекторий $N = 300\,000$

Углы поворота φ , град	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50
Число траекторий	276237	17330	3445	1100	456	223	122	73	47

попавших после ГМ виртуальных траекторий КА в элемент телесного угла $d\Omega_\varphi$ убывает, согласно биквадратической зависимости от прицельной дальности b .

В табл. 1 в качестве иллюстрации представлены результаты расчетов по гравитационному рассеиванию для случая равномерного распределения траекторий в ВИРТ, посчитанные по формуле (2.8) для $V_\infty/V_{pc} = 1.0$. Видно, что подавляющее число траекторий очень мало отклоняется от первоначального направления и поэтому они оказываются мало интересными для ГМ. Анализ этой таблицы с учетом оценок, приведенных в работе [11], показывает, что в случае использования в качестве цели планеты Венера, а в качестве мишени – планеты Земля при равномерном заполнении ВИРТ требуется вовлечение в вычислительный эксперимент как минимум 300 000 пробных траекторий.

С учетом известных соотношений для c_{hyp} , a_{hyp} , фокального расстояния и действительной полуоси гиперболы, $c_{hyp}^2 = a_{hyp}^2 + b^2$, $a_{hyp} = \mu_p/V_\infty^2$ [8], формула (2.8) запишется как

$$n_\varphi = \frac{c_{hyp}^4}{4a_{hyp}^2} n_b. \quad (2.9)$$

З а м е ч а н и е 4. ОФР для гравитационного рассеивания в каноническом виде через параметры “на правом конце” может быть получено и формально из (2.1) с помощью замены:

$$m_\alpha \rightarrow m_{sc}, \quad q_\alpha \rightarrow m_{sc}, \quad \frac{q_{aim}}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \mu_p. \quad (2.10)$$

После подстановки (2.10) формула (2.1) преобразуется к ОФР для гравитационного рассеивания через параметры “на правом конце”:

$$n_\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\varphi}{2}} n_b. \quad (2.11)$$

Подставляя в (2.11) непосредственно (1.4) для угла φ поворота вектора асимптотической скорости через расстояние перигея пролетной гиперболы R_π , можно получить еще одну формулу для гравитационного рассеивания траекторий КА, выраженного через эксцентриситет e пролетной гиперболы:

$$n_\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2} \right)^2 \left(1 + R_\pi \frac{V_\infty^2}{\mu_p} \right)^4 n_b = \frac{e^4}{4} a_{hyp}^2 n_b. \quad (2.12)$$

Ниже собраны основные полученные в работе ОФР через параметры на левом конце, на правом конце и в перигея соответственно:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_\varphi = \frac{c_{hyp}^4}{4a_{hyp}^2} n_b = \frac{1}{4} \frac{V_\infty^4}{\mu_p^2} \left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4} \right)^2 n_b = \frac{R_p^2}{4} \left(\left(\frac{b}{R_p} \right)^2 \left(\frac{V_\infty}{V_{pc}} \right)^2 + 1 \right)^2 n_b, \\ n_\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\varphi}{2}} n_b = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2} \right)^2 e^4 n_b, \\ n_\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_p}{V_\infty^2} \right)^2 \left(1 + R_\pi \frac{V_\infty^2}{\mu_p} \right)^4 n_b. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Последняя формула (2.13) показывает, что ОФР представляет собой композицию однородной деформации с коэффициентом $V_\infty^4/(4\mu_p^2)$ и неоднородной деформации вида:

$$\left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2 = \left(b^2 + R_p^2 \frac{V_{pc}^4}{V_\infty^4}\right)^2,$$

зависящей от прицельной дальности.

3. Постановка вычислительного эксперимента. В традиционной постановке пучкового баллистического проектирования в начальный момент (на левом конце) численного эксперимента формируется трубка равномерно распределенных траекторий КА – ВИРТ. Это выполняется с помощью специальных методик [1–3]. Затем моделируется прохождение ВИРТ мимо планеты-цели, согласно точным эфемеридам. Осуществляется селекция полученных траекторий. Для дальнейшего проектирования оставляются только те траектории, которые при их продолжении “дуплетом” попадают в требуемую планету-мишень. Ценность найденного набора таких траекторий состоит в их реалистичности, поскольку они получены с учетом реальных эфемерид и не требуют решения задач Ламберта и выполнения связанного с ним каскада уточняющих итерационных процедур. В свою очередь каждая из таких траекторий может использоваться в качестве опорной оси для нового пучка с локализацией и углубленной детализацией (Zoom-методика [1–3]).

Отметим, что при описанном традиционном подходе к баллистическому проектированию постановка вычислительного эксперимента и само моделирование происходят в направлении “слева направо”: значение телесного угла Ω (на конце справа) не является здесь известной величиной. Напротив, величина b прицельной дальности на левом конце – априорно задаваемое проектное значение для соответствующей задачи Коши в начальной ВИРТ. Общее число пробных траекторий N в трубке также известно априори, поскольку может задаваться по желанию. Для возможности успешного поиска цепочки ГМ алгоритм формирования сценариев космической экспедиции должен обеспечить наличие после очередного ГМ хоть какой-нибудь виртуальной траектории, попадающей в сферу действия планеты-мишени. Из всего набора пробных траекторий оставляется лишь одна траектория, ближе всех других приводящая КА к планете-мишени. Она служит основанием нового пучка. Остальные траектории отбраковываются.

Решающее значение в обнаружении траектории, пригодной для продолжения поиска сценария, имеет плотность множества виртуальных траекторий КА на выходе из сферы действия планеты. Чем больше плотность исходного пучка, тем больше вероятность близкого пролета КА хотя бы по одной траектории вблизи намеченной планеты. При подсчете достаточного числа траекторий виртуальной трубки, направленной к планете-цели, целесообразно учитывать минимальное число ее виртуальных сфер действия в покрытии орбиты планеты-мишени после совершения ГМ [11].

Процедура первичного обнаружения планеты-мишени на множестве траекторий после выполнения ГМ осложняется его пространственной неравномерностью, которая соответствует формуле (2.8).

4. Регуляризация рассеянных траекторий (метод выпрямления). Многим исследователям-баллистикам знакома проблема неустойчивости, возникающая при выполнении итерационных процедур в процессе моделирования ГМ. В первую очередь речь идет о сходимости метода Ньютона (и его модификаций) при вычислении действительных эфемеридных траекторий КА по прообразу найденного решения задачи Ламберта [1–3]. Одна из причин кроется в гиперболическом расхождении соседних виртуальных траекторий КА в процессе ГМ. На рис. 3, а видно, что соседние траектории расходятся с возрастающим в зависимости от угла рассеивания градиентом. Вследствие такого расхождения поиск планеты-мишени на множестве пучка траекторий после выполнения ГМ осложняется из-за пространственной неравномерности полученного пучка, которая соответствует формулам (2.8), (2.11). Использование густых пучков траекторий повышает вероятность встречи с планетой-мишенью хотя бы одной из них, если плотность рассеянного пучка не позволяет “проскочить” планете-мишени в промежутке между траекториями. Зачастую это требует рассмотрения миллионов виртуальных вариантов [1–3].

Действительно, при равномерном распределении виртуальных траекторий в ВИРТ (например, по алгоритму И.М. Соболя [14]) наиболее эффективные траектории КА, в смысле воздействия на них ГМ, т.е. наиболее близко пролетающие над планетой-целью, оказываются и наиболее “одиночными”. Вероятность промаха такой одиночной траектории мимо планеты-мишени

Таблица 2. Равномерное (отрегулированное) гравитационное рассеивание для различных углов φ (параметр на правом конце). Общее число пробных траекторий $N = 300000$

Углы поворота φ , град	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
Прицельная дальность, b/R_p	11–6	6–4	4–3	3–2.5	2.5–2	2–1.5
Число траекторий	50000	50000	50000	50000	50000	50000

будет велика. Однако при изменении закона распределения начальных виртуальных траекторий ситуация может кардинально поменяться.

Формулы гравитационного рассеивания (2.13) открывают возможность для эффективного управления начальным распределением виртуальных траекторий в их трубке до осуществления ГМ. Вместо равномерного распределения траекторий $n_b = n_0 = \text{const}$ в начальной ВИРТ установим в ней неоднородное регуляризирующее распределение n_b по следующему закону:

$$n_b = \frac{n_0}{\left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2}, \quad b \in [R_{\varphi}^{\text{полн}}, R_d]. \quad (4.1)$$

Тогда из (2.8) получим

$$dN_\varphi = n_b d\sigma = \frac{n_0}{\left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4}\right)^2} d\sigma, \quad (4.2)$$

откуда

$$n_\varphi = \frac{n_0 V_\infty^4}{4 \mu_p^2}. \quad (4.3)$$

Тем самым зависимость плотности рассеянных виртуальных траекторий КА от прицельной дальности (и от угла φ) исчезает. В итоге получается равномерно рассеянный гравитацией (по углу φ) на отрезке $b \in [R_{\varphi}^{\text{полн}}, R_d]$ пучок траекторий КА.

В табл. 2 представлены модельные таблицы отрегулированного, “распрявленного”, гравитационного рассеивания траекторий КА при совершении ГМ, посчитанные по соотношениям (4.2), (4.3) (модельное значение $V_\infty/V_{pc} = 1.0$).

Видим, что распределение траекторий по значениям прицельной дальности стало неравномерным, а по углу φ – равномерным. В реальных условиях, специально распределяя траектории на старте в ВИРТ подобным образом (на левом конце), можно существенно улучшить равномерность их рассеянного пучка на правом конце и соответственно повысить эффективность синтеза подходящих последовательностей ГМ.

5. Управляемое апостериорное формирование пучка рассеянных траекторий (продвинутая Zoom-методика фокусировки). Согласно распределению (4.1), на выходе из ГМ получается почти равномерно распределенный по углу φ в интервале $b \in [R_{\varphi}^{\text{полн}}, R_d]$ пучок траекторий. Однако можно пойти дальше. Подобным образом можно не только компенсировать вышеуказанную неравномерность, но и извлечь из нее некоторую пользу, сфокусировав пучок около требуемого значения угла $\varphi = \varphi^*$, которому, согласно (1.3), соответствует значение прицельной дальности:

$$b^* = \frac{\mu_p}{V_\infty^2} \text{ctg} \frac{\varphi^*}{2}.$$

В качестве значения φ^* может фигурировать ориентировочное проектное значение угла поворота вектора асимптотической скорости КА, приближающее КА к встрече со следующей планетой-мишенью. Пучок траекторий достаточной мощности, сфокусированный около угла φ^* , позволит сконцентрировать поиск на перспективном интервале $\varphi \in [\varphi^* - \Delta\varphi, \varphi^* + \Delta\varphi]$, где удастся более надежно выявить требуемую точную траекторию для возможности продолжения цепочки ГМ. В свою очередь теперь уже эта траектория может быть использована в качестве опорной для по-

иска семейства перспективных траекторий посредством дополнительно углубленной детализации (продвинутая Zoom-методика фокусировки [1–3]).

Вместо распределения траекторий по формуле (4.1) установим для начальной ВИРТ “фокусирующее” распределение $\hat{n}(b, b^*)$ по закону:

$$\hat{n}(b, b^*) = \begin{cases} n_{forced} \left(b^2 + \frac{\mu_p^2}{V_\infty^4} \right)^{-2}, & b \in [b^* - \Delta b, b^* + \Delta b], \\ 0, & b \notin [b^* - \Delta b, b^* + \Delta b], \end{cases} \quad (5.1)$$

где

$$n_{forced} = n_0 \frac{R_d - R_{эф}^{полн}}{2\Delta b} \gg n_0.$$

Тогда получим

$$n_\phi = \begin{cases} \frac{n_{forced} V_\infty^4}{4 \mu_p^2}, & b \in [b^* - \Delta b, b^* + \Delta b], \\ 0, & b \notin [b^* - \Delta b, b^* + \Delta b]. \end{cases} \quad (5.2)$$

Зависимость плотности рассеянных виртуальных траекторий КА от прицельной дальности (и от угла ϕ) убывает, а сама плотность рассеивания значительно увеличивается за счет фокусировки равномерно рассеянного (по углу ϕ) гравитацией пучка траекторий КА в окрестности $\phi = \phi^*$.

З а м е ч а н и е 5. Как показывает формула (1.3), вектор Лапласа принадлежит плоскости, образованной вектором V_∞ скорости на бесконечности и вектором \mathbf{b} прицельной дальности. Следовательно, относительно планеты плоскость пробной орбиты при ГМ не меняется. Пусть заранее приблизительно известен апостериорный (после ГМ) угол i^* наклона орбиты к плоскости экватора планеты. Тогда для построения пучка траекторий направление вектора \mathbf{b} целесообразно выбирать в плоскостях с углами наклона, близкими к углу i^* . Тем самым плотность пучка траекторий дополнительно может быть существенно увеличена без увеличения числа траекторий.

Заключение. Управляемые ГМ являются результатом целенаправленного использования часто встречающегося в масштабах Вселенной [15] феномена естественного гравитационного рассеивания. В работе синтезировано усиление формулы Резерфорда, учитывающее специфику воздействия планеты-цели на траекторию КА. Применение предлагаемых формул для оценки результата гравитационного рассеивания дает возможность преодолеть проблему нелинейной неравномерности рассеянного пучка. Также появляется возможность создания целенаправленного пучка траекторий после ГМ. В итоге существенно повышается вероятность попадания в сферу действия планеты-мишени хотя бы одной пролетной траектории из ограниченного числа виртуальных прототипов. Как следствие оказывается возможным значительно уменьшить необходимое число моделируемых вариантов пролета сферы действия планеты-цели для формирования требуемой последовательности цепочек многократных ГМ. Существенно повышается эффективность и быстродействие рекуррентной процедуры поиска разнообразных баллистических сценариев межпланетных перелетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г. Гравитационные маневры космического аппарата в системе Юпитера // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 3. С. 149–167.
2. Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Заславский Г.С., Захваткин М.В., Корянов В.В., Лавренев С.М., Морской И.М., Симонов А.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистико-навигационное обеспечение полетов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы // Под ред. А.Г. Тучина. МО, Химки: “НПО Лавочкина”, 2018. 336 с. ISBN 978 5-905646-12-6.
3. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Обобщенная формула Резерфорда и оптимизация пучкового моделирования гравитационных маневров в Солнечной системе: Препринт № 6. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2021. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-6>.

4. Резерфорд Э. Избранные научные труды. Строение атома и искусственное превращение элементов. М.: Наука, 1972. 533 с.
5. Евдокимов К.Е. Атомная физика. https://portal.tpu.ru/SHARED/e/EVDOKIMOV/Teach/course_at/Lectures/.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. 4-е изд., исправленное. Т. 1. М.: Наука, 1988. 215 с. ISBN 5-02-013850-9.
7. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГУ, 2019. 728 с. ISBN 978-5-19-011288-7.
8. Охоцимский Д.Е., Сухарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с. ISBN 5-02-014090-2.
9. Егоров В.А. О некоторых задачах полета к Луне // УФН. 1957. LXIII. С. 73–117.
10. Strange N.J., Russell R.P., Buffington B. Mapping the V-infinity Globe // Proc. AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Mackinac Island, MI, Aug 2007. Advances in the Astronautical Sciences. V. 129. Univelt, 2007. P. 423–446. Paper AAS 07-277.
11. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Гравитационное рассеивание при совершении гравитационных маневров и пертурбационные кольца в Солнечной системе // Препринт № 2. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2021. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-2>
12. Luzum B., Capitaine N., Fienga A. et al. The IAU 2009 System of Astronomical Constants: The Report of the IAU Working Group on Numerical Standards for Fundamental Astronomy // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2011. V. 110. <https://doi.org/10.1007/s10569-011-9352-4>
13. Fukushima T. System of Astronomical Units and Constants. IAU – WGRS/SGAC, 1990, Circ. 13.
14. Соболев И.М. Равномерно распределенные последовательности с дополнительным свойством равномерности // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16. № 5. С. 1332–1337.
15. Wambsganss J. Gravitational Lensing in Astronomy. Living Rev. Relativity. 1998. № 1. [Online Article]: Cited on January 26, 2004, <https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-1998-12>.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 681.5

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ
БОКОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ВОЗДУШНОГО СУДНА
ПРИ ОТСУТСТВИИ ИЗМЕРЕНИЙ УГЛОВ СКОЛЬЖЕНИЯ И КРЕНА

© 2023 г. Н. Е. Зубов^{а,*}, Е. Ю. Зыбин^б, А. В. Лапин^{а,б}

^аМГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

^бФАУ “ГосНИИАС”, Москва, Россия

*e-mail: nik.zubov@gmail.com

Поступила в редакцию 26.10.2022 г.

После доработки 01.11.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Для линеаризованной модели четвертого порядка, описывающей боковое движение воздушного судна с двумя органами управления, получены аналитические выражения стабилизирующих законов управления при отсутствии измерений углов скольжения и крена. В основу аналитического синтеза положен новый подход решения задачи управления по выходу. В отличие от традиционного подхода Ван дер Воуда с использованием многоуровневой декомпозиции, предлагаемый подход применим к широкому классу систем, у которых суммарная размерность векторов управления и наблюдения не превышает размерность вектора состояния. Представлена компактная формула, определяющая матрицу регулятора по выходу для четырехмерной динамической системы с двумя входами и двумя выходами при условии, что индексы управляемости и наблюдаемости не равны между собой. Приведены результаты моделирования процессов управления на примере стабилизации бокового движения гипотетического воздушного судна.

DOI: 10.31857/S0002338823020191, EDN: JFPEOZ

0. Введение. Рассматривается задача стабилизации бокового движения воздушного судна при отсутствии измерений углов скольжения и крена. Данное движение описывается линеаризованной моделью в форме “вход–состояние–выход” следующего вида [1–3]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_z^\beta & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & a_z^\gamma \\ a_{m_x}^\beta & a_{m_x}^{\omega_x} & a_{m_x}^{\omega_y} & 0 \\ a_{m_y}^\beta & a_{m_y}^{\omega_x} & a_{m_y}^{\omega_y} & 0 \\ 0 & 1 & -\text{tg} \vartheta_0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \end{bmatrix}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{m_x}^{\delta_n} & a_{m_x}^{\delta_s} \\ a_{m_y}^{\delta_n} & a_{m_y}^{\delta_s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{bmatrix}}_u, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \end{bmatrix}_x. \quad (0.1)$$

Здесь x – вектор состояния (β – угол скольжения, ω_x – угловая скорость крена, ω_y – угловая скорость рыскания, γ – угол крена); A – матрица состояния (α_0 – угол атаки, ϑ_0 – угол тангажа, $a_z^\beta, a_z^\gamma, a_{m_x}^\beta, a_{m_x}^{\omega_x}, a_{m_x}^{\omega_y}, a_{m_y}^\beta, a_{m_y}^{\omega_x}, a_{m_y}^{\omega_y}, a_z^{\delta_n}, a_z^{\delta_s}$ – коэффициенты линеаризации по состоянию); B – матрица управления ($a_{m_x}^{\delta_n}, a_{m_x}^{\delta_s}, a_{m_y}^{\delta_n}, a_{m_y}^{\delta_s}$ – коэффициенты линеаризации по управлению); u – вектор управления (δ_n – угол отклонения рулей направления, δ_s – угол отклонения элеронов); y – вектор наблюдения; C – матрица наблюдения [2]. Матрицы A и B можно считать постоянными в рамках конкретного режима полета.

Введем обозначения: $a_{1,1} = a_z^\beta, a_{1,2} = \sin \alpha_0, a_{1,3} = \cos \alpha_0, a_{1,4} = a_z^\gamma, a_{2,1} = a_{m_x}^\beta, a_{2,2} = a_{m_x}^{\omega_x}, a_{2,3} = a_{m_x}^{\omega_y}, a_{3,1} = a_{m_y}^\beta, a_{3,2} = a_{m_y}^{\omega_x}, a_{3,3} = a_{m_y}^{\omega_y}, a_{4,2} = 1, a_{4,3} = -\text{tg} \vartheta_0, b_{2,1} = a_{m_x}^{\delta_n}, b_{2,2} = a_{m_x}^{\delta_s}, b_{3,1} = a_{m_y}^{\delta_n}, b_{3,2} = a_{m_y}^{\delta_s}$. Тогда

матрицы состояния, управления и наблюдения из модели (0.1) примут обобщенный символичный вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 \\ 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (0.2)$$

Имеет место задача управления при неполной информации о векторе состояния. Решение таких задач можно строить с обратной связью по оценке вектора состояния [4, 5]. Однако недостатком такого подхода является то, что неизбежно возникает ошибка оценивания, которая вносит отклонения от желаемого поведения управляемых процессов [6]. В настоящей работе рассматривается управление без дополнительного динамического звена (наблюдателя) с обратной связью только по имеющейся информации – по выходу.

Требуется аналитически синтезировать закон управления объектом (0.2) по выходу

$$\mathbf{u} = -\mathbf{F}\mathbf{y}, \quad (0.3)$$

в котором матрица регулятора по выходу \mathbf{F} обеспечивает заданный характеристический полином замкнутой системы управления из области устойчивости:

$$p^*(\lambda) = \text{poly}(\mathbf{A} - \mathbf{BFC}) = |\lambda\mathbf{I}_4 - \mathbf{A} + \mathbf{BFC}| = \sum_{i=0}^4 p_i^* \lambda^{4-i}, \quad p_0^* = 1, \quad p_1^*, \dots, p_4^* \in \mathbb{R}. \quad (0.4)$$

Здесь и далее функция $\text{poly} \mathbf{M}$ возвращает характеристический полином матричного аргумента \mathbf{M} , запись вида \mathbf{I}_n соответствует единичной матрице порядка n , \mathbb{R} – множество вещественных чисел.

Среди известных аналитических методов решения поставленной задачи наиболее распространен декомпозиционный метод модального управления по выходу [7]. Однако лежащий в его основе подход Ван дер Воуда [8] позволяет находить множество решений при условии, что суммарная размерность векторов управления и наблюдения превышает размерность вектора управления. Анализ матриц (0.2) показывает, что для поставленной задачи это условие не выполняется и соответственно применение подхода, изложенного в [7, 8], напрямую неприемлемо. В настоящей работе предлагается новый подход аналитического синтеза регулятора по выходу применительно к задаче управления боковым движением воздушного судна, описываемой уравнениями (0.1), матрицами (0.2) и желаемым характеристическим полиномом (0.4).

1. Описание подхода. Запишем матрицы (0.2) в блочном виде, сгруппировав ненулевые элементы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \mathbf{a}_c^T & a_{1,4} \\ \mathbf{a}_b & \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ 0 & \mathbf{a}_d^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{0}_{2 \times 1} \mid \mathbf{I}_2 \mid \mathbf{0}_{2 \times 1}], \quad (1.1)$$

где

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_b = \begin{bmatrix} a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_c = \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{1,3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_d = \begin{bmatrix} a_{4,2} \\ a_{4,3} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}.$$

Известно, что матрица регулятора по выходу инвариантна относительно преобразования подобия [9]. Поэтому для упрощения дальнейших расчетов выполним для системы (1.1) преобразование подобия с матрицей преобразования:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 & 0 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим следующие матрицы состояния, управления и наблюдения соответственно:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{a}_b & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{a}_c^T & a_{1,1} & a_{1,4} \\ \mathbf{a}_d^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = [\mathbf{I}_2 \mid \mathbf{0}_{2 \times 1} \mid \mathbf{0}_{2 \times 1}]. \quad (1.2)$$

Определим условия полной управляемости и наблюдаемости [10] системы (1.2), а также индексы ее управляемости и наблюдаемости [11].

Сформируем первые два блочных столбца матрицы управляемости Калмана [12]:

$$U = [\tilde{B} | \tilde{A}\tilde{B}] = \begin{bmatrix} I_2 & \bar{A} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \bar{B} \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Отсюда видно, что при условии

$$\det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix} \bar{B} \right) \neq 0$$

система (0.1) с матрицами (0.2) полностью управляема, а индекс ее управляемости [11] равен двум. При этом матрица (1.3) обратима, а обратная к ней матрица, рассчитанная с помощью формулы Фробениуса обращения блочных матриц [13], имеет вид

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{B}^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \bar{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & -\bar{A} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix}^{-1} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Сформируем первые три блочных строки матрицы наблюдаемости Калмана [12]

$$\begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \bar{A} & \mathbf{a}_b & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \bar{A}^2 + \mathbf{a}_b \mathbf{a}_c^T & \bar{A} \mathbf{a}_b + a_{1,1} \mathbf{a}_b & a_{1,4} \mathbf{a}_b \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Отсюда видно, что при условии

$$a_{1,4} \mathbf{a}_b \neq \mathbf{0}_{2 \times 1},$$

где $\mathbf{0}_{2 \times 1}$ – нулевая матрица размерности 2×1 , система (0.1) с матрицами (0.2) полностью наблюдаема, а индекс ее наблюдаемости [11] равен трем.

Таким образом, у рассматриваемой полностью управляемой и полностью наблюдаемой четырехмерной динамической системы индексы управляемости и наблюдаемости не равны между собой. Для такого класса систем решение задачи модального управления по выходу (за редкими исключениями конкретных желаемых спектров) существует, единственно и определяется следующей теоремой.

Теорема. Для четырехмерной системы вида (0.1) с индексом управляемости два и индексом наблюдаемости три регулятор по выходу, обеспечивающий желаемый характеристический полином (0.4), описывается матрицей

$$F = \left[\mathbf{d}_2 \mid \mathbf{d}_1 - p_1^* \mathbf{d}_2 \right] \left[\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2 - \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{d}_2 \right]^{-1}. \quad (1.6)$$

Двумерные вектор-столбцы \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 и \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 рассчитываются из соотношений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} = U^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N}^R, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{A}^2 \mathbf{N}^R, \quad (1.7)$$

где

$$U = [B | AB], \quad N = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}, \quad D = \sum_{i=0}^4 p_i^* A^i,$$

а \mathbf{N}^R – произвольный правый аннулятор [14] матрицы \mathbf{N} .

Доказательство данной теоремы основано на получении полных параметризованных множеств решений соответствующих задач модального управления по состоянию (множество матриц \mathbf{K} : $\text{poly}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = p^*(\lambda)$) и модального наблюдения (множество матриц \mathbf{L} : $\text{poly}(\mathbf{A} - \mathbf{LC}) =$

$= p^*(\lambda)$), а также на обеспечении разрешимости и решении односторонних матричных уравнений ($\mathbf{FC} = \mathbf{K}$ и $\mathbf{BF} = \mathbf{L}$) относительно искомой матрицы регулятора по выходу \mathbf{F} .

Ввиду существенного объема выкладок в статье доказательство самой теоремы не приводится. Однако достоверность результата, полученного на ее основе для рассматриваемого примера, подтверждена ниже проверкой характеристического полинома замкнутой системы объект – регулятор по выходу.

2. Основной результат. Рассчитаем по формуле (1.6) матрицу регулятора \mathbf{F} , обеспечивающую желаемый характеристический полином (0.4) замкнутой системе управления, состоящей из объекта (0.1) с матрицами (0.2) и регулятора (0.3).

Согласно записи (1.5), первые две блочные строки матрицы наблюдателя и их правый аннулятор имеют соответственно вид

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{a}_b & \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^R = [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1]^T.$$

Возведя матрицу состояния $\tilde{\mathbf{A}}$ в различные степени от 0 до 4, составим все необходимые для формул (1.7) произведения этих степеней справа на аннулятор \mathbf{N}^R :

$$\begin{aligned} & [\tilde{\mathbf{A}}^4 \mathbf{N}^R \mid \tilde{\mathbf{A}}^3 \mathbf{N}^R \mid \tilde{\mathbf{A}}^2 \mathbf{N}^R \mid \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{N}^R \mid \mathbf{N}^R] = \\ & = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{a}}_b + a_{1,1}\tilde{\mathbf{a}}_b) + (a_{1,1}^2 + z_c)\tilde{\mathbf{a}}_b & \bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{a}}_b + a_{1,1}\tilde{\mathbf{a}}_b & \tilde{\mathbf{a}}_b & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix}(\bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{a}}_b + a_{1,1}\tilde{\mathbf{a}}_b) + \begin{bmatrix} a_{1,4}(a_{1,1}^3 + a_{1,1}z_c + a_{1,4}z_d) \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_b + \begin{bmatrix} a_{1,4}a_{1,1}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,4}a_{1,1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,4} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbf{a}}_b = a_{1,4}\mathbf{a}_b$, $z_c = \mathbf{a}_c^T \mathbf{a}_b$, $z_d = \mathbf{a}_d^T \mathbf{a}_b$. Тогда произведение \mathbf{DN}^R будет иметь вид

$$\mathbf{DN}^R = \sum_{i=0}^4 (p_i^* \tilde{\mathbf{A}}^{4-i} \mathbf{N}^R) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix} (\bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{a}}_b + (a_{1,1} + p_1^*)\tilde{\mathbf{a}}_b) + \begin{bmatrix} s\tilde{\mathbf{a}}_b \\ a_{1,4}(p_3^* + a_{1,1}s + a_{1,4}z_d) \\ p_4^* \end{bmatrix},$$

где $s = a_{1,1}^2 + p_1^*a_{1,1} + p_2^* + z_c$.

Используя левую формулу из записи (1.7) и значение матрицы (1.4), сформируем первый множитель расчетного произведения (1.6):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{U}^{-1} \mathbf{DN}^R = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{B}}^{-1}(\bar{\mathbf{A}}\mathbf{a} - s\tilde{\mathbf{a}}_b) \\ \bar{\mathbf{B}}^{-1}(\bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{a}}_b + \mathbf{a} + (a_{1,1} + p_1^*)\tilde{\mathbf{a}}_b) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{d}_2 \mid \mathbf{d}_1 - p_1^* \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} &= \bar{\mathbf{B}}^{-1} \left(\bar{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \tilde{\mathbf{a}}_b \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{S}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \tilde{\mathbf{a}}_b \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{S}}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s & a_{1,1} + p_1^* \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -p_1^* \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{1,4}(p_3^* + a_{1,1}s + a_{1,4}z_d) \\ p_4^* \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_c^T \\ \mathbf{a}_d^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{1,4}(p_3^* + a_{1,1}s + a_{1,4}z_d) & a_{1,4}z_c \\ p_4^* & a_{1,4}z_d \end{bmatrix}.$$

Используя правую формулу из записи (1.7), сформируем второй множитель расчетного произведения (1.6):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{NA}^2 \mathbf{N}^R = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_b \\ \bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{a}}_b + a_{1,1}\tilde{\mathbf{a}}_b \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2 - \mathbf{CBd}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_b \mid -(\mathbf{a} + p_1^* \tilde{\mathbf{a}}_b) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -p_1^* \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Объединив полученные соотношения (2.1) и (2.2), применим общий результат теоремы – формулу (1.6) – для расчета искомой матрицы регулятора по выходу:

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{d}_2 \mid \mathbf{d}_1 - p_1^* \mathbf{d}_2 \right] \left[\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2 - \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{d}_2 \right]^{-1} = \bar{\mathbf{B}}^{-1} \left(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s & a_{1,1} + p_1^* \end{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}^{-1} \right). \quad (2.3)$$

Далее выполним проверку полученной матрицы (2.3) на соответствие равенству (0.4) с желаемым характеристическим полиномом.

3. Проверка характеристического полинома. Над матрицей замкнутой системы объект (0.2) – регулятор по выходу (2.3)

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{F} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \mathbf{a}_c^T & a_{1,4} \\ \mathbf{a}_b^T \bar{\mathbf{S}} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ s & -a_{1,1} - p_1^* \end{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ 0 & \mathbf{a}_d^T & 0 \end{bmatrix}$$

выполним преобразование [13] подобия с матрицей преобразования

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим матрицу с тем же характеристическим полиномом:

$$\mathbf{S}^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{F} \mathbf{C}) \mathbf{S} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,4}(p_3^* + a_{1,1}s + a_{1,4}z_d) & a_{1,4}z_c & a_{1,4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ a_{1,4}^{-1} & s & -a_{1,1} - p_1^* & 0 \\ 0 & p_4^* & a_{1,4}z_d & 0 \end{bmatrix}.$$

Находя соответствующие определители (например, по первому столбцу), нетрудно показать, что характеристический полином данной матрицы совпадает с желаемым характеристическим полиномом (0.4):

$$\text{poly}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{F} \mathbf{C}) = \lambda^4 + p_1^* \lambda^3 + p_2^* \lambda^2 + p_3^* \lambda + p_4^*.$$

4. Пример численного моделирования. Для подтверждения применимости синтезированного закона (0.3) с матрицей регулятора по выходу (2.3) к управлению боковым движением гипотетического воздушного судна воспользуемся следующими числовыми значениями матриц (0.2) [1]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.1520 & 0.4226 & 0.9063 & 0.0960 \\ -18.6430 & -1.0600 & -1.6000 & 0 \\ -1.7570 & -0.1530 & -0.1360 & 0 \\ 0 & 1 & -0.4663 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.8740 & -8.9660 \\ -1.4600 & 0.3040 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Назначим желаемые полюса матрицы замкнутой системы $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{F} \mathbf{C}$, сходные по порядку величин с полюсами, выбранными в работах [1, 3]:

$$\phi_1 = -1.0, \quad \phi_2 = -1.5, \quad \phi_3 = -2.0, \quad \phi_4 = -2.5.$$

Этим полюсам соответствуют коэффициенты характеристического полинома (0.4)

$$p_1^* = 7.00, \quad p_2^* = 17.75, \quad p_3^* = 19.25, \quad p_4^* = 7.50. \quad (4.2)$$

Матрица регулятора (2.3) для объекта (4.1) и коэффициентов (4.2) принимает значение

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -0.6234 & -2.6770 \\ -0.0535 & 0.3148 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

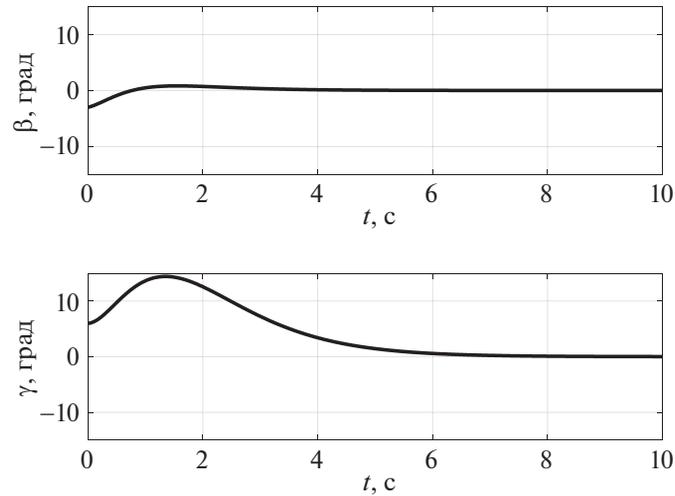


Рис. 1. Стабилизация угловых координат гипотетического воздушного судна.

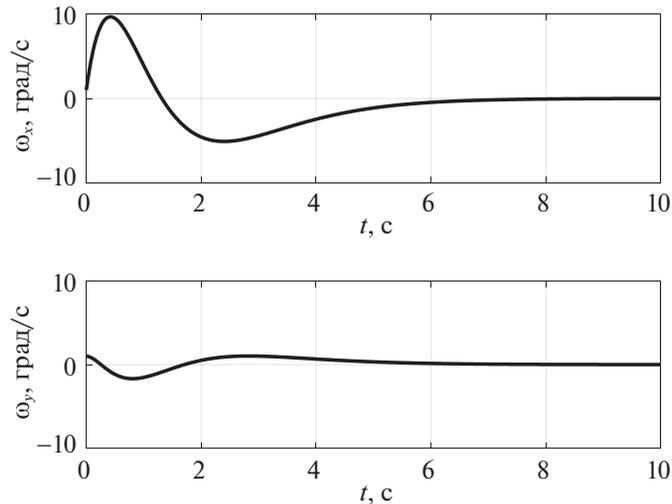


Рис. 2. Стабилизация угловых скоростей гипотетического воздушного судна.

В начальный момент времени $t = 0$ зададим вектор начальных условий

$$\mathbf{x}(0) = \frac{\pi}{180} [-3 \mid 1 \mid 1 \mid 6], \quad (4.4)$$

которому соответствуют типовые начальные значения углов и угловых скоростей:

$$\beta = 3^\circ, \quad \omega_x = \omega_y = 1 \text{ град/с}, \quad \gamma = 6^\circ.$$

Решение матрично-векторного дифференциального уравнения (0.1) с управлением (0.3), характеризующее процесс стабилизации объекта, имеет вид [15]

$$\mathbf{x}(t) = \expm((\mathbf{A} - \mathbf{BFC})t) \mathbf{x}(0), \quad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{FCx}(t), \quad (4.5)$$

где \expm – функция матричной экспоненты [16].

В среде MATLAB [17] был промоделирован переходный процесс длительностью 10 с стабилизации объекта (4.1), (4.3), описываемый функциями (4.5) при начальных условиях (4.4). Графики изменения параметров движения приведены на рис. 1–3.

Из представленных графиков видно, что предлагаемый закон управления по выходу, несмотря на отсутствие информации об углах скольжения и крена, позволяет в течение 10 с

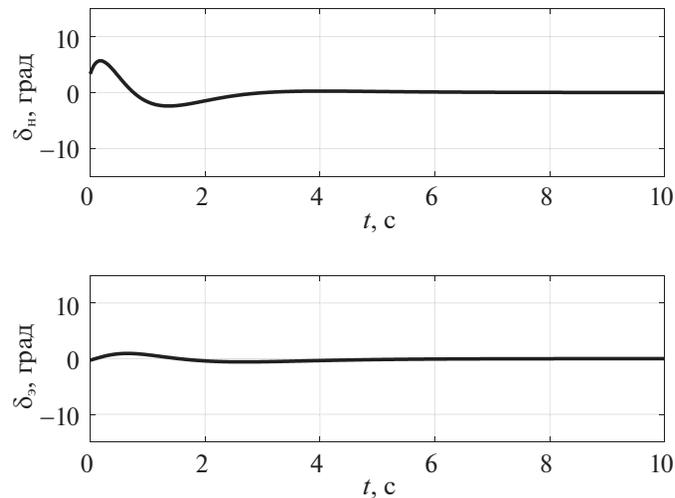


Рис. 3. Отклонения рулей управления гипотетического воздушного судна.

стабилизировать боковое движение воздушного судна по всем компонентам вектора состояния при допустимых значениях (в пределах $\pm 25^\circ$) [2] отклонений управляющих органов (рис. 3). Значения угловых координат (рис. 1) и угловых скоростей (рис. 2) воздушного судна в процессе стабилизации также находятся в допустимых пределах $\pm 20^\circ$ по углам и ± 10 град/с по угловым скоростям (из условий линеаризации) [2].

Заключение. Показано, что при отсутствии измерений углов скольжения и крена можно стабилизировать боковое движение воздушного судна по информации только об угловых скоростях крена и рысканья. При этом не требуется построения дополнительных динамических звеньев в виде наблюдателей состояния. Предложен качественно новый подход к аналитическому синтезу управления по выходу системой четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами (сумма входов и выходов равна размерности системы), описывающей боковое движение воздушного судна. Показано, что для такой системы с неравными индексами управляемости и наблюдаемости решение задачи управления по выходу существует, но единственно для каждого конкретного желаемого размещения полюсов. Числовая настройка предлагаемого аналитического закона управления возможна лишь за счет выбора конкретных значений полюсов из области устойчивости.

Достоверность подхода применительно к рассматриваемой модели подтверждена совпадением характеристического полинома замкнутой системы управления с заданным полиномом. Приведен пример моделирования процесса стабилизации для числовой модели бокового движения гипотетического воздушного судна. Моделирование подтвердило работоспособность предлагаемого алгоритма управления и показало, что за счет выбора конкретных значений желаемых полюсов соблюдаются ограничения на отклонения управляющих органов и на допустимые изменения компонент вектора состояния в процессе полета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н., Фомичев А.В. Синтез законов управления боковым движением летательного аппарата при отсутствии информации об угле скольжения. Аналитическое решение // Изв. вузов. Авиационная техника. 2017. № 1. С. 61–70.
2. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987.
3. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н., Пролетарский А.В. Аналитический синтез законов управления боковым движением летательного аппарата // Изв. вузов. Авиационная техника. 2015. № 3. С. 14–20.
4. Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н. Аналитический алгоритм построения орбитальной ориентации космического аппарата при неполном измерении компонент вектора состояния // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 128–138.
<https://doi.org/10.1134/S0002338819040176>

5. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Autonomous Stabilization of a Spacecraft Orbital Orientation at the Lack of Angular Velocity Measurements // Int. Russian Automation Conf. Sochi. 2022. P. 51–56.
<https://doi.org/10.1109/RusAutoCon54946.2022.9896299>.
6. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 716 с.
7. *Зубов Н.Е., Рябченко В.Н., Лапин А.В.* Аналитический синтез законов стабилизации взаимосвязанных движений летательного аппарата в каналах тангаж–рысканье при отсутствии информации об угле атаки // Изв. вузов. Авиационная техника. 2022. № 1. С. 87–96.
8. *Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван дер Воуда // ДАН. 2017. Т. 476. № 3. С. 260–263.
9. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Generalization of Bass – Gura Formula for Linear Dynamic Systems with Vector Control // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2020. V. 89. Iss. 2. P. 41–64.
<https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-2-41-64>
10. *Зыбин Е.Ю., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Рекурсивные тесты на управляемость и наблюдаемость больших динамических систем // АиТ. 2006. № 5. С. 119–132.
11. *Скороход Б.А., Колежук В.С.* Определение индекса наблюдаемости линейной дискретной системы с векторным выходом // Оптимизация производственных процессов: Сб. науч. тр. 2003. № 6. С. 24–28.
12. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. М.: Юрайт, 2020. 276 с.
13. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 560 с.
14. *Лапин А.В., Зубов Н.Е.* Реализация в среде MATLAB аналитических алгоритмов модального управления по состоянию и выходу // Инженерный журнал: наука и инновации. 2020. № 1 (97). С. 1–16.
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-1-1950>
15. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. 832 с.
16. *Lapin A.V., Zubov N.E.* Analytic Solution of the Problem of Stabilizing Orbital Orientation of a Spacecraft with Flywheel Engines // AIP Conf. Proceedings. Moscow. 2021. V. 2318. Iss. 1. 130009. P. 1–8.
<https://doi.org/10.1063/5.0036155>.
17. *Kisacanin B., Agarwal G.C.* Linear Control Systems: With Solved Problems and MATLAB Examples. N.Y.: Kluwer Acad. Plenum Publ., 2002.

**СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ**

УДК 531.3:681.5.01

**УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ
МНОГОЦЕЛЕВОГО ЛАБОРАТОРНОГО МОДУЛЯ
С ПОМОЩЬЮ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ**

© 2023 г. А. В. Сумароков^{a,b,*}

^a ПАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” имени С.П. Королёва”, Королёв, МО, Россия
^b ФГАОУВО “Московский физико-технический институт (национальный исследовательский ун-т)”,
Долгопрудный, МО, Россия

*e-mail: anton.sumarokov@rsce.ru

Поступила в редакцию 23.08.2022 г.

После доработки 13.10.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Рассматривается управление движением Многоцелевого лабораторного модуля “Наука” в ходе его полета к Международной космической станции. Для маневрирования и угловой стабилизации в качестве исполнительных органов применяется двигательная установка. В целях обеспечения одновременного управления перемещениями центра масс космического аппарата и его стабилизацией с помощью двигателей в каждый момент времени приходится решать задачи определения требуемого изменения скорости космического аппарата, выбора оптимальной конфигурации двигателей и задачу прогнозирования параметров движения космического аппарата. Приводятся методы решения этих задач, примененные при разработке системы управления Многоцелевого лабораторного модуля. Работоспособность описанных алгоритмов подтверждается результатами математического моделирования на наземном стенде отработки бортового программного обеспечения и в ходе летно-конструкторских испытаний непосредственно в ходе полета и успешной стыковки к Международной космической станции.

DOI: 10.31857/S000233882302018X, EDN: JGDLUW

Введение. Международная космическая станция (МКС) является уникальной космической лабораторией, на борту которой проводится множество различных экспериментов, связанных с изучением жизнедеятельности человека в космосе [1], созданием новых материалов и технологий [2], исследованием Земли из космоса [3, 4]. В связи с этим для обеспечения экипажа МКС рабочим местом и различным уникальным оборудованием, необходимым для проведения научных экспериментов, был разработан специализированный Многоцелевой лабораторный модуль (МЛМ) “Наука”. Старт и стыковка данного модуля к МКС состоялись в июне 2021 г. С точки зрения системы управления движением данный модуль подобен транспортным пилотируемым и грузовым кораблям типа “Союз”, “Прогресс”, решающим в ходе своего полета схожие задачи. Ряд алгоритмов системы управления был заимствован с данных кораблей [5, 6]. Однако вместе с тем в МЛМ имеется и ряд особенностей, позволивших значительно расширить функционал системы управления движением [7, 8]. В частности, одной из особенностей является возможность индивидуального управления каждым двигателем ориентации, в то время как на кораблях “Союз” и “Прогресс” управляющие воздействия, рассчитанные в бортовых алгоритмах, выдаются сразу на группы двигателей. Данное обстоятельство дает возможность оптимизировать конфигурацию включаемых двигателей в зависимости от величины и направления требуемого приращения линейной и угловой скоростей с точки зрения расхода топлива, необходимого на их реализацию. Также указанная особенность позволяет значительно расширить возможности системы управления с точки зрения автоматической реконфигурации набора используемых двигателей в случае отказов отдельных двигателей.

1. Постановка задачи. Рассматривается алгоритм формирования совокупности управляющих сигналов на двигатели МЛМ. Алгоритм обеспечивает одновременное управление движением как центра масс МЛМ, так и вокруг его центра масс на участке автономного полета. Двигательная установка (ДУ) МЛМ для управления его движением на участке автономного полета состоит из 42 двигателей трех типов: 16 двигателей точной стабилизации (ДТС) тягой ~ 13 Н используются только для управления движением вокруг центра масс; 24 двигателя причаливания и стабилизации (ДПС)

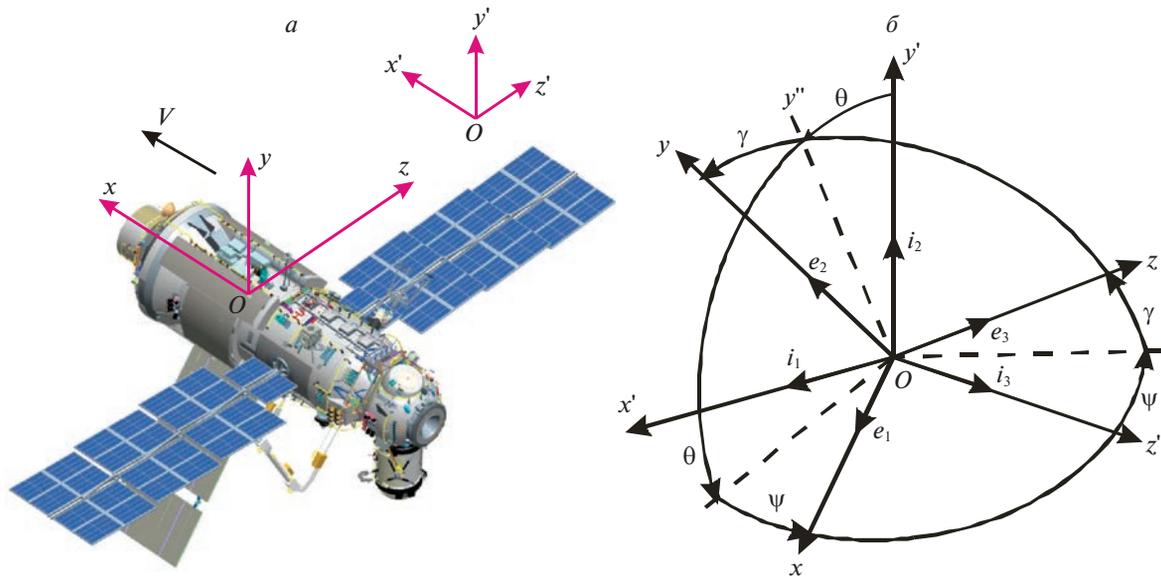


Рис. 1. Положение осей связанной системы координат МЛМ

тягой ~ 392 Н применяются для управления движением и центра масс и вокруг центра масс; 2 двигателя коррекции и сближения (ДКС) тягой 4090 Н – для управления движением только центра масс. Рассматриваемый в работе алгоритм управления не затрагивает использование ДКС.

Управление перемещениями и вращением осуществляется с помощью широтно-импульсной модуляции длительности включения двигателей, расположенных в одном из четырех блоков на поверхности модуля и имеющих различные направления тяг. Основной проблемой при формировании управляющих длительностей включения двигателей является то обстоятельство, что направления тяг подавляющего большинства двигателей не совпадают ни с каналами измерителя угловой скорости, ни с направлениями осей связанной системы координат МЛМ. В то же время практически все двигатели создают воздействия сразу по всем каналам управления. Это значительно затрудняет возможности их комбинирования для формирования управляющего воздействия только по одному или нескольким выбранным каналам.

В качестве связанного базиса МЛМ используется система координат с началом в центре масс: продольная ось Ox направлена в сторону активного стыковочного узла, ось Oy – противоположно узлу, на который устанавливается шлюзовая камера, а ось Oz совпадает с осью вращения солнечных батарей и дополняет систему до правой тройки (рис. 1,а).

В целом задача управления пространственным движением МЛМ с помощью двигателей состоит из трех основных частей: определение требуемого изменения скорости космического аппарата (КА) на каждом такте управления бортовой центральной вычислительной машины (БЦВМ); реализация требуемого изменения угловой скорости с помощью ДУ путем выбора оптимальной схемы включения двигателей; прогнозирование изменения параметров движения КА.

2. Определение требуемого изменения скорости КА. Введем орбитальную систему координат. Расположение осей этой системы аналогично описанному в [5]: ось Oy' направлена вдоль радиус-вектора от центра Земли, ось Oz' – против вектора угловой скорости орбитального движения, ось Ox' – в сторону вектора линейной скорости и дополняет систему до правой тройки. На рис. 1,а показано взаимное расположение осей орбитального базиса и связанного при нулевых угловых рассогласованиях. В подавляющем большинстве случаев в качестве целевой ориентации МЛМ в контур управления задается некоторое постоянное положение относительно орбитального базиса, определяемое \mathbf{R} – кватернионом перехода из орбитального в целевой базис. Данный базис вращается вместе с орбитальным. Относительно целевого базиса в контуре управления рассчитываются угловые ошибки ориентации в виде управляющего кватерниона \mathbf{N} . В случае, если при помощи показаний позиционных датчиков известно рассогласование между орбитальным и связанным базисом \mathbf{A} , управляющий кватернион определяется как

$$\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{R}} \circ \mathbf{A}.$$

Указанные ошибки ориентации в виде углов Крылова представлены на рис. 1,б.

Аналогично через углы Крылова можно выразить матрицу ортогонального преобразования целевого базиса $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ в базис $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ связанной с КА системы координат *Охуз* (рис. 1, б):

$$[(\mathbf{e}_k, \mathbf{i}_j)]_{j=1,2,3}^{k=1,2,3} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi \sin \gamma - \sin \theta \cos \gamma & \sin \theta \sin \psi \sin \gamma + \cos \theta \cos \gamma & \cos \psi \sin \gamma \\ \cos \theta \sin \gamma \cos \psi + \sin \theta \sin \gamma & \sin \theta \sin \psi \cos \gamma - \cos \theta \sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Единичные векторы целевого базиса выражаются через единичные векторы связанного базиса следующим образом:

$$\mathbf{i}_j = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{e}_k, \mathbf{i}_j) \mathbf{e}_k, \quad j = 1, 2, 3.$$

Движение связанного базиса относительно целевого описывается кинематическими соотношениями в форме Пуассона:

$$2\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \circ \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^B \circ \mathbf{N},$$

где $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ – вектор абсолютной угловой скорости КА в проекциях на оси связанного базиса, $\boldsymbol{\omega}^B = [\omega_x^B \ \omega_y^B \ \omega_z^B]^T$ – вектор угловой скорости орбитального движения в проекциях на оси целевого базиса. Выразив из предыдущего уравнения вектор абсолютной угловой скорости, получим

$$\boldsymbol{\omega} = 2\tilde{\mathbf{N}} \circ \dot{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{N}} \circ \boldsymbol{\omega}^B \circ \mathbf{N}.$$

Линеаризуем данные уравнения в окрестности целевого базиса в предположении малости углов γ, ψ, θ , в результате имеем следующие соотношения:

$$[(\mathbf{e}_k, \mathbf{i}_j)]_{j=1,2,3}^{k=1,2,3} \approx \begin{bmatrix} 1 & \theta & -\psi \\ -\theta & 1 & \gamma \\ \psi & -\gamma & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} \approx \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \psi & \theta \\ & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\omega_x \approx \dot{\gamma} + \omega_x^B + \omega_y^B \theta - \omega_z^B \psi,$$

$$\omega_y \approx \dot{\psi} + \omega_y^B + \omega_z^B \gamma - \omega_x^B \theta,$$

$$\omega_z \approx \dot{\theta} + \omega_z^B + \omega_x^B \psi - \omega_y^B \gamma.$$

Ввиду малости компонент орбитальной угловой скорости и γ, ψ, θ можем дополнительно пренебречь их перекрестными произведениями, в результате имеем:

$$\omega_x \approx \dot{\gamma} + \omega_x^B,$$

$$\omega_y \approx \dot{\psi} + \omega_y^B,$$

$$\omega_z \approx \dot{\theta} + \omega_z^B.$$

Дополним данные соотношения уравнениями для динамики движения в случае малости углов и угловых скоростей. Допустим также предположение малости центробежных моментов инерции по сравнению с диагональными $J_i, i = x, y, z$ (в частности, для МЛМ их отношение составляет порядка 0.005). Будем также полагать, что управляющий момент, создаваемый двигателями ориентации $\mathbf{M} = [M_x \ M_y \ M_z]^T$, значительно превышает прочие возмущающие моменты (гравитационный, аэродинамический и т.д.), в результате получим

$$J_i \dot{\omega}_i = M_i, \quad i = x, y, z.$$

Ускорение, создаваемое двигателями, можно выразить через $\epsilon_i = M_i/J_i, i = x, y, z$. Введем также обозначения $v_x = \gamma, v_y = \psi, v_z = \theta$ и воспользуемся тем, что

$$\ddot{v}_i = \frac{d\dot{v}_i}{dt} = \frac{d\dot{v}_i}{dv_i} \frac{dv_i}{dt} = \frac{d\dot{v}_i}{dv_i} \dot{v}_i = 0.5 \frac{d\dot{v}_i^2}{dv_i}, \quad i = x, y, z.$$

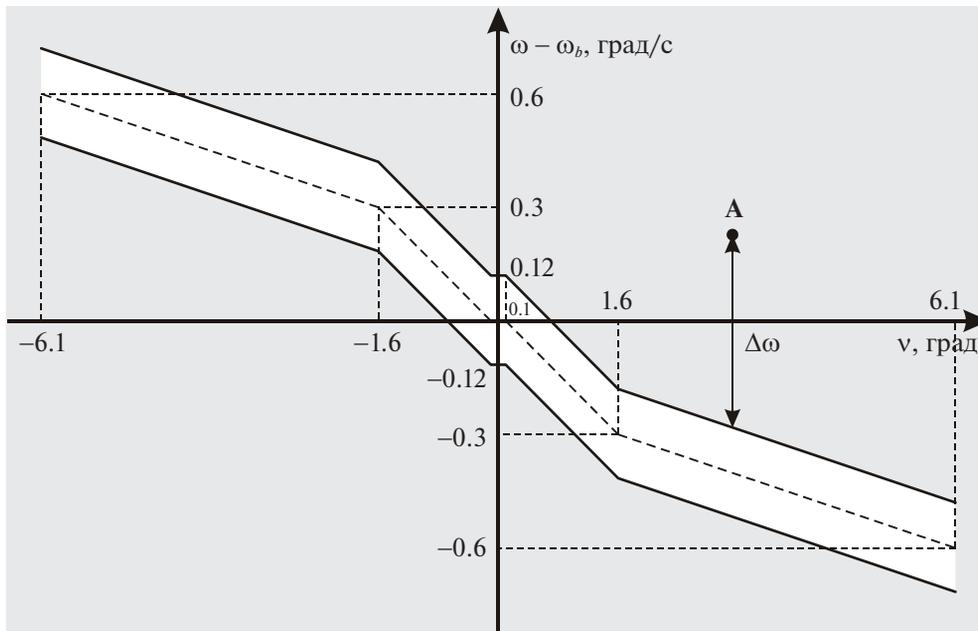


Рис. 2. Линии переключения на фазовой плоскости

Тогда уравнение динамики в фазовых переменных будет иметь вид

$$d\dot{v}_i^2 = 2\varepsilon_i dv_i. \quad (2.1)$$

При постоянном управляющем ускорении ε_i данные уравнения можно проинтегрировать: $\dot{v}_i^2 = 2\varepsilon_i v_i + \text{const}$. Это уравнение задает на фазовой плоскости семейство парабол при $\varepsilon_i \neq 0$, причем при $\varepsilon_i > 0$ будет наблюдаться один характер движения, а при $\varepsilon_i < 0$ – другой. Третьим семейством будут прямые, параллельные оси v_i , определяемые соотношением $\dot{v}_i = \text{const}$ при $\varepsilon_i = 0$.

Воспользуемся фазовой плоскостью для решения задачи формирования управляющей скорости для управления движением вокруг центра масс [9]. Пусть на этой плоскости по оси ординат отложена разность между проекцией на оси управления текущей оценки угловой скорости $\hat{\omega}_i(t)$ и программной угловой скоростью вращения целевого базиса ω_i^B , $i = x, y, z$. Оценка угловой скорости $\hat{\omega}_i(t)$ получена непосредственно по показаниям датчика угловой скорости $\omega_i(t)$, $i = x, y, z$, с помощью фильтра упругих колебаний, представляющего собой фильтр Калмана [10, 11]. По оси абсцисс на фазовой плоскости отложен угол рассогласования v_i , $i = x, y, z$, между заданным положением КА относительно целевой системы координат и реальным его положением. Приближим параболу, проходящую через начало координат, несколькими прямыми и введем зону нечувствительности путем параллельного сдвига линий переключения по горизонтали в обе стороны от оси ординат. На рис. 2 показаны линии переключения в координатах $\hat{\omega}_i - \omega_i^B$ и v_i , $i = x, y, z$, ограничивающих зону нечувствительности, ширина которой по вертикали составляет $\delta\omega = \pm 0.12$ град/с. В итоге вся фазовая плоскость оказывается разделенной на три зоны. Внутри зоны нечувствительности отсутствует управление и движение определяется $\dot{v}_i = \text{const}$. Снизу от зоны нечувствительности будет зона, в которой движение задается положительным моментом, согласно решению (2.1), а сверху – отрицательным. В результате итоговая фазовая траектория из любого начального положения будет иметь вид свертывающейся спирали, приводящей к предельному циклу, размер которого по углу определяется точкой пересечения линий переключения с осью абсцисс, а по угловой скорости – минимальным временем включения двигателя.

Для каждого канала управления потребное приращение угловой скорости (управляющий сигнал $u_i = \Delta\omega_i$, $i = x, y, z$) находится как расстояние по вертикали от точки А, соответствующей текущему состоянию системы, до ближайшей границы зоны нечувствительности с учетом

гистерезиса. При суммарном угловом рассогласовании по всем каналам управления, превышающем 15° , происходит поворот вокруг оси Эйлера [12], которая определяется кватернионом рассогласования $N_i/\sqrt{1-N_0^2}$, $i = x, y, z$. Управляющий сигнал в этом случае запишем следующим образом:

$$\Delta\omega_i = \hat{\omega}_i - \omega_{bi} - \omega_0 \frac{N_i}{\sqrt{1-N_0^2}} - \frac{\delta\omega_{cl}}{k_a}, \quad i = x, y, z,$$

где ω_0 – угловая скорость поворота, $k_a \geq 1$ – коэффициент углового гистерезиса, $\delta\omega_{cl}$ – ближайшая граница зоны нечувствительности по угловой скорости. При приближении в процессе разворота угла к границам зоны нечувствительности, изображенной на рис. 2, если угловое рассогласование v_i в канале $i = x, y, z$ пока еще превышает 6.1° , а суммарное угловое рассогласование (угол кратчайшего поворота) по всем каналам уже менее 15° , то линия переключения в этом канале управления определяется движением с постоянным ускорением $e_i \approx d\omega_i/dt = \text{const}$, $i = x, y, z$. Таким образом, согласно (2.1), в первом приближении можно считать, что управляющий сигнал находится по формуле:

$$\Delta\omega_i = \hat{\omega}_i - \omega_{bi} - \text{sign}(v_i)\sqrt{2e_i v_i} - \frac{\delta\omega_{cl}}{k_a}. \quad (2.2)$$

Когда угловое рассогласование v_i в канале $i = x, y, z$ становится менее 6.1° , непосредственно используется закон управления с помощью фазовой плоскости (рис. 2).

При управлении угловым движением КА наряду с управляющими моментами побочно создаются также силы, изменяющие орбиту КА. Для борьбы с этими возмущающими силами был предусмотрен режим компенсации орбитальных возмущений. Управляя движением центра масс КА, в этом режиме происходит постоянное интегрирование линейных ускорений, создаваемых двигателями. При нахождении интегрального приращения скорости в интервале $[-1; 1 \text{ см/с}]$ управляющее воздействие не формируется, а при превышении интегрального приращения скорости границ разрешенного интервала управляющую скорость запишем следующим образом:

$$\Delta V_i = \int_{t_0}^t a(t) dt - \frac{\delta V_{cl}}{k_l}. \quad (2.3)$$

Здесь $a(t)$ – линейное ускорение, создаваемое всеми двигателями на текущем такте БЦВМ, t_0 – время начала режима компенсации орбитальных возмущений, δV_{cl} – ближайшая граница зоны нечувствительности по линейной скорости, $k_l \geq 1$ – коэффициент линейного гистерезиса. В случае отключения компенсации орбитальных возмущений управляющая скорость задается извне и рассчитывается в алгоритмах сближения или управления движением центра масс.

3. Реализация потребного изменения угловой скорости с помощью ДУ. Расположение двигателей МЛМ затрудняет возможность комбинирования совместного включения двигателей для создания управляющих воздействий в том или ином канале управления. В связи с этим при решении задачи реализации потребного изменения угловой скорости с помощью ДУ было предложено использовать для выбора оптимальной схемы включения двигателей алгоритм, основанный на методах линейного программирования [3].

В общем случае для N_{DO} произвольно расположенных двигателей, создающих моменты, не всегда совпадающие по направлению с каналами управления, задача линейного программирования (ЗЛП) формулируется следующим образом. Требуется найти времена включения произвольной комбинации двигателей для того, чтобы достичь по всем трем каналам управления угловым движением границ зоны нечувствительности по угловой скорости (рис. 2), затратив при этом минимальное количество топлива.

Поэтому необходимо минимизировать функционал:

$$Z = \sum_{n=1}^{N_{DO}} r_n \tau_n \rightarrow \min, \quad (3.1)$$

где r_n – секундный расход топлива для каждого из выбранных двигателей, τ_n – длительность работы каждого двигателя. При этом следует удовлетворить следующим шести условиям на приращение угловой скорости:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{xn} \tau_n \geq \Delta \omega_{down}^x, & \quad \sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{xn} \tau_n \leq \Delta \omega_{up}^x, & \quad \sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{yn} \tau_n \geq \Delta \omega_{down}^y, \\ \sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{yn} \tau_n \leq \Delta \omega_{up}^y, & \quad \sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{zn} \tau_n \geq \Delta \omega_{down}^z, & \quad \sum_{n=1}^{N_{DO}} \varepsilon_{zn} \tau_n \leq \Delta \omega_{up}^z, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\tau_n \geq 0, \quad n = \overline{1, N_{DO}}.$$

Здесь $\varepsilon_n = (\varepsilon_{xn}, \varepsilon_{yn}, \varepsilon_{zn})^T$ – угловое ускорение, создаваемое n -м двигателем, $\Delta \omega_{down} = (\Delta \omega_{down}^x, \Delta \omega_{down}^y, \Delta \omega_{down}^z)^T$ и $\Delta \omega_{max} = (\Delta \omega_{up}^x, \Delta \omega_{up}^y, \Delta \omega_{up}^z)^T$ – векторы расстояний по вертикали в каждом канале управления от текущего фазового состояния системы соответственно до нижней и верхней границ зоны нечувствительности.

Таким образом, задача выбора времен оптимального включения двигателей сводится к ЗЛП (3.1), (3.2). Решение этой задачи в бортовом алгоритме производится с помощью модифицированного симплекс-метода [13].

Аналогично угловому движению в первых версиях алгоритма выбора оптимального набора двигателей были учтены и условия для линейных перемещений, и ЗЛП решалась для 12 ограничений. Однако в дальнейшем от такого подхода пришлось отказаться ввиду чрезвычайной вычислительной сложности, а также для того, чтобы максимизировать линейные ускорения, создаваемые при управлении центром масс. Таким образом, был создан гибридный алгоритм, в котором длительности включения двигателей для управления движением центра масс рассчитываются по заранее заданным таблицам, а длительности включения оставшихся незадействованными – с помощью решения задачи (3.1), (3.2) и формируют управляющие воздействия в каналах управления угловым движением. Следует отметить, что такой подход к решению задачи выбора оптимальной схемы включения двигателей повышает отказоустойчивость системы, так как при поиске решения ЗЛП можно запретить использование конкретного двигателя при его отказе. В случае же расчета длительностей по заранее заданным таблицам аналогичная ситуация приводит либо к корректировке таблицы, либо к полной ее замене на другую таблицу.

Выбор типа разрешенных на текущем такте БЦВМ двигателей для управления движением вокруг центра масс производится путем анализа текущей угловой скорости и углового рассогласования. Если нет требований на перемещение центра масс и угловая скорость в течение некоторого времени находится в пределах 0.1 град/с, а угловое рассогласование – в пределах 1.2°, то используется набор двигателей ДТС, в противном случае применяются ДПС.

Полученные при помощи решения задачи (3.1), (3.2) длительности включения двигателей τ_n , $n = \overline{1, N_{DO}}$, если их максимальное значение превысило величину такта управления, составляющую 0.2 с, нормируются на это максимальное значение и результат масштабируется к величине такта управления путем умножения на его длительность. В результате при включении получившейся комбинации двигателей параметры движения КА будут изменяться в необходимом направлении. Ввиду небольших величин угловых скоростей вращения (при поворотах, не превышающих 3.5 град/с) нелинейность уравнений движения не окажет особого влияния на процесс управления, к тому же на следующем такте управления через 0.2 с задача (3.1), (3.2) будет решена заново с изменившимися начальными условиями.

4. Прогнозирование изменения параметров движения КА. После определения оптимальной на данном такте БЦВМ комбинации двигателей и длительностей их включения найденные длительности нормируются на длительность такта, затем дискретизируются с учетом характеристик конкретных двигателей. А именно необходимо соблюсти минимальное время работы двигателя и для обеспечения возможности их использования на следующем такте управления нужно выдержать паузу между включениями. Для ДПС минимальная длительность включения двигателей составляет 100 мс, а минимальная пауза между включениями двигателей ДПС – 100 мс. Для ДТС минимальная длительность включения двигателей равна 30 мс, а минимальная пауза между

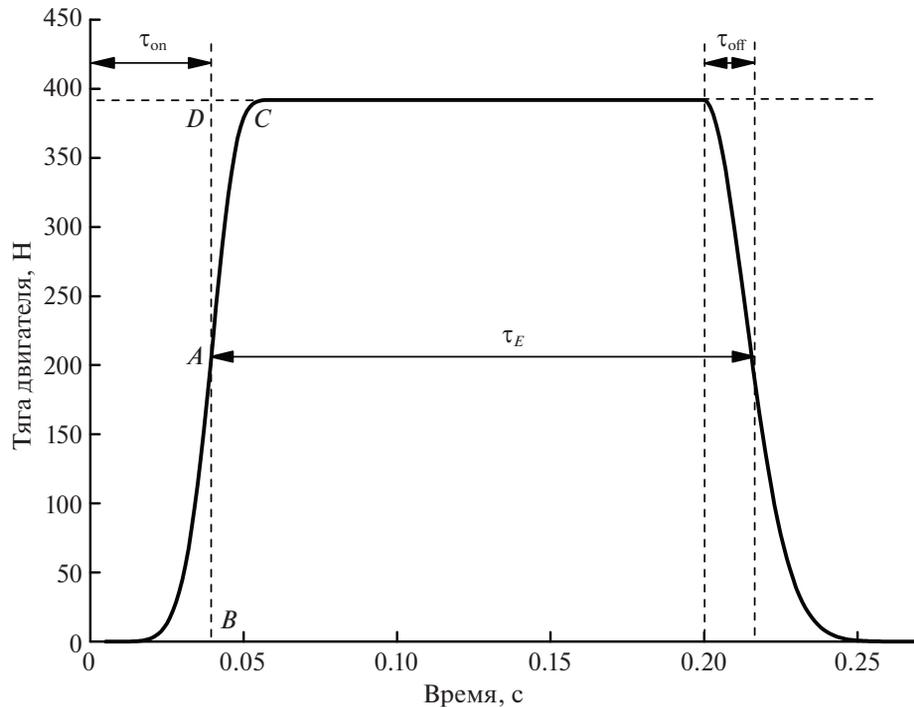


Рис. 3. Профиль тяги импульса двигателя

включениями двигателей ДТС — 30 мс. Управляющее воздействие на каждый двигатель формируется на основе вычисленной дискретизованной длительности его включения.

После задания управляющих воздействий на двигатели необходимо спрогнозировать изменение угловой и линейной скоростей от срабатывания двигателей. Реальный профиль импульса двигателя не является прямоугольным, а приблизительно выступает следующей функцией:

$$P(t) = \begin{cases} 0, & t < T_R, \\ P_{nom}(1 - \exp[-k_1(t - T_R)^{n_1}]), & T_R \leq t < \tau, \\ P_{nom} \exp[-k_2(t - \tau - T_R)^{n_2}], & t \geq \tau. \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь T_R — время “электрической” задержки прохождения команды на включение двигателя, P_{nom} — номинальная тяга двигателя, а коэффициенты k_1 , k_2 , n_1 , n_2 можно подобрать экспериментально. На рис. 3 изображен график тяги импульса длительностью 0,2 с. Проводить точный учет профиля импульса (4.1) ввиду ограниченности вычислительных возможностей БЦВМ не является целесообразным, поэтому задача прогнозирования изменения параметров движения КА решается путем расчета эффективной длительности работы двигателя в случае его включения на текущем такте БЦВМ по следующей формуле:

$$\tau_E = \tau - \tau_{on} + \tau_{off},$$

где τ_{on} — задержка включения двигателя, τ_{off} — задержка выключения двигателя. Задержки τ_{on} и τ_{off} рассчитываются из условий равенства интегралов:

$$\int_0^{\tau_{on}} P(t) dt = \int_{\tau_{on}}^{\tau_{0.99}} (P_{nom} - P(t)) dt \quad \text{и} \quad \int_{\tau}^{\tau_{off}} (P_{nom} - P(t)) dt = \int_{\tau_{off}}^{\tau_{0.01}} P(t) dt,$$

здесь $\tau_{0.99}$ и $\tau_{0.01}$ — длительность нарастания тяги до значения $0.99P_{nom}$ и время спада тяги до значения $0.01P_{nom}$ соответственно. Суть данных соотношений состоит в равенстве криволинейных треугольников OAB и ACD на рис. 3 при включении двигателя и аналогичных треугольников при его выключении.

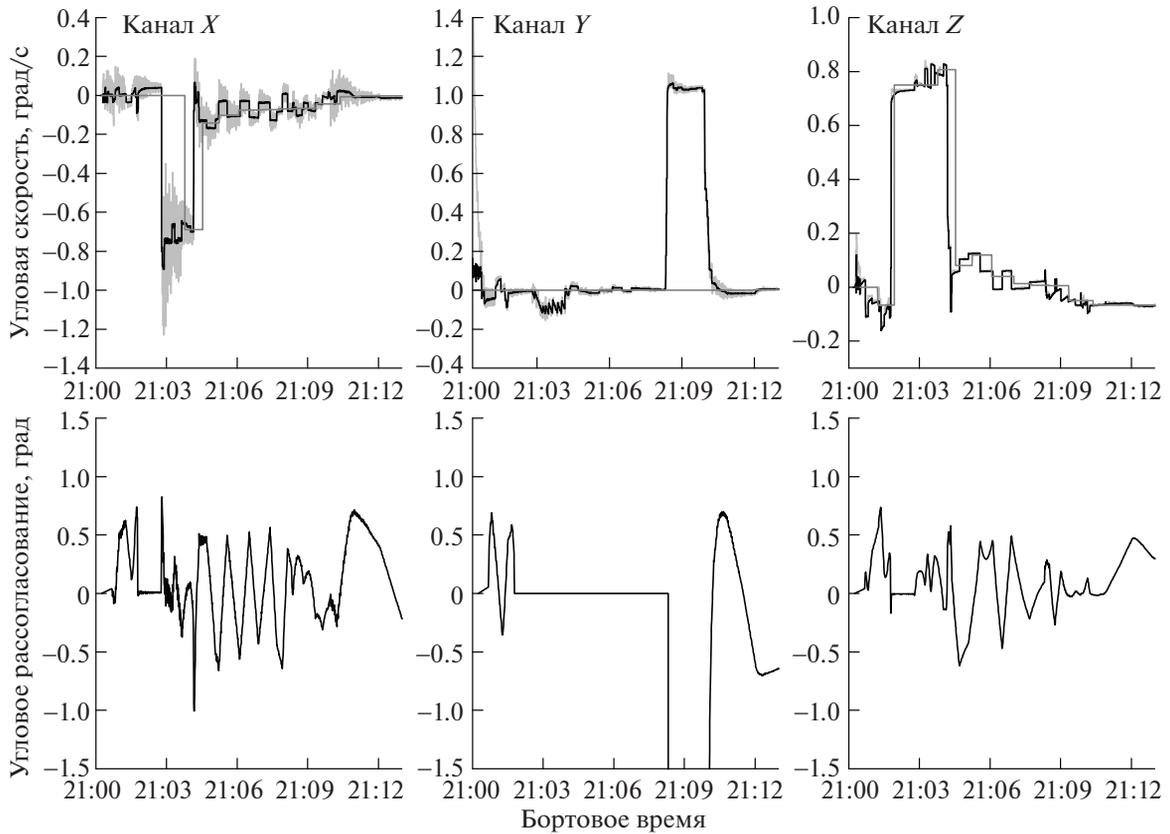


Рис. 4. Поведение угловой скорости и углового рассогласования в процессе построения орбитальной системы координат

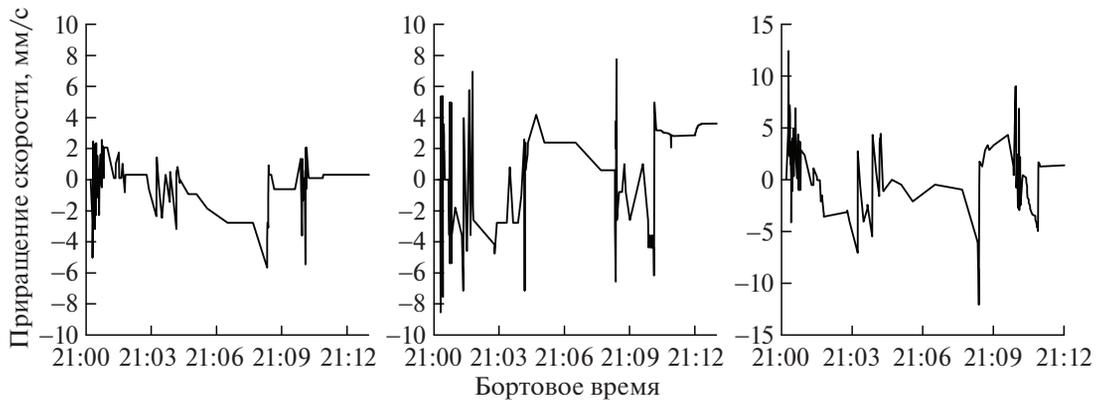


Рис. 5. Поведение линейной скорости в процессе построения орбитальной системы координат

После расчета эффективных длительностей работы каждого двигателя вычисляется прогнозируемое приращение за такт управления угловой $\Delta\omega(t)$ и линейной $\Delta v(t)$ скоростей:

$$\Delta v(t) = \sum_{n=1}^{N_{DO}} \mathbf{a}_n \tau_{En}(t), \quad \Delta\omega(t) = \sum_{n=1}^{N_{DO}} \boldsymbol{\epsilon}_n \tau_{En}(t),$$

где \mathbf{a}_n и $\boldsymbol{\epsilon}_n$ – линейное и угловое ускорения, создаваемые каждым двигателем.

5. Результаты численного моделирования. На рис. 4 и 5 изображены поведение угловых скоростей, угловых рассогласований и линейных скоростей в каналах крена, рысканья и тангажа при

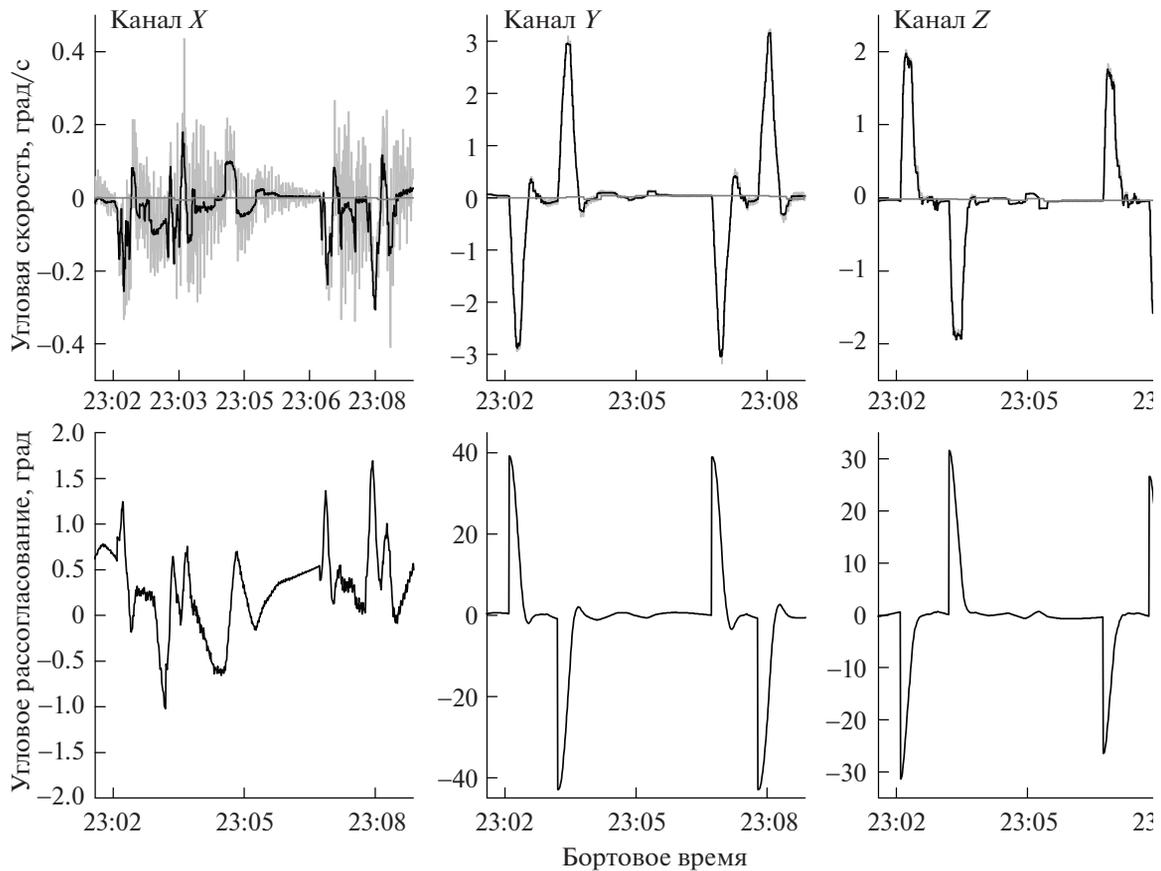


Рис. 6. Поведение угловой скорости и углового рассогласования в процессе коррекции орбиты

построении орбитальной системы координат. Данные были получены в результате моделирования сближения МЛМ с МКС на наземном комплексе обработки программного обеспечения. В состав стенда входят: реальная бортовая БЦВМ с прошитым бортовым программным обеспечением; наземная модель динамики и бортовых систем; модели аппаратуры системы управления движением и внешней среды; модель упругих колебаний конструкции КА; сервисное программное обеспечение. Для управления использовался полный набор из 42 двигателей. Моделировались профили импульсов, согласно (4.1), задержки измерений и исполнения команд, ошибки установки и тяг двигателей. На графике поведения угловой скорости (рис. 4) черной линией показана оценка угловой скорости $\hat{\omega}_i(t)$, $i = x, y, z$; темно-серой линией – программная угловая скорость ω_{bi} , $i = x, y, z$; светло-серой линией – измерения угловой скорости, полученные с датчика угловой скорости $\omega_i(t)$, $i = x, y, z$. В промежуток времени с 21:08 по 21:10 выполнялся разворот вокруг оси Y на 180° . Из приведенных графиков видно, что в процессе управления угловое рассогласование не превышает 0.8° , а при завершении разворота формирование управляющего воздействия, согласно (2.2), приводит к плавному изменению угловой скорости и углового рассогласования и минимизирует перерегулирование параметров углового движения КА. Компенсация орбитальных возмущений, согласно (2.3), приводит к тому, что приращение линейной скорости, изображенное на рис. 5, остается в пределах допустимых границ. Расход рабочего тела за режим составил 9.05 кг.

При коррекции орбиты с помощью маршевого двигателя аппарат необходимо повернуть таким образом, чтобы вектор тяги данного двигателя совпал с направлением требуемого приращения скорости КА, его положение вокруг вектора тяги может быть при этом произвольным. Поэтому традиционно используется кратчайший поворот из текущего положения, совмещающий вектор тяги маршевого двигателя с вектором необходимого приращения скорости. Результирующее положение для выдачи корректирующего импульса называется базисом стрельбы. На рис. 6 изображено поведение угловых скоростей и угловых рассогласований в процессе коррекции

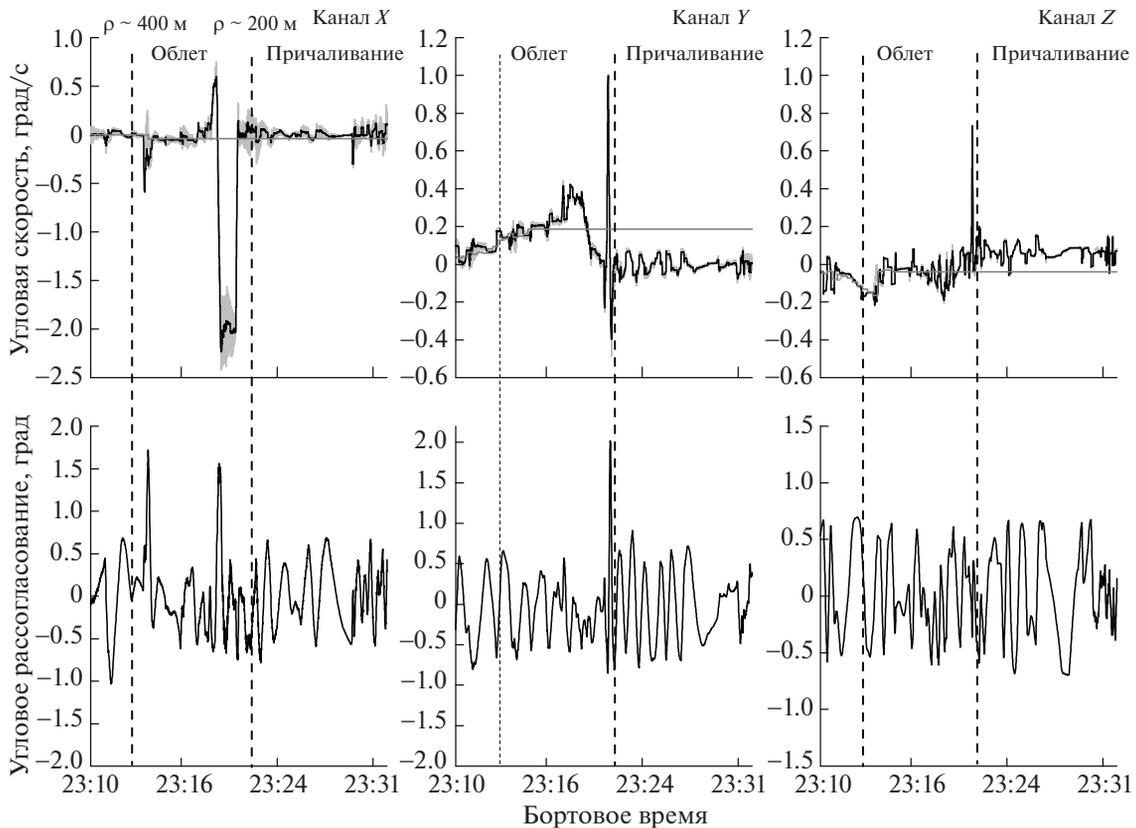


Рис. 7. Поведение угловой скорости и углового рассогласования в процессе облета и причаливания к МКС

орбиты на ДКС. Производился поворот в базис стрельбы для коррекции орбиты с помощью ДКС, на заданное время включался маршевый двигатель. После его выключения осуществлялся обратный поворот в предыдущую ориентацию, далее вышеописанные операции повторялись для выдачи второго импульса. Как и на рис. 4, на графике поведения угловой скорости рис. 6 черной линией показана оценка угловой скорости $\hat{\omega}_i(t)$, $i = x, y, z$; темно-серой линией – программная угловая скорость ω_{bi} , $i = x, y, z$; светло-серой линией – измерения угловой скорости, полученные с датчика угловой скорости $\omega_i(t)$, $i = x, y, z$.

Рисунок 7 иллюстрирует поведение угловых скоростей и угловых рассогласований на ближнем участке сближения (относительная дальность < 1000 м) вплоть до стыковки с МКС. На графике поведения угловой скорости (рис. 7), черной линией показана оценка угловой скорости $\hat{\omega}_i(t)$, $i = x, y, z$; темно-серой линией – программная угловая скорость ω_{bi} , $i = x, y, z$; светло-серой линией – измерения угловой скорости, полученные с датчика угловой скорости $\omega_i(t)$, $i = x, y, z$. Следует отметить, что помимо поддержания заданной ориентации на ближнем этапе сближения происходит активное управление движением центра масс МЛМ. Из приведенных данных видно, что в процессе облета и причаливания угловое рассогласование в основном не превышает 0.8° . Расход рабочего тела на облет и причаливание составил 149.3 кг.

6. Вычислительная сложность алгоритма. Отдельно хотелось бы остановиться на обсуждении вычислительных ресурсов, требующихся для работы алгоритма. БЦВМ МЛМ состоит из трех независимых вычислительных каналов. Каждый из этих вычислительных каналов представляет собой связку трех уровней Avionix+FML+Application Level (AL), где программное обеспечение системы управления МЛМ загружается лишь в уровень AL, он же Прикладной Уровень. При этом AL использует специально разработанный Европейским космическим агентством 32-битный процессор ERC32, являющийся модификацией процессора SPARC ver.6.0. Для целочисленных операций ERC32 применяет Integer Unit, а для операций с плавающей запятой – сопроцессор Floating Point Unit. Тактовая частота процессора равна 14 МГц.

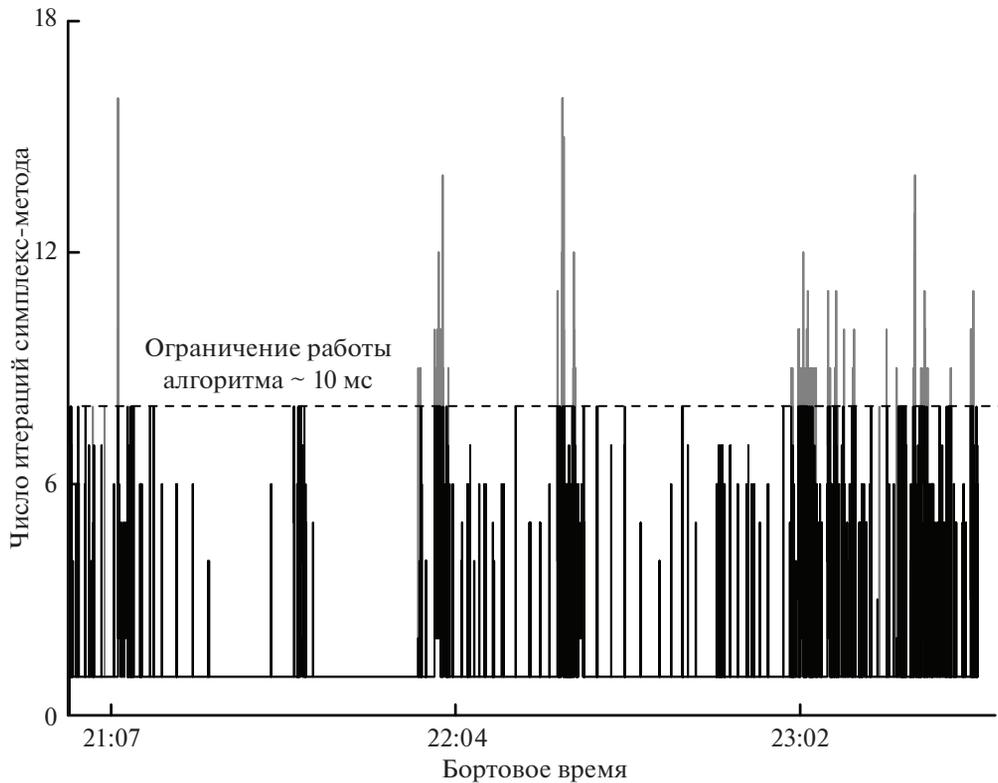


Рис. 8. Распределение вычислений между тактами управления

Частота работы системы управления движением и навигации МЛМ составляет 5 Гц. Таким образом, задачи определения потребного изменения скорости, реализации потребного изменения угловой скорости с помощью ДУ путем выбора оптимальной схемы включения двигателей и прогнозирование изменения параметров движения КА необходимо решать на каждом такте, равном 200 мс. Ввиду вычислительной сложности алгоритма для данного процессора было принято решение ограничить время его работы на каждом такте БЦВМ путем ограничения количества итераций симплекс-метода, рассчитываемых в течение одного такта управления (не более восьми итераций). При этом вычисление оставшихся итераций будет произведено на следующем такте. На тех тактах управления, где расчет не был закончен, управляющее воздействие на двигатели не формируется. Таким образом, удалось добиться того, что длительность вычислений, необходимых для работы алгоритма на каждом такте управления, не превышает 10 мс, а загрузка процессора на наиболее сложном с вычислительной точки зрения ближнем участке сближения не превышала 65%.

На рис. 8 представлен график, отображающий процесс распределения вычислений между тактами управления на протяжении всего режима сближения с МКС, начиная с дальности 500 км. На этом рисунке серой линией показано общее количество итераций симплекс-метода, необходимое для решения задачи выбора оптимальной схемы включения двигателей, а черной линией — количество итераций симплекс-метода которое было рассчитано на текущем такте управления. Пунктирной линией изображено ограничение по количеству итераций, рассчитываемых на каждом такте управления. Из графика видно, что на всем участке сближения процесс решения задачи выбора оптимальной схемы включения двигателей не затягивался более двух тактов, что является приемлемым для работы системы управления. Следует отметить, что распределение вычислений между тактами управления наблюдалось только на участках интенсивной работы двигателей: повороты, ближнее сближение, а в подавляющем количестве случаев (более 92%) задача линейного программирования решалась за один такт управления.

7. Результаты летно-конструкторских испытаний. Описанный в статье алгоритм управления работал на всех динамических операциях, выполняемых МЛМ в течение своего девятисуточного полета к МКС. К таким операциям относятся все режимы, где работает система управления движением и выдаются управляющие воздействия на исполнительные органы. К сожалению, из-за особенностей

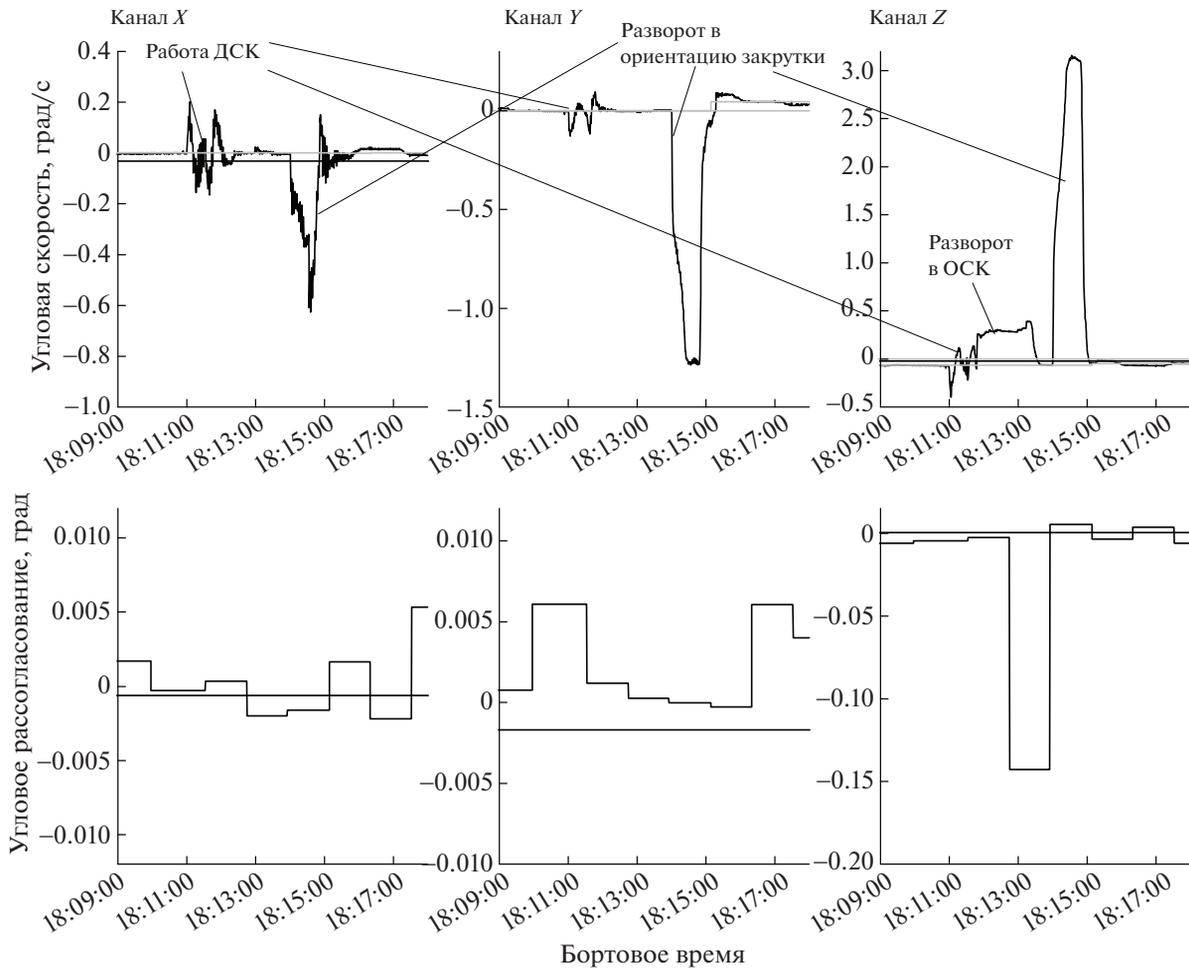


Рис. 9. Поведение угловой скорости и углового рассогласования в процессе коррекции орбиты с использованием ДКС

планирования процесса управления полетом с использованием наземных средств большинство таких операций начинались вне зоны связи наземных измерительных пунктов, что сопряжено с отсутствием телеметрической информации об их исполнении бортовыми системами. Однако часть наиболее критически важных операций все-таки планируются в зоне связи, и телеметрия их выполнения показала правильность выбранного алгоритма управления и подтвердила преимущества применяемой концепции решения задачи формирования управляющих сигналов на двигатели ориентации.

В частности, одной из таких операций является построение начальной ориентации. При выполнении этого режима управления крайне положительную роль сыграла заложенная в алгоритм концепция возможности автоматической реконфигурации системы используемых двигателей ориентации. Дело в том, что сразу после отделения МЛМ от третьей ступени ракеты-носителя в течение 3 мин происходит раскрытие различных элементов конструкции и завершается подготовка к работе ДУ. Далее включается система управления движением, которая проводит гашение угловых скоростей, сформировавшихся после разделения. Затем по циклограмме полета запускается тест двигателей ДПС/ДТС, который формирует кратковременные включения каждого из 40 указанных двигателей, как попарно, так и индивидуально. После чего по результатам сравнения изменения реальной угловой скорости МЛМ с теоретическим делается заключение о работоспособности того или иного двигателя. Ввиду того, что большинство двигателей включались первый раз и на короткие интервалы времени (от 0.4 до 0.8 с), топливо по трубопроводам, возможно из-за наличия небольших воздушных пробок, не всегда успевало дойти до камеры сгорания и часть двигателей показала тягу значительно меньше ожидаемой величины. А также следует отметить, что в канале крена присутствуют довольно значительные колебания, вызванные упругостью солнечных батарей МЛМ. Все эти обстоятельства привели к тому,

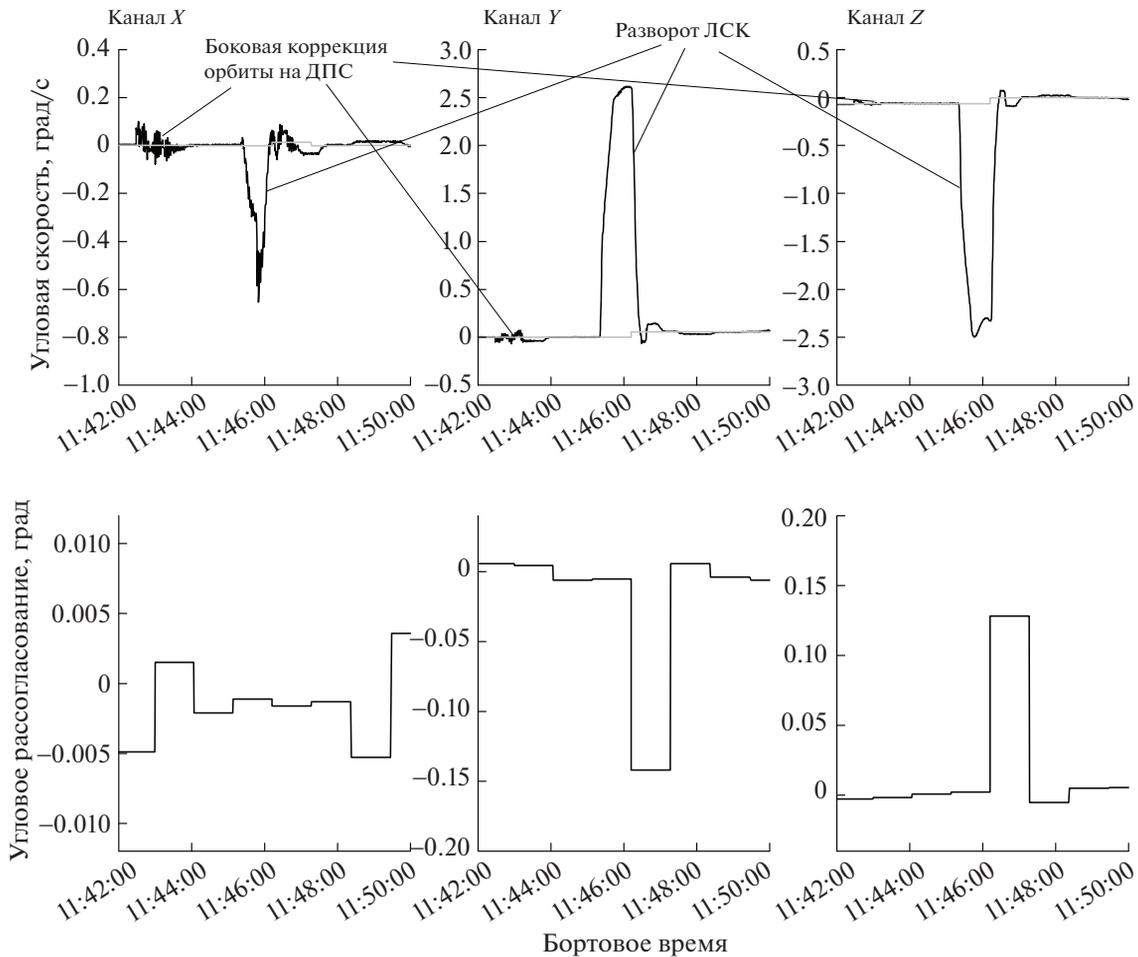


Рис. 10. Поведение угловой скорости и углового рассогласования в процессе боковой коррекции орбиты с использованием ДПС

что в процессе данного теста система управления запретила использование 13 двигателей (7 ДПС и 6 ДТС), которые не прошли тестирование. Однако, несмотря на это, система управления, используя оставшийся набор двигателей, сумела обеспечить последующий поворот в орбитальную систему координат по прогнозу [5, 6] и последующее поддержание данной ориентации в течение одного витка. Вместе с тем в такой же конфигурации осуществлялось последующее построение орбитальной ориентации с использованием показаний звездных датчиков и реализация ориентации закрутки на Солнце. При формировании закрутки на Солнце аппарат разворачивается таким образом, чтобы ось с большим моментом инерции (ось Y) совпала с направлением на Солнце, и после чего закручивается вокруг данного направления с угловой скоростью 2 град/с. Затем система управления движением отключается. Данный режим реализуется для обеспечения постоянного энергоприхода на солнечные батареи в процессе неуправляемого движения модуля до его следующего вхождения в зону связи наземных измерительных пунктов на следующие сутки полета. Впоследствии по анализу телеметрической информации и после проведения дополнительного теста было сделано заключение о работоспособности всех двигателей и их использование в контуре управления было разрешено.

Также в зоне связи наземных измерительных пунктов проводилась одна из коррекций орбиты с помощью ДКС и боковая коррекция орбиты, обеспечивающая безопасность траектории сближения с МКС с использованием ДПС. На рис. 9 представлены графики поведения угловой скорости и углового рассогласования в процессе коррекции орбиты с использованием ДКС с последующим поворотом в ориентацию закрутки на Солнце. На рис. 10 приведены графики поведения угловой скорости и углового рассогласования в процессе коррекции орбиты с использованием ДПС с последующим поворотом в ориентацию лучевой системы координат (ЛСК) (ориентация антеннами радиосистемы «Курс» активного корабля на прогнозируемое положение антенн пассивного объекта, к которому проводится сближение). На графиках

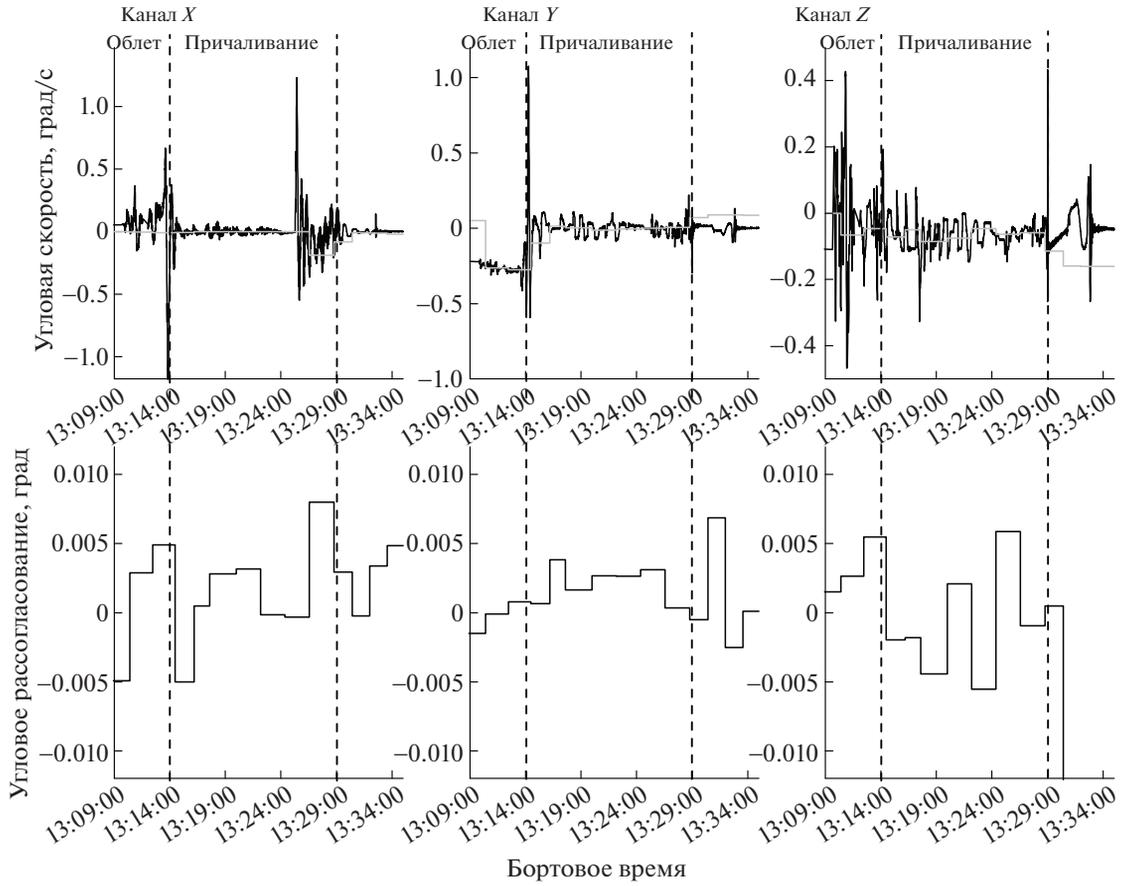


Рис. 11. Поведение угловой скорости и углового рассогласования в процессе облета и причаливания к МКС

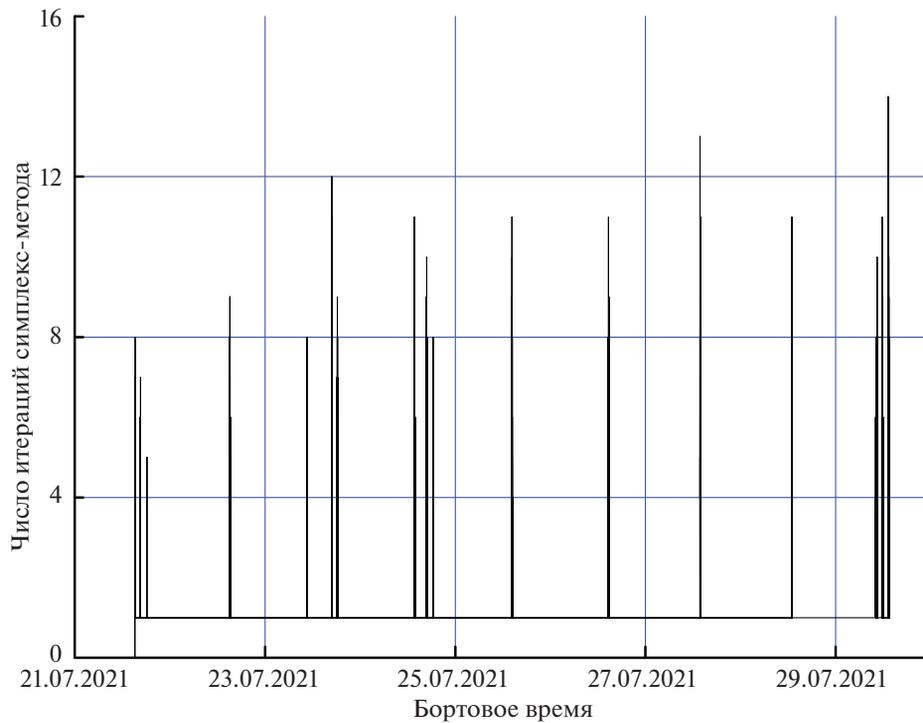


Рис. 12. Количество итераций симплекс-метода, потребовавшееся для решения задачи линейного программирования в процессе автономного полета МЛМ

серой линией показано поведение программной скорости вращения приборного базиса, а черной линией – измерения угловой скорости. Представленные графики демонстрируют корректность работы контура стабилизации и отсутствие перерегулирований при поворотах. К сожалению, информация об угловом положении поступала достаточно редко, в отличие от информации об угловой скорости, что и определяет характер ее поведения на графиках.

На рис. 11 представлено поведение угловой скорости и углового рассогласования на наиболее ответственном участке полета: окончании процесса облета и причаливания к МКС. На ближнем этапе сближения происходит активное управление движением центра масс МЛМ. Несмотря на это, графики рис. 11 демонстрируют корректное выполнение угловых маневров, требующихся для осуществления сближения с МКС. Из приведенных данных видно, что в процессе облета и причаливания угловое рассогласование в основном не превышает 0.8° , что согласуется с результатами математического моделирования.

На рис. 12 представлено поведение количества итераций симплекс-метода, потребовавшихся для решения задачи управления с начала автономного полета и до стыковки с МКС. К сожалению, данная информация также поступала достаточно редко. Однако видно, что в основном задача линейного программирования всегда решалась за один такт управления и достаточно редко на ее решение требовалось до двух тактов, что также согласуется с результатами математического моделирования.

Заключение. Рассмотрен алгоритм управления движением МЛМ с помощью ДУ на автономном участке полета. Алгоритм обеспечивает одновременное управление как движением центра масс МЛМ, так и движением вокруг центра масс. Приведен только основной вариант управления движением МЛМ с использованием всего набора двигателей и не описаны нештатные ситуации. Представленные результаты моделирования движения КА на наземном комплексе обработки бортового программного обеспечения и телеметрическая информация, полученная в ходе летно-конструкторских испытаний предложенного алгоритма, при автономном полете МЛМ доказывают его работоспособность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев А.И., Островский М.А., Потапов А.Н. Вклад ученых Российской академии наук в становление и развитие космической физиологии // Физиология человека. 2020. Т. 46. № 1. С. 5–12.
2. Сумароков А.В. О бортовом алгоритме усреднения параметров орбитального движения Международной космической станции в эксперименте ICARUS // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 102–111.
3. Беляев М.Ю., Десинов Л.В., Караваев Д.Ю. и др. Особенности проведения и использования результатов съемок земной поверхности, выполняемой экипажами Российского сегмента МКС // Космическая техника и технологии. 2015. № 1. С. 17–30.
4. Сумароков А.В. О наведении камеры высокого разрешения, установленной на борту МКС, посредством двухосной поворотной платформы // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2016. № 4. С. 85–97.
5. Борисенко Н.Ю., Сумароков А.В. Об ускоренном построении орбитальной ориентации грузовых и транспортных кораблей серий “Союз МС” и “Прогресс МС” // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 5. С. 131–141.
6. Борисенко Н.Ю., Борисенко Ю.Н., Платонов В.Н. и др. Анализ статистики ускоренного построения орбитальной системы координат транспортных пилотируемых и грузовых кораблей и методы повышения точности // Космическая техника и технологии. 2018. № 2. С. 58–65.
7. Сумароков А.В. Об управлении движением Многоцелевого лабораторного модуля с помощью реактивных двигателей на автономном участке полета // Навигация и управление движением. Матер. XIV конф. молодых ученых “Навигация и управление движением” // Под. общ. ред. В.Г. Пешехонова. СПб.: ГНЦ РФ ОАО “Концерн “ЦНИИ “Электроприбор”, 2012. С. 157–164.
8. Гладышев А.Д., Сумароков А.В. Алгоритмы оценки параметров движения космического аппарата // Навигация и управление движением. Матер. XV конф. молодых ученых “Навигация и управление движением” // Под. общ. ред. В.Г. Пешехонова. СПб.: ГНЦ РФ ОАО “Концерн “ЦНИИ “Электроприбор”, 2013. С. 202–209.
9. Бранец В.Н., Севастьянов Н.Н., Федулов Р.В. Лекции по теории систем ориентации, управления движением и навигации. Учебное пособие / Под общ. ред. Н.Н. Севастьянова. Томск: Томский государственный ун-т, 2013. 313 с.
10. Микрин Е.А., Тимаков С.Н., Зыков А.В. и др. Опыт и перспективы создания бортовых алгоритмов управления движением космических аппаратов // Вестн. РФФИ. 2017. № 3 (95). С. 23–45.
11. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 650 с.
12. Бранец В.И., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
13. Банди Б. Основы линейного программирования. М.: Радио и связь, 1989. 176 с.

УДК 621.86/.87

УПРАВЛЕНИЕ МОБИЛЬНЫМ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИМ КОМПЛЕКСОМ ДЛЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

© 2023 г. М. Алхаддад^{а,*}, В. Г. Чашухин^{б,**}

^аМФТИ, Москва, Россия

^бИПМех РАН, Москва, Россия

*e-mail: alkhaddad.m@phystech.edu

**e-mail: ketlk@mail.ru

Поступила в редакцию 18.11.2022 г.

После доработки 24.11.2022 г.

Принята к публикации 05.12.2022 г.

Рассмотрен робототехнический комплекс, состоящий из транспортно-манипуляционной платформы и установленного на ней робота вертикального перемещения. Платформа предназначена для перемещения робота по горизонтальной поверхности и его установки на вертикальную поверхность. Описывается практическая реализация алгоритма управления платформой, позволяющего автоматизировать процесс установки робота на вертикальную поверхность.

DOI: 10.31857/S0002338823020038, EDN: JGFQJB

Введение. Данное исследование мотивировано разработкой в лаборатории робототехники и мехатроники Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук мобильного робота для обслуживания вертикальных поверхностей. Робот удерживается на вертикальной поверхности за счет разрежения воздуха в полости, отделяющей днище робота от поверхности перемещения. На рис. 1 изображен лабораторный образец робота и показаны его основные компоненты. Робот состоит из жесткого основания 1 круглой формы, на котором крепятся два колеса 2, управляемые независимыми электроприводами 3, и центробежный вакуумный насос 4. Оси вращения колес расположены на одной прямой, проходящей через центр основания. Колеса снабжены шинами, материал которых подбирается так, чтобы обеспечить максимально высокий коэффициент трения колес о поверхность перемещения. Под днищем основания имеется полость 5, в которой создается разрежение воздуха. Благодаря этому робот избыточным внешним атмосферным давлением прижимается к поверхности перемещения с силой, которая позволяет создать трение между колесами и поверхностью, достаточное для удержания робота на поверхности при заблокированных колесах и его движения при включенных приводах. Исследованиям динамических свойств робота, определению состава сенсоров и разработке алгоритмов управления посвящены работы [1–3].

Для описанного робота создана транспортно-манипуляционная платформа, которая предназначена для доставки робота к месту использования и приведения его в рабочее положение на обслуживаемой вертикальной поверхности. Робототехнический комплекс изображен на рис. 2 и состоит из робота вертикального перемещения 1, специализированного манипулятора 2 и колесной транспортной платформы 3. Робот вертикального перемещения крепится к выходному звену манипулятора посредством специализированного крепления. В транспортном положении манипулятор находится в сложенном виде. Перед подходом платформы к обслуживаемой вертикальной поверхности, поворотом выходного звена робот приводится в положение, в котором днище и колеса обращены к поверхности. Затем робот в автоматическом режиме подводится к поверхности и включает вакуумный насос. Робот фиксируется на вертикальной поверхности, освобождается от закрепления на манипуляторе и начинает функционировать независимо от платформы. В статье рассматривается реализация управления движением транспортно-манипуляционной платформы с учетом изменения или неопределенности набора параметров. Управление системой разделяется на управление движением манипулятора и движением колесной платформы.

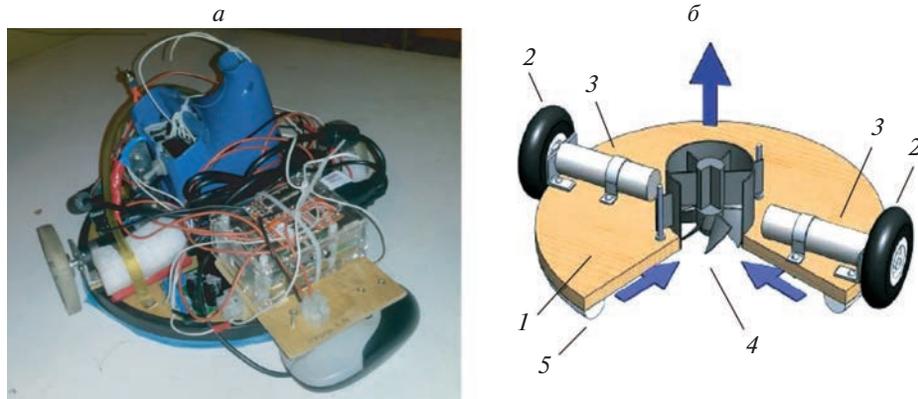


Рис. 1. Робот вертикального перемещения (а) и его основные компоненты (б)

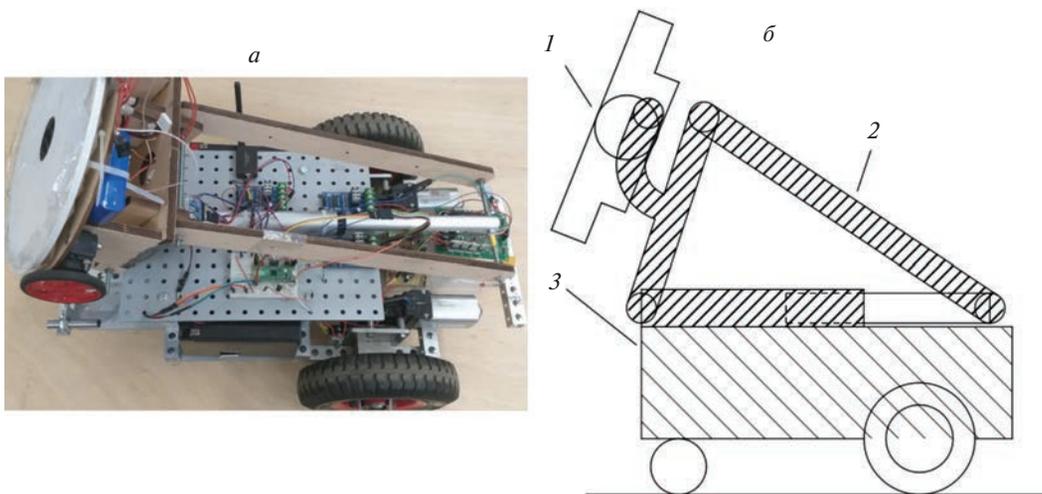


Рис. 2. Транспортно-манипуляционное устройство

Для управления движением манипулятора используется способ, предложенный в [4]. Цель управления – приведение выходного звена манипулятора в вертикальное положение с достаточной степенью точности с учетом изменений в параметрах системы, таких, как масса и момент инерции выходного звена (эти параметры зависят от объекта манипулирования, которым нагружен манипулятор, и от способа его крепления к манипулятору). Данная операция не требует высокого быстродействия, но требует надежности. Поэтому предлагается простой способ управления, обеспечивающий прохождение системы через фиксированную последовательность промежуточных положений со стабилизацией в этих положениях.

Адаптивные алгоритмы управления движением транспортной платформы предложены в [5]. Адаптивные алгоритмы отслеживания траектории движения при наличии параметрических неопределенностей, базирующиеся на кинематических уравнениях, представлены в [6–9]. Робастные адаптивные регуляторы, такие, как адаптивные регуляторы скользящего режима, предназначенные для компенсации неопределенностей в конструкции системы и внешних возмущений, исследованы в [10]. Адаптивные нейронные сети, преимущество которых в том, что они не требуют динамической модели робота, обсуждаются в [11]. В [12] для мобильного робота разработана и реализована эталонная модель адаптивного управления, включающая известные и неизвестные динамические параметры. Использование этой модели позволяет увеличить скорость адаптации. Большинство существующих адаптивных регуляторов учитывают неопределенность геометрических или инерционных параметров мобильного робота и не учитывают неидеальности исполнительных механизмов, которые могут существенно влиять на точность выполнения роботом программных движений.

В [5] предлагается схема адаптивного управления для отслеживания программных движений робота, которая учитывает параметрические неопределенности в конструкции робота, а также

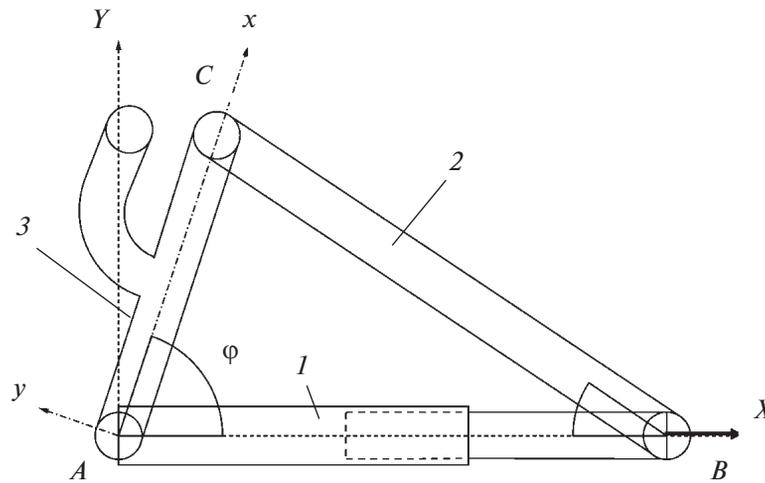


Рис. 3. Схема специализированного манипулятора

неидеальности исполнительных механизмов. Работа алгоритма управления продемонстрирована с помощью компьютерного моделирования [5]. В данной статье обсуждается реализация алгоритмов управления движением манипулятора и мобильной колесной платформы, представленных в [4, 5] соответственно. Алгоритмы управления реализованы с использованием микроконтроллера и датчиков: гироскопа, оптоэлектронных датчиков скорости вращения, лазерных и фотоэлектрических датчиков расстояния. Реализация управления платформой разделена на несколько этапов.

1. Платформа по заранее спланированной траектории подъезжает к обслуживаемой поверхности на дистанцию (1–2 м), с которой начинается надежная работа лазерных датчиков расстояния.
2. Платформа поворачивается на месте так, чтобы выходное звено манипулятора с роботом вертикального перемещения было ориентировано на вертикальную поверхность.
3. Манипулятор приводит робот в вертикальное положение из транспортного.
4. Платформа приближается к поверхности в автоматическом режиме, при этом корректируется ориентация робота относительно поверхности на основе показания лазерных датчиков расстояния.
5. При приближении платформы к вертикальной поверхности на расстояние около 0.005 м фотоэлектрический датчик подает сигнал о том, что робот находится достаточно близко к поверхности, запускается прижимное устройство робота вертикального перемещения, он освобождается от зацепов манипулятора и начинает движение вдоль поверхности.

1. Управление движением манипуляционного механизма. Схема манипулятора изображена на рис. 3. Манипулятор состоит из приводного звена AB с изменяемой длиной и двух пассивных звеньев AC и BC , длины которых неизменны; звено AC является выходным для манипулятора, к нему прикрепляется объект манипулирования (в данном случае робот вертикального перемещения). Звенья соединены цилиндрическими шарнирами, оси которых горизонтальны и параллельны друг другу. Шарнир A жестко связан с платформой, шарнир B также располагается на платформе, но не связан с ней жестко, его ось может перемещаться относительно платформы при изменении длины приводного звена.

В [4] предложен простой способ управления углом φ между звеньями AC и AB . Этот способ обеспечивает прохождение системы через фиксированную последовательность промежуточных положений со стабилизацией системы в этих положениях. Промежуточные положения расположены достаточно близко друг к другу, чтобы управление переходом между двумя последовательными положениями можно было рассчитать на основе линейного уравнения движения вблизи положения равновесия, к которому система приводится на следующем этапе. В итоге значения управляющего сигнала изменяются в соответствии с положением выходного звена и задаются выражением

$$u_i = -K_i e_i - D_i \dot{e}_i - I_i \int_0^t e_i(\xi) d\xi, \quad K_i > 0, \quad D_i > 0, \quad I_i > 0, \quad i = \overline{0,15}, \quad (1.1)$$

Таблица 1. Коэффициенты ПИД-регулятора при каждом положении равновесия

Коэффициенты ПИД-регулятора						
φ_i , [rad]	без нагрузки			с нагрузкой		
	K_i	I_i	D_i	K_i	I_i	D_i
0.87	32.06	58.06	3.96	55.03	99.66	6.79
0.92	31.81	57.61	3.93	53.95	97.71	6.66
0.97	31.69	57.41	3.91	53.11	96.27	6.56
1.02	31.71	57.43	3.91	52.65	95.29	6.49
1.07	31.82	57.63	3.93	52.28	94.70	6.45
1.12	32.02	57.99	3.95	52.14	94.44	6.44
1.17	32.29	58.49	3.95	52.17	94.49	6.44
1.22	32.64	59.11	4.03	52.35	94.81	6.46
1.27	33.04	59.85	4.08	52.67	95.39	6.50
1.32	33.51	60.69	4.13	53.11	96.20	6.56
1.37	34.03	61.63	4.20	53.69	97.24	6.63
1.42	34.60	62.66	4.27	54.38	98.49	6.71
1.47	35.21	63.78	4.35	55.18	99.95	6.81
1.52	35.87	64.98	4.43	56.18	101.6	6.93
1.57	36.58	66.26	4.52	57.17	103.5	7.05

где e_i – сигнал ошибки между углом выходного звена φ и промежуточным положением i :

$$e_i = \varphi - \varphi_i. \quad (1.2)$$

Предложен набор промежуточных значений угла φ_i между двумя состояниями выходного звена – транспортным и рабочим положениями вертикального перемещения робота. Коэффициенты регулятора и значение опорного угла в каждом промежуточном положении задаются в табл. 1.

2. Реализация алгоритма управления манипуляционным механизмом. Алгоритм управления манипулятором реализован с помощью программы микроконтроллера RP Pico с периодом дискретизации 100 мс, гироскопа MPU6050 и линейного привода постоянного тока SL14. Алгоритм управления соответствует блок-схеме на рис. 4. Первое значение угла φ_i и соответствующие ему значения коэффициентов K_i , I_i , D_i выбираются из таблицы. Угол φ рассчитывается с использованием гироскопа. Затем вычисляется сигнал ошибки по формуле (1.2). Слагаемые с производной и интегралом в (1.1) определяются численно, начальные значения e_i предполагаются равными нулю. Управляющий сигнал, вычисленный по формуле (1.1), подается на линейный привод. Когда сигнал ошибки становится достаточно малым по сравнению с точностью показаний гироскопа, выполняется переход к новому значению для угла φ_i и коэффициентов из таблицы. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто желаемое значение угла выходного звена.

На рис. 5 и 6 показаны экспериментально полученные зависимости угла выходного звена как функции времени для ненагруженного манипулятора и манипулятора, нагруженного роботом вертикального перемещения. Из этих рисунков видно, что точность позиционирования манипулятора в конечном положении при предложенном алгоритме управления практически не зависит от его нагрузки.

3. Управление движением транспортной платформы. Рассматривается известная модель колесного робота (рис. 7) с двумя приводными колесами 1, 2, расположенными на одной оси, которая закреплена на жесткой платформе 3. Кроме приводных колес робот снабжен пассивным ролевым колесом 4, что обеспечивает роботу трехточечную опору. Кроме того, робот содержит оптоэлектронные датчики скорости вращения колес 5, гироскоп 6, релейные фотоэлектрические датчики расстояния 7 и лазерные датчики расстояния 8. Предполагается, что трение в осях ролевого колеса отсутствует, а его масса равна нулю. Приводные колеса считаются абсолютно жесткими дисками, плоскости которых перпендикулярны осям вращения колес. Считается, что платформа движется по горизонтальной плоскости без проскальзывания приводных колес. Введем три правые системы координат: неподвижную (инерциальную) систему координат $Oxyz$, систему координат $O'x'y'z'$, жестко связанную с платформой, и системы координат $O_1x_1y_1z_1$, $O_2x_2y_2z_2$, жестко связанные с колесами. Оси z и z' направим вертикально вверх, точку O' поместим в

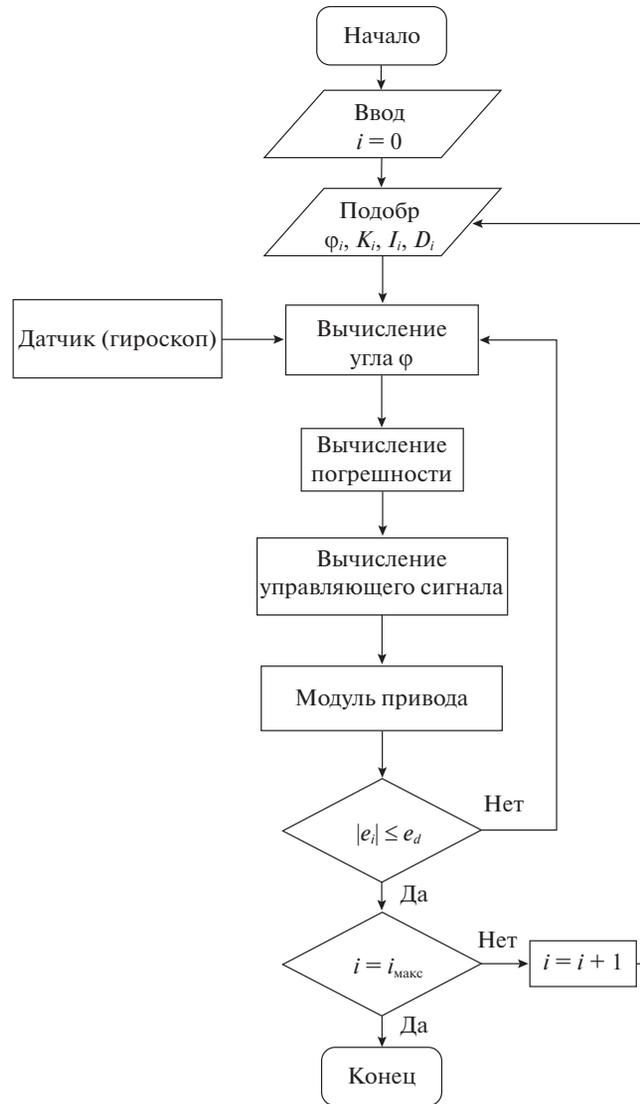


Рис. 4. Блок-схема алгоритма управления манипулятором

середине отрезка, соединяющего центры колес, точки O_1 и O_2 расположим в пересечениях оси колес с их плоскостями, ось x' направим горизонтально от точки O' к рояльному колесу, оси y_1 и y_2 систем координат, связанных с колесами, направим параллельно оси y' системы координат, связанной с платформой. Будем предполагать, что центр масс платформы C находится на оси x' .

В качестве обобщенных координат, определяющих конфигурацию системы, будем использовать декартовы координаты x и y точки O' в инерциальной системе отсчета, угол φ между осями x и x' и углы θ_1 и θ_2 поворота колес 1 и 2 относительно платформы. Номером 1 помечено колесо, расположенное в “положительном” полупространстве относительно плоскости $x'z'$; колесо с номером 2 находится в “отрицательном” полупространстве. Положительным считается полупространство, в котором лежит положительная координатная полуось y' . Согласно [5], уравнения скорости \dot{x} , \dot{y} и $\dot{\varphi}$ как функции угла φ поворота платформы и угловых скоростей вращения колес относительно платформы $\dot{\theta}_1$ и $\dot{\theta}_2$ задаются формулами:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \varphi, \\ \dot{y} &= a_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= a_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1), \end{aligned} \quad (3.1)$$

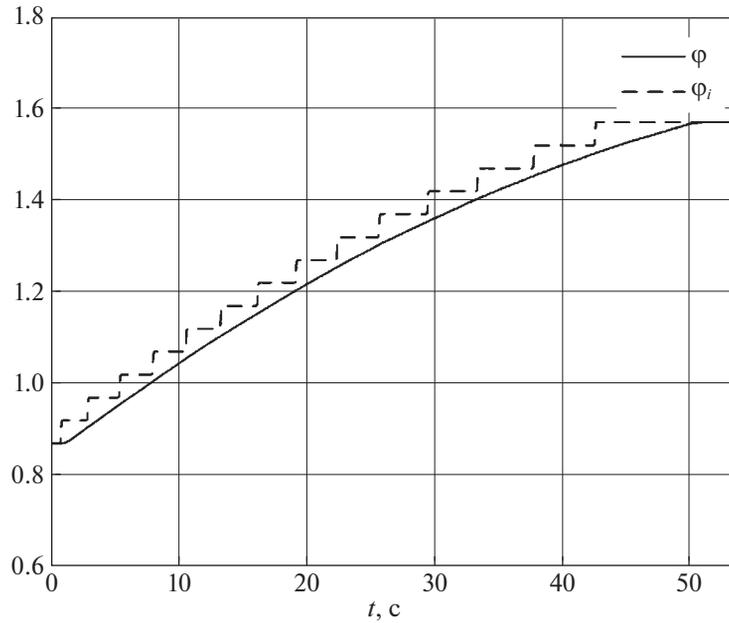


Рис. 5. Положение выходного звена манипулятора как функция времени без нагрузки

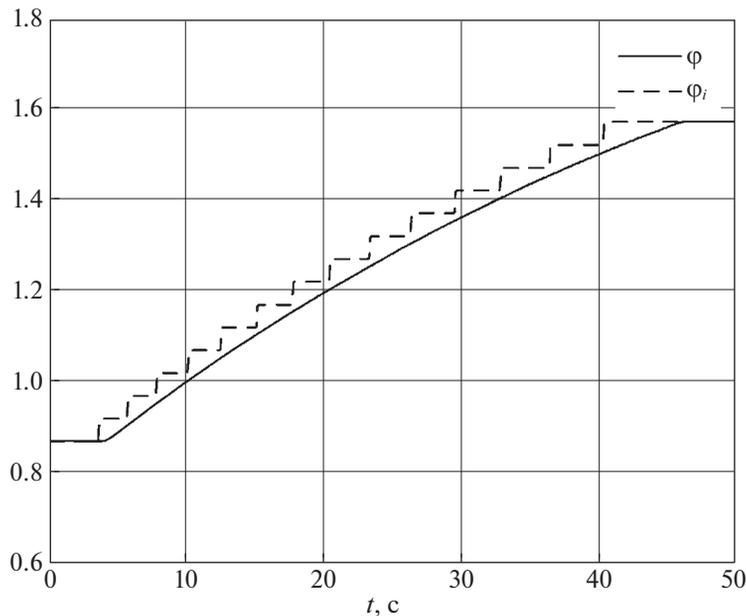


Рис. 6. Положение выходного звена манипулятора как функция времени с нагрузкой

где вектор параметров $a = [a_1, a_2]^T$ зависит от геометрических параметров робота: радиуса колес и расстояния между колесами. Уравнения (3.1) можно трактовать как кинематическую модель управления рассматриваемой транспортной платформой, считая угловые скорости вращения колес управляющими переменными, а обобщенные координаты x , y и φ , характеризующие положение платформы относительно неподвижной системы отсчета, — фазовыми переменными.

Введем следующие обозначения: $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ и $\omega_2 = \dot{\theta}_2$ — скорости вращения колес, v — линейная скорость точки O' , ω — угловая скорость платформы. Динамическую модель управления можно представить в следующем виде [5]:

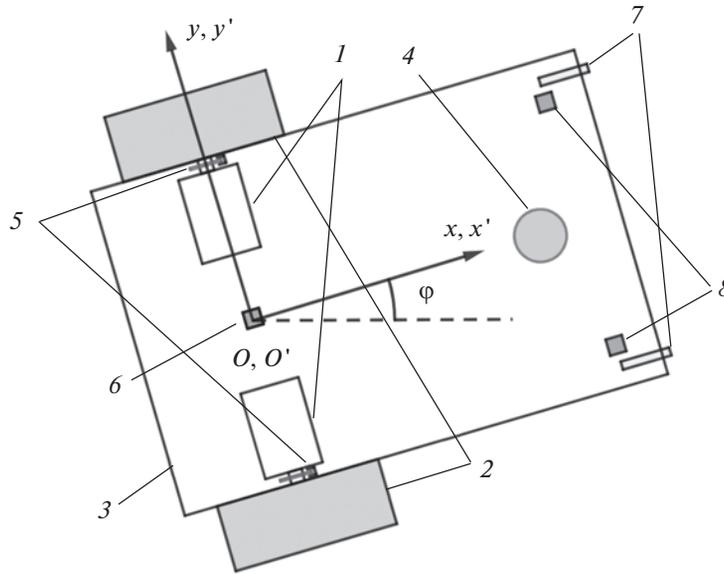


Рис. 7. Схема колесного мобильного робота

$$\begin{aligned}
 \dot{q} &= -\Gamma(q)(\omega_c + \zeta), \\
 \bar{M}\ddot{\zeta} + \bar{C}(\zeta)\dot{\zeta} + Yp &= u + \bar{\varepsilon}, \\
 \Gamma(q) &= \begin{bmatrix} -a_1 \cos \varphi & -a_1 \cos \varphi \\ -a_1 \sin \varphi & -a_1 \sin \varphi \\ a_2 & -a_2 \end{bmatrix}, \\
 Y &= \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{c1} & \dot{\omega}_{c2} & \omega_{c1} & \omega_{c2} \\ \dot{\omega}_{c2} & \dot{\omega}_{c1} & \omega_{c2} & -\omega_{c1} \end{bmatrix}, \\
 p &= \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}, \quad \zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 - \omega_{c1} \\ \omega_2 - \omega_{c2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $q = [x, y, \varphi]^T$ – вектор конфигурации транспортной платформы, $\omega_c = [\omega_{c1}, \omega_{c2}]^T$ – вектор угловых скорости вращения колес (пока неизвестные), которые обеспечивают отслеживание заданного движения, $\zeta = [\zeta_1, \zeta_2]^T$ – вектор, представляющий ошибку отслеживания угловых скоростей колес, \bar{M} и \bar{C} – матрицы, содержащие инерционные и геометрические параметры модели, $u = [u_1, u_2]^T$ – вектор управляющего электрического напряжения, $\bar{\varepsilon} = [\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2]^T$ – вектор добавок к управляющим напряжениям, требуемых для компенсации трения в приводах. Компоненты векторов p состоят из инерционных и геометрических параметров: массы, моментов инерции, радиуса колес, параметров модели привода и т.д. [5]. Предполагается, что компоненты этого вектора, а также векторов a и $\bar{\varepsilon}$ неизвестны. Поскольку в динамической модели (3.2) имеются неизвестные параметры, будем строить адаптивное управление, которое обеспечивает стремление к нулю векторов ошибок отслеживания e, ζ при любых допустимых значениях этих параметров. Введем величины $\tilde{p}, \tilde{\varepsilon}$ и \tilde{a} , представляющие разности между реальными значениями неизвестных параметров и их оценками:

$$\tilde{p} = p - \hat{p}, \quad \tilde{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}, \quad \tilde{a} = a - \hat{a}, \tag{3.3}$$

где $\hat{p} = [\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}_4]^T$, $\hat{a} = [\hat{a}_1, \hat{a}_2]^T$ и $\hat{\varepsilon} = [\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2]^T$ – векторы, оценивающие значения неизвестных параметров p, a и ε .

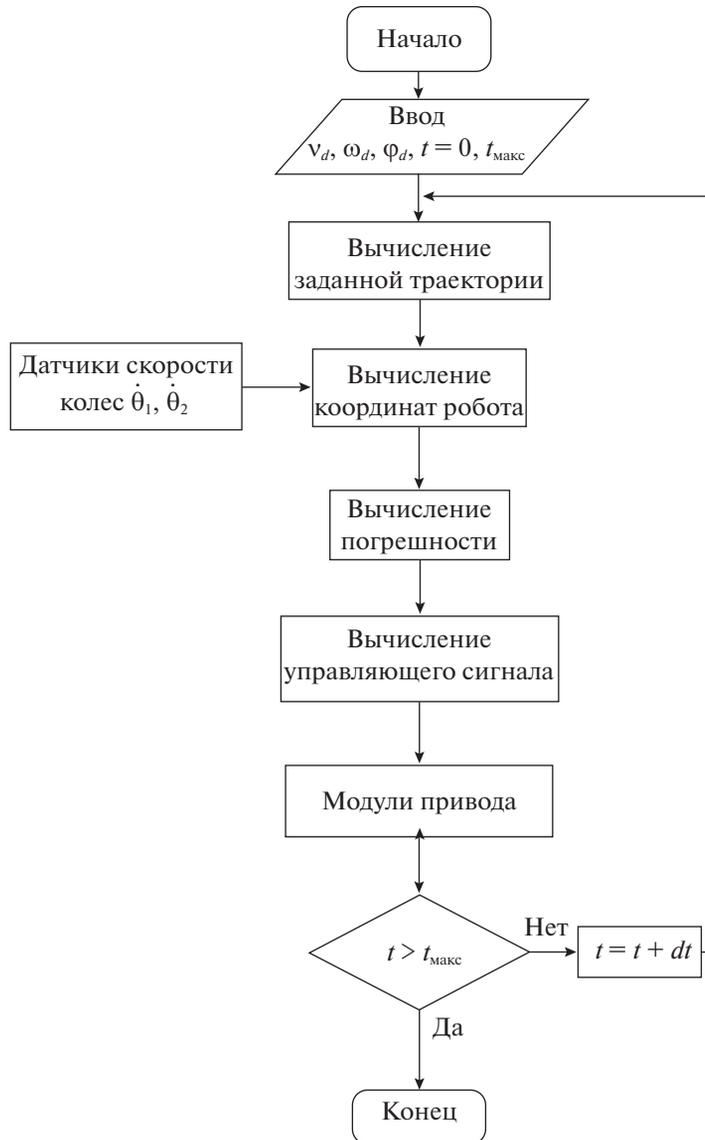


Рис. 8. Блок-схема алгоритма управления колесным роботом на первом этапе

Требуется, управляя угловыми скоростями колес, обеспечить движение робота по заданной траектории, определяемой функциями $x = x_d(t)$, $y = y_d(t)$, $\varphi = \varphi_d(t)$. Эти функции удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= v_d \cos \varphi_d, \\ \dot{y}_d &= v_d \sin \varphi_d, \\ \dot{\varphi}_d &= \omega_d. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Допустим, что функции $x(t)$, $y(t)$ и $\varphi(t)$ характеризуют реальное движение робота, которое, вообще говоря, отличается от программного, и реальному движению отвечают управления $v(t)$ и $\omega(t)$. Рассогласование реального и программного движений будем характеризовать тремя переменными e_1 , e_2 и e_3 , определяемыми следующим образом:

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \varphi_d - \varphi \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

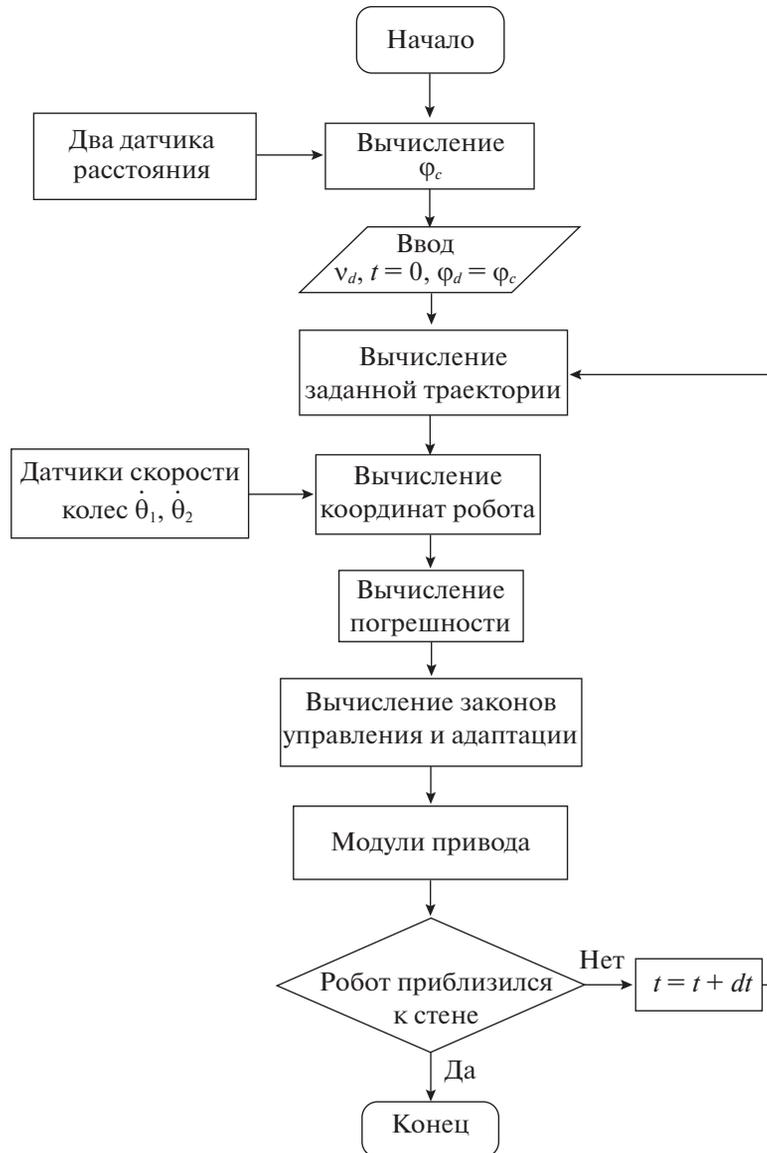


Рис. 9. Блок-схема алгоритма управления колесным роботом на втором этапе

В [5] строится адаптивное управление, производящее оценку неизвестных параметров в процессе работы. На основе динамической модели (3.2) формируется положительно-определенная функция Ляпунова, которая содержит все сигналы ошибок e , ζ , \tilde{a} , \tilde{p} , $\tilde{\epsilon}$. Предлагаются законы управления, которые делают производную функции Ляпунова по времени отрицательно-определенной. Таким образом подобранные законы управления обеспечивают асимптотическую устойчивость движения и ограниченность оцениваемых параметров. Законы управления напряжениями, подаваемыми на приводные колеса, имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y\hat{p} - \begin{bmatrix} -\gamma_1\hat{a}_1e_1 + \hat{a}_2 \sin e_3 \\ -\gamma_1\hat{a}_1e_1 - \hat{a}_2 \sin e_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_3\zeta_1 \\ k_4\zeta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_1 \\ \hat{\epsilon}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= -\gamma_1\gamma_2(\omega_{c1} + \omega_{c2})e_1 - \gamma_1\gamma_2(\zeta_1 + \zeta_2)e_1, \\ \hat{a}_2 &= -\gamma_3(\omega_{c2} - \omega_{c1}) \sin e_3 - \gamma_3(\zeta_2 - \zeta_1) \sin e_3; \end{aligned} \quad (3.7)$$

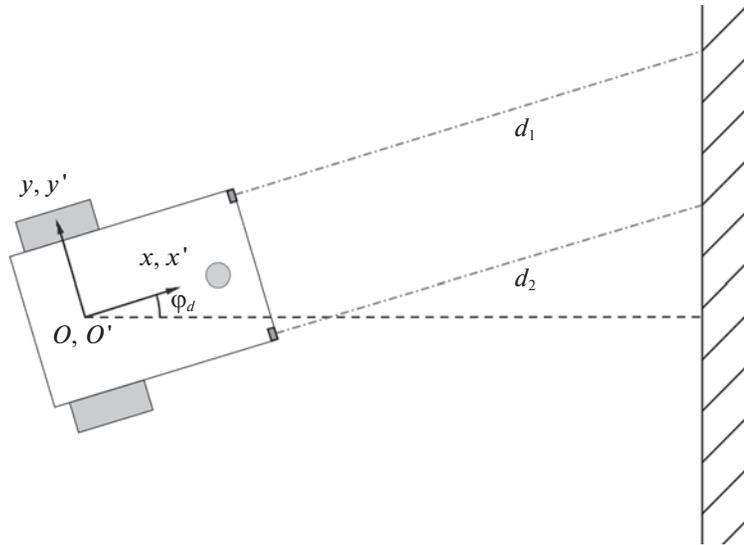


Рис. 10. Пример работы датчиков расстояния

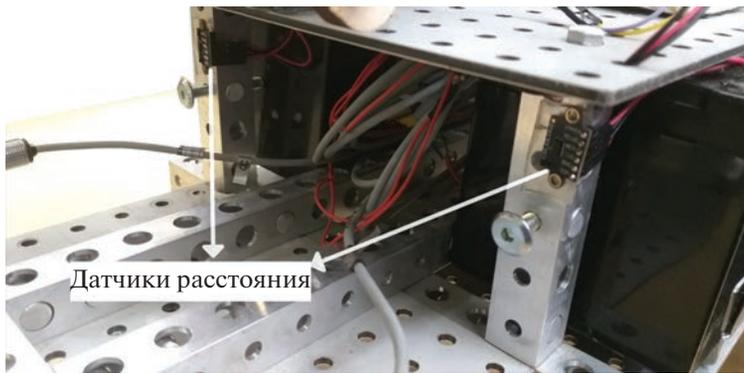


Рис. 11. Датчики расстояния на работе

$$\omega_{c1} = \frac{1}{2\hat{a}_1} (k_1 e_1 + v_d \cos e_3) - \frac{1}{2\hat{a}_2} (\omega_d + \gamma_1 e_2 v_d + k_2 \sin e_3), \tag{3.8}$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{2\hat{a}_1} (k_1 e_1 + v_d \cos e_3) + \frac{1}{2\hat{a}_2} (\omega_d + \gamma_1 e_2 v_d + k_2 \sin e_3);$$

$$\begin{aligned} \hat{p} &= -ZY^T \zeta, \\ \hat{\varepsilon} &= K\zeta. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь k_1, k_2, k_3, k_4 – положительные коэффициенты, Z, K – симметричные положительно-определенные матрицы и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – положительные числа.

4. Реализация алгоритма управления транспортной платформой. Алгоритм управления движением транспортной платформы реализован с помощью микроконтроллера Raspberry Pi Pico, драйвера двигателей, гироскопа MPU6050, установленного в середине отрезка, соединяющего центры колес, датчиков скорости вращения BS5-T2M, лазерных датчиков расстояния VL53L0X и фотоэлектрических концевых датчиков. В качестве приводов колес применялись мотор-редукторы для стеклоочистителя автомобиля ВАЗ-2110 КЗАЭ. Этот алгоритм используется для управления движением в два этапа – движение из местоположения робота A до положения B на рас-

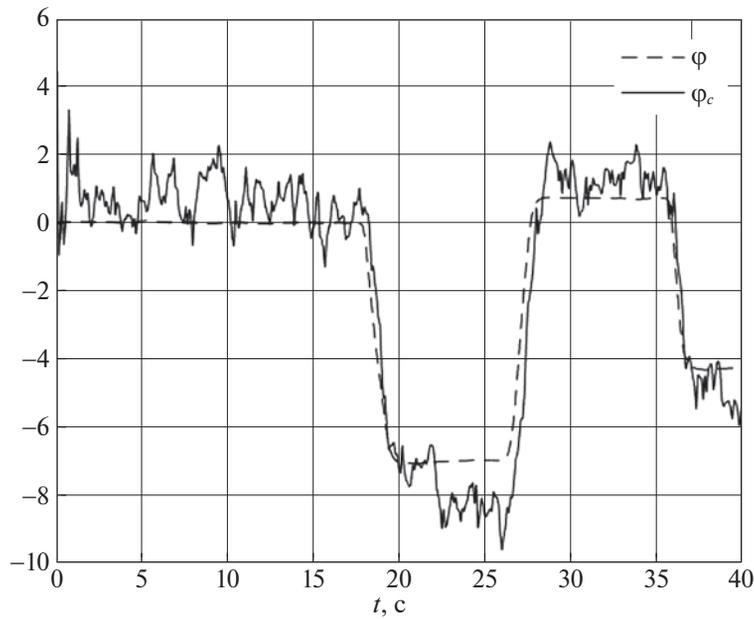


Рис. 12. Угол ориентации робота относительно стены

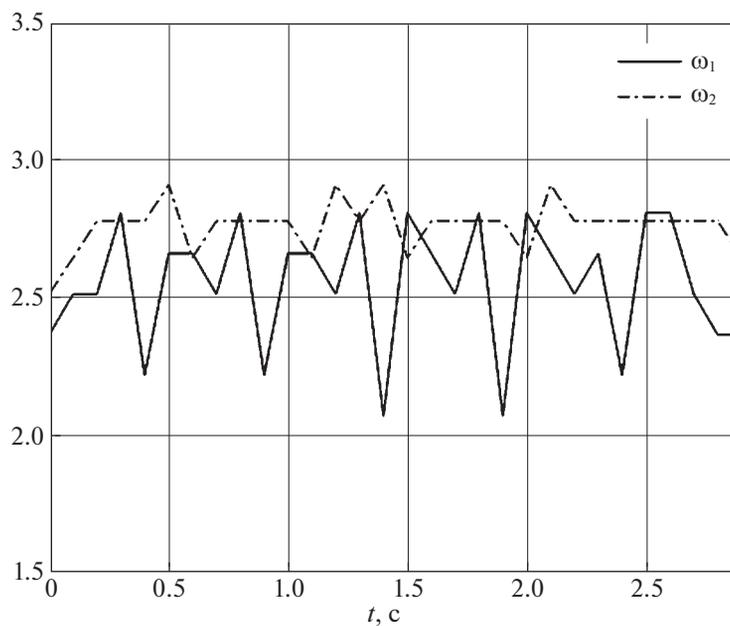


Рис. 13. Зависимость угловых скоростей колес от времени (колеса не касаются поверхности перемещения)

стоянии 1–2 м от вертикальной поверхности (расстояние надежной работы лазерных датчиков) и движение из положения B к положению C у поверхности. Отличие между этапами заключается в способе подбора значений параметров заданной траектории. Однако законы адаптации и управления не отличаются. Предполагается, что локальная система координат $O'x'y'z'$ и фиксированная система координат $Oxyz$ в начале движения совпадают.

Алгоритмы управления представлены на блок-схемах на рис. 8 и 9. Блок-схема, соответствующая этапу движения по заданной траектории из положения A в B , показана на рис. 8. В начале движения на этом этапе определяются значения для линейной и угловой скоростей платформы

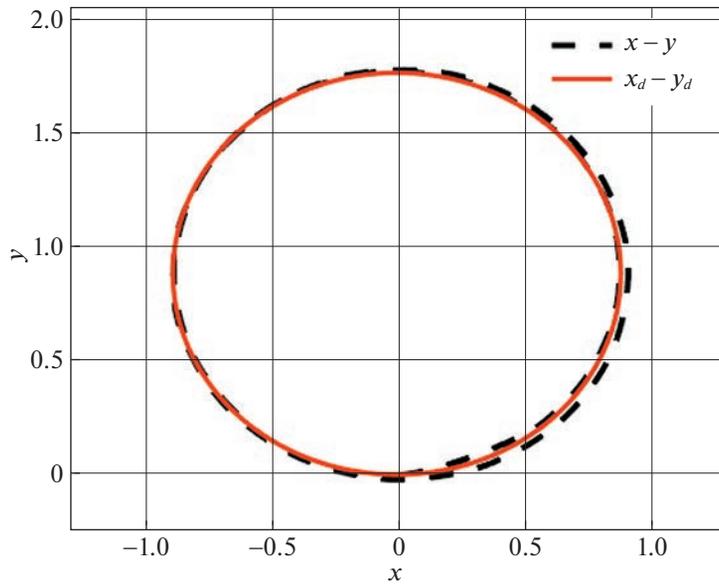


Рис. 14. Реальная траектория робота в случае движения по окружности

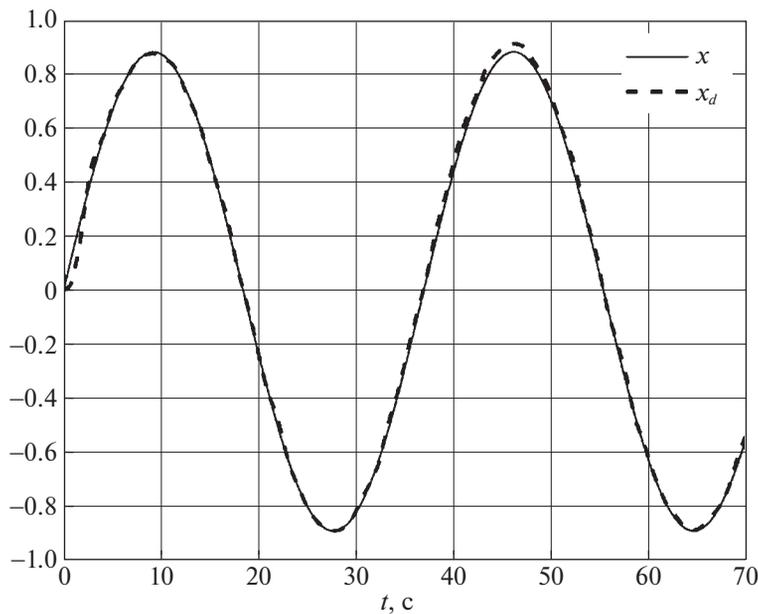


Рис. 15. Зависимость реальной координаты x транспортной платформы от времени в сравнении с координатой x_d заданной траектории

для заданной траектории и в соответствии с (3.4) вычисляются координаты (x_d, y_d, φ_d) в фиксированной системе $Oxuz$. Вычисление координат x, y, φ робота производится на основе одометрии в соответствии с (3.1). Скорость вращения колес определяется с помощью опико-электронных датчиков скорости вращения, установленных на каждом колесе. После того, как отклонение заданной траектории от траектории, рассчитанной по результатам одометрии, получено в соответствии с (3.5), законы управления движением рассчитываются, как в (3.6). При этом для вычисления векторов оценки параметров $\hat{p}, \hat{a}, \hat{\varepsilon}$ в (3.7), (3.9) используется численный метод Эйлера для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Начальные значения

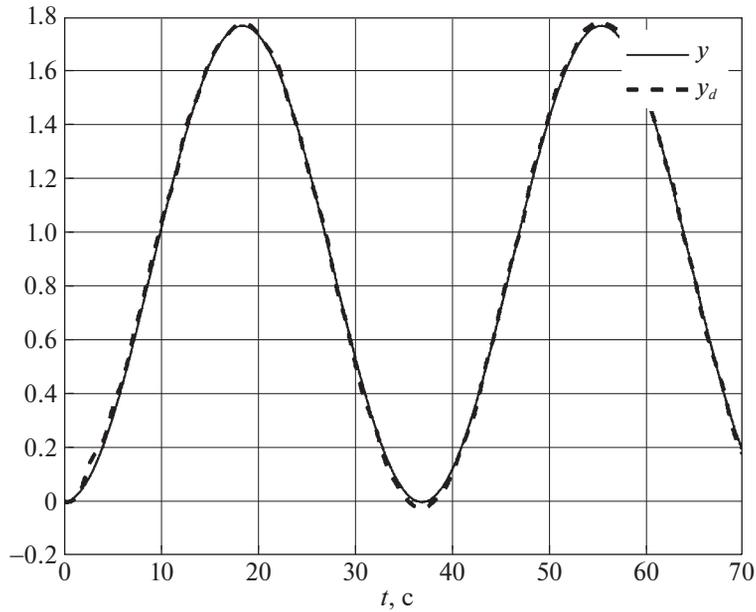


Рис. 16. Зависимость реальной координаты y транспортной платформы от времени в сравнении с координатой y_d заданной траектории

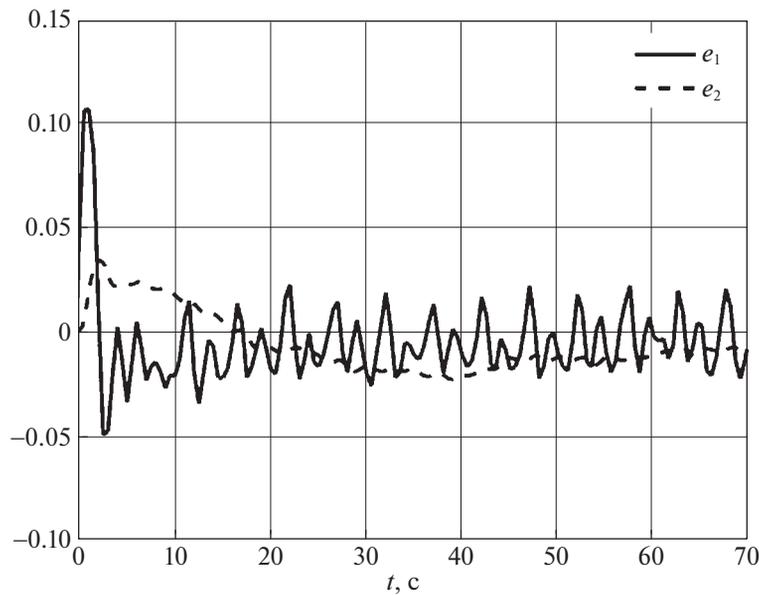


Рис. 17. Зависимости от времени рассогласования сигналов e_1 , e_2

оценок параметров задаются с учетом физических характеристик платформы. Значения управляющих сигналов передаются через платы драйверов на мотор-редукторы колес. Алгоритм выполняется до тех пор, пока не закончится время, отведенное на заданную траекторию. На рис. 9 показана блок-схема алгоритма управления движением из положения B в положение C . В начале движения на этом этапе угол ориентации робота относительно стены φ_c рассчитывается с использованием двух лазерных датчиков расстояния. Это необходимо, чтобы обеспечить подъезд платформы перпендикулярно вертикальной поверхности. Задается положительное постоянное значение скорости v_d . Вычисляется зависимость координат (x_d, y_d) от времени, согласно (3.4),

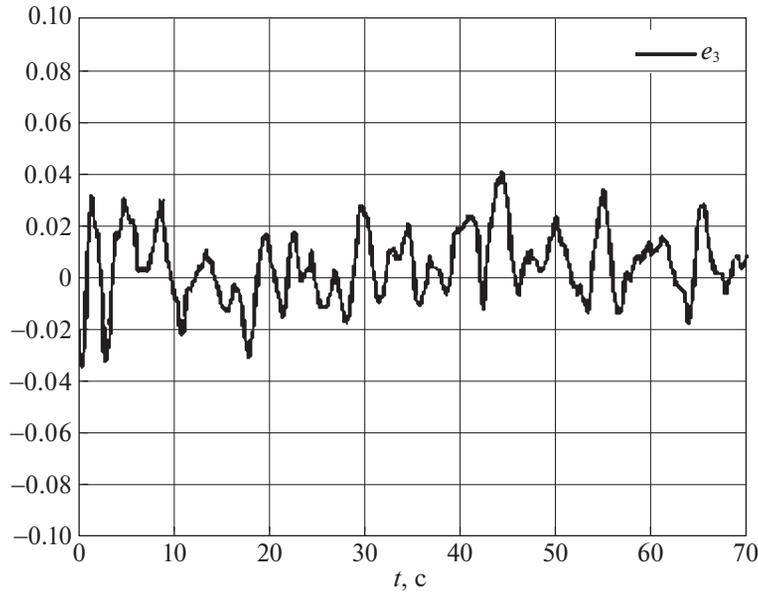


Рис. 18. Зависимость от времени рассогласования сигнала e_3

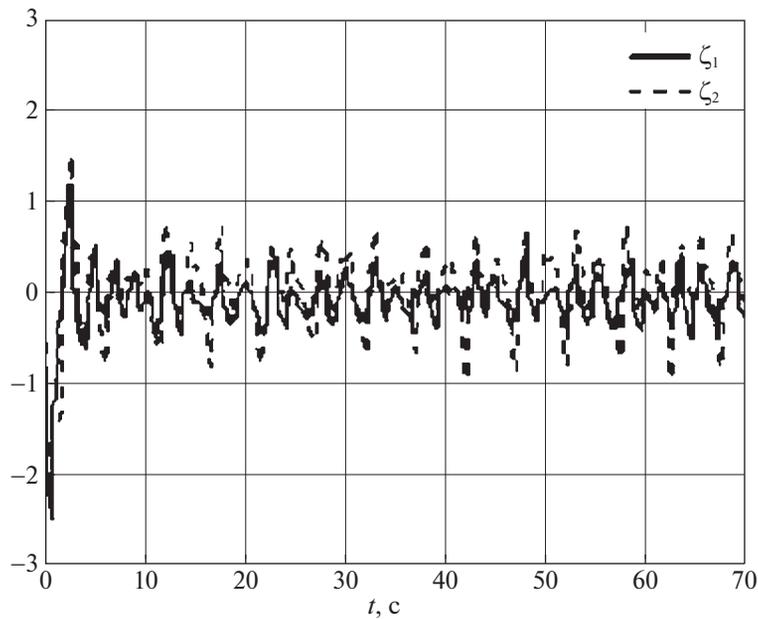
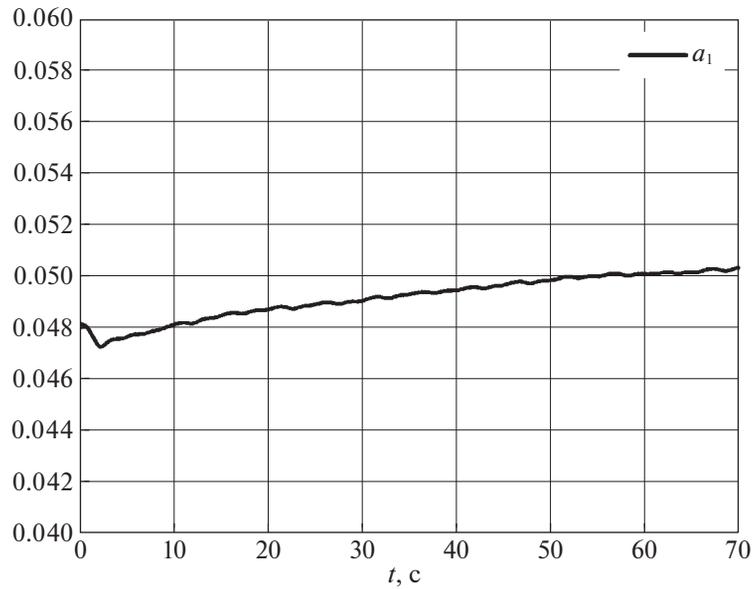
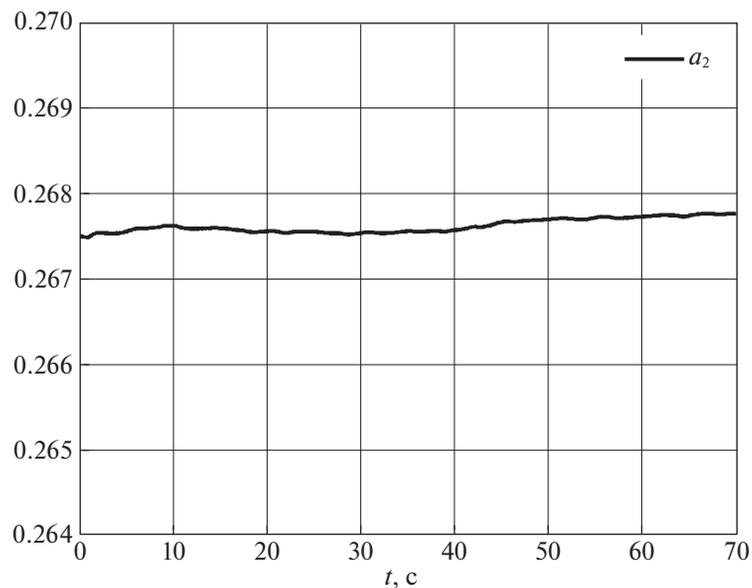


Рис. 19. Зависимости от времени рассогласования сигналов ζ_1, ζ_2

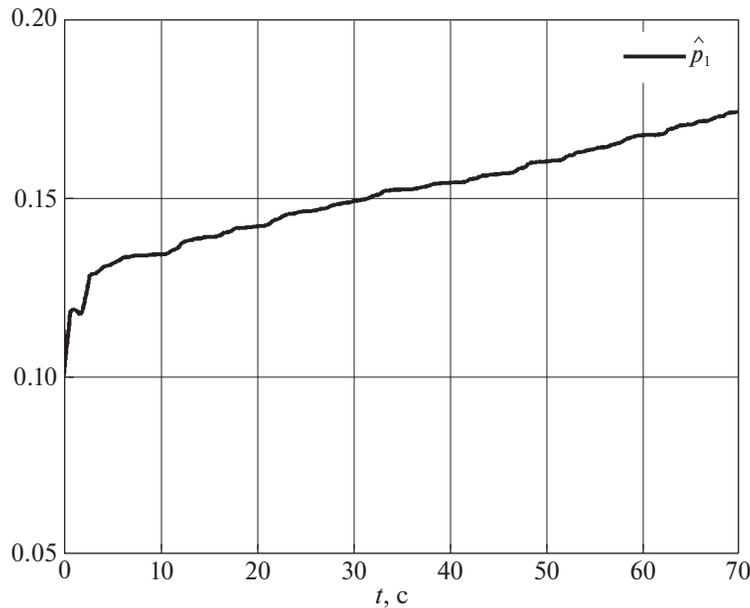
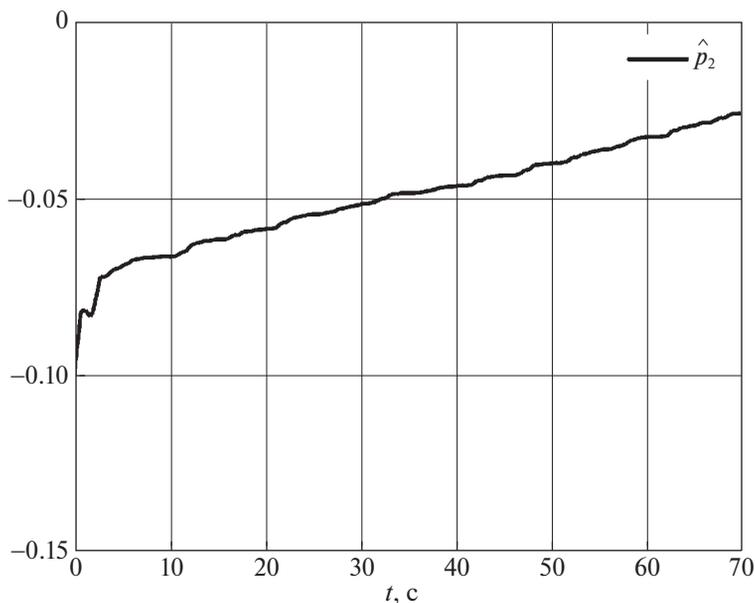
где $\varphi_d = \varphi_c$. Таким образом, программное движение робота будет осуществляться перпендикулярно вертикальной поверхности. Расчет траектории робота на основе одометрии, вычисление отклонения заданной траектории от траектории, построенной по результатам одометрии и управляющих сигналов, производятся также, как и в предыдущем алгоритме. Значения управляющих сигналов также передаются через платы драйверов на мотор-редукторы колес. Этот алгоритм выполняется до тех пор, пока концевые фотоэлектрические датчики не подадут сигнал о приближении к вертикальной поверхности. Если только один фотоэлектрический датчик подал сигнал о приближении к стене, то алгоритм прекращает передачу управляющего сигнала на соответствующий мотор-редуктор. Когда алгоритм выполнен, колесная платформа останавливается

Рис. 20. Оцениваемый параметр \hat{a}_1 Рис. 21. Оцениваемый параметр \hat{a}_2

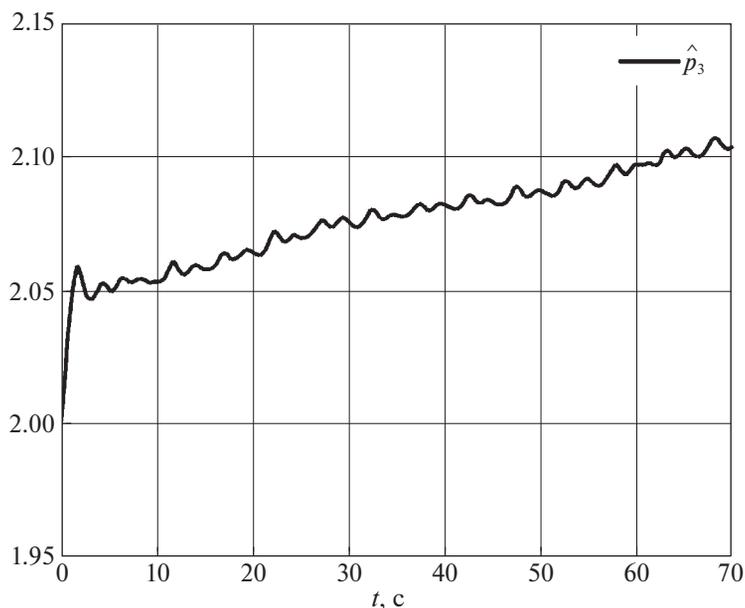
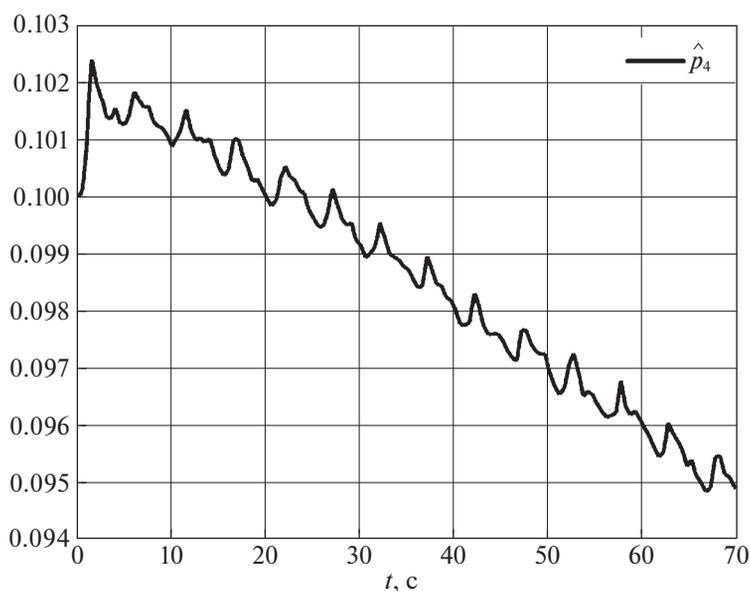
достаточно близко и с нужной ориентацией к вертикальной поверхности, запускается прижимное устройство и приводные двигатели робота вертикального перемещения, находящегося на зацепах манипулятора. Он начинает движение по вертикальной поверхности, освобождаясь при этом от зацепов.

На рис. 10 показан способ получения угла ориентации робота относительно стены $\varphi_d = \varphi_c$, где d_1, d_2 – расстояния до стены от левого и правого датчиков соответственно. Угол ориентации робота относительно стены определяется следующим выражением:

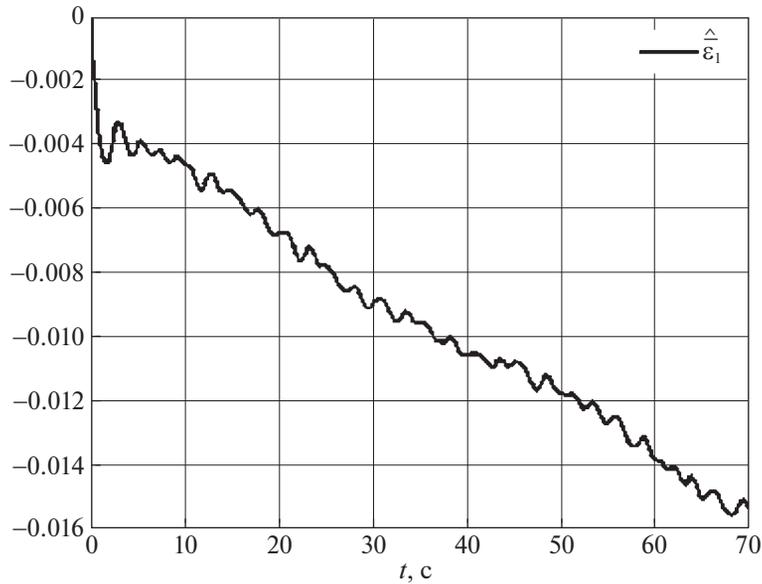
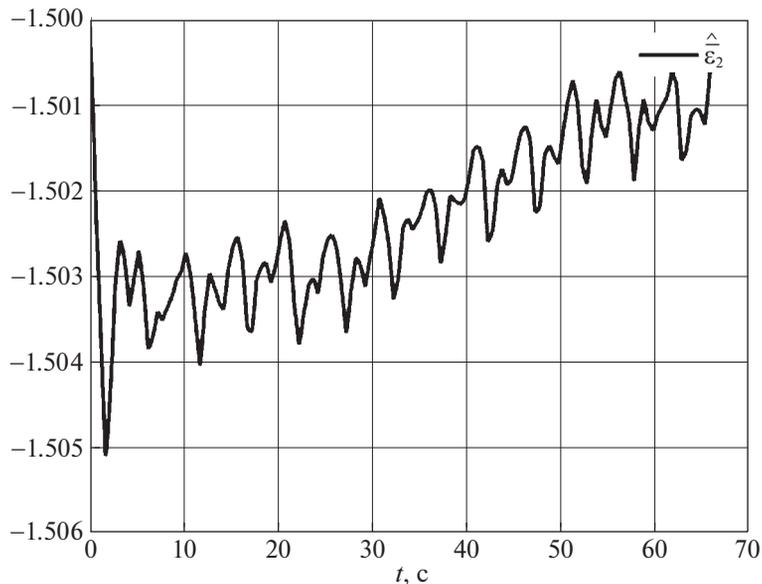
$$\varphi_c = \operatorname{arctg}\left(\frac{d_1 - d_2}{L_d}\right), \quad (4.1)$$

Рис. 22. Оцениваемый параметр \hat{p}_1 Рис. 23. Оцениваемый параметр \hat{p}_2

где L_d — расстояние между датчиками. Расположение датчиков расстояния на роботе изображено на рис. 11, на рис. 12 — зависимость угла φ_c от времени, полученная следующим образом. Робот был установлен перпендикулярно стене на расстоянии 20–30 см от нее. Вручную робот вращался в горизонтальной плоскости. Чтобы проверить значения φ_c , угол ориентации робота φ вычислялся посредством данных, полученных с гироскопа, который установлен в точке O' . Полученные результаты подтверждают, что с помощью этого метода можно определить ориентацию робота относительно вертикальной поверхности с достаточно малой погрешностью. Недостатком этого способа является ограниченный угол обзора и диапазон измеряемых расстояний датчика. В работе используются датчики расстояния VL53L0X, которые имеют угол обзора 27° и дальность действия до 2 м.

Рис. 24. Оцениваемый параметр \hat{p}_3 Рис. 25. Оцениваемый параметр \hat{p}_4

Для тестирования мотор-редукторов колес был проведен дополнительный эксперимент. На мотор-редукторы колес подавалось одинаковое напряжение и измерялись угловые скорости колес как функции времени. Колеса при этом поверхности перемещения не касались. Соответствующие зависимости для левого (ω_1) и правого (ω_2) колес изображены на рис. 13. Из этого рисунка видно, что зависимости угловых скоростей от времени оказались существенно различными для левого и правого колес, причем ни для одного из колес угловая скорость не выходила на постоянное значение, несмотря на постоянство поданного напряжения. Этот эффект особенно хорошо виден для правого колеса. Такое поведение связано с повышенным трением в трансмиссионных механизмах, передающих вращение от электродвигателей к колесам, и обусловлено, прежде всего, деформацией осей вращения колес. Данный дефект преднамеренно не был устранен для проверки адаптивных алгоритмов управления, предложенных в данной статье.

Рис. 26. Оцениваемый параметр $\hat{\varepsilon}_1$ Рис. 27. Оцениваемый параметр $\hat{\varepsilon}_2$

Результаты тестирования реализованного алгоритма рассмотрены ниже. Все величины, использованные при тестировании, представлены в единицах международной системы СИ. Для краткости размерности переменных и параметров в дальнейшем не указываются. Для проверки алгоритма следования по заданной траектории был проведен эксперимент с движением платформы вдоль окружности. Центр оси ведущих колес (точка O') перемещается по окружности диаметром $d = 1.76$ с постоянной линейной скоростью $v_d = 0.15$; угловая скорость вращения робота при этом равна $\omega_d = 0.17$. В начале программного движения точка O' имеет нулевые координаты в неподвижной системе отсчета ($x_d = 0$, $y_d = 0$) и нулевой угол между продольной осью робота и осью x неподвижной системы координат ($\theta_d = 0$).

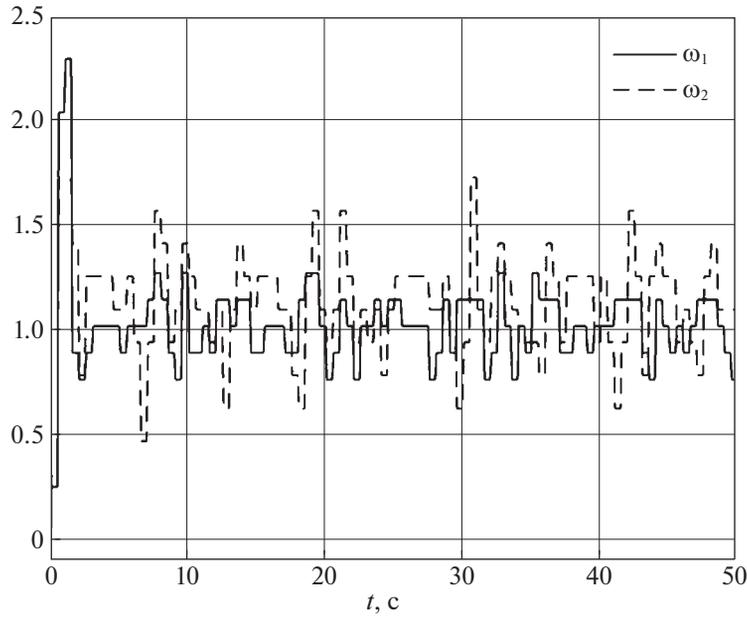


Рис. 28. Зависимости от времени скоростей вращения ω_1, ω_2

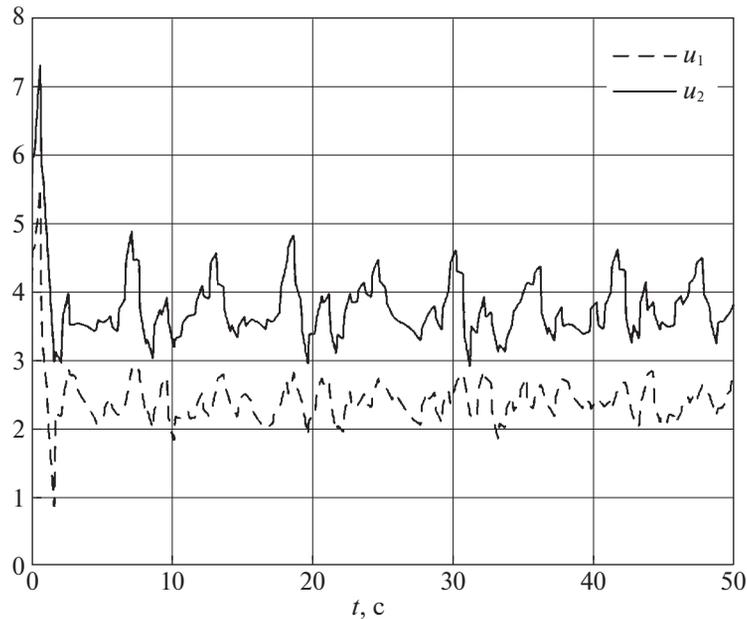


Рис. 29. Зависимости от времени сигналов напряжения u_1, u_2

При тестировании задаются начальные значения для кинематических и динамических параметров $\hat{a}_1 = 0.048$, $\hat{a}_2 = 0.26$, $\hat{p}_1 = 0.1$, $\hat{p}_2 = -0.1$, $\hat{p}_3 = 2$, $\hat{p}_4 = 0.1$, $\hat{\varepsilon}_1 = 0$, $\hat{\varepsilon}_2 = -1.5$. Эти значения основаны на физических характеристиках транспортной платформы. Были взяты следующие настраиваемые параметры для законов управления и адаптации: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $\gamma_1 = 5$, $\gamma_2 = 0.01$, $\gamma_3 = 0.05$, $k_3 = 10$, $k_4 = 10$, $Z = \text{diag}(0.002, 0.002, 0.002, 0.002)$, $K = \text{diag}(2, 2)$.

Результаты эксперимента при движении транспортной платформы по окружности иллюстрируются на рис. 14–27. На рис. 14 показаны координаты траектории точки O' платформы (сплошная кривая) и заданной траектории $x_d y_d$ (штриховая кривая). На рис. 15 и 16 представлено изме-



Рис. 30. Последовательность движений на первом этапе



Рис. 31. Последовательность движений на втором этапе

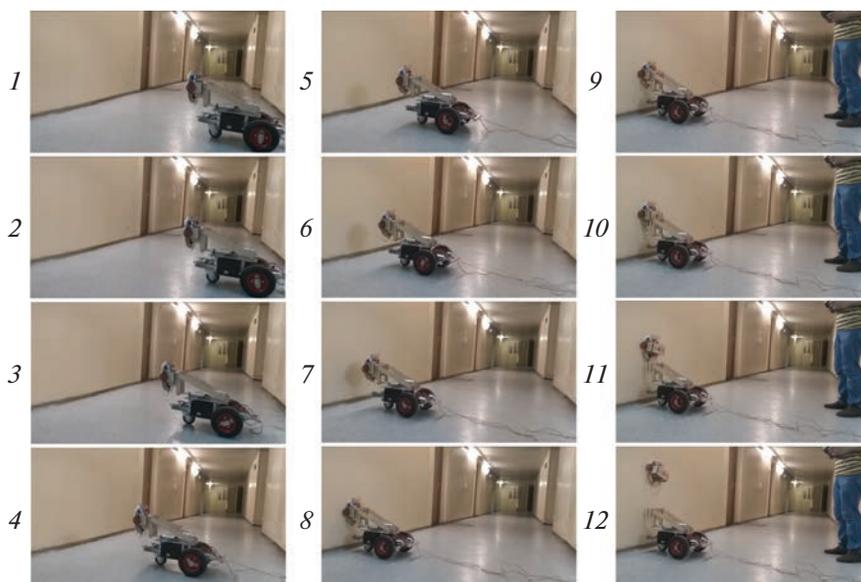


Рис. 32. Последовательность движений на третьем этапе

нение со временем координат x и y платформы в реальном движении (сплошная кривая) и координаты заданной траектории (штриховая кривая). На рис. 17–19 изображены зависимости от времени сигналов рассогласования e_1 , e_2 , e_3 и ζ_1 , ζ_2 . Зависимости от времени параметров адаптации \hat{a} , \hat{p} и $\hat{\varepsilon}$ приведены на рис. 20–27. Из рис. 17–19 видно, что ошибки отслеживания роботом программного движения стремятся с течением времени к нулю. Согласно рис. 20–27, оцениваемые параметры ограничены. На рис. 28 и 29 показаны скорости вращения колес и передаваемые двигателям напряжения при отслеживании движения по прямолинейной траектории. Этот эксперимент был проведен, чтобы продемонстрировать влияние дефектов (трения) в приводах. Из этого эксперимента видно, что, хотя среднее значение скорости вращения колеса постоянно, управляющие напряжения на приводах правого и левого колес разные.

Пример подъезда платформы к вертикальной стене демонстрируется на видеозаписи¹, которая была сделана для всего этапа движения с изученным алгоритмом управления. Последовательность кадров из видео показана на рис. 30–32. На рис. 30 приведено перемещение колесного робота из исходного положения в положение на расстоянии около 2 м от стены. В завершение этого этапа мобильный робот ориентируется так, чтобы выходное звено манипулятора было ориентировано на стену. На рис. 31 рассмотрено движение манипулятора по приведению робота вертикального перемещения в рабочее положение. На рис. 32 показано перемещение платформы к стене и вертикальное перемещение робота вдоль стены.

Заключение. Реализованы алгоритмы адаптивного управления движением транспортно-манипуляционной платформы, предназначенной для установки мобильного робота на вертикальную поверхность. Алгоритм основан на динамической модели робота и позволяет компенсировать не только неопределенность его геометрических и инерционных параметров, но и неопределенность, связанную с несовершенством приводов. Тестирование алгоритмов на реальном роботе показывает, что эти алгоритмы обеспечивают высокую точность отслеживания роботом заданных программных движений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нунупаров А.М., Чащухин В.Г. Система управления робота вертикального перемещения с аэродинамическим прижатием // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 2. С. 168–176.
2. Chashchukhin V.G. Orientation System of the Aerodynamically Adhesive Wall Climbing Robot // Extreme Robotics. 2019. V. 1. № 1. P. 145–148.
3. Чащухин В.Г. Исследование параметров движения робота со скользящим уплотнением // Вестн. Нижегородск. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (1.2). С. 347–349.
4. Алхаддад М. Моделирование и управление движением манипулятора с замкнутой кинематической цепью и линейным приводом // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 3. С. 168–176.
5. Алхаддад М. Адаптивное управление движением мобильного колесного робота с учетом неидеальности приводов // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 5. С. 144–158.
6. Wang H., Fukao T., Adachi N. An Adaptive Tracking Control Approach for Nonholonomic Mobile Robot // IFAC Proceedings. 1999. V. 32. № 2. P. 8184–8189.
7. Fukao T., Nakagawa H., Adachi N. Adaptive Tracking Control of a Nonholonomic Mobile Robot // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2000. V. 16. № 5. P. 609–615.
8. Pourboghrat F., Karlsson M.P. Adaptive Control of Dynamic Mobile Robots with Nonholonomic Constraints // Computers and Electrical Engineering. 2002. V. 28. № 4. P. 241–253.
9. Koubaa Y., Boukattaya M., Dammak T. An Adaptive Control for Uncertain Mobile Robot Considering Skidding and Slipping Effects // 5th Intern. Conf. on Systems and Control (ICSC). Marrakesh, 2016. P. 13–19.
10. Wu J., Xu G., Yin Z. Robust Adaptive Control for a Nonholonomic Mobile Robot with Unknown Parameters // J. Control Theory Appl. 2009. V. 7. P. 212–215.
11. Ye J. Adaptive Control of Nonlinear PID-based Analog Neural Networks for a Nonholonomic Mobile Robot // Neurocomputing. 2008. V. 71. P. 1561–1565.
12. Canigur E., Ozkan M. Model Reference Adaptive Control of a Nonholonomic Wheeled Mobile Robot for Trajectory Tracking // Intern. Sympos. on Innovations in Intelligent Systems and Applications. Trabzon, 2012. P. 1–5.

¹ <https://youtu.be/By9M277g9zw>.