

ISSN 0002-3388

Номер 5

Сентябрь - Октябрь 2023



ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Номер 5, 2023

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

- Глобальная устойчивость гибридной аффинной системы 4-го порядка
Ю. В. Морозов, А. В. Пестерев 3
-

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Быстродействие группы управляемых объектов
А. С. Бортаковский 16
- Оптимальный по быстродействию поворот пружинного маятника
О. Р. Каюмов 43
-

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

- О числе решений некоторых специальных задач логического анализа
целочисленных данных
А. П. Дюкова, Е. В. Дюкова 57
- Объединение баз и оценка множества экстремальных 3-однородных гиперграфов
И. С. Берецкий, Е. К. Егорова, А. В. Мокряков, В. И. Цурков 67
-

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- О колебаниях ветроэнергетической установки с несколькими подвижными массами,
использующей эффект галопирования
Б. Я. Локшин, Ю. Д. Селюцкий 78
-

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

- Управление распределением ресурсов при выравнивании нагрузок и межузловых
потоков в многопользовательской сети
Ю. Е. Малащенко, И. А. Назарова 91
- Модели и алгоритмы многоагентной иерархической маршрутизации
с временными окнами
М. Г. Козлова, Д. В. Лемтюжникова, В. А. Лукьяненко, О. О. Макаров 103
-

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

- Робастное интеллектуальное управление автономным роботом:
квантовая самоорганизация неточных баз знаний — эксперимент
А. Г. Решетников, В. С. Ульянов, С. В. Ульянов 127
-

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

- Совершенствование процессов планирования межспутниковых измерений
в интересах повышения точности эфемерид современного и перспективных
орбитальных сегментов Глонасс
*М. Н. Красильщиков, Д. М. Кружков, Т. А. Марарескул,
Е. А. Мартынов, Д. С. Муратов* 147
- Качение моноколеса по деформируемому брусу
Ю. Ф. Голубев, В. В. Корянов 160
-

ТЕОРИЯ СИСТЕМ
И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62-50

ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
ГИБРИДНОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ 4-ГО ПОРЯДКА

© 2023 г. Ю. В. Морозов^{a,*}, А. В. Пестерев^{a,**}

^aИПУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: tot1983@inbox.ru

**e-mail: alexanderpesterev.ap@gmail.com

Поступила в редакцию 03.11.2022 г.

После доработки 23.03.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Исследуемая гибридная аффинная система возникает при применении импульсного управления специального вида к цепочке четырех интеграторов. Цель управления — стабилизировать систему в начале координат так, чтобы система приближалась к состоянию равновесия по заданной желаемой (целевой) траектории. Целевая траектория определена неявно как траектория интегратора второго порядка, стабилизируемого с помощью обратной связи в виде вложенных сатураторов. Задача исследования — найти диапазон изменения коэффициентов обратной связи, при которых система глобально устойчива. Показано, что задача сводится к более простой задаче установления устойчивости линейной системы второго порядка с переключениями с зависящим от состояния законом переключений. Доказано, что последняя устойчива при любом законе переключений.

DOI: 10.31857/S0002338823040108, EDN: OCWYZV

Введение. Гибридными системами называют динамические системы, которые демонстрируют как непрерывное, так и дискретное поведение, т.е. системы, состояния которых могут меняться не только непрерывно, но и скачками [1]. Исследуемая в статье гибридная аффинная система возникает при применении импульсного управления специального вида для стабилизации цепочки четырех интеграторов. Задача стабилизации цепочек интеграторов широко обсуждалась в литературе в течение нескольких последних десятилетий (например, [2–6] и приведенные там ссылки). Интерес к данной проблематике обусловлен тем, что управления, разработанные для цепочек интеграторов, легко обобщаются на более широкие классы систем [5]. Более того, во многих приложениях исходные модели, например модели механических планарных систем, заданы в виде цепочек интеграторов.

Задачей настоящего исследования было нахождение управления, глобально стабилизирующего интегратор 4-го порядка, при дополнительном условии асимптотического следования вдоль желаемой траектории при приближении к состоянию равновесия. Целевая траектория определена неявно как траектория более простой эталонной системы 2-го порядка, расширенная до четырехмерного пространства. В качестве эталонной системы рассматривается цепочка двух интеграторов, замкнутая заданной обратной связью в виде вложенных сатураторов с коэффициентами обратной связи, выбранными так, чтобы обеспечить желаемые характеристики целевой траектории. Искомая обратная связь, обеспечивающая глобальную стабилизацию интегратора 4-го порядка, получена в виде суммы кусочно-непрерывного и импульсного управления. Показано, что система, замкнутая такой обратной связью, является гибридной аффинной системой.

Настоящая публикация не претендует на разработку общего метода или инструмента для исследования гибридных систем и/или систем с переключениями. Рассматривается конкретная, нетривиальная гибридная аффинная система. Цель работы — установить условия ее глобальной устойчивости. Так как система нелинейна, к ней неприменимы хорошо известные методы исследования линейных систем, основанные, например, на критериях Михайлова и Рауса–Гурвица. Известные же методы исследования устойчивости нелинейных систем напрямую неприменимы к гибридным системам и системам с переключениями, для которых разработан ряд специ-

альных методов [1, 7–9]. Однако ни один из обсуждаемых в цитированной выше литературе методов оказался неприменим к рассмотренной в статье гибридной аффинной системе. Полученное доказательство глобальной устойчивости основано на сведении исходной задачи к исследованию устойчивости более простой системы 2-го порядка с переключениями. Цель статьи, таким образом, состоит в следующем: 1) разработать новый закон управления, стабилизирующий интегратор 4-го порядка; 2) показать, что замкнутая система является гибридной системой; 3) исследовать глобальную устойчивость полученной гибридной системы.

В разд. 1 статьи формулируется задача стабилизации интегратора 4-го порядка при дополнительном условии асимптотического следования вдоль заданной траектории и предлагается обратная связь, обеспечивающая желаемые характеристики процесса перехода к состоянию равновесия. Показано, что система, замкнутая такой обратной связью, является гибридной аффинной системой с зависящим от состояния законом переключения. Главный результат работы представлен в разд. 1. Исследование устойчивости рассматриваемой гибридной системы сведено к исследованию устойчивости линейной системы 2-го порядка с переключениями. Доказательство устойчивости последней при любых законах переключения, что гарантирует глобальную устойчивость исходной системы, приведено в Приложении, где также доказан вспомогательный результат о глобальной устойчивости интегратора 2-го порядка, замкнутого обратной связью в виде вложенных сатураторов. В разд. 3 приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующих изложение.

1. Постановка задачи. Постановку задачи разобьем на два этапа.

1.1. Стабилизация интегратора 4-го порядка. Рассмотрим интегратор 4-го порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = U(x), \quad (1.1)$$

где $x \equiv [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, и поставим задачу нахождения управления $U(x)$, стабилизирующего систему в начале координат и при этом обеспечивающего желаемое асимптотическое поведение траектории системы. Для более точной формулировки последнего условия рассмотрим вспомогательную задачу стабилизации интегратора 2-го порядка:

$$\dot{w}_1 = w_2, \quad \dot{w}_2 = U_1(w_1, w_2), \quad w_1(0) = x_1(0), \quad w_2(0) = x_2(0) \quad (1.2)$$

с помощью непрерывного управления U_1 , обеспечивающего экспоненциальное убывание отклонения $w_1(t)$ в окрестности нуля с заданной скоростью (показателем экспоненты) λ при дополнительных ограничениях

$$|U_1(w_1, w_2)| \leq U_{\max}, \quad |w_2(t)| \leq V_{\max}. \quad (1.3)$$

Для стабилизации системы (1.2) применим негладкую обратную связь U_1 в виде вложенных сатураторов:

$$U_1(w_1, w_2) = -k_4 \text{sat}(k_3(w_2 + k_2 \text{sat}(k_1 w_1))), \quad (1.4)$$

где $\text{sat}(\cdot)$ – функция насыщения: $\text{sat}(w) = w$ при $|w| \leq 1$ и $\text{sat}(w) = \text{sign}(w)$ при $|w| > 1$. Ограничения (1.3) выполняются, если положить $k_4 = U_{\max}$ и $k_2 = V_{\max}$, а желаемое значение экспоненциальной скорости убывания отклонения λ обеспечивается соответствующим выбором коэффициентов k_1 и k_3 [10]. Систему (1.2), (1.4) будем называть *эталонной системой*.

Вблизи нуля система (1.2), (1.4) линейна: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -k_1 k_2 k_3 k_4 x_1 - k_3 k_4 x_2$ и имеет в нуле устойчивое положение равновесия при любых $k_i > 0$, $i = 1, 4$. Если $k_3 k_4 < 4k_1 k_2$, то $x = 0$ – фокус; иначе – узел. Последний случай представляется более практичным, так как не приводит к осцилляциям вокруг нуля, поэтому далее будем считать, что коэффициенты контроллера удовлетворяют неравенству $k_3 k_4 \geq 4k_1 k_2$.

Обратные связи в виде вложенных сатураторов применялись в ряде работ по стабилизации цепочек интеграторов ([2, 3, 10–13] и приведенные там ссылки). Однако авторам не известны работы, результаты которых могли бы быть использованы для установления устойчивости системы (1.2), (1.4). Общий случай n -мерного интегратора обсуждается, например, в [2, 3]. Глобальная устойчивость системы, замкнутой обратной связью в виде n вложенных сатураторов, при этом была доказана только для случая, когда предельные значения вложенных функций насыщения удовлетворяют определенным неравенствам [2], Theorem 2.1, которые не выполняются для обратной связи (1.4). В [11, 12] для стабилизации интегратора 2-го порядка применяется обратная

связь вида (1.4), отличающаяся от (1.4) тем, что аргументом внутреннего сатуратора является скорость w_2 , а не отклонение w_1 , как в (1.4) (в [12] аргумент внешнего сатуратора дополнительно зависит от квадрата скорости w_2^2). Доказательство глобальной устойчивости в обеих работах основано на существовании функции Ляпунова в виде суммы квадратичного и интегрального членов. Для системы (1.2), (1.4), однако, указанный прием не применим, так как функцию Ляпунова такого вида не удастся найти.

Условия глобальной устойчивости системы (1.2), (1.4) сформулированы в следующей лемме, доказательство которой приведено в Приложении.

Л е м м а 1. Пусть $k_i > 0, i = \overline{1,4}$ и $k_3 k_4 \geq 4k_1 k_2$. Тогда система (1.2), замкнутая обратной связью (1.4), глобально устойчива.

Чтобы уменьшить количество параметров, будем выбирать коэффициенты k_1 и k_3 в (1.4) при заданных значениях ресурса управления k_4 и максимальной скорости k_2 из однопараметрического семейства, параметризованного показателем λ :

$$k_1 = \lambda/2k_2, \quad k_3 = 2\lambda/k_4, \quad \lambda > 0. \quad (1.5)$$

При таком выборе коэффициентов характеристическое уравнение системы (1.2), (1.4) имеет два одинаковых корня: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda$, т.е. начало координат является устойчивым вырожденным узлом, а система (1.2), (1.4) в окрестности нуля принимает вид

$$\dot{w}_1 = w_2, \quad \dot{w}_2 = -\lambda^2 w_1 - 2\lambda w_2. \quad (1.6)$$

Кроме того, без потери общности положим далее $U_{\max} = 1$ и $V_{\max} = 1$ ($k_4 = k_2 = 1$).

Возвращаясь теперь к исследуемой системе (1.1), наложим на ее решение дополнительное условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = U_1(x_1(t), x_2(t)), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_4(t) = \dot{U}_1(x_1(t), x_2(t)) \quad (1.7)$$

и будем искать стабилизирующее управление для интегратора 4-го порядка в виде

$$U(x) = \ddot{U}_1(x_1, x_2) + \beta_1(U_1(x_1, x_2) - x_3) + \beta_2(\dot{U}_1(x_1, x_2) - x_4), \quad (1.8)$$

где $\beta_1, \beta_2 > 0$, $\dot{U}_1$ и $\ddot{U}_1$ — производные функции U_1 в силу системы (1.2). Требование (1.7) формализует наше желание получить такое решение системы (1.1), первые две компоненты которого $x_1(t)$ и $x_2(t)$ ведут себя аналогично компонентам решения уравнения 2-го порядка (1.2).

Как и в случае коэффициентов k_1 и k_3 , ограничимся для простоты выбором β_1 и β_2 из однопараметрического семейства и при этом масштабируем их с помощью показателя λ [14]:

$$\beta_1 = (\lambda\xi)^2, \quad \beta_2 = 2\lambda\xi, \quad \xi > 0,$$

уменьшив таким образом количество параметров до двух: λ и ξ . Далее докажем, что обратная связь (1.8) стабилизирует интегратор 4-го порядка, и определим диапазон изменения параметров λ и ξ , для которых замкнутая система (1.1), (1.8) глобально устойчива и при этом выполняются условия (1.7). Покажем сначала, что система (1.1), (1.8) является гибридной аффинной системой.

1.2. Эквивалентная гибридная аффинная система. Рассмотрим разбиение плоскости (x_1, x_2) на три множества (рис. 1). Ко множеству D_1 отнесем все точки, в которых оба сатуратора не насыщены:

$$D_1 = \{(x_1, x_2): |x_1| < 1/k_1, |x_2 + k_1 x_1| < 1/k_3\}$$

(наклонная полоса, ограниченная пунктирными линиями на рис. 1). Множество D_2 состоит из точек, в которых насыщен внутренний сатуратор, а внешний сатуратор не достигает насыщения:

$$D_2 = \{(x_1, x_2): |x_1| \geq 1/k_1, |x_2 + \text{sign}(x_1)| < 1/k_3\}$$

(две горизонтальные полосы на рис. 1). Множество

$$D_3 = \{(x_1, x_2): |x_2 + \text{sat}(k_1 x_1)| > 1/k_3\}$$

включает в себя все точки, в которых достигает насыщения внешний сатуратор, т.е. $U_1(x_1, x_2) \equiv \pm 1$. Границу между всеми тремя множествами обозначим Γ : $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \Gamma = R^2$.

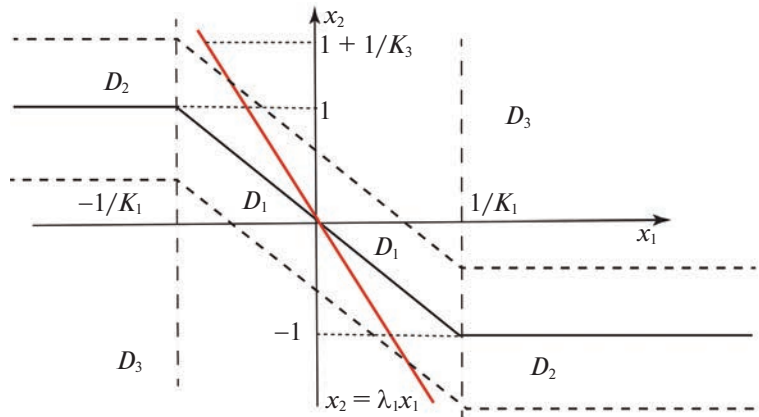


Рис. 1. Разбиение фазовой плоскости на множества D_1 , D_2 и D_3 .

Из формулы (1.4) с учетом (1.5) видно, что U_1 — кусочно-линейная функция:

$$U_1 = \begin{cases} -\lambda^2 x_1 - 2\lambda x_2, & (x_1, x_2) \in D_1, \\ -2\lambda(x_2 + \text{sign}(x_1)), & (x_1, x_2) \in D_2, \\ -\text{sign}(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1)), & (x_1, x_2) \in D_3. \end{cases}$$

Производные U_1 в силу системы (1.2) определены формулами

$$\dot{U}_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} U_1, \quad \ddot{U}_1 = \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} U_1$$

и на множествах D_i , $i = \overline{1, 3}$, принимают вид:

$$\dot{U}_1 = \begin{cases} 2\lambda^3 x_1 + 3\lambda^2 x_2, & (x_1, x_2) \in D_1, \\ 4\lambda^2(x_2 + \text{sign}(x_1)), & (x_1, x_2) \in D_2, \\ 0, & (x_1, x_2) \in D_3, \end{cases}$$

$$\ddot{U}_1 = \begin{cases} -3\lambda^4 x_1 - 4\lambda^3 x_2, & (x_1, x_2) \in D_1, \\ -8\lambda^3(x_2 + \text{sign}(x_1)), & (x_1, x_2) \in D_2, \\ 0, & (x_1, x_2) \in D_3. \end{cases}$$

Подставляя выражения для U_1 , $\dot{U}_1$ и $\ddot{U}_1$ в уравнение замкнутой системы (1.1), (1.8), получаем аффинную систему с переключениями:

$$\dot{x} = A_{\sigma(x)}(\lambda, \xi)x + b_{\sigma(x)}(\lambda, \xi), \quad \sigma(x) \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.9)$$

где A_1 , A_2 , A_3 и b_1 , b_2 , b_3 — постоянные матрицы и векторы соответственно:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^4 c_1(\xi) & -\lambda^3 c_2(\xi) & -\lambda^2 \xi^2 & -2\lambda \xi \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\lambda^3 c_3(\xi) & -\lambda^2 \xi^2 & -2\lambda \xi \end{bmatrix}, \quad b_2 = -2\lambda^3 c_3(\xi) \text{sign}(x_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \xi^2 & -2\lambda \xi \end{bmatrix}, \quad b_3 = -\lambda^2 \xi^2 \operatorname{sign}(x_2 + \operatorname{sat}(\lambda x_1/2)) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и $c_1(\xi) = (\xi - 3)(\xi - 1)$, $c_2(\xi) = 2(\xi - 2)(\xi - 1)$, $c_3(\xi) = (\xi - 2)^2$.

Переключения между системами зависят от состояния, согласно закону

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \in D_1 \times R^2, \\ 2, & x \in D_2 \times R^2, \\ 3, & x \in D_3 \times R^2. \end{cases} \quad (1.10)$$

Так как $\dot{U}_1$ меняется скачком при пересечении границы Γ , функция $\dot{U}_1$ претерпевает разрыв второго рода в этот момент, а управление $U(x)$ имеет как кусочно-непрерывную, так и импульсную составляющие. На множестве $\Gamma \times R^2$ (jump set [1]) вектор состояния меняется скачком, так что отображение (1.9) (flow map [1]) следует дополнить отображением

$$x^+ = x^- + \Delta \dot{U}_1(x_1, x_2)q, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad (1.11)$$

(jump map [1]), где x^- и x^+ — значения вектора состояния до и после скачка соответственно, $q = [0, 0, 0, 1]^T$ и $\Delta \dot{U}_1(x_1, x_2)$ — скачок функции $\dot{U}_1(x_1, x_2)$ при пересечении траекторией границы Γ .

Таким образом, представления (1.1), (1.8) и (1.9), (1.11) эквивалентны, т.е. замкнутая система (1.1), (1.8) является гибридной, и исследование ее устойчивости сводится к исследованию глобальной устойчивости системы (1.9), (1.11).

2. Доказательство глобальной устойчивости. Легко видеть, что области D_2 и D_3 не включают начала координат и вторая и третья системы в (1.9) не имеют стационарных положений равновесия. Следовательно, необходимым условием устойчивости начала координат является гурвицевость матрицы A_1 . Вычисляя характеристический полином A_1 и применяя критерий Раussa—Гурвица или Ляпуна—Шипарда [15], нетрудно доказать что эта матрица гурвицева при любых $\lambda > 0$ и $\xi > 3$. Далее будет показано, что эти условия не только необходимы для глобальной устойчивости системы (1.9), но и достаточны. Для этого сначала будет показано, что задача исследования устойчивости рассматриваемой гибридной системы 4-го порядка сводится к исследованию устойчивости системы 2-го порядка с переключениями. Затем будет доказано, что последняя устойчива при любом законе переключения.

2.1. Сведение исследования устойчивости гибридной системы 4-го порядка к исследованию устойчивости системы 2-го порядка с переключениями. Для начала избавимся от разрывной переменной x_4 , введя новые переменные состояния δ_1 и δ_2 вместо x_3 и x_4 :

$$\delta_1 = U_1(x_1, x_2) - x_3, \quad \delta_2 = \dot{U}_1(x_1, x_2) - x_4.$$

Так как скачки $\dot{U}_1$ и x_4 при пересечении границы $\Gamma \times R^2$ компенсируют друг друга, переменная δ_2 непрерывна, так что ее можно дифференцировать в обычном смысле. Введем обозначения dU_1/dt и $d\dot{U}_1/dt$ для производных функций U_1 и $\dot{U}_1$ в силу системы (1.1), сохранив обозначения с помощью точки над символом для производных этих функций в силу системы (1.2). Для производных δ_1 и δ_2 в силу (1.1) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= \frac{d}{dt} U_1 - \dot{x}_3 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} x_3 - x_4 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} U_1 - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} U_1 = \dot{U}_1 - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} [U_1(x_1, x_2) - x_3] - x_4, \\ \dot{\delta}_2 &= \frac{d}{dt} \dot{U}_1 - \dot{x}_4 = \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} x_3 - \dot{x}_4 + \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} U_1 - \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} U_1 = \\ &= \ddot{U}_1 - \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} [U_1(x_1, x_2) - x_3] - \ddot{U}_1 - \beta_1 \delta_1 - \beta_2 \delta_2. \end{aligned}$$

Перепишывая (1.9) в новых переменных, получаем

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = U_1(x_1, x_2) - \delta_1, \quad (2.1)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial U_1}{\partial x_2} & 1 \\ -\left(\frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} + \lambda^2 \xi^2\right) & -2\lambda \xi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Из (2.1) видно, что компоненты решения x_1, x_2 стремятся к решению эталонной системы (1.2) тогда и только тогда, когда δ_1 стремится к нулю. Это условие выполняется, когда нулевое решение δ -подсистемы (2.2) глобально устойчиво. Принимая во внимание, что частные производные U_1 и $\dot{U}_1$ не зависят от x :

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \begin{cases} -2\lambda, & (x_1, x_2) \in D_1, \\ -2\lambda, & (x_1, x_2) \in D_2, \\ 0, & (x_1, x_2) \in D_3, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} = \begin{cases} 3\lambda^2, & (x_1, x_2) \in D_1, \\ 4\lambda^2, & (x_1, x_2) \in D_2, \\ 0, & (x_1, x_2) \in D_3, \end{cases}$$

видим, что δ -подсистема представляет из себя линейную систему с переключениями:

$$\dot{\delta} = C_{i(x)}\delta, \quad i(x) \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.3)$$

где $\delta = [\delta_1, \delta_2]^T$ и C_i – постоянные матрицы:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2\lambda & 1 \\ -\lambda^2(\xi^2 + 3) & -2\lambda\xi \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2\lambda & 1 \\ -\lambda^2(\xi^2 + 4) & -2\lambda\xi \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2\xi^2 & -2\lambda\xi \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

а закон переключения $i(x)$ зависит от состояния x -подсистемы: $i(x) = k$, когда $(x_1, x_2) \in D_k$.

2.2. Устойчивость системы 2-го порядка с переключениями. Хотя матрицы C_i в правой части (2.3) не зависят от переменных x_1 и x_2 , решение δ -подсистемы (2.3) зависит от динамики x -подсистемы, так как от состояния x -подсистемы зависят моменты переключения в (2.3). Тем не менее, оказывается, что динамика x -подсистемы не влияет на устойчивость системы (2.3). А именно справедлива следующая лемма, доказательство которой приведено в Приложении.

Л е м м а 2. Система с переключениями (2.3) устойчива при любых законах переключения тогда и только тогда, когда $\lambda > 0$ и $\xi > 3$.

Устойчивость системы (2.3) при произвольных переключениях означает, что она устойчива и при любом зависящем от состояния законе переключения. Следовательно, условия $\lambda > 0$ и $\xi > 3$ достаточны для глобальной устойчивости гибридной системы (1.9), (1.11). Принимая во внимание, что, как установлено в начале данного раздела, эти условия необходимы для глобальной устойчивости, получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а. Нулевое решение гибридной системы (1.9), (1.11) глобально устойчиво тогда и только тогда, когда $\lambda > 0$ и $\xi > 3$.

3. Численные примеры. С целью иллюстрации рассмотрим стабилизацию интегратора 4-го порядка с помощью обратной связи (1.8) с параметрами $\lambda = 1.5$ и $\xi = 4.0$ ($\beta_1 = 36$ и $\beta_2 = 12$). Предельные значения управления и скорости эталонной системы с обратной связью (1.4) были

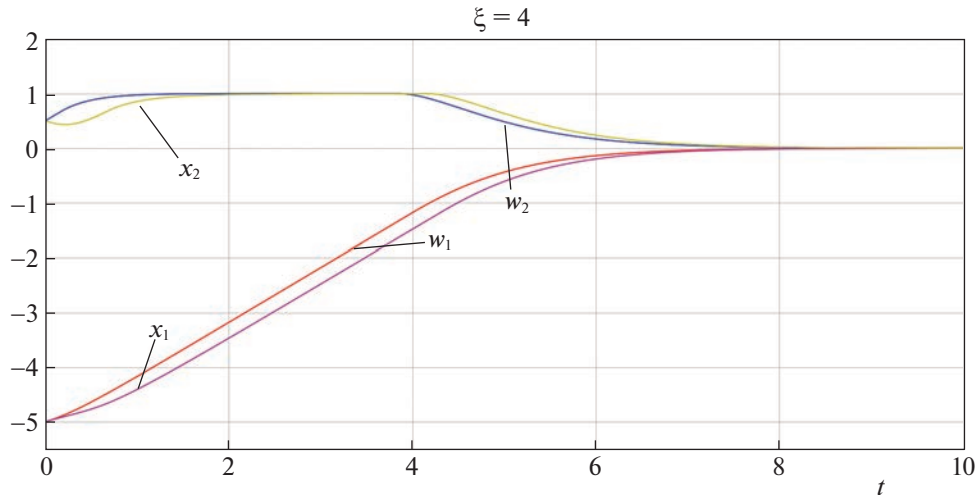


Рис. 2. Графики отклонений и скоростей (x_1, x_2) и (w_1, w_2) исследуемой и эталонной систем ($\xi = 4.0$).

принятыми равными единице: $k_2 = k_4 = 1$, а значения $k_1 = 0.75$ и $k_3 = 3.0$ двух других коэффициентов выбраны так, чтобы обеспечить целевую экспоненциальную скорость убывания отклонения $\lambda = 1.5$.

Рисунки 2 и 3 демонстрируют графики переменных состояния для начальных условий $x_1(0) = -5.0$, $x_2(0) = 0.5$, $x_3(0) = -0.5$ и $x_4 = -1.0$. Начальные невязки, таким образом, равны $\delta_1(0) = U_1(x_1(0), x_2(0)) - x_3(0) = 1.5$ и $\delta_2(0) = \dot{U}_1(x_1(0), x_2(0)) - x_4(0) = 1.0$. На рис. 2 показаны отклонения и скорости (x_1, x_2) и (w_1, w_2) исследуемой и эталонной систем, а на рис. 3 для сравнения представлены переменные x_3 и x_4 и функции $U_1(x_1, x_2)$ и $\dot{U}_1(x_1, x_2)$. Видно, что невязки δ_1 и δ_2 быстро убывают и становятся практически равными нулю при $t > t_d \approx 3$. Первые две компоненты вектора состояния интегратора 4-го порядка ведут себя аналогично переменным состояния интегратора 2-го порядка в том смысле, что графики одного из них могут быть получены из графиков другого сдвигом вдоль оси времени: $x_i(t) \approx w_i(t - t_d)$, $i = 1, 2$, for $t > t_d$ (рис. 2). Время задержки t_d зависит как от параметров λ и ξ , так и от начальных условий.

Наконец, для демонстрации отсутствия устойчивости нулевого решения при $\xi \leq 3$ на рис. 4 показаны графики x_1 и x_2 для $\xi = 2.0$. Из рисунка видно, что система останавливается на некотором расстоянии от начала координат.

Заключение. Рассмотрена задача стабилизации цепочки четырех интеграторов при дополнительном условии следования вдоль целевой траектории вблизи состояния равновесия. Целевая траектория определена неявно как траектория эталонной системы. В качестве эталонной системы взят интегратор 2-го порядка, стабилизируемый с помощью обратной связи в виде вложенных сатураторов. Предложен новый закон управления в виде комбинации кусочно-непрерывной и импульсной составляющих. Показано, что система, замкнутая таким законом управления, является гибридной аффинной системой и что задача исследования ее устойчивости сводится к исследованию устойчивости более простой системы 2-го порядка с переключениями. Определена область значений параметров обратной связи, обеспечивающих глобальную устойчивость исследуемой системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Доказательство не зависит от конкретных значений ресурса управления (k_4) и максимальной скорости (k_2). Поэтому без потери общности положим их равными единице. При замыкании системы (1.2) обратной связью (1.4) получаем кусочно-линейную систему, определенную уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_3 k_1 x_1 - k_3 x_2 \quad (\text{П.1})$$

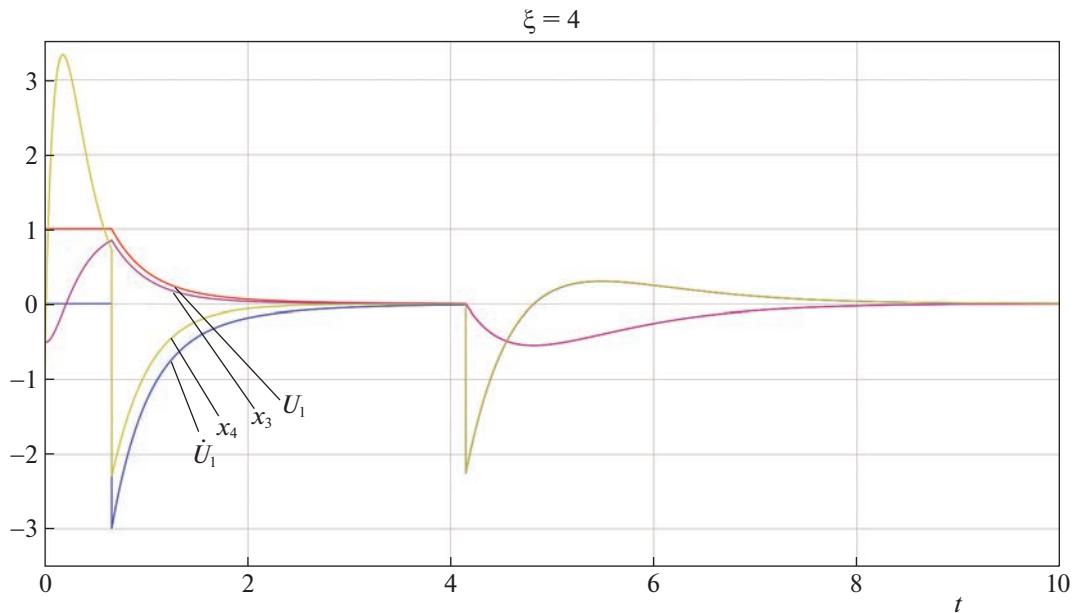


Рис. 3. Графики переменных x_3 и x_4 и функций $U_1(x_1, x_2)$ и $\dot{U}_1(x_1, x_2)$ ($\xi = 4.0$).

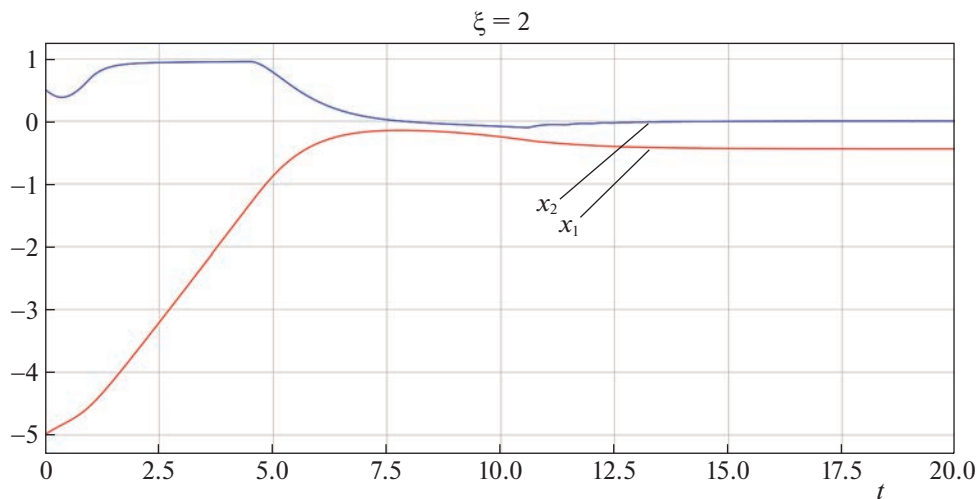


Рис. 4. Графики отклонения x_1 и скорости x_2 при $\xi = 2.0$.

в области D_1 и уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_3(x_2 + \text{sign}(x_1)), \quad (\text{П.2})$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\text{sign}(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1)) \quad (\text{П.3})$$

в D_2 и D_3 соответственно. Условие леммы означает, что начало координат является устойчивым узлом уравнения (П.1). Пусть корни характеристического уравнения равны $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$, где $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$.

Доказательство леммы основано на хорошо известном факте из теории динамических систем 2-го порядка [16]. Множество ω -предельных точек (т.е. предельных точек положительных полутраекторий) ограниченных траекторий системы может состоять только из точек равновесия, траекторий, соединяющих точки равновесия, и замкнутых траекторий. Так как рассматриваемая система имеет единственную точку равновесия (устойчивый узел в начале координат) требуется

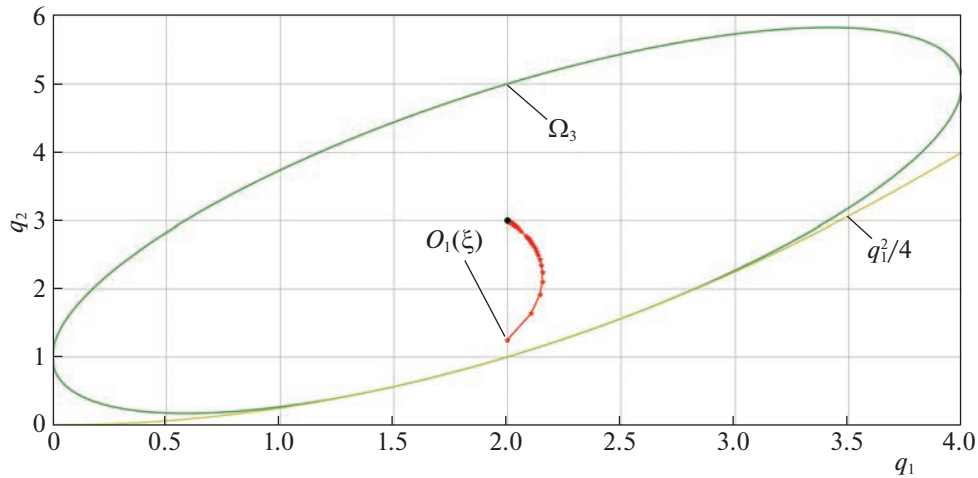


Рис. 5. Эллипс Ω_3 и траектория центра эллипса $\Omega_1(\xi)$ при изменении ξ от 3 до ∞ .

доказать, что любая траектория, во-первых, принадлежит ограниченному множеству и, во-вторых, не может быть замкнутой кривой.

Из уравнения (П.2) и рис. 1, легко видеть, что любая траектория, начинающаяся в D_2 , за конечное время попадает в D_1 . В D_3 интегральными кривыми системы (П.3) являются параболы $x_1(t) = -\text{sign}(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1))x_2^2(t)/2 + C$, двигаясь вдоль которых система попадает либо в D_1 , либо в D_2 . Другими словами, любая траектория через конечное время обязательно попадает в D_1 (но не обязательно после этого остается в нем). Следовательно, с учетом ограниченности множества D_1 никакая траектория не может уйти в бесконечность. Отсюда также следует, что никакая замкнутая траектория не может целиком лежать в D_1 или D_2 , или в их объединении $D = D_1 \cup D_2$. В силу условий леммы, очевидно также, что не существует замкнутой траектории, целиком лежащей в области D_1 . Таким образом, любая замкнутая траектория, если существует, должна дважды пересекать область D , делящую множество D_3 на две разомкнутые области D_3^- и D_3^+ , лежащие выше и ниже области D , в которых управление принимает предельные значения -1 и $+1$ соответственно. Для краткости, будем называть сегменты траекторий, принадлежащих множеству $D = D_1 \cup D_2$, в котором управление не насыщено, и множеству D_3 , в котором управление достигает насыщения, ненасыщенными и насыщенными сегментами. Следовательно, любая замкнутая траектория должна состоять из четырех — двух насыщенных и двух ненасыщенных — сегментов, причем движение вдоль такой траектории должно быть направлено по часовой стрелке. Возможны только три следующих варианта локализации таких сегментов на фазовой плоскости:

- 1) ненасыщенные сегменты целиком лежат во втором и четвертом квадрантах;
- 2) ненасыщенный сегмент начинается в первом (третьем) квадранте на множестве D_1 и заканчивается во втором (четвертом) квадранте;
- 3) ненасыщенный сегмент начинается в первом (третьем) квадранте на множестве D_2 и заканчивается во втором (четвертом) квадранте.

Рассмотрим эти три случая отдельно.

1. Функция

$$V = |x_1| + \frac{1}{2}x_2^2,$$

положительна всюду, за исключением начала координат, где она равна нулю. Производная $\dot{V}$ в силу системы (1.2) определена формулой

$$\dot{V} = x_2(\text{sign}(x_1) + U_1(x)), \quad (\text{П.4})$$

где $|U_1(x)| \leq 1$. Определим знак $\dot{V}$ на каждом из вышеперечисленных сегментов. В первом квадранте $U_1(x) = -1$; поэтому $\dot{V} = 0$. Часть траектории, лежащая во втором квадрате, в общем случае

состоит из трех участков: часть насыщенного сегмента, на котором $U_1(x) = -1$, ненасыщенный сегмент и участок насыщенного сегмента, на котором $U_1(x) = 1$. На первом из них $\dot{V} = 0$; на втором $\dot{V} = x_2(1 - |U_1(x)|) < 0$, так как $x_2 < 0$, и на третьем $\dot{V} = 2x_2 < 0$. Аналогично находим, что на участках траектории, лежащих в третьем и четвертом квадрантах, производная либо отрицательна, либо равна нулю. Это означает, что после прохождения всех четырех сегментов система попадает в ту же точку фазовой плоскости с другим значением функции V , что невозможно. Следовательно, замкнутая траектория такого типа не может существовать.

2. Рассмотрим для определенности первый квадрант. Докажем, что, если траектория входит в область D_1 в первом квадранте, то она уже не выйдет из нее и, таким образом, не может быть замкнутой. Войдя в D_1 в первом квадранте, траектория пересечет ось x_1 на интервале $(0, x_{10})$, где $x_{10} = 1/k_1 k_3$ — абсцисса точки, в которой верхняя граница множества D_1 пересекает ось x_1 (рис. 1). Траектория может выйти из области D_1 только если она пересечет асимптоту $x_2 = -\lambda_1 x_1$ уравнения (1.6), что невозможно. Действительно, асимптота пересекает нижнюю границу области D_1 в точке с координатами $(1/\lambda_1^2, -1/\lambda_1)$, абсцисса которой больше, чем x_{10} . Следовательно, весь участок асимптоты, принадлежащий вертикальной полосе $0 < x_1 < x_{10}$, полностью лежит в области D_1 , так что траектория не может выйти из D_1 и стремится асимптотически в начало координат.

3. В третьем случае часть множества D_2 лежит в первом и третьем квадрантах. Такое расположение возможно только при малых значениях k_3 , когда расстояние от прямой линии $x_2 = -1$ ($x_2 = 1$) до верхней (нижней) границы D_2 , равное $1/k_3$, больше единицы, т.е. при $k_3 < 1$. Рассмотрим, для определенности, первый квадрант. Войдя в D_2 в первом квадранте, траектория пересечет ось x_1 и затем в полосе $-1 < x_2 < 0$ пересечет границу $x_1 = 1/k_1$ между множествами D_2 и D_1 . Отметим, что асимптота и нижняя граница D_1 пересекают эту линию в точках с ординатами $x_2^a = -\lambda_1/k_1 - 1 - \lambda_1/\lambda_2$, $|x_2^a| \leq 2$, и $x_2^b = -1 - 1/k_3$ соответственно. Так как $k_3 < 1$, имеем $|x_2^b| > 2$ и, следовательно, $|x_2^a| < |x_2^b|$. Отсюда следует, что весь участок асимптоты, лежащий в вертикальной полосе $0 < x_1 < 1/k_1$, полностью лежит в D_1 , так что траектория не может его пересечь, а значит, и выйти из D_1 , и асимптотически стремится в начало координат, как и в предыдущем случае. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Необходимость. Для того чтобы система (2.3) была устойчива при любых переключениях, необходимо, чтобы все три матрицы C_1 , C_2 и C_3 были гурвицевы. Для $\lambda > 0$ матрица C_3 — гурвицева при любых $\xi > 0$; C_2 — при $\xi > 1$ и $\xi \neq 2$ и C_1 — при $\xi > 3$. Отсюда, очевидно, следует необходимость условия леммы.

Достаточность. Для того чтобы нулевое решение δ -подсистемы (2.3) было глобально устойчиво, достаточно чтобы существовала общая квадратичная функция Ляпунова $V = \delta^T P \delta$ для всех трех линейных систем (2.3), т.е. существовала положительно-определенная матрица $\tilde{P}$, удовлетворяющая трем линейным матричным неравенствам (л.м.н.) [7, 17]:

$$Q_i \equiv -(\tilde{P}C_i + C_i^T \tilde{P}) \succ 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{П.5})$$

Из гурвицевости матриц C_i , $i = \overline{1, 3}$, при $\xi > 3$ следует, что каждое отдельное л.м.н. в (П.5) имеет решение. Докажем, что их общее решение существует.

Будем искать матрицу $\tilde{P}$ в виде $\tilde{P} = rP$, где $r > 0$ и [18]

$$P = \begin{bmatrix} \lambda \xi & q_1/2 \\ q_1/2 & q_2/\lambda \xi \end{bmatrix}, \quad (\text{П.6})$$

$q_1, q_2 > 0$ и $q_2 > q_1^2/4$. Последнее неравенство, обеспечивающее положительную определенность матрицы P , выполняется для всех точек на плоскости (q_1, q_2) , лежащих выше параболы $q_2 = q_1^2/4$ (рис. 5). Множество решений каждого неравенства в (П.5) в пространстве переменных r, q_1, q_2 — конус, а его проекция на плоскость $r = 1$ — эллипс:

$$\Omega_i = \{(q_1, q_2) : PC_i + C_i^T P \prec 0\}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (\text{П.7})$$

где P определена формулой (П.6). Общая функция Ляпунова для всех трех систем (2.3) существует, если пересечение трех эллипсов не пусто, т.е. существует точка (q_1^*, q_2^*) , принадлежащая всем трем эллипсам (П.7). Покажем, что центр эллипса Ω_1 удовлетворяет этому условию при любых $\xi > 3$.

Подставляя (П.6) в первое л.м.н. в (П.5), получаем

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda^2[(\xi^2 + 3)q_1 - 4\xi] & \lambda \left[(\xi - 1)q_1 + \frac{\xi^2 + 3}{\xi} q_2 - \xi \right] \\ * & 4q_2 - q_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.8})$$

Матрица Q_1 положительно определена тогда и только тогда, когда

$$q_1 > \frac{4\xi}{\xi^2 + 3} \quad (\text{П.9})$$

и ее детерминант положителен. Второе условие после несложных, но громоздких вычислений сводится к неравенству

$$q^T W_1 q + 2q^T b_1 + d_1 < 0, \quad (\text{П.10})$$

где $q = (q_1, q_2)^T$,

$$W_1 = \begin{bmatrix} 2\xi^2 - 2\xi + 4 & -\frac{1}{\xi}(\xi + 1)(\xi^2 + 3) \\ -\frac{1}{\xi}(\xi + 1)(\xi^2 + 3) & (\xi^2 + 3)^2/\xi^2 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = -\begin{bmatrix} \xi(\xi + 1) \\ \xi^2 - 8\xi + 3 \end{bmatrix}, \quad d_1 = -\xi^2.$$

Сравнивая (П.10) с каноническим уравнением эллипса

$$(q - O_1)^T W_1 (q - O_1) < R_1,$$

где O_1 — вектор координат центра эллипса, получаем

$$O_1 \equiv \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{bmatrix} = -W_1^{-1} b_1 = \begin{bmatrix} \frac{2\xi(\xi + 1)}{\xi^2 + 3} \\ \frac{(3\xi^2 - 4\xi + 5)\xi^2}{(\xi^2 + 3)^2} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.11})$$

Координата $q_1^*(\xi)$, очевидно, удовлетворяет условию (П.9) при любых $\xi > 3$. Докажем, что $O_1(\xi) \in \Omega_3$ при любых $\xi > 3$. Легко проверить (см., например, доказательство в [18]), что эллипс Ω_3 не зависит от параметра $\lambda\xi$ и определен формулой [18]

$$\Omega_3 = \{(q_1, q_2) : (q_2 - q_1 - 1)^2 + (q_1 - 2)^2 < 4\}. \quad (\text{П.12})$$

На рис. 5 показаны граница эллипса Ω_3 и парабола $q_2 = q_1^2/4$, отделяющая область, в которой матрица P положительно определена, а также кривая, описываемая точкой $O_1(\xi)$, при изменении ξ от 3 до бесконечности. Как видим, кривая полностью лежит внутри эллипса и, следовательно, $O_1(\xi) \in \Omega_3$ при любых $\xi > 3$. Заметим, что центр $O_1(\xi)$ стремится к центру $O_3 = [2, 3]^T$, когда $\xi \rightarrow \infty$.

Докажем теперь, что $O_1(\xi) \in \Omega_2$ при любых $\xi > 3$. Подставляя (П.6) во второе л.м.н. в (П.5), получаем

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda^2[(\xi^2 + 4)q_1 - 4\xi] & \lambda \left[(\xi - 1)q_1 + \frac{\xi^2 + 4}{\xi} q_2 - \xi \right] \\ * & 4q_2 - q_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.13})$$

Условие $Q_1(\xi) \in \Omega_2(\xi)$ выполняется, если матрица $Q_2^*(\xi)$, получающаяся подстановкой $q_1^*(\xi)$ и $q_2^*(\xi)$ в (П.13) вместо q_1 и q_2 соответственно, положительно определена при любых $\xi > 3$. Из неравенства (П.9) следует, что первый диагональный элемент $Q_2^*(\xi)$ положительный. Проверим знак детерминанта матрицы $Q_2^*(\xi)$. Имеем

$$\det Q_2(\xi, q_1, q_2) = \lambda^2 \left[-(\xi^2 + 4)q_1^2 - (\xi - 1)^2 q_1^2 - \frac{(\xi^2 + 4)^2}{\xi^2} q_2^2 - \right. \\ \left. - \frac{2(\xi - 1)(\xi^2 + 4)}{\xi^2} q_1 q_2 + 4(\xi^2 + 4)q_1 q_2 + 4\xi q_1 + 2\xi(\xi - 1)q_1 - 16\xi q_2 + 2(\xi^2 + 4)q_2 - \xi^2 \right].$$

Подставляя $q_1^*(\xi)$ и $q_2^*(\xi)$ вместо q_1 и q_2 в последнюю формулу, находим

$$\det Q_2^*(\xi) = \lambda^2 R(\xi) / (\xi^2 + 3)^4,$$

где $R(\xi)$ — полином:

$$R(\xi) = 4\xi^8 - 24\xi^7 + 68\xi^6 - 144\xi^5 + 235\xi^4 - 256\xi^3 + 206\xi^2 - 152\xi + 47, \quad (\text{П.14})$$

сведя таким образом задачу к доказательству строгой положительности этого полинома при $\xi > 3$. Легко убедиться с помощью непосредственной проверки, что $R(\xi)$ преобразуется к виду

$$R(\xi) = 4\xi^6(\xi - 3)^2 + 16\xi^4(2\xi - 3)(\xi - 3) + \xi^2(91\xi - 74)(\xi - 2) + (58\xi + 22)(\xi - 3) + 113. \quad (\text{П.15})$$

Так как каждое слагаемое в правой части (П.15) положительно при $\xi > 3$, $R(\xi)$ также положительно. Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Goebel R., Sanfelice R.G., Teel A.R. Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness. New Jersey: Princeton University Press, 2012.
2. Teel A.R. Global Stabilization and Restricted Tracking for Multiple Integrators with Bounded Controls // Systems & Control Letters. 1992. V. 18. P. 165–171.
3. Teel A.R. A Nonlinear Small Gain Theorem for the Analysis of Control Systems with Saturation // Trans. Autom. Contr. IEEE. 1996. V. 41. P. 1256–1270.
4. Pao L., Franklin G. Proximate Time-optimal Control of Third-order Servomechanisms // IEEE Transactions on Automatic Control. 1993. V. 38. P. 560–580.
5. Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Robust Stabilization of MIMO Systems in Finite/fixed Time // Int. J. Robust. Nonlinear Control. 2016. V. 26. P. 69–90.
6. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Solution Examples on Ellipsoidal Methods: Computation in High Dimensions. Cham: Springer, 2014. Ch. 4. P. 147–196.
7. Lin H., Antsaklis P.J. Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results // IEEE Transactions on Automatic Control 2009. V. 54. P. 308–322.
8. Pyatnitskiy E., Rapoport L. Criteria of Asymptotic Stability of Differential Inclusions and Periodic Motions of Time-varying Nonlinear Control Systems // IEEE Transactions on Circuits and Systems. Fundamental Theory and Applications. 1996. V. 43. P. 219–229.
9. Serieye M., Albea-Sánchez C., Seuret A., Jungers M. Stabilization of Switched Affine Systems via Multiple Shifted Lyapunov Functions // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53. P. 6133–6138.
10. Pesterev A.V., Morozov Y.V. Optimizing Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // Optimization and Applications. Montenegro. 2021. V. 13078. P. 191–202.
11. Olfati-Saber R. Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles. Ph.D. Thesis. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 2001.
12. Hua M.-D., Samson C. Time Sub-optimal Nonlinear Pi and Pid Controllers Applied to Longitudinal Headway Car Control // International Journal of Control. 2011. V. 84. P. 1717–1728.

13. *Marconi L., Isidori A.* Robust Global Stabilization of a Class of Uncertain Feedforward Nonlinear Systems // Systems & Control Letters. 2000. V. 41. P. 281–290.
14. *Pesterev A.V., Morozov Y.V.* Stabilization of a Cart with Inverted Pendulum // Automation and Remote Control. 2022. V. 83. P. 78–91.
15. *Gantmacher F.* Matrix theory. 5th ed. M.: Fizmatlit, 2010.
16. *Andronov A.A., Leontovich E., Gordon I.I., Maier A.* Qualitative Theory of Second-order Dynamic Systems. New Jersey: Wiley, 1973.
17. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
18. *Pesterev A.V.* Construction of the Best Ellipsoidal Approximation of the Attraction Domain in Stabilization Problem for a Wheeled Robot // Automation and Remote Control. 2011. V. 72. P. 512–528.

УДК 519.977

БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

© 2023 г. А. С. Бортакровский^{a,b,*}^aМосковский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия^bМИСиС (национальный исследовательский технологический ун-т), Москва, Россия

*e-mail: asbortakov@mail.ru

Поступила в редакцию 12.04.2023 г.

После доработки 21.04.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

Рассматривается задача быстрогодействия группы управляемых объектов, начальное состояние каждого из которых задано, а конечное — выбирается из фиксированного набора возможных терминальных состояний (целей). Для каждого объекта требуется назначить цель и найти управление, обеспечивающее одновременное достижение группой всех выбранных целей за наименьшее время. Поскольку оптимальные по быстродействию управления отдельными объектами не решают задачу группового быстрогодействия, применяются так называемые минимально опаздывающие траектории. Разработана методика решения поставленной задачи, которая включает алгоритм решения минимаксной задачи назначения, процедуру использования оптимальных и минимально опаздывающих траекторий. Решена задача быстрогодействия группы объектов, плоское движение которых представляется траекториями Маркова–Дубинса.

DOI: 10.31857/S0002338823050049, EDN: OECKJA

Введение. Задачи группового управления имеют многочисленные приложения, в том числе при управлении подвижными объектами [1–3], в частности летательными аппаратами [4–9]. Постановки задач группового управления подвижными объектами весьма разнообразны [10]. Например, задачи сбора группы в заданной области [4], обход препятствий [2, 4, 8], перехват подвижной цели [11], управление в конфликтной среде [12]. Управляемыми динамическими системами служат математические модели роботов, летательных аппаратов, надводные и подводные корабли. Для моделирования движения беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) [13] нередко используется модель Маркова–Дубинса [14–16] или ее обобщения [17, 18].

В статье рассматривается задача одновременного достижения точечных целей группой подвижных объектов за наименьшее время. Решение задачи проводится в несколько этапов.

На первом этапе для каждого объекта управления определяется такая цель из множества заданных, чтобы максимальное время движения всех объектов группы до целей было минимальным. Иначе говоря, находится минимальное время (рекорд) одновременного достижения всех целей. Для этого решается задача минимаксного назначения [19–21] или, что то же самое, линейная задача о назначениях узких мест [22, 23].

На втором этапе выясняется существование траекторий, приводящих объекты управления в назначенные цели в рекордное время. Все объекты группы делятся на “дальние” и “ближние”. “Дальние” объекты должны двигаться к своим целям оптимальным по быстродействию образом. Для них рекордное время совпадает с минимальным. Напротив, для каждого “ближнего” объекта рекордное время больше минимального. Поэтому движение “ближних” объектов не должно быть оптимальным, чтобы они не опередили “дальние”. Замедление “ближних” объектов можно выполнить разными способами. В [8] предлагается удлинять траектории, объединяя участки кратчайших путей. В [9] траектория дополняется начальным участком с неоптимальным (либо антиоптимальным, либо нейтральным) управлением. Так или иначе, получаются неопаздывающие траектории, которые приводят “ближние” объекты в конечное состояние в рекордное (но неоптимальное для них) время. Такие траектории являются субоптимальными. Как правило, они определяются либо неоднозначно, либо вообще не существуют. Если неопаздывающие траектории находятся для всех “ближних” объектов, то задача группового быстрогодействия решена. Если для некоторых объектов нет неопаздывающих траекторий, то повторяем двухэтапную процедуру.

Снова решаем задачу минимаксного назначения (первый этап), но уже не для оптимальных, а так называемых минимально опаздывающих траекторий. Затем для нового назначения проверяем существование неопаздывающих траекторий (второй этап), но уже для нового рекорда, который хуже предыдущего. В результате итерационной процедуры либо находится решение задачи группового быстрогодействия, либо рекорд превысит максимально допустимое значение.

Предлагаются алгоритмы решения минимаксной задачи назначения, нахождения минимально опаздывающих траекторий, решения задачи группового быстрогодействия. Эффективность предлагаемых алгоритмов демонстрируется на примерах быстрогодействия группы объектов, плоское движение которых представляется траекториями Маркова–Дубинса.

В [8, 24, 25] рассматриваются более сложные задачи назначения для БПЛА, учитывающие препятствия, противодействие противника, периодичность попадания в цель и т.п. При этом, как правило, применяются эвристические алгоритмы или “ручная доводка” запланированных траекторий до попадающих в реальных условиях.

1. Постановки задач. Проблема оптимального по быстродействию управления группой подвижных объектов имеет комплексный характер и может быть представлена как совокупность задач оптимального управления, параметрической и дискретной оптимизации. Рассмотрим постановки соответствующих задач.

Задача минимаксного назначения (линейная задача назначения узких мест). Пусть имеется M подвижных объектов и N пунктов назначения (целей), причем $N \geq M$. Формально для каждого объекта выбирается свой пункт назначения (без повторения номеров цели), при этом в некоторые цели подвижные объекты не будут направлены. Фактически некоторые цели могут совпадать, поэтому в них будут направлены несколько объектов. В частности, если все N целей совпадают, то получается задача сбора группы M объектов в одном месте.

Пусть известно время T_{ij} передвижения i -го объекта в j -й пункт назначения, $i = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, N$. Каждому объекту ставится в соответствие свой пункт назначения: первому объекту – j_1 -я цель, второму – j_2 -я цель и т.д., последнему – j_M -я цель, причем номера целей попарно не совпадают. Такое паросочетание называется назначением [26] и обозначается $(j_1, \dots, j_M)$. Заметим, что назначение представляет собой размещение (без повторений) M чисел из N возможных. Качество назначения $(j_1, \dots, j_M)$ характеризуется временем достижения всех целей:

$$T(j_1, \dots, j_M) = \max_{i=1, \dots, M} T_{i j_i}. \quad (1.1)$$

Требуется найти минимальное значение T^* функции (1.1) и оптимальное назначение $(j_1^*, \dots, j_M^*)$, на котором это значение достигается:

$$T^* = \min_{(j_1, \dots, j_M)} T(j_1, \dots, j_M) = \min_{(j_1, \dots, j_M)} \max_{i=1, \dots, M} T_{i j_i}. \quad (1.2)$$

Минимизация проводится по всем размещениям $(j_1, \dots, j_M)$ по M чисел из N возможных.

Отметим, что полный перебор всех размещений по M объектов из N возможных составляет $N!/(N-M)!$ вариантов. Наибольшее количество вариантов $N!$ получается при $M = N$, когда количество подвижных объектов совпадает с количеством целей.

Для решения задачи назначения разработаны разные алгоритмы [25], в том числе пороговый алгоритм [27] и алгоритм последовательных приращений [28]. Метод ветвей и границ реализуется в предлагаемом алгоритме (см. Приложение). В нем не используются вспомогательные булевы матрицы, задающие назначение, в отличие от [21]. Для групп с небольшим количеством объектов управления алгоритм оказался вполне эффективным.

В результате решения задачи (1.2) определяются “дальние” и “ближние” подвижные объекты. Время движения “дальних” объектов до цели равно T^* , а время движения “ближних” – меньше T^* .

Задача группового быстрогодействия. Пусть на промежутке времени $[0, T]$ движение группы объектов управления описывается уравнениями

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \quad i = 1, \dots, M, \quad (1.3)$$

где $x_i(t)$ и $u_i(t)$ – состояние и управление i -го объекта в момент времени $t \in T$, $x_i(t) \in X = \mathbb{R}^{n_i}$; $u_i(t) \in U_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$, U_i – заданное множество допустимых значений управления, $i = 1, \dots, M$. Функции f_i непрерывны вместе с градиентами $\partial f_i / \partial x_i$.

Начальное состояние каждого объекта группы задано:

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.4)$$

Конечное состояние каждого объекта выбирается из множества целей $\{z_1, \dots, z_N\}$:

$$x_1(T) = z_{j_1}, \dots, x_M(T) = z_{j_M}. \quad (1.5)$$

Номера целей попарно различные, т.е. $j_i \neq j_k$, если $i \neq k$. Иначе говоря, упорядоченный набор $(j_1, \dots, j_M)$ представляет собой размещение (без повторений) по M чисел из N возможных, причем $M \leq N$. Конечные условия (1.5) определяют “точечные” цели, фиксируя тем самым правые концы траекторий подвижных объектов. Заметим, что сами цели в множестве $\{z_1, \dots, z_N\}$ не обязательно различные. Например, равенство $z_1 = z_2$ (при $M = N$) означает, что в эту цель должны попасть два объекта группы. В частности, если все цели совпадают, то получаем задачу о сборе группы в одном месте в одно и то же время. Конечные условия (1.5) попадания в “точечные” цели можно заменить условиями достижения терминальных поверхностей. В этом случае правые концы траекторий становятся подвижными [29, 30].

Допустимым процессом управления i -м объектом считаем абсолютно непрерывную траекторию $x_i(\cdot)$ и ограниченное измеримое управление $u_i(\cdot)$, удовлетворяющие почти всюду на $[0, T]$ дифференциальному уравнению (1.3) с терминальными условиями (1.4), (1.5). Допустимый процесс управления группой составляется из допустимых процессов управления всеми ее объектами.

Требуется определить назначение целей (1.5) и найти допустимые процессы управления объектами, при которых время T одновременного достижения всех целей будет минимальным. Иначе говоря, требуется решить задачу группового быстрогодействия

$$T \rightarrow \min. \quad (1.6)$$

Как отмечалось выше, по результату T^* (см. (1.2)) решения задачи назначения все объекты можно разделить на “дальние” и “ближние”. Время оптимального движения “дальних” объектов до цели равно T^* , а время оптимального движения “ближних” — меньше T^* . Поэтому движение “ближних” объектов необходимо замедлить. Для этого вместо оптимального управления нужно применить такое субоптимальное управление, при котором время движения цели окажется равным T^* .

Задача быстрогодействия одного объекта. Она является частным случаем задачи группового быстрогодействия. Запишем кратко постановку задачи, опуская индекс i — номер объекта:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.7)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T, \quad (1.8)$$

$$T \rightarrow \min. \quad (1.9)$$

Здесь $x(t)$ и $u(t)$ — состояние и управление в момент времени $t \in [0, T]$, $x(t) \in X = \mathbb{R}^n$; $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$, U — заданное множество допустимых значений управления. Постановка задачи (1.9) — классическая [31]. Возможно изменение терминальных условий. Например, вместо конечного состояния в (1.8) определить окончание процесса управления первым достижением терминальной поверхности Γ , заданной уравнением

$$\Gamma(T, x(T)) = 0, \quad (1.10)$$

где $\Gamma : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ — вектор-функция.

Задача о множестве моментов достижения цели. Для управляемой системы (1.7) моментом достижения цели (заданного конечного состояния) будем называть момент времени T , для которого существует траектория системы, удовлетворяющая терминальным условиям (1.8). Иначе говоря, момент достижения — это допустимое время окончания процесса управления. Например, время T_0 (решение задачи быстрогодействия (1.9)) является моментом достижения, причем наименьшим. В задаче о множестве моментов достижения цели требуется найти все возможные моменты достижения заданного конечного состояния, т.е. определить множество $\mathbb{T} = \mathbb{T}(x_0 | x_T)$ допустимых моментов окончания процессов управления.

Заметим, что поставленная задача будет в некотором смысле двойственной к задаче нахождения множества достижимости. В самом деле, множество достижимости $\mathbb{X}(T|x_0)$ образуют все возможные состояния $x(T)$ управляемой системы в заданный момент времени T . Множество $\mathbb{T} = \mathbb{T}(x_0|x_T)$ составляют все возможные моменты достижения заданного состояния x_T . Из определений этих множеств следует равносильность включений

$$x(T) \in \mathbb{X}(T|x_0) \Leftrightarrow T \in \mathbb{T}(x_0|x(T)).$$

В постановке задачи о моментах достижения цели конечное состояние системы фиксировано. Возможны другие условия окончания, например достижение терминальной поверхности, заданной уравнением (1.10). В этом случае левый конец траектории фиксирован первым равенством в (1.8), правый — подвижный, а множество $\mathbb{T} = \mathbb{T}(x_0|\Gamma)$ моментов достижения цели зависит от терминальной поверхности. Возможны и другие терминальные условия [29], например условия периодичности.

Задача минимизации опоздания. Рассмотрим задачу быстрогодействия (1.7)–(1.9) с дополнительным условием

$$T \geq T_*, \quad (1.11)$$

где T_* — заданное минимальное допустимое время достижения конечного состояния (цели). Не меняя решения задачи (1.7)–(1.9), функционал (1.9) можно переписать в виде

$$\Delta T = T - T_* \rightarrow \min. \quad (1.12)$$

Величина ΔT равна опозданию системы при достижении ее конечного состояния по сравнению с “желаемым” временем окончания T_* . Поэтому задачу (1.12) с условием (1.11) можно назвать задачей минимизации опоздания (к назначенному сроку T_*), а искомое управление — минимально опаздывающим.

В зависимости от величины T_* минимально опаздывающее управление имеет разный смысл. В самом деле, при $T_* = 0$ минимально опаздывающее управление является оптимальным по быстродействию. Такое же управление получаем при $T_* \leq T_0$, где T_0 — решение задачи быстрогодействия (1.7)–(1.9). Действительно, в этом случае ограничение $T \geq T_*$ не оказывает влияния на решение задачи, так как выполняется автоматически, поскольку $T \geq T_0$.

Если $T_* > T_0$, то возможны два варианта: либо опоздание равно нулю, либо нет. В первом случае $T = T_*$, т.е. существует неопаздывающее управление, при котором система попадает в заданное конечное состояние в заданный момент времени T_* . Заметим, что неопаздывающее управление обычно определяется неоднозначно. Его можно получить, если немного “ухудшить” оптимальное управление. Например, для подвижных объектов с регулируемой скоростью движения можно уменьшить величину оптимальной скорости, которая, как правило, максимально допустимая. Аналогичное уменьшение возможно для оптимальной (максимальной) тяги двигателя. Однако на практике встречаются подвижные объекты с нерегулируемой скоростью или с фиксированным ускорением. Например, это БПЛА с реактивным двигателем постоянной тяги, некоторые типы космических аппаратов и др. Для таких объектов нахождение неопаздывающего управления сложнее, чем оптимального, а иногда вообще невозможно.

Во втором случае опоздание ненулевое, т.е. $T > T_*$. Это означает, что неопаздывающей траектории, для которой $T = T_*$, не существует, а минимально опаздывающее управление является условно оптимальным, т.е. оптимальным по быстродействию с дополнительным условием (1.11).

Задача минимизации опоздания связана с задачей о времени достижения цели. Действительно, если известно множество $\mathbb{T} = \mathbb{T}(x_0|x_T)$ моментов достижения цели x_T , то минимально опаздывающему управлению для заданного значения T_* соответствует момент

$$T = \min\{T \in \mathbb{T}(x_0|x_T) | T \geq T_*\} \quad (1.13)$$

Если $T_* \in \mathbb{T}(x_0|x_T)$, то существует субоптимальное управление, приводящее в состояние $x(T_*) = x_T$. Если $T_* \notin \mathbb{T}(x_0|x_T)$, то минимально опаздывающему управлению соответствует минимальное время $T \in \mathbb{T}(x_0|x_T)$, удовлетворяющее неравенству $T \geq T_*$, что и записано в (1.13).

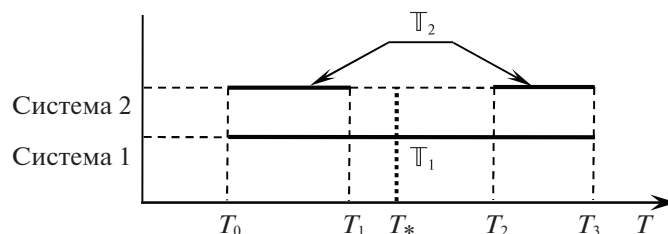


Рис. 1. Множества моментов достижения целей

На рис. 1 полужирными линиями изображены множества $\mathbb{T}_1 = [T_0, T_3]$ и $\mathbb{T}_2 = [T_0, T_1] \cup [T_2, T_3]$ моментов достижения целей для двух систем соответственно, а пунктирной линией — назначенный срок T_* . Поскольку $T_* \in \mathbb{T}_1$, первая система может попасть в конечное состояние в момент T_* . Значит, существует неопаздывающее управление, приводящее систему 1 в заданное конечное состояние в момент T_* .

Вторая система, напротив, не может достигнуть заданного конечного состояния в момент T_* , так как $T_* \notin \mathbb{T}_2$. Неопаздывающей траектории нет, но минимально опаздывающая траектория существует. Время движения до цели с минимальным опозданием равно T_2 .

2. Условия оптимальности для задачи быстрогодействия одного объекта. Задача быстрогодействия (1.7)–(1.9) относится к классическим задачам оптимального управления. Для ее решения применяем принцип максимума Понтрягина [31]. Составляем функцию Гамильтона–Понтрягина (ГП)

$$H(\psi, t, x, u) = \psi f(t, x, u) - 1, \quad (2.1)$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ — набор вспомогательных переменных, которые удовлетворяют сопряженной системе уравнений

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), t, x(t), u(t)). \quad (2.2)$$

Из условия максимума функции ГП по управлению выражаем оптимальное управление

$$u(t) = \arg \max_{u \in U} H(\psi(t), t, x(t), u). \quad (2.3)$$

Составляем краевую задачу для уравнений (1.7), (2.2), дополняя дифференциальные уравнения краевыми условиями (1.8) и равенством $H(\psi(T), T, x(T), u(T)) = 0$, которое следует из условия трансверсальности.

Таким образом, задача быстрогодействия одного подвижного объекта сведена к двухточечной краевой задаче для системы $2n$ дифференциальных уравнений. Методы численного решения таких задач рассматриваются в [29, 32].

Заметим, что для получения исходных данных для задачи назначения (см. разд. 1) нужно определить минимальное время T_{ij} достижения i -м объектом j -й цели, $i = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, N$. Для этого приходится решать MN задач быстрогодействия. Такая процедура значительно упрощается, если модель движения объекта управления простая и оптимальное управление известно.

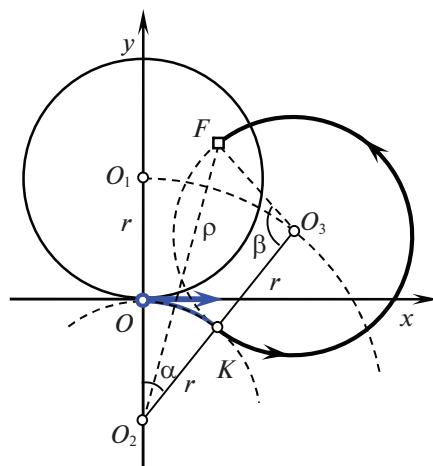
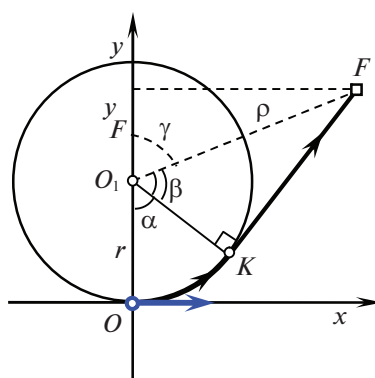
Пример 1. Пусть на промежутке $[0, T]$ движение системы описывается уравнениями модели Маркова–Дубинса [14–16]

$$\dot{x}(t) = V \cos \varphi(t), \quad \dot{y}(t) = V \sin \varphi(t), \quad \dot{\varphi}(t) = \omega(t), \quad (2.4)$$

где x, y — координаты положения объекта на плоскости Oxy , φ — угол направления движения, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс, V — постоянная линейная скорость движения, ω — угловая скорость. Управлением служит измеримая функция $\omega(\cdot)$, удовлетворяющая ограничению $|\omega| \leq \Omega$, где Ω — максимальная допустимая угловая скорость.

Начальное состояние и конечное положение системы заданы

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad x(T) = x_F, \quad y(T) = y_F.$$


 Рис. 2. Оптимальная траектория CC

 Рис. 3. Оптимальная траектория CL (дуга поворота меньше π)

Отметим, что в конечный момент времени направление $\varphi(T)$ движения не задано, т.е. речь идет о достижении заданной точки $F(x_F, y_F)$ на координатной плоскости.

Требуется найти наименьшее значение времени T и оптимальное управление $\omega(\cdot)$, на котором оно достигается, т.е. решить задачу быстродействия

$$T \rightarrow \min.$$

Можно сказать, что поставлена задача наискорейшего попадания в точечную цель.

Решение этой задачи известно [14, 33]. Его можно получить, применяя принцип максимума Понтрягина [31]. Оптимальное управление оказывается кусочно-постоянным с одним переключением, причем $\omega(t) \in \{0, \pm \Omega\}$. Оптимальные траектории на плоскости Oxy представляют собой гладкое соединение либо двух дуг окружностей (траектория типа CC (рис. 2)), либо дуги окружности и отрезка (траектория типа CL (рис. 3, 4)). Приведем оптимальные траектории для нулевого начального состояния $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. Без ограничения общности будем считать, что конечное положение системы — точка $F(x_F, y_F)$ находится в верхней полуплоскости $y \geq 0$.

Если цель F находится внутри окружности радиуса $r = V/\Omega$ с центром в точке $O_1(0, r)$, то оптимальной будет траектория типа CC . Если вне этой окружности, то оптимальной будет траектория типа CL . Типичные траектории CC и CL представлены на рис. 2–4 соответственно. Начальное состояние и направление начальной скорости показано полужирным вектором, приложенным к началу координат, конечные положения отмечены квадратиками F , направление движения по траекториям указывается стрелками. Заметим, что $r = V/\Omega$ — наименьший допустимый радиус поворота.

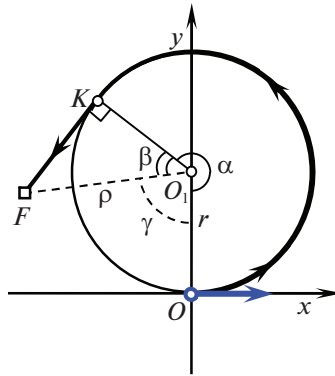


Рис. 4. Оптимальная траектория CL (дуга поворота больше π).

Вычислим время T_0 движения по оптимальной траектории CC . Пусть K — точка гладкого соединения дуг окружностей с центрами O_2 и O_3 . Обозначим через ρ длину отрезка O_2F , а через α — угловую меру дуги OK . Тогда из треугольника O_2O_3F получаем

$$\beta = \arccos \frac{5r^2 - \rho^2}{4r^2}. \quad (2.5)$$

Величина α равна сумме углов

$$\alpha = \angle O_1O_2O_3 = \angle O_1O_2F + \angle O_3O_2F = \arcsin \frac{x_F}{\rho} + \arccos \frac{3r^2 + \rho^2}{4r\rho}. \quad (2.6)$$

Время движения находится следующим образом:

$$T_0 = \frac{\alpha r + (2\pi - \beta)r}{V} = \frac{2\pi + \alpha - \beta}{\Omega}. \quad (2.7)$$

Подчеркнем, что у оптимальной траектории CC угловая величина дуги второй окружности (с центром O_3) больше π . Это обстоятельство окажется важным для построения субоптимальных траекторий.

Вычислим время T_0 движения по оптимальной траектории CL . Пусть K — точка касания прямой и окружности, ρ — длина отрезка O_1F , α — угловая мера дуги OK , β — величина угла KO_1F , а γ — величина угла OO_1F . Предположим, что конечное положение $F(x_F, y_F)$ принадлежит первой четверти, т.е. $x_F \geq 0$, $y_F \geq 0$ (см. рис. 3). Тогда

$$\alpha = \pi - \gamma - \beta = \pi - \arccos \frac{y_F - r}{\rho} - \arccos \frac{r}{\rho} = \arccos \frac{r - y_F}{\rho} - \arccos \frac{r}{\rho},$$

а время движения

$$T_0 = \frac{\alpha r + \sqrt{\rho^2 - r^2}}{V} = \frac{\alpha}{\Omega} + \frac{\sqrt{\rho^2 - r^2}}{V}. \quad (2.8)$$

Если конечное положение $F(x_F, y_F)$ находится во второй четверти (при $x_F < 0$, $y_F \geq 0$ (см. рис. 4)), то приходим к той же формуле (2.8), но величина угла поворота

$$\alpha = 2\pi - \gamma - \beta = 2\pi - \arccos \frac{r - y_F}{\rho} - \arccos \frac{r}{\rho}. \quad (2.9)$$

Траектории CC и CL получаются при релейном оптимальном управлении. Единственное переключение происходит в точках K (см. рис. 2–4). Момент переключения t_1 определяется величиной α угла поворота:

$$t_1 = \frac{\alpha}{\Omega}. \quad (2.10)$$

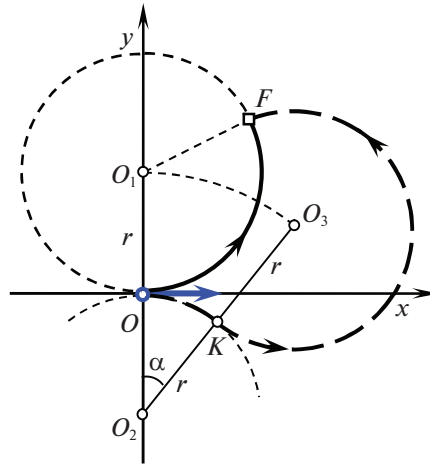


Рис. 5. Линия разрыва функции цены.

Рассмотрим частные случаи. Если конечное положение F находится на окружности радиуса r с центром O_1 , то оптимальная траектория — дуга этой окружности. Величина α угла поворота вычисляется по формулам

$$\alpha = \arcsin \frac{x_F}{\rho} \quad \text{при} \quad x_F \geq 0; \quad \alpha = 2\pi + \arcsin \frac{x_F}{\rho} \quad \text{при} \quad x_F < 0,$$

а время движения

$$T_0 = \frac{\alpha}{\Omega}. \quad (2.11)$$

Если точка F принадлежит положительной части оси абсцисс ($x_F > 0, y_F = 0$), то угол поворота $\alpha = 0$, а время движения

$$T_0 = \frac{x_F}{V}. \quad (2.12)$$

В случае $x_F < 0, y_F = 0$ применяются формулы (2.8), (2.9).

Если начальное состояние ненулевое, то нужно перенести начало системы координат в стартовое положение (x_0, y_0) объекта управления и повернуть ее в соответствии с направлением φ_0 скорости движения, при необходимости выполнить отражение в новой оси абсцисс, если ордината цели окажется отрицательной. После этого момент переключения и минимальное значение времени движения вычисляются соответственно по формулам (2.7), (2.8), (2.11), (2.12).

Полученные формулы (2.7), (2.8), (2.11), (2.12) показывают, что минимальное время T_0 непрерывно зависит от координат цели F на всей верхней полуплоскости, за исключением полуокружности с центром O_1 радиуса r , находящейся в первой четверти ($x \geq 0, y \geq 0$). При переносе точки F через эту линию изменяется тип оптимальной траектории, а время T_0 меняется скачком, так как вычисляется по разным формулам ((2.7) или (2.8)). Иначе говоря, функция цены $T_0(F)$ имеет конечный разрыв на этой полуокружности.

Вычислим величину скачка. Пусть точка F находится на линии разрыва (рис. 5). Дуга OF (полужирная линия) является оптимальной траекторией. Минимальное время достижения цели находим по формулам (2.10), (2.11):

$$T_0 = \frac{1}{\Omega} \arcsin \frac{x_F}{\rho}. \quad (2.13)$$

Кривая OKF (штриховая линия) — попадающая траектория типа CC . Время движения по этой траектории вычисляется по формулам (2.5)–(2.7):

$$T_0 = \frac{1}{\Omega} \left(2\pi + \arcsin \frac{x_F}{\rho} + \arccos \frac{3r^2 + \rho^2}{4r\rho} - \arccos \frac{5r^2 - \rho^2}{4r^2} \right). \quad (2.14)$$

Величина скачка определяется разностью величин (2.13) и (2.14):

$$\Delta T_0 = \frac{1}{\Omega} \left(2\pi + \arccos \frac{3r^2 + \rho^2}{4r\rho} - \arccos \frac{5r^2 - \rho^2}{4r^2} \right). \quad (2.15)$$

Следовательно, если конечное положение цели перемещается, пересекая линию разрыва в точке F в направлении к центру O_1 , то минимальное время T_0 увеличивается скачком на величину (2.15).

Таким образом, в классической задаче Маркова–Дубинса попадания в заданную цель функция цены всюду непрерывно зависит от позиции цели, за исключением линии разрыва, на которой она имеет скачок (2.15).

3. Методика нахождения моментов достижения цели. Известно [34], что в граничные точки множества достижимости приводят траектории, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина для задачи быстрогодействия. Следует ожидать, что граничные точки множества $\mathbb{T} = \mathbb{T}(x_0 | x_T)$ также соответствуют процессам, удовлетворяющим необходимым условиям оптимальности.

Действительно, наименьший элемент T_0 множества $\mathbb{T}$ является решением задачи быстрогодействия (1.7)–(1.9). Если множество $\mathbb{T}$ состоит, например, из двух отрезков $\mathbb{T} = [T_0, T_1] \cup [T_2, T_3]$, то момент T_2 достижения цели — решение задачи быстрогодействия (1.7)–(1.9) с дополнительным условием $T \geq T_*$, где T_* — любой момент между T_1 и T_2 . Иначе говоря, время T_2 соответствует минимально опаздывающему управлению при заданном T_* . Таким образом, левые границы непесекающихся отрезков, входящих в множество $\mathbb{T}$, соответствуют моментам окончания процессов, удовлетворяющих принципу максимума. Для правых границ отрезков такое утверждение не доказано и, возможно, неверное.

Пример 2. Пусть на промежутке $[0, T]$ движение системы описывается уравнениями (2.4) модели Маркова–Дубинса [14–16]. Нулевое начальное состояние O и конечное положение $F(x_F, y_F)$ определяются равенствами:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad x(T) = x_F, \quad y(T) = y_F. \quad (3.1)$$

Требуется решить задачу о времени достижения цели, т.е. для каждого конечного положения F найти множество $\mathbb{T}(O|F)$ всех допустимых моментов T окончания процессов управления.

Решение этой задачи будем искать, предполагая, что цель $F(x_F, y_F)$ находится в верхней полуплоскости $y \geq 0$. Наименьший элемент T_0 множества $\mathbb{T}(O|F)$ является решением задачи быстрогодействия (см. пример 1). Поэтому для каждого момента $T > T_0$ нужно либо найти неопаздывающую траекторию, удовлетворяющую терминальным условиям (3.1), либо показать, что такой траектории нет.

Предлагается строить неопаздывающие траектории, удлиняя оптимальные путем добавлением нового участка: либо отрезка, либо дуги окружности. В зависимости от положения цели F на координатной плоскости Oxy будем строить разные неопаздывающие траектории. На рис. 6 представлены характерные области 1–4 расположения цели. Границами областей служат окружность с центром $O_1(0, r)$ радиуса r , дуга окружности с центром $O_2(0, -r)$ радиуса $3r$, луч $y = 2r$, $x \geq 0$. Здесь, как и ранее, $r = V/\Omega$ — наименьший допустимый радиус поворота. Пунктирной полукругом на рис. 6 изображена линия разрыва функции цели, о которой шла речь в примере 1. Решим задачу о множестве моментов достижения цели для каждой области.

Пусть цель находится в области 1 (см. рис. 6). Оптимальная траектория OKF типа CL изображена на рис. 7 полужирной линией. Минимальное время T_0 достижения цели находится по формуле (2.8). Рассмотрим попадающую траекторию типа LCL движения объекта управления, при котором сначала выполняется прямолинейное движение в течение времени τ , потом поворот в положительном направлении и, наконец, прямолинейное движение в цель. На рис. 7 такая

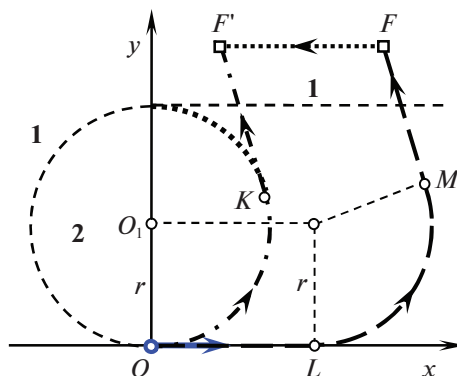


Рис. 8. Перемещение цели в области 1 для неопаздывающей траектории LCL .

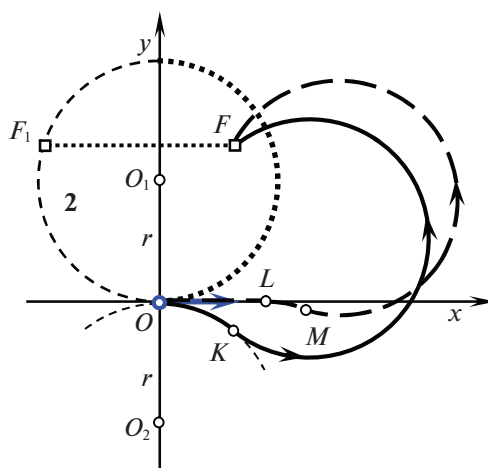


Рис. 9. Оптимальная траектория CC и неопаздывающая траектория LCC (цель в области 2).

рис. 9, 10 штриховыми линиями $OLMF$ соответственно. На первом участке обеих траекторий происходит прямолинейное движение объекта в течение времени τ . Первый участок продолжается либо двумя поворотами (рис. 9), либо поворотом с последующим прямолинейным движением до цели (рис. 10). Первые участки попадающих траекторий отличаются длиной. У траектории LCC (на рис. 9) первый участок $OL = V\tau$ короче отрезка $FF_1 = x_F - \sqrt{y_F(2r - y_F)}$, а у траектории LCL (на рис. 10) отрезок OL больше FF_1 . Время T движения по траекториям LCC или LCL больше, чем время T_0 движения по оптимальной траектории OKF .

Получим зависимость времени T от продолжительности τ первого участка. Для этого, как и ранее, вместо движения объекта управления рассмотрим перемещение цели относительно объекта управления, который будем считать неподвижным. Прямолинейному движению объекта по отрезку $OL = V\tau$ соответствует относительное перемещение цели по отрезку $FF' = V\tau$ (рис. 11, 12). После такого перемещения цель окажется в точке F' либо в области 2 (см. рис. 11), либо в области 1 (см. рис. 12). В обоих случаях время движения по попадающим траекториям определяется равенством (3.2), в котором, однако, минимальное время $T_0(F')$ движения из нулевого начального состояния в конечное состояние $F'(x_F - V\tau, y_F)$ по траекториям OKF' (штрихпунктирные линии на рис. 11, 12) вычисляется либо по формуле (2.7), либо по формуле (2.8) соответственно.

Функция $T_0(F')$ непрерывна в областях 1 и 2. Координаты точки F' непрерывно зависят от τ . Поскольку перемещение FF' цели из области 2 в область 1 (рис. 12) не пересекает линии разрыва функции цены (пунктирной полуокружности на рис. 6). Значит, функция $T_0(F')$ непрерывно зависит от параметра τ . Поэтому при любом значении $T \geq T_0$ найдется корень τ уравнения (3.2).

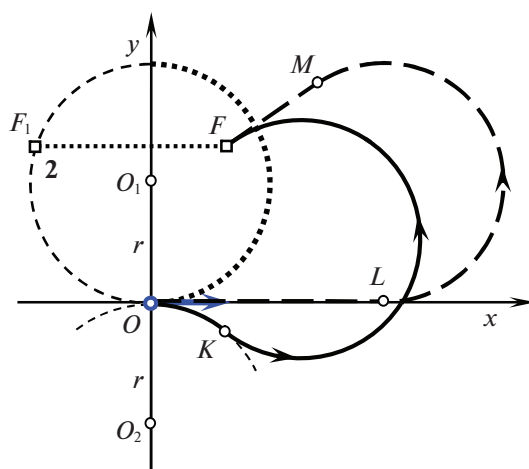


Рис. 10. Оптимальная траектория CC и неопаздывающая траектория LCL (цель в области 2).

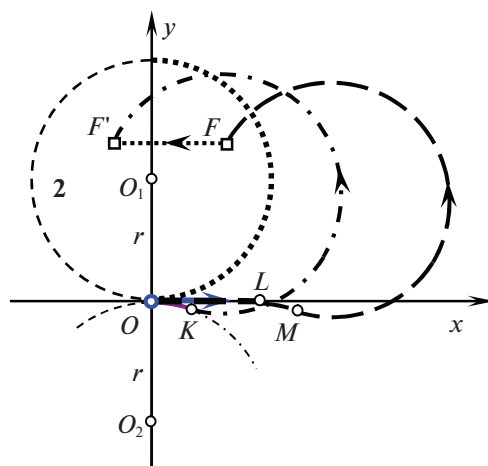


Рис. 11. Перемещение цели в области 2 для неопаздывающей траектории LCC .

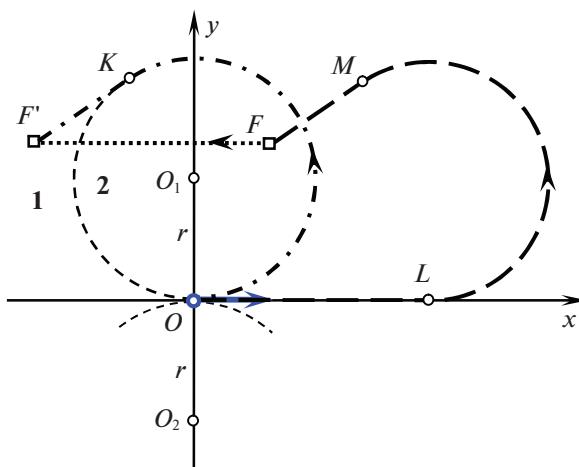


Рис. 12. Перемещение цели из области 2 для неопаздывающей траектории LCL .

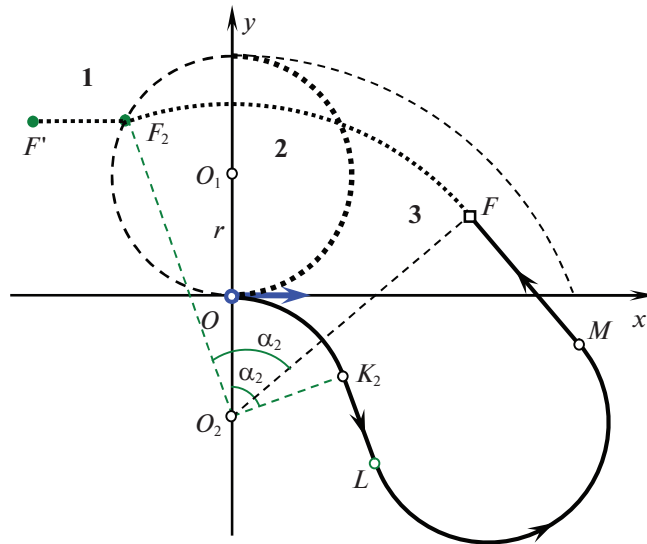


Рис. 16. Перемещение цели из области 3 для попадающей траектории CLCL.

на угол $\alpha_2 = \angle FO_2F_2$ и по отрезку $F_2F' = K_2L$. После таких перемещений цель останавливается в точке F' в области 1 относительно неподвижного объекта управления. Поэтому общее время движения по траектории типа CLCL оказывается равным

$$T = \frac{\alpha_2}{\Omega} + \tau + T_0(F'), \quad (3.8)$$

где $T_0(F')$ — минимальное время движения из нулевого начального состояния в конечное положение $F'(x', y')$, координаты которого находятся по формулам

$$x' = x_F \cos \alpha_2 - y_F \sin \alpha_2 - r \sin \alpha_2 - V\tau; \quad y' = x_F \sin \alpha_2 + y_F \cos \alpha_2 + r \cos \alpha_2 - r. \quad (3.9)$$

Так как функция $T_0(F_3)$ непрерывная в области 1, а координаты (3.9) точки F_3 непрерывно зависят от параметра τ , то при любом значении $T \geq T_2$ найдется корень τ уравнения (3.8). Иначе говоря, для любого $T \geq T_2$ существует неопаздывающая попадающая траектория.

Подчеркнем, что момент $T \in (T_1, T_2)$ не является допустимым моментом достижения цели. Первоначальному повороту объекта управления в отрицательном направлении соответствует относительное перемещение цели по дуге FF_1F_2 в противоположном направлении движение (рис. 14). При этом перемещении цель пересекает пунктирную полуокружность, которая, как отмечалось в примере 1, является линией разрыва функции цены. На этой дуге в точке F_1 происходит скачок (2.15) функции цены от значения T_1 к значению T_2 . Промежуточных значений (между T_1 и T_2) функция цены не принимает. Поэтому не существует траекторий, достигающих цель в момент $T \in (T_1, T_2)$. Однако минимально опаздывающая траектория для $T \in (T_1, T_2)$ существует. Это траектория типа CC, представленная на рис. 13 штриховой линией OK_2F . Время T_2 движения по этой траектории определяется формулой (3.5).

Пусть цель находится в области 4 (рис. 6). Оптимальная траектория OKF типа CL изображена на рис. 17, 18 полужирной линией. Минимальное время T_0 достижения цели находится по формуле (2.8). Рассмотрим попадающие траектории двух типов CCL и CLCL, которые представлены на рис. 17, 18 штриховыми линиями OK_1LF и OK_1LMF соответственно. На первом участке OK_1 обеих траекторий происходит поворот в отрицательном направлении на угол α и α_1 соответственно, причем $\alpha < \alpha_1$. Угол $\alpha = \Omega\tau$, где τ — продолжительность первого участка траектории OK_1LF (рис. 17). Угол $\alpha_1 = \angle OO_2F_1 = \arccos(3r/\rho)$, где F_1 — точка пересечения луча $y = 2r$, $x \geq 0$ окружности с центром O_2 радиуса $\rho = O_2F$ с границей области 4 (лучом $y = 2r$, $x \geq 0$). Первый участок траектории CCL продолжается поворотом в положительном направлении и

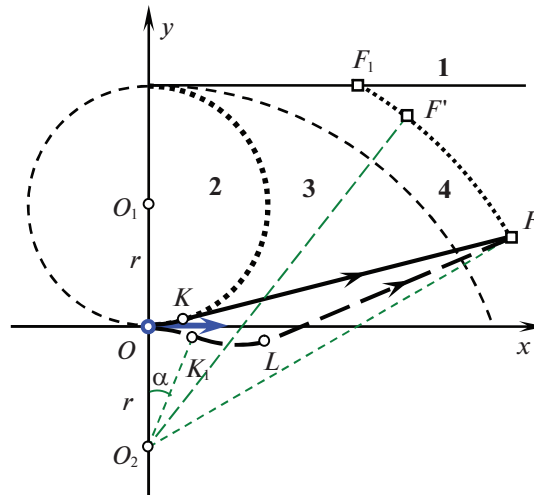


Рис. 17. Оптимальная траектория CL и перемещение цели в области 4 для неопаздывающей траектории CCL .

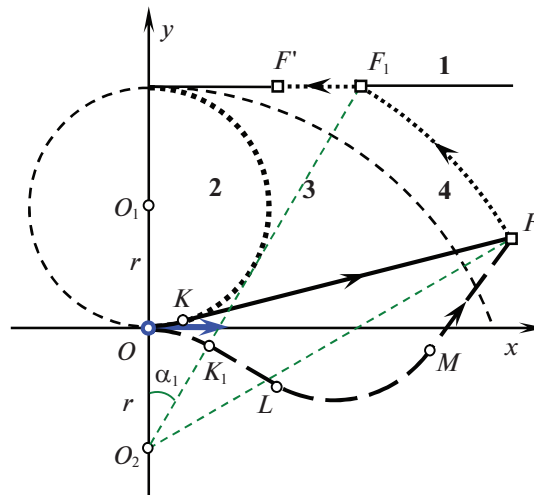


Рис. 18. Оптимальная траектория CL и перемещение цели из области 4 для неопаздывающей траектории $CLCL$.

прямолинейным движением в цель (см. рис. 17). За первым участком траектории $CLCL$ следует участок прямолинейного движения продолжительности $\tau - \alpha_1/\Omega$, затем поворот в положительном направлении и, наконец, прямолинейное движение в цель. Время T движения по траекториям CCL или $CLCL$ больше, чем время T_0 движения по оптимальной траектории OKF .

Получим зависимость времени T движения от параметра τ . Рассмотрим относительное перемещение цели для обеих попадающих траекторий. Для траектории типа CCL первоначальному повороту на угол $\alpha = \angle OO_2K_1$ соответствует перемещение цели по дуге FF' той же угловой величины $\alpha = \angle FO_2F'$ (рис. 17). После такого перемещения цель окажется в точке F' в области 4. Поэтому время движения по траектории OK_1LF типа CCL вычисляется по формулам (3.6), (3.7).

Для траектории типа $CLCL$ первоначальному повороту на угол $\alpha_1 = \angle OO_2K_1$ соответствует перемещение цели по дуге FF_1 той же угловой величины $\alpha_1 = \angle FO_2F'$ (рис. 18). После такого перемещения цель окажется в точке F_1 на границе области 1. Прямолинейному движению объекта по отрезку $K_1L = V(\tau - \alpha_1/\Omega)$ соответствует относительное перемещение цели по отрезку F_1F' той же длины (рис. 18). Конечное положение F' цели остается в области 1. Поэтому общее время дви-

жения по траектории OK_1LMF типа $CLCL$ вычисляется по формуле (3.6), в которой координаты конечного положения $F'(x', y')$ цели определяются выражениями

$$x' = \rho \sin \alpha_1 - V \left(\tau - \frac{\alpha_1}{\Omega} \right); \quad y' = 2r.$$

Зависимость времени T движения от параметра τ непрерывная, поскольку при относительном перемещении FF' цели линия разрыва функции цены (пунктирная полуокружность на рис. 17, 18) не пересекается. Поэтому для любого значения $T \geq T_0$ найдется корень τ уравнения (3.6). Иначе говоря, для любого $T \geq T_0$ существует неопаздывающая попадающая траектория. Следовательно, множество моментов достижения цели в области **4** представляет собой луч $\mathbb{T}(O|F) = [T_0(F), +\infty)$.

Таким образом, в классической задаче Маркова–Дубинса множеством моментов достижения цели является либо луч $[T_0, +\infty)$, либо объединение двух промежутков $[T_0, T_1] \cup [T_2, +\infty)$, где T_0 – минимальное время достижения цели, а T_1 и T_2 – моменты, определяемые формулами (3.5). В частном случае, когда цель лежит на границе областей **2** и **3**, множество моментов достижения цели будет объединением точки и луча $\{T_0\} \cup [T_2, +\infty)$, поскольку в этом случае $T_1 = T_0$.

4. Условия оптимальности для задачи минимизации опоздания. Задача минимизации опоздания отличается от задачи быстродействия (1.7)–(1.9) с дополнительным условием (1.11):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \\ x(0) &= x_0, \quad x(T) = x_T, \\ T &\geq T_*, \\ T &\rightarrow \min, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где T_* – заданное минимальное допустимое время достижения конечного состояния (цели). Применяя метод Лагранжа снятия ограничений [35], составляем функционал

$$L = \lambda_0 T + \lambda(T_* - T),$$

для которого записываем необходимые условия оптимальности. В регулярном [35] (невыврожденном [30]) случае при $\lambda_0 = 1$ условия принципа максимума Понтрягина будут совпадать с соотношениями (2.1)–(2.3). Отличия заключаются в условиях трансверсальности

$$H(\psi(T), T, x(T), u(T)) = 1 - \lambda,$$

дополняющей нежесткости $\lambda(T_* - T) = 0$ и неотрицательности $\lambda \geq 0$.

Задачу (4.1) можно решать без применения метода Лагранжа. Для этого нужно модифицировать минимизируемый функционал (4.1):

$$T_+ = \max\{T - T_*; 0\} \rightarrow \min. \tag{4.2}$$

Такая негладкая модификация может быть полезна при решении задачи (4.2) численными методами минимизации нулевого порядка [30] или методами недифференцируемой минимизации [36, 37].

Пример 3. Пусть на промежутке $[0, T]$ движение системы описывается уравнениями (2.4) модели Маркова–Дубинса [14–16]. Нулевое начальное состояние O и конечное положение $F(x_F, y_F)$ определяются равенствами (3.1). Требуется решить задачу минимизации опоздания, т.е. найти минимальное время T достижения цели, которое не меньше заданной величины T_* .

Решение этой задачи фактически получено в примерах 1, 2. В самом деле, если минимально допустимое время T_* достижения цели меньше минимального времени T_0 достижения цели, то минимально опаздывающая траектория совпадает с оптимальной по быстродействию, которая найдена в примере 1. Если цель не принадлежит области **3** на рис. 6, то множество моментов достижения цели представляет собой луч $\mathbb{T}(O|F) = [T_0(F), +\infty)$, поэтому для любого назначенного срока $T_* \geq T_0$ существует неопаздывающая траектория (см. пример 2), которая является минимально опаздывающей. Если же цель принадлежит области **3** на рис. 6, то множество моментов достижения цели представляет собой объединение двух промежутков $\mathbb{T}(O|F) = [T_0, T_1] \cup [T_2, +\infty)$,

где T_1 и T_2 — моменты, определяемые формулами (3.5). Значит, при $T_* \notin (T_1, T_2)$ минимально опаздывающая траектория совпадает с неопаздывающей, а при $T_* \in (T_1, T_2)$ минимально опаздывающая является траекторией типа CC , представленной на рис. 13 штриховой линией OK_2F . Время T_2 движения по этой траектории определяется формулой (3.5).

Таким образом, в классической задаче Маркова—Дубинса попадания в заданную цель для любого назначенного срока существует минимально опаздывающая траектория.

5. Алгоритмы решения задачи группового быстрогодействия. Решение задачи (1.3)—(1.6) группового быстрогодействия связано с нахождением оптимальных по быстродействию и минимально опаздывающих траекторий. Рассмотрим два итерационных алгоритма. В первом на каждой итерации используются множества моментов достижения целей, а минимально опаздывающие траектории строятся один раз после нахождения оптимального назначения. Во втором алгоритме на каждой итерации находятся минимально опаздывающие траектории, а множества моментов достижения целей не применяются. Выбор алгоритма зависит от трудоемкости решения вспомогательных задач. Процедура построения множеств моментов достижения для каждого объекта управления и каждой цели требует, как правило, больших вычислительных ресурсов. Однако эта процедура, используемая в первом алгоритме, выполняется один раз. Во втором алгоритме на каждой итерации нужно для каждого объекта управления и каждой цели найти минимально опаздывающие траектории. Нахождение каждой такой траектории по вычислительным затратам обычно сравнимо с поиском оптимальной траектории. Количество итераций конечное, но заранее неизвестное. Если для решения достаточно малого числа итераций, то выгоднее использовать второй алгоритм, если итераций много, то лучше применять первый алгоритм.

Поскольку численная реализация каждого алгоритма весьма сложная, она связана с многократным решением задач оптимального управления, желательно использовать аналитические методы, упрощающие решение. Например, вместо оптимального управления применять рациональное управление, если оно находится сравнительно просто, а по качеству близко к оптимальному. Либо упростить модель движения объектов управления так, чтобы оптимальные траектории можно было получить аналитически. Решить задачу группового быстрогодействия с простыми моделями движения, а полученное управление проверить на прикладных моделях, описывающих реальное движение.

Алгоритм I решения задачи группового быстрогодействия с известными множествами моментов достижения цели. Пусть в задаче (1.3)—(1.6) группового быстрогодействия для каждого объекта управления и каждой цели известны множества $\mathbb{T}_{ij} = \mathbb{T}(x_{i0} | z_j)$ моментов достижения цели, $i = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, N$. Минимальный момент T^* одновременного достижения цели определяется равенством

$$T^* = \min_{(j_1, \dots, j_M)} \min \bigcap_{i=1, \dots, M} \mathbb{T}_{ij_i}. \quad (5.1)$$

Здесь первая операция минимизация проводится по всем размещениям $(j_1, \dots, j_M)$ по M чисел из N возможных. Каждое размещение определяет назначение (паросочетание): первому подвижному объекту назначается j_1 -я цель, второму — j_2 -я цель и т.д. Второй минимум в формуле (5.1) обозначает выбор минимального элемента пересечения числовых множеств. Для решения вспомогательных задач назначения, возникающих на каждой итерации, применяется алгоритм, приведенный в Приложении. Алгоритм решения задачи группового быстрогодействия следующий.

Шаг 0. Назначаем нулевой не опережаемый срок $T_* = 0$ достижения целей и переходим к шагу 1.

Шаг 1. Составляем матрицу минимальных допустимых моментов достижений целей с элементами $T_{ij} = \min\{t \in \mathbb{T}_{ij} | t \geq T_*\}$.

Шаг 2. Решаем задачу минимаксного назначения с матрицей (T_{ij}) . Получаем оптимальное назначение $(j_1^*, \dots, j_M^*)$ и рекорд

$$T^* = T(j_1^*, \dots, j_M^*) = \min_{(j_1, \dots, j_M)} \max_{i=1, \dots, M} T_{ij_i}. \quad (5.2)$$

Шаг 3. Проверяем реализуемость рекорда T^* . Если $T^* \in \mathbb{T}_{ij}$ для всех $i = 1, \dots, M$, то переходим к шагу 4, поскольку минимальный момент T^* одновременного достижения целей найден. В противном случае увеличиваем не опережаемый срок, полагая $T_* = T^*$, и переходим к шагу 1.

Шаг 4. Находим неопаздывающие траектории для момента T^* одновременного достижения целей. Решение задачи закончено.

Поясним работу алгоритма. На первой итерации, поскольку не опережаемый срок — нулевой, матрица (T_{ij}) заполняется оптимальными по быстродействию моментами достижения целей. Решая минимаксную задачу назначения, получаем первый рекорд T^* . Заметим, что $T^* > T_*$, так как все элементы матрицы (T_{ij}) не меньше T_* . В шаге 3 алгоритма выясняется, могут ли все подвижные объекты попасть в назначенные цели в рекордное время T^* . Если могут, то задача решена, осталось только построить неопаздывающие траектории (см. шаг 4). Если нет, то после увеличения минимального срока $T_* = T^*$ достижения целей возвращаемся к шагу 1. На второй и последующих итерациях (в шаге 1) матрица (T_{ij}) заполняется моментами окончания минимально опаздывающих к назначенному сроку T_* траекторий. Заметим, что число итераций конечное, поскольку количество возможных размещений равно $N! / (N - M)!$.

Алгоритм Прешения задачи группового быстродействия при помощи минимально опаздывающих траекторий.

Шаг 0. Назначаем нулевой не опережаемый срок $T_* = 0$ достижения целей и переходим к шагу 1.

Шаг 1. Составляем матрицу (T_{ij}) моментов достижения целей минимально опаздывающими к сроку T_* траекториями. Элемент T_{ij} является решением задачи минимизации опоздания i -го объекта при достижении j -й цели:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \\ x_i(0) &= x_{i0}, \quad x_i(T) = z_i, \\ T &\geq T_*, \\ T &\rightarrow \min, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$.

Шаг 2. Решаем задачу минимаксного назначения с матрицей (T_{ij}) . Получаем оптимальное назначение $(j_1^*, \dots, j_M^*)$ и рекорд (5.2).

Шаг 3. Проверяем реализуемость рекорда T^* . Полагаем $T_* = T^*$ и решаем задачу (5.3) минимизации опоздания i -го объекта при достижении j_i^* -й цели, $i = 1, \dots, M$. Получаем моменты $T_{ij_i^*}^*$ достижения целей минимально опаздывающими к сроку T^* траекториями. Если $T_{ij_i^*}^* = T_*$ для всех $i = 1, \dots, M$, то все траектории неопаздывающие и решение задачи закончено. Если равенство $T_{ij_i^*}^* = T_*$ нарушается хотя бы для одного объекта, то имеются опаздывающие траектории. Поэтому переходим к шагу 1. (Элементы $T_{ij_i^*}^*$, $i = 1, \dots, M$, матрицы (T_{ij}) в шаге 1 повторно искать не надо.)

Оба алгоритма за конечное число шагов приводят к одному и тому же результату — минимальному времени одновременного достижения цели. Однако неопаздывающее управление объектами, а также решение задачи назначения находятся неоднозначно. Поэтому процессы управления, соответствующие оптимальному результату, могут отличаться.

Пример 4. Пусть на промежутке времени $[0, T]$ движение группы M подвижных объектов управления описывается уравнениями (2.4) модели Маркова—Дубинса [14–16]:

$$\dot{x}_i(t) = V_i \cos \varphi_i(t), \quad \dot{y}_i(t) = V_i \sin \varphi_i(t), \quad \dot{\varphi}_i(t) = \omega_i(t), \quad i = 1, \dots, M, \quad (5.4)$$

где x_i , y_i — координаты положения i -го объекта на плоскости Oxy , φ_i — угол направления движения, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс, V_i — постоянная линейная

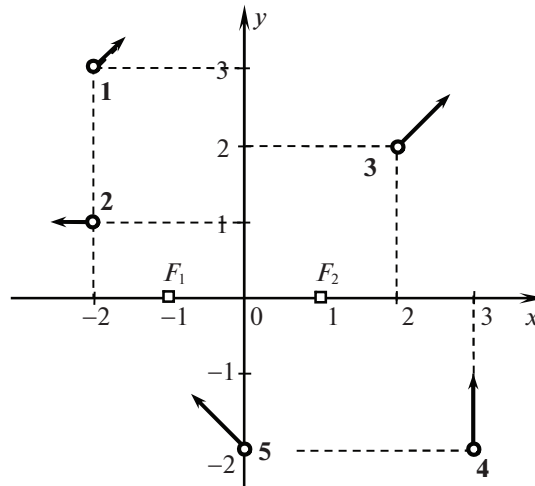


Рис. 19. Начальные состояния подвижных объектов 1–5 и положения целей F_1, F_2

скорость движения, ω_i — угловая скорость. Управлениями служат измеримые функции $\omega_i(\cdot)$, удовлетворяющие ограничению $|\omega_i| \leq \Omega_i$, где Ω_i — максимальная допустимая угловая скорость.

Начальное состояние каждого объекта группы задано равенствами

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad y(0) = y_{i0}, \quad \varphi(0) = \varphi_{i0}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (5.5)$$

Конечное положение выбирается из множества целей $\{F_1(x_{F_1}, y_{F_1}), \dots, F_N(x_{F_N}, y_{F_N})\}$:

$$x_i(T) = x_{F_{j_i}}, \quad y_i(T) = y_{F_{j_i}}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (5.6)$$

Номера целей в (5.6) попарно различные, т.е. $j_i \neq j_k$, если $i \neq k$. Иначе говоря, упорядоченный набор $(j_1, \dots, j_M)$ представляет собой размещение (без повторений) по M чисел из N возможных, причем $M \leq N$. Конечные условия (5.6) определяют “точечные” цели на координатной плоскости Oxy . Заметим, что цели в множестве $\{F_1, \dots, F_N\}$ не обязательно различные. Например, равенство $F_1 = F_2$ (при $M = N$) означает, что в эту цель должны попасть два объекта группы. В частности, если все цели совпадают, то получаем задачу о сборе группы в одном месте в одно и то же время.

Требуется определить назначение целей и найти допустимые процессы управления объектами, при которых время T одновременного достижения всех целей будем минимальным. Иначе говоря, требуется решить задачу группового быстрогодействия

$$T \rightarrow \min. \quad (5.7)$$

В задаче (5.4)–(5.7) столкновения подвижных объектов исключаются. Можно считать, что речь идет о движении группы БПЛА, которые летят на разных высотах. Кроме того, нет фазовых ограничений, запрещенных для движения областей, конфликтных ситуаций, связанных с действиями противника [8, 25].

Рассмотрим академический пример быстрогодействия группы из пяти подвижных объектов, которые направляются в две точечные цели, причем в одну цель должны попасть два объекта, а в другую — три. Значения параметров моделей движения, начальные состояния и положения целей следующие:

$$\begin{aligned} V_1 = V_2 = 1, \quad V_3 = V_4 = V_5 = 2, \quad \Omega_1 = \dots = \Omega_5 = 1; \\ x_{10} = -2, \quad y_{10} = 3, \quad \varphi_{10} = \pi/4; \quad x_{20} = -2, \quad y_{20} = 1, \quad \varphi_{20} = \pi; \quad x_{30} = 2, \quad y_{30} = 2, \\ \varphi_{30} = \pi/4; \quad x_{40} = 3, \quad y_{40} = -2, \quad \varphi_{40} = \pi/2; \quad x_{50} = 0, \quad y_{50} = -2, \quad \varphi_{50} = 3\pi/4; \\ F_3 = F_1(-1; 0), \quad F_4 = F_5 = F_2(1; 0). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Для задачи назначения цели F_1 и F_2 “клонироваться”. В равенствах (5.8) одна цель указывается дважды, а другая — трижды. На рис. 19 начальные состояния подвижных объектов изображены

Таблица 1. Первое минимаксное назначение

Объект	Цель	Время достижения
1	F_2	4.9689
2	F_1	4.7124
3	$F_4 = F_2$	5.3616
4	$F_5 = F_2$	1.5708
5	$F_3 = F_1$	1.1252

окружностями с приложенными к ним векторами скорости, цели F_1 и F_2 – квадратами. Объекты перенумерованы полужирными цифрами.

Решение поставленной задачи будем искать, применяя описанные выше алгоритмы. Чтобы использовать первый алгоритм, нужно для каждого объекта найти множество моментов достижения каждой цели. Учитывая решение примера 2, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{11} = \mathbb{T}_{13} &= [4.7606, +\infty), & \mathbb{T}_{12} = \mathbb{T}_{14} = \mathbb{T}_{15} &= [4.9689, +\infty), \\
\mathbb{T}_{21} = \mathbb{T}_{23} &= [4.7124, +\infty), & \mathbb{T}_{22} = \mathbb{T}_{24} = \mathbb{T}_{25} &= [6.3099, +\infty), \\
\mathbb{T}_{31} = \mathbb{T}_{33} &= [5.6469, +\infty), & \mathbb{T}_{32} = \mathbb{T}_{34} = \mathbb{T}_{35} &= [5.3616, +\infty), \\
\mathbb{T}_{41} = \mathbb{T}_{43} &= [2.5708, +\infty), & \mathbb{T}_{42} = \mathbb{T}_{44} = \mathbb{T}_{45} &= \{1.5708\} \cup [5.6397, +\infty), \\
\mathbb{T}_{51} = \mathbb{T}_{53} &= [1.1252; 1.4173] \cup [6.4366, +\infty), & \mathbb{T}_{52} = \mathbb{T}_{54} = \mathbb{T}_{55} &= [5.5321, +\infty).
\end{aligned}$$

Здесь $\mathbb{T}_{ij}$ – множество моментов достижения i -м объектом j -й цели с учетом “клонирования” (5.8). Изолированная точка в множестве $\mathbb{T}_{42}$ соответствует частному положению цели F_2 на границе областей 2 и 3 для 4-го объекта управления.

На шаге 0 алгоритма I полагаем $T_* = 0$ и переходим к шагу 1.

Шаг 1 (первая итерация). Составляем матрицу минимальных допустимых моментов достижений целей с элементами $T_{ij} = \min\{t \in \mathbb{T}_{ij} | t \geq T_*\}$. Так как $T_* = 0$, то выбираем минимальные элементы множеств $\mathbb{T}_{ij}$:

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 4.7606 & \mathbf{4.9689} & 4.7606 & 4.9689 & 4.9689 \\ \mathbf{4.7124} & 6.3099 & 4.7124 & 6.3099 & 6.3099 \\ 5.6469 & 5.3616 & 5.6469 & \mathbf{5.3616} & 5.3616 \\ 2.5708 & 1.5708 & 2.5708 & 1.5708 & \mathbf{1.5708} \\ 1.1252 & 5.5321 & \mathbf{1.1252} & 5.5321 & 5.5321 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

В матрице (5.9) третий столбец совпадает с первым, а четвертый и пятый – со вторым, что соответствует “клонированию” целей (5.8).

Шаг 2 (первая итерация). Решаем задачу минимаксного назначения при помощи алгоритма, приведенного в Приложении. Для матрицы (5.9) получаем назначение (2, 1, 4, 5, 3) с рекордом $T^* = 5.3616$. В матрице (5.9) элементы найденного назначения выделены полужирным курсивом. Время достижения целей при этом назначении записаны в табл. 1. Как видим, для третьего объекта назначенная цель “дальняя”, а для остальных объектов все цели “ближние”.

Шаг 3 (первая итерация). Проверяем реализуемость рекорда $T^* = 5.3616$. Так как $T^* \notin \mathbb{T}_{45}$ и $T^* \notin \mathbb{T}_{53}$, то полученное назначение нельзя реализовать. За время T^* четвертый объект не может попасть во вторую цель, а пятый – в первую. Поэтому увеличиваем не опережаемый срок, полагая $T_* = 5.3616$, и переходим к шагу 1.

Шаг 1 (вторая итерация). Составляем матрицу минимальных допустимых моментов достижений целей с элементами $T_{ij} = \min\{t \in \mathbb{T}_{ij} | t \geq T_*\}$. Так как $T_* = 5.3616$, то выбираем элементы множеств $\mathbb{T}_{ij}$, соответствующие минимально опаздывающим траекториям:

Таблица 2. Второе минимаксное назначение

Объект	Цель	Время достижения цели
1	F_2	5.3616
2	F_1	5.3616
3	$F_4 = F_2$	5.3616
4	$F_3 = F_1$	5.3616
5	$F_5 = F_2$	5.5321

Таблица 3. Неопаздывающие траектории

Объект	Цель	Тип траектории	Моменты переключения управления
1	F_2	<i>LCL</i>	0.413 2.0084 3.1121
2	F_1	<i>LCL</i>	0.53 3.8539 1.158
3	$F_4 = F_2$	<i>LCL</i>	0.15 4.4484 0.94
4	$F_3 = F_1$	<i>LCL</i>	1.7 3.1416 0.7
5	$F_5 = F_2$	<i>CC</i>	0.6619 4.8702

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 5.3616 & \mathbf{5.3616} & 5.3616 & 5.3616 & 5.3616 \\ \mathbf{5.3616} & 6.3099 & 5.3616 & 6.3099 & 6.3099 \\ 5.6469 & 5.3616 & 5.6469 & \mathbf{5.3616} & 5.3616 \\ 5.3616 & 5.6397 & \mathbf{5.3616} & 5.6397 & 5.6397 \\ 6.4366 & 5.5321 & 6.4366 & 5.5321 & \mathbf{5.5321} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Шаг 2 (вторая итерация). Решаем задачу минимаксного назначения с матрицей (5.10), получаем назначение (2, 1, 4, 5, 3) с рекордом $T^* = 5.5321$. В матрице (5.10) элементы найденного назначения выделены полужирным курсивом. Время достижения целей при этом назначении записаны в табл. 2. Как видим, для пятого объекта назначенная цель “дальняя”, а для остальных объектов все цели “ближние”.

Шаг 3 (вторая итерация). Проверяем реализуемость рекорда $T^* = 5.5321$. Так как величина T^* принадлежит множествам $\mathbb{T}_{12}, \mathbb{T}_{21}, \mathbb{T}_{34}, \mathbb{T}_{43}, \mathbb{T}_{55}$, то полученное назначение (2, 1, 4, 5, 3) реализовать можно. Наименьший момент $T^* = 5.5321$ одновременного достижения целей найден. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Находим неопаздывающие траектории для момента $T^* = 5.5321$ одновременного достижения целей. В примере 3 поиск неопаздывающей траекторий каждого типа сведен к решению нелинейного уравнения с одним неизвестным τ — продолжительностью движения по допустительному участку. В табл. 3 приведены параметры полученных траекторий.

На рис. 20 полужирными линиями изображены оптимальные траектории при первом назначении, а штриховыми — неопаздывающие траектории для второго назначения. Заметим, что на второй итерации четвертому и пятому объектам были назначены другие цели, чем при первой.

Используем для решения алгоритм II.

Шаг 0. Назначаем нулевой не опережаемый срок $T_* = 0$ достижения целей и переходим к шагу 1.

Шаг 1 (первая итерация). Составляем матрицу (T_{ij}) моментов достижения целей минимально опаздывающими к сроку $T_* = 0$ траекториями. Элемент T_{ij} является решением задачи быстрого действия (см. пример 1). Получаем матрицу (5.9).

Шаг 2 (первая итерация). Решаем задачу минимаксного назначения при помощи алгоритма, приведенного в Приложении. Для матрицы (5.9) получаем назначение (2, 1, 4, 5, 3) с рекордом $T^* = 5.3616$. В матрице (5.9) элементы найденного назначения выделены полужирным курсивом.

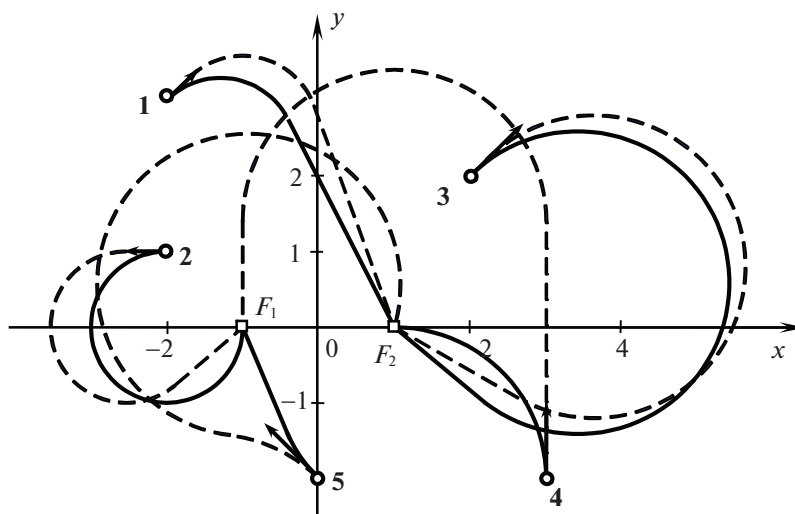


Рис. 20. Оптимальные траектории при первом назначении (полужирные линии), неопаздывающие траектории для второго назначения (штриховые линии).

Время достижения целей при этом назначении записаны в табл. 1. Как видим, для третьего объекта назначенная цель “дальняя”, а для остальных объектов все цели “ближние”.

Шаг 3 (первая итерация). Проверяем реализуемость рекорда $T^* = 5.3616$. Полагаем $T_* = T^* = 5.3616$ и решаем задачу минимизации опоздания для найденного назначения (см. пример 3). Получаем

$$T_{12} = 5.3616, \quad T_{21} = 5.3616, \quad T_{34} = 5.3616, \quad T_{45} = 5.6397, \quad T_{52} = 5.5321.$$

Поскольку $T_{45} \neq T_*$ (и $T_{52} \neq T_*$), значит, имеются опаздывающие траектории. Поэтому назначение не реализуемо, переходим к шагу 1.

Шаг 1 (вторая итерация). Составляем матрицу (T_{ij}) моментов достижения целей минимально опаздывающими к сроку $T_* = 5.3616$ траекториями. Получаем матрицу (5.10).

Шаг 2 (вторая итерация). Решаем задачу минимаксного назначения для матрицы (5.10). Получаем назначение (2, 1, 4, 5, 3) с рекордом $T^* = 5.5321$. В матрице (5.10) элементы найденного назначения выделены полужирным курсивом.

Шаг 3 (вторая итерация). Проверяем реализуемость рекорда $T^* = 5.5321$. Полагаем $T_* = T^* = 5.5321$ и решаем задачу минимизации опоздания для найденного назначения (см. пример 3). Получаем $T_{12} = T_{21} = T_{34} = T_{43} = T_{55} = 5.3616$. Так как все траектории назначения неопаздывающие, значит, это назначение реализуемо. Решение задачи закончено, параметры неопаздывающих траекторий группы представлены в табл. 3.

Оба алгоритма привели к одному и тому же решению. Это совпадение обусловлено тем, что решение задачи назначения и построение минимально опаздывающих траекторий выполнялось в обоих алгоритмах одними и теми же методами. Если применять другие методы, то получим разные неопаздывающие траектории и, возможно, разные назначения. При этом, конечно, минимальное время одновременного достижения целей находится однозначно любым точным алгоритмом.

Заключение. Поставлена задача минимизации опоздания динамической системы, которая является модификацией задачи быстрогодействия, а также задача поиска множества моментов достижения терминального состояния. Обе задачи тесно связаны с задачей группового быстрогодействия. Предложены два алгоритма решения задачи быстрогодействия группы подвижных объектов, а именно минимизации времени одновременного достижения всех целей. Эффективность этих алгоритмов в общем случае зависит от динамики управляемых систем. В статье приведена конкретная реализация обоих алгоритмов для модели Маркова–Дубинса, т.е. задача группового быстрогодействия машин Маркова–Дубинса полностью решена. Это решение можно использовать при планировании траекторий летательных аппаратов в многочисленных приложениях.

Дальнейшие исследования в этом направлении связаны с известными обобщениями задач группового управления: учетом взаимодействий между объектами группы, противодействием противника, наличием запрещенных для движения областей и т.п.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Алгоритм решения задачи минимаксного назначения. Задача минимаксного назначения или, что то же самое, линейная задача назначения узких мест (см. разд. 1) сводится к следующей задаче целочисленной оптимизации. Для заданной матрицы $T = (T_{ij})$ размеров $M \times N$, элементы которой равны времени достижения целей (T_{ij} — время движения i -го объекта до j -й цели), найти минимальное значение T^* и оптимальное размещение $(j_1^*, \dots, j_M^*)$, на котором это значение достигается:

$$T^* = \min_{(j_1, \dots, j_M)} \max_{i=1, \dots, M} T_{ij_i}. \quad (\text{П.1})$$

Минимизация проводится по всем размещениям $(j_1, \dots, j_M)$ по M чисел из N возможных.

Для решения задачи применяется метод ветвей и границ, согласно которому вместо полного перебора всех размещений строится минимизирующая последовательность размещений $\{(j_1^s, \dots, j_M^s)\}$, $s = 1, 2, \dots$, приводящая к монотонному убыванию минимизируемой функции (П.1):

$$T^1 > T^2 > \dots > T^s > \dots, \quad (\text{П.2})$$

где $T^s = T(j_1^s, \dots, j_M^s)$. Последовательность (П.2) конечная, так как количество вариантов размещений ограничено.

Для работы алгоритма кроме матрицы T размеров $M \times N$, элементы которой равны времени достижения целей (T_{ij} — время движения i -го объекта до j -й цели), потребуется также матрица J размеров $M \times N$ для записи размещений. В i -й строке матрицы J будем записывать последовательно номера целей, доступных для i -го объекта. Оставшиеся элементы этой строки — нулевые. Первый столбец матрицы J определяет размещение $(j_{11}, \dots, j_{M1})$, т.е. первому объекту назначена цель j_{11} , второму — j_{21} и т.д. Остальные столбцы вспомогательные. Например, в начале, пока нет ни одного элемента последовательности (П.2), в первую строку записываем номера всех целей; во вторую — всех целей, кроме цели j_{11} , которая назначена для первого объекта, и т.д. Если уже получено значение T^s последовательности (П.2), то в первую строку заносим номера тех целей, время достижения которых первым объектом меньше T^s , т.е. $T_{1j} < T^s$, $j = 1, \dots, N$; во вторую строку — номера целей, для которых $T_{2j} < T^s$, $j = 1, \dots, N$, $j \neq j_{11}$, кроме выбранной для первого объекта, и т.д. Подчеркнем еще раз, что только первый столбец матрицы J определяет “настоящее” размещение. Остальные столбцы предназначены для генерации вариантов. Например, при сдвиге всех элементов последней строки на одну позицию влево в первом столбце получаем новое размещение.

Перейдем к описанию алгоритма. Пусть матрица J нулевая ($J = O$), $s = 0$, $T^0 = +\infty$.

Шаг 1. Если матрица $J = O$, то полагаем $k = 1$ и переходим к шагу 2. Если матрица $J \neq O$ (в ней только первые k строк ненулевые, $k < M$, а ненулевые элементы первого столбца составляют часть назначения $(j_{11}, \dots, j_{k1})$), то полагаем $k = k + 1$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Дополняем строки матрицы J , начиная с первой нулевой строки k :

в k -ю строку записываем номера столбцов элементов k -й строки матрицы T , которые меньше T^s , при этом не учитываются столбцы с выбранными ранее парами (i, j_{i1}) , $i = 1, \dots, k$;

в $(k + 1)$ -ю строку записываем номера столбцов элементов $(k + 1)$ -й строки матрицы T , которые меньше T^s , при этом не учитываются столбцы с ранее выбранными парами (i, j_{i1}) , $i = 1, \dots, k + 1$, и т.д.

Если удалось заполнить все M строк, то получено новое назначение $(j_{11}, \dots, j_{M1})$. Тогда вычисляем новое значение

$$T^{s+1} = \max_{i=1, \dots, M} T_{ij_{i1}}.$$

Полагаем $J = O$, $s = s + 1$ и переходим к шагу 1.

Если заполнить все строки не удалось, то переходим к шагу 3.

Шаг 3. Если матрица $J = O$, то решение закончено и переходим к шагу 4. Если матрица $J \neq O$ (в ней только первые k строк ненулевые, $k < M$). Сдвигаем все элементы k -й строки на одну позицию влево $J_{kj} = J_{kj+1}$, $j = 1, N - 1$, дополняя эту строку последним нулевым элементом $J_{kN} = 0$. Если k -я строка оказалась нулевой, то выполняем сдвиг элементов в $(k - 1)$ -й строке и т.д. Если в матрице J остались ненулевые строки, то переходим к шагу 2. В противном случае (при $J = O$) решение закончено и переходим к шагу 4.

Шаг 4. Последнее назначение $(J_{11}, \dots, J_{M1})$ и значение T^{s+1} минимизируемой функции, найденные в шаге 2, являются оптимальным назначением и минимаксным значением времени достижения всех целей соответственно.

Количество вычислений можно немного уменьшить, заменяя начальное значение $T^0 = +\infty$, например, величиной

$$T^1 = \max_{i=1, \dots, M} T_{ii},$$

которая соответствует размещению $(1, 2, \dots, M)$. Первое размещение можно получить, выбирая для первого объекта ближайшую к нему цель, которой соответствует наименьший элемент в первой строке матрицы T , для второго – ближайшую к нему цель, не совпадающую с целью, выбранной для первого, и т.д. Конечно, такой выбор первого размещения не меняет оценку объема вычислений в общем случае, но может сократить его в конкретном примере. Отметим также, что алгоритм находит одно из возможных решений, если их несколько.

При $M = N$ можно поставить задачу обязательного достижения некоторых целей несколькими объектами. Для таких целей нужно записать в матрице T несколько равных столбцов. Например, если первые три столбца матрицы T совпадают, то в одну цель будет направлено три подвижных объекта.

Пример 5. Время достижения каждым из четырех подвижных объектов каждой из пяти целей указано в матрице

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти минимальное значение T^* максимальной продолжительности движения

$$T^* = \min_{(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)} \max\{T_{1j_1}, T_{2j_2}, T_{3j_3}, T_{4j_4}, T_{5j_5}\},$$

а также оптимальное назначение $(j_1^*, j_2^*, j_3^*, j_4^*, j_5^*)$, на котором это значение достигается.

Решение. Применяя алгоритм, получаем последовательно назначения и соответствующие значения минимизируемой функции $T(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5) = \max\{T_{1j_1}, T_{2j_2}, T_{3j_3}, T_{4j_4}, T_{5j_5}\}$:

$$T(1, 2, 3, 4) = 5; \quad T(2, 1, 5, 3) = 4; \quad T(2, 3, 1, 5) = 3; \quad T(2, 5, 1, 3) = 2.$$

Потребовалось построить четыре назначения, т.е. минимизирующая последовательность (П.2) имеет четыре элемента. Полный перебор всех 120 размещений показывает, что имеется еще два решения, кроме полученного, а именно: $(4, 5, 1, 2)$, $(4, 5, 1, 3)$, которые дают, разумеется, тот же самый минимум.

Пример 6. Время достижения каждым из четырех подвижных объектов каждой из четырех целей указано в матрице

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку первый и второй, третий и четвертый столбцы совпадают, то фактически имеется две цели, в каждую из которых должны быть направлены по два объекта. Требуется найти минимальное значение T^* максимальной продолжительности движения

$$T^* = \min_{(j_1, j_2, j_3, j_4)} \max\{T_{1j_1}, T_{2j_2}, T_{3j_3}, T_{4j_4}\},$$

а также оптимальное назначение $(j_1^*, j_2^*, j_3^*, j_4^*)$, на котором это значение достигается.

Решение. Применяя алгоритм, получаем последовательно назначения и соответствующие значения минимизируемой функции $T(j_1, j_2, j_3, j_4) = \max\{T_{1j_1}, T_{2j_2}, T_{3j_3}, T_{4j_4}\}$:

$$T(1, 2, 3, 4) = 5; \quad T(1, 3, 2, 4) = 3; \quad T(3, 4, 1, 2) = 2.$$

Потребовалось построить три назначения, т.е. минимизирующая последовательность (П.2) имеет три элемента. Полный перебор всех 16 перестановок показывает, что имеется еще три решения, кроме полученного, а именно: (4, 3, 2, 1), (4, 3, 1, 2), (3, 4, 2, 1), которые дают, разумеется, тот же самый минимум.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: Физматлит, 2009.
2. *Куржанский А.Б.* Задача управления групповым движением. Общие соотношения // Докл. РАН. 2009. Т. 426. № 1. С. 20–25.
3. *Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М.* Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48. № 4. С. 593–600.
4. *Евдокименков В.Н., Красильщиков М.Н., Оркин С.Д.* Управление смешанными группами пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов в условиях единого информационно-управляющего поля. М.: Изд-во МАИ, 2015.
5. *Гончаренко В.И., Желтов С.Ю., Князь В.А., Лебедева Г.Н., Михайлина Д.А., Царева О.Ю.* Интеллектуальная система планирования групповых действий беспилотных летательных аппаратов при наблюдении наземных мобильных объектов на заданной территории // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 3. С. 39–56.
6. *Tsourdou A., White B., Shanmugavel M.* Cooperative Path Planning of Unmanned Aerial Vehicles. N. Y.: Wiley&Sons, 2011.
7. *Jia Zeng, Xiaoke Yang, Lingyu Yang, Gongzhang Shen.* Modeling for UAV Resource Scheduling Under Mission Synchronization // J. Systems Engineering and Electronics. 2010. V. 21. № 5. P. 821–826.
8. *Babel L.* Coordinated Target Assignment and UAV Path Planning with Timing Constraints // J. Intelligent & Robotic Systems. 2019. V. 94 (3–4). P. 857–869.
9. *Бортаковский А.С., Щелчков К.А.* Задачи группового быстрогодействия летательных аппаратов // Тр. МАИ. 2018. № 99. http://mai.ru/upload/iblock/33c/Bortakovskiy_SHCHelchkov_rus.pdf.
10. *Poudel S., Moh S.* Task Assignment Algorithms for Unmanned Aerial Vehicle Networks: A Comprehensive Survey // Vehicular Communications. 2022. V. 35. P. 100469.
11. *Бузинов М.Э., Галаев А.А.* Перехват подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время // АиТ. 2021. № 5. С. 3–19.
12. *Галаев А.А., Рубинович Е.Я.* Планирование движения подвижных объектов в конфликтной среде // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. XI Междунар. Четаевской конф. (плenaryные доклады). Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. С. 71–90.
13. *Mohsan S.A.H., Othman N.Q.H., Li Y. et al.* Unmanned Aerial Vehicles (UAVs): Practical Aspects, Applications, Open Challenges, Security Issues, and Future Trends. Intel Serv Robotics. 2023. V. 16. P. 109–137.
14. *Марков А.А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьк. мат. общества. Сер. 2. Т. I. 1889. С. 250–276.
15. *Dubins L.E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American. Mathematics. 1957. V. 79. № 3. P. 497–516.
16. *Isaacs R.* Games of Pursuit // Scientific Report of the RAND Corporation. Santa Monica, 1951.
17. *Бортаковский А.С.* Оптимальные по быстродействию траектории плоского движения с неограниченной кривизной // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 4. С. 38–48.
18. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости для машины Дубинса: сведение общего случая ограничений на повороты к каноническому // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 4. С. 25–49.
19. *Диниц Е.А.* О решении двух задач о назначении // Исследования по дискретной оптимизации. М.: Наука, 1976. С. 333–348.
20. *Глебов Н.И.* Об одном обобщении минимаксной задачи о назначениях // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2004. Т. 11. Вып. 4. С. 36–43.
21. *Серая О.В.* Минимаксная задача назначения // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2009. Т. 3. № 3(39). С. 8–11.

22. *Fulkerson D.R., Glicksberg I., Gross O.* A Production Line Assignment Problem. Tech. Rep. RM-1102, The Rand Corporation. Santa Monica. CA, 1953.
23. *Burkard R., Dell'Amico M., Martello S.* Assignment Problems: Revised Reprint. Siam, 2012. Т. 125.
24. *Gottlieb Y.; Shima T.* UAVs Task and Motion Planning in the Presence of Obstacles and Prioritized Targets // *Sensors*. 2015. V. 15. P. 29734–29764.
<https://doi.org/10.3390/s151129734>
25. *Zhu X., Peng R.* Optimal Routing, Aborting and Hitting Strategies of UAVs Executing Hitting the Targets Considering the Defense Range of Targets // *Reliability Engineering and System Safety*. 2021. V. 215. P. 107811.
26. *Кофман А., Анри-Лабордер А.* Методы и модели исследования оптимизации. Целочисленное программирование. М.: Мир, 1976.
27. *Garfinkel R.* An Improved Algorithm for the Bottleneck Assignment Problem // *Oper. Res.* 1971. V. 19. P. 1747–1751.
28. *Derigs U., Zimmermann U.* An Augmenting Path Method for Solving Linear Bottleneck Assignment Problems // *Computing*. 1978. V. 19. P. 285–295.
29. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
30. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
31. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
32. *Грачев Н.И., Евтушенко Ю.Г.* Библиотека программ для решения задач оптимального управления // *ЖВМ и МФ*. 1979. Т.10. № 2. С. 367–387.
33. *Cockayne E.J., Hall G.W.C.* Plane Motion of a Particle Subject to Curvature Constraints // *SIAM J. Control and Optimization*. 1975. V. 13. № 1. P. 197–220.
34. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
35. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
36. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
37. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.

УДК 531.53

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПОВОРОТ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

© 2023 г. О. Р. Каюмов

Филиал ОмГПУ, г. Тара, Россия

e-mail: Oleg_Kayumov@mail.ru

Поступила в редакцию 11.11.2022 г.

После доработки 22.03.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Рассматривается задача оптимального по быстродействию поворота системы с двумя степенями свободы в виде материальной точки на пружине, совершающей колебания вдоль жесткого невесомого стержня, который вращается в горизонтальной плоскости. Внешний управляющий момент приложен к оси вращения стержня и ограничен по модулю, трение отсутствует. Решается задача наибо́льшего поворота стержня на заданный угол из состояния покоя с гашением колебаний. Особенность нелинейной системы в том, что ее линеаризованная (в окрестности состояния покоя) модель не является управляемой.

DOI: 10.31857/S000233882304008X, EDN: OСТKLLK

Введение. Приведем систему, где материальная точка массы m может скользить вдоль горизонтального жесткого невесомого стержня, вращающегося под действием внешнего момента M с заданным ограничением $|M| \leq M_0$ (рис. 1). Линейная пружина, соединяющая материальную точку с осью вращения, имеет коэффициент упругости k и длину l в ненапряженном состоянии. Полагаем, что кинематические ограничения на точку не наложены (устранены конструктивно), а трение отсутствует.

Пусть φ — угол поворота стержня, y — деформация пружины, K — кинетический момент системы. Тогда ее дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{y} + ky = m(l + y)\dot{\varphi}^2, \quad m(l + y)^2\ddot{\varphi} = K, \quad \dot{K} = M.$$

Анализ поведения такой модели может на качественном уровне прояснить характерные закономерности динамики более сложных конструкций, например, в задачах ориентации космических аппаратов с нежесткими элементами, управления их прецизионными поворотными платформами и т.д. Этой тематике посвящено много работ, в том числе, в последние годы [1, 2]. Известную трудность представляет поиск управления, оптимального по быстродействию. Здесь

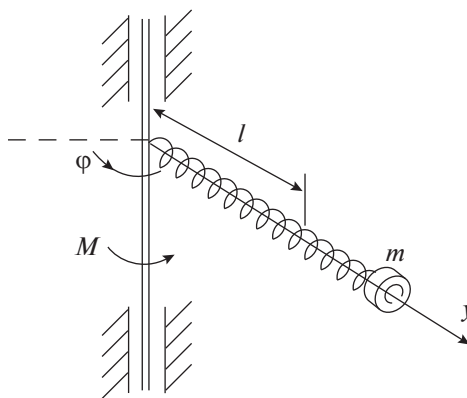


Рис. 1. Поворот пружинного маятника.

основным подходом является применение принципа максимума Понтрягина [3], поэтому поиск управлений осуществляется в классе кусочно-постоянных функций. В системе с одной степенью свободы и в многомерной линейной системе, для которой сопряженная система имеет линейно независимые решения, особые управления (равносильные бесконечно быстрым переключениям) невозможны. В нелинейных объектах, где количество управляющих воздействий равно числу степеней свободы, особые оптимальные управления давно обнаружены [4, 5] численными экспериментами. Их можно было объяснить избыточностью ресурсов. Например, когда внешний момент вращает составной механизм, то вспомогательный момент в сочленении не обязан быть максимальным, чтобы поддерживать конфигурацию с малым суммарным моментом инерции относительно оси вращения. Напротив, для системы с двумя степенями свободы и одним управлением появление особых режимов [6] не было ожидаемым. Но их наличие проявилось, в общем случае, практическую невозможность аналитического решения задачи оптимального быстрогодействия, например, путем склеивания участков траекторий с постоянными значениями управлений. Применение численных методов здесь оказалось неизбежным, что вполне относится и к рассматриваемому механизму (рис. 1).

1. Свойства управляемости объекта. Вводя безразмерные переменные $x_1 = y/l$, $\omega = l\sqrt{k/M_0}$, $u = M/M_0$, $p = K/(l\sqrt{mM_0})$ и время $t' = t\sqrt{M_0}/(l\sqrt{m})$, приведем уравнения движения системы (рис. 1) к нормальной форме:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + \frac{p^2}{(1+x_1)^3}, \quad \dot{\phi} = \frac{p}{(1+x_1)^2}, \quad \dot{p} = u, \quad |u| \leq 1. \quad (1.1)$$

Обозначим вектор состояния $\mathbf{q} = (x_1, x_2, \phi, p)^T$. Тогда в окрестности точки $(0, 0, 0, 0)^T$ линеаризованная система будет неуправляемой, поскольку она распадается на две независимые подсистемы. Тем не менее, имеет место следующее свойство.

З а м е ч а н и е 1. Нелинейная система (1.1) является глобально управляемой, т.е. может быть переведена из любого начального состояния $\mathbf{q}_0$ в любое требуемое состояние $\mathbf{q}_f$ за конечное время.

Это можно показать способом, предложенным в [7], поскольку объект (рис. 1) допускает при $u \equiv 0$ стационарное вращение:

$$x_1 \equiv x_0, \quad x_2 \equiv 0, \quad p \equiv p_0, \quad \phi = \Omega t + \phi_0. \quad (1.2)$$

Здесь величина $x_0 > 0$ берется произвольно, а к ней вычисляются соответствующие значения $p_0 = \omega(1+x_0)\sqrt{x_0(1+x_0)}$, $\Omega = \omega\sqrt{x_0/(1+x_0)}$.

Введем вектор $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$, где $z_1 = x_1 - x_0$, $z_2 = \dot{x}_1$, $z_3 = p - p_0$. В линейном приближении в окрестности состояния $\mathbf{z} = 0$ система примет вид

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h_1 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $h_1 = -\omega^2 - 3p_0^2/(1+x_0)^4$, $h_2 = 2p_0/(1+x_0)^3 \neq 0$.

Так как $\det[\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = -h_2^2 \neq 0$, то по критерию Калмана [8] система (1.1) локально управляема в окрестности положения относительного покоя (1.2). При этом систему (1.1) можно перевести из любого начального состояния $\mathbf{q}_0$ в любую ε – окрестность многообразия (1.2) за конечное время.

Действительно, используя приведенную (с учетом переносной силы инерции) потенциальную энергию

$$B(x_1) = \frac{1}{2}\omega^2 x_1^2 - \frac{1}{2}\Omega^2(1+x_1)^2,$$

составим функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1+x_1} - \Omega(1+x_1) \right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + B(x_1) - B(x_0).$$

Можно показать (подробности опускаем), что функция $(B(x_1) - B(x_0))$ — положительно-определенная бесконечно большая [9]. При этом выполняется соотношение $\dot{V} = E - p\Omega$, где E — полная энергия системы. Поэтому производная вдоль векторного поля системы (1.1) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = (\dot{\varphi} - \Omega)u.$$

Выбирая допустимое управление из условия $\text{sign} u = \text{sign}(\Omega - \dot{\varphi})$, получим $\dot{V} \leq 0$, причем тождество $\dot{V} \equiv 0$ возможно только в состоянии относительного покоя (1.2). Согласно утверждению из [7], этих свойств достаточно для глобальной управляемости системы (1.1), поскольку из любого начального состояния $\mathbf{q}_0$ ее можно за конечное время перевести в состояние (1.2), а с учетом симметрии относительно обращения времени $t \rightarrow -t$ из состояния (1.2) можно попасть в любую точку $\mathbf{q}_f$ четырехмерного фазового пространства, что и требовалось.

2. Постановка задачи и тривиальные оптимальные режимы. Далее рассмотрим задачу оптимального по быстродействию поворота системы (1.1), предварительно введя удобное начало отсчета для угла φ . Полагая, что требуемому повороту соответствует дуга 2α , назовем в середине этой дуги нулевое значение координаты φ . Аналогичную “удвоенную” запись введем и для искомого общего времени $2T$ движения системы, что придаст краевым условиям симметричный вид.

Задача оптимального быстродействия формулируется следующим образом: требуется определить управление $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, переводящее систему (1.1) из состояния

$$\varphi_0(0) = -\alpha, \quad x_1(0) = x_2(0) = p(0) = 0 \quad (2.1)$$

за наименьшее время $2T$ (заранее неизвестное) в состояние

$$\varphi_0(2T) = \alpha, \quad x_1(2T) = x_2(2T) = p(2T) = 0. \quad (2.2)$$

Используя принцип максимума Понтрягина, составим гамильтониан

$$H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 \left(-\omega^2 x_1 + \frac{p^2}{(1+x_1)^3} \right) + \lambda_3 \frac{p}{(1+x_1)^2} + \lambda_4 u.$$

Тогда оптимальное управление получит вид

$$u = \text{sign}(\lambda_4), \quad (2.3)$$

где сопряженные переменные должны удовлетворять уравнениям

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \left(\omega^2 + \frac{3p^2}{(1+x_1)^4} \right) + \frac{2\lambda_3 p}{(1+x_1)^3}, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \quad \dot{\lambda}_3 = 0, \quad \dot{\lambda}_4 = -\frac{2\lambda_2 p}{(1+x_1)^3} - \frac{\lambda_3}{(1+x_1)^2}. \quad (2.4)$$

Ввиду однородности сопряженной системы (2.4) ее решения задаются с точностью до ненулевого множителя. Поэтому далее без уменьшения общности положим $\lambda_3 \equiv 1$.

В силу замечания 1, искомое оптимальное управление существует.

Замечание 2. В задаче (1.1), (2.1)–(2.4) записанное в смещенном времени $\tilde{t} = t - T$, $\tilde{t} \in [-T, T]$, оптимальное управление $u(\tilde{t})$, а также решения $\varphi(\tilde{t})$, $x_2(\tilde{t})$, $\lambda_1(\tilde{t})$, $\lambda_4(\tilde{t})$ будут нечетными функциями, а $x_1(\tilde{t})$, $p(\tilde{t})$, $\lambda_2(\tilde{t})$ — четными функциями.

Для доказательства достаточно убедиться, что в новом времени $\tilde{t}$ все соотношения (1.1), (2.1)–(2.4) инвариантны относительно замены $\tilde{t} \rightarrow -\tilde{t}$, $u \rightarrow -u$, $\varphi \rightarrow -\varphi$, $x_2 \rightarrow -x_2$, $\lambda_1 \rightarrow -\lambda_1$, $\lambda_4 \rightarrow -\lambda_4$ при неизменных x_1 , p , λ_2 .

Из замечания 2 вытекают соотношения

$$u(T) = \varphi(T) = x_2(T) = \lambda_1(T) = \lambda_4(T) = 0, \quad (2.5)$$

характеризующие состояние системы в конце оптимальной полутраектории.

Далее поставленную задачу быстродействия будем рассматривать для взаимной вариационной задачи на максимум угла поворота 2α при заданном времени $2T$, исследуя эволюцию функций оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, 2T]$ с изменением параметра T .

На рис. 2 для случая $\omega = 2$ в системе (1.1) на плоскости (x_1, x_2) показана фазовая кривая, выходящая из точки $(0, 0)$ при постоянном управлении $u = 1$. Для краткости эту кривую будем

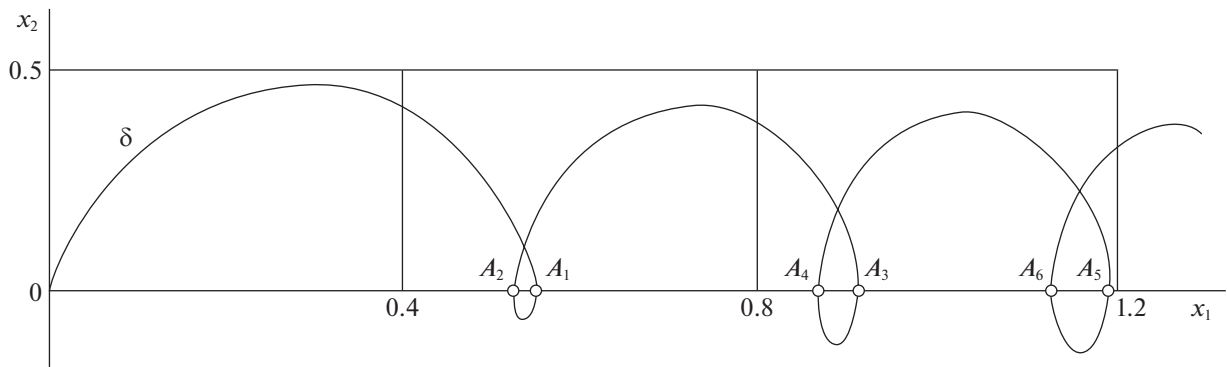


Рис. 2. Фазовая кривая системы (1.1) при $u = 1$

называть линией δ . Последовательные точки пересечения линии δ с осью Ox_1 обозначим A_i , $i=1,2,3, \dots$, где i — это номер пересечения, а соответствующие им значения времени будут T_i , $i = 1,2,3,\dots$

Любая из точек A_i , $i = 1,2,3,\dots$, может служить концом оптимальной полутраектории. Меняя в этот момент времени $t = T_i$ управление на $u = -1$, получим вторую полутраекторию, симметричную первой относительно оси Ox_1 , согласно замечанию 2. Она завершится в точке $(0, 0)$ в момент времени $t = 2T_i$. Можно показать, что такой режим из двух этапов

$$u(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \in (0, T_i], \quad u(t) = -1 \quad \text{при} \quad t \in (T_i, 2T_i] \quad (2.6)$$

удовлетворяет не только краевым условиям (2.1), (2.2), но и сопряженной системе (2.4). Соответствующие решения $\lambda_j(t)$, $j = \overline{1,4}$, можно получить численно, интегрируя систему (1.1), (2.4) в обратном времени из состояния $x_j(T_i)$, $j = \overline{1,4}$, при условии $\lambda_1(T_i) = \lambda_4(T_i) = 0$. Параметр $\lambda_2(T_i)$ подбирается так, чтобы в процессе интегрирования функция $\lambda_4(t)$ сохраняла свой знак. Такой оптимальный режим (2.6) из двух этапов (“разгон” и “торможение”) далее назовем “тривиальным”. Его существование обусловлено лишь наличием пересечения линии δ с осью Ox_1 . Численный анализ показывает, что чем меньше значение ω , тем больших размеров (и длительности) участок в виде арки OA_i (рис. 2). При больших ω форма линии δ меняется: сначала в верхней полуплоскости фазовая кривая совершит несколько колебаний, прежде чем заденет ось Ox_1 . Чем больше ω , тем больше будет таких колебаний (и тем меньше их амплитуда). При этом “среднее за период” значение величины $x_2(t)$ постепенно убывает, так что линия δ пересечется с осью Ox_1 .

На рис. 2 для случая $\omega = 2$ имеем оптимальные тривиальные полутраектории OA_1 ($T_1 \approx 2.533906$), OA_2 ($T_2 \approx 3.040895$), OA_3 ($T_3 \approx 4.569222$), OA_4 ($T_4 \approx 5.184146$) и т.д. Для остальных оптимальных режимов изображающая точка на плоскости (x_1, x_2) тоже выходит из $(0, 0)$ по линии δ , но затем в некоторый момент времени сходится с ней при переключении управления. Каждая оптимальная полутраектория, согласно условию (2.5), должна завершаться на оси Ox_1 .

3. Анализ движений упрощенной системы в малой окрестности начального состояния. Отдельно рассмотрим оптимальное поведение объекта при повороте на малый угол 2α . Как было отмечено выше, в малой окрестности нуля линеаризация уравнений (1.1) порождает неуправляемую систему. Поэтому вместо линейного приближения (фактически вырожденного), рассмотрим нелинейное:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + p^2, \quad \dot{\phi} = p, \quad \dot{p} = u, \quad |u| \leq 1, \quad (3.1)$$

полагая его качественно близким к исходной системе (1.1) при малых значениях переменных.

Для такой модели в задаче оптимального быстрогодействия (2.1), (2.2) вид управления (2.3) и условия (2.5) остаются прежними, но упрощается гамильтониан $H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-\omega^2 x_1 + p^2) + \lambda_3 p + \lambda_4 u$ и сопряженная система

$$\dot{\lambda}_1 = \omega^2 \lambda_2, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \quad \dot{\lambda}_3 = 0, \quad \dot{\lambda}_4 = -2\lambda_2 p - \lambda_3. \quad (3.2)$$

Решения первых трех уравнений с учетом замечания 2 можно записать в виде

$$\lambda_1(t) = c_1 \sin \omega(t - T), \quad \lambda_2(t) = \frac{c_1}{\omega} \cos \omega(t - T), \quad \lambda_3 \equiv 1, \quad (3.3)$$

где T — длительность полутраектории, константа интегрирования c_1 подлежит уточнению.

Если предположить, что функция оптимального управления (2.3) кусочно-постоянная с конечным числом моментов переключения, то четвертое уравнение (3.2) легко интегрируется на участках постоянства управления. При заданном значении T с учетом соотношений (2.5) выводится (подробности опускаем) система двух нелинейных неравенств (относительно параметров ω и τ_1), выполнение которых гарантирует, что управление с тремя переключениями в моменты $\tau_1, T, 2T - \tau_1$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в форме (2.3), (3.2). Расчеты показывают, что для случая $\omega = 2$ эти режимы реализуются, когда $\tau_1 > \tau_c$, где критическому значению $\tau_c \approx 1.3654$ соответствует время $T_c \approx 2.120637$. Для меньших параметров T оптимальное управление составит следующим образом

$$u(t) = \begin{cases} +1, & t \in (0, \tau_1], \\ -1, & t \in (\tau_1, \tau_2], \\ u_0(t), & t \in (\tau_2, T], \end{cases} \quad (3.4)$$

где $u_0(t)$ — особое управление, порождаемое условием $\lambda_4(t) \equiv 0$. Соответствующие решения системы (3.1), (3.2) (с учетом (3.3)) на каждом из трех этапов можно выписать в явной форме.

Э т а п 1. При $u(t) = 1, t \in (0, \tau_1]$, получим $p(t) = t$,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{2}{\omega^4} (\cos \omega t - 1) + \frac{t^2}{\omega^2}, \quad x_2(t) = \frac{-2}{\omega^3} \sin \omega t + \frac{2t}{\omega^2}, \\ \lambda_4(t) &= \frac{-2c_1}{\omega^3} [\omega t \sin \omega(t - T) + \cos \omega(t - T)] - t + c_2. \end{aligned}$$

Э т а п 2. При $u(t) = -1, t \in (\tau_1, \tau_2]$, находим $p(t) = 2\tau_1 - t$,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{2}{\omega^4} (\cos \omega t - 1) + \frac{4\tau_1}{\omega^3} \sin \omega(t - \tau_1) + \frac{(t - 2\tau_1)^2}{\omega^2}, \\ x_2(t) &= \frac{-2}{\omega^3} \sin \omega t + \frac{4\tau_1}{\omega^2} \cos \omega(t - \tau_1) + \frac{2(t - 2\tau_1)}{\omega^2}, \\ \lambda_4(t) &= \frac{-2c_1}{\omega^3} [(2\tau_1 - t)\omega \sin \omega(t - T) - \cos \omega(t - T)] - t + c_3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поскольку функция (3.5) должна удовлетворить начальному $\lambda_4(\tau_1) = 0$ и конечному $\lambda_4(\tau_2) = 0$ условиям, то из них можно исключить константу c_3 и выразить c_1 :

$$c_1 = \frac{(\tau_2 - \tau_1)\omega^3/2}{\tau_1 \omega \sin \omega(\tau_1 - T) - (2\tau_1 - \tau_2)\omega \sin \omega(\tau_2 - T) + \cos \omega(\tau_2 - T) - \cos \omega(\tau_1 - T)}. \quad (3.6)$$

Э т а п 3. При $t \in (\tau_2, T]$ особое управление $u_0(t)$ определяется из условия $\lambda_4(t) \equiv 0$. Тождественное равенство нулю первой и второй производных функции $\lambda_4(t)$ по времени в силу соотношений (3.1), (3.2) даст

$$-2\lambda_2 p - \lambda_3 = 0, \quad -2\lambda_2 u + 2p\lambda_1 = 0, \quad (3.7)$$

откуда (с учетом (3.3)) получим

$$u_0(t) = p\omega t \operatorname{tg} \omega(t - T). \quad (3.8)$$

Эта функция особого управления сохраняет смысл, если ее значения не нарушают ограничений $|\mu| \leq 1$. Необходимое условие оптимальности особого управления определяется неравенством Келли [10], которое в нашем случае можно представить в форме

$$p = -\frac{1}{2\lambda_2} \geq 0. \quad (3.9)$$

Поскольку $\dot{p} = u$, то из (3.8) следует уравнение

$$\dot{p} = p\omega \operatorname{tg} \omega(t - T), \quad (3.10)$$

которое с учетом начального условия $p(\tau_2) = 2\tau_1 - \tau_2$ имеет решение

$$p(t) = \frac{(2\tau_1 - \tau_2) \cos \omega(\tau_2 - T)}{\cos \omega(t - T)}, \quad t \in (\tau_2, T]. \quad (3.11)$$

Подставляя эту функцию во второе уравнение системы (3.1), а также используя значения $x_1(\tau_2)$ и $x_2(\tau_2)$ в конце этапа 2, можно найти в явном виде функцию

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{\omega^3} [c_4 \sin \omega(\tau_2 - t) + c_5 \cos \omega(\tau_2 - t)] + f(t), \\ f(t) &= \frac{A}{\omega^3} [\eta(t) \cos \omega(t - T) + \operatorname{tg} \omega(t - T)], \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$A = [(2\tau_1 - \tau_2)\omega \cos \omega(\tau_2 - T)]^2, \quad \eta(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}(t - T) \right] \right|.$$

Константы интегрирования имеют вид

$$\begin{aligned} c_4 &= 2(\cos \omega \tau_2 - 1) + 4\tau_1 \omega \sin \omega(\tau_2 - \tau_1) + \omega^2(\tau_2 - 2\tau_1)^2 + A[1 - \eta(\tau_2) \sin \omega(\tau_2 - T)], \\ c_5 &= -2 \sin \omega \tau_2 + 4\tau_1 \omega \cos \omega(\tau_2 - \tau_1) + 2\omega(\tau_2 - 2\tau_1) - A[\eta(\tau_2) \cos \omega(\tau_2 - T) + \operatorname{tg} \omega(\tau_2 - T)]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из условия $x_2(T) = 0$ с учетом $f(T) = 0$ следует соотношение

$$c_4 \sin \omega(\tau_2 - T) + c_5 \cos \omega(\tau_2 - T) = 0, \quad (3.14)$$

связывающее между собой значения τ_1 , τ_2 , T . Еще одно соотношение для этих величин можно получить, подставляя выражение (3.11) в (3.9) с учетом (3.3), откуда вытекает

$$c_1 = \frac{-\omega}{2(2\tau_1 - \tau_2) \cos \omega(\tau_2 - T)}. \quad (3.15)$$

Приравнявая (3.6) и (3.15), получим

$$\begin{aligned} \tau_1 \omega \sin \omega(T - \tau_1) - (2\tau_1 - \tau_2) \omega \sin \omega(T - \tau_2) - \cos \omega(T - \tau_2) + \cos \omega(T - \tau_1) = \\ = (\tau_2 - \tau_1)(2\tau_1 - \tau_2) \omega^2 \cos \omega(T - \tau_2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для построения на плоскости (x_1, x_2) фазовых кривых, отвечающих трехэтапному управлению (3.4), достаточно для каждого конкретного значения τ_1 (из диапазона $0 < \tau_1 < \tau_c$) решить систему уравнений (3.13), (3.14) и (3.16), находя корни τ_2 , T , удовлетворяющие условию $T > \tau_2 > \tau_1$. На рис. 3 показаны соответствующие оптимальные полутраектории системы (3.1) при $\omega = 2$. Изображающая точка движется из пункта $(0, 0)$ при $u(t) = 1$, $t \in (0, \tau_1]$, по линии δ вдоль дуги OJ_1 (этап 1), затем вдоль дуги J_1J_2 при $u(t) = -1$, $t \in (\tau_1, \tau_2]$ (этап 2), затем вдоль дуги J_2J_3 , $t \in (\tau_2, T]$ (этап 3), при действии особого управления (3.8). На линии δ для каждой фазовой кривой отмечены численные значения параметров τ_1 первого переключения управления; изображенной точке J_1 соответствует $\tau_1 = 0.9$.

Завершающие полутраектории (на рис. 3 не показаны) симметричны начальным относительно оси Ox_1 и приходят в точку $(0, 0)$, причем на каждом из трех этапов функция управления — противоположного знака. Область особых режимов на рис. 3 отделена пунктиром, а внутри этой области показаны линии с равными значениями особых управлений. В конце каждой фазовой

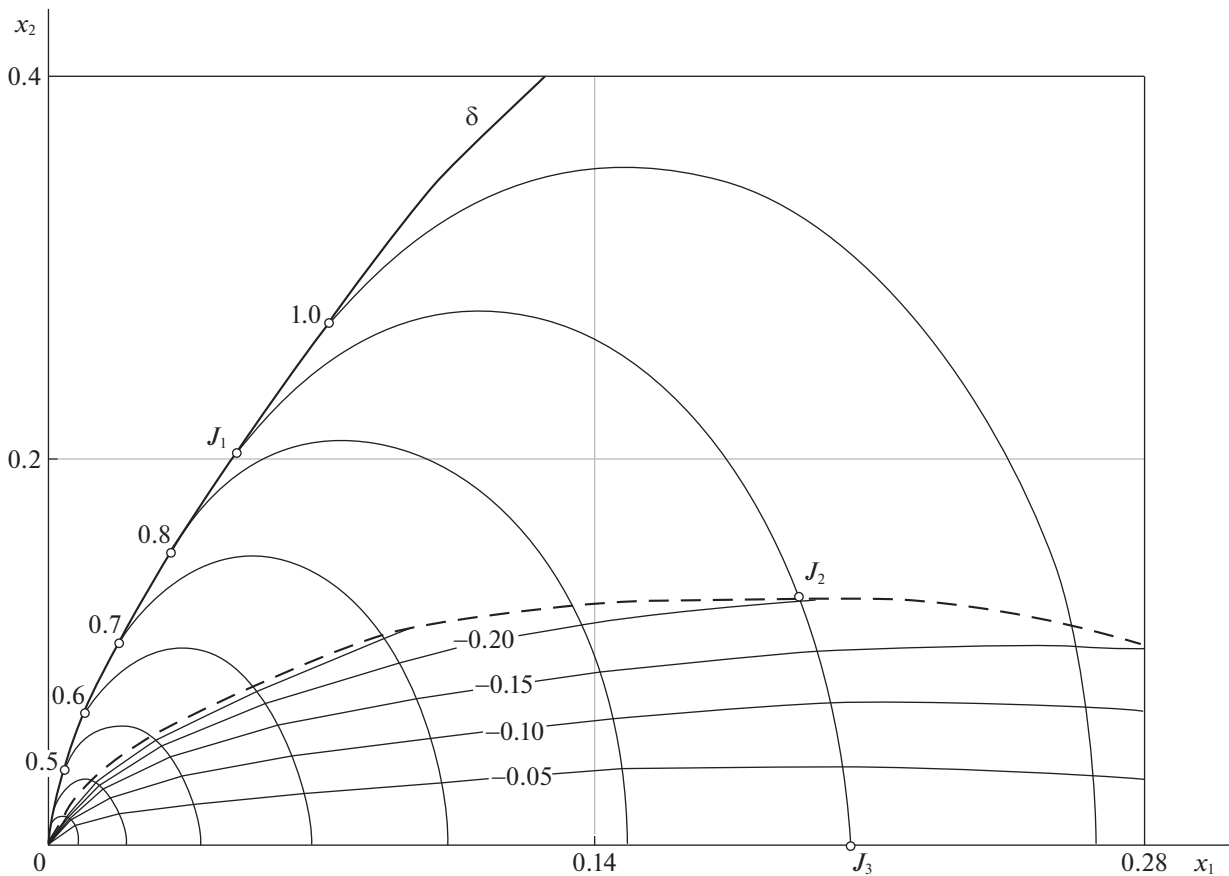


Рис. 3. Оптимальные фазовые кривые системы (3.1)

кривой имеем значение $u_0(T) = 0$, что согласуется с условием $\lambda_1(T) = 0$ в соответствии с формулой (3.7).

Поскольку в области особых режимов неравенство (3.9) выполнено, то необходимые условия оптимальности обеспечены реализуемостью движений в силу уравнений (2.3) и (3.2). Эта реализуемость обусловлена возможностью для каждого значения τ_1 (из диапазона $0 < \tau_1 < \tau_c$) найти корни τ_2 , T системы уравнений (3.13), (3.14) и (3.16).

В использованном алгоритме с уменьшением назначаемого параметра τ_1 убывали соответствующие величины τ_2 , T . Особый интерес (в связи с вырожденностью линеаризации для системы (3.1)) представляет предельный случай, когда $\tau_1 \rightarrow 0$. В силу ограниченности функции $p(t)$ в формуле (3.11) знаменатель не обращается в нуль, поэтому на этапе особого режима функция $p(t)$ не меняет знак. Отсюда (с учетом (3.9)) следуют соотношения $2\tau_1 - \tau_2 > 0$ и $\omega(T - \tau_2) < \pi/2$. При достаточно малых τ_1 и τ_2 , когда становятся приемлемыми приближения $\cos \omega(T - \tau_2) \approx \cos \omega T + \omega \tau_2 \sin \omega T$ и т.п., соотношение (3.16) с сохранением компонент второго порядка малости приобретает вид

$$-\cos \omega T (\tau_2 - \tau_1)^2 = (\tau_2 - \tau_1)(2\tau_1 - \tau_2)(\cos \omega T + \omega \tau_2 \sin \omega T),$$

т.е. величины $\cos \omega T$ и $\cos \omega(T - \tau_2)$ имеют разные знаки. Поскольку $\tau_2 > \tau_1$, то $\operatorname{ctg} \omega T = -\omega \tau_2 (2 - \tau_2/\tau_1) < 0$, т.е. $\omega T > \pi/2$. Иначе говоря, при $\tau_2 \rightarrow 0$ (и $\tau_1 \rightarrow 0$) имеем $\operatorname{ctg} \omega T \rightarrow 0$, что означает монотонное приближение (сверху) $T \rightarrow \pi/(2\omega)$. Здесь также можно показать, что в выражении для достигаемой величины угла поворота

$$\varphi(T) = \tau_1^2 - \frac{1}{2}(2\tau_1 - \tau_2)^2 + \int_{\tau_2}^T p(t) dt$$

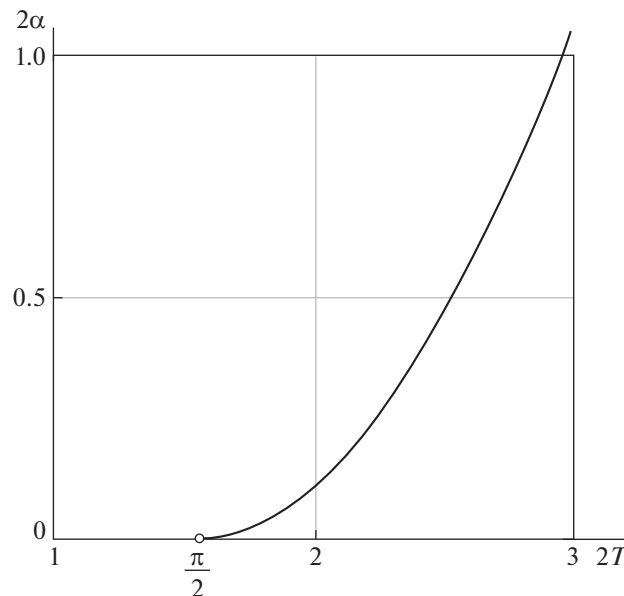


Рис. 4. Зависимость наибольшего угла поворота от времени для системы (3.1)

последнее (интегральное) слагаемое при $\tau_2 \rightarrow 0$ (и $\tau_1 \rightarrow 0$) стремится к нулю, как и первые два слагаемых. Таким образом, в пределе имеем

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow 0} T(\tau_2) = \frac{\pi}{2\omega}, \quad \lim_{T \rightarrow \frac{\pi}{2\omega} + 0} \varphi(T) = 0. \quad (3.17)$$

Иначе говоря, при сколь угодно малых размерах фазовых кривых, отвечающих условию $\tau_1 \rightarrow 0$ (рис. 3), все они имеют длительность, превосходящую $T = \pi/(2\omega)$. Тем самым обосновано следующее утверждение.

З а м е ч а н и е 3. Для системы (3.1) в задаче быстрогодействия (2.1), (2.2) в форме взаимной вариационной задачи (на отыскание наибольшего значения 2α при задаваемом $2T$):

1) решения не существует при $T \in [0, \pi/(2\omega)]$;

2) существует критическое значение T_c , такое, что при $T \in (\pi/(2\omega), T_c)$ оптимальное управление имеет трехэтапный вид (3.4).

На рис. 4 показана зависимость 2α от $2T$ для системы (3.1) при $\omega = 2$.

Поскольку упрощенная система (3.1) приближенно описывает поведение исходной системы (1.1) в малой окрестности нуля, то в пределе при $\alpha \rightarrow 0$ в задаче быстрогодействия (2.1), (2.2) тоже получим $T \rightarrow \pi/(2\omega)$. Говоря в терминах исходных физических переменных, при сколь угодно малом возмущении, выводящем систему (1.1) (рис. 1) из состояния покоя, понадобится времени не менее $\Delta t = \pi\sqrt{m/k}$ с, чтобы с помощью внешнего момента M полностью погасить колебания.

4. Численное решение задачи быстрогодействия (2.1), (2.2) для системы (1.1). Далее приведем результаты расчетов для системы (1.1) при конкретном значении $\omega = 2$. Задача быстрогодействия (2.1), (2.2) рассматривалась в форме взаимной вариационной задачи (на отыскание наибольшего угла поворота 2α при задаваемом времени $2T$). Сценарии оптимальных движений отличались для разных диапазонов времени, которые для удобства пронумеруем римскими цифрами. Границами диапазонов оказались ранее упомянутые значения T_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, длительностей “тривиальных” оптимальных полутраекторий OA_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ (рис. 2).

Диапазон I: $T \in (\pi/(2\omega), T_1)$. Как и для близкой упрощенной системы (3.1), в малой окрестности положения равновесия системы (1.1) оптимальное управление имеет вид (3.4), т.е. после участков с постоянными значениями управления $u = +1$ и $u = -1$ включается особое управление

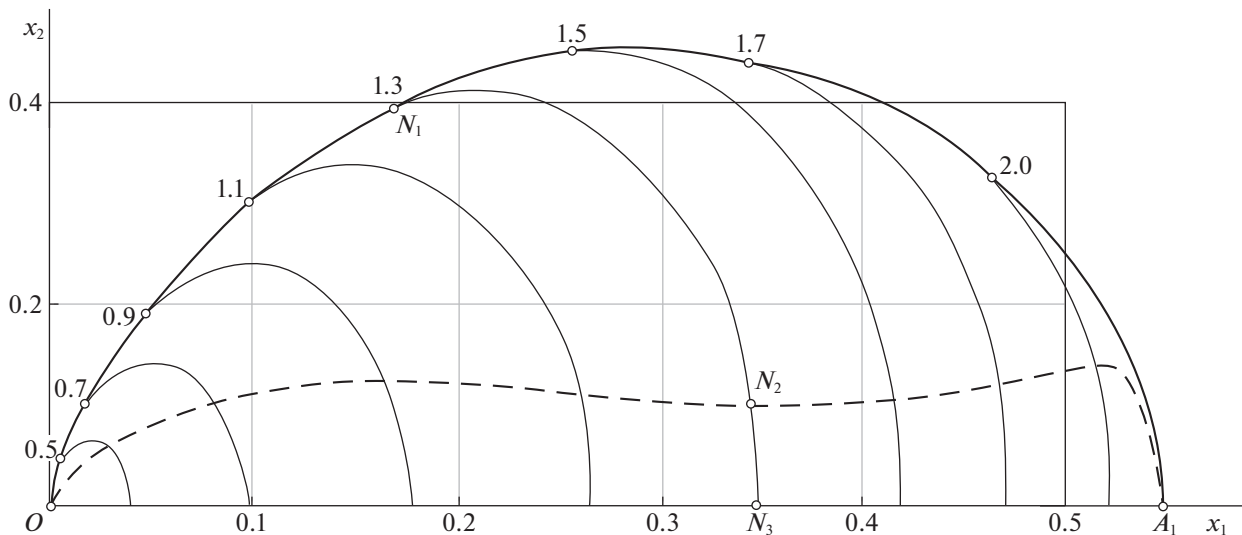


Рис. 5. Оптимальные фазовые кривые системы (1.1) в диапазоне I

$u_0(t)$. Вид этой функции определяется тождеством $\lambda_4(t) \equiv 0$. Приравняв к нулю его первую и вторую производные по времени в силу уравнений (1.1), получим

$$2\lambda_2 p + 1 + x_1 = 0, \quad -2p\lambda_1 + 2\lambda_2 u + x_2 = 0, \quad (4.1)$$

откуда выводится формула для особого управления

$$u_0(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} p - \frac{x_2}{2\lambda_2}. \quad (4.2)$$

Эта функция сохраняет смысл, если ее значения не нарушают ограничений $|u| \leq 1$. Необходимое условие оптимальности особого управления определяется неравенством Келли

$$-\frac{2\lambda_2}{(1+x_1)^3} \geq 0,$$

которое в рассматриваемой области значений $x_1 \geq 0$ в силу соотношений (4.1) приобретает вид

$$p \geq 0. \quad (4.3)$$

В диапазоне I численное решение сопряженной системы осуществлялось по следующему алгоритму. Задается момент времени τ_1 первого переключения управления, для которого ищется оптимальное продолжение траектории из точки с известными координатами $x_1(\tau_1)$, $x_2(\tau_1)$, $\varphi(\tau_1)$, $p(\tau_1)$. Поскольку $\lambda_4(\tau_1) = 0$, $\lambda_3 \equiv 1$, то уточнению подлежат лишь значения $\lambda_1(\tau_1)$ и $\lambda_2(\tau_1)$. Они варьируются в два этапа. Сначала для каждого очередного значения $\lambda_2(\tau_1)$ подбирается $\lambda_1(\tau_1)$, чтобы при действии управления $u = -1$ в некоторый момент времени (имеющий смысл τ_2) выполнилось первое из равенств (4.1), т.е. система смогла войти в особый режим и далее двигаться с управлением (4.2). В момент времени (принимаемый далее за T), при котором верно условие $x_2 = 0$, фиксируется значение $\lambda_1(T)$. Затем из множества найденных пар $\lambda_1(\tau_1)$, $\lambda_2(\tau_1)$ выбирается та, при которой обеспечивается дополнительное условие $\lambda_1(T) = 0$. В результате будут выполнены соотношения (2.5), свойственные оптимальным движениям. На рис. 5 на фазовой плоскости (x_1, x_2) показаны найденные оптимальные полутраектории. Типичное движение происходит сначала по дуге ON_1 при $u = +1$, затем по дуге N_1N_2 при $u = -1$. Последний участок N_2N_3 находится в области особых управлений, которая на рис. 5 отделена пунктирной линией.

Диапазон II: $T \in (T_1, T_2)$. Поскольку в конце предыдущего диапазона I точка первого переключения управления на дуге OA_1 приближалась вплотную к пункту A_1 , то из соображений непрерывности можно было бы ожидать, что далее фазовые кривые будут отделяться от линии δ в

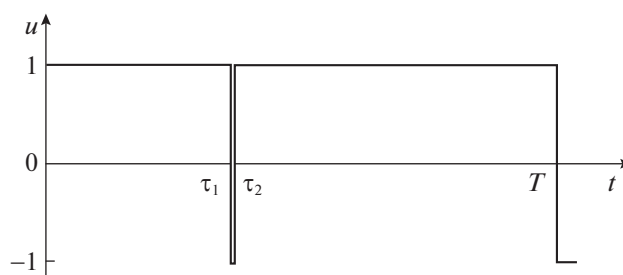


Рис. 6. Эволюция функции управления при $T = T_1$

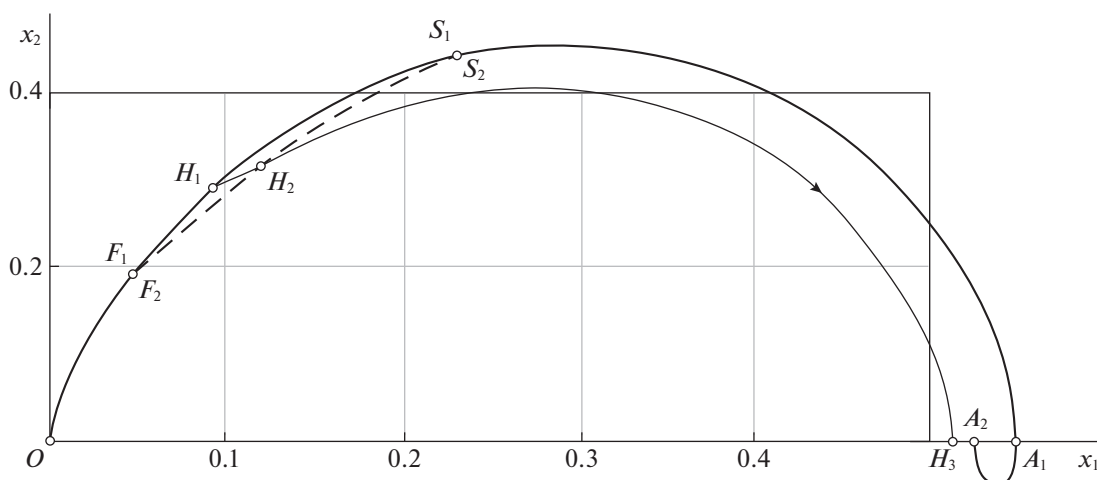


Рис. 7. Оптимальные фазовые кривые системы (1.1) в диапазоне II

точках “петлеобразной” дуги A_1A_2 (рис. 2). Однако анализ показывает, что ни из одной точки этой дуги не существует продолжений, которые завершались бы на оси Ox_1 за время $T \in (T_1, T_2)$. В конце диапазона I на графике функции $u(t)$ оптимального управления параметры τ_1 , τ_2 , T сблизались до совпадения, дав в итоге режим с одним моментом переключения T . Далее непрерывная эволюция этой функции, как оказалось, происходит за счет “игольчатой вариации”, т.е. путем добавления двух новых сколь угодно близких моментов переключения $\tau_2 \rightarrow \tau_1 + 0$ (рис. 6), где $\tau_1 \approx 0.9043$. При таком управлении на фазовой плоскости (x_1, x_2) (рис. 7) изображающая точка из положения F_1 сходит с дуги OA_1 при $u = -1$, но после быстрого второго переключения в точке F_2 продолжает движение при $u = +1$ до оси Ox_1 сколь угодно близко к дуге OA_1 . С дальнейшим увеличением длительности T на графике функции $u(t)$ “зазор” $(\tau_2 - \tau_1)$ растет и смещается вправо. Наибольшая разность $(\tau_2 - \tau_1) \approx 0.052$ достигается при $T_* \approx 2.773$. Это значение T_* является пороговым в том смысле, что при $T \in (T_1, T_*)$ оптимальные фазовые кривые попадают на ось Ox_1 , не заходя в нижнюю полуплоскость, а при $T \in (T_*, T_2)$ кривые имеют завершающий “петлеобразный” фрагмент в нижней полуплоскости, т.е. дважды пересекают ось. На рис. 7 значению T_* соответствует первое переключение при $\tau_1 \approx 1.085$ в точке H_1 , второе — в точке H_2 , после чего полутраектория завершается в точке H_3 . При $T \rightarrow T_2$ вновь $(\tau_2 - \tau_1) \rightarrow 0$, и при $\tau_1 \approx 1.452$ в точке S_1 почти одновременно следует второе переключение в точке S_2 , так что далее изображающая точка движется близко к дуге OA_2 , заходя на ось Ox_1 снизу вдоль “петли” A_1A_2 . Эволюция графика функции $u(t)$ завершается тем, что на нем исчезает “игольчатая вставка”. На рис. 7 пунктирная дуга F_2S_2 является линией второго переключения управления.

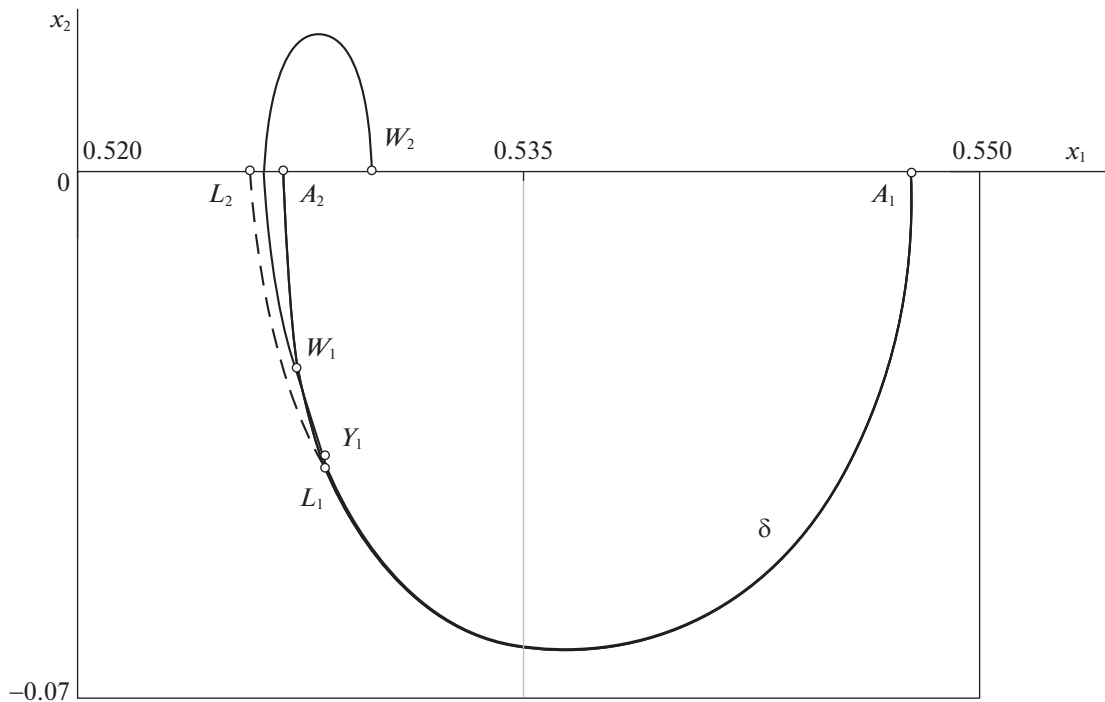


Рис. 8. Оптимальные фазовые кривые системы (1.1) в диапазоне III

В диапазоне II численное решение сопряженной системы осуществлялось путем задания моментов времени τ_1 первого переключения управления, для каждого из которых (при известных значениях переменных $x_1(\tau_1)$, $x_2(\tau_1)$, $\varphi(\tau_1)$, $p(\tau_1)$, $\lambda_4(\tau_1) = 0$, $\lambda_3 \equiv 1$) варьировались величины $\lambda_1(\tau_1)$ и $\lambda_2(\tau_1)$ с целью достижения условий $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_4 = 0$ в момент попадания изображающей точки на ось Ox_1 . Этот момент времени далее принимался за T .

Диапазон III: $T \in (T_2, 2T_2 - T_1)$. На рис. 8 в измененном масштабе показан участок A_1A_2 линии δ (рис. 2), лежащий ниже оси Ox_1 . Если переключение управления (после движения по линии δ при $u = +1$) произойдет непосредственно перед точкой A_2 , то длительность всей полутраектории слегка превысит T_2 . Такое оптимальное движение (из точек дуги A_2Y_1 до оси Ox_1) реализуется, как показывают расчеты, при действии особого управления. Крайней точке Y_1 дуги A_2Y_1 соответствует наименьший параметр $\tau_1 \approx 2.9555$ и наибольшая длительность полутраектории $T_Y \approx 3.0828$. Поскольку особый режим наступает сразу в момент τ_1 , то для него известны не только значения $x_1(\tau_1)$, $x_2(\tau_1)$, $\varphi(\tau_1)$, $p(\tau_1)$, $\lambda_4(\tau_1) = 0$, $\lambda_3 \equiv 1$, но и $\lambda_2(\tau_1)$, находимое из первого уравнения (4.1). Поэтому для численного интегрирования системы уравнений (1.1) и (2.4) достаточно подобрать величину $\lambda_1(\tau_1)$, варьируя ее из условия равенства нулю переменной $\lambda_1(t)$ в момент попадания изображающей точки на ось Ox_1 .

Найденные численно начальные значения особых управлений $u_0(\tau_1)$ (при сходе изображающих точек с дуги A_2Y_1 на рис. 8) уменьшаются от 0 (в точке A_2) до -1 (в точке Y_1). При дальнейшем смещении точки первого переключения по дуге Y_1L_1 оптимальное управление имеет структуру (3.4), т.е. этапу особого управления предшествует участок движения при $u = -1$. Крайней точке L_1 дуги Y_1L_1 соответствует наименьший параметр $\tau_1 \approx 2.9517$, наибольшая длительность полутраектории $T_L \approx 3.1632$ и наименьшая координата точки L_2 на оси Ox_1 (рис. 8). Численный алгоритм решения сопряженной системы (2.4) здесь такой же, как и для трехэтапных управлений в диапазоне I.

Расчеты показывают, что при смещении точки первого переключения вдоль дуги Y_1L_1 к концу L_1 длительность $(T - \tau_2)$ промежутка особого управления убывает вплоть до нуля, так что на рис. 8

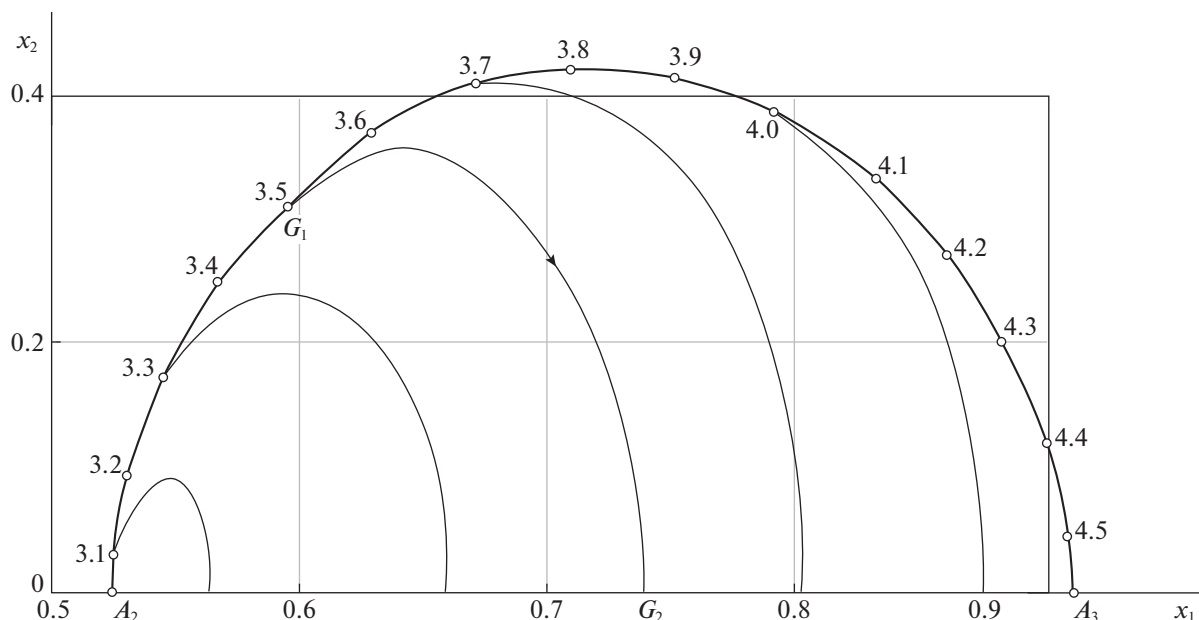


Рис. 9. Оптимальные фазовые кривые системы (1.1) в диапазоне IV.

движение по кривой L_1L_2 реализуется фактически при постоянном управлении $u = -1$. Дальнейшему увеличению времени T в рассматриваемом диапазоне III соответствуют функции оптимального управления с одним переключением на полутраектории. Точка переключения на дуге L_1A_2 смещается от L_1 к A_2 (с увеличением параметра τ_1), причем фазовые кривые дважды пересекают ось Ox_1 , совершив “разворот” в верхней полуплоскости. Одна из таких кривых показана на рис. 8 в виде W_1W_2 . Если первое переключение осуществить в точке A_2 (при $\tau_1 = T_2$), то соответствующий “разворот” произойдет по линии, симметричной дуге A_1A_2 , за такое же время $(T_2 - T_1)$. Этот сценарий будет последним в диапазоне III.

Диапазон IV: $T \in (2T_2 - T_1, T_3)$. Расчеты показывают, что каждая точка дуги A_2A_3 может послужить точкой единственного переключения оптимального управления, после чего фазовая кривая при $u = -1$ достигнет оси Ox_1 . Численное решение сопряженной системы осуществляется путем задания параметра τ_1 и (при известных $x_1(\tau_1)$, $x_2(\tau_1)$, $\varphi(\tau_1)$, $p(\tau_1)$, $\lambda_4(\tau_1) = 0$, $\lambda_3 \equiv 1$) варьирования величин $\lambda_1(\tau_1)$ и $\lambda_2(\tau_1)$ с целью достижения условий $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_4 = 0$ в момент времени, при котором $x_2(t) = 0$. На рис. 9 на фазовой плоскости (x_1, x_2) показаны завершающие участки оптимальных полутраекторий, начатых из точки $(0, 0)$ вдоль линии δ . Например, участку G_1G_2 соответствует первое переключение в точке G_1 в момент $\tau_1 = 3.5$.

Рассмотренные в диапазонах II–IV сценарии далее повторяются для аналогичных по расположению участков линии δ (рис. 2). Например, диапазон V (при $T \in (T_3, T_4)$) аналогичен диапазону II, т.е. эволюция функции оптимального управления претерпевает те же этапы появления “игольчатой вставки”, ее расширения и сужения вплоть до исчезновения. Диапазон VI (при $T \in (T_4, 2T_4 - T_3)$) качественно повторяет диапазон III и т.д.

Поскольку для всех рассмотренных типов движений системы (1.1) были численно найдены решения сопряженной системы (2.4), то сами траектории удовлетворяют необходимым условиям оптимальности. Задача (2.1), (2.2) решалась в форме взаимной вариационной задачи (на отыскание наибольшего угла поворота 2α за заданное время $2T$). Множество функций оптимального управления (в зависимости от T) можно наглядно представить в виде диаграммы [11]. Ее суть в том (рис. 10), что каждое горизонтальное сечение (на высоте T) описывает одну функцию $u(t)$, $t \in [-T, T]$, где длины отрезков белого (или серого) цвета численно равны длительности участков движения при $u = -1$ (или $u = +1$). Участки светло-серого цвета соответствуют особым управлениям. Разделительные горизонталы (например, на высоте $T = T_1$, $T = T_2$ и т.д.) и римские

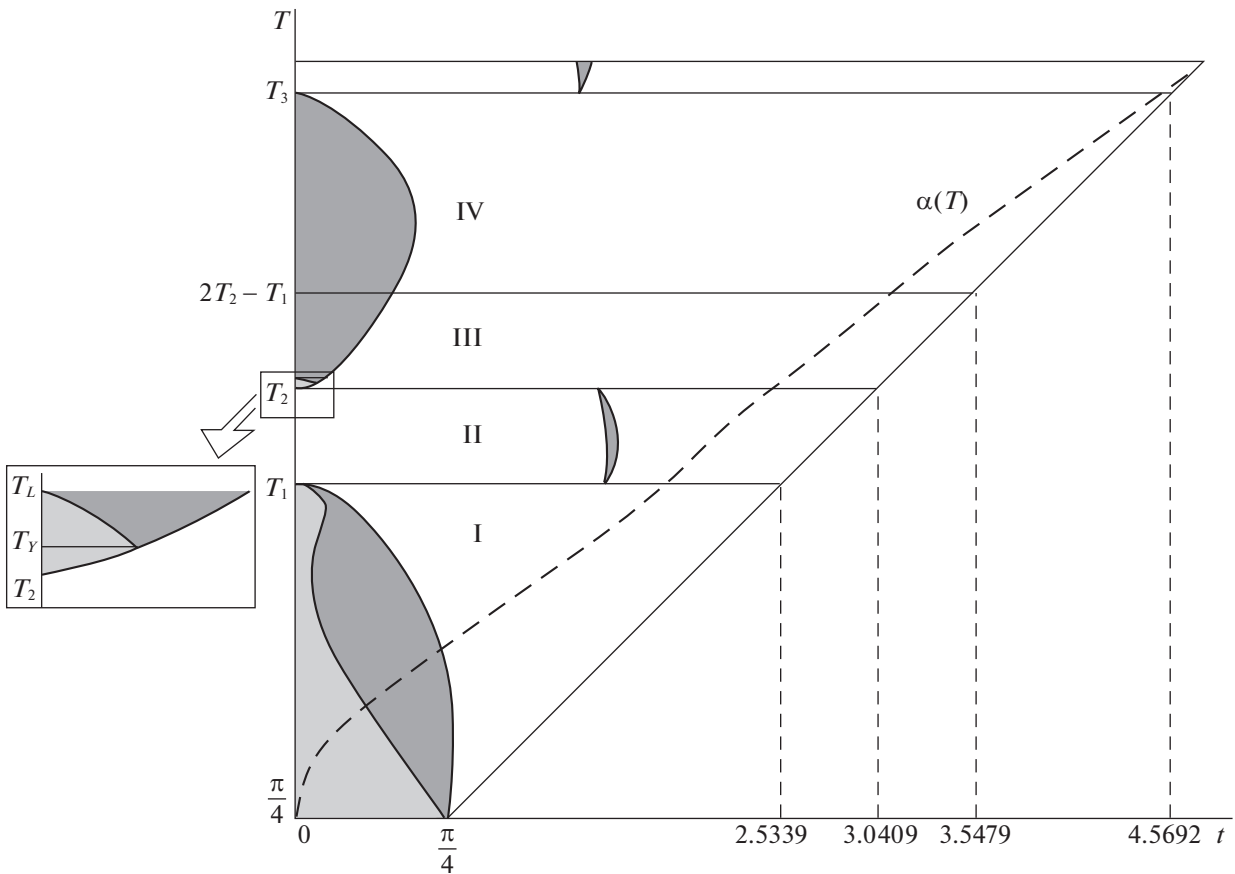


Рис. 10. Диаграмма функций оптимального управления и график функции $\alpha(T)$

номера между ними введены для указания диапазонов I–IV, рассмотренных выше. На рис. 10 показана правая (зеркальная) часть диаграммы, задающая правые части графиков $u(t)$, $t \in [0, T]$. Согласно замечанию 2, функция $u(t)$, $t \in [-T, T]$, нечетная, поэтому левая (не изображенная) часть диаграммы будет симметричной, но с заменой цветов на противоположные (как фотонегатив). Например, при $T = T_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, сечения имеют вид отрезков белого цвета, т.е. $u(t) = -1$ при $t \in [0, T]$. В левой зеркальной части диаграммы соответствующие отрезки – темно-серого цвета, т.е. $u(t) = +1$ при $t \in [-T, 0]$. Говоря кратко, при $T = T_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, имеем режимы с одним переключением управления, названные выше “тривиальными”. В полосе с номером II располагается закрашенная область в форме чечевицы, соответствующая “вставке” в графике функции $u(t)$ в диапазоне II. Ее самому широкому сечению (на горизонтальном уровне T_*) отвечает время движения от точки H_1 до H_2 на рис. 7. В диапазоне V, который изображен лишь частично, у аналогичной “чечевицы” максимальная ширина больше.

С диаграммой функций оптимального управления (рис. 10) совмещена пунктирная кривая, задающая график $\alpha(T)$ искомой зависимости наибольшей величины угла поворота от заданного времени движения, отложенного по вертикали.

Заключение. Рассмотрена задача оптимального по быстродействию поворота (на заданный угол) пружинного маятника (рис. 1) из одного состояния покоя в другое. Исследование осуществлено в форме взаимной вариационной задачи на максимум угла поворота при заданном времени. С учетом симметрий дифференциальных уравнений движения и сопряженной системы, связанных с симметриями краевых условий, получены численные решения, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности. Множество функций оптимального управления отражено на диаграмме (рис. 10).

Особенность нелинейной системы (1.1) состоит в том, что ее линеаризованная (в окрестности состояния покоя) модель не является управляемой. Поэтому для малых значений времени обратная вариационная задача не имеет решения. Для любого сколь угодно малого угла поворота требуется время, превышающее значение $\pi/(2\omega)$. Геометрически это означает, что множество достижимости $K(T)$ [12, с. 78] для точки $O(0, 0, 0, 0)$ системы (1.1) при малых T не содержит ε -окрестности нуля. С увеличением значения T в диапазоне $T \in (0, \pi/(2\omega))$ множество $K(T)$ расширяется по обе стороны гиперплоскости $x_2 = 0$, имея с ней лишь одну общую точку O . Первое пересечение множества достижимости с гиперплоскостью происходит при $T = \pi/(2\omega)$. Для обнаружения этих свойств использовалось явное интегрирование упрощенной нелинейной системы (3.1). Это приближение в малой окрестности нуля не совпадает с “квадратичным”, однако, в отличие от него, дает решение сопряженной системы в элементарных функциях. Численные эксперименты подтвердили близость оптимальных траекторий систем (1.1) и (3.1) для малых углов поворота объекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Борисов А.Е., Гавриков А.А., Емельянов Г.А. Квазиоптимальное управление поворотом твердого тела вокруг неподвижной оси с учетом трения // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 3–21.
2. Ананьевский И.М., Ишханян Т.А. Управление поворотной платформой на подвижном основании в присутствии возмущений // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 3. С. 154–162.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
4. Geering H.P., Guzella L., Hepner S.A.R., Onder C.H. Time-Optimal Motions of Robots in Assembly Tasks // IEEE Trans. Autom. Contr. 1986. V. 31. № 6. P. 512–518.
5. Осипов С.Н., Формальский А.М. Задача о быстрейшем повороте манипулятора // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 929–937.
6. Каюмов О.Р. Оптимальное по быстродействию перемещение тележки с маятником // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 30–41.
7. Борецкий И.Ф., Каюмов О.Р. Глобально управляемые системы твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 405–412.
8. Калман Р.Е. Об общей теории систем управления // Тр. 1-го Конгресса междунар. федерации по автоматическому управлению. М., 1961. С. 521–546.
9. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
10. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
11. Каюмов О.Р. Диаграммы функций оптимального управления в задаче наибо́льшего перемещения платформы с двумя осцилляторами // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 6. С. 38–55.
12. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ДАННЫХ

© 2023 г. А. П. Дюкова^а, Е. В. Дюкова^{а,*}

^аФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: edjukova@mail.ru

Поступила в редакцию 03.04.2023 г.

После доработки 28.04.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

В классе дискретных перечислительных задач важное место принадлежит задачам поиска в целочисленных данных часто и нечасто встречающихся элементов. Вопросы эффективности такого поиска напрямую связаны с изучением метрических (количественных) свойств множеств частых и нечастых элементов. Предполагается, что исходные данные представлены в виде целочисленной матрицы, строки которой являются описаниями исследуемых объектов в заданной системе числовых характеристик этих объектов, называемых атрибутами. Рассмотрен случай, когда каждый атрибут принимает значения из множества $\{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$. Приведены асимптотические оценки типичного числа специальных частых фрагментов описаний объектов, называемых правильными фрагментами, и оценки типичной длины такого фрагмента. Представлены также новые результаты, касающиеся изучения метрических свойств минимальных нечастых фрагментов описаний объектов.

DOI: 10.31857/S0002338823050050, EDN: ONCWCE

Введение. Рассматриваемые задачи анализа целочисленных данных возникают на этапе обучения логических процедур классификации по прецедентам. Исследование метрических (количественных) свойств множеств решений этих задач необходимо для получения теоретических оценок сложности синтеза логических классификаторов и прогноза временных затрат.

Введем основные понятия. Исследуется множество объектов M . Известно, что каждый объект множества M может быть представлен в виде числового вектора, полученного на основе наблюдения или измерения ряда его характеристик. Такие характеристики называют атрибутами. Предполагается, что каждый атрибут имеет ограниченное множество допустимых значений, которые кодируются целыми числами.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — заданное множество атрибутов; H — набор из r атрибутов вида $H = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$, $j_1 < \dots < j_r$; $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ — набор, в котором σ_i — допустимое значение атрибута x_{j_i} , $i = \overline{1, r}$. Пару (σ, H) назовем элементарным фрагментом (ЭФ) ранга r . Через $W(X)$ обозначим множество всех ЭФ, порождаемых набором атрибутов X .

Пусть $S = (a_1, \dots, a_n)$ — объект из M (здесь a_j , $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, — значение атрибута x_j для объекта S). Будем говорить, что S содержит ЭФ (σ, H) , $H = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, если $a_{j_i} = \sigma_i$ при $i = \overline{1, r}$.

Дана некоторая совокупность объектов D из M и задано число p , $1 \leq p \leq |D|$, где $|D|$ — число объектов в D . Объекты в D не обязательно различны.

ЭФ (σ, H) , $(\sigma, H) \in W(X)$, называется (p, D) -частым, если для не менее p объектов из D содержат (σ, H) . ЭФ (σ, H) , $(\sigma, H) \in W(X)$, ранга r , $r \leq |D|$, называется *правильным* в D , если (σ, H) — (r, D) -частый. ЭФ (σ, H) , $(\sigma, H) \in W(X)$, называется *нечастым* в D , если ни один объект из D не содержит (σ, H) , и *минимальным* нечастым в D , если из условия $\sigma' \subset \sigma$, $H' \subset H$ следует, что ЭФ (σ', H') не является нечастым в D .

Логическая классификация целочисленных данных предполагает наличие нескольких непесекающихся выборок $D_1, \dots, D_l$, $l \geq 2$, объектов из M , каждая из которых представляет некоторый класс объектов. Объекты, содержащиеся в этих выборках, называются прецедентами, а атрибуты из X — признаками. На этапе обучения в каждой выборке D_i , $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, ищутся такие частые ЭФ, которые являются нечастыми в D_j при любом $j \neq i$. Найденные ЭФ позволяют различать прецеденты из разных классов и называются логическими закономерностями или представительными элементарными классификаторами [1–6].

Могут накладываться некоторые дополнительные условия на вид искомым ЭФ (в зависимости от рассматриваемой модели классификатора). Например, ищутся так называемые тупиковые представительные элементарные классификаторы. Элементарный классификатор (σ, H) называется тупиковым представительным для D_i , $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, если выполнены два условия: 1) (σ, H) — $(1, D_i)$ -частый ЭФ; 2) (σ, H) — минимальный нечастый в D_j при любом $j \neq i$. В этом случае при поиске минимальных нечастых ЭФ возникает необходимость рассматривать труднорешаемую дискретную задачу построения тупиковых покрытий целочисленной матрицы [3], строками которой являются описания прецедентов, не принадлежащих D_i .

В [6] предложена модель логического классификатора, базирующаяся на первоначальном поиске в каждой выборке D_i , $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, правильных ЭФ и последующем отборе среди них тех, которые не содержатся в описаниях прецедентов из других классов. Данная модель демонстрирует существенное преимущество по скорости счета перед классической моделью, основанной на построении тупиковых представительных элементарных классификаторов, не уступая последней в качестве классификации.

Представляет интерес получение асимптотических оценок (при $n \rightarrow \infty$) типичного числа правильных ЭФ и оценок типичной длины правильного ЭФ. В [7] требуемые оценки получены для случая, когда число объектов в D существенно меньше числа атрибутов и каждый атрибут принимает значения из множества $\{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$.

Полученные в работе новые результаты в основном касаются изучения метрических свойств множества правильных ЭФ в случае $n \leq |D|$. Следует отметить, что аналогичные свойства множества минимальных нечастых ЭФ ранее изучались в ряде публикаций (например, [3, 8, 9]), в которых в том числе рассматривался случай $n \leq |D|$. Приводимые в статье оценки числа минимальных нечастых ЭФ имеют вид, позволяющий сравнивать их с соответствующими оценками правильных ЭФ. Результат сравнения свидетельствует о целесообразности (в плане сокращения временных затрат) применения методов поиска частых ЭФ для синтеза логических классификаторов и согласуется с полученными в [6] результатами экспериментов на случайных модельных данных.

В разд. 1 дана постановка задачи. Исходные данные представлены в виде целочисленной матрицы, строками которой являются описания объектов из D . Приведены формулировки двух основных теорем о числе правильных ЭФ. Доказательства этих теорем содержатся в разд. 2. В разд. 3 приведены полученные ранее и новые оценки типичных значений числа минимальных нечастых ЭФ и длины минимального нечастого ЭФ.

1. Постановка задачи и формулировки основных результатов. Пусть L , $L = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, — матрица с элементами из $\{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$; E_k^r , $r \leq n$, $k \geq 2$, — множество наборов $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $\sigma_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $i = \overline{1, r}$; W_r^n , $r \leq n$, — множество всех наборов вида $\{j_1, \dots, j_r\}$, где $j_t \in \{1, 2, \dots, n\}$ при $t = \overline{1, r}$ и $j_1 < \dots < j_r$; V_r^m , $r \leq m$, — множество всех упорядоченных наборов вида $(i_1, \dots, i_r)$, где $i_t \neq i_l$ при $t, l = \overline{1, r}$.

Положим $\sigma \in E_k^r$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $w \in W_r^n$, $w = \{j_1, \dots, j_r\}$. Число r назовем *длиной* набора w .

Набор w назовем σ -допустимым для L , если можно указать набор $v = (i_1, \dots, i_r)$, $v \in V_r^m$, такой, что $a_{i_t j_t} = \sigma_t$ при $t = \overline{1, r}$. Будем говорить, что σ -допустимый набор w порождается набором σ .

Нетрудно видеть, что в случае, когда в качестве строк матрицы L берутся описания объектов из выборки D , то набор $w \in W_r^n$, $w = \{j_1, \dots, j_r\}$, является σ -допустимым для L тогда и только тогда, когда ЭФ (σ, H) , $H = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$ — правильный в D .

Введем обозначения: $\mathfrak{M}_{mn}^k$ — множество всех матриц размера $m \times n$ с элементами из $\{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$; $U(L, \sigma)$, $L \in \mathfrak{M}_{mn}^k$, $\sigma \in E_k^r$, — множество всех σ -допустимых наборов для матрицы L ; $U_r(L, \sigma)$ — множество всех наборов в $U(L, \sigma)$ длины r ; $U(L)$, $L \in \mathfrak{M}_{mn}^k$, — совокупность всех допустимых для матрицы L наборов, в которой каждый набор встречается столько раз, сколькими наборами из E_k^r он порождается; $|N|$ — мощность множества N ;

$$|U_r(L)| = \sum_{\sigma \in E_k^r} |U_r(L, \sigma)|;$$

$$|U(L)| = \sum_{r=1}^n \sum_{\sigma \in E_k^r} |U_r(L, \sigma)|;$$

$r_1 = [0.5 \log_k mn - 0.5 \log_k \log_k^2 mn - \log_k \log_k \log_k n]$, здесь и далее $[q]$ — целая часть от числа q ; $r_2 = \lceil 0.5 \log_k mn - 0.5 \log_k \log_k^2 mn + \log_k \log_k \log_k n \rceil$, здесь и далее $\lceil q \rceil$ — наименьшее целое, превосходящее q ; ϕ_1 — интервал $[r_1, r_2]$; $r_3 = \lceil \log_k m + \log_k \log_k m \rceil$; ϕ_2 — интервал $[1, r_3]$; $b_n \approx c_n$, $n \rightarrow \infty$, означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/c_n = 1$; $b_n \leq c_n$, $n \rightarrow \infty$, означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/c_n \leq 1$.

Ниже приводятся асимптотические оценки типичного значения величины $|U(L)|$ и оценки типичной длины допустимого для L набора при различных значениях m и n .

Выявление типичной ситуации связано с высказыванием типа “для почти всех матриц L из $\mathfrak{M}_{mn}^k$ при $n \rightarrow \infty$ выполнено $F_1(L) \approx F_2(L)$ ” (здесь $F_1(L)$ и $F_2(L)$ — два функционала, заданные на матрицах из $\mathfrak{M}_{mn}^k$). Данное высказывание означает, что существуют две положительные бесконечно убывающие функции $\alpha(n)$ и $\beta(n)$, такие, что для всех достаточно больших n имеет место

$$1 - |\mathfrak{M}|/|\mathfrak{M}_{mn}^k| \leq \alpha(n),$$

где $\mathfrak{M}$ — множество таких матриц L в $\mathfrak{M}_{mn}^k$, для которых

$$1 - \beta(n) < |F_1(L)| / |F_2(L)| < 1 + \beta(n).$$

Справедливы приведенные ниже теоремы 1 и 2.

Теорема 1. Если $m^a \leq n \leq k^{m^b}$, $a > 1, \beta < 1, k \geq 2$, то при $n \rightarrow \infty$ для почти всех матриц L из $\mathfrak{M}_{mn}^k$ имеет место

$$\sum_{r \leq r_1} |U_r(L)| \approx |U_{r_1}(L)| \approx C_n^n C_m^m k^{n - r_1^2},$$

$$\sum_{r \geq r_2} |U_r(L)| \approx |U_{r_2}(L)| \approx C_n^{r_2} C_m^{r_2} k^{r_2 - r_2^2},$$

$$|U(L)| \approx \sum_{r \in \phi_1} |U_r(L)| \approx \sum_{r \in \phi_1} C_n^r C_m^r k^{r - r^2}$$

и длины почти всех наборов из $U(L)$ принадлежат интервалу ϕ_1 .

Теорема 2. Если $n \leq m \leq k^{n^b}$, $\beta < 1/2, k \geq 2$, то при $n \rightarrow \infty$ для почти всех матриц L из $\mathfrak{M}_{mn}^k$ имеет место

$$\sum_{r \geq r_3} |U_r(L)| \approx |U_{r_3}(L)| \approx C_n^{r_3} C_m^{r_3} k^{r_3 - r_3^2},$$

$$|U(L)| \lesssim \sum_{r \in \phi_2} C_n^r C_m^r k^{r - r^2}$$

и длины почти всех наборов из $U(L)$ принадлежат интервалу ϕ_2 .

Доказательства теорем 1 и 2 опираются на ряд лемм, приводимых в разд. 2.

2. Доказательства теорем 1 и 2. Пусть $v \in V_r^m, v = (i_1, \dots, i_r); \sigma \in E_k^r, \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r); w \in W_r^n, w = \{j_1, \dots, j_r\}$. Матрица $L = (a_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, L \in \mathfrak{M}_{mn}^k$, называется (v, σ, w) -матрицей, если $a_{i_j j_t} = \sigma_t$ при $t = \overline{1, r}$. Обозначим через $N_{(v, \sigma, w)}$ совокупность (v, σ, w) -матриц в $\mathfrak{M}_{mn}^k$, через $N_{(v, \sigma, w)}^*$ — совокупность всех матриц L в $N_{(v, \sigma, w)}$, таких, что $L \notin N_{(v_1, \sigma, w)}$ при $v_1 \in V_r^m, v_1 \neq v$.

Л е м м а 1. Если $v \in V_r^m, w \in W_r^n, \sigma \in E_k^r$, то

$$|N_{(v, \sigma, w)}| = k^{mn-r^2}.$$

Доказательство. Оценим, сколькими способами можно построить матрицу L из $N_{(v, \sigma, w)}$. Однозначным образом определяются те элементы матрицы L , которые расположены на пересечении строк с номерами из v и столбцов с номерами из w . Остальные элементы этой матрицы могут быть выбраны произвольным образом (k^{mn-r^2} способов). Отсюда получаем требуемую оценку. Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. Если $v \in V_r^m, w \in W_r^n, \sigma \in E_k^r$, то

$$|N_{(v, \sigma, w)}^*| = (1 - k^{-r})^{m-r} k^{mn-r^2}.$$

Доказательство. Оценим, сколькими способами можно построить матрицу L из $N_{(v, \sigma, w)}^*$. Элементы этой матрицы, расположенные в столбцах с номерами не входящими в w , могут быть выбраны произвольным образом ($k^{m(n-r)}$ способов). Отсюда, учитывая, что строки в подматрице матрицы L , образованной столбцами с номерами из w , можно выбрать $(k^r - 1)^{m-r}$ способами, получаем требуемую оценку. Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. Пусть $v_1 \in V_r^m, v_2 \in V_l^m, w_1 \in W_r^n, w_2 \in W_l^n, \sigma' \in E_k^r, \sigma'' \in E_k^l$ и наборы v_1 и v_2 пересекаются по $a(a \geq 0)$ элементам, а наборы w_1 и w_2 пересекаются по $b(b \geq 0)$ элементам. Тогда

$$|N_{(v_1, \sigma', w_1)} \cap N_{(v_2, \sigma'', w_2)}| \leq k^{mn-r^2-l^2+ab}.$$

Доказательство леммы 3 не приводится в силу ее очевидности.

При доказательстве приводимых ниже лемм 4–6 используется выражение $b_n \leq_n c_n$, которое означает, что $b_n \leq c_n$ при всех достаточно больших n .

Л е м м а 4. 1. Если $m \leq n \leq k^{m^\beta}, \beta < 1$, то

$$\sum_{r \leq r_1} C_n^r C_m^r k^{r-r^2} \lesssim C_n^{r_1} C_m^{r_1} k^{r_1-r_1^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

2. Имеет место

$$\sum_{r \geq r_2} C_n^r C_m^r k^{r-r^2} \lesssim C_n^{r_2} C_m^{r_2} k^{r_2-r_2^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Если $n \leq m$, то

$$\sum_{r \geq r_3} C_n^r C_m^r k^{r-r^2} \lesssim C_n^{r_3} C_m^{r_3} k^{r_3-r_3^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Положим $a_r = C_n^r C_m^r k^{r-r^2}, q = 0.5 \log_k mn - 0.5 \log_k \log_k^2 mn, t = \log_k \log_k \log_k n$.

1. Пусть $m \leq n \leq k^{m^\beta}, \beta < 1$, и $r \leq r_1 + 1$. Тогда, пользуясь тем, что $q \leq 0.5 \log_k mn, k^{2q} = mn / \log_k^2 mn$ и $(n - q) \geq_n 0.5n$ при $m \leq n, (m - q) \geq_n 0.5m$ при $n \leq 2^{m^\beta}$, получаем

$$\frac{a_{r-1}}{a_r} = \frac{r^2 k^{2r-2}}{(n-r+1)(m-r+1)} \leq \frac{q^2 k^{2q-2t}}{(n-q)(m-q)} \leq_n k^{-2t}.$$

2. При $r \geq r_2 - 1$ получаем

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} \leq \frac{mn}{r^2} k^{-2r} \leq_n \frac{mn}{q^2} k^{-2q-2t+2} \leq_n k^{-2t}.$$

3. При $n \leq m$, $r \geq r_3 - 1$ получаем

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} \leq \frac{mn}{r^2} k^{-2r} \leq_n \frac{1}{(\log_k n)^2}.$$

Таким образом, $a_{r-1} = o(a_r)$, $n \rightarrow \infty$, в случае 1 и $a_{r+1} = o(a_r)$, $n \rightarrow \infty$, в каждом из случаев 2 и 3. Лемма 4 доказана.

Л е м м а 5. Если $m \leq n$ и $r, l \leq r_2$, то имеет место

$$\sum_{b=0}^{\min(r,l)} k^{lb} C_n^r C_r^b C_{n-r}^{l-b} \leq C_n^r C_n^l (1 + \delta(n)),$$

где $\delta(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\lambda_b = k^{lb} C_n^r C_r^b C_{n-r}^{l-b} / C_n^r C_n^l$. Так как

$$\frac{C_r^b C_{n-r}^{l-b}}{C_{n-r}^l} \leq \left(\frac{rl}{n-r-l} \right)^b$$

и по условию $r, l \leq 0.5 \log_k mn \leq \log_k n$, $(r+l)/n \leq_n 0.5$, то

$$\lambda_b \leq_n \left(\frac{2 \log_k^2 n}{n} \right)^b.$$

Следовательно, оцениваемая сумма не превосходит $C_n^r C_n^l (1 + \delta(n))$, где $\delta(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда, пользуясь неравенством $C_{n-r}^l \leq C_n^l$, получаем утверждение леммы. Лемма 5 доказана.

Л е м м а 6. Если $m \leq k^{n^\beta}$, $\beta < 1/2$, и $r, l \leq r_3$, то имеет место

$$\sum_{b=0}^{\min(r,l)} k^{lb} C_n^r C_r^b C_{n-r}^{l-b} < C_n^r C_n^l (1 + \delta(n)),$$

где $\delta(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству леммы 5 (в этом случае $r, l \leq 2n^\beta$ и $\lambda_b \leq_n (8n^{2\beta-1})^b$).

Будем считать $\mathfrak{M}_{mn}^k = \{L\}$ пространством элементарных событий, в котором каждое событие L происходит с вероятностью $1/|\mathfrak{M}_{mn}^k|$. Математическое ожидание случайной величины $X(L)$, определенной на множестве $\mathfrak{M}_{mn}^k$, будем обозначать через $\mathbf{M}X(L)$, дисперсию — через $\mathbf{D}X(L)$.

Л е м м а 7 [10]. Пусть для случайных величин $X_1(L)$ и $X_2(L)$, определенных на $\mathfrak{M}_{mn}^k$, выполнено $X_1(L) \geq X_2(L) \geq 0$ и при $n \rightarrow \infty$ верно $\mathbf{M}X_1(L) \approx \mathbf{M}X_2(L)$, $\mathbf{D}X_2(L)/(\mathbf{M}X_2(L))^2 \rightarrow 0$. Тогда для почти всех матриц L из $\mathfrak{M}_{mn}^k$ имеет место $X_1(L) \approx X_2(L) \approx \mathbf{M}X_2(L)$, $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\sigma \in E_k^r$, $w \in W_r^n$. На $\mathfrak{M}_{mn}^k = \{L\}$ рассмотрим случайную величину $\zeta_{(\sigma,w)}(L)$, равную 1, если w — σ -допустимый набор для матрицы L , и равную 0 в противном случае. Положим

$$\mu_r(L) = \sum_{w \in W_r^n} \sum_{\sigma \in E_k^r} \zeta_{(\sigma,w)}(L), \quad \zeta(L) = \sum_{r=1}^{\min(m,n)} \mu_r(L), \quad \zeta_i(L) = \sum_{r \in \Phi_i} \mu_r(L), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Нетрудно видеть, что $\mu_r(L) = |U_r(L)|$ (число наборов в $U(L)$ длины r), $\zeta(L) = |U(L)|$ и $\zeta_i(L)$, $i \in \{1, 2\}$, — число тех наборов в $U(L)$, длины которых принадлежат интервалу Φ_i .

Оценим вероятность события $\zeta_{(\sigma,w)}(L) = 1$, $\sigma \in E_k^r$, $w \in W_r^n$, обозначаемую далее через $P(\zeta_{(\sigma,w)}(L) = 1)$. Очевидно, в силу леммы 1

$$P(\zeta_{(\sigma,w)}(L) = 1) \leq \sum_{v \in V_r^m} |N_{(v,\sigma,w)}| / |\mathfrak{M}_{mn}^k| = C_m^r k^{-r^2}. \quad (2.1)$$

С другой стороны, в силу леммы 2 имеем

$$P(\zeta_{(\sigma,w)}(L) = 1) \geq \sum_{v \in V_r^m} |N_{(v,\sigma,w)}^*| / |\mathfrak{M}_{mn}^k| = C_m^r (1 - k^{-r})^{m-r} k^{-r^2}. \quad (2.2)$$

Из (2.1), а также леммы 4 сразу вытекает следующая лемма.

Л е м м а 8. Если $m \leq n \leq k^{m^\beta}$, $\beta < 1$, то имеет место

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mu_{\eta_1}}(L) &\leq C_n^\eta C_m^\eta k^{\eta_1 - \eta_1^2}, \quad n \rightarrow \infty, \\ \sum_{r \leq \eta_1} \mathbf{M}_{\mu_r}(L) &\lesssim C_n^\eta C_m^\eta k^{\eta_1 - \eta_1^2}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Л е м м а 9. Если $m^a \leq n$, $a > 1$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mu_{\eta_1}}(L) &\geq C_n^\eta C_m^\eta k^{\eta_1 - \eta_1^2}, \quad n \rightarrow \infty, \\ \sum_{r \leq \eta_1} \mathbf{M}_{\mu_r}(L) &\geq C_n^\eta C_m^\eta k^{\eta_1 - \eta_1^2}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\sum_{r \leq \eta_1} \mathbf{M}_{\mu_r}(L) \geq \mathbf{M}_{\mu_{\eta_1}}(L).$$

Так как $mk^{-\eta_1} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то $(1 - k^{-\eta_1})^{m-\eta_1} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Откуда, пользуясь (2.2), получаем

$$\mathbf{M}_{\mu_{\eta_1}}(L) \geq C_n^\eta C_m^\eta k^{\eta_1 - \eta_1^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Лемма 9 доказана.

Из лемм 8 и 9 сразу вытекает следующая лемма.

Л е м м а 10. Если $m^a \leq n \leq k^{m^\beta}$, $a > 1$, $\beta < 1$, то

$$\sum_{r \leq \eta_1} \mathbf{M}_{\mu_r}(L) \approx \mathbf{M}_{\mu_{\eta_1}}(L) \approx C_n^\eta C_m^\eta k^{\eta_1 - \eta_1^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательства представленных ниже лемм 11–13 не приводятся, поскольку они полностью аналогичны доказательству леммы 10.

Л е м м а 11. Если $m^a \leq n$, $a > 1$, то имеет место

$$\sum_{r \geq \eta_2} \mathbf{M}_{\mu_r}(L) \approx \mathbf{M}_{\mu_{\eta_2}}(L) \approx C_n^{\eta_2} C_m^{\eta_2} k^{\eta_2 - \eta_2^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Л е м м а 12. Если $n \leq m$, то

$$\sum_{r \geq \eta_3} \mathbf{M}_{\mu_r}(L) \approx \mathbf{M}_{\mu_{\eta_3}}(L) \approx C_n^{\eta_3} C_m^{\eta_3} k^{\eta_3 - \eta_3^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Л е м м а 13. Если $m^a \leq n \leq k^{m^\beta}$, $a > 1$, $\beta < 1$, то

$$\mathbf{M}_{\zeta}(L) \approx \mathbf{M}_{\zeta_1}(L) \approx \sum_{r \in \Phi_1} C_n^r C_m^r k^{r - r^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Л е м м а 14. Если $m^a \leq n \leq k^{m^\beta}$, $a > 1$, $\beta < 1$, то имеет место

$$\mathbf{D}_{\zeta_1}(L) / (\mathbf{M}_{\zeta_1}(L))^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{D}\xi_1(L) = \mathbf{M}(\xi_1(L))^2 - (\mathbf{M}\xi_1(L))^2. \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{M}(\xi_1(L))^2 \leq \sum_{r,l \in \Phi_1} \sum_{v_1 \in V_r^m, v_2 \in V_l^m} \sum_{\substack{\sigma \in E_k^r \\ w_1 \in W_r^n, w_2 \in W_l^n, \sigma'' \in E_k^l}} |N| / k^{mn},$$

где $N = N_{(v_1, \sigma, w_1)} \cap N_{(v_2, \sigma'', w_2)}$. Отсюда, пользуясь леммами 3 и 5, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\xi_1(L))^2 &\leq \sum_{r,l \in \Phi_1} \sum_{b=0}^{\min(r,l)} k^{r+l} k^{-r^2-l^2+lb} C_n^r C_r^b C_{n-r}^{l-b} C_m^r C_m^l \leq \\ &\leq \sum_{r,l \in \Phi_1} C_n^r C_n^l C_m^r C_m^l k^{r+l} k^{-r^2-l^2} (1 + \delta(n)), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\delta(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

С другой стороны, в силу леммы 13

$$(\mathbf{M}\xi_1(L))^2 \approx \sum_{r,l \in \Phi_1} C_n^r C_n^l C_m^r C_m^l k^{r+l} k^{-r^2-l^2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Из (2.3)–(2.5) следует утверждение доказываемой леммы. Лемма 14 доказана.

Аналогично лемме 14 доказываются приводимые ниже леммы 15–17.

Л е м м а 15. Если $m^a \leq n \leq k^{m^\beta}$, $a > 1$, $\beta < 1$, то

$$\mathbf{D}\mu_{r_1}(L) / (\mathbf{M}\mu_{r_1}(L))^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Л е м м а 16. Если $m^a \leq n$, $a > 1$, то

$$\mathbf{D}\mu_{r_2}(L) / (\mathbf{M}\mu_{r_2}(L))^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Л е м м а 17. Если $n \leq m$, то

$$\mathbf{D}\mu_{r_3}(L) / (\mathbf{M}\mu_{r_3}(L))^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Пусть $v \in V_r^m, \sigma \in E_k^r, w \in W_r^n$. На $\mathfrak{M}_{mn}^k = \{L\}$ рассмотрим случайную величину $\xi_{(v, \sigma, w)}(L)$, равную 1, если $L \in N_{(v, \sigma, w)}$, и равную 0 в противном случае. Положим

$$\begin{aligned} \xi(L) &= \sum_{r=1}^{\min(m,n)} \sum_{v \in V_r^m, w \in W_r^n} \sum_{\sigma \in E_k^r} \xi_{(v, \sigma, w)}(L), \\ \xi_1(L) &= \sum_{r \in \Phi_1} \sum_{v \in V_r^m, w \in W_r^n} \sum_{\sigma \in E_k^r} \xi_{(v, \sigma, w)}(L). \end{aligned}$$

Л е м м а 18. Если $n \leq m \leq k^{n^\beta}$, $\beta < 1/2$, то при $n \rightarrow \infty$ для почти всех матриц L из $\mathfrak{M}_{mn}^k$ имеет место

$$\xi(L) \approx \xi_1(L) \approx \sum_{r \in \Phi_2} C_n^r C_m^r k^{r-r^2}.$$

Доказательство. Оценим вероятность события, $\xi_{(v, \sigma, w)}(L) = 1, v \in V_r^m, \sigma \in E_k^r, w \in W_r^n$, обозначаемую далее через $P(\xi_{(v, \sigma, w)}(L) = 1)$. В силу леммы 1

$$P(\xi_{(v, \sigma, w)}(L) = 1) = |N_{(v, \sigma, w)}| / |\mathfrak{M}_{mn}^k| = k^{-r^2}.$$

Следовательно, согласно лемме 4,

$$\mathbf{M}\xi(L) \approx \mathbf{M}\xi_1(L) \approx \sum_{r \in \Phi_2} C_n^r C_m^r k^{r-r^2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Из (2.6) и леммы 6, используя схему доказательства леммы 14, получаем

$$\mathbf{D}\xi_1(L)/(\mathbf{M}\xi_1(L))^2, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Из (2.6), (2.7) и леммы 7 следует утверждение доказываемой леммы. Лемма 18 доказана.

Утверждения теоремы 1 следуют непосредственно из лемм 7, 10, 11, 13, 14–16, а утверждения теоремы 2 следуют непосредственно из лемм 7, 12, 17, 18 и неравенства $\xi(L) \leq \xi_1(L)$.

3. Оценки типичных значений числа минимальных нечастых ЭФ и длины минимального нечастого

ЭФ. Положим $L \in \mathfrak{M}_{mn}^k$, $L = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$; $\sigma \in E_k^r$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$; $w \in W_r^n$, $w = \{j_1, \dots, j_r\}$.

Набор w называется σ -покрытием матрицы L длины r , если для любого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ найдется $j \in \{j_1, \dots, j_r\}$, такое, что $a_{ij} \neq \sigma_j$. Будем говорить, что σ -покрытие w порождается набором σ .

Набор w , являющийся σ -покрытием матрицы L , называется тупиковым, если при любом $t \in \{1, 2, \dots, r\}$ набор $w \setminus \{j_t\}$ не является γ_t -покрытием матрицы L , где $\gamma_t = (\sigma_1, \dots, \sigma_{t-1}, \sigma_{t+1}, \dots, \sigma_r)$. Если w – тупиковое σ -покрытие матрицы L , то нетрудно видеть, что столбцы матрицы L с номерами из w содержат подматрицу, имеющую с точностью до перестановки строк вид

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_{r-1} \sigma_r \\ \sigma_1 \beta_2 \sigma_3 \dots \sigma_{r-1} \sigma_r \\ \dots \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_{r-1} \beta_r \end{pmatrix},$$

где $\beta_p \neq \sigma_p$ при $p = 1, 2, \dots, r$. Такая подматрица называется σ -подматрицей.

Отметим, что в случае, когда в качестве строк матрицы L берутся описания объектов из выборки D , то набор $w \in W_r^n$, $w = \{j_1, \dots, j_r\}$, является тупиковым σ -покрытием матрицы L тогда и только тогда, когда $\text{ЭФ}(\sigma, H)$, $H = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$ – минимальный нечастый в D .

Введем обозначения: $B(L, \sigma)$, $L \in \mathfrak{M}_{mn}^k$, $\sigma \in E_k^r$, – множество всех тупиковых σ -покрытий матрицы L ; $S(L, \sigma)$, $L \in \mathfrak{M}_{mn}^k$, $\sigma \in E_k^r$, – множество всех σ -подматриц матрицы L ; $B_r(L, \sigma)$, $L \in \mathfrak{M}_{mn}^k$, $\sigma \in E_k^r$, – множество всех наборов в $B(L, \sigma)$ длины r ; $S_r(L, \sigma)$, $L \in \mathfrak{M}_{mn}^k$, $\sigma \in E_k^r$, – множество всех подматриц в $S(L, \sigma)$ порядка r ; $B(L)$, $L \in \mathfrak{M}_{mn}^k$, – совокупность всех тупиковых σ -покрытий матрицы L , в которой каждое покрытие встречается столько раз, сколькими наборами из E_k^r оно порождается; $S(L)$, $L \in \mathfrak{M}_{mn}^k$, – совокупность всех σ -подматриц матрицы L для всех σ из E_k^r ;

$$|B(L)| = \sum_{r=1}^n \sum_{\sigma \in E_k^r} |B_r(L, \sigma)|;$$

$$|S(L)| = \sum_{r=1}^n \sum_{\sigma \in E_k^r} |S_r(L, \sigma)|;$$

$r_3 = \lfloor \log_k m + \log_k \log_k n \rfloor$; Φ_2 – интервал $[1, r_3]$; $r_4 = \lfloor 0.5 \log_k mn - 0.5 \log_k \log_k mn - \log_k \log_k \log_k n \rfloor$; $r_5 = \lfloor 0.5 \log_k mn - 0.5 \log_k \log_k mn + \log_k \log_k \log_k n \rfloor$; Φ_3 – интервал $[r_4, r_5]$; $r_6 = \lfloor \log_k m + \log_k \log_k m + \log_k \log_k \log_k n \rfloor$; Φ_4 – интервал $[1, r_6]$.

Теорема 3 [3]. Если $m^a \leq n \leq k^m$, $a > 1$, $k \geq 2$, то при $n \rightarrow \infty$ для почти всех матриц L из $\mathfrak{M}_{mn}^k$ имеет место

$$\sum_{r \leq r_4} |B_r(L)| \approx |B_{r_4}(L)| \approx C_n^{r_4} C_m^{r_4} r! (k-1)^{r_4} k^{r_4 - r_4^2},$$

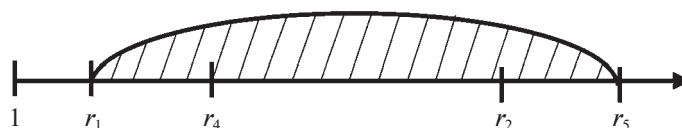


Рис. 1. Типичные значения длин наборов из $U(L)$ (см. разд. 1) и $B(L)$ в случае $m^a \leq n \leq k^{m^\beta}$, $a > 1, \beta < 1$.

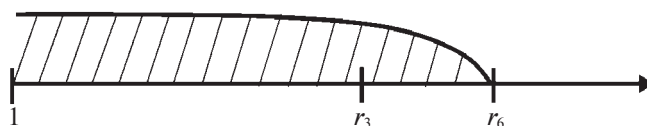


Рис. 2. Типичные значения длин наборов из $U(L)$ (см. разд. 1) и $B(L)$ в случае $n \leq m \leq k^{n^\beta}$, $\beta < 1/2$.

$$\sum_{r \geq r_5} |B_r(L)| \approx |B_{r_5}(L)| \approx C_n^{r_5} C_m^{r_5} r! (k-1)^{r_5} k^{r_5 - r_5^2},$$

$$|B(L)| \approx |S(L)| \approx \sum_{r \in \Phi_3} C_n^r C_m^r r! (k-1)^r k^{r - r^2}$$

и длины почти всех наборов из $B(L)$ принадлежат интервалу Φ_3 .

Теорема 4. Если $n \leq m \leq k^{n^\beta}$, $\beta < 1/2$, $k \geq 2$, то при $n \rightarrow \infty$ для почти всех матриц L из $\mathfrak{M}_{mn}^k$ имеет место

$$\sum_{r \geq r_6} |B_r(L)| \approx |B_{r_6}(L)| \approx C_n^{r_6} C_m^{r_6} r! (k-1)^{r_6} k^{r_6 - r_6^2},$$

$$|B(L)| \leq |S(L)| \approx \sum_{r \in \Phi_2} C_n^r C_m^r r! (k-1)^r k^{r - r^2}$$

и длины почти всех наборов из $B(L)$ принадлежат интервалу Φ_4 .

Схема доказательства теоремы 4 аналогична схеме доказательства теоремы 2.

Таким образом, в каждом из двух рассмотренных случаев почти всегда типичная длина набора из $U(L)$ и типичная длина набора из $B(L)$ принадлежат одному интервалу. Результаты теорем 1, 3 и теорем 2, 4 проиллюстрированы ниже соответственно на рис. 1, 2.

Заключение. Рассмотрены актуальные вопросы логического анализа целочисленных данных, касающиеся исследования метрических (количественных) свойств множеств частых и нечастых элементов таких данных. Усовершенствована техника получения оценок для типичных значений основных числовых характеристик указанных множеств и найдены новые оценки таких характеристик. Приведено теоретическое обоснование целесообразности (в плане сокращения временных затрат) применения методов поиска частых элементов на этапе обучения классификаторов, базирующихся на логическом анализе обучающей выборки.

Результаты проведенного в работе исследования важны и для ряда других прикладных областей, среди которых следует выделить нахождение в данных ассоциативных правил. В этом случае D называют базой данных, а каждый объект базы D – транзакцией. Ассоциативное правило устанавливает зависимость между двумя частыми ЭФ, согласно которой один частый ЭФ (посылка) с некоторой “достоверностью” влечет другой частый ЭФ (следствие). При этом посылка и следствие порождаются одним общим частым ЭФ. Вопросы синтеза ассоциативных правил возникли в связи с анализом потребительской корзины [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскакова Л.В., Журавлев Ю.И. Модель распознающих алгоритмов с представительными наборами и системами опорных множеств // ЖВМ и МФ. 1981. Т. 21. № 5. С. 1264–1275.

2. *Hammer P.L.* Partially Defined Boolean Functions and Cause-effect Relationships // Lecture at the Intern. Conf. on Multi-Attribute Decision Making Via ORBased Expert Systems. Passau, Germany: University of Passau, 1986.
3. *Дюкова Е.В., Журавлев Ю.И.* Дискретный анализ признаков описаний в задачах распознавания большой размерности // ЖВМ и МФ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1264–1278.
4. *Дюкова Е.В., Песков Н.В.* Поиск информативных фрагментов описаний объектов в дискретных процедурах распознавания // ЖВМ и МФ. 2002. Т. 42. № 5. С. 741–753.
5. *Журавлев Ю.И., Рязанов В.В., Сенько О.В.* Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения. М.: ФАЗИС, 2006. 159 с.
6. *Dragunov N., Djukova E. and Djukova A.* Supervised Classification and Finding Frequent Elements in Data // VIII Intern. Conf. on Information Technology and Nanotechnology (ITNT-2022). Samara, Russian Federation: IEEE, 2022. P. 1–5.
7. *Дюкова Е.В., Дюкова А.П.* О сложности обучения логических процедур классификации // Информатика и ее применения. 2022. Т. 16. Вып. 4. С. 57–62.
8. *Андреев А.Е.* Об асимптотическом поведении числа тупиковых тестов и длины минимального теста для почти всех таблиц // Пробл. кибернетики. 1984. Вып. 41. С. 117–142.
9. *Дюкова Е.В., Сотнезов Р.М.* Асимптотические оценки числа решений задачи дуализации и ее обобщений // ЖВМ и МФ. 2011. Т. 51. № 8. С. 1431–1440.
10. *Носков В.Н., Слепян В.А.* О числе тупиковых тестов для одного класса таблиц // Кибернетика. 1972. № 1. С. 60–65.
11. *Aggarwal Charu C.* Frequent Pattern Mining. N. Y.: Springer International Publishing, 2014. 469 p. (<https://www.charuaggarwal.net/freqbook.pdf>).

ОБЪЕДИНЕНИЕ БАЗ И ОЦЕНКА МНОЖЕСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ 3-ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРГРАФОВ¹

© 2023 г. И. С. Березкий^а, Е. К. Егорова^{а,б}, А. В. Мокряков^{а,с,*}, В. И. Цурков^б

^аМАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

^бФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

^сРГУ им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство), Москва, Россия

*e-mail: MokryakovAlVik@ya.ru

Поступила в редакцию 25.04.2023 г.

После доработки 10.05.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

Основная проблема, связанная с гиперграфами, — это их хранение. Если гиперграф без особенностей, то для его описания часто используются разреженные матрицы. Для работы с k -однородными гиперграфами часто применяют матрицы смежности, однако они занимают большое место в памяти компьютера и в целом хранение k -мерных массивов не очень удобно. Здесь предлагается одно решение для описания и хранения экстремальных k -однородных гиперграфов. Это база — уникальная характеристика экстремального гиперграфа, которая однозначно его описывает. Кроме того, базы можно применять для поиска мощности экстремальных k -однородных гиперграфов. Нами представлены алгоритмы перечисления баз и представлена гипотеза об аналитическом виде формул, описывающих мощность множества экстремальных k -однородных гиперграфов. Для данной задачи используется операция объединения баз, также введенная здесь.

DOI: 10.31857/S0002338823050037, EDN: TEEFBU

Введение. Гиперграфы начиная с XXI в. активно применяются для анализа сетей [1, 2], признаков и характеристик принадлежности (таких, как теги, свойства, необязательные параметры) [3]. Графы и гиперграфы широко используются как в современных фундаментальных исследованиях, так и при решении практических задач. Однако большинство алгоритмов на гиперграфах оперирует специальными классами гиперграфов [4]. Характер ограничений, накладываемых на данные классы, позволяет точнее описывать модели анализируемых данных.

При этом нужно учитывать, что сами гиперграфы суть аморфные структуры, имеющие слабые общие черты, что привело к построению класса однородных гиперграфов. Это дает возможность применять некий общий аппарат при их исследовании. Данную структуру независимо друг от друга начали разрабатывать как топологи [5], так и исследователи в области обобщения теории графов [6–13]. Большое количество статей по раскраскам гиперграфов показывает актуальность фундаментальных исследований. С другой стороны, имеется широкий спектр работ, связанный с однородными гиперграфами [14–21], где показывается их применимость в разделах управления сетями и базами данных, шифровании и моделировании.

Главными ключевыми задачами в области комбинаторной топологии и теории гиперграфов всегда были вопросы подсчета. Здесь стоит упомянуть как давние основополагающие работы, например [22, 23], так и современные [24–26]. Сложные методы подсчета зачастую опираются на специфические структуры-представления графов и гиперграфов, которые позволяют взглянуть на них с иной стороны [27, 28].

В статье продолжается исследование базы — структуры, описанной в [28], а именно расширяется понятие базы на k -мерный случай с построением операции объединения двух баз и реализации алгоритма подсчета баз.

1. Экстремальные однородные гиперграфы и базы. Для работы с базами необходимо дать определение гиперграфам, экстремальности и самим базам.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-53019 ГФЕН_а).

Определение 1. Гиперграф $H(V_n, E)$ – совокупность множества V_n из n вершин и множества непустых подмножеств множества вершин E [4], e_i – элементы множества E , где $i = \overline{1, |E|}$ – гиперребра.

Гиперграф $H^k = H^k(V_n, E)$ называют k -однородным гиперграфом (uniform hypergraph (UH)), если $|e_i| = k, \forall e_i \in E$.

В различных отраслях математики частные случаи данных объектов встречаются под иными именами: для $k = 2$ данная конструкция соответствует ненаправленному графу, не имеющему петель. В топологии данные структуры именуются комплексами с размерностью $k - 1$ [5, 28].

Наиболее точно структуру УН описывает k -индексная матрица смежности $X^k(H^k) = (x_{i_1 \dots i_k})$, где индексы $i_j = \overline{1, n}$ при $j = \overline{1, k}$. Такая структура является универсальной, но с точки зрения хранения матрицы смежности в памяти.

Теперь рассмотрим свойство экстремальности. Его можно найти несколькими способами, например через матрицу смежности. Опишем понятия доменов нулей и единиц, которые нам полезны в дальнейшем определении.

Определение 2. Доменом нулей – $D_0(X_n^k)$ (единиц – $D_1(X_n^k)$) называется множество ячеек матрицы смежности с попарно неравными индексами, равными нулю (единице), при этом не существует рассматриваемой единичной (нулевой) ячейки, отличающейся от пары ячеек из D_0 (D_1) только одним индексом и находящейся между ними.

Теперь воспользуемся данным определением в задании особого экстремального класса УН.

Определение 3. Однородный гиперграф H_n^k называется экстремальным, если для соответствующей ему матрицы смежности $X_n^k(H_n^k)$ выполняется правило разделения доменов нулей и единиц, состоящее из следующих условий:

- 1) все единичные ячейки образуют домен единиц;
- 2) все нулевые ячейки образуют домен нулей;
- 3) ячейка $x_{1 \dots k} \in D_1(X_n^k)$ или $D_1(X_n^k) = \emptyset$;
- 4) ячейка $x_{n-k+1 \dots n} \in D_0(X_n^k)$ или $D_0(X_n^k) = \emptyset$.

В дальнейшем экстремальный УН $_n^k$ будем обозначать через ЕУН $_n^k$.

Другими словами, правило разделения доменов нулей и единиц можно сформулировать следующим образом: домен единиц сгруппирован около ячейки с минимальными индексами, а домен нулей – около ячейки с максимальными индексами, и между ними находится граница, которая изолирует нули и единицы в своих доменах.

Особый интерес представляет описание данной границы между доменами. Одним из способов ее описания является база.

2. База и критерий экстремальности УН $_n^k$. Пусть $n, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$. Для множества индексов $I_n = \{i \in \mathbb{Z} : 1 \leq i \leq n\}$ (номеров) введем обозначение k -индексных упорядоченных подмножеств множества I_n : $I_n^k = \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_j \leq n, i_j < i_{j+1} \forall j\}$. Определим на I_n^k частичный порядок: положим $(i_j : 1 \leq j \leq k) \geq (m_j : 1 \leq j \leq k)$, если $i_j \geq m_j \forall j$, и $(i_j : 1 \leq j \leq k) > (m_j : 1 \leq j \leq k)$ при $(i_j : 1 \leq j \leq k) \geq (m_j : 1 \leq j \leq k)$ и $(i_j : 1 \leq j \leq k) \neq (m_j : 1 \leq j \leq k)$.

Теперь построим конструкцию, позволяющую алгебраическим способом описать экстремальный ЕУН $_n^k$. Для $H^k = (x_{i_1 \dots i_k}) = H^k(V_n, E)$ положим $I_n^k(H^k) = \{(i_1, \dots, i_k) \in I_n^k : x_{i_1 \dots i_k} = 1\} = \{(i_1, \dots, i_k) \in I_n^k : \{u_{i_j} : 1 \leq j \leq k\} \in E\}$.

Определение 4. Пусть $H^k = (x_{i_1 \dots i_k}) = H^k(V_n, E)$ – не пустой ЕУН $_n^k$ ($E \neq \emptyset$). Подмножество индексов $\bar{I}_n^k(H^k) = \{(i_1, \dots, i_k)\}$ из I_n^k называется базой для ЕУН $_n^k$, если выполняются следующие условия:

- а) для разных элементов $(i_1, \dots, i_k)$ и $(m_1, \dots, m_k)$ из $\bar{I}_n^k(H^k)$ отношение порядка не определено;

б) для $\forall (i_1, \dots, i_k) \in I_n^k(H^k)$, где $(i_1, \dots, i_k) \notin \bar{I}_n^k(H^k)$, существует такой $(m_1, \dots, m_k) \in \bar{I}_n^k(H^k)$, что $(i_1, \dots, i_k) < (m_1, \dots, m_k)$.

Рассмотрим на следующем примере базу.

Пример 1. Пусть дан $H_7^4 = H^4(V_7, E)$, где множество гиперребер $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_5\}, \{v_1, v_2, v_3, v_6\}, \{v_1, v_2, v_3, v_7\}\}$. Следовательно, $\bar{I}_7^4(H^4) = \{(1, 2, 3, 7)\}$.

Теперь зададим понятие максимального подмножества индексов.

Определение 5. Подмножество индексов $(m_1, \dots, m_k)$ из $I_n^k(H^k)$ (т.е. $x_{m_1 \dots m_k} = 1$) называется максимальным, если $x_{i_1 \dots i_k} = 0$, $\forall (i_1, \dots, i_k) > (m_1, \dots, m_k)$.

Это определение означает следующее: для каждой тройки из $I_n^k(H^k)$ существует максимальная тройка из этого же множества.

Теорема 1. Любой ЕУН $H^k = H^k(V_n, E) = (x_{i_1 \dots i_k})$ имеет единственную базу и эта база есть $\bar{I}_n^k(H^k)$.

Доказательство данной теоремы для 3-мерного случая приведено в [28]. Оно легко расширяется на k -мерный случай.

Теперь можно ввести принцип построения базы на основе максимального подмножества.

Теорема 2. Пусть $\tilde{I}_n^k = \{(i_1, \dots, i_k) \in I_n^k : \text{любые пары различных подмножеств индексов не связаны отношением порядка из } I_n^k\}$. Данное множество подмножеств является максимальным. Тогда $\tilde{I}_n^k$ — база некоторого ЕУН H_n^k .

Пример 2. Пусть $\bar{I}_8^4(H^4) = \{(1, 2, 5, 7), (2, 3, 5, 6)\}$ — база некоторого экстремального 4-одно-родного гиперграфа $H_8^4 = H^4(V_8, E)$. Тогда $E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_5\}, \{v_1, v_2, v_3, v_6\}, \{v_1, v_2, v_3, v_7\}, \{v_1, v_2, v_4, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4, v_6\}, \{v_1, v_2, v_4, v_7\}, \{v_1, v_2, v_5, v_6\}, \{v_1, v_2, v_5, v_7\}, \{v_1, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1, v_3, v_4, v_6\}, \{v_1, v_3, v_5, v_6\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4, v_6\}, \{v_2, v_3, v_5, v_6\}\}$.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. Однородный гиперграф H_n^k является экстремальным тогда и только тогда, когда H^k имеет базу.

Доказательство последних теорем очевидно и не вызывает затруднений.

Пример 3. Пусть $n = 5$ и $\tilde{I}_5 = \{(1, 2, 5), (2, 3, 4)\}$. Легко видеть, что 2-комплекс $H_5^3 = H^3(V_5, E)$, где $E = \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_5\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_1, v_3, v_5\}, \{v_1, v_4, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}\}$ задается базой $\tilde{I}_5$.

3. Объединение баз. Базу можно задать также через границу, разделяющую домены D_1 и D_0 .

Рассмотрим матрицу смежности, которая представляет собой k -мерный куб, касающийся начала координат внешним углом ячейки с минимальными индексами. Оси координат соответствуют росту индексов, и без потери общности можно считать, что порядок осей такой же, как порядок индексов матрицы. Границу можно представить в виде множества точек, каждая из которых имеет локальные минимум или максимум расстояния до начала координат. При этом нужно понимать, что такая поверхность имеет ряд линий симметрии, каждая из которых делит поверхность пополам. Нас интересует область, в которой $i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k$.

С учетом вышесказанного граница между доменами является k -мерной поверхностью, которая представляет собой объединение внешней границы (по отношению к началу координат) множества k -мерных параллелепипедов. Главная диагональ каждого параллелепипеда соединяет начало координат и один из локальных максимумов расстояния от границы до начала координат. Точки максимумов в интересующей нас области с упорядоченными значениями координат описываются подмножествами индексов, образующих элементы базы. Если базу представить такой k -мерной поверхностью, то легко понять, что будут означать операции объединения и пересечения баз.

Концепция объединения баз-поверхностей. Результат операции можно представить как границу, образованную максимумами двух границ, следующим образом: если луч, проходящий из начала координат в точку максимума, проходит через вторую границу далее исследуемой точки, то эта точка в базу не включается. После перебора всех максимальных точек нужно проверить точки на наличие порядка между ними. Особенностью построения является то, что лишними остаться могут только точки, различающиеся между собой не более чем на одну координату. Таким образом можно отсортировать точки в лексикографическом порядке (т.е. сначала по первой координате, потом при равенстве по второй, если равны обе координаты, то по третьей и т.д.), найти точки, различающиеся не более чем на одну координату и имеющие меньшее значение координаты, и убрать их из базы.

Однако с точки зрения базы, мы не храним ее как поверхность, а храним как набор максимальных подмножеств множества индексов, что накладывает свои ограничения на операцию объединения.

Первым рассмотрим вспомогательный алгоритм поиска места в списке, для добавления нового элемента базы.

А л г о р и т м 1. Поиск места для вставки элемента.

Входные данные: отсортированный в лексикографическом порядке список A подмножеств индексов, каждое из которых имеет длину k и последний элемент которого не превосходит n ; q — количество элементов в списке A ; b — подмножество индексов того же типа, что входят в A ; p, j — счетчики, равные нулю.

Выходные данные: t — позиция в списке A' , куда будет нужно вставить элемент b .

Шаг 1. Увеличиваем j на 1.

Шаг 2. Если $j = q$, то переходим к шагу 4.

Шаг 3. Если $A_j \leq b$ в лексикографическом смысле, то переходим к шагу 1, иначе переходим к шагу 4.

Шаг 4. Устанавливаем t , равным j .

Шаг 5. Завершаем алгоритм.

Данный алгоритм будет использоваться как вспомогательный в следующем алгоритме добавления элемента в базу.

А л г о р и т м 2. Объединение базы с одним элементом.

Входные данные: отсортированный в лексикографическом порядке список A подмножеств индексов, каждое из которых имеет длину k и последний элемент которого не превосходит n ; b — подмножество индексов того же типа, что входят в A ; q — количество элементов в списке A ; p, j — счетчики, равные 0; t — позиция в списке A' , куда будет нужно вставить элемент b .

Выходные данные: список A' подмножеств индексов, каждое из которых имеет длину k .

Шаг 1. Устанавливаем t как результат работы алгоритма 1 с параметрами A и b .

Шаг 2. Добавляем в список A' элементы A_i , где $i = \overline{1, t-1}$.

Шаг 3. Добавляем в список A' элемент b .

Шаг 4. Добавляем в список A' элементы A_i , где $i = \overline{t, q}$.

Шаг 5. Увеличиваем q на 1.

Шаг 6. Увеличиваем p на 1.

Шаг 7. Если $p = t$, то переходим к шагу 12.

Шаг 8. Если $A_{pi} \leq b_i \forall i$, то удаляем p -й элемент из A' , иначе переходим к шагу 6.

Шаг 9. Уменьшаем t на 1.

Шаг 10. Уменьшаем q на 1.

Шаг 11. Переходим к шагу 8.

Шаг 12. Увеличиваем p на 1.

Шаг 13. Если $p > q$, то перейти к шагу 15.

Шаг 14. Если $A_{pi} \geq b_i \forall i$, то удаляем t -й элемент из A' , иначе переходим к шагу 6.

Шаг 15. Возвращаем A' .

Данный алгоритм тоже используем как вспомогательный в алгоритме объединения двух баз.

Алгоритм 3. Объединение двух баз, представленных в виде списков подмножеств.

Входные данные: отсортированные в лексикографическом порядке списки A и B подмножеств индексов, каждое из которых имеет длину k и последний элемент которого не превосходит n ; q_1 и q_2 — количество элементов в списках A и B соответственно; j — счетчик, равный 0.

Выходные данные: список A' подмножеств индексов, каждое из которых имеет длину k .

Шаг 1. Устанавливаем $A' = A$.

Шаг 2. Увеличиваем j на 1.

Шаг 3. Если $j > q_2$, то завершаем алгоритм.

Шаг 4. Устанавливаем A' , равным результату алгоритма 2 с параметрами A , B_j , q_1 .

Результатом работы алгоритма 3 будет база-объединение баз A и B .

4. Мощность множества EUN_n^k . Отдельный интерес представляет собой оценка мощности множества всех экстремальных k -однородных гиперграфов. Интерес в данной области связан с разработкой новых алгоритмов шифрования данных, построенных на топологических принципах, в частности на связях вершин внутри ключевого экстремального гиперграфа [15–17], так как чем быстрее растет мощность множества, тем более устойчивым является ключ при простом переборе.

Через $\mathfrak{U}_n^k$ обозначим множество всех экстремальных k -однородных гиперграфов на множестве вершин V_n , через $\mathfrak{B}_n^k(p)$ — множество баз EUN_n^k , состоящих из p элементов, а через $B_n^k(p)$ — мощность множества $\mathfrak{B}_n^k(p)$, т.е. $B_n^k(p) = |\mathfrak{B}_n^k(p)|$. Запишем также сумму всех $B_n^k(p)$:

$$\mathcal{B}_n^k = \sum_p B_n^k(p) = \sum_p |\mathfrak{B}_n^k(p)| = |\mathfrak{U}_n^k|.$$

Известно, что $\mathcal{B}_n^2 = 2^{n-1}$. Для определения мощности множества $\mathfrak{U}_n^k$ был предложен следующий путь.

Так как каждой базе соответствует свой EUN_n^k , то была написана программа на языке Си, которая при заданном n создавала все возможные тройки индексов ($1 \leq i, j, k \leq n$). Таким образом задавались все базы, состоящие из одной тройки. Эти данные являются начальными для следующего рекурсивного алгоритма.

Алгоритм 4. Подсчет $B_n^k(p)$.

Входные данные: A — список баз; $deep$ — уровень глубины рекурсии (изначально глубина равна 1); p — номер.

Переменные: $subsets$ — массив подмножеств из k индексов; ckn — число сочетаний из n по k ; j — счетчик (равен p); new — список подмножеств индексов (сначала пустой).

Шаг 1. Увеличиваем j на 1.

Шаг 2. Для каждой пары i и j -й элемент из $subsets$, где $i > j$, с помощью алгоритма 2 получаем список A' .

Шаг 3. Если длина списка A' больше $deep$, то прибавляем количество найденных элементов к $B_n^k(deep)$ и вызываем текущий алгоритм с параметрами A , $deep + 1$, j .

Шаг 4. Если $j > ckn$, то завершаем алгоритм.

По завершению всей программы получаем значения $B_n^k(p)$.

Замечание. усть $\lceil a \rceil$ — округление числа a до ближайшего целого большего a . Тогда:

1) для $k = 2$ $p \leq \lceil n/2 \rceil$,

2) для $k = 3$ $p \leq \lceil n(n-2)/8 \rceil$.

Таблица 1. Значения $B_n^3(p)$ для $n = \overline{3,12}$

p	n									
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
2			5	35	140	420	1050	2310	4620	8580
3				10	140	952	4420	16060	49060	131560
4					35	770	7755	50820	250965	1011010
5					1	216	6072	80784	691185	4377824
6						16	2078	66778	1082492	11384930
7							288	28790	990774	18465944
8							12	6283	534309	19088128
9								620	167729	12694436
10								20	29532	5424445
11									2706	1469826
12									109	245235
13									1	23800
14										1184
15										22
16										
B_n^3	2	5	16	66	352	2431	21760	252586	3803648	74327145

Часть из полученных $B_n^k(p)$ для случая $k = 3$ представлена в табл. 1 и 2, а для $k = 4$ — в табл. 3. Верхняя строчка задает n , а левый столбец — p . В последней строке приведены B_n^k — общее количество баз на n вершинах.

Отметим, что время расчета растет быстрее экспоненты и при $n = 17$ составляет более 100 ч на 4-ядерном процессоре с частотой 3.0 GHz. Вследствие этого особый интерес представляет аналитический вид $B_n^k(p)$.

Нам известно, что $B_n^3(1) = C_n^3$ (исходя из способа задания начальных данных). Отсюда возникло предположение, что $B_n^k(p)$ — полиномиальная функция. Для подтверждения его был применен метод конечных разностей для сеточной функции. Одним из применений данного метода является нахождение полинома, проходящего через точки сеточной функции (при его существовании). Собственно для этого он и будет использован. Далее кратко опишем его.

Для значений $x : x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$ нам известны значения функции $f(x) : y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$.

Тогда $y_{i+1} - y_i = \Delta y_i$ — конечные разности первого порядка, $\Delta y_{i+1} - \Delta y_i = \Delta^2 y_i$ — конечные разности второго порядка, Δ^i — конечная разность i -го порядка.

Пусть задана сеточная функция для $B_n^3(2)$. Ее значения представлены в табл. 4.

Так как $\Delta^i \neq 0$ при $i = \overline{1,6}$ и равны 0 при больших i , то ищем $B_n^3(2)$ в виде многочлена шестого порядка.

На основе этой сеточной функции была построена система из семи линейных уравнений следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^6 5^i x_{7-i} = 5, \\ \sum_{i=0}^6 6^i x_{7-i} = 35, \\ \sum_{i=0}^6 7^i x_{7-i} = 140, \\ \sum_{i=0}^6 8^i x_{7-i} = 420, \\ \sum_{i=0}^6 9^i x_{7-i} = 1050, \\ \sum_{i=0}^6 10^i x_{7-i} = 2310, \\ \sum_{i=0}^6 11^i x_{7-i} = 4620. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Здесь в качестве неизвестных выступают коэффициенты многочлена.

Решив систему (4.1), получаем

$$B_n^3(2) = \frac{1}{720} (5n^6 - 45n^5 + 125n^4 - 75n^3 - 130n^2 + 120n) = 5C_{n+1}^6. \quad (4.2)$$

На основе уравнения (4.2) можно заметить, что количество баз связано с числом сочетаний. Это можно объяснить тем, что два элемента базы используют шесть индексов, что предполагает связь количества индексов в одном элементе (три) и количество элементов в базе (два). Кроме того, количество элементов в выборке $(n+1)$ связано с тем, что при $n=5$ уже существует база из двух элементов, это требует существования соответствующего числа сочетаний. Однако легко убедиться, что $B_n^3(3) \neq C_{n+3}^9$. Следовательно, предполагаем наличие более сложной конфигурации для данного значения.

В целом на основе вышесказанного можно выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза 1. Значения $B_n^3(p)$ имеют вид

$$B_n^3(p) = \sum_{i=0}^{t(n,p)-x} a_i C_{n+t(n,p)-i}^{3p}, \quad (4.3)$$

где t — целочисленная функция, равная разнице между $3p$ и мощностью наименьшего множества вершин, на котором впервые встречается база из p элементов; x — неизвестное целое число, ограничивающее количество слагаемых в формуле (определяется эмпирически).

Для нахождения a_i был разработан специальный алгоритм 5.

Алгоритм 5. Нахождение коэффициентов a_i из формулы (4.3).

Входные данные: b — массив найденных значений для $B_n^3(p)$.

Шаг 1. $a_0 = b_0$.

Шаг 2. $a_1 = b_1 - a_0 C_{n+t(n,p)+1}^{3p}$.

Шаг 3. $a_2 = b_2 - a_0 C_{n+t(n,p)+2}^{3p} - a_1 C_{n+t(n,p)+1}^{3p}$ и т.д., пока $a_i \neq 0$.

С помощью данного алгоритма были найдены следующие формулы для $B_n^3(p)$:

$$\begin{aligned} B_n^3(1) &= C_n^3, \\ B_n^3(2) &= 5C_{n+1}^6, \\ B_n^3(3) &= 10C_{n+3}^9 + 40C_{n+2}^9 + 2C_{n+1}^9, \\ B_n^3(4) &= 35C_{n+5}^{12} + 315C_{n+4}^{12} + 475C_{n+3}^{12} + 55C_{n+2}^{12}, \end{aligned}$$

Таблица 2. Значения $B_n^3(p)$ для $n = 13, 16$

p	n			
	13	14	15	16
1	286	364	455	560
2	15015	25025	40040	61880
3	318604	710710	1481480	2917200
4	3488485	10650640	29439410	74923420
5	22226490	95125888	355158254	1185493232
6	88238945	543587562	2796484482	12434174318
7	227858000	2080567626	15069874468	90742384028
8	393517284	5502260799	57442352968	476744725216
9	462608192	10273381932	158592213110	1848828612124
10	373867707	13744477309	322690904368	5392594433660
11	208364244	13301782998	490018279354	12000177549114
12	79794344	9358980694	560266567338	20595468085478
13	20772294	4791740884	485082228194	27483018141586
14	3601692	1779649432	318975261710	28680686348246
15	402028	475731212	159354798682	23496815033552
16	27396	90305451	60344252884	15142647607778
17	1054	11918226	17232209478	7678979141312
18	19	1057345	3680175340	3059932450790
19		59482	580612338	955105234348
20		1894	66480772	232311475937
21		26	5386142	43696630958
22			297470	6287511734
23			10500	681758612
24			201	54552102
25			1	3123620
26				121344
27				2842
28				28
29				0
B_n^3	1885102080	62062015500	2652584509440	147198472495020

$$B_n^3(5) = C_{n+8}^{15} + 200C_{n+7}^{15} + 2736C_{n+6}^{15} + 8992C_{n+5}^{15} + 8141C_{n+4}^{15} + 1376C_{n+3}^{15} + 26C_{n+2}^{15},$$

$$B_n^3(6) = 16C_{n+10}^{18} + 1774C_{n+9}^{18} + 30032C_{n+8}^{18} + 153544C_{n+7}^{18} + \\ + 285054C_{n+6}^{18} + 191805C_{n+5}^{18} + 38545C_{n+4}^{18} + 1725C_{n+3}^{18} + 5C_{n+2}^{18},$$

$$B_n^3(7) = 288C_{n+12}^{21} + 22454C_{n+11}^{21} + 423922C_{n+10}^{21} + 2875886C_{n+9}^{21} + 8246146C_{n+8}^{21} + \\ + 10547388C_{n+7}^{21} + 5875430C_{n+6}^{21} + 1276780C_{n+5}^{21} + 89210C_{n+4}^{21} + 1240C_{n+3}^{21}.$$

Эти выражения не противоречат гипотезе и, скорее, подтверждают ее.

Кроме того алгоритм 5 можно завершать, если данные при нужном количестве вершин еще не найдены, что позволяет получить коэффициенты не для всех слагаемых формул, но для нескольких начальных. Здесь представлены обнаруженные значения для случая $p > 7$:

Таблица 3. Значения $B_n^4(p)$ для $n = \overline{4, 11}$

p	n							
	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	5	15	35	70	126	210	330
2			15	140	721	2709	8295	21945
3			1	140	2464	22008	133420	623744
4				35	3375	84279	1098438	9536535
5				1	2044	171734	5238452	88689918
6					555	199380	15585508	540661052
7					70	135782	30289620	2269968192
8					4	54003	39581578	6795045616
9						12026	35399344	14867483686
10						1353	21866088	24205132388
11						62	9349758	29695839838
12						1	2760306	27694261340
13							561186	19745037108
14							79284	10797372548
15							8078	4534416086
16							619	1461616993
17							34	360729056
18							1	67837883
19								9646694
20								1026445
21								80774
22								4642
23								186
24								4
B_n^4	2	6	32	352	9303	683463	161960219	143145033003

Таблица 4. Сеточная функция конечных разностей для $B_n^3(2)$

n	5	6	7	8	9	10	11	12
$B_n^3(2)$	5	35	140	420	1050	2310	4620	8580
Δ^1		30	105	280	630	1260	2310	3960
Δ^2			75	175	350	630	1050	1650
Δ^3				100	175	280	420	600
Δ^4					75	105	140	180
Δ^5						30	35	40
Δ^6							5	5
Δ^7								0

$$B_n^3(8) = 12C_{n+15}^{24} + 5983C_{n+14}^{24} + 380834C_{n+13}^{24} + 7587703C_{n+12}^{24} + \\ + 62307684C_{n+11}^{24} + 240698789C_{n+10}^{24} + 465642053C_{n+9}^{24} + 458320446C_{n+8}^{24} + \dots$$

$$B_n^3(9) = 620C_{n+17}^{27} + 150369C_{n+16}^{27} + 8232384C_{n+15}^{27} + 168534426C_{n+14}^{27} + \\ + 1582063660C_{n+13}^{27} + 7589760929C_{n+12}^{27} + \dots$$

$$B_n^3(10) = 20C_{n+20}^{30} + 28912C_{n+19}^{30} + 4518253C_{n+18}^{30} + 219352392C_{n+17}^{30} + \\ + 4544828277C_{n+16}^{30} + 47003537429C_{n+15}^{30} + \dots$$

Полученные результаты позволяют обобщить гипотезу на общий случай.

Гипотеза 2. Значения $B_n^k(p)$ имеют следующий вид:

$$B_n^k(p) = \sum_{i=0}^{t(k,n,p)-x} a_i C_{n+t(k,n,p)-i}^{kp},$$

где t — целочисленная функция, равная разнице между kp и мощностью наименьшего множества вершин, на котором впервые встречается база из p элементов; x — неизвестное целое число, ограничивающее количество слагаемых в формуле (определяется эмпирически).

Для $k = 4$ поиск аналитических формул затруднен в связи с недостатком найденных экспериментальных значений. Однако для $p < 4$ коэффициенты были найдены:

$$B_n^4(1) = C_n^4,$$

$$B_n^4(2) = 15C_{n+2}^8 + 5C_{n+1}^8 + C_n^8,$$

$$B_n^4(3) = C_{n+6}^{12} + 127C_{n+5}^{12} + 722C_{n+4}^{12} + 610C_{n+3}^{12} + 183C_{n+2}^{12} + 17C_{n+1}^{12} + C_n^{12}.$$

Это также подтверждает справедливость предлагаемой гипотезы.

Заключение. Согласно результатам исследования, получено описание общего принципа объединения баз EUN_n^k , а также алгоритм объединения для конкретного представления базы в виде множества подмножеств. Были сделаны оценки, связанные с задачей перечисления EUN_n^3 : найден общий вид для $\mathcal{B}_n^3(p)$, получены конкретные формулы для случаев $1 \leq p \leq 7$; эмпирически определена верхняя оценка максимальной размерности базы в зависимости от количества вершин EUN_n^3 . Важным итогом работы является предлагаемая гипотеза аналитического вида формул для $B_n^k(p)$, которой не противоречат проведенные расчеты некоторых формул.

При продолжении исследования в данной области предполагается подтвердить гипотезу и найти аналитические формулы для $B_n^k(p)$ и общую формулу для $\mathcal{B}_n^k(p)$, в том числе для $k > 3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов М.В., Калашников И.В., Нуруллаев М.М. Исследование структурных свойств сети интернет на основе метаграфовых моделей // Информатика и автоматизация. 2020. Т. 19. № 4. С. 880–905.
2. Миков А.И., Миков А.А. Свойства геометрических гиперграфов беспроводных компьютерных сетей // Информатизация и связь. 2020. № 4. С. 60–66.
<https://doi.org/10.34219/2078-8320-2020-11-4-60-66>
3. Герасименко Е.М., Дышаев Н.Н. Персонализация в фолксономиях в виде гиперграфов на основе кластеризации тегов // Информатика, вычислительная техника и инженерное образование. 2019. № 2 (35). С. 11–15.
4. Зыков А.А. Гиперграфы // УМН. 1974. Т. XXIX. № 6 (180). С. 89–154.
5. Александров П.С. Комбинаторная топология. М.: Гостехтеориздат, 1947. 660 с.
6. Бобу А.В., Куприянов А.Э., Райгородский А.М. О числе ребер однородного гиперграфа с диапазоном разрешенных пересечением // Проблемы передачи информации. 2017. Т. 53. № 4. С. 16–42.
7. Балобанов А.Е., Шабанов Д.А. О числе независимых множеств в простых гиперграфах // Мат. заметки. 2018. Т. 103. № 1. С. 38–48.
<https://doi.org/10.4213/mzm11508>
8. Денисов И.О., Шабанов Д.А. О концентрации значений чисел независимости случайных гиперграфов // Дискретная математика. 2021. Т. 33. № 4. С. 32–46.
<https://doi.org/10.4213/dm1676>
9. Захаров П.А., Шабанов Д.А. О максимальном разрезе в случайном гиперграфе // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 501. № 1. С. 26–30.
<https://doi.org/10.31857/S2686954321060187>
10. Райгородский А.М., Черкашин Д.Д. Экстремальные задачи в раскрасках гиперграфов // УМН. 2020. Т. 75. № 1(451). С. 95–154.
<https://doi.org/10.4213/rm9905>
11. Ванг Л., Егорова Е.К., Мокряков А.В. Развитие теории гиперграфов // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 1. С. 111–116.

12. *Миронов А.А.* Геометрия точек пространства R^n , реализуемых в граф // УМН. 1977. Т. XXXII. № 6 (198). С. 232–233.
13. *Костяной Д.С., Мокряков А.В., Цурков В.И.* Алгоритмы восстановления гиперграфов по заданному вектору степеней вершин // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 4. С. 43–48.
14. *Бондаренко В.А., Николаев А.В.* Об одном классе гиперграфов и о вершинах релаксаций разрезного многогранника // ДАН. 2012. Т. 442. № 3. С. 300–302.
15. *Егорова Е.К., Мокряков А.В., Суворова А.А., Цурков В.И.* Алгоритм передачи многомерных данных с использованием экстремальных однородных гиперграфов // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 73–78.
16. *Каменев А.Р., Ирбитский И.С., Пашковская Е.А.* Методы подбора ключа для алгоритмов шифрования на графах // Сб. тез. работ ММНК XLVIII Гагаринские чтения – 2022. М.: Перо, 2022. С. 252.
17. *Лежинский М.В.* Концепция топологически-ориентированных хэш-функций // Сб. тез. работ ММНК XLVIII Гагаринские чтения – 2022. М.: Перо, 2022. С. 252.
18. *Mironov A.A.* Minimax under Transportation Constraints. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. 309 p.
19. *Миронов А.А.* Равномерные обобщенные графы // ДАН. 1996. Т. 351. 4. С. 465–468.
20. *Мокрозуб В.Г., Немтинов В.А., Мордвин А.С., Илясов А.А.* Применение n -ориентированных гиперграфов и реляционных баз данных для структурного и параметрического синтеза технических систем // Прикладная информатика. 2010. № 4 (28). С. 115–122.
21. *Суворова А.А., Берецкий И.С.* Алгоритм потокового шифрования на экстремальных k -однородных гиперграфах // Сб. тез. работ ММНК Гагаринские чтения – 2020. М.: МАИ, 2020. С. 510–511.
22. *Prüffer H.* Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen // Arch. Math. Phys. 1918. V. 27. P. 742–744.
23. *Gilbert E.N.* Enumeration of Labelled Graphs // Canad. J. Math. 1956. V. 8. P. 405–411.
24. *Кузьмин О.В., Чернигова А.Г.* Автоматизация комбинаторного кодирования и декодирования корневых деревьев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2015. № 1(45). С. 84–88.
25. *Мокряков А.В.* Представление гиперграфов в качестве алгебраической структуры // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 5. С. 53–59.
26. *Погребной В.К., Погребной А.В.* Исследование полиномиальности метода вычисления интегрального описателя структуры графа // Изв. Томск. политехн. ун-та. 2013. Т. 323. № 5. С. 146–151.
27. *Гольцова Т.Ю., Егорова Е.К., Мокряков А.В., Цурков В.И.* Сигнатуры экстремальных 2-однородных гиперграфов // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. Т. 6. № 6. С. 52–60.
28. *Мокряков А.В., Цурков В.И.* Восстановление 2-комплексов по целочисленному неотрицательному вектору // АИТ. 2011. № 12. С. 130–143.

О КОЛЕБАНИЯХ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ С НЕСКОЛЬКИМИ ПОДВИЖНЫМИ МАССАМИ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ ЭФФЕКТ ГАЛОПИРОВАНИЯ¹

© 2023 г. Б. Я. Локшин^а, Ю. Д. Селюцкий^{а,*}

^аНИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: seliutski@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 18.04.2023 г.

После доработки 02.05.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

Рассматривается цепочка из нескольких тел, которые могут перемещаться поступательно вдоль некоторой горизонтальной прямой. Соседние тела связаны друг с другом пружинами. Один конец цепочки закреплен, а на другом находится тело, представляющее собой прямоугольный параллелепипед квадратного сечения. Система помещена в горизонтальный стационарный поток среды, перпендикулярный указанной прямой. В предположении, что поток воздействует только на параллелепипед, исследуется динамика этой системы как потенциального рабочего элемента ветроэнергетической установки колебательного типа, использующей эффект галопирования. Для разного количества тел в цепочке, различных значениях скорости потока и внешней нагрузки изучаются периодические режимы в системе. Показано, в частности, что увеличение числа тел в цепочке позволяет увеличить максимальную мощность, которая может быть получена с помощью устройства, и уменьшить критическую скорость, при которой возникают колебания. Предложена схема регулирования нагрузочного сопротивления, направленная на обеспечение перехода на колебательный режим с максимальной мощностью.

DOI: 10.31857/S0002338823050116, EDN: OIXVFO

Введение. Известно, что при определенных условиях тела “плохообтекаемой” формы (типа призмы, цилиндра и т.п.) могут совершать поступательные колебания в направлении поперек набегающего потока. Это явление получило название галопирования. Его возникновение связано с тем, что при определенной ориентации плохообтекаемого тела относительно набегающего потока аэродинамические силы создают отрицательное демпфирование.

В отличие от колебаний, индуцированных сходом вихрей с поверхности тела, галопирование достаточно эффективно описывается в рамках квазистатического подхода, когда аэродинамические силы считаются зависящими только от текущих значений фазовых координат и скоростей тела. С помощью этого подхода в [1] был получен критерий возникновения галопирующих колебаний обледеневших проводов. В работах [2, 3] было показано, что квазистатический подход позволяет обеспечить достаточно точное описание данного явления для прямоугольного параллелепипеда. Вообще говоря, галопированию подвержены плохообтекаемые тела с разной формой поперечного сечения. В этом обзоре мы ограничимся только работами, в которых рассматриваются тела, имеющие острые кромки (призмы и т.п.).

В [3, 4] показано, что в определенном диапазоне скоростей набегающего потока существуют два притягивающих цикла (имеет место гистерезис амплитуды колебаний). Эти результаты согласуются с экспериментами. Следует отметить, что аэродинамические характеристики исследуемых в этих работах призм таковы, что возникновение галопирования сопровождается мягкой потерей устойчивости. В [5] исследована взаимосвязь между характером зависимости коэффициента поперечной аэродинамической силы от угла атаки и количеством притягивающих предельных циклов, а также размером зоны гистерезиса. Установлено, что при определенных формах зависимости возможна “жесткая” потеря устойчивости. В [6] проведено исследование зави-

¹ Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант № 22-29-00472).

симости амплитуд предельных циклов при галопировании от скорости потока для прямоугольных параллелепипедов разного удлинения.

Аэродинамические силы, действующие на прямоугольные параллелепипеды, изучались в целом ряде экспериментальных работ. В частности, в [7, 8] приведены результаты измерений аэродинамических сил, действующих на параллелепипеды с квадратным сечением, в зависимости от угла атаки (причем в [8] исследуется также конфигурация, в которой к параллелепипеду прикреплена плоская пластина). В [9] описаны эксперименты, в которых измерялась непосредственно нестационарная аэродинамическая сила, возникающая при галопировании прямоугольного параллелепипеда, и предложен эмпирический подход для моделирования этой силы.

С точки зрения обеспечения прочности конструкций и снижения их износа, необходимо предотвращать возникновение галопирования или, по крайней мере, уменьшать его интенсивность. В ряде работ рассматриваются различные способы достижения этой цели, например, [10–12].

Однако уже достаточно давно было предложено (в частности, в [13]) использовать галопирование тел для преобразования энергии потока в электричество. Растущий интерес к различным системам, основанным на использовании возобновляемой энергии, привел к появлению исследований, рассматривающих различные варианты таких ветроэнергетических установок. В [14, 15] рассматриваются системы, в которых галопирующее тело (призма) соединено с линейным генератором на постоянном магните, и исследуется влияние параметров (в частности, ориентации призмы относительно потока) на характеристики колебаний. В других работах (например, [16–19]) изучаются системы, в которых электричество вырабатывается с помощью пьезоэлементов. Так, для прямоугольного параллелепипеда, консольно закрепленного в потоке с помощью упругой балки, в [17] предложено аналитическое решение, приближенно описывающее колебания в системе, а в [18] анализируется влияние формы балки на характеристики колебаний. В [19] проведено экспериментальное исследование влияния формы поперечного сечения призмы на выходную мощность и отмечено, что максимальная мощность была достигнута в случае, когда это сечение имеет воронкообразную форму. В [20] обсуждается влияние закруглений углов призмы с квадратным сечением и угла атаки на мощность, получаемую при галопировании, и отмечается, что закругление углов приводит к некоторому уменьшению мощности, но делает систему менее чувствительной к изменению угла атаки.

В [21–23] рассматриваются системы, в которых к плохобтекаемому телу, совершающему галопирующие колебания в потоке, прикреплено еще одно тело, которое не взаимодействует с потоком. Показано, что при определенных схемах соединения тел можно обеспечить уменьшение критической скорости потока (при которой теряется устойчивость равновесия) и увеличить выходную мощность.

В работе исследуется динамика галопирующей ветроэнергетической установки, содержащей несколько последовательно соединенных пружинами подвижных масс и линейный генератор. Анализируется влияние параметров системы на область устойчивости равновесия. Проводится численное и аналитическое исследование периодических режимов. Изучается влияние количества звеньев, скорости потока и внешнего сопротивления на выходную мощность системы. Обсуждается возможность регулирования нагрузки с целью максимизации мощности, отбираемой у потока.

1. Постановка задачи. Рассмотрим цепочку из n тел $M_1, \dots, M_n$ (рис. 1), которые могут двигаться поступательно вдоль некоторой неподвижной горизонтальной прямой ℓ . Все тела, кроме n -го, представляют собой материальные точки, а тело M_n — прямоугольный параллелепипед, основанием которого является квадрат. Боковые грани параллелепипеда вертикальны, причем две из них перпендикулярны прямой ℓ . Соседние тела в цепочке соединены друг с другом линейно-упругими пружинами. Тело M_1 соединено пружиной с некоторой неподвижной точкой O , лежащей на прямой ℓ . К телу M_n жестко прикреплен постоянный магнит, который расположен внутри катушки индуктивности. Катушка включена в электрическую цепь, которая содержит также нагрузочное сопротивление R . При перемещении тела M_n магнит движется внутри катушки, и в цепи индуцируется электрический ток.

Система помещена в стационарный поток среды, скорость которого на бесконечности равна V , горизонтальна и перпендикулярна прямой ℓ . Будем считать, что поток воздействует только на тело M_n .

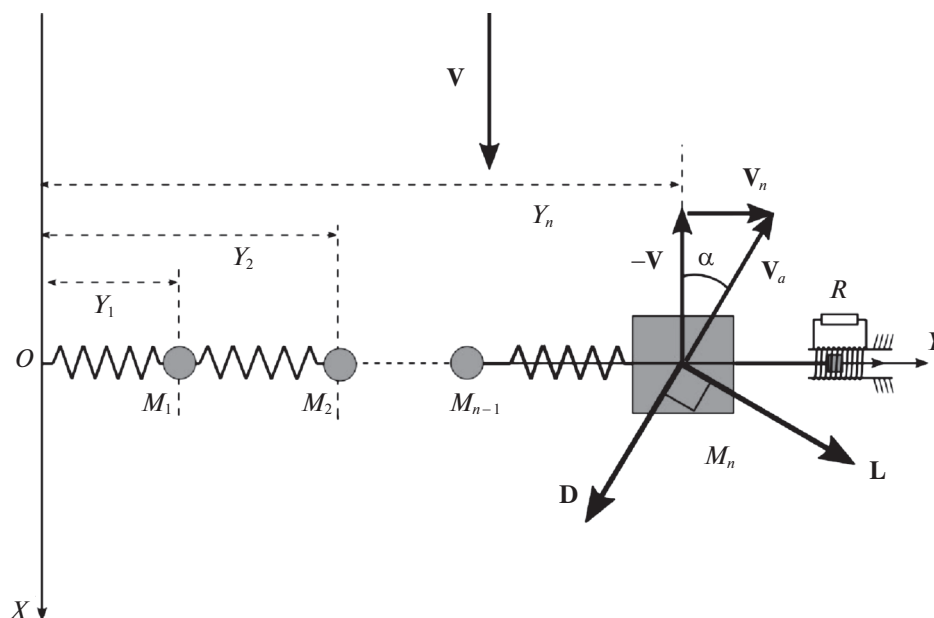


Рис. 1. Схема цепочки тел, совершающих галолирующие колебания (вид сверху).

Введем в горизонтальной плоскости неподвижную систему координат OXY , ось абсцисс OX которой направим вдоль скорости набегающего потока, а ось ординат — вдоль прямой ℓ . Выберем в качестве обобщенных координат ординаты $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ точек $M_1, \dots, M_{n-1}$ и ординату Y_n центра масс параллелепипеда M_n .

Будем предполагать, что поток действует только на параллелепипед, причем это воздействие сводится к силе лобового сопротивления D и боковой силе L , приложенным в геометрическом центре G параллелепипеда. Сила D направлена против воздушной скорости V_a точки G (т.е. скорости относительно набегающего потока), сила L — перпендикулярно ей. Воспользуемся квазистатическим подходом, т.е. будем считать, что аэродинамические силы зависят только от мгновенных значений фазовых координат и скоростей тела (применимость этого подхода для широкого спектра задач движения тела в среде обсуждается, в частности, в [24, 25]). Тогда величины сил D и L определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\rho S}{2} V_a^2 C_d(\alpha), & L &= \frac{\rho S}{2} V_a^2 C_l(\alpha), \\ V_a &= \sqrt{V^2 + \dot{Y}_n^2}, & \alpha &= \arctg \frac{\dot{Y}_n}{V}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ — плотность среды, S — площадь боковой грани параллелепипеда, C_d и C_l — безразмерные коэффициенты, которые считаются зависящими только от мгновенного угла атаки α — угла между вектором V_a и внешней нормалью к соответствующей грани параллелепипеда.

Процессы в электрической цепи будем описывать аналогично [14, 26]:

$$L_c \dot{I} = C \dot{Y}_n - (R + R_c) I, \quad (1.2)$$

где I — ток в цепи, L_c и R_c — индуктивность и внутреннее сопротивление катушки, C — коэффициент электромеханического взаимодействия.

С учетом соотношений (1.1) и (1.2) полную систему уравнений динамики рассматриваемой электромеханической системы можно записать следующим образом:

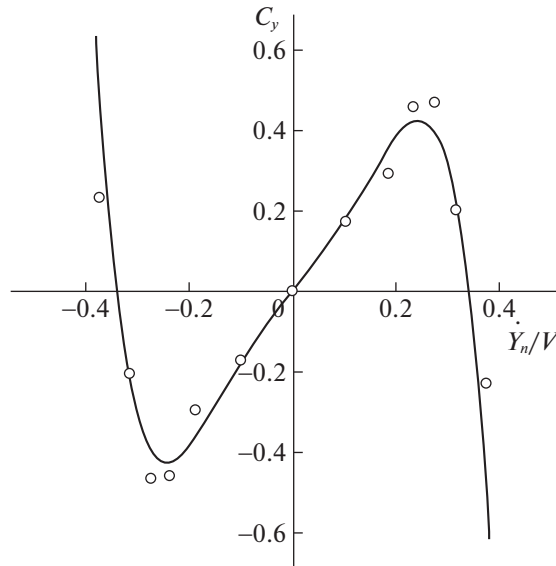


Рис. 2. Зависимость коэффициента C_y от скорости тела.

$$\begin{aligned}
 m_i \ddot{Y}_i + K_i (Y_i - Y_{i-1}) + H_i (\dot{Y}_i - \dot{Y}_{i-1}) + K_{i+1} (Y_i - Y_{i+1}) + H_{i+1} (\dot{Y}_i - \dot{Y}_{i+1}) &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\
 m_n \ddot{Y}_n + K_n (Y_n - Y_{n-1}) + H_n (\dot{Y}_n - \dot{Y}_{n-1}) &= \frac{\rho S}{2} (V^2 + \dot{Y}_n^2) (C_l(\alpha) \cos \alpha - C_d(\alpha) \sin \alpha) - CI, \\
 L_c \dot{I} &= C \dot{Y}_n - (R + R_c) I.
 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь m_i — масса тела M_i , K_i и H_i — коэффициенты жесткости и демпфирования пружины, соединяющей тела M_i и M_{i+1} . Кроме того, $Y_0 \equiv 0$.

Для сокращения записи введем следующее обозначение:

$$C_y = C_l(\alpha) \cos \alpha - C_d(\alpha) \sin \alpha.$$

Зависимости коэффициента C_y поперечной аэродинамической силы от угла атаки определялись для разных прямоугольных параллелепипедов в целом ряде экспериментальных работ. На рис. 2 точками показаны экспериментальные данные из работы [8]. Будем аппроксимировать функцию C_y полиномом пятой степени от величины $\dot{Y}_n/V$:

$$C_y = C_{y1} \frac{\dot{Y}_n}{V} + C_{y3} \left(\frac{\dot{Y}_n}{V} \right)^3 + C_{y5} \left(\frac{\dot{Y}_n}{V} \right)^5, \quad (1.4)$$

где $C_{y1} > 0$, $C_{y5} < 0$.

Сплошной линией на рис. 2 изображена аппроксимационная кривая (1.4) при следующих значениях коэффициентов:

$$C_{y1} = 1.6, \quad C_{y3} = 17.5, \quad C_{y5} = -272.3. \quad (1.5)$$

Из рис. 2 видно, что качество аппроксимации достаточно хорошее. В дальнейшем будем считать, что $C_{y3} > 0$, а при численном моделировании будем пользоваться значениями (1.5).

Введем безразмерные величины следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \tau &= t \sqrt{\frac{K_n}{M}}, \quad y_i = \frac{Y_i}{b}, \quad \iota = \frac{IR_c}{Cb} \sqrt{\frac{M}{K_n}}, \quad \mu_i = \frac{m_i}{M}, \quad k_i = \frac{K_i}{K_n}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\
 \nu &= \frac{V}{b} \sqrt{\frac{M}{K_n}}, \quad h_i = \frac{H_i}{\sqrt{MK_n}}, \quad \mu = \frac{\rho S b}{2M}, \quad L = \frac{L_c}{R_c} \sqrt{\frac{K_n}{M}}, \quad r = \frac{R}{R_c}, \quad \chi = \frac{C^2}{R_c \sqrt{MK_n}}.
 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ — масса всей системы, b — характерный размер параллелепипеда (например, длина стороны основания). Параметр μ характеризует относительную плотность среды.

С учетом (1.6), уравнения динамики системы в безразмерном виде будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} \mu_i y_i'' + k_i (y_i - y_{i-1}) + h_i (y_i' - y_{i-1}') + k_{i+1} (y_i - y_{i+1}) + h_{i+1} (y_i' - y_{i+1}') &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \mu_n y_n'' + (y_n - y_{n-1}) + h_n (y_n' - y_{n-1}') &= \mu(v^2 + y_n'^2) \left(C_{y1} \frac{y_n'}{v} + C_{y3} \left(\frac{y_n'}{v} \right)^3 + C_{y5} \left(\frac{y_n'}{v} \right)^5 \right) - \chi \mathfrak{l}, \\ L \mathfrak{l}' &= y_n' - (r+1) \mathfrak{l}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь штрихом обозначена производная по безразмерному времени, а $k_n = 1$.

Чтобы несколько упростить параметрический анализ системы (1.7), будем в дальнейшем считать, что массы всех материальных точек равны (т.е. $\mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = \mu_0$), а все пружины между материальными точками и между точками O и M_1 одинаковы: $k_1 = \dots = k_{n-1} = k_0$ и $h_1 = \dots = h_{n-1} = h_0$.

Будем считать, что индуктивность весьма мала. Тогда в последнем уравнении возникает малый параметр при старшей производной. В дальнейшем ограничимся рассмотрением вырожденной в смысле Тихонова системы:

$$\begin{aligned} \mu_0 y_i'' + k_i (y_i - y_{i-1}) + h_i (y_i' - y_{i-1}') + k_{i+1} (y_i - y_{i+1}) + h_{i+1} (y_i' - y_{i+1}') &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \mu_n y_n'' + (y_n - y_{n-1}) + h_n (y_n' - y_{n-1}') &= \mu(v^2 + y_n'^2) \left(C_{y1} \frac{y_n'}{v} + C_{y3} \left(\frac{y_n'}{v} \right)^3 + C_{y5} \left(\frac{y_n'}{v} \right)^5 \right) - \frac{\chi}{r+1} y_n', \\ \mathfrak{l} &= \frac{y_n'}{r+1}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Система (1.8), очевидно, имеет единственную неподвижную точку, а именно тривиальную.

2. Устойчивость и периодические решения. Линеаризуем систему (1.8) в окрестности тривиального равновесия. Получим

$$\mathbf{M} \mathbf{y}'' + \mathbf{B} \mathbf{y}' + \mathbf{A} \mathbf{y} = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \text{diag}(\mu_0 \ \mu_0 \ \dots \ \mu_n), \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 2h_0 & -h_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -h_0 & 2h_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2h_0 & -h_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -h_0 & h_n + h_0 & -h_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -h_n & -C_{y1} v \mu + h_n + \tilde{\chi} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2k_0 & -k_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_0 & 2k_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2k_0 & -k_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -k_0 & 1 + k_0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\chi} = \chi/(r+1)$.

Легко показать (например, методом математической индукции), что главные миноры A_i и B_i , $i = \overline{1, n}$, матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определяются следующими формулами:

$$A_i = (i+1)k_0^i, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad A_{n-1} = k_0^{n-1} + (n-1)k_0^{n-2}, \quad A_n = \det \mathbf{A} = k_0^{n-1},$$

$$B_i = (i+1)h_0^i, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad B_{n-1} = h_0^{n-1} + (n-1)h_n h_0^{n-2},$$

$$B_n = \det \mathbf{B} = h_0^{n-2} (h_n h_0 + (-C_{y1} v \mu + \tilde{\chi})(h_0 + (n-1)h_n)).$$

Заметим, что все $A_i > 0$, а если

$$v < v_1(\tilde{\chi}) = \frac{h_n h_0}{(h_0 + (n-1)h_n) C_{y1} \mu} + \frac{\tilde{\chi}}{C_{y1} \mu},$$

то и все $B_i > 0$, значит, имеет место полная диссипация, и тривиальное равновесие асимптотически устойчиво. Отметим, что $C_{y1} > 0$, следовательно, v_1 растет с ростом $\tilde{\chi}$.

Характеристический полином системы (2.1) имеет вид

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{2n} p_i \lambda^i,$$

причем $p_0 = \det \mathbf{A} = k_0^{n-1}$ и, кроме того,

$$p_1 = -C_{y1} v \mu + \tilde{\chi} + h_n \quad \text{при} \quad n = 1$$

и

$$p_1 = \mu_0^{n-1} (-C_{y1} v \mu + \tilde{\chi} + h_n) + \mu_n \mu_0^{n-2} (h_n + h_0(2n-3)) \quad \text{при} \quad n > 1.$$

Формулы для остальных коэффициентов p_i достаточно громоздки при $n > 1$ и здесь не приводятся.

Из выражения для свободного члена видно, что при $k_0 \neq 0$ характеристический полином не имеет нулевых корней и поэтому возможна только потеря устойчивости колебательного типа. Заметим также, что если скорость потока достаточно велика, так что

$$v > v_2(\tilde{\chi}) = \frac{\mu_n (h_n + h_0(2n-3)) \operatorname{sgn}(n-1)}{\mu_0 C_{y1} \mu} + \frac{\tilde{\chi} + h_n}{C_{y1} \mu},$$

то $p_1 < 0$ и имеет место неустойчивость.

Видно, что $v_1(\tilde{\chi}) \leq v_2(\tilde{\chi})$, причем равенство достигается только в случае $n = 1$. Соответственно существует такое $v_1(0) \leq v_0 \leq v_2(0)$, что при $\tilde{\chi} = 0$ и $v < v_0$ равновесие асимптотически устойчиво, а при $v > v_0$ — неустойчиво.

Рассмотрим ситуацию, когда коэффициенты демпфирования пружин, плотность среды и коэффициент электромеханического взаимодействия малы:

$$h_0 \sim h_n \sim \chi \sim \mu, \quad \mu \ll 1. \quad (2.2)$$

Предположим, кроме того, что

$$C_{y1} \sim 1, \quad C_{y3} \sim \mu^{-1}, \quad C_{y5} \sim \mu^{-2}. \quad (2.3)$$

Будем считать, что остальные параметры являются величинами порядка единицы. Введем вспомогательный малый параметр $\varepsilon = \sqrt{\mu}$ и найдем периодические решения системы следующего вида:

$$y_i = \varepsilon a_i \sin \omega \tau + \varepsilon^3 b_i \cos \omega \tau, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad y_n = \varepsilon a_n \sin \omega \tau. \quad (2.4)$$

Воспользовавшись методом гармонического баланса, составим уравнения для определения неизвестных коэффициентов a_i , b_i и частоты ω :

$$-\mu_i a_i \omega^2 + (k_i + k_{i+1}) a_i - k_i a_{i-1} - k_{i+1} a_{i+1} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad -\mu_n a_n \omega^2 + a_n - a_{n-1} = 0,$$

$$-\mu_i b_i \omega^2 + (h_i + h_{i+1}) \omega a_i - h_i \omega a_{i-1} - h_{i+1} \omega a_{i+1} + (k_i + k_{i+1}) \mu b_i - k_i \mu b_{i-1} - k_{i+1} \mu b_{i+1} = 0, \quad (2.5)$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad -\frac{5\mu^3 \omega^5 C_{y5}}{8\nu^3} a_n^5 - \frac{3\mu^2 \omega^3 C_{y3}}{4\nu} a_n^3 - \mu \omega \nu C_{y1} a_n - h \omega a_{n-1} + h \omega a_n + \frac{\chi \omega}{r+1} a_n - \mu b_{n-1} = 0.$$

Здесь принято $a_0 = b_0 = b_n = 0$.

Первые $n - 1$ уравнений системы (2.5) образуют замкнутую систему линейных уравнений относительно величин a_i , $i = \overline{1, n-1}$. Разрешив ее и подставив результат в n -е уравнение (2.5), как нетрудно видеть, получим уравнение относительно частоты ω , не содержащее величины a_n . Из структуры уравнений ясно также, что это уравнение будет совпадать с уравнением на собственные частоты рассматриваемой системы в случае, когда все силы, кроме потенциальных, равны нулю. Отметим, что величины b_i не зависят от скорости потока v , поскольку она входит только в последнее уравнение (2.5).

Таким образом, величины ω , найденные из этого уравнения (левая часть которого представляет собой полином степени n от ω^2), зависят только от параметров μ_0 , μ_n и k_0 . Соответственно частоты циклов рассматриваемого типа не будут изменяться, в частности, при изменении параметров v и r (или $\tilde{\chi}$).

Для каждого положительного значения ω из уравнений с номерами $n + 1, \dots, 2n - 1$ системы (2.5) можно найти коэффициенты $b_1, \dots, b_{n-1}$ и подставить эти величины в последнее уравнение (2.5). В результате получим биквадратное уравнение относительно a_n , имеющее следующую структуру:

$$-\frac{5\mu^3\omega^5C_{y5}}{8v^3}a_n^4 - \frac{3\mu^2\omega^3C_{y3}}{4v}a_n^2 + \tilde{\chi}\omega - \mu C_{y1}\omega v + X = 0. \quad (2.6)$$

Здесь X имеет порядок μ и зависит от частоты ω и параметров системы, но не зависит от величин $\tilde{\chi}$ и v .

Будем считать, что $C_{y1} > 0$, $C_{y3} > 0$, $C_{y5} < 0$ (такая ситуация имеет место, в частности, для параллелепипеда, исследованного в [8]).

В случае, когда у характеристического полинома имеется пара корней с нулевой вещественной частью, свободный член в левой части (2.6) равен нулю. Заметим, что этот член зависит от $\tilde{\chi}$ и v линейно. Таким образом, он может обратиться в нуль при изменении одного из этих параметров только один раз, поэтому смена характера устойчивости при этом может произойти лишь однажды (разумеется, при условии, что соблюдаются соотношения (2.2), (2.3)). Отметим, что с увеличением $\tilde{\chi}$ свободный член возрастает, а с ростом v — убывает.

Выберем такую скорость потока, что при $\tilde{\chi} = 0$ имеет место неустойчивость (например, $v > v_2(0)$). При достаточно больших значениях $\tilde{\chi}$ (таких, что выбранное значение v меньше $v_1(\tilde{\chi})$) равновесие асимптотически устойчиво. Следовательно, при некотором значении $\tilde{\chi}_*$ происходит потеря устойчивости, и вещественная часть одной из пар комплексно-сопряженных корней характеристического полинома обращается в ноль (поскольку потеря устойчивости, как было отмечено выше, может быть только колебательной). Пусть модуль мнимой части этой пары корней при $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_*$ равен ω_* . В этой ситуации имеет место бифуркация Андронова—Хопфа, так что уравнение (2.6) должно иметь нулевой корень.

При $\tilde{\chi} < \tilde{\chi}_*$ свободный член (2.5) отрицателен, поэтому это уравнение имеет единственный положительный корень. Этому корню отвечает некоторый цикл рассматриваемого типа с частотой ω_* (назовем его цикл 1). При $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_*$ происходит бифуркация Андронова—Хопфа, и из равновесия рождается цикл (цикл 2). Но характер устойчивости равновесия меняется с неустойчивости на асимптотическую устойчивость, поэтому цикл 2 является отталкивающим (за исключением вырожденных случаев, требующих отдельного рассмотрения). При величинах $\tilde{\chi}$, больших $\tilde{\chi}_*$, но достаточно близких к этому значению, уравнение (2.5) имеет два положительных корня, так что в системе имеется два цикла данного типа. Очевидно, что при некотором $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_{**} > \tilde{\chi}_*$ дискриминант уравнения (2.6) обратится в нуль. При этом циклы 1 и 2 сольются. Соответственно цикл 1 в общем случае должен быть притягивающим. При дальнейшем увеличении $\tilde{\chi}$ дискриминант уравнения (2.6) станет отрицательным, так что циклы рассматриваемого типа с частотой ω_* исчезнут.

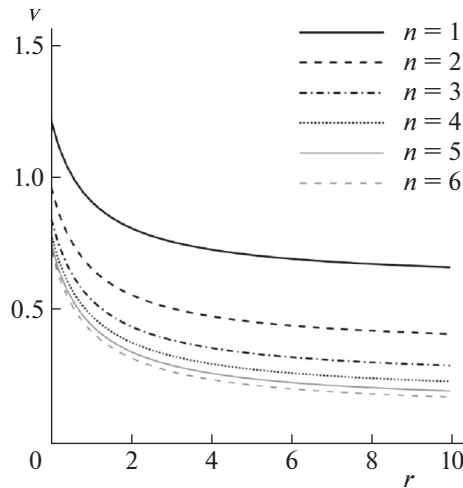


Рис. 3. Границы области устойчивости в зависимости от числа тел в цепочке

Таким образом, бифуркация Андронова–Хопфа является субкритической. С точки зрения отбора энергии потока, это представляется благоприятным ввиду расширения диапазона значений скорости, в котором существует притягивающий цикл. Заметим, что для тел с другими аэродинамическими характеристиками (например, такими, что $C_{y3} < 0$) бифуркация будет суперкритической и эволюция циклов при изменении параметра $\tilde{\chi}$ окажется несколько иной.

3. Численное моделирование. Проведем численное исследование влияния параметров системы на устойчивость положения равновесия и на характеристики циклов. При расчетах будем варьировать количество тел n , скорость потока v и нагрузочное сопротивление r , а для остальных безразмерных параметров будем использовать следующие значения:

$$k_0 = 0.7, \quad \mu = h = h_0 = \chi = 0.01.$$

На рис. 3 представлены границы области неустойчивости тривиального равновесия на плоскости параметров (r, v) для систем с различным числом тел (область неустойчивости расположена выше соответствующей кривой).

Видно, что с увеличением внешнего сопротивления (т.е. с уменьшением нагрузки) критическое значение скорости, при котором происходит потеря устойчивости, монотонно уменьшается. Кроме того, монотонное уменьшение критической скорости происходит с ростом количества тел в системе. Таким образом, увеличение количества тел в цепочке позволяет расширить диапазон скоростей потока, в котором равновесие неустойчиво и можно ожидать существования колебательных режимов.

Заметим, что для любого n существуют такие значения v^* и v^{**} скорости потока (такие, что $v^* < v^{**}$), что при $v < v^*$ равновесие асимптотически устойчиво при всех r , а при $v > v^{**}$ — неустойчиво при всех r . Для всех v из интервала (v^*, v^{**}) равновесие неустойчиво для всех r , больших некоторого критического значения r_c , и асимптотически устойчиво при $r < r_c$.

Для изучения влияния параметров на характеристики периодических движений, возникающих в системе, было проведено численное интегрирование безразмерных уравнений движения (1.8). На рис. 4 представлены зависимости амплитуды колебаний параллелепипеда от величины сопротивления r при разных значениях скорости потока и разном числе тел в цепочке. Неустойчивые циклы обозначены серыми квадратами. Линиями изображены приближенные решения, полученные из системы (2.5).

Как следует из рис. 4, при достаточно малых значениях v и r периодические решения отсутствуют. Однако увеличение скорости потока приводит к тому, что циклы существуют при всех значениях сопротивления. Потеря устойчивости (в тех случаях, когда она имеет место) оказывается “жесткой”. Отметим также, что амплитуда параллелепипеда на притягивающих циклах монотонно растет с ростом r , стремясь к некоторому предельному значению, зависящему от скорости потока (это нетрудно видеть и из уравнения (2.6)).

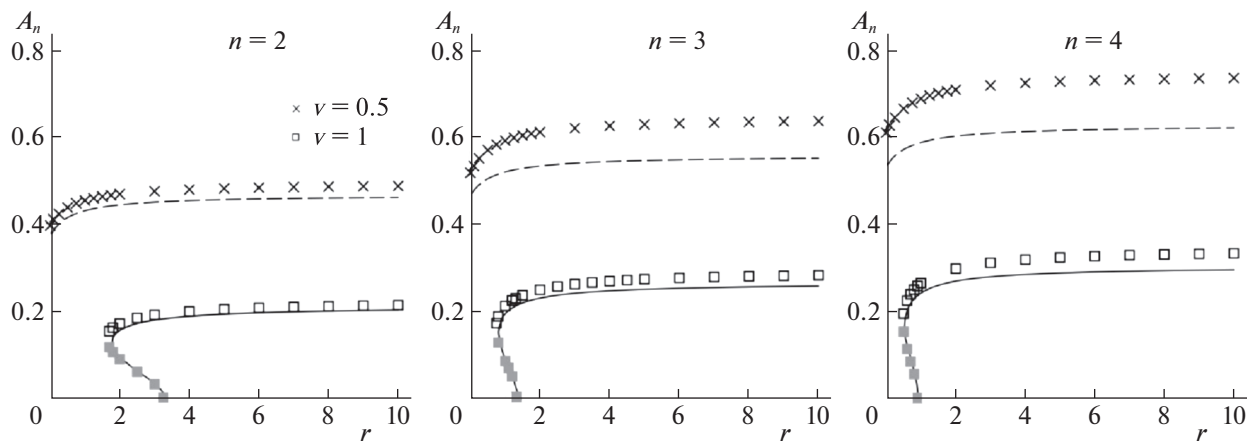


Рис. 4. Амплитуда колебаний параллелепипеда в зависимости от нагрузочного сопротивления для разного числа тел в цепочке и разных скоростей потока

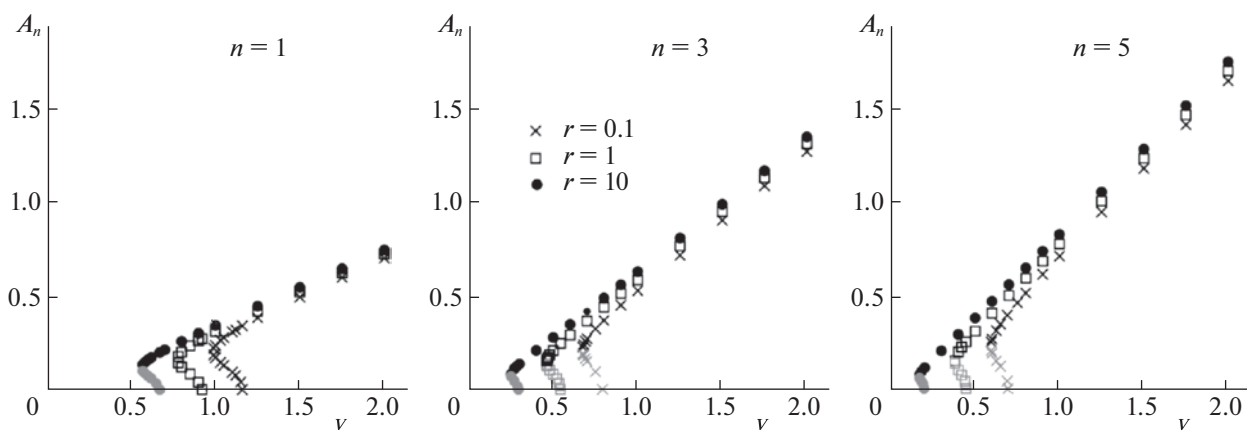


Рис. 5. Амплитуда колебаний параллелепипеда в зависимости от скорости потока для разного числа звеньев в цепочке и разных значений сопротивления

Таким образом, качественные выводы, полученные на основе приближенных уравнений для периодических движений, отражают особенности поведения периодических решений, найденных путем численного интегрирования уравнений движения.

В то же время приближенное решение дает несколько заниженное значение амплитуды по сравнению с результатами численного интегрирования уравнений движения. Это рассогласование возрастает с увеличением скорости потока и числа тел в цепочке. Данное обстоятельство, по-видимому, связано с тем, что при сравнительно больших v и n необходимо учитывать члены следующего порядка малости.

Зависимость амплитуды A_n колебаний параллелепипеда от скорости потока для цепочек, состоящих из 1, 3 и 5 тел, и разных величин сопротивления приведена на рис. 5. Притягивающие циклы изображены черным цветом, отталкивающие — серым. Амплитуда колебаний параллелепипеда увеличивается с увеличением количества тел в цепочке, что представляется вполне естественным.

Отметим, что вне достаточно узкого интервала вблизи значения скорости потока, при котором происходит слияние притягивающего и отталкивающего циклов, амплитуда колебаний параллелепипеда на притягивающем цикле практически линейно растет с увеличением скорости (это согласуется, в частности, с результатами [6]).

4. Средняя мощность и регулирование нагрузки. Одной из важнейших характеристик ветроэнергетической установки является средняя за период мощность, которую она может вырабатывать. В данном случае будем рассчитывать эту мощность (безразмерную) по следующей формуле:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T v^2 r dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{y'_n}{r+1} \right)^2 r dt. \quad (4.1)$$

Здесь T – период колебаний.

Добиться максимизации мощности при фиксированной скорости потока можно за счет надлежащего регулирования величины нагрузочного сопротивления. Такой подход представляется достаточно перспективным для малых ветроэнергетических установок различных типов (например, [27]).

Поскольку $P_{av} = 0$ при $r = 0$ и $P_{av} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, то существует значение сопротивления (обозначим его r_{opt}), при котором мощность достигает максимума. Оценим величину r_{opt} . Из (2.4) и (3.1) имеем

$$P_{av} = \frac{1}{2} \frac{\mu \omega^2 a_n^2 r}{(r+1)^2}.$$

Обозначим $a_n^2 = z$. Продифференцировав (2.6) по r , получим

$$-\frac{5\mu^3 \omega^5 C_{y5}}{4\nu^3} z z'_r - \frac{3\mu^2 \omega^3 C_{y3}}{4\nu} z'_r - \frac{\chi \omega}{(r+1)^2} = 0.$$

Отсюда

$$z'_r = \frac{4\chi\nu}{(r+1)^2 \mu^2 \omega^2} \left(-5C_{y5} \frac{\mu \omega^2}{\nu^2} z - 3C_{y3} \right)^{-1}. \quad (4.2)$$

Для притягивающего цикла (который отвечает большему из корней (2.6)) имеем $z'_r > 0$. Нетрудно показать, используя аналогичные выкладки и соображения, что $z''_r < 0$.

Продифференцируем теперь P_{av} по r :

$$\frac{dP_{av}}{dr} = \frac{\mu \omega^2}{2(r+1)^2} \left(z'_r r + z \frac{1-r}{1+r} \right).$$

Отсюда видно, что максимум P_{av} достигается при $r = r_{opt} > 1$. При этом чем меньше $z'_r|_{r=1}$, тем ближе оптимальное значение сопротивления r_{opt} к 1 (т.е. к внутреннему сопротивлению катушки).

Из (2.6) следует, что при больших значениях ν имеем $z \sim \nu^2$, а из (4.2) вытекает, что $z'_r \sim \nu$. Поэтому с ростом скорости потока величина r_{opt} будет уменьшаться, стремясь к 1.

Вычислим теперь P_{av} , используя результаты численного интегрирования уравнений движения системы при разных значениях параметров r , n и ν . Результаты расчетов приведены на рис. 6.

Рисунок 6 показывает, что величина r_{opt} практически не зависит от количества тел в цепочке. Кроме того, она достаточно слабо зависит от скорости потока и близка к единице, причем ее отличие от единицы уменьшается с ростом ν .

При этом для всех рассмотренных значений скорости потока разница между $P_{av}(r_{opt}) = P_{max}$ и $P_{av}(r)$ на интервале $1 \leq r \leq 1.25$ не превышает 2% от P_{max} . Поэтому для практических целей, по-видимому, можно полагать $r_{opt} = 1$.

На рис. 7 представлена зависимость P_{max} от числа тел в цепочке при разных скоростях потока ($\nu = 1, 2, 3$).

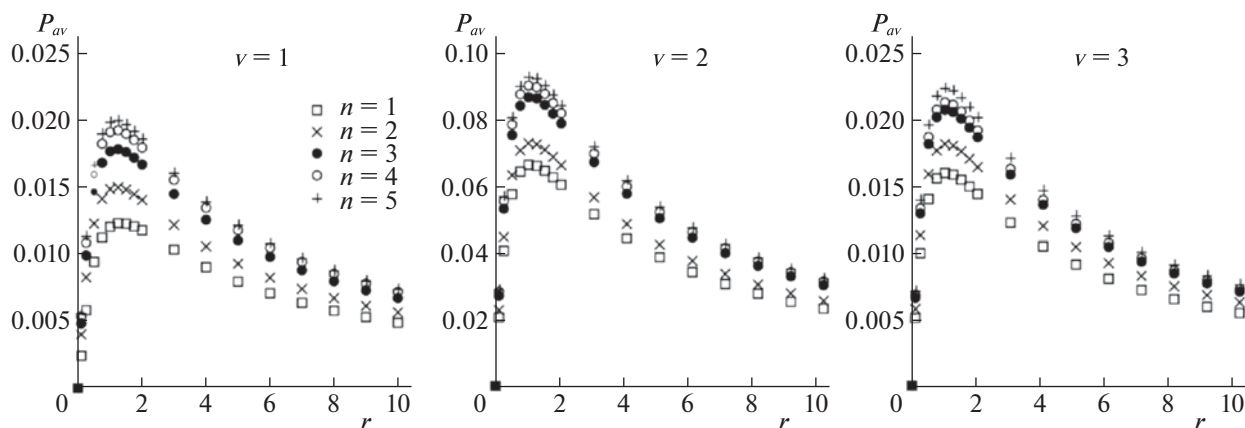


Рис. 6. Средняя за период мощность в зависимости от нагрузочного сопротивления при разных значениях n и v

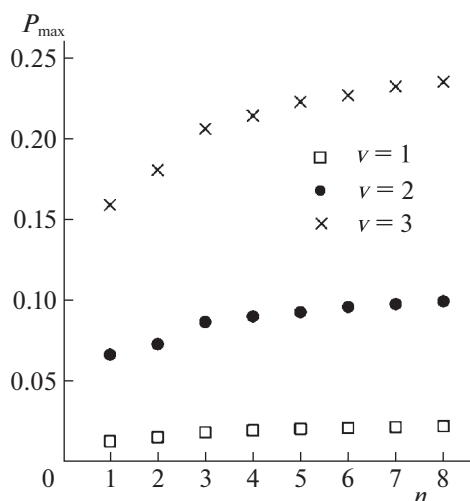


Рис. 7. Максимальная мощность в зависимости от числа тел в цепочке для разных значений скорости потока

Из рис. 7 следует, что система с тремя телами позволяет получить существенный выигрыш по мощности (порядка 50% для $v=1$ и 30% для $v=3$) по сравнению с системой с одним телом. Однако при дальнейшем увеличении n рост P_{max} заметно замедляется. Поэтому использовать длинные цепочки нецелесообразно (особенно в связи с возможными техническими сложностями, связанными с поддержанием работы длинной цепочки).

С учетом вышеизложенного регулирование нагрузочного сопротивления, направленное на максимизацию P_{av} , по-видимому, целесообразно осуществлять следующим образом. Если скорость потока находится в диапазоне от v^* до v^{**} и система уже совершает колебания, то следует выбирать сопротивление равным $\max(r_{opt}, r_c)$, где r_c — значение сопротивления, при котором равновесие теряет устойчивость. Если $v > v^{**}$, то можно задавать $r = r_{opt}$.

Чтобы обеспечить как можно более быстрый переход в колебательный режим из состояния покоя в случае, когда $v^* < v < v^{**}$, следует выбрать максимально возможное значение r (например, разомкнуть цепь). После того, как система выйдет на режим, нужно уменьшить сопротивление до указанного выше значения.

Заключение. Проведено исследование динамики ветроэнергетической установки, работающей за счет галопирующих колебаний цепочки тел в потоке среды. Проанализировано влияние числа тел в цепочке, скорости потока и нагрузочного сопротивления на выходную мощность. Показано, что увеличение числа тел в цепочке позволяет уменьшить критическую скорость по-

тока, при которой в системе возникают колебания, а также повысить максимальную вырабатываемую мощность. Предложена схема регулирования нагрузочного сопротивления для получения максимальной мощности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Den Hartog J.P.* Transmission Line Vibration Due to Sleet // *Trans. AIEE*. 1932. V. 51. P. 1074–1086.
2. *Parkinson G.V., Brooks N.P.H.* On the Aeroelastic Instability of Bluff Cylinders // *ASME. J. Appl. Mech.* 1961. V. 28. № 2. P. 252–258.
<https://doi.org/10.1115/1.3641663>
3. *Parkinson G.V., Smith J.D.* The Square Prism as an Aeroelastic Non-Linear Oscillator // *The Quarterly J. Mechanics and Applied Mathematics*. 1964. V. 17. № 2. P. 225–239.
<https://doi.org/10.1093/qjmam/17.2.225>
4. *Luo S.C., Chew Y.T., Ng Y.T.* Hysteresis Phenomenon in the Galloping Oscillation of a Square Cylinder // *J. Fluids & Struct.* 2003. V. 18. № 1. P. 103–118.
[https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(03\)00084-7](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(03)00084-7)
5. *Barrero-Gil A., Sanz-Andrés A., Alonso G.* Hysteresis in Transverse Galloping: The Role of the Inflection Points // *J. Fluids & Struct.* 2009. V. 25. № 6. P. 1007–1020.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2009.04.008>
6. Люсин В.Д., Рябинин А.Н. О галопировании призмы в потоке газа или жидкости // *Тр. ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова*. 2010. Вып. 53 (337). С. 79–84.
7. *Bearman P.W., Gartshore I.S., Maull D.J., Parkinson G.V.* Experiments on Flow-Induced Vibration of a Square-Section Cylinder // *J. Fluids & Struct.* 1987. V. 1. № 1. P. 19–34.
[https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(87\)90158-7](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(87)90158-7)
8. *Sarioglu M., Akansu Y.E., Yavuz T.* Flow Around a Rotatable Square Cylinder-Plate Body // *AIAA Journal*. 2006. V. 44. № 5. P. 1065–1072.
<https://doi.org/10.2514/1.18069>
9. *Gao G.-Z., Zhu L.-D.* Nonlinear Mathematical Model of Unsteady Galloping Force on a Rectangular 2: 1 Cylinder // *J. Fluids & Struct.* 2017. V. 70. P. 47–71.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.01.013>
10. *Abdel-Rohman M.* Design of Tuned Mass Dampers for Suppression of Galloping in Tall Prismatic Structures // *J. Sound & Vibr.* 1994. V. 171. № 3. P. 289–299.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1121>
11. *Gattulli V., Di Fabio F., Luongo A.* Simple and Double Hopf Bifurcations in Aeroelastic Oscillators with Tuned Mass Dampers // *J. Franklin Institute*. 2001. V. 338. P. 187–201.
[https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(00\)00077-6](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(00)00077-6)
12. *Selwanis M.M., Franzini G.R., Beguin C., Gosselin F.P.* Wind Tunnel Demonstration of Galloping Mitigation with a Purely Nonlinear Energy Sink // *J. Fluids & Struct.* 2021. V. 100. P. 103169.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2020.103169>
13. *Barrero-Gil A., Alonso G., Sanz-Andres A.* Energy Harvesting from Transverse Galloping // *J. Sound & Vibr.* 2010. V. 329. P. 2873–2883.
<https://doi.org/10.1016/J.JSV.2010.01.028>
14. *Dai H.L., Abdelkefi A., Javed U., Wang L.* Modeling and Performance of Electromagnetic Energy Harvesting from Galloping Oscillations // *Smart Mater. & Struct.* 2015. V. 24. № 4. P. 045012.
<https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/4/045012>
15. *Hemon P., Amandolese X., Andrianne T.* Energy Harvesting from Galloping of Prisms: A Wind Tunnel Experiment // *J. Fluids & Struct.* 2017. V. 70. P. 390–402.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.02.006>
16. *Javed U., Abdelkefi A., Akhtar I.* An Improved Stability Characterization for Aeroelastic Energy Harvesting Applications // *Comm. in Nonlin. Sci. & Num. Simul.* 2016. V. 36. P. 252–265.
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.12.001>
17. *Tan T., Yan Z.* Analytical Solution and Optimal Design for Galloping-Based Piezoelectric Energy Harvesters // *Appl. Phys. Lett.* 2016. V. 109. P. 253902.
<https://doi.org/10.1063/1.4972556>
18. *Wang K.F., Wang B.L., Gao Y., Zhou J.Y.* Nonlinear Analysis of Piezoelectric Wind Energy Harvesters with Different Geometrical Shapes // *Arch. Appl. Mech.* 2020. V. 90. P. 721–736.
<https://doi.org/10.1007/s00419-019-01636-8>
19. *Zhao D., Hu X., Tan T., Yan Zh., Zhang W.* Piezoelectric Galloping Energy Harvesting Enhanced by Topological Equivalent Aerodynamic Design // *Energy Conv. & Manag.* 2020. V. 222. P. 113260.
<https://doi.org/10.1016/j.enconman.2020.113260>

20. *Zhang M., Abdelkefi A., Yu H., Ying X., Gaidai O., Wang J.* Predefined Angle of Attack and Corner Shape Effects on the Effectiveness of Square-Shaped Galloping Energy Harvesters // *Applied Energy*. 2021. V. 302. P. 117522. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2021.117522>
21. *Vicente-Ludlam D., Barrero-Gil A., Velazquez A.* Enhanced Mechanical Energy Extraction from Transverse Galloping Using a Dual Mass System // *J. Sound & Vibr.* 2015. V. 339. P. 290–303. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.11.034>
22. *Karlicic D., Cajic M., Adhikari S.* Dual-Mass Electromagnetic Energy Harvesting from Galloping Oscillations and Base Excitation // *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers. Pt. C: J. Mech. Eng. Sci.* 2021. V. 235. № 20. P. 4768–4783. <https://doi.org/10.1177/0954406220948910>
23. *Селюцкий Ю.Д.* Динамика ветроэнергетической установки с двумя подвижными массами, использующей эффект галопирования // *Изв. РАН. МТТ*. 2023. № 2. С. 55–69. <https://doi.org/10.31857/S0572329922100117>
24. *Dosaev M.* Interaction Between Internal and External Friction in Rotation of Vane with Viscous Filling // *Appl. Math. Mod.* 2019. V. 68. P. 21–28. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.002>
25. *Wang Q., Goosen J., Van Keulen F.* A Predictive Quasi-Steady Model of Aerodynamic Loads on Flapping Wings // *J. Fluid Mech.* 2016. V. 800. P. 688–719. <https://doi.org/10.1017/jfm.2016.413>
26. *Abohamer M.K., Awrejcewicz J., Starosta R., Amer T.S., Bek M.A.* Influence of the Motion of a Spring Pendulum on Energy-Harvesting Devices // *Appl. Sci.* 2021. V. 11. P. 8658. <https://doi.org/10.3390/app11188658>
27. *Климина Л.А.* Метод формирования авторотаций в управляемой механической системе с двумя степенями свободы // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2020. № 6. С. 3–14.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.85

**УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕСУРСОВ
ПРИ ВЫРАВНИВАНИИ НАГРУЗОК И МЕЖУЗЛОВЫХ ПОТОКОВ
В МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ СЕТИ**

© 2023 г. Ю. Е. Малащенко^а, И. А. Назарова^{а,*}

^аФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

^{*}*e-mail: irina-nazar@yandex.ru*

Поступила в редакцию 29.03.2023 г.

После доработки 12.04.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

В рамках вычислительных экспериментов на математической модели многопользовательской сети изучаются уравнивательные стратегии управления потоками и ресурсами. Предложена алгоритмическая схема последовательного решения цепочки лексикографически упорядоченных задач поиска недискриминирующих максиминных распределений потоков с минимальными удельными затратами ресурсов. Разработана процедура поэтапного уравнивательного расщепления межузловых потоков по всем существующим кратчайшим путям. На каждой итерации часть имеющегося ресурса распределяется поровну между всеми парами узлов-корреспондентов, для которых существует возможность передачи потока. Результаты, полученные в ходе экспериментов, дают возможность проследить динамику изменения пропускной способности ребер, вплоть до достижения предельной загрузки сети. Анализируются и сравниваются “узкие места” в различных сетях при монотонном увеличении потоков. Приводятся специальные диаграммы.

DOI: 10.31857/S0002338823050128, EDN: NYWDTB

Введение. Работа продолжает исследование проблемы управления потоками и ресурсами в многопользовательских телекоммуникационных системах [1–3]. В рамках модели предполагается, что межузловые потоки различных видов передаются между всеми парами узлов одновременно. Пропускная способность ребер рассматривается как ресурс сети. Под ресурсом, выделяемым для передачи потока определенного вида, понимается суммарная величина пропускных способностей ребер на всех маршрутах соединения пары узлов-корреспондентов.

В модели результирующая нагрузка для пары узлов численно равна ресурсу, выделяемому для передачи межузлового потока данного вида. В работе сравниваются две *уравнивательные* стратегии управления распределением потоков и ресурсов сети. Первая — динамическая стратегия, предполагает получение на каждом шаге *равных* межузловых потоков, для которых существуют пути передачи при текущих ресурсах сети, т.е. уравниваются межузловые потоки. Согласно второй стратегии, для всех пар узлов-корреспондентов на каждом шаге последовательно выделяются *равные* квоты из остаточной пропускной способности и подсчитываются соответствующие межузловые потоки, т.е. уравниваются выделяемые пропускные способности.

Разработана итерационная процедура решения последовательности задач поиска равных межузловых потоков, распределенных по всем доступным кратчайшим маршрутам при текущих значениях пропускной способности ребер. За конечное число итераций достигается предельная загрузка сети и вычисляются оценки минимальных затрат ресурсов при передаче потоков для всех узлов-корреспондентов. В ходе экспериментов в динамике от итерации к итерации отслеживается изменение остаточной пропускной способности ребер сети и анализируются отклонения от уравнивательного правила распределения.

При создании, развитии и эксплуатации телекоммуникационных систем в настоящее время используются потоковые модели [4]. В частности, указанные модели применяются для поиска стратегий управления и построения диспетчерских правил распределения потоков, нагрузок и ресурсов в многопользовательских сетях [5, 6]. В русле исследований по разработке SPLIT-методов [7–10] лежат представленные в разд. 2–4 алгоритмические схемы выравнивания нагрузок и

получения уравнильных распределений межузловых потоков по различным маршрутам. В статье используются процедуры поиска всех кратчайших путей с полиномиальными оценками вычислительных затрат [11].

1. Математическая модель. Для описания многопользовательской сетевой системы связи воспользуемся следующей математической записью модели передачи многопродуктового потока. Сеть G задается множествами $\langle V, R, U, P \rangle$: узлов (вершин) сети $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$; неориентированных ребер $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\}$; ориентированных дуг $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$; пар узлов-корреспондентов $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$. Предполагается, что в сети отсутствуют петли и двоянные ребра.

Ребро $r_k \in R$ соединяет смежные вершины v_{n_k}, v_{j_k} . Каждому ребру r_k ставятся в соответствие две ориентированные дуги u_k, u_{k+E} из множества U . Дуги $\{u_k, u_{k+E}\}$ определяют прямое и обратное направления передачи потока по ребру r_k между концевыми вершинами v_{n_k}, v_{j_k} .

В многопользовательской сети G рассматривается $M = N(N-1)$ независимых, невзаимозаменяемых и равноправных межузловых потоков различных видов. Каждой паре узлов-корреспондентов p_m из множества P соответствуют: вершина-источник с номером s_m , из s_m входной поток m -го вида поступает в сеть; вершина-приемник с номером t_m , из t_m поток m -го вида покидает сеть. Обозначим через z_m величину межузлового потока m -го вида, поступающего в сеть через узел с номером s_m и покидающего сеть из узла с номером t_m ; $x_{mk}, x_{m(k+E)}$ — поток m -го вида, который передается по дугам u_k и u_{k+E} , согласно направлению передачи, $x_{mk} \geq 0, x_{m(k+E)} \geq 0, m = \overline{1, M}, k = \overline{1, E}$; $S(v_n)$ — множество номеров исходящих дуг, по ним поток покидает узел v_n ; $T(v_n)$ — множество номеров входящих дуг, по ним поток поступает в узел v_n . Состав множеств $S(v_n), T(v_n)$ однозначно формируется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть некоторое ребро $r_k \in R$ соединяет вершины с номерами n и j , такими, что $n < j$. Тогда ориентированная дуга $u_k = (v_n, v_j)$, направленная из вершины v_n в v_j , считается *исходящей* из вершины v_n , и ее номер k заносится в множество $S(v_n)$, а дуга u_{k+E} , направленная из v_j в v_n , — *входящей* для v_n , и ее номер $k + E$ помещается в список $T(v_n)$. Дуга u_k является *входящей* для v_j , и ее номер k попадает в $T(v_j)$, а дуга u_{k+E} — *исходящей*, и номер $k + E$ вносится в список исходящих дуг $S(v_j)$.

Во всех узлах сети $v_n \in V, n = \overline{1, N}$, для каждого вида потока должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}, \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad x_{mi} \geq 0, \quad z_m \geq 0.$$

Величина z_m равна входному межузловому потоку m -го вида, проходящему от источника к приемнику пары p_m при распределении потоков x_{mi} по дугам сети.

Каждому ребру $r_k \in R$ приписывается неотрицательное число d_k , определяющее суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру r_k в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_E)$ — положительные числа $d_k > 0$. Вектор $\mathbf{d}$ задает следующие ограничения на сумму потоков всех видов, передаваемых по ребру r_k одновременно:

$$\sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k, \quad x_{mk} \geq 0, \quad x_{m(k+E)} \geq 0, \quad k = \overline{1, E}. \quad (1.2)$$

Ограничения (1.1), (1.2) задают множество допустимых значений компонент вектора межузловых потоков $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, \dots, z_M)$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \geq 0 \mid \exists \mathbf{x} \geq 0 : (\mathbf{z}, \mathbf{x}) \text{ удовлетворяют (1.1), (1.2)}\}.$$

Для каждой пары узлов-корреспондентов $p_m \in P$, для некоторого допустимого межузлового потока $\tilde{z}_m$ и соответствующих дуговых потоков $\tilde{x}_{mk}$, $k = \overline{1, 2E}$, величина

$$\tilde{y}_m = \sum_{i=1}^{2E} \tilde{x}_{mi}, \quad m = \overline{1, M},$$

характеризует результирующую межузловую *нагрузку* (далее RI-нагрузку, от английского resulting internodal load) на сеть при передаче межузлового потока величины $\tilde{z}_m$ из узла-источника s_m в узел-приемник t_m . Величина $\tilde{y}_m$ показывает, какая суммарная пропускная способность сети потребуется для передачи дуговых потоков $\tilde{x}_{mk}$. В рамках модели отношение RI-нагрузки и межузлового потока

$$\tilde{w}_m = \frac{\tilde{y}_m}{\tilde{z}_m}, \quad m = \overline{1, M},$$

можно трактовать как удельные *затраты* ресурсов сети при передаче единичного потока m -го вида между узлами s_m и t_m при дуговых потоках $\tilde{x}_{mi}$. Величины

$$\bar{z}_m = \frac{\tilde{z}_m}{\tilde{y}_m}, \quad \bar{x}_{mi} = \frac{\tilde{x}_{mi}}{\tilde{y}_m}, \quad m = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, E},$$

отвечают межузловому потоку при единичной RI-нагрузке для p_m .

Вводится величина

$$\tilde{\Delta}_k^0 = \sum_{m=1}^M (\tilde{x}_{mk}^0 + \tilde{x}_{m(k+E)}^0), \quad k = \overline{1, E},$$

характеризующая реберную суммарную *загрузку* (РС-загрузку) k -го ребра при одновременной передаче всех межузловых потоков $\tilde{z}_m$ и дуговых потоков $\tilde{x}_{mk}^0$, $k = \overline{1, 2E}$.

2. Распределение межузловых потоков по кратчайшим маршрутам. Для оценки минимальных удельных затрат для различных *уравнительных* стратегий управления использовалась SRSF-процедура (от английского shortest routes for split flow – кратчайшие маршруты при расщеплении потока). SRSF-процедура позволяет распределять межузловые потоки по маршрутам, состоящим из минимального числа ребер. В данной работе SRSF-процедура применялась для получения предельных загрузок сети при последовательном поэтапном уравнительном распределении межузловых потоков и нагрузок.

Для каждой пары узлов $p_m = (s_m, t_m)$ в сети $G(1)$ формируется набор $H_m(1)$ всех кратчайших путей [11], которые далее используются как маршруты передачи m -го вида потока:

$$H_m(1) = \{h_m^1(1), h_m^2(1), \dots, h_m^j(1), \dots, h_m^{J_m(1)}(1)\},$$

где $h_m^j(1)$ – список номеров дуг в j -м кратчайшем пути в сети $G(1)$ между узлами s_m и t_m ; $\mu_m(1)$ – число ребер в кратчайшем маршруте $h_m^j(1)$, а $J_m(1)$ – число кратчайших маршрутов для m -й пары.

Для оценки величин “расщепленного” потока для каждой пары $p_m \in P$ по всем маршрутам из $H_m(1)$ передается единичный межузловой поток z_m и подсчитываются значения индикаторной функции:

$$\eta_k^j(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in h_m^j(1), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Вычисляются дуговые потоки для пары p_m :

$$x_{mk}^0(1) = \sum_{j=1}^{J_m(1)} \eta_k^j(m), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E}. \quad (2.1)$$

Величина межузлового потока (далее SRS-потока) $z_m^0(1)$ между узлами s_m и t_m определяется по формулам (1.1) и (2.1). Рассчитывается нормирующий коэффициент

$$\omega_m^0(1) = \frac{1}{z_m^0(1)}, \quad z_m^0(1) \neq 0, \quad m = \overline{1, M}. \quad (2.2)$$

Находятся дуговые потоки:

$$x_{mk}^0 = \omega_m^0 x_{mk}^0(1), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E},$$

при передаче которых по ребрам сети межузловой поток из узла s_m в узел t_m равен единице.

На основе маршрутов и дуговых потоков x_{mk}^0 последовательно определяется распределение совместно допустимых межузловых потоков. Подсчитываются *остаточные* пропускные способности и формируется сеть для проведения следующей итерации. За конечное число итераций, не превосходящее общего количества ребер сети, вычисляются межузловые потоки, при одновременной передаче которых полностью используется пропускная способность всех ребер сети.

При проведении вычислительных экспериментов на первом шаге ($t = 1$) SRSF-процедуры для сети $G(1)$ пропускная способность $d_k(1)$ каждого ребра $r_k \in R$ полагается равной пропускной способности исходной сети, а его *длина* — единице:

$$d_k(1) = d_k, \quad l_k(1) = 1, \quad k = \overline{1, E}.$$

На основе SRS-потока $z_a^0(1)$ по формуле (2.2) определяются нормирующие коэффициенты $\omega_m^0(1)$, $m = \overline{1, M}$. На втором этапе указанные коэффициенты используются для поиска текущих совместно допустимых квот на передачу потоков одновременно между всеми парами p_m , $m = \overline{1, M}$.

Задача 1. Найти $\alpha^*(1) = \max_{\alpha} \alpha$

$$\text{при условиях: } \alpha \sum_{m=1}^M \omega_m^0(1) [x_{mk}^0(1) + x_{m(k+E)}^0(1)] \leq d_k(1), \alpha \geq 0, k = \overline{1, E}.$$

На основании $\alpha^*(1)$ для всех пар $p_m \in P$, $m = \overline{1, M}$, и всех дуг u_k , $k \in H_m(1)$, вычисляются дуговые и межузловые потоки:

$$x_{mk}^*(1) = \alpha^*(1) \omega_m^0(1) x_{mk}^0(1), \quad x_{m(k+E)}^*(1) = \alpha^*(1) \omega_m^0(1) x_{m(k+E)}^0(1), \\ z_m^*(1) = \alpha^*(1), \quad m = \overline{1, M}.$$

Таким образом каждой паре корреспондентов на данном этапе выделяется одна и та же *квота* $\alpha^*(1)$ на передачу допустимого потока при заданных кратчайших маршрутах соединения. Решение задачи 1 позволяет получить *уравнительное* распределение квот на одновременную передачу межузловых потоков различных видов и соответствующие нагрузки, численно равные $y_m^*(1)$, $m = \overline{1, M}$.

При фиксированных дуговых потоках подсчитывается остаточная пропускная способность всех ребер в сети $G(2)$:

$$d_k(2) = d_k(1) - \sum_{m=1}^M (x_{mk}^*(1) + x_{m(k+E)}^*(1)) = \\ = d_k(1) - \alpha^*(1) \sum_{m=1}^M \omega_m^0(1) (x_{mk}^0(1) + x_{m(k+E)}^0(1)), \quad k = \overline{1, E}.$$

Для следующей итерации ($t \geq 2$) текущая *длина* каждого ребра r_k для сети $G(2)$ определяется по следующему правилу:

$$l_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } d_k(t) > 0, \quad k = \overline{1, E}, \\ N^2, & \text{если } d_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, E}. \end{cases}$$

На первом этапе шага t ($t \geq 2$) в сети $G(t)$ при текущих $l_k(t)$ для каждой пары узлов $p_a \in P$ определяется длина $L_a(t)$ кратчайшего маршрута:

$$L_a(t) = \sum_{k \in h'_a(t)} l_k(t).$$

Если длина $L_a(t) \geq N^2$, то для пары p_a не существует пути соединения в сети $G(t)$ и текущее значение SRS-потока полагается равным нулю:

$$z_a^0(t) = 0.$$

Если же длина $L_a(t) < N^2$, то для пары p_a строится множество $H_a(t)$ всех кратчайших маршрутов и, согласно SRSF-процедуре, вычисляются текущий SRS-поток $z_a^0(t)$, дуговые потоки $x_{ak}^0(t)$, $x_{a(k+E)}^0(t)$ для дуг u_k , $k \in H_a(t)$, а также коэффициенты:

$$\omega_a^0(t) = \begin{cases} \frac{1}{z_a^0(t)}, & \text{если } z_a^0(t) > 0, \quad a = \overline{1, M}, \\ 0, & \text{если } z_a^0(t) = 0, \quad a = \overline{1, M}; \end{cases}$$

а из решения задачи 2 определяется величина текущей квоты $\alpha^*(t)$.

Задача 2. Найти $\alpha^*(t) = \max_{\alpha}$

$$\text{при условиях: } \alpha \sum_{m=1}^M \omega_m^0(t) [x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)] \leq d_k(t), \quad \alpha \geq 0, \quad k = \overline{1, E}.$$

На основании решения задачи 2 на шаге t ($t \geq 2$) находятся: текущие допустимые значения межузловых потоков, которые могут передаваться в сети $G(t)$ одновременно для всех пар $p_m \in P$:

$$z_m^*(t) = \begin{cases} z_m^*(t-1) + \alpha^*(t), & \text{если } z_m^0(t) > 0; \\ z_m^*(t-1), & \text{если } z_m^0(t) = 0. \end{cases}$$

На заключительном этапе текущего шага t ($t \geq 2$) для каждого ребра сети вычисляется остаточная пропускная способность сети $G(t+1)$:

$$d_k(t+1) = d_k(t) - \alpha^*(t) \sum_{m=1}^M \omega_m^0(t) [x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)], \quad k = \overline{1, E},$$

и осуществляется проверка следующих условий.

Если после завершения очередного шага t окажется, что хотя бы для одного ребра $r_k \in R$ остаточная пропускная способность $d_k(t+1) > 0$, то формируется новая сеть $G(t+1)$ и производится переход к следующей итерации.

Если же $d_k(t+1) = 0$ для всех $k = \overline{1, E}$, то происходит останов, поскольку все пропускные способности ребер исчерпаны и сеть полностью загружена. Финальная итерация обозначается через T .

Результирующие межузловые и реберные потоки для каждой пары p_m , $m = \overline{1, M}$, обозначаются через $z_m^*(T)$, $y_m^*(T)$ и соответственно равны:

$$z_m^*(T) = z_m^*(T), \quad y_m^*(T) = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^E [x_{mi}^*(t) + x_{m(i+E)}^*(t)].$$

Удельные затраты $w_m^*(T)$ при передаче межузловых потоков одновременно по всем маршрутам $H_m(1), H_m(2), \dots, H_m(T)$:

$$w_m^*(T) = \frac{y_m^*(T)}{z_m^*(T)}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Для анализа результатов вычислительных экспериментов формируется несколько массивов данных. Множество пар-корреспондентов P разбивается на два непересекающихся подмножества: смежных пар узлов-корреспондентов P_+ , расположенных в концевых вершинах ребра r_k , $k = \overline{1, E}$, и P_- — несмежных пар, кратчайший маршрут соединения для которых содержит более одного ребра:

$$P = P_+ \cup P_-, \quad P_+ \cap P_- = \emptyset.$$

На каждой итерации $t = \overline{1, T}$ формируются массивы расчетных данных по следующему правилу:

если $p_m \in P_+$, то $z_m^*(t)$, $y_m^*(t)$, $w_m^*(t)$ помещаются в массивы $Z_+^*(t)$, $Y_+^*(t)$, $W_+^*(t)$;

если $p_m \in P_-$, то $z_m^*(t)$, $y_m^*(t)$, $w_m^*(t)$ попадают в $Z_-^*(t)$, $Y_-^*(t)$, $W_-^*(t)$.

3. Предельное уравнильное распределение межузловых нагрузок. Для оценки допустимых межузловых потоков при предельных распределениях межузловых нагрузок для всех пар узлов $p_m \in P$ также использовалась SRSF-процедура, подробно описанная в разд. 2. На первом этапе определяются реберные загрузки для $m = \overline{1, M}$ и $k = \overline{1, E}$ при передаче единичных потоков по каждому кратчайшему маршруту из $H_m(t)$, $m = \overline{1, M}$. Для каждой пары $p_m \in P$ вычисляются нагрузки:

$$y_m^0(t) = \sum_{k=1}^E \sum_{j=1}^{J_m(t)} \eta_k^j(m) = \mu(m) J_m(t), \quad m = \overline{1, M},$$

нормирующие коэффициенты:

$$\theta_m^0(t) = \frac{1}{y_m^0(t)} \quad \text{для всех} \quad y_m^0(t) \neq 0, \quad m = \overline{1, M}, \quad (3.1)$$

при которых при передаче соответствующего межузлового потока по всем маршрутам $H_m(t)$, $m = \overline{1, M}$, результирующие межузловые нагрузки $y_m^0 = \theta_m^0(t) y_m^0(t)$ будут равны единице.

При выполнении текущего шага t SRSF-процедуры в сети $G(t)$ при найденных значениях $d_k(t)$ и $l_k(t)$ для каждой пары $p_a \in P$ находится набор кратчайших маршрутов $H_a(t)$.

На основе величины $y_a^0(t)$ при передаче межузлового SRSF-потока $z_a^0(t)$ по всем кратчайшим маршрутам из $H_a(t)$ по формуле (3.1) вычисляются нормирующие коэффициенты $\theta_a^0(t)$, которые далее используются для поиска равных *нагрузок* при передаче соответствующих межузловых потоков одновременно между всеми парами $p_a \in P$.

Задача 3. Найти $\beta^*(t) = \max_{\beta > 0} \beta$

$$\text{при условиях:} \quad \beta \sum_{m=1}^M \theta_m^0(t) (x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)) \leq d_k(t), \quad k = \overline{1, E}.$$

Решение задачи 3 $\beta^*(t)$ определяет текущие совместно допустимые значения дуговых потоков и реберных нагрузок:

$$x_{mk}^{**}(t) = \beta^*(t) \theta_m^0(t) x_{mk}^0(t), \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E},$$

$$y_m^{**}(t) = \beta^*(t) \theta_m^0(t) \sum_{k=1}^E (x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)) = \beta^*(t) \sum_{k=1}^E \left(\frac{x_{mk}^0(t)}{y_m^0(t)} + \frac{x_{m(k+E)}^0(t)}{y_m^0(t)} \right) = \beta^*(t), \quad m = \overline{1, M}.$$

Решение задачи 3 позволяет на шаге t получить *уравнильное* распределение нагрузки. Обозначим через $z_m^\Delta(y_m^{**}(t))$ межузловые потоки, которые, согласно (1.1), соответствуют дуговым потокам $x_{mk}^{**}(t)$ и нагрузкам $y_m^{**}(t) = \beta^*(t)$.

Далее вычисляется остаточная пропускная способность ребер в сети $G(t+1)$:

$$d_k(t+1) = d_k(t) - \beta^*(t) \sum_{m=1}^M \theta_m^0(t) (x_{mk}^0(t) + x_{m(k+E)}^0(t)), \quad k = \overline{1, E}.$$

После завершения очередного шага t осуществляется проверка условий:

если окажется, что хотя бы для одного ребра $r_k \in R$ величина остаточной пропускной способности $d_k(t+1) > 0$, то формируется новая сеть $G(t+1)$, определяется длина ребер для $G(t+1)$:

$$l_k(t+1) = \begin{cases} 1, & \text{если } d_k(t+1) > 0, \quad k = \overline{1, E}, \\ N^2, & \text{если } d_k(t+1) = 0, \quad k = \overline{1, E}, \end{cases}$$

и производится переход к следующей итерации;

если же $d_k(t+1) = 0$ для всех $k = \overline{1, E}$, то происходит останов, поскольку все пропускные способности ребер исчерпаны и сеть полностью загружена.

Финальная итерация обозначается через T . Как и в разд. 2, для каждого t вычисляются: результирующие значения межузловых потоков для каждой пары p_m :

$$z_m^{**}(t) = \sum_{\tau=1}^t z_m^{\Delta}(y_m^{**}(\tau)), \quad m = \overline{1, M};$$

суммарные реберные нагрузки, которые соответствуют предельному распределению пропускной способности ребер сети:

$$y_m^{**}(t) = \sum_{\tau=1}^t \sum_{i=1}^E [x_{mi}^{**}(\tau) + x_{m(i+E)}^{**}(\tau)], \quad m = \overline{1, M};$$

удельные затраты $w_m^{**}(t)$ при передаче межузловых потоков по всем маршрутам $H_m(\cdot)$:

$$w_m^{**}(t) = \frac{y_m^{**}(t)}{z_m^{**}(t)}, \quad m = \overline{1, M}.$$

В ходе экспериментов все полученные данные заносятся в массивы по следующему правилу:

если $p_m \in P_+$, то $z_m^{**}(t)$, $y_m^{**}(t)$, $w_m^{**}(t)$ помещаются в массивы $Z_+^{**}(t)$, $Y_+^{**}(t)$, $W_+^{**}(t)$;

если $p_m \in P_-$, то $z_m^{**}(t)$, $y_m^{**}(t)$, $w_m^{**}(t)$ попадают в $Z_-^{**}(t)$, $Y_-^{**}(t)$, $W_-^{**}(t)$.

4. Вычислительный эксперимент. Вычислительные эксперименты проводились на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1, 2 (базовая и кольцевая сети соответственно). В каждой сети имеется 69 узлов. Пропускные способности ребер d_k выбираются случайным образом из отрезка $[900, 999]$ и совпадают для ребер, присутствующих в обеих сетях. В кольцевой сети пропускная способность каждого из добавленных ребер равна 900. В ходе эксперимента проводилась нормировка, и суммарная пропускная способность в обеих сетях была одинакова:

$$\sum_{k=1}^E d_k(0) = D(0) = 68\,256.$$

На рис. 3, 4 представлены диаграммы, позволяющие в ходе вычислительного эксперимента проследить динамику изменения остаточной пропускной способности. На каждой итерации вычисляется $\eta(t)$ — доля ребер сети, для которых остаточная пропускная способность $d_k(t)$ оказывается равной нулю, т.е. $d_k(t) = 0$. На рис. 3, 4 по горизонтальной оси откладываются значения $\eta(t)$, а по вертикальной оси — $\pi(t)$ — доля пар узлов, для которых на шаге t в сети $G(t)$ нет пути соединения и поэтому их SRS-поток $z_m^0(t)$ равен нулю. Из диаграммы с рис. 3 следует, что при полном использовании пропускной способности 20% ребер для более чем 80% пар-корреспондентов в сети нет пути соединения уже после 10 итераций. Набор из 15 ребер, пропускная способность которых после 10-й итерации использована полностью, можно рассматривать как “узкое место” при одновременной передаче “почти равных” межузловых потоков для 4000 пар-корреспондентов.

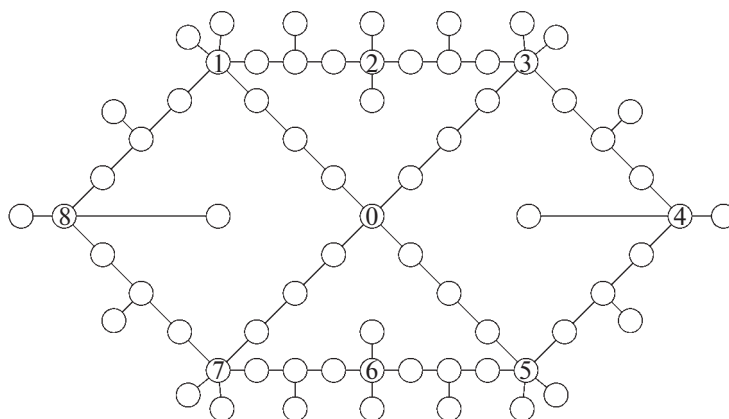


Рис. 1. Базовая сеть

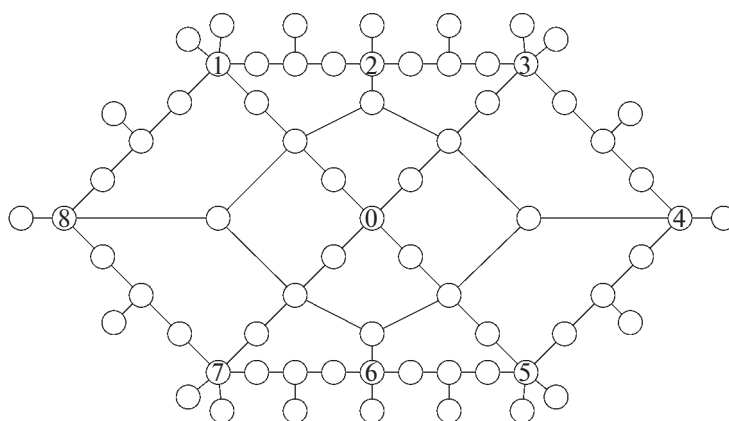


Рис. 2. Кольцевая сеть

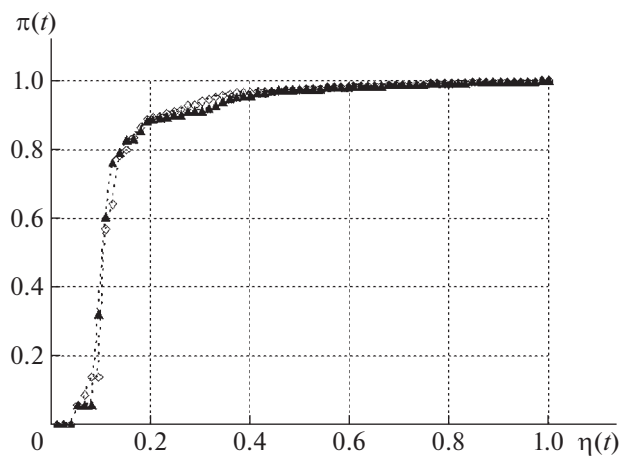


Рис. 3. Предельная нагрузка ребер в базовой сети

Диаграммы на рис. 5, 6 позволяют проанализировать отклонения или “нарушение” уравни- тельного правила распределения. Точки на диаграммах соответствуют значению нормы векто- ров-поток в пространстве $\mathcal{L}(\mathbf{d})$ допустимых значений компонент вектора межузловых пото- ков:

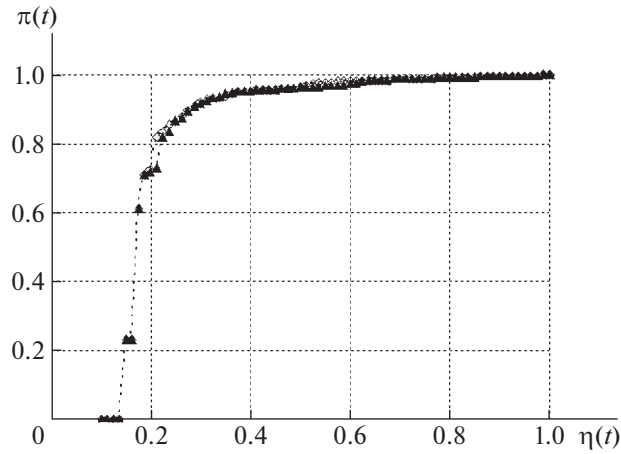


Рис. 4. Предельная нагрузка ребер в кольцевой сети

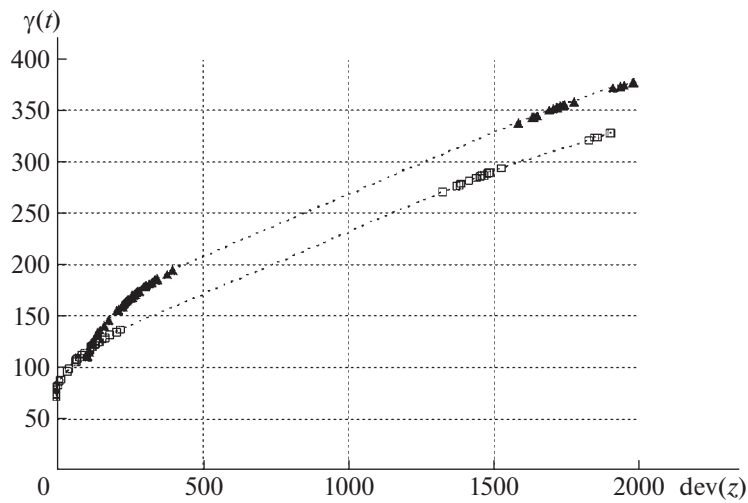


Рис. 5. Норма вектора межузловых потоков для базовой сети

$$\|\bar{z}^*(t)\| = \left[\sum_{m=1}^M z_m^*(t)^2 \right]^{1/2}.$$

Для каждого распределения $z_m^*(t)$, $m = \overline{1, M}$, вычисляется сумма потоков $\zeta(t)$ и среднее значение $\lambda^*(t)$:

$$\zeta(t) = \sum_{m=1}^M z_m^*(t), \quad \lambda^*(t) = \frac{\zeta(t)}{M}.$$

Формируется вектор $\bar{I}(\lambda^*(t))$, все компоненты которого равны среднему значению $\lambda^*(t)$, т.е.

$$\bar{I}(\lambda^*(t)) = \langle \lambda^*(t), \lambda^*(t), \dots, \lambda^*(t) \rangle.$$

Для указанного вектора $\bar{I}(\lambda^*(t))$ вычисляются норма

$$\gamma^*(t) = \left[\sum_{m=1}^M \lambda^*(t)^2 \right]^{1/2} = \lambda^*(t) \sqrt{M} = \frac{\zeta(t)}{\sqrt{M}}$$

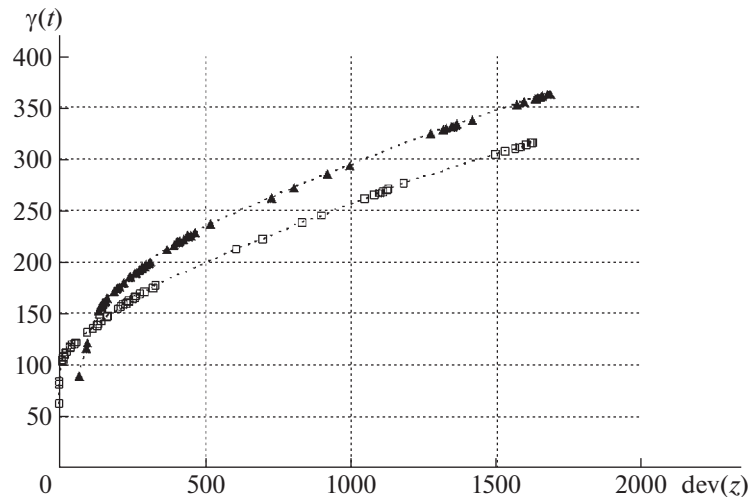


Рис. 6. Норма вектора межузловых потоков для кольцевой сети

и отклонение

$$\text{dev}(\bar{z}^*(t)) = \left[\sum_{m=1}^M (\lambda^*(t) - z_m^*(t))^2 \right]^{1/2}.$$

На диаграммах рис. 5, 6 значения $\gamma(t)$ откладываются по вертикальной оси, а значения $\text{dev}(\bar{z}^*(t))$ — по горизонтальной. Формально полученные величины можно рассматривать как оценки отклонения межузловых потоков $z_m^*(t)$ от некоторых “средних” значений $\lambda(t)$ при заданной общей сумме $\zeta(t)$. Расстояние между точками на вертикальной оси показывает, как меняется общая сумма межузловых потоков при переходе к следующей итерации.

По построению диаграмм на рис. 5, 6 отклонение $\text{dev}(\bar{z}^*(t))$ в множестве $\mathcal{L}(\mathbf{d})$ — кратчайшее расстояние между точками, заданными векторами $\bar{\mathbf{I}}(\lambda^*(t))$ и $\bar{\mathbf{z}}^*(t)$. Вектор-луч $\bar{\mathbf{I}}(\lambda^*(\cdot))$ является геометрическим местом точек векторов-распределений равных межузловых потоков. На рис 5, 6 расстояние от начала координат численно равно $\|\bar{\mathbf{z}}^*(t)\|$, что соответствует “длине” вектора $\bar{\mathbf{z}}^*(t)$ в $\mathcal{L}(\mathbf{d})$.

Геометрическая интерпретация рис. 5, 6 и использование диаграмм рис. 3, 4 упрощает пошаговый анализ результатов выполнения SRSF-процедуры. На начальных итерациях связность сети $G(t)$ начинает нарушаться, поскольку остаточная пропускная способность некоторых ребер становится равной нулю. При этом уклонение $z_m^*(t)$ от луча $\bar{\mathbf{I}}(\lambda^*(t))$ — пошагового уравнительного распределения, не превышает 500 единиц. На некотором шаге τ сеть $G(\tau)$ распадается на фрагменты (подсети), и остаточная пропускная способность ребер $d(\tau)$ распределяется среди пар узлов, лежащих внутри указанных подсетей. Поскольку останов SRSF-процедуры происходит при полной загрузке всех пропускных способностей, то межузловые потоки $z_m^*(T)$ для смежных пар могут быть очень большими. Таким образом результирующее отклонение $\text{dev}(\bar{z}^*(T))$ может быть значительным, что и подтверждают диаграммы с рис. 5, 6.

На рис. 7, 8 представлены диаграммы, позволяющие проследить изменение остаточной пропускной способности в процессе выполнения пошаговой уравнительной SRSF-процедуры. Для наглядности так же, как и на рис. 5, 6, по горизонтальной оси последовательно откладываются значения $\text{dev}(\bar{z}^*(t))$, по вертикальной — значения

$$\rho(t) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^E d_k(t)}{D(0)}, \quad t = \overline{1, T}.$$

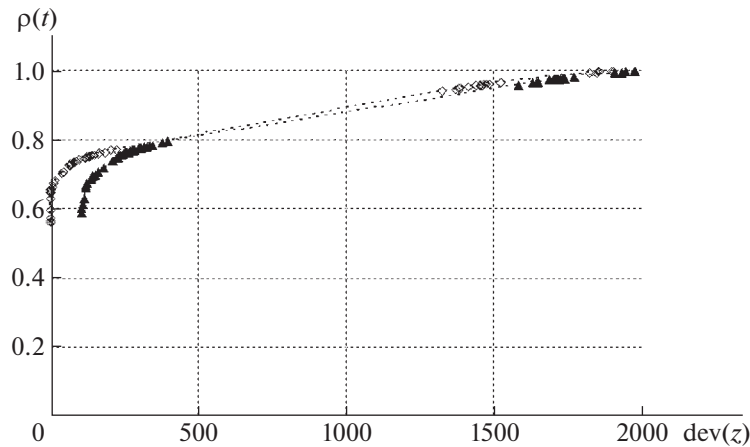


Рис. 7. Распределение ресурсов в базовой сети

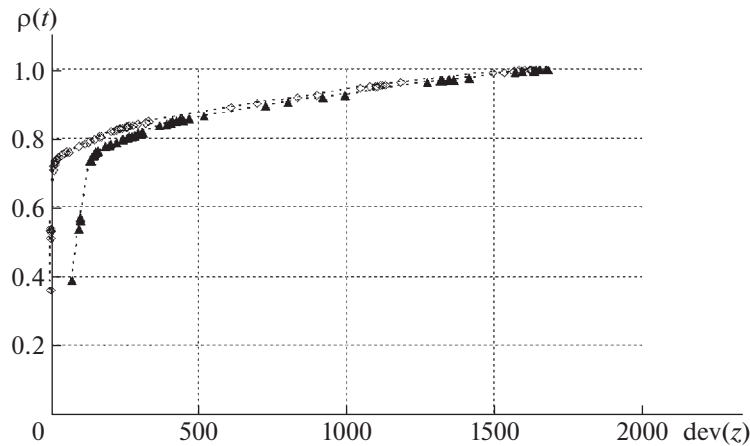


Рис. 8. Распределение ресурсов в кольцевой сети

Величина $\rho(\tau)$ равна доле исходного ресурса — суммарной пропускной способности сети $G(\tau)$, который потребовался для одновременной передачи межузловых потоков $z_m^*(\tau)$, $m = \overline{1, M}$.

Из диаграмм рис. 7, 8 следует, что на начальных итерациях SRSF-процедуры распределяется 60% ресурсов. Плотность точек на рис. 5—8 при значениях $\text{dev}(\bar{z}^*(t)) \leq 500$ свидетельствует, что на каждой из этих итераций распределяются незначительные ресурсы (величины пропускной способности). Когда остаточная пропускная способность оказывается меньше 20% от исходной, то сеть распадается на несколько несвязанных между собой фрагментов и оставшиеся ресурсы распределяются за несколько итераций в основном между смежными парами узлов. Таким образом при выполнении SRSF-процедуры останов происходит в точке с координатами $\bar{z}^*(T)$, отстоящей на значительном удалении от луча $\bar{\Gamma}(\lambda)$ — условной биссектрисы множества $\mathcal{L}(\mathbf{d})$.

Заключение. Как было отмечено во Введении, формально SRSF-процедура является схемой решения лексикографически упорядоченной последовательности задач поиска максимина при распределении межузловых потоков. Фактически SRSF-процедура используется как элемент динамической модели для поэтапного анализа изменения загрузки ребер сети, выявления “узких мест” сети при монотонном увеличении межузловых потоков. Уравнительные правила распределения на каждом шаге позволяют получать текущие оценки минимальных удельных затрат ресурсов.

Последовательный анализ результатов вычислительных экспериментов показал, что уже на первых итерациях 20% ребер оказываются полностью загружены, используется более 60% ресур-

сов сети и достигаются почти равные значения межузловых потоков для 80% пар узлов. Указанные значения остаются неизменными до конца эксперимента. Полученные наборы полностью загруженных ребер являются “узким местом” сети и практически совпадают при различных уравнительных правилах распределения ресурсов. Достигнутые значения медиан представляют собой ключевой показатель при оценке функционирования многопользовательской сети в стационарном режиме при одновременной совместной передаче межузловых потоков для всех пар-корреспондентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малащенко Ю.Е., Назарова И.А. Анализ распределения предельных нагрузок в многопользовательской сети // Информатика и ее применения. 2021. Т. 15. Вып. 4. С. 19–24.
2. Малащенко Ю.Е., Назарова И.А. Оценки распределения ресурсов в многопользовательской сети при равных межузловых нагрузках // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. Вып. 1. С. 21–26.
3. Малащенко Ю.Е., Назарова И.А. Анализ загрузки многопользовательской сети при расщеплении потоков по кратчайшим маршрутам // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 19–24.
4. Salimifard K., Bigharaz S. The Multicommodity Network Flow Problem: State of the Art Classification, Applications, and Solution Methods // J. Oper. Res. Int. 2020. V. 22. Iss. 2. P. 1–47.
5. Luss H. Equitable Resource Allocation: Models, Algorithms, and Applications. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012.
6. Balakrishnan A., Li G., Mirchandani P. Optimal Network Design with End-to-End Service Requirements // Oper. Res. 2017. V. 65. Iss. 3. P. 729–750.
7. Bialon P. A Randomized Rounding Approach to a k-Splittable Multicommodity Flow Problem with Lower Path Flow Bounds Affording Solution Quality Guarantees // Telecommun. Syst. 2017. V. 64. Iss. 3. P. 525–542.
8. Caramia M., Sgalambro A. A Fast Heuristic Algorithm for the Maximum Concurrent k-splittable Flow Problem // Optim. Lett. 2010. V. 4. Iss. 1. P. 37–55.
9. Melchiori A., Sgalambro A. A Branch and Price Algorithm to Solve the Quickest Multicommodity k-Splittable Flow Problem // European J. Oper. Res. 2020. V. 282. Iss. 3. P. 846–857.
10. Kabadurmus O., Smith A.E. Multicommodity k-Splittable Survivable Network Design Problems with Relays // Telecommun. Syst. 2016. V. 62. Iss. 1. P. 123–133.
11. Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л. и др. Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2005.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 004.89; 519.89

МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ МНОГОАГЕНТНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ С ВРЕМЕННЫМИ ОКНАМИ¹

© 2023 г. М. Г. Козлова^{a,*}, Д. В. Лемтюжникова^{b,c,**},
В. А. Лукьяненко^{a,***}, О. О. Макаров^{a,****}

^aФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского», Симферополь, Россия

^bИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

^cМосковский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: art-inf@mail.ru

**e-mail: darabbt@gmail.com

***e-mail: art-inf@yandex.ru

****e-mail: phantom2.00@mail.ru

Поступила в редакцию 28.03.2023 г.

После доработки 18.04.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

Рассматривается задача моделирования реальных логистических систем, устроенных иерархическим образом. Формируются кластеры потребителей нижнего уровня, отвечающие ограничениям временных окон для каждого потребителя и кластера в целом. На каждом таком кластере строится маршрут агента-коммивояжера и выделяется вершина, наиболее близкая к центральному узлу, которая является вершиной перегрузки товара с большегрузных транспортных средств на малогрузные транспортные средства, обслуживающие кластеры потребителей. Вершины перевалки, в свою очередь, объединяются в маршруты коммивояжера более высокого уровня с учетом временных окон для маршрутов этого уровня. Программная реализация тестируется на известных сетях. Методика применима для синтеза центрального распределительного центра и системных распределительных центров нижнего уровня, а также для расчета необходимого числа транспортных средств (агентов).

DOI: 10.31857/S0002338823050098, EDN: ODFMEZ

Введение. Обсуждаются проблемы моделирования реальных задач прикладной алгоритмической логистики с помощью многоагентных иерархических задач маршрутизации. Модели реальных задач существенно сложнее, бесспорно красивых, академических моделей задач такого класса. Логистика перевозок (маршрутизация) на сложных сетях включает в себя задачи планирования транспортных маршрутов с учетом: необходимых транспортных средств (ТС); распределения грузов по потребителям (клиентам); количества перевозок; расписания (график) работы водителей (если это автомобильные перевозки); времени в пути, временных окон для погрузочных и разгрузочных работ; отдыха водителей; сборов на платных дорогах и мн. др. Глобальная модель содержит огромное число переменных, множество локальных и технологических критериев оптимальности, большое число ограничений и т.п. В этом случае проверка разрешимости, устойчивости, разработка и реализация алгоритмов является практически нереализуемой задачей. Необходим набор достаточно простых, реализуемых моделей, направленных на снижение размерности (например, с помощью декомпозиции), таких, чтобы на подсистемах (кластерах) было возможно использовать полиномиальные алгоритмы или экспоненциальные (точные) на кластере сети малой размерности. Поставленной цели можно добиваться с помощью иерархической кластеризации НС (hierarchical clustering) и межкластерной многоагентной маршрутизации. Существенным является применение любой доступной информации о структуре сети, прецедентных моделях, использование мобильных и спутниковых коммуникационных технологий,

¹ Результаты исследований, представленные в разд. 1, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 22-71-10131).

а также возможность снятия некоторых ограничений для упрощения модели по управлению логистическими процессами с целью оптимизации всех ресурсов в режиме реального времени.

Укажем на обзорные работы [1, 2], в которых проводится классификация задач и метаэвристик VRP (vehicle routing problem), применимых для многоагентных задач коммивояжера с временными окнами MTSPW (multiple traveling salesman problem with time window). Иерархия вершин, наличие многих депо (складов), кластеризация потребителей отражены в работах [3, 4], где приводятся задачи MECVRP (multi-echelon capacitated VRP) для случая 2E-CVRP (two-echelon capacitated vehicle routing problem). Также рассматриваемые задачи можно отнести к задачам теории расписаний.

Задачи маршрутизации (TSPTW – traveling salesman problem with time windows, VRPTW – vehicle routing problem with time windows) с временными окнами с несколькими уровнями иерархии маршрутов отвечают сложившимся моделям логистики поставок. Такие задачи еще не исследованы на достаточном уровне.

Целью работы является разработка подходов по синтезу многоагентных маршрутов с временными окнами, устроенных иерархическим образом. Для этого приводится обзор существующих моделей, задач и алгоритмов решения близких задач. Предлагаются модели и алгоритмы иерархической маршрутизации, согласованной с маршрутами коммивояжеров на кластерах.

1. Задачи и алгоритмы маршрутизации. 1.1. Обзор моделей, задач и алгоритмов. В ряде статей рассматриваются близкие к исследуемым в работе задачи. В [5] исследован случай VRPTW (vehicle routing problem with time windows – задача маршрутизации транспортных средств с временными окнами) с неопределенным количеством транспортных средств и одновременным обслуживанием доставки и самовывоза VRPTW-SDP (vehicle routing problem with time windows and simultaneous delivery and pick-up service – задача маршрутизации ТС с временными окнами с неопределенным количеством ТС и одновременным обслуживанием доставки и самовывоза). Задача VRPTW-SDP является расширением VRPTW с целью минимизации транспортных расходов. Утверждается, что классические подходы для решения VRP и VRPTW, такие, как, например, k -деревья [6] или метод ветвей и границ, мало эффективны при решении сложных задач. Предложен эволюционный алгоритм EA (evolutionary algorithm) роя частиц. Алгоритм оптимизации роя частиц PSO (particle swarm optimization) является эффективным алгоритмом для решения многих сложных задач оптимизации. Но PSO иногда находит только локальное оптимальное значение, поэтому его точность ограничена. В качестве улучшенного PSO предложен многороевой кооперативный алгоритм MCPSO (multi-swarm cooperative particle swarm optimization). Он использует многороевую кооперативную эволюционную стратегию, в которой ведущий рой меняет свои частицы на основе собственных знаний и знаний частиц в ведомых роях, а ведомые рои выполняют PSO самостоятельно. Сравнения с алгоритмом PSO и алгоритмом GA (genetic algorithm, генетический алгоритм) показывают, что простой и надежный алгоритм MCPSO более эффективен для решения предложенной VRPTW-SDP.

В [7] представлена разработка новых методов решения задачи маршрутизации ТС с временными окнами (VRPTW). Обсуждаются два основных направления развития точных методов для VRPTW. Одно из них связано с общим подходом к декомпозиции и решением определенных двойственных к VRPTW задач. Другое, более современное направление, связано с анализом полиэдральной структуры VRPTW. Рассмотрена релаксация Лагранжа набора ограничений, требующих, чтобы каждый клиент был обслужен ровно одним ТС, что приводит к ограничениям в подпроблеме кратчайшего пути. Представлен регуляризированный алгоритм секущих плоскостей в рамках линейного программирования для решения соответствующей двойственной задачи Лагранжа. Этот алгоритм приводит к более простым подпроблемам кратчайшего пути с ограничениями, поскольку вводится меньше отрицательных циклов и более быстро сходятся множители, благодаря стабилизации двойственных переменных. Авторами встроены устойчивый алгоритм секущей плоскости в метод ветвей и границ и введены сильные допустимые неравенства на уровне главной задачи с помощью релаксации Лагранжа. В результате получен алгоритм Лагранжа с ветвлением, отсечением и ценой LBCP (lagrangian branch-and-cut-and-price) для VRPTW. Использование этой стратегии на уровне главной задачи дает значительное ускорение по сравнению с другими алгоритмами. Решены две тестовые задачи, представленные в 2001 г. Герингом и Хомбергером, с 400 и 1000 клиентами соответственно, которые на сегодняшний день являются самыми большими задачами, когда-либо решенными оптимально. Реализован алгоритм LBCP, используя фреймворк ABACUS с открытым исходным кодом для решения смешанных целочисленных линейных программ методом ветвления, отсечения и цены. В [7] представлена новая формулировка VRPTW, включающая только двоичные переменные, связанные с ду-

гами в базовом диграфе. Новая формулировка основана на модели асимметричной задачи коммивояжера с временными окнами и имеет преимущество в том, что позволяет избежать дополнительных переменных и связывающих ограничений. В новой формулировке VRPTW временные окна моделируются с помощью неравенств путей. Неравенства путей устраняют невыполнимые по времени и пропускной способности пути. Представлен новый класс усиленных неравенств путей, основанный на полиэдральных результатах, которые получены в контексте асимметричной задачи коммивояжера с дугами пополнения запасов. Изучен политоп VRPTW и определена его размерность. Показано, что при определенных предположениях неравенства путей являются граниопределяющими.

В [8] рассматривается вариант задачи маршрутизации ТС с временными окнами и несколькими маршрутами MVRPTW (vehicle routing problem with time windows and multiple routes). В этой задаче учитывается, что данное ТС может быть назначено на более чем один маршрут за период планирования, учитываются дополнительные ограничения на продолжительность маршрута и генерируются все возможные маршруты ТС априори. В статье предложен новый точный алгоритм для этой задачи. Он является итерационным и опирается на псевдополиномиальную модель сетевого потока, узлы которой представляют (дискретные) моменты времени, дуги — осуществимые маршруты ТС, а решение состоит из набора путей, каждый из которых представляет рабочий день. Проблема псевдополиномиальной модели заключается в том, что ее размер зависит от продолжительности рабочих дней. Моменты времени, которые рассматриваются в модели, являются целыми, и поэтому для нецелых моментов используются процедуры округления, которые позволяют получить (сильную) нижнюю границу. Затем модель встраивается в точный алгоритм, который итеративно добавляет новые временные моменты в модель сетевого потока и реоптимизирует ее, пока не будет доказано, что найденное решение выполнимо. Согласно сравнению, данный алгоритм превосходит алгоритм, основанный на генерации столбцов. В тех случаях, когда оба метода находят решение, метод, представленный в [8], значительно сокращает время вычислений. Алгоритм, обсуждаемый в этой работе, был протестирован на наборе эталонных примеров. Согласно полученным результатам, сделан вывод, что данный метод способен решить большее количество примеров, чем другой точный метод, описанный до сих пор в литературе, и он явно превосходит его по времени вычислений.

Для VRPTW с целевыми функциями минимизации количества ТС и минимизации временных потерь, вызванных ранним прибытием в процессе доставки в [9] предлагается гибридный многокритериальный эволюционный алгоритм HMOEA-GL (hybrid multiobjective evolutionary algorithm with fast sampling strategy-based global search). Используются схемы с глобальным поиском на основе стратегии быстрой выборки FSS-GS (fast sampling strategy-based global search) и локальным поиском на базе различий в последовательности маршрутов RSD-LS (route sequence difference-based local search). В алгоритме FSS-GS исследуется все пространство решений с быстрым выбором поиска к центру и краевым областям, и таким образом, получая новую популяцию. Алгоритм RSD-LS выполняется для объектов с низкой производительностью в популяции с целью повышения поисковой способности базового алгоритма HMOEA-GL. Разработаны подходящие методы кодирования и генетические операторы. Для уменьшения количества ТС в VRPTW используется простой поиск по вставке. Сравнение HMOEA-GL с NSGA-II (non-dominated sorting genetic algorithm II), SPEA2 (strength pareto evolutionary algorithm) и MOEA/D (multi-objective evolutionary algorithm by decomposition) по 12 тестовым задачам из выборки Solomon [11] показывает, что предложенный алгоритм хорошо сходится, сохраняя удовлетворительную производительность распределения ТС и заявок.

В задаче маршрутизации ТС с временным окном (VRPTW) целью является минимизация количества ТС, а затем минимизация общего времени в пути TD (total distance) при том же количестве маршрутов. Каждый маршрут начинается на автобазе и заканчивается у клиента, посещая по пути несколько клиентов, каждый по одному разу, без возвращения на автобазу. Спрос каждого клиента должен быть полностью удовлетворен одним ТС. Суммарный спрос, обслуживаемый каждым автомобилем, не должен превышать вместимость автомобиля. Для решения этой задачи в [10] предлагается эффективная эвристика табу-поиска для маршрутизации ТС с временным окном TS-VRPTW (tabu search for vehicle routing problem with time window). В TS-VRPTW пространство поиска представляет собой универсальное множество дуг в полном графе VRPTW. Позиция, которая является набором маршрутов доставки для парка ТС, определяется как подмножество дуг и строится конструктивно. В этом представлении полностью воплощены характеристики VRPTW. Также предложен новый метод принятия решений для обработки первичных и вторичных целей VRPTW. Этот метод подходит не только для TS-VRPTW, но и потенциально

полезен в других подходах к решению VRPTW. Предложенный TS-VRPTW — один из немногих алгоритмов TS, который был протестирован на всех эталонах Solomon [11]. На основании результатов вычислений на эталонных тестах Solomon, состоящих из шести различных наборов данных, показано, что предложенная TS-VRPTW сопоставима по качеству решения с наиболее эффективными опубликованными эвристиками.

В [12] исследуется многофакторный эволюционный алгоритм MFEA (multifactorial evolutionary algorithm), модифицированный за счет интеграции остоного маршрута и локального поиска на больших окрестностях. Он используется для решения многокритериальной VRPTW, которая моделируется как две связанные задачи. Основная задача представляет собой многокритериальную версию VRPTW, а вспомогательная задача — версию VRPTW с одной целевой функцией. Полученный в результате многокритериальный многофакторный меметический алгоритм MOMFMA (multi-objective multi-factorial memetic algorithm) решает две задачи одновременно, причем обмен информацией между задачами происходит в процессе эволюции. В дополнение к неявной передаче информации MFEA вводится остоный маршрут для обеспечения явной передачи информации между задачами. В частности, остоные маршруты создаются как промежуточные решения и используются при локальном поиске на больших окрестностях. Для ускорения сходимости алгоритма остоный маршрут и локальный поиск на больших окрестностях работают вместе. Показана эффективность алгоритма MOMFMA на 56 примерах из выборки Solomon [11].

В [13] для решения VRPTW представлен двухэтапный многокритериальный эволюционный алгоритм, основанный на классифицированной совокупности TSCEA (two-stage multi-objective evolutionary algorithm based on classified population). Решается задача дискретной оптимизации с тремя целевыми функциями: минимизация общей стоимости расстояния, минимизация количества ТС и оптимизация баланса маршрутов в течение ограниченного времени. Алгоритм TSCEA состоит из двух этапов. На первом этапе происходит процесс классификации популяции. Популяция исследуется с использованием предложенного алгоритма, а затем классифицируется в соответствии с количеством ТС. На втором этапе путем повторной оптимизации классифицированной совокупности получается набор решений Парето для VRPTW с тремя целевыми функциями. В качестве тестовых наборов выбраны эталонные экземпляры Solomon [11]. Результаты моделирования показывают, что TSCEA превосходит сравниваемые алгоритмы с точки зрения качества или расширения.

В [14] показан подход оптимизации эволюционного переноса ЕТО (evolutionary transfer optimization) для VRPTW. В работе исследуется общий механизм отбора высокопотенциальных решений для эволюционных алгоритмов. Изучаются характеристики строительных блоков для генетических и меметических алгоритмов.

В [15] рассматриваются затраты на отправку, штрафы за нарушение границ временного окна, затраты на топливо и влияние скорости движения ТС, уклона дороги и загрузки ТС на расход топлива. Сформулирована модель смешанного целочисленного программирования, основанная на предварительной оптимизации и стратегии повторной оптимизации. Рассматривается влияние зависящих от времени сетей на оптимизацию маршрута. Моделирование базируется на асимметричном графе, что увеличивает сложность задачи. На этапе предварительной оптимизации генерируется схема, основанная на некоторой мере достоверности. На этапе повторной оптимизации используется новая стратегия для устранения узлов сбоя обслуживания. Разработан хаотический генетический алгоритм с переменным поиском окрестностей. Введена псевдослучайность хаоса для обеспечения разнообразия начальных решений и адаптивного времени поиска окрестностей. Для повышения производительности алгоритма предложены стратегия и механизм принятия некачественного решения. Численные результаты показывают, что предложенная модель и алгоритм эффективны.

В [16] рассматривается VRPTW в условиях двух неопределенностей: времени обслуживания и времени в пути. Вводятся новые подходы к решению этой робастной задачи и эффективная параллельная процедура для генерации всех возможных сценариев. Наилучшее надежное решение для каждого сценария может быть достигнуто с помощью параллельной адаптивной метаэвристики поиска по большой окрестности. Для нахождения наилучшего баланса между сокращенным временем выполнения и наилучшим решением исследуются четыре различные комбинации параллельных / последовательных подходов. Вычислительные эксперименты выполняются и тестируются на выборке Solomon [11] и больших случайно сгенерированных экземплярах. Полученные результаты представляют решения, которые защищены от задержек во время обслуживания в разумные сроки и в первую очередь для больших примеров.

В [17] применяется генетический алгоритм смещенного случайного ключа BRKGA (biased random key genetic algorithm) для решения VRPTW с ограничениями синхронизации. Каждая заявка имеет одно из двух свойств или же оба сразу. Поэтому для обслуживания каждой заявки требуется ТС, удовлетворяющее свойству заявки. Заявки с двумя свойствами должны обслуживаться разными ТС либо одновременно, либо с соблюдением очередности. Эти требования вносят нелинейность в проблему, поскольку небольшое изменение на одном маршруте потенциально влияет на все остальные маршруты, затрудняя определение эффективной процедуры локального поиска. Для обхода нелинейности задачи используется генетический алгоритм, который улучшает последовательность, где все варианты обслуживания встроены в маршруты. Генетический алгоритм превзошел подход коррекции и оптимизации на 25% и выполнялся в 2 раза быстрее на примерах задачи домашнего здравоохранения.

В [18] представлен новый вариант VRP с временными окнами и гибкими местами доставки VRPTW-FL (the VRP with time windows and flexible delivery locations). Как правило, в VRP каждый клиент обслуживается в одном фиксированном месте обслуживания. Однако в VRPTW-FL каждый клиент обслуживается в одном из множества потенциальных мест обслуживания, каждое из которых имеет определенную пропускную способность. Теоретически VRPTW-FL сложно решить из-за ограниченных возможностей местоположения. При обслуживании клиента доступность места должна быть обеспечена в любое время. Так как задача VRPTW-FL не может быть описана с помощью некоторого числа линейных ограничений, то для решения этой проблемы в [18] предложена гибридная метаэвристика, основанная на адаптивном поиске по большим окрестностям ALNS (adaptive large neighborhood search) и управляемом локальном поиске GLS (guided local search). Эвристика построения основана на вставке, добавляется механизм отката для изменения неудовлетворительных решений на ранней стадии. Решение, полученное в результате применения эвристики, улучшается с помощью гибридной ALNS. Расширяется самоадаптивность ALNS, допускающая нарушения выполнения, которые штрафуются в целевой функции. Веса штрафов динамически корректируются в соответствии с подходом GLS, что добавляет устойчивости ALNS и может сделать ее более подходящей для будущих приложений. Основываясь на полученных результатах, сделан вывод, что алгоритмические особенности значительно улучшают качество решения, эвристика работает хорошо; сочетание ALNS с GLS приводит эвристику к значительно лучшим областям горизонта планирования, а откат назад обеспечивает гораздо лучшие начальные решения, чем традиционные эвристики построения.

В ряде работ для решения VRPTW применяются технологии машинного обучения ML (machine learning). В статье [19] реализуется: 1) построение классификационной модели ML, предсказывающей количество автомобилей реализуются, необходимых для обслуживания клиентов; 2) попытка предложить алгоритм кластеризации, который использует знания о классификации, разработанные ранее, в рамках оптимизации для минимизации общего количества необходимых ТС; 3) разработка RL-модели (reinforcement learning, обучение с подкреплением), решающая задачу VRPTW; исследование важности обучающих данных, а также встраивания входных данных. Представлен ML-подход для решения крупномасштабных VRPTW, основанный на схеме “разделяй и властвуй”. Сначала спрос делится на более мелкие кластеры с помощью алгоритма кластеризации, который использует прогнозы на уровне кластеров о количестве ТС, необходимых для их обслуживания. Эти прогнозы получены с помощью древовидного метода OCT (optimal classification trees), использующего совокупность характеристик на уровне кластера. Опираясь на эти прогнозы и древовидную архитектуру модели прогнозирования, алгоритм кластеризации разделяет узлы спроса таким образом, чтобы минимизировать общее количество ТС, получаемых в результате этих кластеров. Затем в пределах каждого кластера явная маршрутизация обрабатывается алгоритмом RL (reinforcement learning), основанным на методе actor-critic. Для оценки эффективности этой идеи определены примеры VRPTW и проанализирована производительность анализа кластеризации и предложенного RL-подхода. Результаты показывают, что кластерный подход является конкурентоспособным по отношению к кластеризации на основе k -means (k -средних), обеспечивая улучшение до 5% по количеству ТС. Этот подход в настоящее время не может конкурировать с промышленными решателями, так как он приводит к решению с большим количеством ТС. Однако он предоставляет метод, с помощью которого алгоритмы маршрутизации могут быть распараллелены на каждом из кластеров, что потенциально приводит к сокращению времени вычислений. Полученная авторами в [19] система является гибкой, требуется незначительная настройка параметров. Результаты подтверждают целесообразность использования RL для решения сильно ограниченных комбинаторных задач, таких, как VRPTW. Они также указывают на существующее ограничение в обобщении подхода RL, когда обучающие и тестовые наборы данных происходят из схожих, но различных распределений.

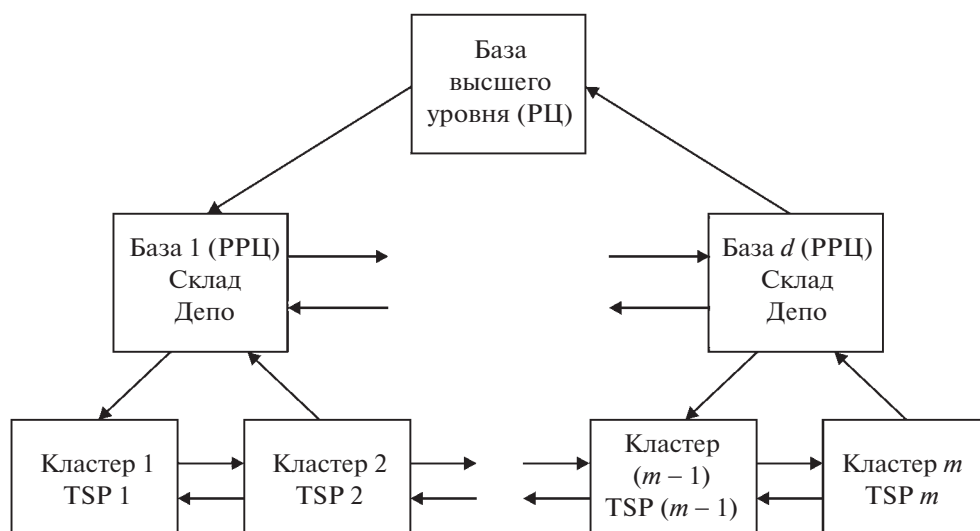


Рис. 1. Иерархическая MTSP с m кластерами, d базами и базой высшего уровня

Приведенный обзор показывает перспективность применения методов кластеризации для снижения размерности задачи и использования метаэвристик для TSP (traveling salesman problem) с временными окнами.

1.2. Постановка задачи. В работе исследуется иерархическая модель маршрутизации с окнами.

Рассмотрим двухуровневую логистическую сеть по доставке грузов. Предполагается наличие центрального склада или распределительного центра (РЦ), с которого груз доставляется на региональные распределительные центры (РРЦ) — склады, перевалочные пункты, с которых в свою очередь грузы распределяются по потребителям. Вариант такой структуры сети приведен на рис. 1. Региональный центр (база высшего уровня) перераспределяет грузы по базам нижнего уровня (РРЦ), которые обслуживают один или несколько кластеров потребителей. Такую задачу будем называть иерархической многоагентной задачей коммивояжера HMTSP (hierarchical multiple traveling salesman problem). Более сложной является задача синтеза иерархической сети такого типа.

Задачу HMTSP с временными окнами — временными ограничениями на доставку грузов, будем обозначать HMTSPTW (hierarchical multiple traveling salesman problem with time window). Временные окна TW (time window) могут быть связаны с режимом погрузочно-разгрузочных работ, перевозкой скоропортящихся грузов и др. Во многих случаях включение временных окон в математическую модель является обязательным. В [20] предложен метод расчета маршрутов с TW, включающий иерархические решения. Конечно, построение маршрутов TSP на кластерах потребителей зависит от потребности в грузах (товарах) или от их производства. Например, в сети аптек потребность в товарах определяется заявками аптек. В аналогичной сети почтовых отделений доставляемый груз и собранный определяются только в среднем (формируется случайным образом). Естественно, с данной моделью связаны задачи MTSP, китайского почтальона, медианы, рюкзака и др. С экономикой цепочек поставок в такой сети возникает задача расчета парка ТС различной грузоподъемности.

В [21] рассматривается система сбора и вывоза твердых бытовых отходов. Для Симферополя подобная проблема рассматривалась в [22]. В [23] авторами приведена модель транспортного планирования работы паромной переправы, а также разработана математическая модель погрузки порожних вагонов на железнодорожном транспортном узле, в которой учитываются требования владельца по применению вагонов, возможность добавления групп порожних вагонов в поездка пересадки, поезда очистители и промышленные поезда, работающие по плотному графику с учетом уровня эксплуатационной работы железнодорожных станций транспортного узла. В [24] авторы представляют модель инвентаризации, которая объединяет непрерывный мониторинг с производством и распределением для цепочек поставок, включающих фармацевтическую компанию, и цепочку поставок в больницу. В [25] изучается итальянская сеть здравоохранения.

Заметим, что в настоящий момент широко представлена литература по математическому моделированию цепочек поставок и расчету необходимых ТС, начиная с работ по управлению цепочками поставок [26]. Далее приведем уточнение моделей и алгоритмов, лежащих в основе разработанных программ маршрутизации.

2. Модели и алгоритмы иерархической маршрутизации. Предположим, что груз (товар) концентрируется на распределительном центре (РЦ). Это может быть центральная база снабжения (склад), на которой грузы распределяются по региональным РЦ (базам). На РРЦ грузы перегружаются, например, с большегрузных ТС на ТС меньшей грузоподъемности, с помощью которых доставляются потребителям, объединенным в кластеры вокруг баз нижнего уровня (см. рис. 1).

Если не учитывать время, затраченное в пути ТС с учетом ТW и грузоподъемность ТС, то задачу можно свести к задаче коммивояжера по обходу РЦ и РРЦ; кластеризации потребителей, согласованной с маршрутами коммивояжера на каждом кластере, привязанном к своей базе РРЦ. Такую многоагентную задачу назовем иерархической кластерной задачей коммивояжера HCMTSP (hierarchical cluster multiple traveling salesman problem).

Пусть задана транспортная сеть $S = (D, V, R)$, где $D = (d_0, d_1, \dots, d_k)$ — вершины баз, d_0 — центральная база РЦ, $d_i, i = \overline{1, k}$ — базы нижнего уровня РРЦ; $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ — множество остальных вершин сети; I_D, I_V — множества индексов вершин D и V ; $R = \{r_{ij}\}, i, j \in I_D \cup I_V, r_{ij}$ — веса (расстояния, время прохождения дуги (i, j)), m — число кластеров потребителей. Для решения HCMTSP предложен алгоритм 1.

Алгоритм 1. HCMTSP.

Вход: сеть $S = (D, V, R)$.

Выход: маршруты доставки грузов.

Шаг 1. Построить m кластеров потребителей C_j (вершин из V) с учетом их структуры и требований близости вершин (далее по умолчанию, если не оговорено иного, $j = \overline{1, m}$).

Шаг 2. На каждом кластере C_j найти решение TSP_j .

Шаг 3. Сравнить маршруты TSP_j , согласно заданным критериям (сбалансированность по количеству вершин или длине маршрутов; минимум общей длины). Если маршруты на кластерах удовлетворяют заданным требованиям, перейти на шаг 5, иначе — на шаг 4.

Шаг 4. Уточнить кластеры C_j , перебрасывая вершины, и построить маршруты TSP_j , перейти на шаг 3.

Шаг 5. Для каждого кластера C_j найти ближайшую базу $d_i, i = \overline{1, k}$.

Шаг 6. Найти решение TSP на вершинах $d_i, i \in I_D = \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

Количество кластеров m может быть равно числу РРЦ с вершинами из D . Вершины D могут быть фиксированными или определяться. Например, d_j — вершины кластеров C_j , а d_0 — ближайшая ко всем d_j .

В алгоритме HCMTSP критерием оптимальности считается минимальность расстояния по всем маршрутам (РЦ, РЦ и маршруты TSP_j). Модификация алгоритма HCMTSP в случае учета ТW содержит временные критерии, так как предполагается, что есть только ограниченное время, в течение которого могут быть доставлены грузы. В качестве критериев выбирается:

а) минимальное общее время в пути (зависит от ТW);

б) минимальный общий путь во всей системе (верхнего и нижнего уровней иерархии) или, кроме того, минимум в тонно-километрах (если учитывается вид транспорта и затраты на перевозку, пробег транспорта).

2.1. Кластеризация и маршрутизация в сети с учетом ТW. Пусть заданы расстояния и время пути между всеми вершинами транспортной сети S . Группировка вершин V в кластеры $C_j, j = \overline{1, m}$, должна быть согласована с соответствующим маршрутом TSP_j , причем время, затраченное на прохождение пути от базы d_j (ближайшей к кластеру C_j) к кластеру C_j и времени прохождения TSP_j , должно быть меньше или равно ТW кластера C_j , например, может быть задано окно с указанием начала поставки A_j и конца B_j : $[A_j, B_j] - TWC_j$. Другими словами, число вершин в кластере определяется маршрутом коммивояжера и временными рамками. Считаем, что центры (базы) нижнего уровня d_j необходимо определить как вершины кластеров по-

требителей, ближайшие к центру высшего уровня d_0 . Внутри кластера C_j время из вершины v_{k-1} в v_k будем обозначать t_{jk} .

Выбор вершин для кластера C_j с учетом ТВ находим с помощью алгоритма 2.

Алгоритм 2. Включение вершин в кластер с учетом временных окон.

Вход: время между вершинами для кластера.

Выход: группа вершин, входящих в кластер.

Шаг 1. Построим кластер C_j , выбирая вершины кластера, например, случайно.

Шаг 2. Для каждой вершины $v \in C_j$ найдем минимальное время пути из d_0 в v . Выберем d_1 такое, что время $t_0 = t(d_0, d_j) = \min_v \{t(d_0, v), \forall v \in C_j\}$, где $t(a, b)$ – время, затрачиваемое на путь из вершины a в b .

Шаг 3. Следующую вершину $v_{j1} \in C_j$ выбираем из условия, что

$$t_{j1} = \min_v \{t(d_0, v), \forall v \in C_j\}, \quad v_{j1} = \arg \min_v \{t(d_j, v), v \in C_j\}.$$

Шаг 4. Если найдена вершина $v_{j(k-1)} \in C_j$, то $v_{jk} \in C_j$ определяем из условия

$$t_{jk} = \min_v \{t(v_{j(k-1)}, v), \forall v \in C_j\}, \quad v_{jk} = \arg \min_v \{t(v_{j(k-1)}, v), v \in C_j\}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Шаг 5. Процесс заканчивается, если после добавления вершин поочередно в каждой ветви дерева выполняется критерий

$$T_j = \min \left\{ t_0 + t_{j1} + \sum_{i=2}^{n_j} t_{ji} \leq TWC_j \right\}.$$

Шаг 6. Выбрать группу вершин из C_j с наименьшим T_j .

Таким образом, в кластер C_j включается конечное число узлов n_j .

2.2. Задача агента-коммивояжера ТSP на k -м кластере C_k . Пусть на вновь созданном кластере сосредоточено n_k вершин $v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kn_k}$, которые обходит агент-коммивояжер, начиная с вершины-склада d_k , за минимальное время, не превосходящее TWC_k . Для реализации ТSP-маршрута может понадобиться несколько ТС, количество которых определяется отдельно (декомпозиция по маршрутам и ТС). На кластере C_j через t_{ij} обозначим время прохождения от вершины i до вершины j (вместо трехиндексного обозначения t_{ij}^k).

Соответствующая модель имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=i+1}^{n_k} t_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n_k} x_{ij} = 1, \quad i, j = \overline{1, n_k}, \quad (2.2)$$

$$t_k + \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=i+1}^{n_k} t_{ij} \leq TWC_k, \quad (2.3)$$

$$u_i - u_j + n_k x_{ij} \leq n_k - 1, \quad i, j = \overline{2, n_k}, \quad i \neq j. \quad (2.4)$$

Здесь

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если маршрут проходит от вершины } i \text{ до вершины } j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

u_i – числа, соответствующие нумерации вершин маршрута TSP_k .

Условие (2.4) обеспечивает условия ТВ для кластера C_k , t_k – время $t(d_0, d_k)$ прохождения от центральной вершины (распределительного центра) d_0 до вершины d_k – склада нижнего уровня, с которого товар распределяется по потребителям кластера C_k , $k = \overline{1, m}$.

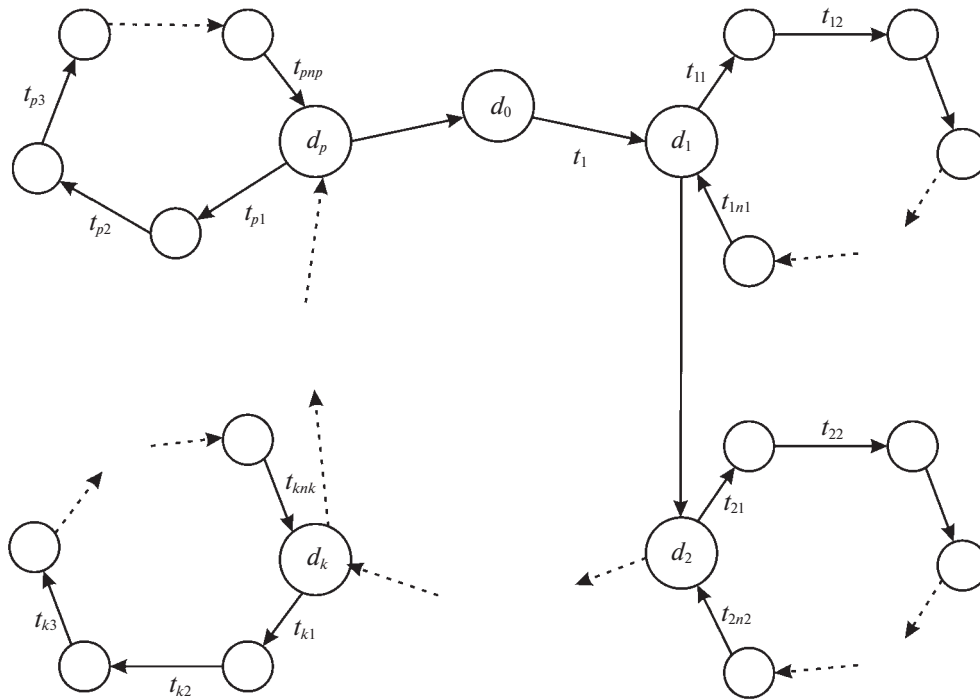


Рис. 2. Маршрут интегрирования узлов кластеров нижнего уровня

2.3. Интегрирование кластеров нижнего уровня. На нижнем уровне была проведена кластеризация потребителей в зависимости от TW , времени пути по маршруту коммивояжера-агента на кластере и определена вершина d_j как начало маршрута на кластере C_j . Теперь необходимо интегрировать узлы d_j кластеров в маршрут, который связывает наибольшее количество вершин d_j (или все) в маршрут перевозки следующего уровня, по которому осуществляется доставка грузов в d_j транспортом большей вместимости для перевалки в ТС малой вместимости для доставки потребителям кластера C_j . Таким образом, снова осуществляется процесс кластеризации на более высоком уровне в большем масштабе. Группируются узлы (вершины начала маршрутов – узлы перевалки для кластеров нижнего уровня C_j). На первом этапе группировка осуществляется, исходя из TW , а затем находится оптимальный маршрут с помощью решения TWC_j на выделенном кластере C_j .

На рис. 2 показан маршрут обхода $p \leq m$ кластеров C_j , $j = \overline{1, m}$. При этом необходимо соблюдение TW каждого кластера C_j .

Рассмотрим ограничения, соответствующие рис. 2. Для первого кластера на маршруте

$$t_1 + (t_{11} + t_{12} + \dots + t_{1n_1}) = t_1 + \sum_{j=1}^{n_1} t_{1j} \leq TWC_1.$$

Аналогично для C_k :

$$t_1 + t_2 + \dots + t_k + (t_{k1} + t_{k2} + \dots + t_{kn_k}) = t_1 + \dots + t_k + \sum_{j=1}^{n_k} t_{kn_j} \leq TWC_k.$$

Для C_p (последний кластер, включенный в маршрут обхода кластеров)

$$t_1 + t_2 + \dots + t_p + \sum_{j=1}^{n_p} t_{pn_j} \leq TWC_p \leq TWC.$$

Последнее неравенство обеспечивает ограничение по TW для кластера C_p , всех промежуточных TWC_k , $k = \overline{1, p-1}$, и для всех в целом TWC для большегрузного ТС. Аналогично поступаем с остальными кластерами C_k , $k = \overline{p+1, m}$.

3. Реализация алгоритмов маршрутизации ТС. 3.1. Алгоритм кооперации муравьиных колоний. Рассматривается вариант обхода кластера с учетом требуемого количества агентов (ТС) и потребностей клиентов (потребителей).

Для численной реализации решения задачи маршрутизации ТС с TW и несколькими маршрутами VRPTW выберем алгоритм, основанный на системе кооперации муравьиных колоний MACS-VRPTW (multiple ant colony system for vehicle routing problem with time windows). Близкий алгоритм основан на многороевой кооперативной оптимизации роя частиц MCPSO (multi-swarm cooperative particle swarm optimizer), т.е. MCPSO-VRPTW (multi-swarm cooperative particle swarm optimizer for vehicle routing problem with time windows).

MACS-VRPTW базируется на системе муравьиных колоний ACS (ant colony system) [27, 28], и, в более общем смысле, на оптимизации муравьиной колонии ACO (ant colony optimization), метаэвристическом подходе, основанном на поведении реальных колоний муравьев. В последнее время было предложено множество алгоритмов ACO для решения различных типов задач комбинаторной оптимизации. В частности, было показано, что алгоритмы ACO очень эффективны в сочетании со специализированными процедурами локального поиска для решения симметричных и асимметричных задач коммивояжера [27–29].

Одной из наиболее эффективных реализаций ACO является ACS с особой процедурой обновления феромонной тропы, полезной для интенсификации поиска в окрестностях наилучшего вычисленного решения. Рассмотрим расширение ACS, способное решать проблему маршрутизации ТС с TW (VRPTW). VRPTW определяется как проблема минимизации времени и затрат в случае, когда ТС должны распределить товары со склада по множеству клиентов. VRPTW минимизирует двухкритериальную, иерархическую целевую функцию: первая цель — минимизировать количество маршрутов (туров, агентов или ТС), а вторая — минимизировать общее время в пути. Решение с меньшим числом туров всегда предпочтительнее, даже если время в пути больше. Идея адаптации ACS к этим целям заключается в определении двух колоний ACS, каждая из которых предназначена для оптимизации различных целевых функций. В MACS-VRPTW реализуется агентное управление, при котором колонии сотрудничают, обмениваясь информацией через обновление феромонов. Заметим, что MACS-VRPTW конкурирует с лучшими из существующих методов как по качеству решения, так и по времени вычислений. Более того, MACS-VRPTW улучшает решения, известные в литературе для некоторых экземпляров задач.

Во Введении для VRPTW приведен ряд точных и эвристических методов. Среди точных методов одним из наиболее эффективных является метод [30], с помощью которого удалось решить несколько задач для 100 клиентов. Заметим, что точные методы более эффективны, если пространство решений ограничено узкими TW, поскольку для определения выполнимых туров можно использовать меньшее количество комбинаций клиентов. Наиболее успешными эвристическими методами для VRPTW являются адаптивные программы с памятью (введение в адаптивное программирование с памятью см. в [31]), поиск с встраиванием табу [32, 33], управляемый локальный поиск [34] и поиск по большой окрестности [35]. Отметим, что метод [33] также можно рассматривать как разновидность поиска по большой окрестности.

Обсудим ACS [28, 29], примененную к задаче TSP. MACS-VRPTW предназначена для решения VRPTW, в которой необходимо минимизировать как количество ТС, так и время в пути. Эта многоцелевая минимизация достигается путем использования двух искусственных муравейников на основе ACS. ACS применяется к TSP, связывая две меры с каждой дугой графа TSP: близость η_{ij} и феромонный след τ_{ij} . Близость, определяемая как обратная величина длины дуги, является статическим эвристическим значением, которое никогда не меняется для данной задачи, в то время как феромонный след динамически изменяется муравьями во время выполнения. Поэтому наиболее важным компонентом ACS будет управление феромонными тропами, которые используются вместе с целевой функцией для построения новых решений.

Неформально уровни феромонов дают меру того, насколько желательно вставить данную дугу в решение. Феромонные тропы применяются для разведки и эксплуатации. Исследование касается вероятностного выбора компонентов, используемых для построения решения: более высокая вероятность дается элементам с сильным феромоновым следом. Выбирается компонент, который максимизирует сочетание значений феромонного следа и эвристических оценок.

Цель ACS — найти кратчайший тур. В ACS m муравьев строят туры параллельно, где m — параметр. Каждый муравей случайным образом назначается на начальный узел и должен построить решение, т.е. полный тур. Тур строится узел за узлом: каждый муравей итеративно добавляет новые узлы, пока не будут посещены все узлы. Когда муравей k находится в узле i , он вероятностно выбирает следующий узел j из множества выполнимых узлов N_i^k (т.е. множества узлов, которые еще нужно посетить).

Каждый муравей выбирает узел для посещения независимо. Пусть вероятность перехода муравья k из города i в город j равна $P_{ij}^k(t)$, которая описывается следующей формулой:

$$P_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}^\alpha(t) \eta_{ij}^\beta(t)}{\sum_{j \in N_i^k} \tau_{ij}^\alpha(t) \eta_{ij}^\beta(t)}, & j \in N_i^k, \\ 0, & j \notin N_i^k, \end{cases} \quad (3.1)$$

где α и β задают значимость уровня феромона и видимости узла при выборе узла. При $\alpha = 0$ будет выбран ближайший город, что соответствует жадному алгоритму. Если $\beta = 0$ то работает лишь феромонное усиление, что влечет за собой быстрое вырождение маршрутов к одному субоптимальному решению. Здесь τ_{ij} — количество феромона на ребре (i, j) , $\eta_{ij} = 1/D_{ij}$, D_{ij} — длина ребра (i, j) ; N_i^k — список узлов, которые еще нужно посетить муравью k из вершины i .

После того, как муравьи построили полное решение, оно предварительно улучшается с помощью процедуры локального поиска. Затем лучшее решение, найденное в начале процесса, используется для обновления феромонных троп. Процесс итерируется путем повторного запуска m муравьев до тех пор, пока не будет выполнено условие завершения. ACS завершается, когда становится верным хотя бы одно из следующих условий: сгенерировано фиксированное количество решений, истекло фиксированное время процессора или не было достигнуто никакого улучшения в течение заданного количества итераций.

Рассмотрим процедуру обновления следа. В ACS тропа феромонов обновляется как локально, так и глобально. Локальное обновление выполняется во время построения решений, в то время как глобальное обновление — в конце конструктивной фазы. Эффект локального обновления заключается в динамическом изменении желательности ребер: каждый раз, когда муравей использует ребро, количество феромона, связанного с этим ребром, увеличивается и ребро становится более привлекательным. С другой стороны, глобальное обновление используется для интенсификации поиска в окрестностях наилучшего вычисленного решения. В ACS только лучшее решение применяется для глобального изменения феромонного следа. Эта стратегия обновления [28, 29] оказалась более эффективной, чем та, которая используется в муравьиной системе AS (ant system) [36, 37], где все построенные решения служат для обновления феромонных троп. Это объясняется тем, что таким образом в матрице феромонных троп запоминается “предпочтительный маршрут” и будущие муравьи воспользуются этой информацией для генерации новых решений в окрестностях предпочтительного маршрута.

Величина τ_{ij} обновляется следующим образом:

$$\tau_{ij} := (1 - \rho)\tau_{ij} + \frac{\rho}{J_\Psi^{gb}} \quad \text{для любого } (i, j) \in \Psi^{gb}, \quad (3.2)$$

где ρ ($0 \leq \rho \leq 1$) — параметр испарения феромона, а J_Ψ^{gb} — длина Ψ^{gb} кратчайшего пути, сгенерированного муравьями с начала вычислений. Эта процедура глобального обновления применяется в конце каждого цикла, т.е. каждый раз, когда конструктивная фаза завершена.

Локальное обновление выполняется следующим образом: когда муравей перемещается от узла i к узлу j , количество феромонного следа на дуге (i, j) увеличивается в соответствии со следующим правилом:

$$\tau_{ij} := (1 - \rho)\tau_{ij} + \rho\tau_0, \quad (3.3)$$

Таблица 1. Пример структуры файла данных

CUST NO	XCOORD	YCOORD	DEMAND	READY TIME	DUE DATE	SERVICE TIME
0	40	50	0	0	1236	0
1	45	68	10	912	967	90

где τ_0 — начальное значение. Было установлено, что $\tau_0 = 1/(nJ_\psi^h)$ является хорошим значением для этого параметра, где J_ψ^h — длина начального решения, полученного с помощью эвристики ближайшего соседа [38], а n — количество узлов.

MACS-VRPTW использует модель решения, в которой каждый муравей строит один тур на локальной копии графа. Муравей стартует из склада и на каждом шаге перемещается к еще не посещенному узлу, который не нарушает ограничений TW и возможностей ТС. Муравей, находящийся в узле i , вероятностно выбирает следующий узел j для посещения, применяя механизмы разведки и эксплуатации. Привлекательность j вычисляется с учетом времени в пути и τ_{ij} между узлами i и j , TW, связанного с узлом j .

Каждый раз, когда муравей переходит от одного узла к другому, осуществляется локальное обновление феромонного следа в соответствии с (3.3). Наконец, в конце конструктивной фазы решение может быть неполным (некоторые клиенты могли быть пропущены), и решение предварительно завершается с помощью дальнейших вставок. Вставка совершается при рассмотрении всех непосещенных клиентов, отсортированных по убыванию количества поставок. Для каждого клиента производится поиск наилучшей выполнимой вставки (наименьшее время в пути) до тех пор, пока не будет найдена ни одна другая вставка. Кроме того, в алгоритме реализована процедура локального поиска для улучшения качества выполнимых решений. Локальный поиск использует ходы, аналогичные обмену CROSS (CROSSover) [32]. Эта процедура основана на обмене двумя подцепочками клиентов. Одна из этих подцепочек в конечном итоге может оказаться пустой, реализуя более традиционное введение клиентов.

3.2. Описание реализуемых алгоритмов. Описанная методика решения HMTSPTW (VRPTW) опирается на построение нескольких муравьиных колоний. В [39], кроме муравьиных колоний, приводится ряд метаэвристик и их сравнительный анализ. Обобщенный алгоритм, согласно которому исходной сети ставится в соответствие сеть облета (проекция на плоскость), применяется с рядом эвристик и кластеризацией для решения задачи определения маршрутов многих коммивояжеров MTSP по реальным данным Ялты в случае чрезвычайных ситуаций. Методика [39] применима для VRPTW и HMTSPTW.

В рамках реализации описанного выше подхода были сформированы два алгоритма решения VRPTW. Первая версия — однокритериальная, здесь используется одна целевая функция по оптимизации TW. Создается единственная колония, в которой каждый муравей строит субоптимальный маршрут, основываясь на заданных временных ограничениях. Вторая версия — двухкритериальная, здесь применяются две целевые функции: на оптимизацию TW и на минимизацию количества ТС. В описанных алгоритмах используется структура файлов, принятая в наборах Solomon [11]. Допускаются .txt и .csv форматы файла со строгой структурой (табл. 1). Считается, что первая запись является базой.

Здесь

CUST NO — индекс клиента;

XCOORD, YCOORD — координаты клиента;

DEMAND — количество продукта, которое необходимо клиенту;

READY TIME — момент времени, начиная с которого клиент готов принять ТС;

DUE DATE — момент времени, до которого клиент готов принять ТС;

SERVICE TIME — время, необходимое ТС на обслуживание клиента.

Таким образом, READY TIME и DUE DATE формирует TW для каждого клиента. Время считается в условных единицах, начиная со старта ТС с базы.

Под внутренним графом будем понимать сформированную на основе данных программную абстракцию, которая необходима для решения задачи.

Алгоритм 3. Формирование внутреннего графа.

Вход: путь к файлу с данными для построения графа.

Выход: внутренний граф.

Шаг 1. Считать файл.

Шаг 2. Найти строку с ключевыми словами (CUST NO, XCOORD, YCOORD и т.д.).

Шаг 3. Присвоить каждому ключевому слову индекс, соответствующий его позиции в списке.

Шаг 4. Считать следующую строку, разбить ее по отступам и, в соответствии с индексом шага 3, записать данные в матрицу.

Шаг 5. Если не конец файла, перейти к шагу 4.

Алгоритм 4. Однокритериальный VRPTW.

Вход: Внутренний граф, пользовательские параметры (k – количество муравьев, β – коэффициент влияния феромона, M – максимальное количество итераций, q_0 – коэффициент вероятности случайного выбора вершины, ρ – коэффициент улетучивания феромонов).

Выход: маршрут обхода графа.

Шаг 1. Произвести инициализацию с пользовательскими параметрами.

Шаг 2. Инициализируем счетчик итераций $iteration := 0$ и лучший маршрут $best_path := infinity$.

Шаг 3. Если $iteration \geq M$, то переходим к шагу 10.

Шаг 4. Инициализируем список ant_list из k муравьев.

Шаг 5. Берем следующего муравья из ant_list .

Шаг 5.1. Пока список доступных вершин для посещения не пустой.

Шаг 5.1.1. Выбрать следующую вершину с наибольшей вероятностью перехода на основе уравнения (3.1).

Шаг 5.1.2. С вероятностью q_0 перейти в случайную вершину, если вероятность не сработала, то перейти в вершину, найденную на шаге 5.1.1.

Шаг 5.1.3. Проверить, подходит ли выбранная вершина под ограничения (проверка на загрузку, проверка на время возврата в депо, проверка на время окончания приема узла после пути до этого узла).

Шаг 5.1.4. Если вершина подходит, то обновляем данные о маршруте муравья (добавляем расстояние, увеличиваем загрузку и время на количество времени, потраченное на путь и на количество времени, затраченное на обслуживание клиента). Также обновляем феромон на пройденной дуге согласно формуле (3.2).

Шаг 5.1.5. Если вершина не подходит, то возвращаемся к шагу 5.1.1. Если таких попыток было больше трех, то возвращаем муравья в депо, обновляем данные о маршруте и феромона на пройденной дуге и переходим к шагу 5.1.

Шаг 6. Посчитать общую длину маршрута каждого из k муравьев.

Шаг 7. Если полученный маршрут короче, чем $best_path$, то записываем его в $best_path$.

Шаг 8. Увеличиваем $iteration$ на 1.

Шаг 9. Переходим к шагу 3.

Шаг 10. Вернуть $best_path$.

Алгоритм 5. Двухкритериальный VRPTW.

Вход: Внутренний граф, пользовательские параметры (k – количество муравьев, β – коэффициент влияния феромона, M – максимальное количество итераций, q_0 – коэффициент вероятности случайного выбора вершины, ρ – коэффициент улетучивания феромонов).

Выход: маршрут обхода графа.

Шаг 1. Произвести инициализацию с пользовательскими параметрами.

Шаг 2. Инициализируем счетчик итераций $iteration := 0$ и лучший маршрут $best_path := infinity$.

Шаг 3. Инициализируем $best_path$ и $best_path_vehicle_num$ при помощи метода ближайшего соседа.

Шаг 4. Инициализируем поток acs_time_thread для колонии, производящей поиск оптимального маршрута, и поток $acs_vehicle_thread$ для колонии, производящей поиск решения с меньшим количеством ТС.

Шаг 5. Если $iteration \geq M$, то переходим к шагу 14.

Шаг 6. Передать $best_path$ потокам acs_time_thread и $acs_vehicle_thread$.

Шаг 7. Запустить поток acs_time_thread .

Шаг 8. Запустить поток $acs_vehicle_thread$ с $best_path_vehicle_num-1$.

Шаг 9. Дождаться, пока потоки сообщат о новом решении new_path .

Шаг 10. Сравнить найденное решение с $best_path$. Если new_path лучше, то обновить $best_path$.

Шаг 11. Сравнить количество ТС в найденном решении с $best_path_vehicle_num$. Если $new_path_vehicle_num$ лучше, то обновить $best_path$.

Шаг 12. Дождаться момента, когда потоки закончат работу.

Шаг 13. Увеличиваем $iteration$ на 1.

Шаг 14. Вернуть $best_path$.

Алгоритм 6. Двухкритериальный алгоритм ACS минимизации ТС ($acs_vehicle_thread$).

Вход: внутренний граф (G), пользовательские параметры ($vehicle_num$ – количество ТС, k – количество муравьев).

Выход: маршрут обхода графа.

Шаг 1. Инициализация.

Шаг 1.1. Инициализируем $current_path$ при помощи метода ближайшего соседа с максимальным количеством ТС = $vehicle_num$.

Шаг 1.2. Инициализируем $unused_vehicle_count := vehicle_num$ – количество свободных ТС в депо.

Шаг 2. Отыщем непосещенные вершины NTV (need to visit) из G в $current_path$; $NTV = G \setminus current_path$.

Шаг 3. Создаем k муравьев.

Шаг 4. Инициализируем список ant_list из k муравьев.

Шаг 4.1. Пока список доступных вершин для посещения не пустой и есть свободные ТС ($unused_vehicle_count > 0$).

Шаг 4.1.1. Найти список таких вершин, переход в которые допустим (выполняются ограничения по времени и загрузке).

Шаг 4.1.2. Если список вершин шага 4.1.1 пуст, то $unused_vehicle_count := unused_vehicle_count - 1$ и возвращаем муравья в депо, обновляем данные о маршруте и феромоне на пройденной дуге и переходим к шагу 4.1.

Шаг 4.1.3. Выбрать из этого списка следующую вершину с наибольшей вероятностью перехода на основе уравнения (3.1).

Шаг 4.1.4. С вероятностью q_0 перейти в случайную вершину. Если вероятность не сработала, то перейти в вершину, найденную на шаге 4.1.3.

Шаг 4.1.5. Обновить данные о маршруте муравья (добавляем расстояние, увеличиваем загрузку и время на количество времени, потраченное на путь и на количество времени, затраченное на обслуживание клиента). Также обновляем феромон на пройденной дуге согласно (3.2).

Шаг 4.2. Пробуем вставить непосещенные вершины в полученный маршрут (не должны нарушаться ограничения по нагрузке и времени).

Шаг 4.3. Если количество непосещенных вершин с шага 4.2 меньше, чем было NTV , то запишем это решение в $current_path$.

Шаг 4.4. Если $current_path$ содержит все вершины G , то уведомить главный поток о найденном решении с меньшим количеством ТС.

Шаг 5. Если не удалось отыскать $current_path$, содержащий все вершины G , то прервать поток.

Алгоритм 7. Двухкритериальный алгоритм ACS минимизации времени (acs_time_thread).

Вход: внутренний граф (G), пользовательские параметры ($vehicle_num$ – количество ТС, k – количество муравьев, $global_best_path$ – глобальное лучшее решение, M – максимальное количество итераций).

Выход: маршрут обхода графа.

Шаг 1. Инициализируем счетчик итераций $iteration = 0$.

Таблица 2. Результаты тестирования алгоритмов

Набор данных	TSP Concorde		Двухкритериальная версия		Лучшее решение	
	Количество ТС	Длина маршрута	Количество ТС	Длина маршрута	Количество ТС	Длина маршрута
R112	14	996	14	1205	9	982
C105	14	829	14	1004	10	828
RC204	11	1110	11	1250	3	798
R111	15	996	15	1297	10	1097
C205	12	1008	12	1170	3	588
RC208	11	1110	11	1180	3	828
C1_2_1	34	1728	34	4786	20	2704
C1_4_1	77	4389	77	13980	40	7152

Шаг 2. Если $iteration \geq M$, то переходим к шагу 8.

Шаг 3. Инициализируем список *ant_list* из k муравьев.

Шаг 3.1. Пока список доступных вершин для посещения не пустой.

Шаг 3.1.1. Найти список таких вершин, переход в которые допустим (выполняются ограничения по времени и загрузке).

Шаг 3.1.2. Если список вершин шага 3.1.1 пуст, то возвращаем муравья в депо, обновляем данные о маршруте и феромоне на пройденной дуге и переходим к шагу 3.1.

Шаг 3.1.3. Выбрать из этого списка следующую вершину с наибольшей вероятностью перехода на основе (3.1).

Шаг 3.1.4. С вероятностью q_0 перейти в случайную вершину. Если вероятность не сработала, то перейти в вершину, найденную на шаге 3.1.3.

Шаг 3.1.5. Обновить данные о маршруте муравья (добавляем расстояние, увеличиваем загрузку и время на количество времени, потраченное на путь и на количество времени, затраченное на обслуживание клиента). Также обновляем феромон на пройденной дуге, согласно (3.2).

Шаг 4. Посчитать общую длину маршрута каждого из k муравьев.

Шаг 5. Если полученный маршрут короче, чем *global_best_path*, то уведомить главный поток о найденном решении с меньшим временем.

Шаг 6. Увеличиваем *iteration* на 1.

Шаг 7. Перейти в шаг 2.

Шаг 8. Прервать поток.

3.3. Ч и с л е н н ы й э к с п е р и м е н т. Рассмотренные алгоритмы были программно реализованы с помощью языка программирования Python. В качестве тестовых данных использовались наборы Solomon [11] для 100, 200, 400 вершин. Двухкритериальная версия реализует две колонии муравьев, задача одной колонии отыскать кратчайший путь, а второй — минимизировать количество ТС, используемых в текущем решении. Предварительно граф кластеризуется методом иерархической кластеризации из библиотеки *scipy* [40] на основе максимального среднего расстояния ребер в графе. Затем вызывается для каждого из полученных кластеров. Также в табл. 1 приводится сравнительный анализ с классическим решением TSP на тех же кластерах, которые были получены в VRPTW. Решение TSP не учитывает TW, а только расстояния между узлами, что позволяет увидеть более оптимальный способ обхода, чем с TW, и сравнить с ситуацией, когда на тот же граф накладываются ограничения в виде TW.

Стоит отметить, что в данном эксперименте производится сравнение с классической TSP, так как считается, что решение TSP наиболее близкое к оптимальному, а TW лишь накладывают дополнительные ограничения и ухудшают исходный результат. Таким образом, можно проследить, насколько хорошо работает алгоритм на кластерах с TW относительно решений TSP на тех же кластерах.

В качестве решателя TSP используется Concorde [41]. Это связано с тем, что он показал себя действенным и эффективным комплексом для решения TSP на большом количестве тестовых примеров. Для внедрения в разработанный программный продукт использовалась обертка Ру-

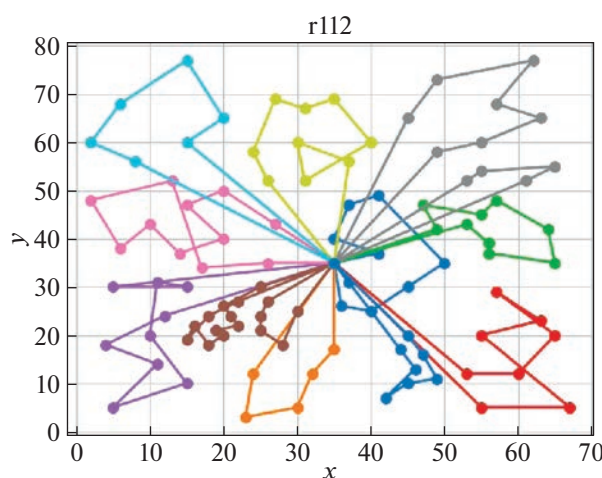


Рис. 3. Результат для R112, двухкритериальная версия

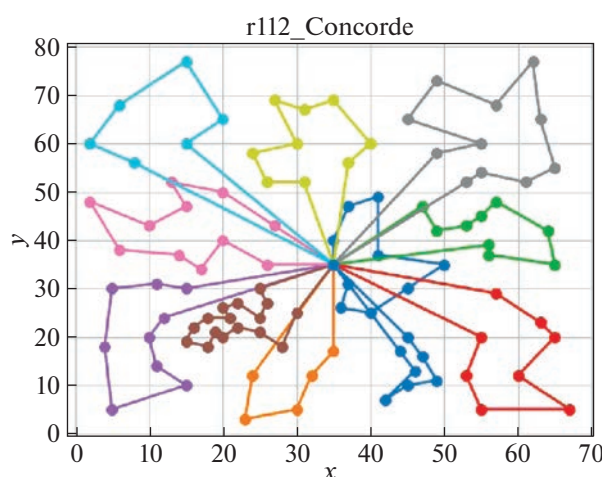


Рис. 4. Результат для R112, TSP Concorde

Concorde [42]. Этот адаптер позволяет вызывать методы Concorde Solver, написанного на C, из среды Python. Полученные результаты приведены в табл. 2. Лучшее известное решение взято из [11]. На рис. 3–18 представлены результаты эксперимента.

Видно, что для некоторых из тестовых примеров получены результаты, которые далеки от лучших известных на данный момент. Это отчасти ожидаемо, так как здесь делается акцент на скорости получения решения, т. е. запуск производится на относительно малых значениях пользовательских переменных, отвечающих за количество итераций. С другой стороны, при помощи TSP Concorde находятся маршруты без учета TW и двухкритериальности.

Заключение. Для модели построения многоагентных маршрутов в сети потребителей, региональных баз и центральной базы приводятся алгоритмы, обеспечивающие временные ограничения и оптимальность поставок в такой иерархической сети. На уровне региональных центров приводится более общий алгоритм, направленный как на минимизацию количества агентов (ТС), так и на оптимальность маршрутов на кластерах с учетом TW.

Для решения многоагентной иерархической задачи HMTSPTW реализуется предложенный алгоритм MACS-VRPTW на основе оптимизации муравьиной колонии для решения задач маршрутизации ТС с TW. В частности, алгоритм разработан для решения задач маршрутизации ТС с двумя целевыми функциями: минимизация количества агентов (или ТС) и минимизация общего

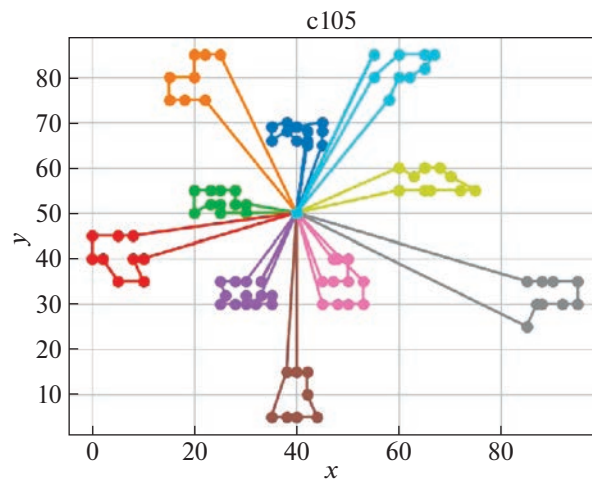


Рис. 5. Результат для C105, двухкритериальная версия

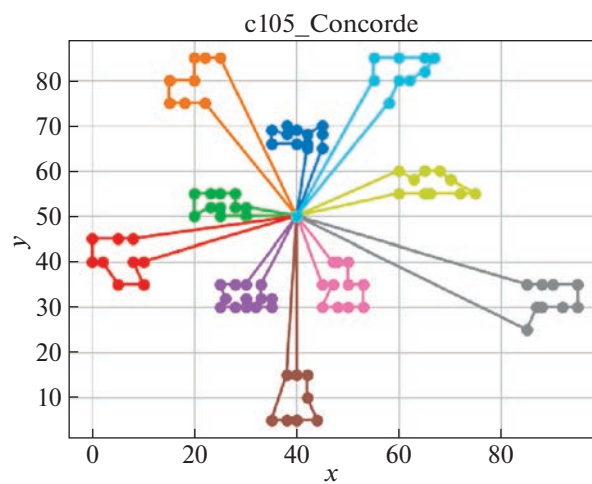


Рис. 6. Результат для C105, TSP Concorde

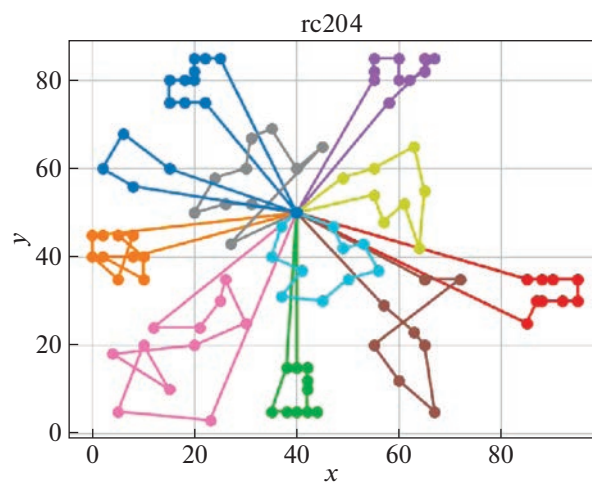


Рис. 7. Результат для RC204, двухкритериальная версия

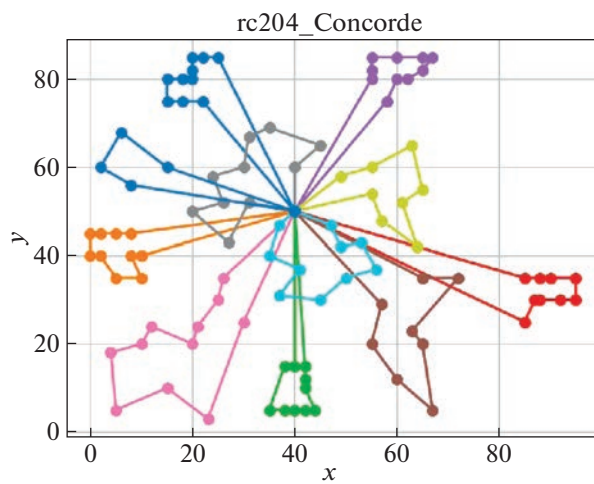


Рис. 8. Результат для RC204, TSP Concorde

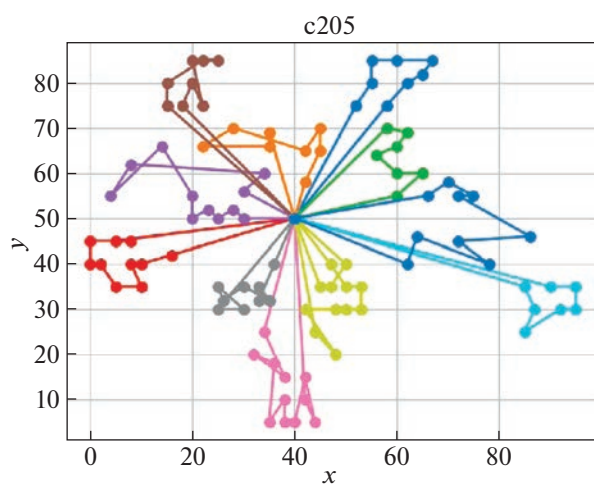


Рис. 9. Результат для C205, двухкритериальная версия

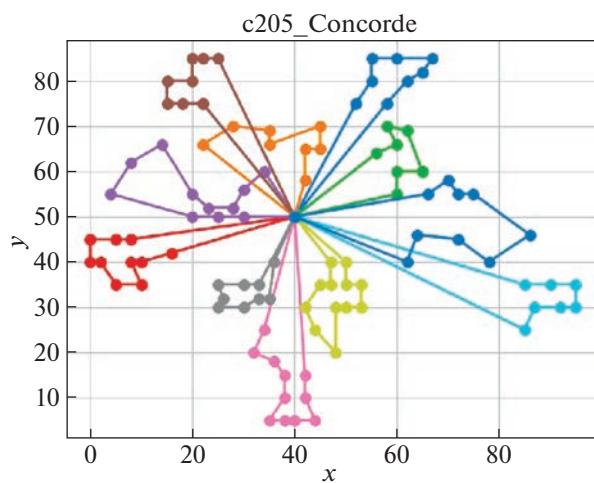


Рис. 10. Результат для C205, TSP Concorde

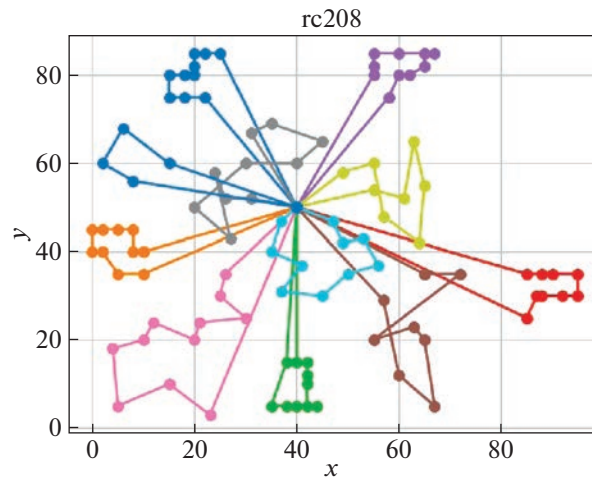


Рис. 11. Результат для RC208, двухкритериальная версия

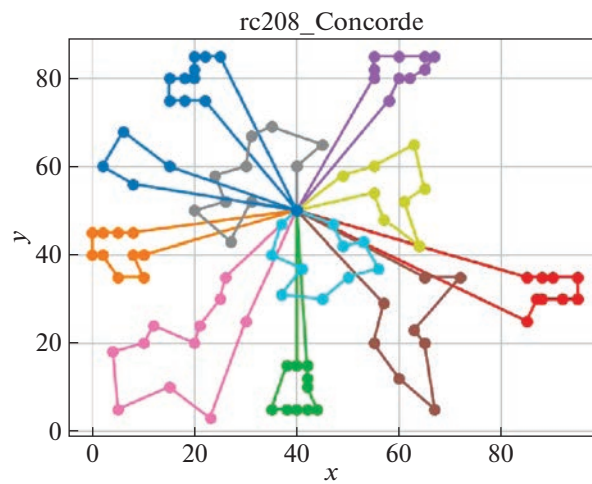


Рис. 12. Результат для RC208, TSP Concorde

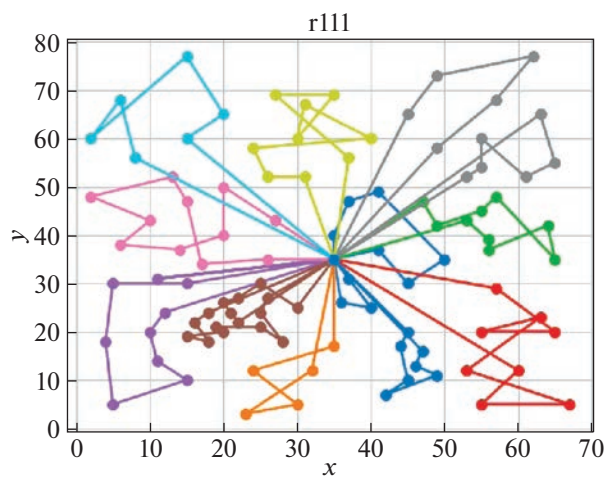


Рис. 13. Результат для R111, двухкритериальная версия

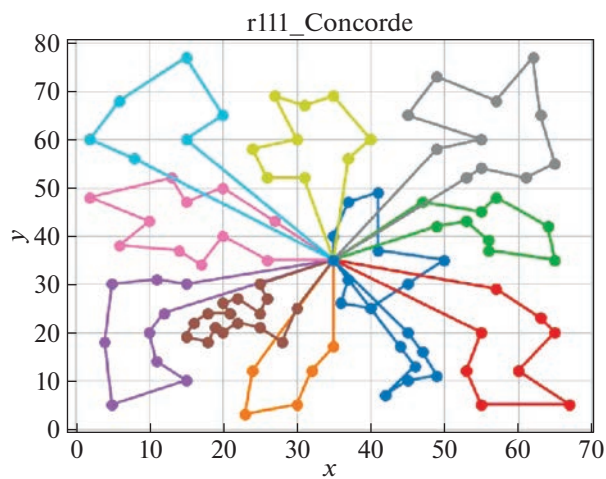


Рис. 14. Результат для R111, TSP Concorde

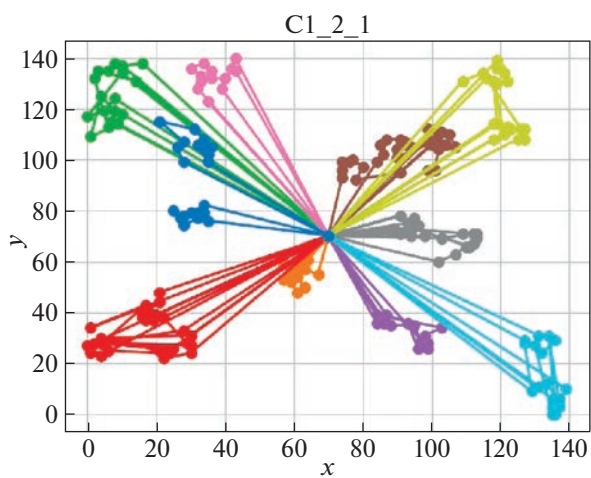


Рис 15. Результат для C1_2_1, двухкритериальная версия

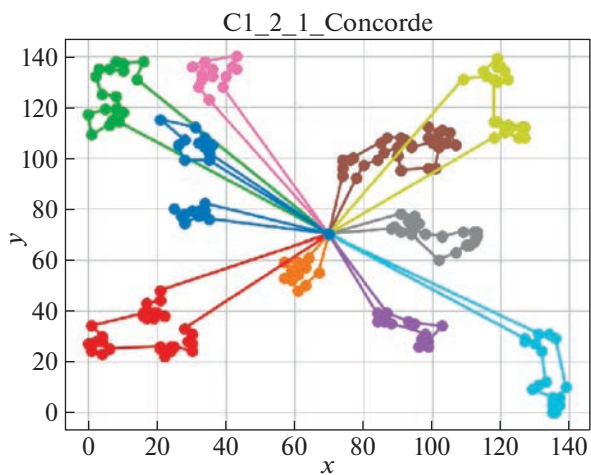


Рис. 16. Результат для C1_2_1, TSP Concorde

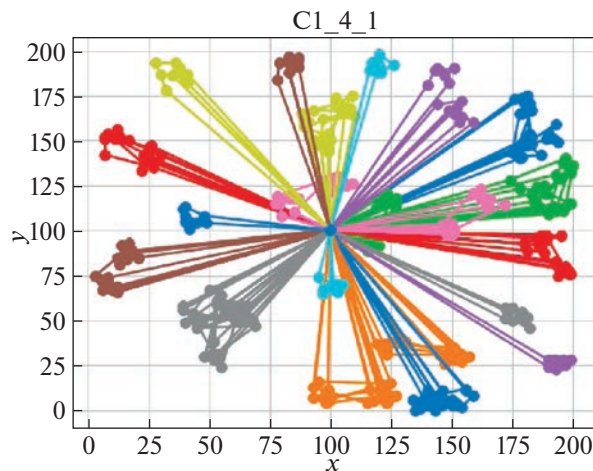


Рис. 17. Результат для C1_4_1, двухкритериальная версия

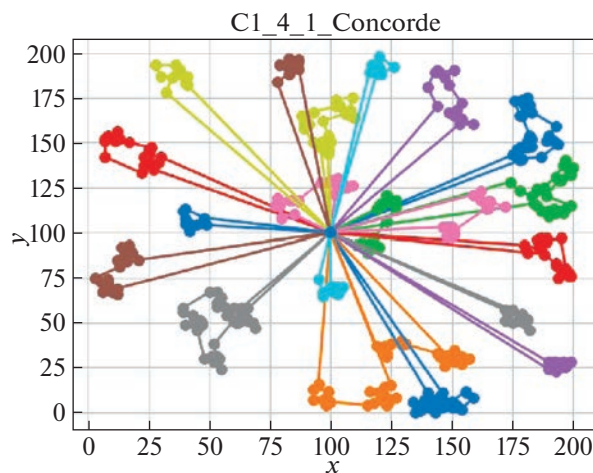


Рис. 18. Результат для C1_4_1, TSP Concorde

времени в пути, где минимизация количества агентов имеет приоритет над минимизацией времени в пути.

На основе проведенных вычислительных экспериментов можно отметить ряд преимуществ и недостатков реализованного подхода. Данный метод хорошо показывает себя на графах, которые поддаются примененной кластеризации. В случае, когда в кластер попадают узлы с “неудобными” TW, метод показывает не такие хорошие результаты. Таким образом, подход нуждается в доработке методов кластеризации, которые смогут одновременно учитывать расстояния и TW узлов.

Благодаря сравнительному анализу можно увидеть, насколько TW влияют на решение. Так, Concorde Solver позволил увидеть близкие к оптимальным маршруты с точки зрения расстояний между вершинами графа. А решение с учетом TW в некоторых случаях сильно отдалается от решения TSP. В идеальном случае решение с TW должно приближаться к решению TSP. Таким образом можно моделировать синтез составления оптимальных TW для вершин графа с целью минимизации затрат на перемещение и количество агентов.

Алгоритм на основе кооперации муравьиных колоний MACS-VRPTW представляет методологию для оптимизации нескольких целевых функций. Главная идея заключается в координации деятельности различных муравьиных колоний, каждая из которых оптимизирует свою цель. Эти колонии работают, используя независимые феромонные тропы, но сотрудничают, обмениваясь информацией. Решение многоцелевой задачи с помощью алгоритма оптимизации с не-

сколькими муравьиными колониями является перспективным. Численный расчет показывает, что применение системы муравьиных колоний конкурирует с лучшими из существующих алгоритмов как по качеству решения, так и по времени вычислений. Тестирование проводилось на наборах Solomon. Выбранные параметры (число итераций и др.) могут быть оптимизированы. Данные результаты подтверждают работоспособность предложенных алгоритмов. Более полные результаты численных экспериментов размещены авторами по ссылке https://github.com/sss-telsss/TSP_test_solutions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liu F., Lu Ch., Gui L., Zhang Q., Tong X., Yuan M.* Heuristics for Vehicle Routing Problem: a Survey and Recent Advance. 2023. arXiv:2303.04147v1 [cs.AI]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.04147>.
2. *Tan S.-Y., Yen W.-C.* The Vehicle Routing Problem: State-of-the-Art Classification and Review // *Applied Sciences*. 2021. V. 11 (21). P. 10295. <https://doi.org/10.3390/app112110295>
3. *Li H., Wang H., Chen J., Bai M.* Two-Echelon Vehicle Routing Problem with Satellite Bi-Synchronization // *European J. Operational Research*. 2020. V. 288 (3). <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.06.019>
4. *Baldacci R., Mingozzi A., Roberti R., Clavo R.* An Exact Algorithm for the Two-Echelon Capacitated Vehicle Routing Problem // *Operation Research*. 2013. V. 61 (2). P. 298–314. <https://doi.org/10.1287/opre.1120.1153>
5. *Xiaobing G., Wang Y., Li Sh., Niu B.* Vehicle Routing Problem with Time Windows and Simultaneous Delivery and Pick-Up Service Based on MCP SO // *Mathematical Problems in Engineering*. 2012. V. 2. <https://doi.org/10.1155/2012/104279>
6. *Fisher M.L.* Optimal Solution of Vehicle Routing Problems Using Minimum K-trees // *Operations Research*. 1994. V. 42 (2). P. 626–642.
7. *Kallehauge B., Larsen J., Madsen O., Solomon M.* Vehicle Routing Problem with Time Windows // *Column Generation*. Springer US, 2006. https://doi.org/10.1007/0-387-25486-2_3
8. *Macedo R., Alves C., Carvalho J., Clautiaux F., Hanafi S.* Solving the Vehicle Routing Problem with Time Windows and Multiple Routes Exactly Using a Pseudo-polynomial Model // *European J. Operational Research*. 2011. V. 214 (3). P. 536–545. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.04.037>
9. *Zhang W., Yang D., Zhang G., Gen M.* Hybrid Multiobjective Evolutionary Algorithm with Fast Sampling Strategy-Based Global Search and Route Sequence Difference-Based Local Search for VRPTW // *Expert Systems with Applications*. 2020. V. 145. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2019.113151>
10. *Mahmoud M., Hedar A.-R.* Three Strategies Tabu Search for Vehicle Routing Problem with Time Windows // *Computer Science and Information Technology*. 2014. V. 2 (2). P. 108–119. <https://doi.org/10.13189/csit.2014.020208>
11. Solomon benchmark. URL: <https://www.sintef.no/projectweb/top/vrptw/solomon-benchmark/>.
12. *Zhou Z., Ma X., Liang Z., Zhu Z.* Multi-objective Multi-factorial Memetic Algorithm Based on Bone Route and Large Neighborhood Local Search for VRPTW // *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*. Glasgow, United Kingdom, 2020. <https://doi.org/10.1109/CEC48606.2020.9185528>.
13. *Shu H., Zhou H., He Z., Hu X.* Two-Stage Multi-objective Evolutionary Algorithm Based on Classified Population for Tri-objective VRPTW // *International J. Unconventional Computing*. 2021. V. 16 (2–3). P. 141–171.
14. *Xu W., Wang X., Guo Q.* Gathering Strength, Gathering Storms: Knowledge Transfer via Selection for VRPTW // *Mathematics*. 2022. V. 10 (16). <https://doi.org/10.3390/math10162888>
15. *Fan H., Ren X., Zhang Y.* A Chaotic Genetic Algorithm with Variable Neighborhood Search for Solving Time-Dependent Green VRPTW with Fuzzy Demand // *Symmetry*. 2022. V. 14 (10). <https://doi.org/10.3390/sym14102115>
16. *Nasri M., Hafidi I., Metrane A.* Multithreading Parallel Robust Approach for the VRPTW with Uncertain Service and Travel Times // *Symmetry*. 2020. V. 13 (1). <https://doi.org/10.3390/sym13010036>
17. *Kummer A.F., Buriol L.S., de Araújo O.C.B.* A Biased Random Key Genetic Algorithm Applied to the VRPTW with Skill Requirements and Synchronization Constraints // *GECCO'20: Genetic and Evolutionary Computa-*

- tion Conf. Cancun, Mexico, 2020.
<https://doi.org/10.1145/3377930.3390209>
18. *Jungwirth A., Frey M., Kolisch R.* The Vehicle Routing Problem with Time Windows, Flexible Service Locations and Time-Dependent Location Capacity, 2020. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/The-vehicle-routing-problem-with-time-windows%2C-and-Jungwirth-Frey/22db87-ca3cba4ea33561667c190f0443a93925bf>.
 19. *Poullet J.* Leveraging Machine Learning to Solve the Vehicle Routing Problem with Time Windows, 2020. URL: <https://hdl.handle.net/1721.1/127285>.
 20. *Figliozzi M.A.* An Iterative Construction and Improvement Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Soft Time Windows // *Transp. Res. P. C. Emerg. Technol.* 2010. V. 18 (5).
<https://doi.org/10.1016/j.trc.2009.08.005>
 21. *Melnikov A.N., Lyubimov I.I., Manayev K.I.* Improvement of the Vehicles Fleet Structure of a Specialized Motor Transport Enterprise // *Proc. Eng.* 2016. V. 150. P. 1200–1208.
<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.236>
 22. *Германчук М.С., Козлова М.Г., Лукьяненко В.А.* Модели обобщенных задач коммивояжера в интеллектуализации поддержки принятия решений для геоинформационных систем // *Географические и гео-экологические исследования на Украине и сопредельных территориях: сб. научных статей / Под общ. ред. Б.А. Вахрушева. Симферополь: ДИАЙПИ, 2013. Т. 1. С. 413–415.*
 23. *Rakhmangulov A., Kolga A., Osintsev N.* Mathematical Model of Optimal Empty Rail Car Distribution at Railway Transport Nodes // *Transp. Probl.* 2014. V. 9 (3). P. 19–32.
 24. *Uthayakumar R., Prlyan S.* Pharmaceutical Supply Chain and Inventory Management Strategies: Optimization for a Pharmaceutical Company and a Hospital // *Oper. Res. Heal Care.* 2013. V. 2 (3). P. 52–64.
<https://doi.org/10.1016/j.orhc.2013.08.001>
 25. *Azzi A., Sgarbossa F., Bonin M.* Drug Inventory Management And Distribution: Outsourcing Logistics to Third-Party Providers // *Strateg Outsourcing Int. J.* 2013. V. 6 (1). P. 48–64.
<https://doi.org/10.1108/17538291311316063>
 26. *French Ch., Smykay E.W., Bowersox D.J., Mossman F.H.* Physical Distribution Management // *Amer. J. Agric. Econ.* 1961. V. 43 (3). P. 728–30.
 27. *Dorigo M., Gambardella L.M.* Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem // *IEEE Transactions on Neural Networks.* 1997. V. 1 (1). P. 53–66.
<https://doi.org/10.1109/4235.585892>
 28. *Dorigo M., Gambardella L.M.* Ant Colonies for the Traveling Salesman Problem // *BioSystems.* 1997. V. 43. P. 73–81.
[https://doi.org/10.1016/S0303-2647\(97\)01708-5](https://doi.org/10.1016/S0303-2647(97)01708-5)
 29. *Stützle T.* Local Search Algorithms for Combinatorial Problems – Analysis, Improvements, and New Applications // *Dissertation. Germany, 1998.* URL:
<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.71.1869&rep=rep1&type=pdf>
 30. *Kohl N., Desrosiers J., Madsen O.B.G., Solomon M.M., Soumis F.* 2-Path Cuts for the Vehicle Routing Problem with Time Windows // *Transportation Science.* 1999. V. 33. P. 101–116.
<https://doi.org/10.1287/trsc.33.1.101>
 31. *Taillard É.D.* FANT: Fast Ant System // *Technical Report. Istituto Dalle Molle Di Studi Sull Intelligenza Artificiale. Lugano, 1998.*
 32. *Badeau P., Gendreau M., Guertin F., Potvin J.-Y., Taillard É.D.* A Parallel Tabu Search Heuristic for the Vehicle Routing Problem with Time Windows // *Transp. Res. P. C. Emerg. Technol.* 1997. V. 5 (2). P. 109–122.
[https://doi.org/10.1016/S0968-090X\(97\)00005-3](https://doi.org/10.1016/S0968-090X(97)00005-3)
 33. *Taillard É.D., Badeau P., Gendreau M., Guertin F., Potvin J.-Y.* A Tabu Search Heuristic for the Vehicle Routing Problem with Soft Time Windows // *Transportation Science.* 1997. V. 31. P. 170–186.
 34. *Kilby P., Prosser P., Shaw P.* Guided Local Search for the Vehicle Routing Problem with Time Windows // *Meta-Heuristics.* Springer, Boston, MA, 1999.
https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5775-3_32
 35. *Shaw P.* Using Constraint Programming and Local Search Methods to Solve Vehicle Routing Problems // *Fourth Intern. Conf. on Principles and Practice of Constraint Programming, Springer-Verlag, 1998. P. 417–431.*

36. *Dorigo M., Maniezzo V., Colorni A.* Positive Feedback as a Search Strategy // Technical Report 91-016, Dipartimento di Elettronica, Politecnico di Milano, Italy, 1991. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.52.6342&rep=rep1&type=pdf>.
37. *Dorigo M., Maniezzo V., Colorni A.* The Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. 1996. V. 26 (1). P. 29–41. <https://doi.org/10.1109/3477.484436>
38. *Flood M.M.* The Traveling Salesman Problem // Operations Research. 1956. V. 4. P. 61–75.
39. *Germanchuk M.S., Lukianenko V.A., Lemtyuzhnikova D.V.* Metaheuristic Algorithms for Multiagent Routing Problems // Automation and Remote Control. 2021. V. 82 (10). P. 1787–1801. . <https://doi.org/10.1134/S0005117921100155>
40. Scipy. URL: <https://scipy.org/>.
41. Concorde TSP Solver. URL: <https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde.html>.
42. PyConcorde. URL: <https://github.com/jvkersch/pyconcorde>.

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

УДК 658.012.011.56

РОБАСТНОЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АВТОНОМНЫМ РОБОТОМ: КВАНТОВАЯ САМООРГАНИЗАЦИЯ НЕТОЧНЫХ БАЗ ЗНАНИЙ – ЭКСПЕРИМЕНТ

© 2023 г. А. Г. Решетников^{a,b,*}, В. С. Ульянов^{c,**}, С. В. Ульянов^{b,***}

^aГБОУ ВО МО “Университет “Дубна”, Институт системного анализа и управления, г. Дубна, Россия

^bОбъединенный институт ядерных исследований (ОИЯИ), г. Дубна, Россия

^cМосковский государственный ун-т геодезии и картографии (МИИГАиК), Москва, Россия

*e-mail: agreshetnikov@gmail.com

**e-mail: ulyanovik@mail.ru

***e-mail: ulyanovsv46_46@mail.ru

Поступила в редакцию 26.03.2023 г.

После доработки 28.04.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

Рассматривается информационная технология проектирования робастной интеллектуальной системы управления на базе квантового нечеткого вывода. Применение разработанной методологии проектирования основано на квантовой самоорганизации неточных баз знаний нечетких регуляторов и приводит к повышению уровня робастности интеллектуальных систем управления в непредвиденных ситуациях. Проводится сравнение результатов математического моделирования и физического эксперимента на примере автономного робота в виде системы “перевернутый маятник—движущаяся каретка”. Получено экспериментальное подтверждение существования синергетического эффекта формирования робастного самоорганизующегося нечеткого регулятора из конечного числа неробастных нечетких регуляторов в реальном времени. Полученный эффект основан на существовании скрытой квантовой информации, извлекаемой из классических состояний процессов изменения во времени коэффициентов усиления регуляторов. Выведенный закон квантовой информационной термодинамики устанавливает возможность формирования термодинамической силы управления за счет извлеченного количества скрытой квантовой информации и совершения дополнительной полезной работы, гарантирующих достижение цели управления на базе повышения уровня робастности самоорганизующегося квантового регулятора. При этом количество совершенной объектом управления полезной работы (на макроуровне) превышает количество работы, затраченной (на микроуровне) квантовым самоорганизующимся регулятором на извлечение квантовой информации, скрытой в реакциях неточных баз знаний без нарушения второго информационного закона термодинамики открытых квантовых систем с обменом информацией запутанных суперкоррелированных состояний. Приведен конкретный пример автономного робота, демонстрирующий существование синергетического эффекта квантовой самоорганизации неточных баз знаний.

DOI: 10.31857/S000233882305013X, EDN: OCLNQB

Введение. Методология проектирования интеллектуальных систем управления (ИСУ), основанная на технологии мягких вычислений, рассматривает в качестве базиса структуру нечеткого регулятора (НР) как один из вариантов эффективного проектирования традиционных систем автоматического управления (САУ) [1, 2]. С самого момента своего появления (1974 г.) модели НР демонстрируют повышенную способность управления динамическими объектами управления (ОУ), которые обладают слабо формализованной структурой или функционируют в условиях неопределенности или неточности исходной информации, непредвиденных ситуациях или информационного риска.

В работе рассматриваются вопросы проектирования ИСУ на примере динамически неустойчивого ОУ типа “Каретка движения—перевернутый маятник”, с использованием оптимизаторов баз знаний (ОБЗ) на мягких и квантовых вычислениях — SCOptKB™ & QCOptKB™ соответственно [2–4]. Приводится описание технологии проектирования робастной ИСУ на основе

квантового нечеткого вывода (КНВ). Управление объектом типа “Каретка—перевернутый маятник” является одной из типовых задач в теории управления, так как решение этой задачи наглядно демонстрирует качество САУ. Более подробное описание ОУ и верификация его математической модели рассмотрены в [5].

Главный результат работы — экспериментальное доказательство существования синергетического информационного эффекта квантовой самоорганизации неточных баз знаний НР за счет извлечения скрытой квантовой информации, предсказанного и доказанного моделированием в [6–9].

Промышленное применение. Первый экспериментальный результат получен на реальном физическом объекте в [10] для ИСУ охлаждением сверхпроводящего магнита ускорительного комплекса мега сайнс проекта разработки коллайдера NICA [11].

В частности, была разработана программно-аппаратная платформа управления давлением и расходом жидкого азота сверхпроводящих магнитов криогенной системы на основе встраиваемых в контур управления квантовых НР с реализацией на процессоре классической архитектуры. Многоуровневая система управления включает существующий нижний исполнительный уровень, основанный на системе Tango Controls, и новый уровень, на котором управляющие воздействия формируются с помощью квантового НР. При этом обеспечиваются оптимальные параметры качества управления, такие, как температура, расход азота, быстродействие, требуемый уровень давления и минимальная сложность реализации управления коэффициентами усиления пропорционально интегрально-дифференциальным (ПИД) регуляторам.

Экспериментально продемонстрирована работоспособность и эффективность созданной интеллектуальной системы дистанционного управления технологическим процессом охлаждения сверхпроводящего магнита с гарантированным достижением устойчивой зоны сверхпроводимости [10]. Проектирование квантовых НР основано на квантовых информационных технологиях и осуществляется с помощью разработанного сотрудниками ЛИТ им. М.Г. Мещерякова программного инструментария QSCIT (quantum soft computational intelligence toolkit) [11]. Рассматривается возможность удаленной настройки базы знаний (БЗ) реального ОУ с использованием дистанционного соединения реального ОУ с ОБЗ на квантовых вычислениях. Расширен класс непредвиденных ситуаций для проверки робастности разработанной ИСУ и доказательства достижения глобальной робастности по сравнению с ОБЗ на мягких вычислениях.

Актуальность рассматриваемой проблемы. Создание корректного алгоритма проектирования требуемого уровня робастности ИСУ является одной из актуальных задач современной теории и систем управления. Одновременно данная проблема относится к сложной и слабо исследованной области разработки ИСУ, способных эффективно и надежно функционировать в условиях риска и непредвиденных ситуаций управления. Применение технологии интеллектуальных вычислений в задачах проектирования робастного управления показало на практике повышение надежности функционирования ОУ в непредвиденных ситуациях управления за счет повышения интеллектуальности нижнего исполнительского уровня в виде традиционных структур САУ на основе традиционных ПИД-регуляторов, регуляторов со скользящим режимом, ПИД² (2-степенной ПИД), регуляторов дробного порядка и мн. др. [12, 13].

Методология исследования. Эффективность разработанной технологии проектирования ИСУ рассматривается на примере вопросов проектирования ИСУ, традиционного для теории систем управления неустойчивого ОУ типа “каретка—перевернутый маятник”, с использованием ОБЗ на квантовых вычислениях.

Исследованы возможности робастного управления динамически неустойчивыми нелинейными объектами управления с реализацией на встраиваемых процессорах классической архитектуры. Описана стратегия проектирования интеллектуальных систем управления на основе технологий квантовых и мягких вычислений. В этом подходе математический формализм квантовой механики используется для построения новых алгоритмов квантового управления, успешно моделируемых на компьютерах классической архитектуры. Алгоритмы применяют схему КНВ — из БЗ (включающих параметры функций принадлежности и множества нечетких правил), принадлежащих отдельным НР, извлекается скрытая квантовая информация, на основе которой создается новая робастная БЗ. Этот процесс демонстрирует синергетический эффект квантовой самоорганизации — из двух ненадежных БЗ НР создается (в режиме реального времени) робастная БЗ квантового нечеткого регулятора. Этот эффект имеет чисто квантовую природу и использует скрытую квантовую информацию, извлеченную из классических состояний. Разработанная технология повышает надежность интеллектуальных когнитивных систем, функционирующих в непредвиденных ситуациях управления, например при взаимодействии ансамбля

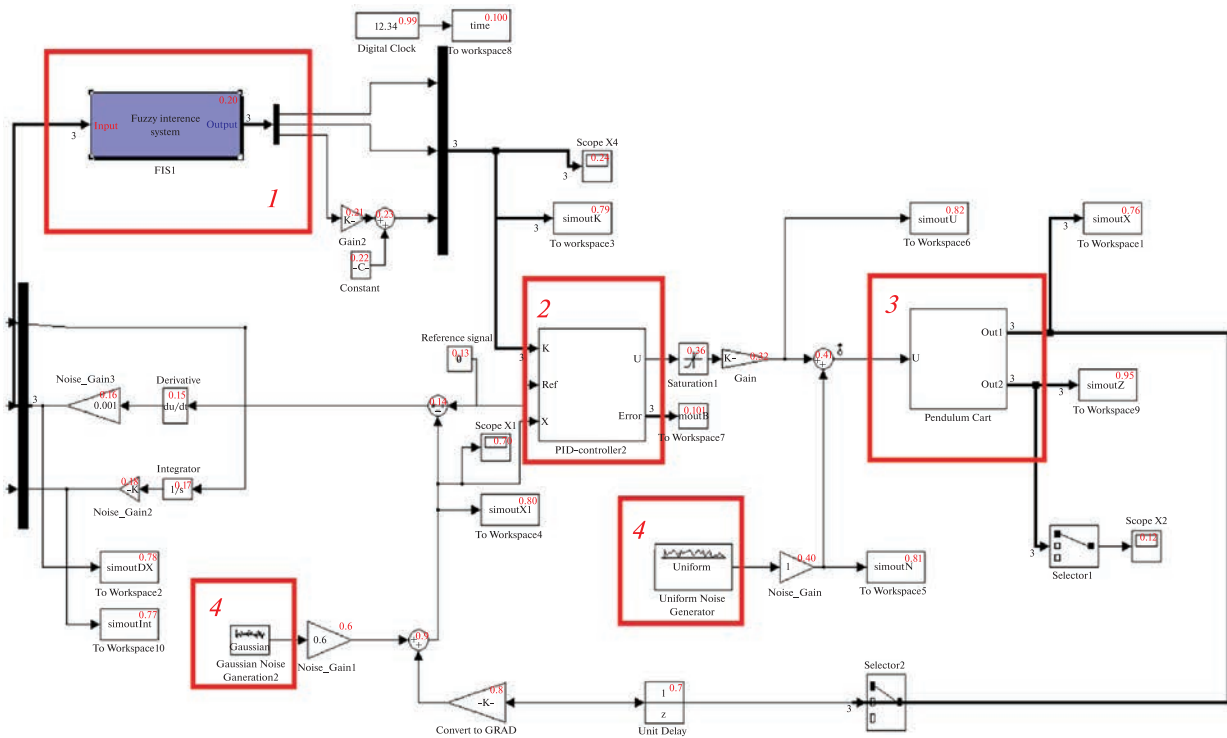


Рис. 1. Структура системы моделирования: 1 – блок КНВ; 2 – ПИД-регулятор; 3 – объект управления; 4 – генераторы шумов

роботов различных типов. На множестве примеров различных систем было продемонстрировано эффективное внедрение схемы КНВ в качестве готового программируемого алгоритмического решения для систем нижнего исполнительного уровня управления [14]. Алгоритмы и стратегии проектирования были успешно, как отмечено, применены к разработке ИСУ охлаждением сверхпроводящих магнитов в рамках проекта НИКА.

Развитие технологии. Представленная методология проектирования и реализации квантовых самоорганизующихся НР позволяет масштабировать и тиражировать данный продукт на другие типы физических ОУ.

Моделирование и физический эксперимент с автономным роботом. Математическая модель ОУ, используемая в данной работе, подробно описана и исследована в [15, 16]. В эксперименте применены БЗ для НР, найденные с помощью моделирования в [7, 8, 15], и пояснения приведены по мере необходимости понимания физической строгости и математической корректности интерпретации полученных результатов.

1. Компьютерная модель ОУ “каретка перемещения–маятник”. Система обладает глобальной динамической неустойчивостью, при отсутствии управляющей силы происходит неограниченный рост угла отклонения, т.е. маятник падает.

Структура компьютерной модели “каретка–перевернутый маятник”, выполненная в среде моделирования *MatLab/Simulink*, представлена на рис. 1.

Модель включает в себя ПИД-регулятор, шумы в системе управления и измерения, а также блок, формирующий сигнал для регулятора. Данная компьютерная модель используется для получения обучающего сигнала и настройки БЗ с помощью ОБЗ на мягких вычислениях – *SCOptKBTM* [2] и формирования БЗ законов изменения коэффициентов усиления ПИД-регулятора по методике, разработанной в [17]. В качестве модели управления данной системой, будем использовать следующее выражение для определения управляющего воздействия:

$$u(t) = k_p(t)e(t) + k_i(t) \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d(t)\dot{e}(t) \quad (1.1)$$

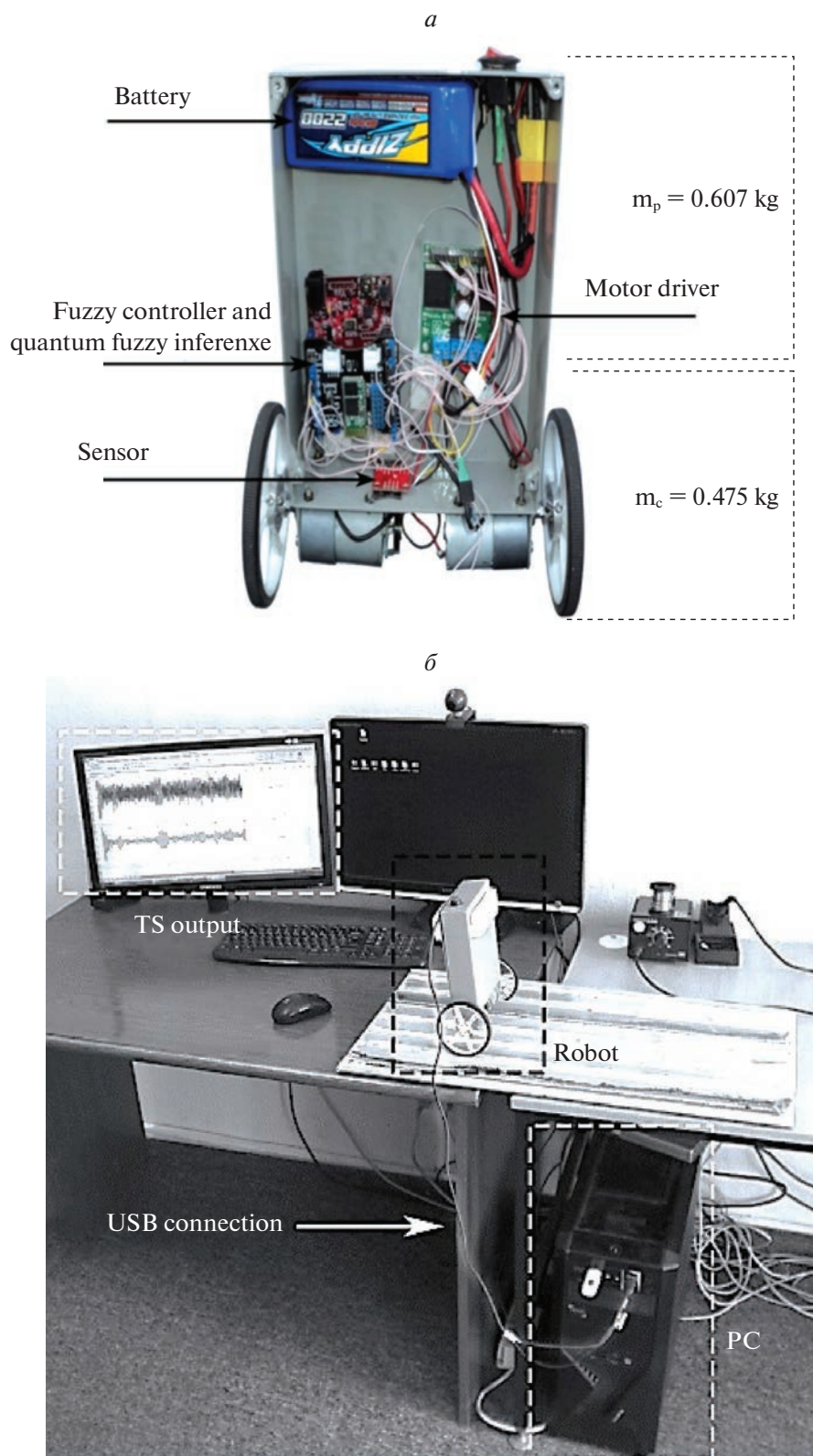


Рис. 2. Макет системы “каретка–перевернутый маятник” (а); стенд для проведения экспериментов (б), где TS output – представление обучающего сигнала (ОС) с модели, Robot – макет ОУ, USB connection – кабельное соединение компьютера и макета, PC – персональный компьютер

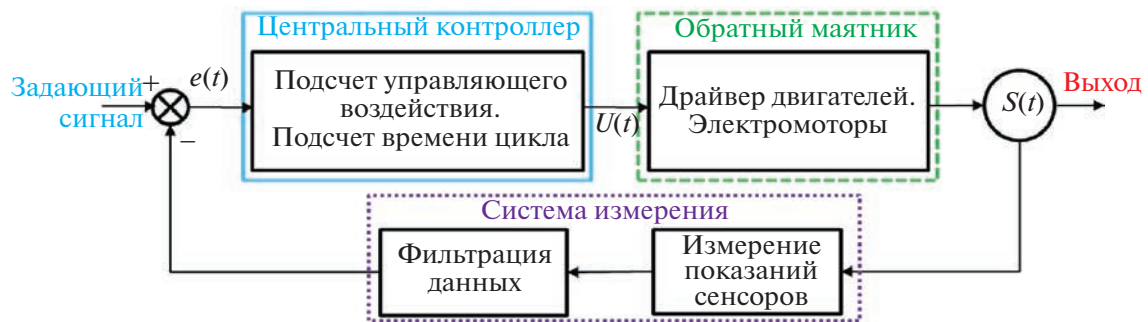


Рис. 3. Алгоритм программы микроконтроллера

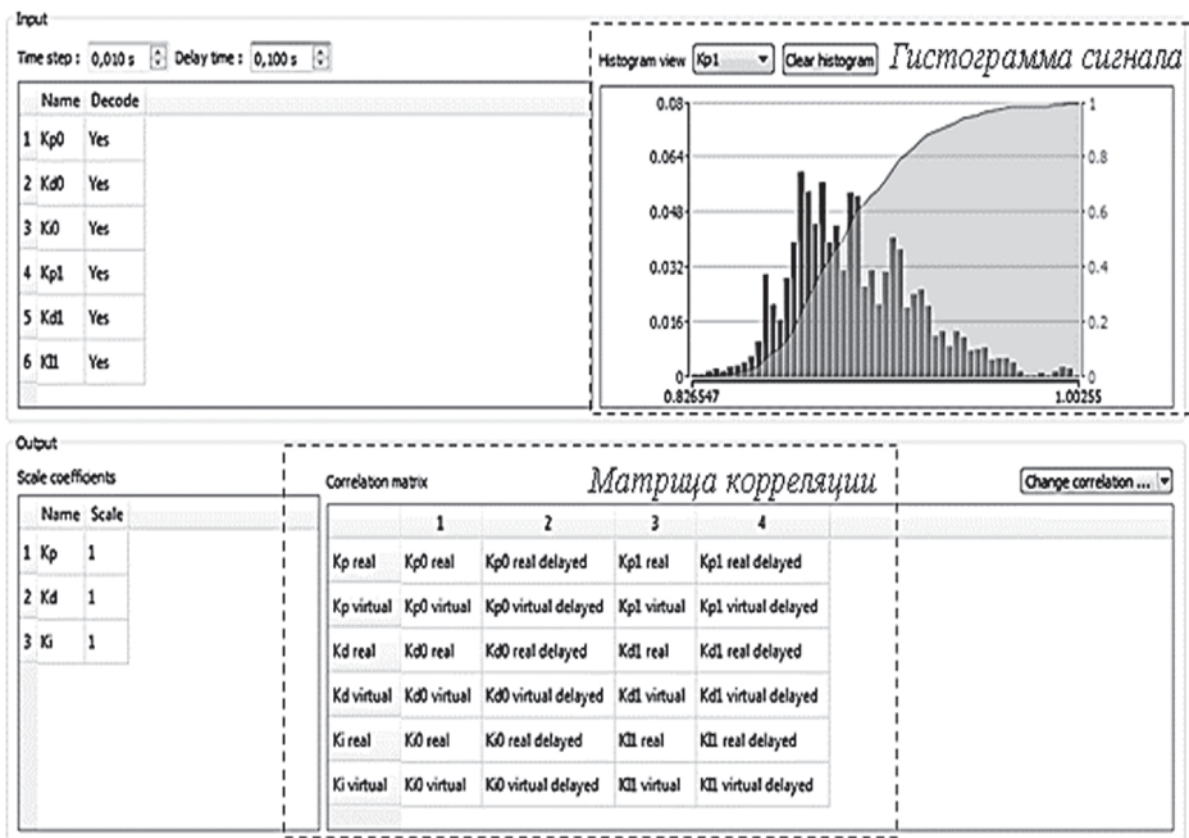


Рис. 4. Рабочее окно квантового оптимизатора

В соответствии со схемой управления применяется ПИД-регулятор (1.1) с контуром глобальной отрицательной обратной связи.

1.1. Макет системы. Данный тип ОУ является типовым (Benchmark) для тестирования программного инструментария робастного интеллектуального управления. Рассмотрим подробнее устройство подобного макета ОУ.

На рис. 2,а представлен макет, используемый для тестирования технологий проектирования ИСУ с помощью ОБЗ и стенд (рис. 2,б) для проведения экспериментов.

Стенд оборудован различными покрытиями для проведения экспериментов с макетом, в том числе в непредвиденных ситуациях управления. Также на стенде имеется возможность устанавливать определенный начальный угол для запуска макета.

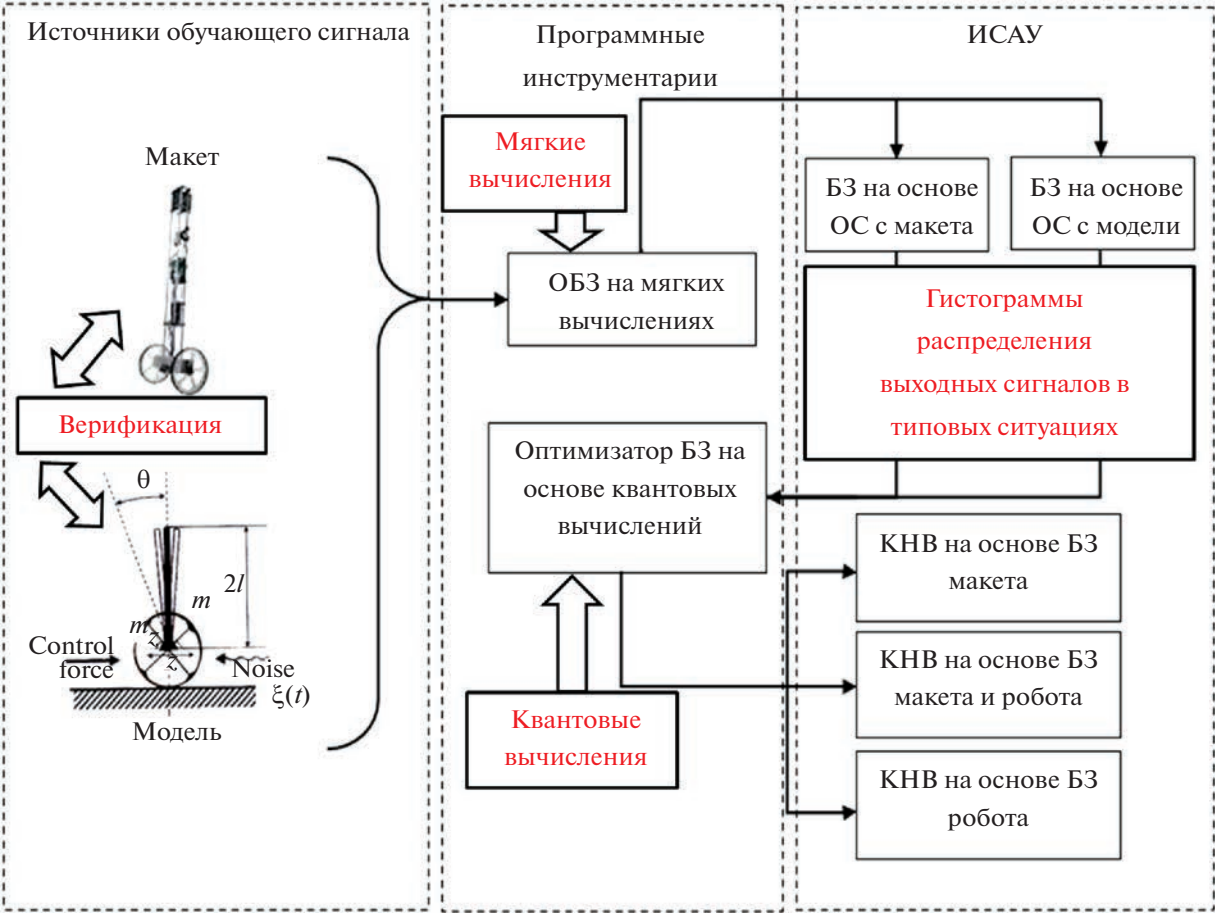


Рис. 5. Технология проектирования КНВ, где ИСАУ – интеллектуальная система автономного управления, ОС – обучающий сигнал

В качестве измерительной системы (рис. 2, Sensor) в макете используется плата с комбинацией датчиков – гироскопа и акселерометра – 5 DoF (пять степеней свободы) IDG500/ADXL335.

Ядром и центральным элементом системы является микроконтроллер компании Microchip® Chirkit, основанный на процессоре PIC32MX320F128. Плата оборудована USB-разъемом для передачи данных с процессора на компьютер. Интерфейс USB применяется при проведении экспериментов для передачи и приема данных (угла отклонения и величины управляющего

Таблица 1. Сравнение БЗ

БЗ, источник сигнала, описание, подпись	Количество правил	Количество функций принадлежности	Способ оптимизации
БЗ1, матмодель, FC1	245	$8 \times 6 \times 6$	Моделирование
БЗ4, макет ОУ FC4	288	$9 \times 9 \times 6$	Аппроксимация обучающего сигнала ОС (генетический алгоритм – ГА2)
Q-S	FC1 $\times$ FC4	—	Моделирование
Q-T	FC1 $\times$ FC4	—	Моделирование
Q-ST	FC1 $\times$ FC4	—	Моделирование

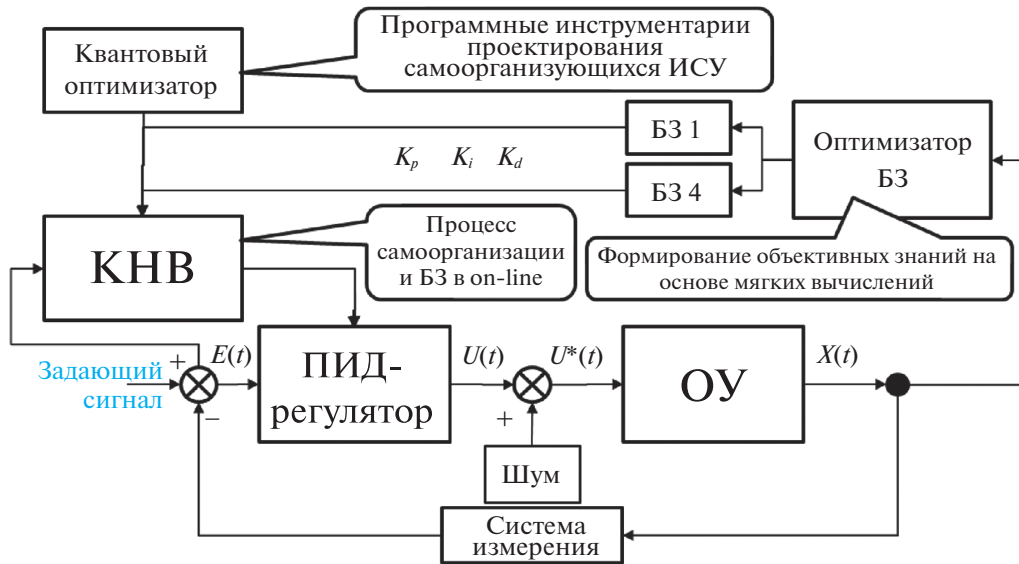


Рис. 6. Структура квантового НР

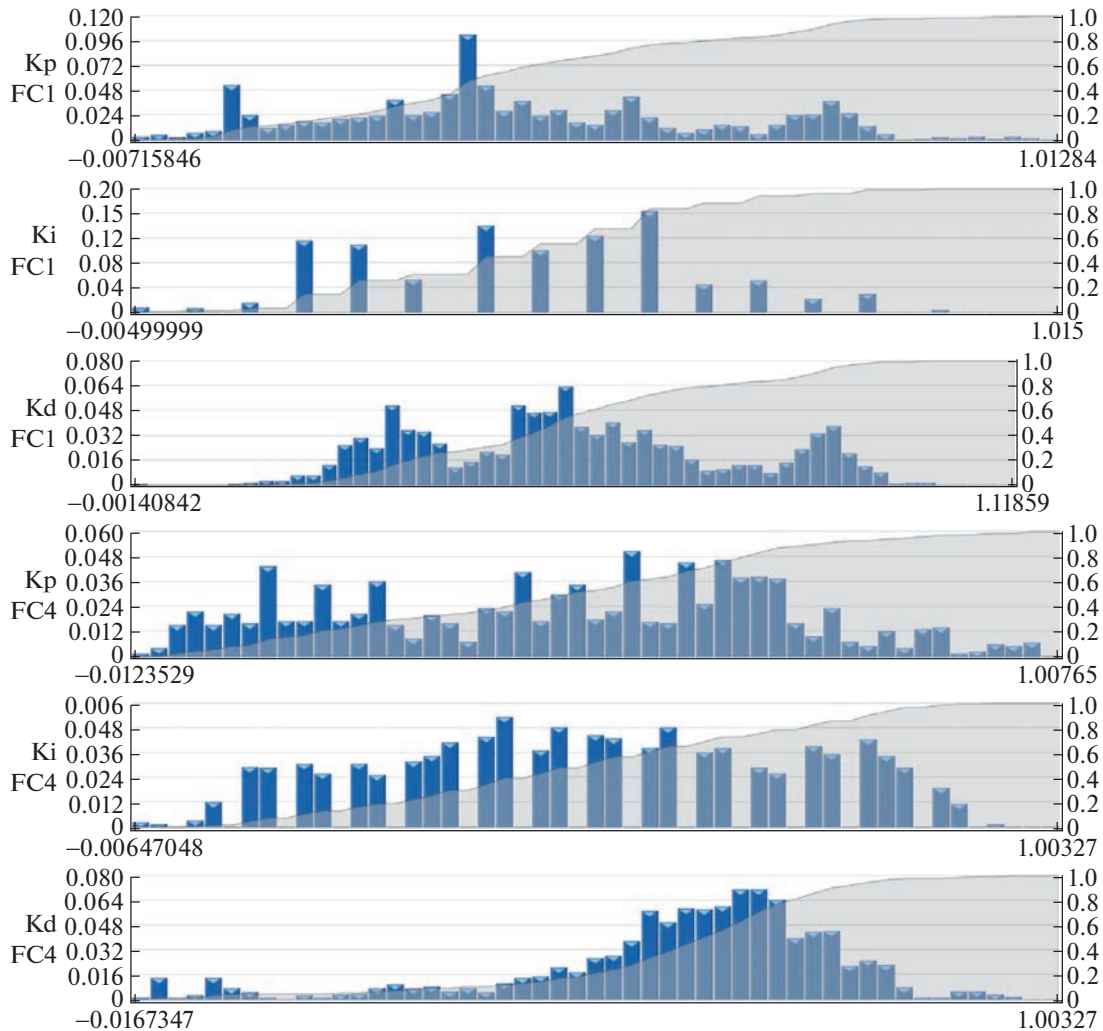


Рис. 7. Гистограммы входных коэффициентов КНВ с НР FC1 и FC4

Connection Setup		Normalization		Generalization		Signal	
Input Normalization							
	Name	Scale	Offset	Signal Max.	Signal Min.	Force clipping	
1	Kp0	0.591716	8.79	10.48	8.79	No	
2	Kd0	0.467289	14.4	16.54	14.4	No	
3	Ki0	33.3333	0.33	0.36	0.33	No	
4	Kp1	0.421941	11.36	13.73	11.36	No	
5	Kd1	0.302115	14.36	17.67	14.36	No	
6	KI	16.6667	0.31	0.37	0.31	No	
$\text{Normalization equation is } \text{Internal} = (\text{External} - \text{Offset}) * \text{Scale}$							
Output Denormalization							
	Name	Scale	Offset	Signal Max.	Signal Min.	Force clipping	
1	Kp	0.199601	8.79	13.8	8.79	No	
2	Kd	0.232558	14.4	18.7	14.4	No	
3	Ki	4.99999	0.3	0.5	0.3	No	

Рис. 8. Окно КНВ. Нормализация и денормализация сигнала с макета

воздействия), а также для удаленной настройки, речь о которой пойдет ниже. Подключение датчиков осуществляется с помощью аналоговых входов микроконтроллера.

Базовые функции программ макета представлены на рис. 3, обобщенно их можно описать следующими шагами: измерение, фильтрация, управление, подсчет времени (задержка).

Заметим, что алгоритм работы макета системы, приведенный на рис. 3, является частным примером САУ с обратной связью и воспроизводится в лабораторных условиях.

2. Проектирование КНВ на основе программного инструментария – квантовый оптимизатор QCOptKB™. Создание системы управления на базе КНВ осуществляется с использованием программного инструментария “Квантовый оптимизатор”. Рабочее окно этого продукта представлено на рис. 4.

Примечание 1. Снизу на рис. 4 отображена матрица временной корреляции для формирования запутанного состояния, сверху – гистограмма входящего сигнала пропорционального коэффициента.

Технология применения КНВ позволяет объединять в единую систему управления несколько БЗ, и таким образом, позволяя нечетким нейронным сетям работать параллельно, обеспечивая ИСУ дополнительной робастностью.

Рассмотрим возможность применения КНВ для объединения БЗ, полученных на основе различных информационных ресурсов. В качестве таких ресурсов выступает измеряемый сигнал на конечном промежутке времени работы системы, который можно получить из различных источников. Например, с использованием различных математических моделей или физически

Таблица 2. Ситуации управления и параметры математических моделей

Параметры ОУ	Типовая ситуация (C1)	Непредвиденная (C2)
Начальный угол	0	0
Начальная скорость	1	1
Масса тележки	0.56	0.56
Масса маятника	0.63	0.63
Длина маятника	0.05	0.07
Трение в креплении	3.55 + нормированный шум с интенсивностью 0.01 и амплитудой 0.35	3.73 + нормированный шум с интенсивностью 0.01 и амплитудой 0.35
Трение колес	3.63 + гауссовский шум 15%	3.63 + гауссовский шум 15%
Сила упругости	5.54	5.54
Шум в системе управления	Равномерный $[-2.15 \ 2.15]$, интенсивность 0.48	Равномерный $[-2.15 \ 2.15]$, интенсивность 0.48
Шум в системе измерения	Амплитуда 0.22, гауссовский шум, интенсивность 0.01	Амплитуда 0.32, гауссовский шум, интенсивность 0.01
Задержка управляющего воздействия	0.015	0.035

измеряемых сигналов реальных объектов управления, функционирующих в разных окружающих средах и при разных начальных условиях [2, 3]. Ключевым элементом подобной ИСУ является механизм объединения стратегий, заложенных в БЗ. Представленные ранее теоретические основы КНВ были реализованы и апробированы на базе различных математических моделей и реальных объектах управления [4, 5]. При этом практика показала, что для проектирования самоорганизующейся системы, способной функционировать в экстремальных условиях, необходимо применять дополнительный программный инструментарий проектирования КНВ, основанный на новых типах вычислений, таких, как квантовые мягкие вычисления [3]. Общая методология проектирования КНВ представлена на рис. 5.

В таком контексте можно выделить три типа КНВ на базе различных источников:

БЗ, полученных с помощью математических моделей;

БЗ, найденных с использованием физически измеряемого сигнала управления;

совместное применение различных информационных ресурсов.

Проведенные исследования показали, что наилучшим качеством управления обладают квантовые регуляторы (КР) на основе различных информационных ресурсов [2].

Далее для проектирования КНВ будем использовать БЗ1 и БЗ4, разработанные в соответствии с технологией мягких вычислений на оптимизаторе БЗ [7, 8, 13] (рис. 6).

Сравнение приведенных БЗ рассмотрено в табл. 1.

Перед тем как приступить к созданию КНВ, необходимо получить гистограммы распределения выходных сигналов (коэффициентов усиления) НР (рис. 7).

Для этого проводится серия экспериментов и моделирования в типовой ситуации управления. Используя полученные значения коэффициентов усиления при работе модели и макета, формируется массив данных для построения гистограмм коэффициентов усиления нечетких ПИД-регуляторов. Построение гистограмм происходит автоматически при загрузке данных в

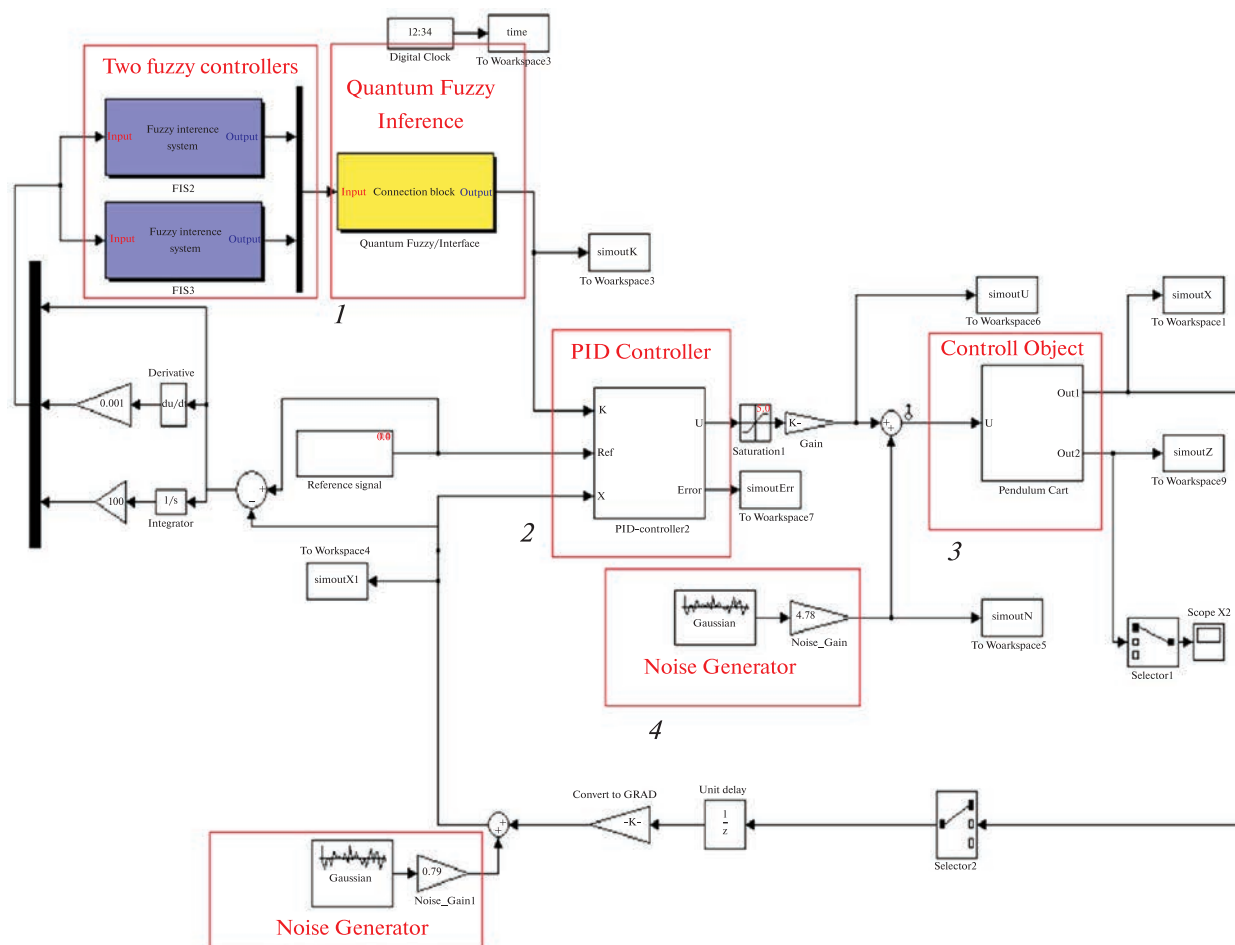


Рис. 9. Структура системы моделирования в среде MatLab/Simulink: 1 – Блок КНВ; 2 – ПИД-регулятор; 3 – ОУ; 4 – генераторы шумов

квантовый оптимизатор. В дальнейшем эти гистограммы применяются в алгоритме КНВ для формирования виртуальных состояний (рис. 7).

В эксперименте на макете используются гистограммы коэффициентов усиления, полученные экспериментально, а гистограммы коэффициентов усиления, найденные с помощью математического моделирования, применяются в формировании КНВ для моделирования управления роботом. На рис. 7 представлены гистограммы коэффициентов полученных с FC1 и FC4.

После создания новой модели регулятора и загрузки данных в квантовый оптимизатор выбирается вид квантовой корреляции между коэффициентами усиления. Формирование запутанных состояний осуществляется на основе выбранной корреляционной матрицы, которая отображается в рабочем окне оптимизатора (рис. 4).

На следующем шаге устанавливаются соответствующие максимальные и минимальные значения для входных и выходных сигналов КНВ в специальном окне программы (рис. 8).

На заключительном шаге проектирования производится настройка шкалирующих коэффициентов усиления выходных сигналов КНВ с использованием генетического алгоритма (ГА) и математической модели для подбора наилучшего решения.

3. Моделирование и эксперимент автономных ИСУ на основе КНВ. Перейдем к практическому применению разработанной модели КНВ для формирования процессов управления коэффициентами усиления ПИД-регулятора. Рассмотрим классическую задачу системы стабилизации “каретка перемещения–перевернутый маятник”, модель и макет которой приведены в [7, 13, 15, 16].

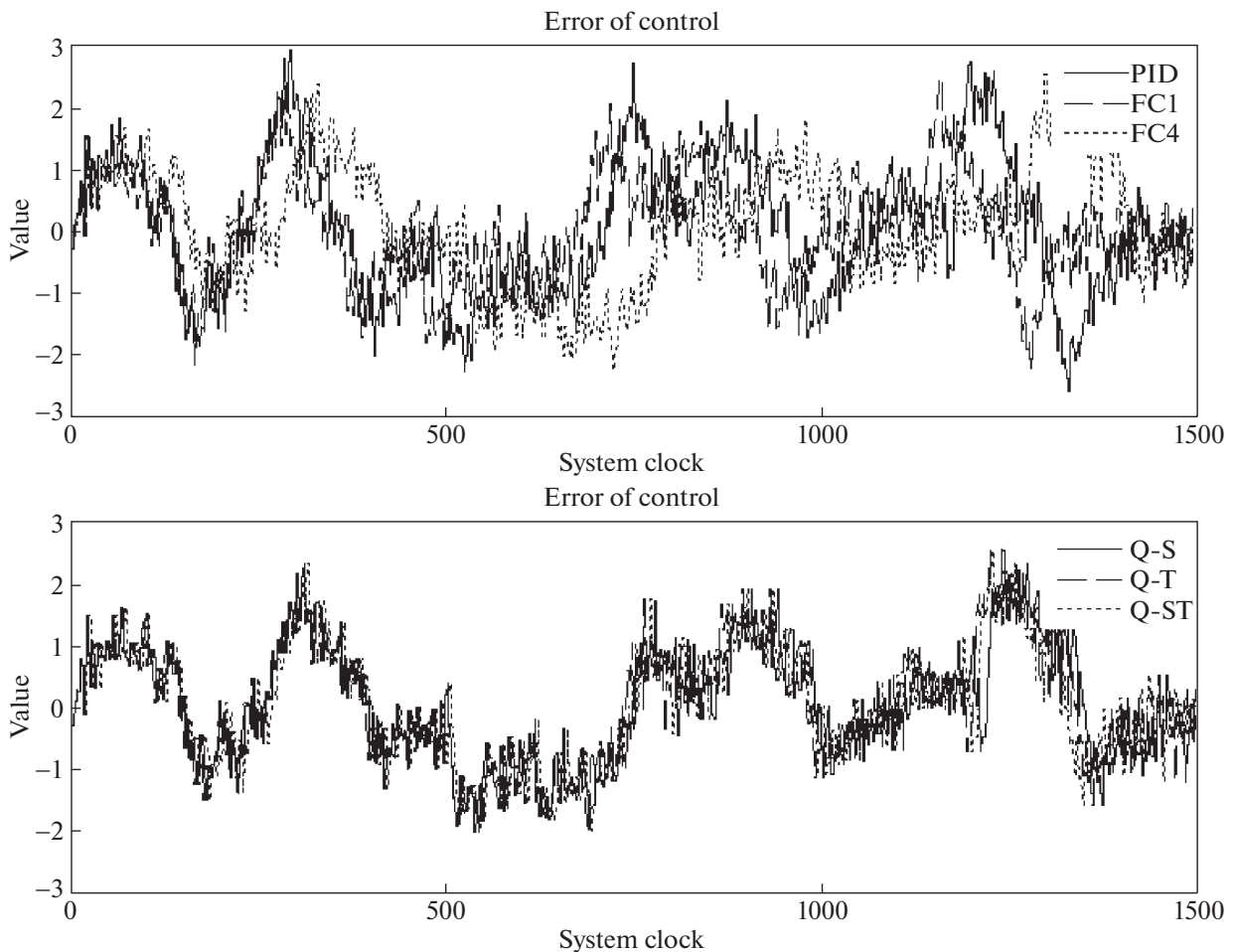


Рис. 10. Угол отклонения математической модели. Типовая ситуация управления (C1). Моделирование

Опишем результаты математического моделирования и физического эксперимента в двух ситуациях управления:

в первой (типовой) ситуации (C1) задержка управляющего сигнала стандартная – 0.015 с;

во второй непредвиденной ситуации (C2) задержка управляющего сигнала – 0.035 с (увеличенная в 3 раза).

В табл. 2 представлены параметры математической модели для C1 и C2.

Примечание 2. Размерность физических величин в табл. 2 приведена в системе СИ и имеет размерность вид (м, с, м/с, Н) для перемещения, времени, скорости и силы соответственно. Шумы генерируются формирующими фильтрами, и дополнительной информации о характеристиках шумов не требуется, так как шумы применяются только для формирования робастных БЗ НР.

На рис. 9 приведена структура системы моделирования, выполненная в среде *MatLab/Simulink*.

Результаты моделирования регуляторов в типовой ситуации управления проиллюстрированы на рис. 10 и 11.

Рассмотрим связь между входными и выходными значениями КНВ на примере пропорционального коэффициента усиления. На рис. 12 представлены входные значения КНВ (коэффициенты усиления FC1 и FC4) и выходное значение пропорционального коэффициента КНВ при временной корреляции.

На рис. 13 показаны фазовые портреты моделируемых систем.

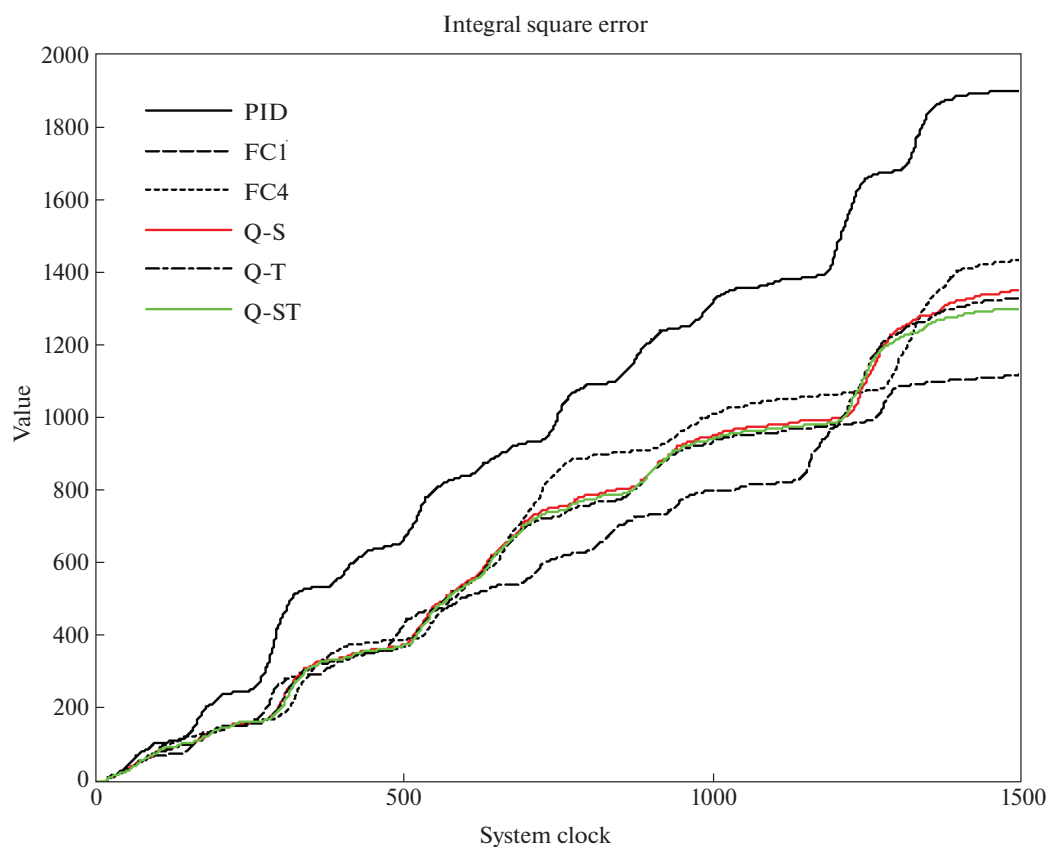


Рис. 11. Интеграл квадратичной ошибки. Типовая ситуация управления (C1). Моделирование

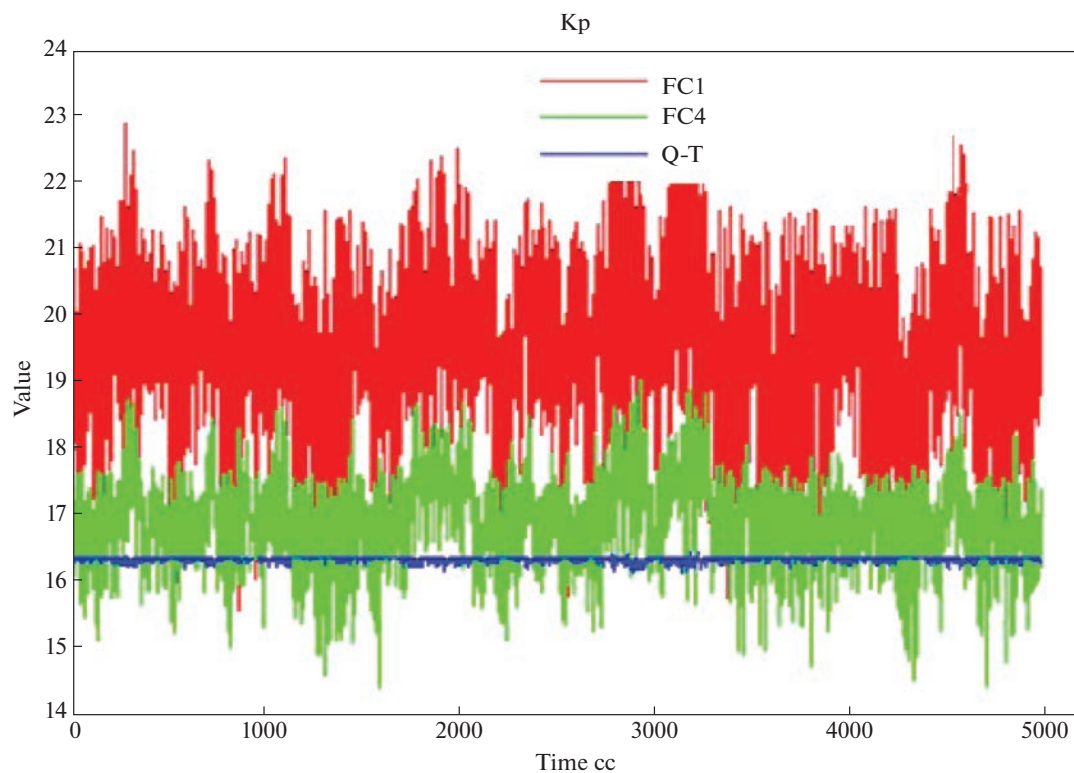


Рис. 12. Пропорциональный коэффициент усиления. Входные и выходные значения КНВ. Моделирование в типовой ситуации управления

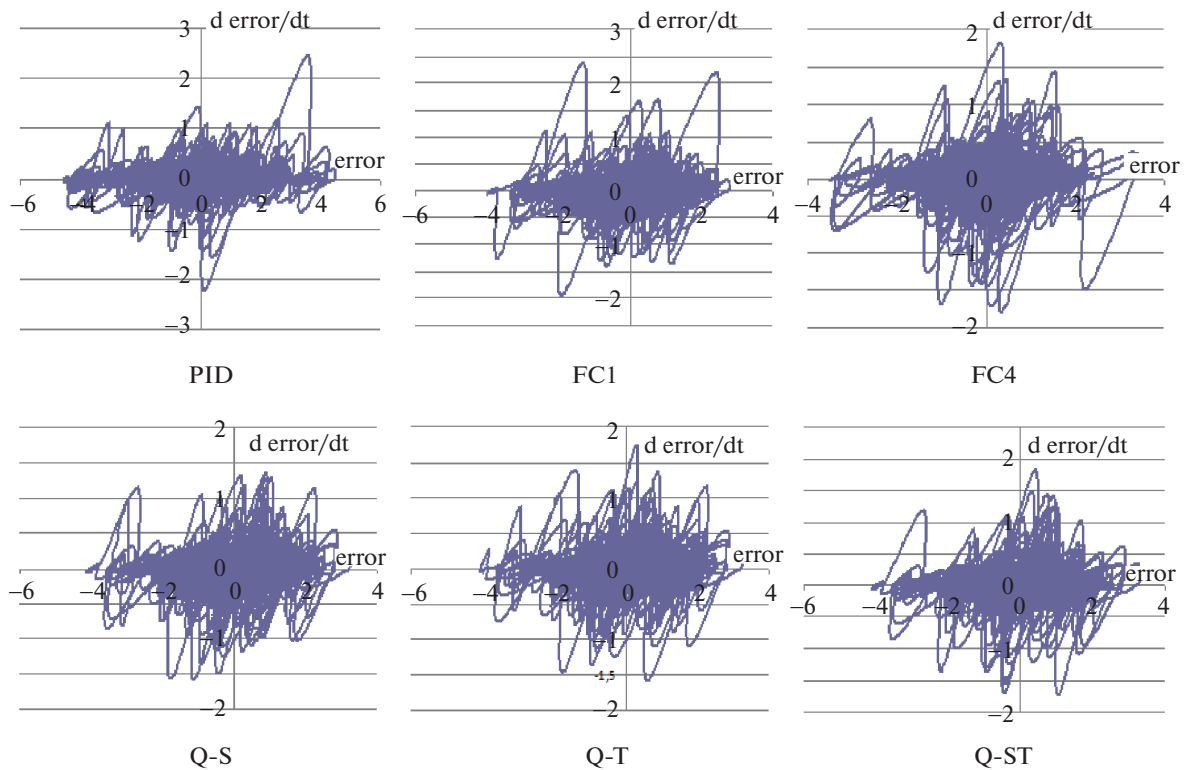


Рис. 13. Фазовые портреты моделируемых контроллеров

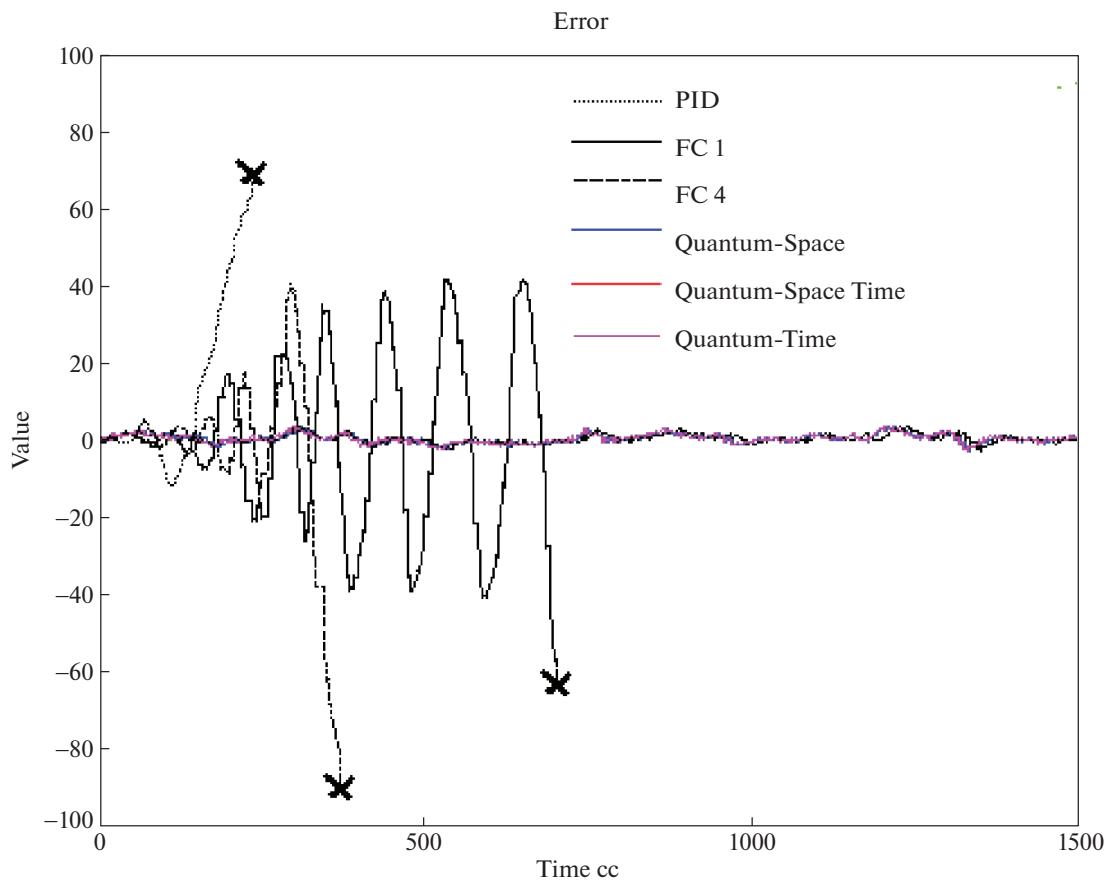


Рис. 14. Угол отклонения математической модели. Непредвиденная ситуация управления. Моделирование

Интеграл квадратичной ошибки. Моделирование

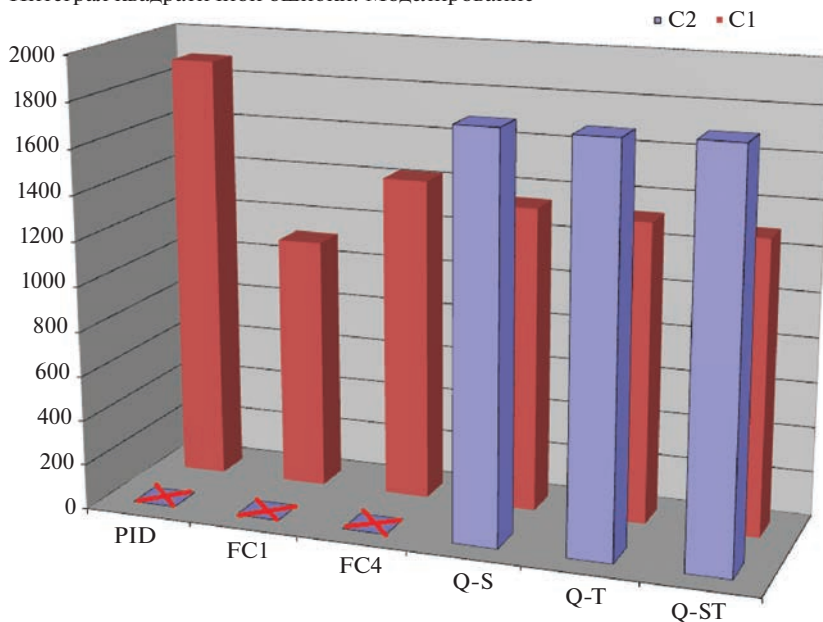


Рис. 15. Интеграл квадратичной ошибки. Непредвиденная и типовая ситуации управления. Моделирование, где FC1–FC4 – нечеткие регуляторы, и сокращения: Q – quantum, S(Space) – пространственная, T(Time) – временная, ST(SpaceTime) – пространственно-временная корреляции

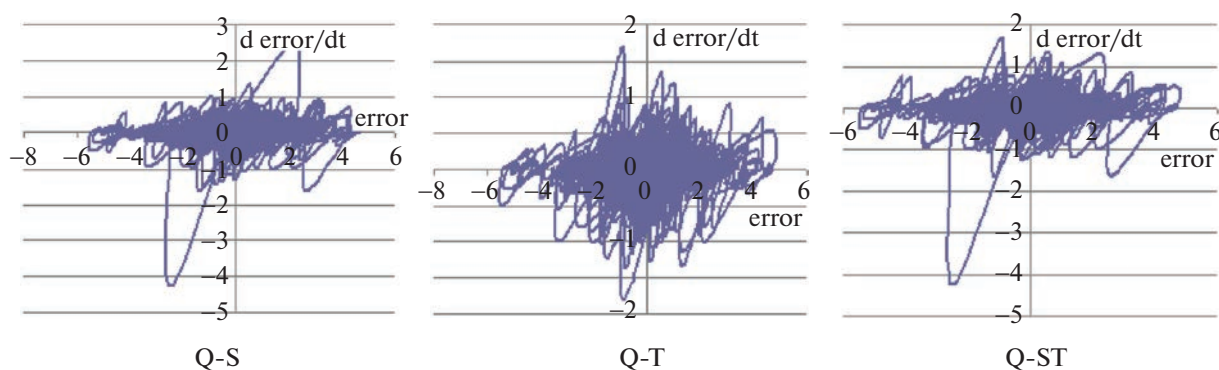


Рис. 16. Фазовые портреты модели с квантовыми НР в непредвиденной ситуации управления (C2). Моделирование

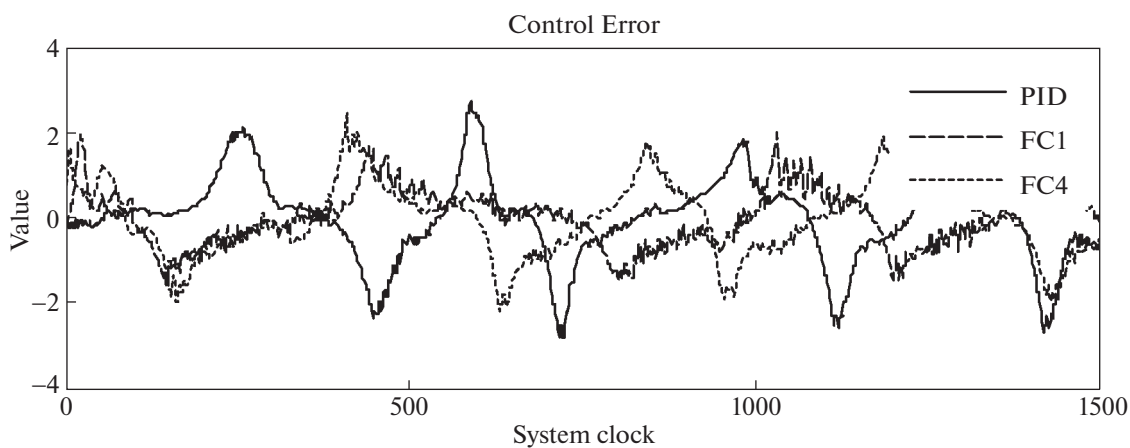


Рис. 17. Угол отклонения макета. Типовая ситуация управления. Эксперимент

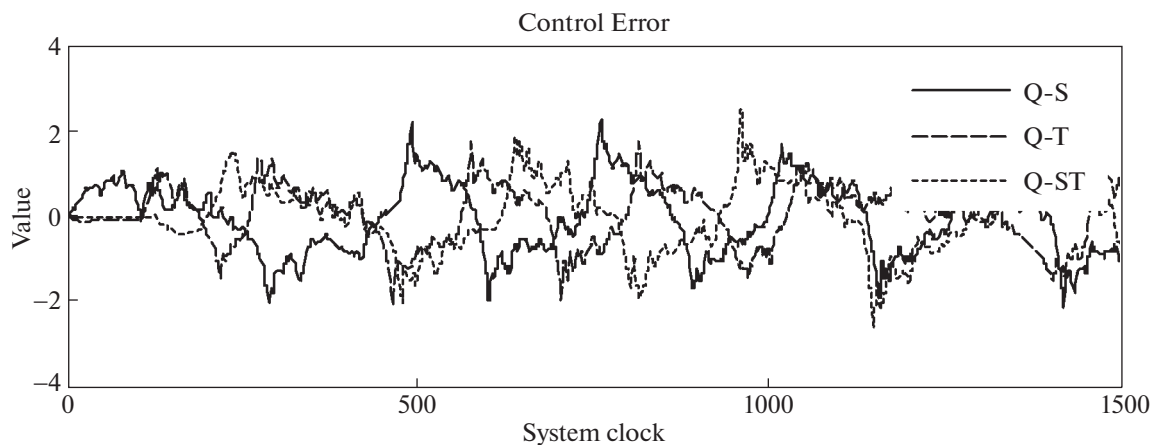


Рис. 18. Угол отклонения макета. Типовая ситуация управления. Эксперимент

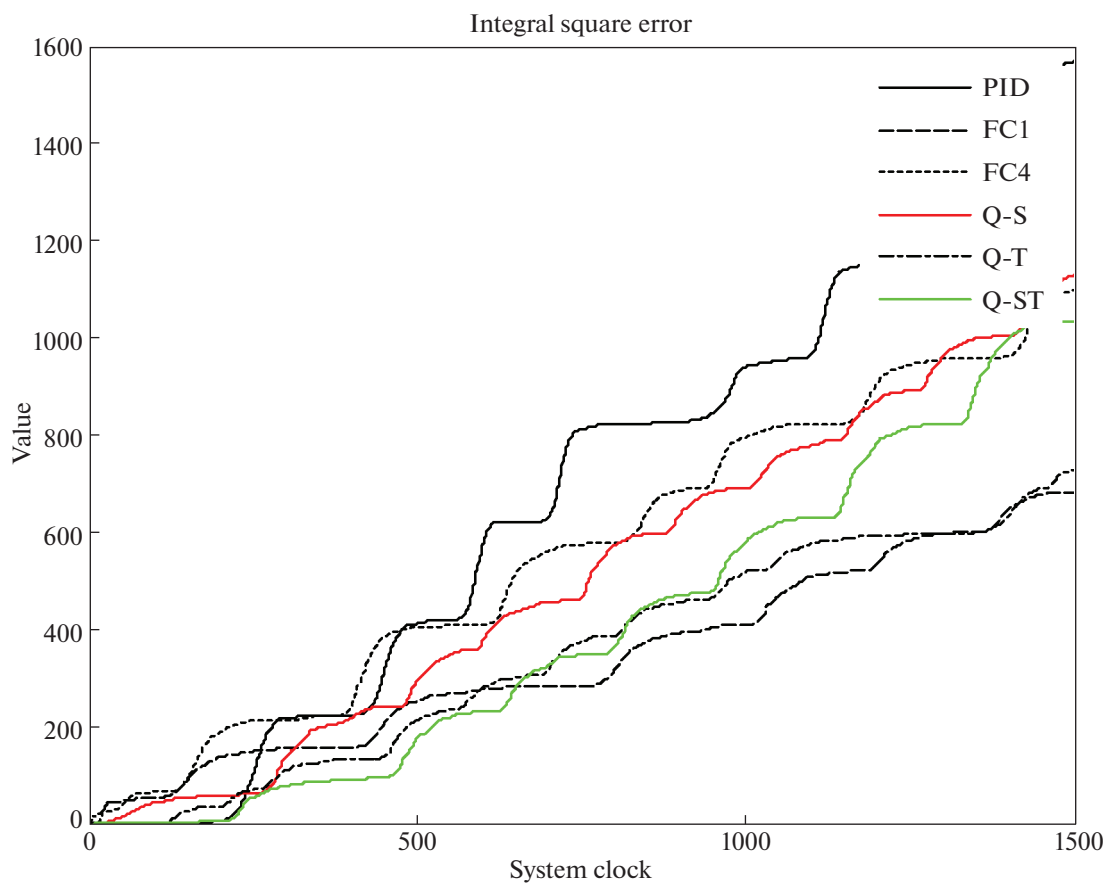


Рис. 19. Интеграл квадратичной ошибки. Типовая ситуация управления. Эксперимент

Далее на рис. 14 представлены результаты моделирования в непредвиденной ситуации управления.

На рис. 15 описана общая диаграмма интеграла квадратичной ошибки моделирования.

На рис. 14 можно заметить, что значение интегральной ошибки КР располагается между нечеткими контроллерами, образовавшими КНВ.

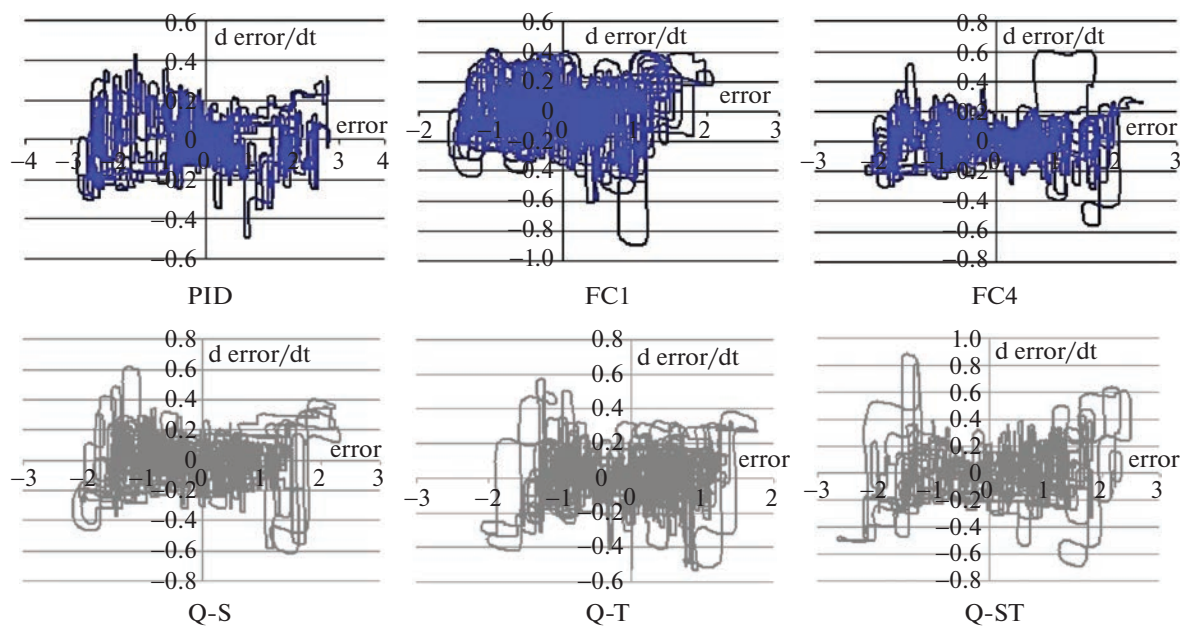


Рис. 20. Фазовые портреты регуляторов в типовой ситуации управления. Эксперимент

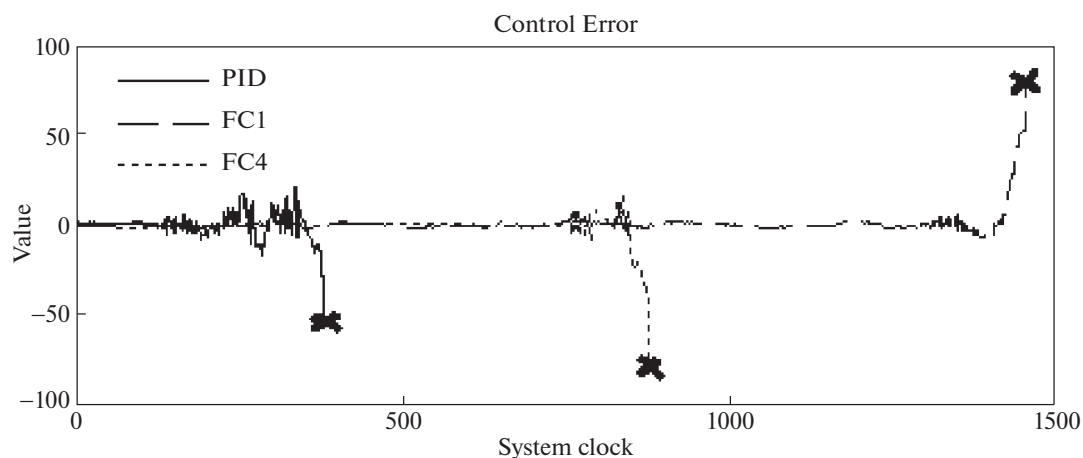


Рис. 21. Угол отклонения макета. Нештатная ситуация управления. Эксперимент

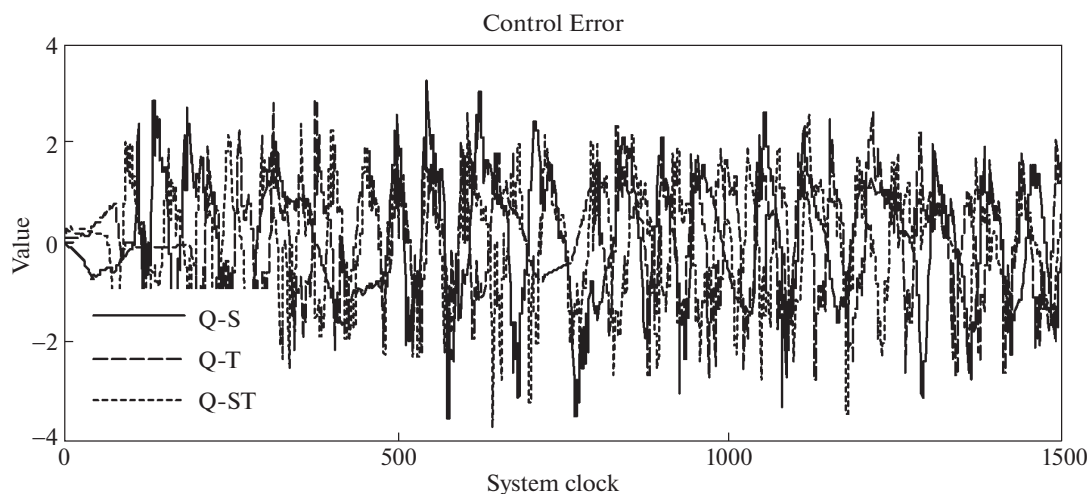


Рис. 22. Угол отклонения макета. Нештатная ситуация управления. Эксперимент

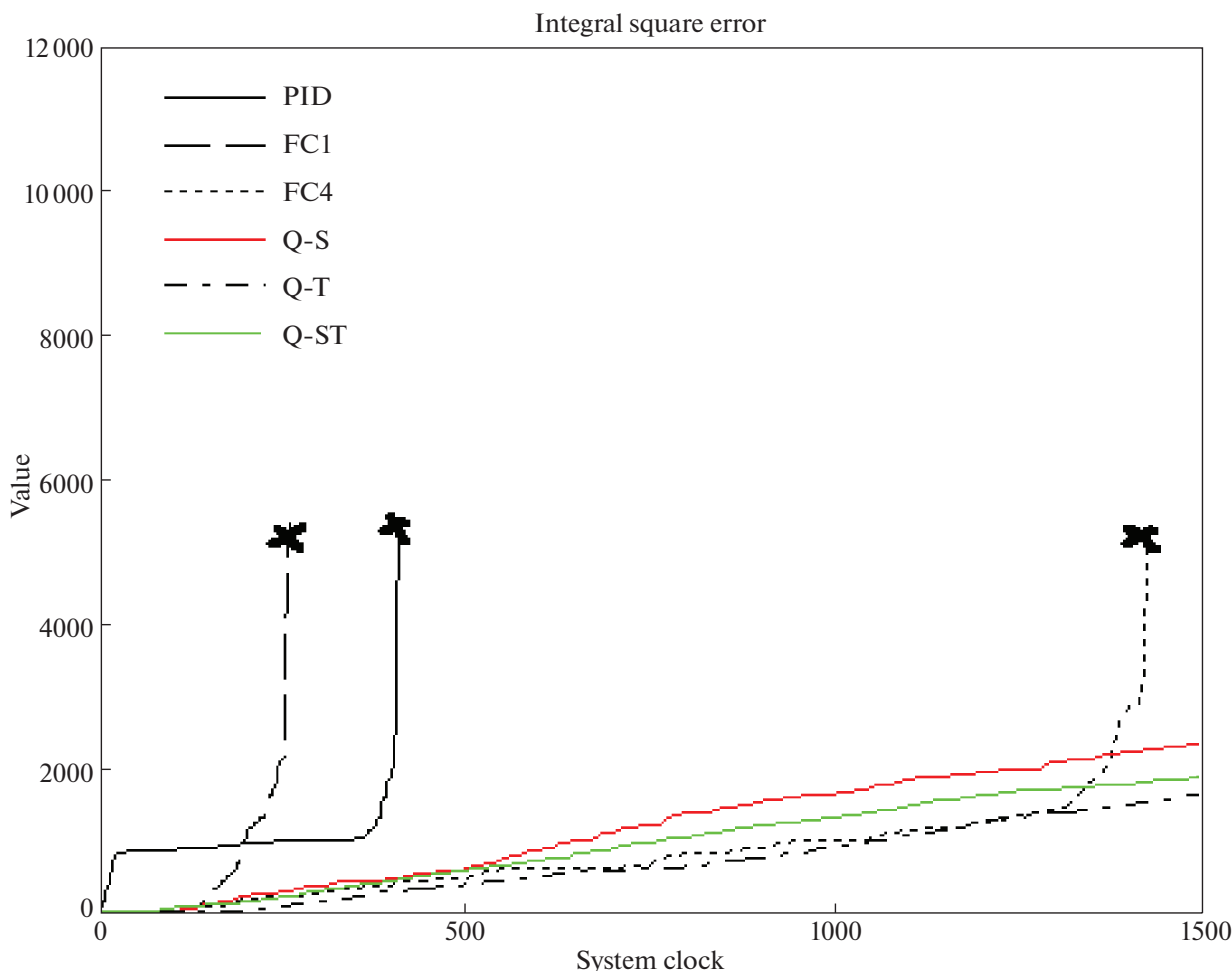


Рис. 23. Интеграл квадратичной ошибки. Нештатная ситуация управления. Эксперимент

Проведем физический эксперимент на реальном ОУ в типовой ситуации управления. На рис. 16–20 рассмотрены результаты экспериментов.

Проведем эксперимент на реальном ОУ в нештатной ситуации управления (С2).

На рис. 21–25 представлены результаты экспериментов.

Как показывают результаты моделирования и эксперимента, разработанная методология объединения стратегий управления позволяет эффективно справляться с задачами управления даже в экстремальных условиях, в которых с задачей управления не справляются НР, лежащие в основе КНВ. Важно отметить, что система управления на основе КНВ наследует лучшие характеристики качества управления от БЗ НР, добавляя способность к самоорганизации.

Примечание 3. Приведенные результаты существенно отличаются от известных из литературных источников [18–33], в которых отсутствуют результаты экспериментальной проверки эффективности применения квантовых вычислений на реальных физических ОУ.

Таким образом показана эффективность и необходимость применения квантовых вычислений и алгоритмов управления не только для квантовых систем, но и для классических ОУ. Открытый в [6–9] эффект квантовой самоорганизации неточных БЗ за счет извлечения скрытой квантовой информации экспериментально проверен и установлен в экспериментах для многих сложных плохо формализуемых и слабоструктурированных физических ОУ.

Заключение. Технология применения квантового оптимизатора БЗ обеспечивает систему дополнительным свойством робастности только с помощью программно-алгоритмического обеспечения. Проведенные эксперименты показали, что интеллектуальное управление позволяет выполнять настройку даже сложных объектов управления с несколькими контурами обратной

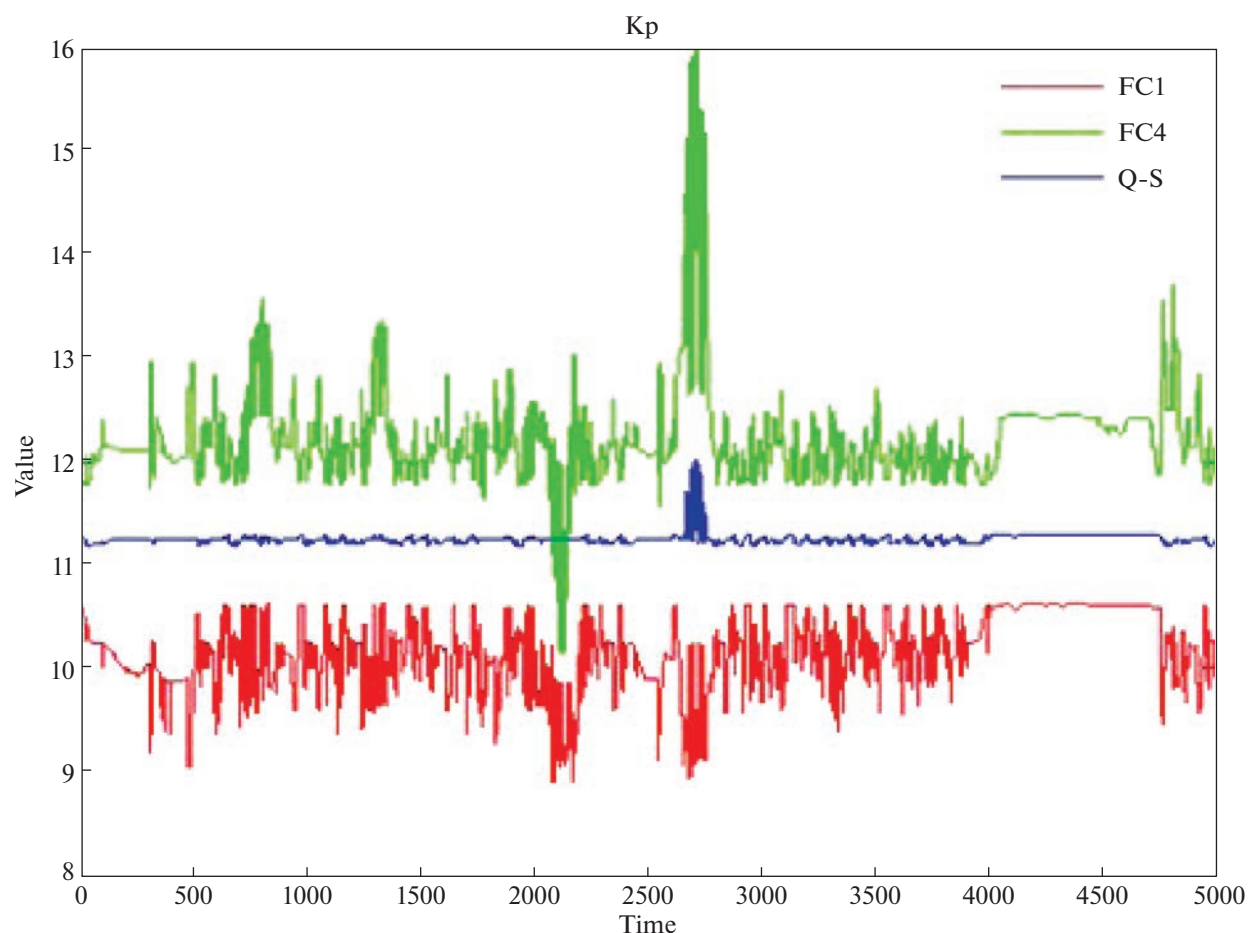


Рис. 24. Пропорциональный коэффициент усиления квантового регулятора на основе БЗ с макета и модели. Эксперимент в нештатной ситуации

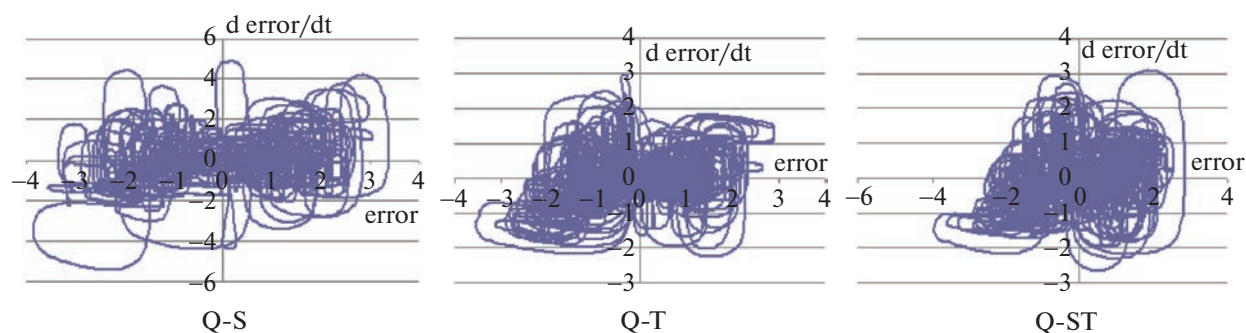


Рис. 25. Фазовые портреты квантовых НР в нештатной ситуации управления. Эксперимент

связи. Продемонстрировано, что квантовый НР в реальных условиях на реальных физических ОУ справляется с задачей управления сложным ОУ на достаточно высоком уровне, где классический регулятор и НР не обладают требуемым качеством управления. Установленный эффект подтверждает реализацию принципа квантовой самоорганизации БЗ за счет использования алгоритма КНВ, разработанного в [3, 4, 6, 7]. Показано применение квантовых вычислений на классическом процессоре в режиме реального времени. Результаты моделирования и экспериментов доказывают полезность и эффективность скрытой квантовой информации, извлекаемой из классических состояний коэффициентов усиления, в процессах управления [34, 35].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ulyanov S.V.* System for Intelligent Control Based on Soft Computing // US patent No 6,415,272 B1, 2003.
2. *Ulyanov S.V.* Soft Computing Optimizer of Intelligent Control System Structures // US Patent No 7,219,087 B2, 2007.
3. *Ulyanov S.V.* System and Method for Control Using Quantum Soft Computing // US Patent No 6,578,018 B1, 2003.
4. *Ulyanov S.V.* Self-organizing Quantum Robust Control Methods and Systems for Situations with Uncertainty and Risk // US Patent No 8788450 B2, 2014.
5. *Reshetnikov A.G., Ulyanov S.V., Zrelov P.V., Zrelova D.P.* INTELLIGENT COGNITIVE ROBOTICS V. III. Quantum Computational Toolkit of Quantum Self-organized Intelligent Control System Simulator: Quantum deep Learning on Quantum-inspired Neural Network and Quantum Genetic Algorithms. M.: Kurs, 2023.
6. *Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Hagiwara T.* Design of Self-organized Intelligent Control System Based on Quantum Fuzzy Inference: Intelligent System of Systems Engineering Approach // Proc. IEEE Intern. Conf. on System, Man and Cybernetics (SMC'2005). Hawaii. USA, 2005. V. 4. P. 3835–3840.
7. *Litvintseva L.V., Ulyanov I.S., Ulyanov S.V., Ulyanov S.S.* Quantum Fuzzy Inference for Knowledge Base Design in Robust Intelligent Controllers // J. Computer and Systems Sciences Intern. 2007. V. 46. № 6. P. 908–961.
8. *Litvintseva L.V., Ulyanov S.V.* Intelligent Control System. I. Quantum Computing and Self-organization Algorithm // J. Comp. and Sys. Sciences Intern. 2009. V. 48. № 6. P. 946–984.
9. *Ulyanov S.V.* Quantum Self-organization of Imperfect Knowledge Bases: Quantum Intelligent Force Control and Information-thermodynamic Law of Extracted Informed Useful Work. Intelligent Cognitive Robotics. V. 2. M.: Kurs, 2022.
10. *Бутенко А.В., Зрелов П.В., Кореньков В.В., Костромин С.А., Никифоров Д.Н., Решетников А.Г., Семашко С.В., Трубников Г.В., Ульянов С.В.* Интеллектуальная система дистанционного управления давлением и расходом жидкого азота в криогенной системе сверхпроводящих магнитов: программно-аппаратная платформа // Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20. № 2. С. 247.
11. *Korenkov V.V., Reshetnikov A.G., Ulyanov S.V., Zrelov P.V., Zrelova D.P.* Self-Organized Intelligent Quantum Controller: Quantum Deep Learning and Quantum Genetic Algorithm – QSCOptKB™ Toolkit // Proc. 6th Intern. Workshop on Deep Learning in Computational Physics (DLCP2022). Dubna, 2022.
12. *Ульянов С.В., Решетников Г.П.* Технологии интеллектуальных вычислений: Мягкие и дробные вычисления в интеллектуальном управлении: Учебно-метод. пособие. Дубна: ОИЯИ, 2013. 244 с.
13. *Ульянов С.В., Решетников А.Г., Решетников Г.П.* Технологии интеллектуальных вычислений: Квантовые вычисления и программирование в самоорганизующихся интеллектуальных системах управления. Дубна: ОИЯИ, 2015. 246 с.
14. *Ulyanov S.V., Reshetnikov A.G., Zrelova D.P.* Industrial Robotic Intelligent Robust Control System: Applying Quantum Soft Computing Technologies and Quantum Software Engineering in Unpredicted Control Situations // Программные продукты и системы. 2023. V. 36. № 1. P. 197–206. <https://doi.org/10.15827/0236-235X.141.197-206>
15. *Litvintseva L.V., Karatkevich S.G., Ulyanov S.V.* Intelligent Control System. II. Design of Self-organized Robust Knowledge Bases in Contingency Control Situations // J. Computer and Systems Sciences Intern. 2011. V. 50. № 2. P. 250–292.
16. *Ulyanov S.V., Ulyanov V.S., Reshetnikov A.G.* Physical Rigidity and Mathematical Correctness of the Intelligent Robot Model: Adequacy to a Physical Object and Accuracy of Motion Dynamic System Equations – Method of Deep Machine Learning Based on Lagrangian Neural Networks // System Analysis in Science and Education. 2021. № 1. P. 1–41 (In Russ). Available from: <http://sanse.ru/download/458>.
17. *Litvintseva L.V., Ulyanov S.V., Ulyanov S.S.* Design of Robust Knowledge Bases of Fuzzy Controllers for Intelligent Control of Substantially Nonlinear Dynamic Systems: II. A Soft Computing Optimizer and Robustness of Intelligent Control Systems // J. Computer and Systems Sciences Intern. 2006. V. 45. № 5. P. 744–771.
18. *Dong D., Chen Ch., Chen Z., Zhang Ch.* Quantum Mechanics Helps in Learning for More Intelligent Robots // Chin. Phys. Lett. 2006. V. 23. № 7. P. 1691–1694.
19. *Lukac M., Perkowski M.* Inductive Learning of Quantum Behaviors // Facta Universitatis. 2007. V. 20. № 3. P. 561–586.
20. *Kagan E., Ben G.I.* Navigation of Quantum-controlled Mobile Robots // Recent Advances in Mobile Robotics. 2011. V. 15. P. 311–220.
21. *Bannikov A., Egerton S., Callaghan V., Johnson B.D.* Quantum Computing: Non-deterministic Controllers for Artificial Intelligent Agents // Proc. 5th Intern. Wokshop Artif. Intell. Techniques for Ambient Intelligence (AITAm'10). Kuala Lumpur. Malasia, 2010.
22. *Chatzis S.P., Korkinof D., Demiris Y.* A Quantum-statistical Approach Toward Robot Learning by Demonstration. // IEEE Transactions on Robotics. 2012. V. 28. № 6. P. 1371–1381.

23. *Mannone M., Seidita V., Chella A.* Categories, Quantum Computing, and Swarm Robotics: A Case Study // *Mathematics*. 2022. V. 10. P. 372.
<https://doi.org/10.3390/math10030372>
24. *Li Y., Hghvami A., Dong D.* Intelligent Trajectory Planning in UAV-mounted Wireless Networks: A Quantum-Inspired Reinforcement Learning Perspective // *arXiv:2007.13418v2 [eess.SP]* 2 Mar 2021.
25. *Kumar A., Pacheco D., Kaushik K., Rodrigues J.* Futuristic View of the Internet of Quantum Drones: Review, Challenges and Research Agenda // *Vehicular Communications*. 2022. V. 36. P. 100487.
<https://doi.org/10.1016/j.vehcom.2022.100487>
26. *Li J.-A., Dong D., Wei Z., Liu Y.* Quantum Reinforcement Learning During Human Decision Making // *Nature Human Behaviour*. 2020. V. 4. P. 294–307. URL: www.nature.com/nathumbehav.
27. *Lamata L., Qaudrelli M., W. de Silva C., Kumar P.* Quantum Mechatronics // *Electronics*. 2021. V. 10. P. 2483.
<https://doi.org/10.3390/electronics10202483>
28. *Qiao L.-F., Gao J., Jiao Z., Zhang Z.* Quantum Go Machine // *arXiv:2007.12186v1 [quant-ph]* 23 Jul 2020.
29. *Widdows D., Rani J., Pothos E.* Quantum Circuit Components for Cognitive Decision Making // *arXiv:2302.03012v1 [quant-ph]* 6 Feb 2023.
30. *Domino K., Koniorczyk M., Krawiec K., Jalowiecki K.* Quantum Annealing in the NISQ Era: Railway Conflict Management // *Entropy*. 2023. V. 25. P. 191.
<https://doi.org/10.3390/e25020191>
31. *Huang, Z., Li Q., Zhao J., Song M.* Variational Quantum Algorithm Applied to Collision Avoidance of Unmanned Aerial Vehicles // *Entropy*. 2022. V. 24. P. 1685;
<https://doi.org/10.3390/e24111685>
32. *Atchade P., Alonso-Linaje G., Albo-Canals J., Casado-Fauli D.* qRobot: A Quantum Computing Approach in Mobile Robot Order Picking and Batching Problem Solver Optimization // *Algorithms*. 2021. V. 14. P. 194.
<https://doi.org/10.3390/a14070194>
33. *Vella F., Chella A., Gaglio S., Pilato G.* A Quantum Planner for Robot Motion // *Mathematics*. 2022. V. 10. P. 2475.
<https://doi.org/10.3390/math10142475>
34. *Korenkov V.V., Reshetnikov A.G., Ulyanov S.V., Zrellov P.V., Zrelova D.P.* Self-Organized Intelligent Quantum Controller: Quantum Deep Learning and Quantum Genetic Algorithm – QSCOptKBTM Toolkit // *Proc. 6th Intern. Workshop on Deep Learning in Computational Physics (DLCP2022)*. Dubna. JINR, 2022.
35. *Кореньков В.В., Решетников А.Г., Ульянов С.В., Зрелов П.В., Зрелова Д.П.* Интеллектуальное роботизированное управление в экстремальных ситуациях на основе квантовых самоорганизующихся контроллеров // *Сб. тез. 33-й междунар. научно-техн. конф. “Экстремальная робототехника”*. С.-П., 2021. С. 224–225.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 629.7

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЛАНИРОВАНИЯ МЕЖСПУТНИКОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В ИНТЕРЕСАХ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ЭФЕМЕРИД СОВРЕМЕННОГО И ПЕРСПЕКТИВНЫХ ОРБИТАЛЬНЫХ СЕГМЕНТОВ ГЛОНАСС

© 2023 г. М. Н. Красильщиков^а, Д. М. Кружков^{а,*}, Т. А. Марарескул^б,
Е. А. Мартынов^а, Д.С. Муратов^б

^аМосковский авиационный институт (национальный исследовательский ун-т),
Москва, Россия

^бАО “ИСС” им. ак. М.Ф. Решетнева, Железногорск, Россия

*e-mail: kruzchkovd@mail.ru

Поступила в редакцию 18.04.2023 г.

После доработки 26.04.2023 г.

Принята к публикации 05.06.2023 г.

Приводится описание разработанной авторами информационной технологии обеспечения возможности функционирования без загрузки информации наземным комплексом управления при одновременном повышении точности эфемерид существующего средневисотного сегмента ГЛОНАСС и его перспективных дополнений. Достижение сформулированных целей в рамках обсуждаемой технологии предполагает формирование высокоточных эфемерид путем решения следующих взаимосвязанных задач: повышение точности определения и прогнозирования эфемерид навигационных космических аппаратов в инерциальной системе координат; совершенствование методов и алгоритмов прогнозирования и уточнения на борту космических аппаратов эволюции параметров вращения Земли; высокоточная синхронизация бортовых часов. Главное внимание уделяется первой из перечисленных задач, т.е. прогнозированию и уточнению эфемерид навигационных космических аппаратов в инерциальной системе координат, в том числе в режиме функционирования спутниковых группировок без обновления эфемеридно-временной информации. В качестве основы для ее решения предлагается использовать перспективные бортовые аппаратные средства проведения межспутниковых измерений. Обсуждаются базовые ограничения, связанные с реализацией межспутниковых измерений и последующей их обработкой как для средневисотного, так и для перспективных космических сегментов ГЛОНАСС. Приводятся результаты проектно-баллистического анализа и обработки реальных и моделируемых измерений, а также предварительные характеристики точности получаемых при этом на борту оценок эфемерид.

DOI: 10.31857/S0002338823050104, EDN: ODBVBH

Введение. В настоящее время перманентно существующая потребность улучшения потребительских характеристик глобальных навигационных систем (ГНСС) [1, 2] удовлетворяется путем решения совокупности перечисленных ниже взаимосвязанных технических проблем, приводящих в конечном счете к изменению эквивалентной погрешности определения псевдодалности потребителя (ЭПД) навигационных сигналов [3, 4], а именно:

- обеспечение высокой точности вычисляемых эфемерид навигационных спутников [2];
- уточнение эволюционирующих значений параметров вращения Земли (смещение полюса и поправка к Всемирному времени) [5–8];
- синхронизация бортовых часов с системными [2, 3];
- совершенствование характеристик бортовых аппаратных средств;
- уточнение задержек распространения сигналов;
- определение фактических выносов фазовых центров антенн навигационных спутников [9].

Одной из наиболее существенных по ее вкладу в итоговую погрешность решения навигационной задачи потребителя является проблема повышения точности эфемерид при их прогнозировании на средних и длительных временных интервалах (от половины суток и до нескольких недель) [10, 11]. В настоящий момент эта проблема решается на основе периодической реализации ряда процедур, включающих в том числе наблюдение за каждым навигационным космическим аппаратом (НКА) [3, 4, 12], сбор телеметрии и вычисление точных эфемерид с последующей загрузкой их на борт. В свою очередь стремление к повышению точности эфемерид и загружаемых так называемых согласующих параметров для их последующего прогноза на борту на короткие интервалы времени требует все более частотного повторения упомянутых выше процедур, что неизбежно сталкивается с очевидными техническими и ресурсными ограничениями. Дополнительное обременение при этом состоит в необходимости обслуживания системных дополнений спутниковых группировок, в частности перспективных высокоорбитальных сегментов (ВОС) ГЛОНАСС. Кроме того, необходимость получения каких-либо данных извне лишает систему возможности функционировать в автономном режиме с требуемой точностью. Избежать более частой загрузки данных можно, например, путем реализации на борту процедур высокоточного прогнозирования движения НКА, которые хоть на текущий момент и используются на коротких интервалах, но неприемлемы в силу неудовлетворительной точности прогноза на длительных интервалах [13, 14]. Основной проблемой, препятствующей реализации на борту высокоточного прогноза, является наличие неопределенных факторов в модели движения НКА [11], связанных с негауссовскими ошибками системы ориентации НКА и определением ускорения, вызываемого давлением солнечного света.

Таким образом, возникает задача совершенствования используемых процедур прогноза и последующего уточнения прогнозных эфемерид, которая без участия наземной инфраструктуры должна быть решена имеющимися на борту средствами, а именно с помощью перспективных антенных систем (АС) межспутниковых измерений (МСИ) и обмена информацией [13–16]. С учетом того, что количество полезной нагрузки на НКА продолжает расти, “свободного” времени в цикле функционирования бортового оборудования, энергетических и вычислительных мощностей, которые могли бы быть свободно выделены в нужном качестве и количестве на решение обсуждаемой задачи, фактически не существует. Это приводит к появлению дополнительных ограничений применительно к диапазонам допустимых дальностей для проведения сеансов измерений, времени обмена информацией и углам визирования объектов взаимодействия в составе спутниковых группировок.

С учетом сказанного задача уточнения эфемерид НКА всей спутниковой группировки интерпретируется в рамках данной статьи как задача максимизации количества МСИ в единицу времени (задача на быстроедействие) при минимизации времени сеансов на передачу данных с учетом существующих технических ограничений.

1. Формализация задачи планирования и обработки измерений. Итак, рассматривается созвездие НКА ГЛОНАСС в составе штатной группировки из 24 аппаратов, каждый из которых оснащен АС МСИ одного типа. Параметры данного созвездия на этапе решения описываемой задачи восстанавливаются из файлов *sp3* [17, 18] с высокоточной эфемеридной информацией, поставляемых в том числе службой “Система высокоточного определения эфемеридно-временной информации” [19]. Дополнительно в сценариях исследования предполагается существование созвездия из шести аппаратов ГЛОНАСС ВОС, также оснащенных АС МСИ, но по умолчанию отличной от той, которая используется на борту НКА среднеорбитального сегмента. При этом параметры данного созвездия формируются путем высокоточного моделирования на основе интегрирования полных дифференциальных уравнений движения НКА [20, 21].

Предполагается, что АС МСИ функционирует на одной частоте с постоянным периодом L секунд [13, 14], из которых K секунд выделяется на отправку, а L — на прием навигационной информации в виде сигналов от других видимых НКА. Скорость передачи $\omega_{\text{СВС}}$ и среднеквадратическое отклонение (СКО) ошибки измерения дальности $\sigma_{\text{СВС}}$ предполагаются заданными.

Далее будем полагать, что АС МСИ и аппаратура передачи информации на борту НКА ВОС функционируют в непрерывном режиме на различных частотах. Скорость передачи информации $\omega_{\text{ВОС}}$ и СКО ошибки $\sigma_{\text{ВОС}}$ заданы в некотором диапазоне значений.

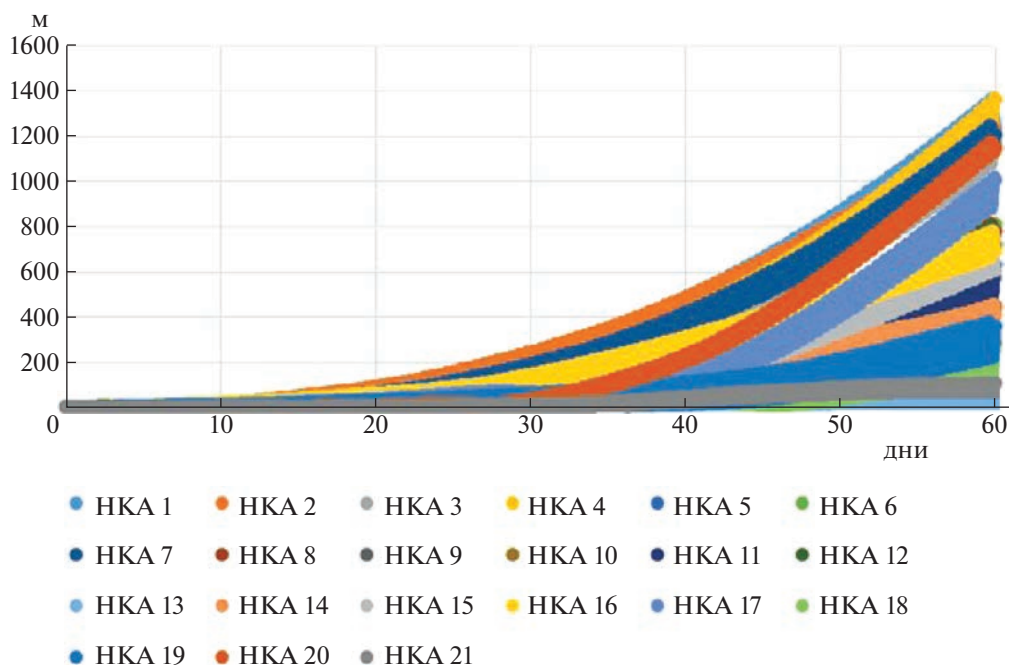


Рис. 1. Ошибки прогнозирования эфемерид

Предполагаемые характеристики АС МСИ и обмена информацией между сегментами орбитальных группировок (ОГ) также заданы в некотором диапазоне значений.

Существующие ограничения на организацию сеансов помимо очевидной проверки видимости и исключения влияния атмосферы учитывают также ограничения на максимальную дальность $\{D_{\max\text{BOC}}, D_{\max\text{CVC}}, D_{\max\text{BOC-CVC}}\}$ между НКА при организации парного сеанса, обусловленную требованиями по энергетике, а также взаимное угловое положение НКА относительно Земли, обусловленное требованиями по диаграмме направленности антенн $\{\alpha_{\min/\max\text{BOC}}, \alpha_{\min/\max\text{CVC}}, \alpha_{\min/\max\text{BOC-CVC}}\}$.

Таким образом, с учетом принятой здесь интерпретации задачи уточнения эфемерид необходимо минимизировать суммарное время обмена информацией в парных сеансах по всем созвездиям с целью передачи такого объема данных, который был бы достаточен для формирования оценок эфемерид НКА с требуемой точностью.

Одновременно существуют также дополнительные требования к искомому решению, такие, как необходимость “замыкания” полного созвездия средне- и высокоорбитального сегментов (СВС и ВОС) парными измерениями. Иными словами, для каждой пары НКА–НКА в обоих ОГ должны быть доступны как “прямое”, так и “встречное” измерения, поскольку в таком случае в результате обмена формируемыми измерениями между этими НКА удастся устранить ошибку “ухода” бортовых часов. Кроме того, поскольку три компоненты вектора состояния НКА для созвездия остаются ненаблюдаемыми [13, 14], условием решения задачи является накопление нужного числа измерений по всем НКА всех рассматриваемых созвездий. Дело в том, что результирующая ошибка эфемерид определяется как среднее всех получаемых по результатам обработки измерений ошибок оценок эфемерид для всех ОГ. Представление относительно требуемого уровня ошибок эфемерид, к которому нужно стремиться путем оптимизации процедуры планирования и обработки измерений, может быть сформировано на основе анализа рис. 1–3.

На рис. 1 представлена эволюция ошибок прогноза эфемерид НКА. Заметен существенный разброс ошибок для различных НКА, обусловленный разным влиянием неконтролируемых факторов. На рис. 2 рассмотрена эволюция ошибок эфемерид с учетом их уточнения по трем так называемым полным измерениям (здесь под “полным” измерением понимаем одно запросное

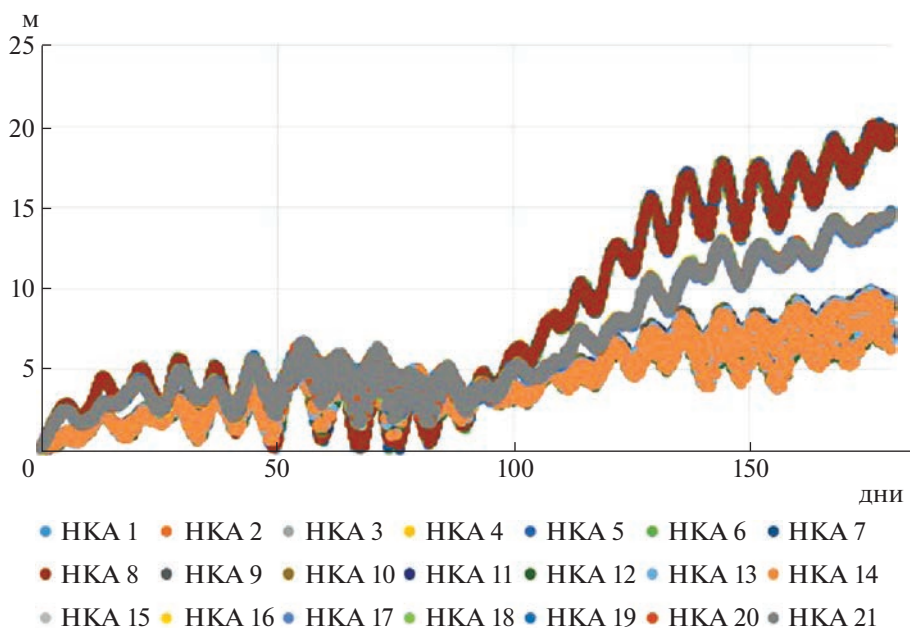


Рис. 2. Ошибки уточнения эфемерид, полученные при обработке трех полных измерений

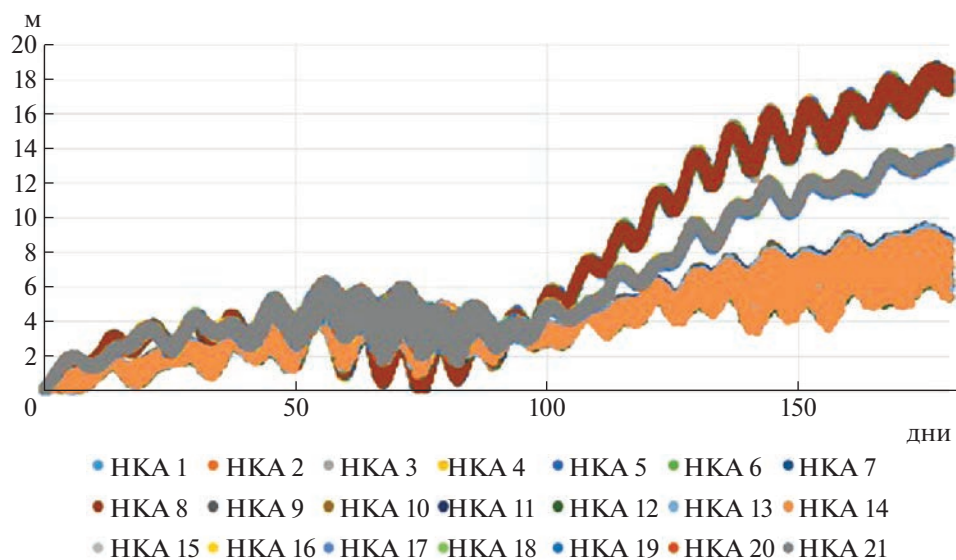


Рис. 3. Ошибки уточнения эфемерид, полученные при обработке четырех полных измерений

измерение по каждой паре НКА, т.е. $(N + M) \cdot (N + M - 1) / 2$ отдельных беззапросных измерений за половину суток), где $M = 24$ и $N = 6$. Наконец, на рис. 3 показано то же самое, но с учетом обработки шести полных измерений. Обработка менее трех измерений приводит к расхождению результатов. На всех рисунках ошибки приведены в метрах в зависимости от дней эксперимента. Почти не заметна разница в уровне получаемой точности, которая составляет для варианта трех измерений через 90 дней функционирования ОГ порядка 5 м максимальной ошибки, а для варианта шести измерений — около 4 м. Также на примере обработки трех и шести измерений пока-

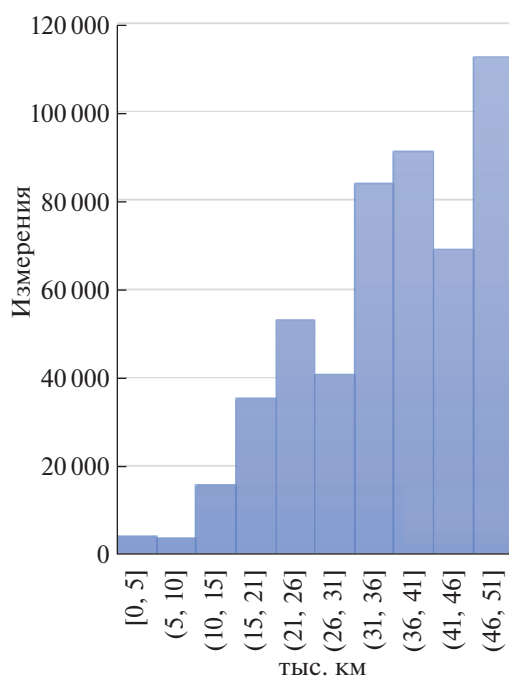


Рис. 4. Гистограмма взаимных дальностей внутри ОГ СВС ГЛОНАСС

зано, что дальнейшее повышение их числа не приводит к заметным улучшениям получаемой точности. Сказанное актуально для СКО уровня шума в канале измерений порядка 10 см.

Таким образом, обсуждаемая техническая задача характеризуется высокой размерностью подлежащих оптимизации параметров и требует учета существенного множества ограничений. При этом некоторые из этих ограничений могут интерпретироваться как оптимизируемые параметры вследствие того, что их значения не определены на текущий момент и, более того, могут варьироваться по результатам точности оценок эфемерид. Так как решение подобной задачи в аналитической форме практически невозможно, то авторами был выбран способ, состоящий в анализе возможных вариантов ее решения с их последующим полным перебором с учетом технических ограничений. В пользу такого достаточно простого подхода говорят свойства изо-маршрутности орбит НКА ГЛОНАСС СВС и геосинхронности орбит НКА ГЛОНАСС ВОС, для которых скорость прецессии орбит крайне мала. Иными словами, в первом случае орбиты всех НКА являются полностью повторяющимися, а во втором — стабильными относительно Земли и околоземных объектов. Следовательно, выбор восьмисуточного интервала для исследования закрывает вопрос повторения условий проведения эксперимента и упрощает решение поставленной задачи, позволяя масштабировать полученный результат на все остальные рабочие циклы функционирования рассматриваемых космических группировок.

Конечной целью перебора является определение таких условий взаимодействия с точки зрения генерации и обработки МСИ, при которых достигается требуемая точность оценок эфемерид КА за счет накопления нужного числа измерений в созвездиях СВС и ВОС, найденного выше путем моделирования.

2. Исходные данные задачи и анализ влияния ограничений. Рассмотрим исходные данные, определяющие основные условия решения задачи, в том числе условия видимости внутри и между ОГ СВС и ВОС с точки зрения ограничений на дальности и углы взаимного визирования. Напомним, что достаточно жесткими выступают ограничения по дальности абонентов СВС—СВС. Остальные ограничения являются варьируемыми и разбиваются при этом на допустимые и нежелательные. В силу вероятностной картины обсуждаемых феноменов, определяемых огромным количеством неконтролируемых факторов, наиболее адекватным способом представления

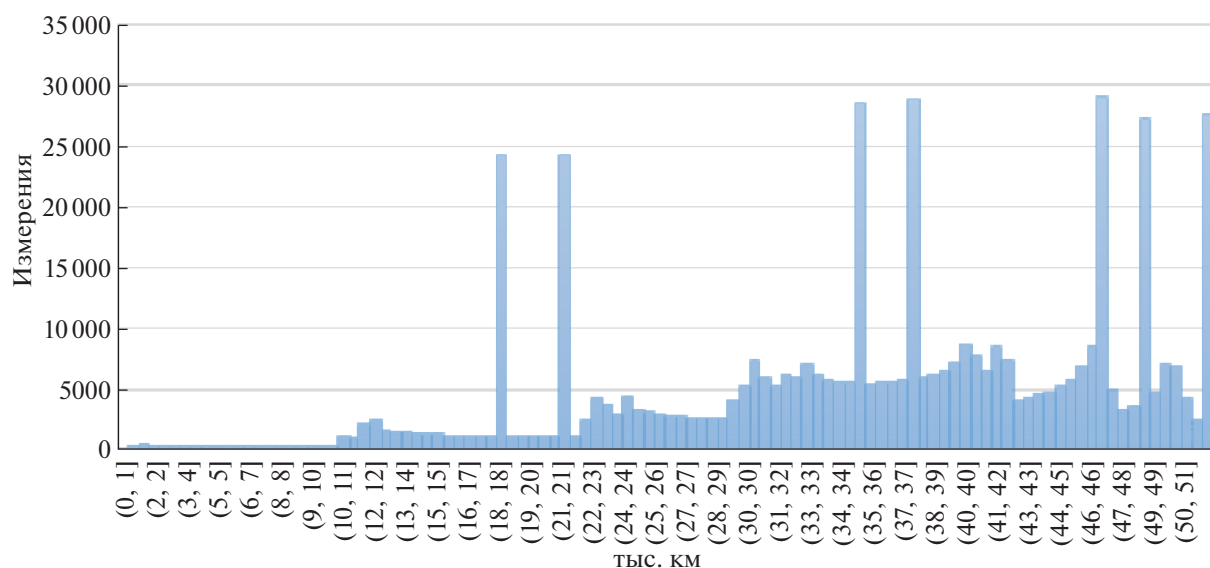


Рис. 5. Расширенная гистограмма взаимных дальностей внутри ОГ СВС ГЛОНАСС

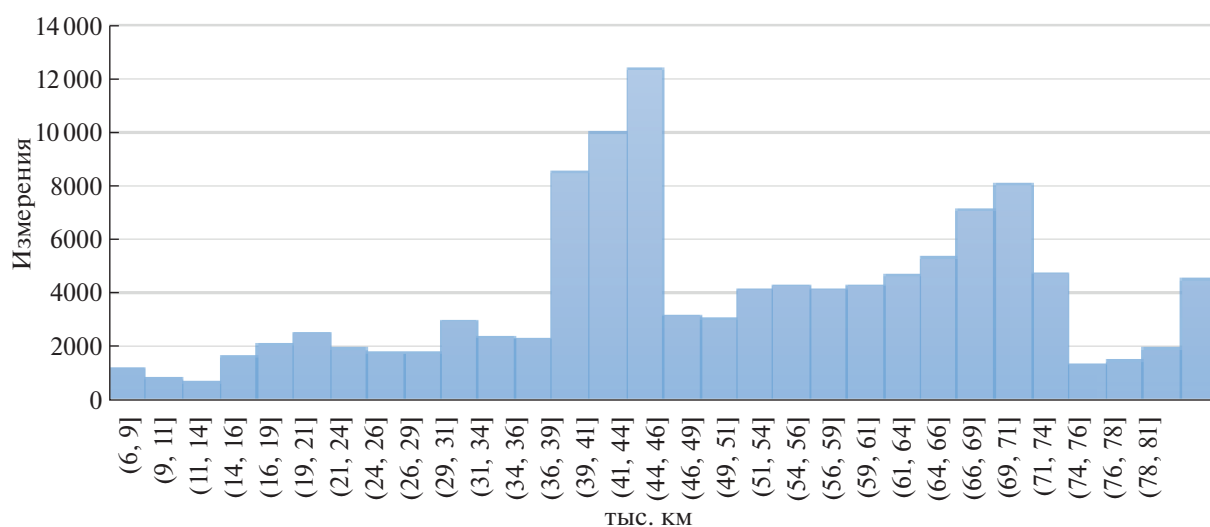


Рис. 6. Расширенная гистограмма взаимных дальностей внутри ОГ ВОС ГЛОНАСС

результатов анализа будет использование гистограмм анализируемых параметров, полученных путем моделирования соответствующих процессов на восьмисуточном интервале (рис. 4).

В связи с ограничением на максимальную дальность порядка 40 тыс. км вследствие применения на борту существующих НКА антенн с круговой диаграммой направленности, для которых как бы взаимные углы визирования между абонентами не важны, но максимальная дальность при этом снижается до обозначенного уровня, как видно, значительная часть сеансов отсекается. Это обстоятельство учитывалось авторами при проведении экспериментов. Наличие на гистограмме рис. 5 пиков объясняется изомаршрутностью и стабильностью конфигурации ОГ СВС ГЛОНАСС.

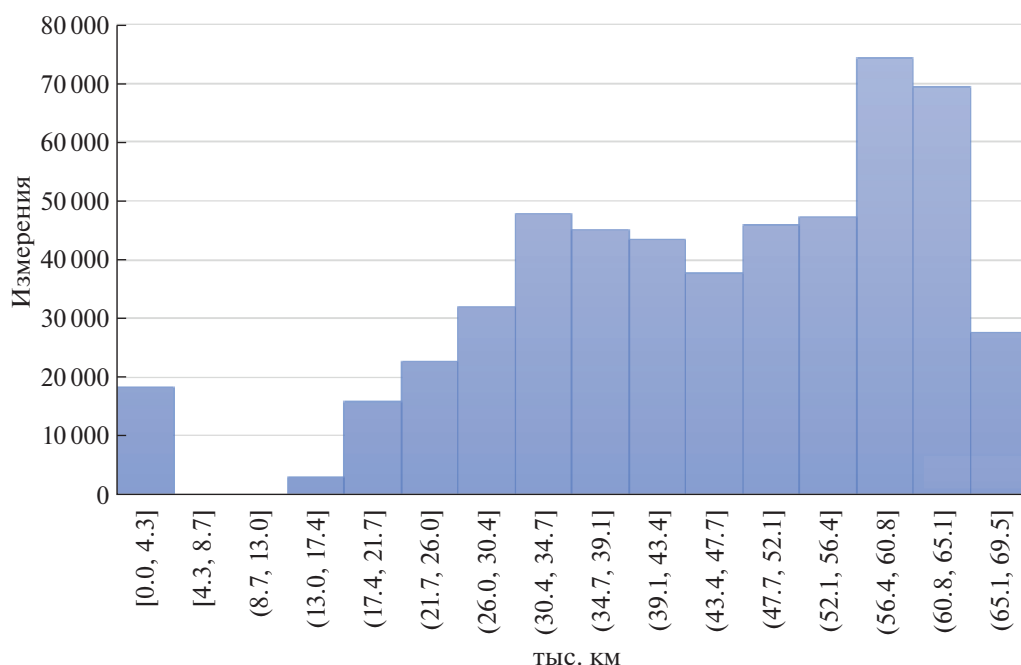


Рис. 7. Гистограмма взаимных дальностей между ОГ СВС и одним НКА ВОС ГЛОНАСС

Таким образом, можно констатировать, что накопление измерений может быть проведено достаточно быстро независимо от времени суток лишь для некоторых пар НКА.

Применительно к ВОС диапазон взаимных дальностей в отличие от СВС варьируется в очень широких пределах (рис. 6) и не имеет ярко выраженных отдельно стоящих пиков. Этот диапазон также весьма широк применительно к взаимодействию между группировками (одного НКА ВОС и СВС на рис. 7).

В результате “отсечение” значений дальностей свыше 40 тыс. км приведет к потере значительного количества потенциально возможных измерений и, как показали эксперименты, не позволит накопить их в достаточном количестве для проведения процедуры уточнения эфемерид с требуемым результатом. В этой связи ниже обсуждается вариант использования бортовой антенны с приемлемой по энергетике ширине диаграммы направленности, которая должна обеспечивать прием в нужном диапазоне углов визирования.

Анализ гистограмм на рис 8, 9 показывает, что при проведении большей части измерений внутри ВОС углы визирования принадлежат достаточно широкому диапазону (от 30 до 70°), а

Таблица. Процент времени видимости абонента с использованием АС МСИ на ВОС

Пара КА	Ограничение по дальности, тыс. км			
	40	50	60	70
	Процент времени сеанса			
1–2	46	100	100	100
1–3	32	46	62	93
1–4	0	13	38	58
1–5	39	52	70	100
1–6	40	53	71	100

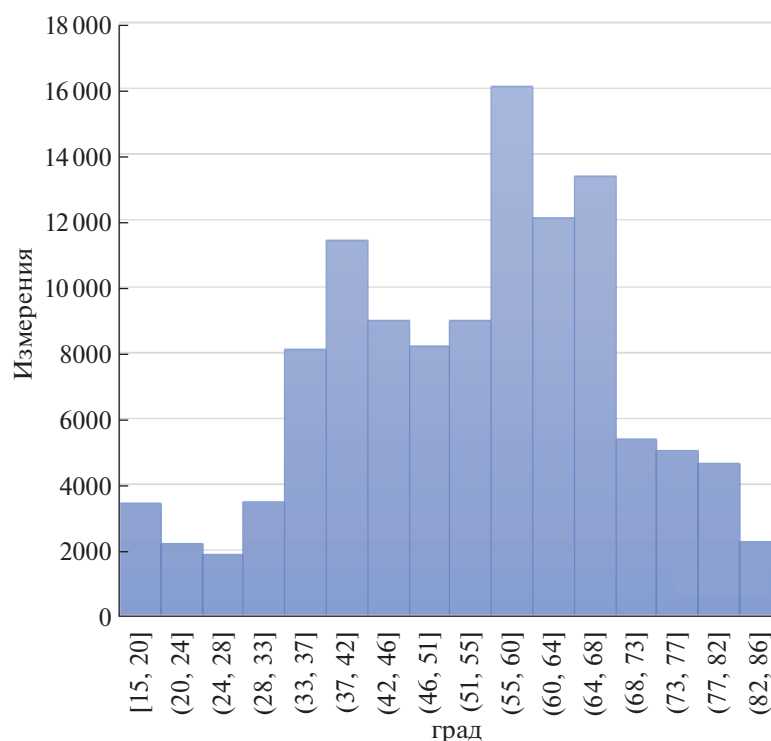


Рис. 8. Гистограмма углов визирования абонентов внутри ОГ ВОС ГЛОНАСС

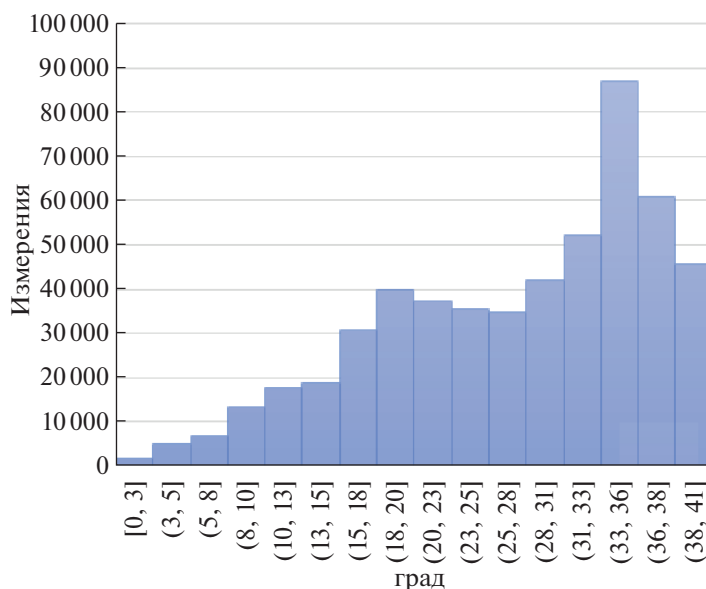


Рис. 9. Гистограмма углов визирования спутниками ВОС спутников ОГ СВС ГЛОНАСС

при проведении сеансов ВОС–СВС диапазон этих углов (от 10 до 40°) существенно отличается от используемого внутри созвездия ВОС. Это обстоятельство приводит к необходимости либо переключения усиления антенны в нужном направлении и применения антенны с фазированной антенной решеткой (АФАР), либо размещения двух различных антенн. В противном случае

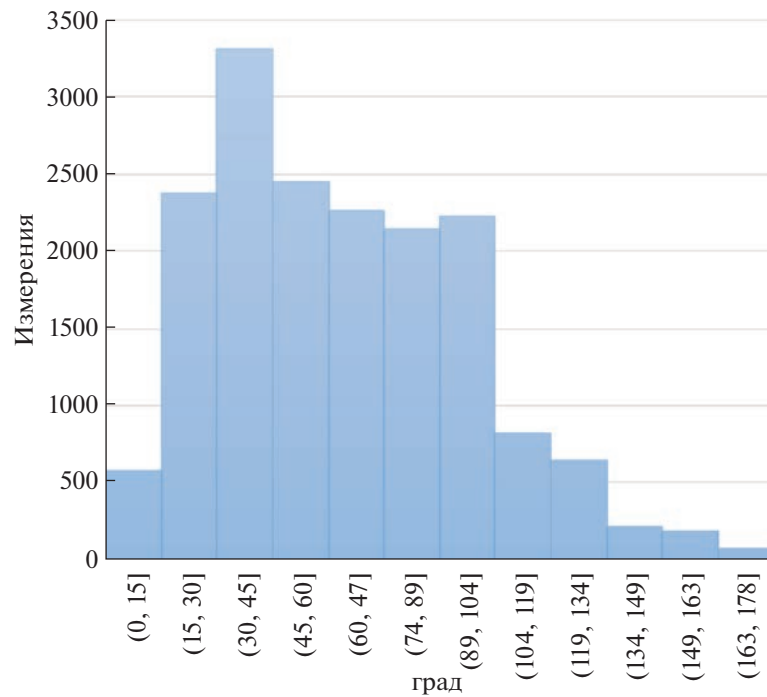


Рис. 10. Гистограмма углов визирования спутников ВОС спутниками ОГ СВС ГЛОНАСС

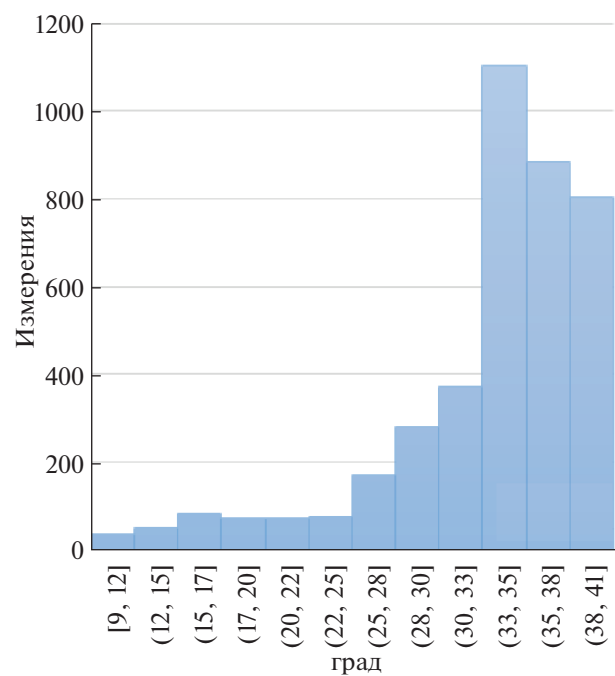


Рис. 11. Гистограмма углов визирования спутников ВОС спутниками ОГ СВС ГЛОНАСС при использовании антенны, направленной от Земли

“отсечение” потенциально возможных измерений будет производиться или по дальности, или по углам, в результате чего группировка ВОС фактически будет “отрезана” от СВС, а обмен данными внутри ВОС существенно затруднится. При проведении численных экспериментов обсуждаемые ограничения варьировались по дальностям и углам. При этом была получена оценка (в процентах) времени возможной организации сеансов взаимных измерений в зависимости от ограничений по дальности (см. таблицу).

Рассмотрим теперь условия работы НКА СВС при взаимодействии между группировками. Анализ гистограммы на рис. 10 показывает, что, несмотря на использование антенны с круговой диаграммой направленности, часть измерений от сегмента ВОС не может быть принята, так как для их приема на НКА СВС необходимо разместить антенну, направленную в сторону от Земли. Приведенная далее гистограмма (рис. 11) позволяет дать оценку числа “потерянных” потенциально возможных измерений при определенных углах визирования.

Согласно анализу соответствующей гистограммы (рис. 11), при отсутствии дополнительной антенны на СВС “отсекается” лишь правая часть диапазона, представленного на гистограмме на рис. 9, незначительно сужая исходный диапазон до $10\text{--}33^\circ$, т.е. по сути при первом рассмотрении не являясь обязательным элементом системы.

3. Результаты перебора и возможные варианты технических решений. Как уже указывалось, приведенные в предыдущем подразделе статьи гистограммы получены путем проведения численных экспериментов с использованием специально разработанного программного обеспечения. На основе анализа этих данных были выбраны допустимые интервалы перечисленных ниже параметров с целью их перебора в процессе проведения экспериментов:

- максимальная дальность для проведения сеансов МСИ внутри созвездия ВОС в диапазоне от 40 до 80 тыс. км;

- максимальная дальность проведения сеансов МСИ между созвездиями ВОС и СВС в диапазоне от 40 до 70 тыс. км;

- ширина диаграммы направленности передающей антенны ВОС и СВС для работы с ВОС от 5 до 45° с усилением для соответствующей дальности;

- рабочий диапазон диаграммы направленности антенны ВОС и СВС для работы с ВОС от 10 до 70° ;

- максимальная дальность проведения сеансов МСИ внутри созвездия СВС до 40 тыс. км;

- круговая диаграмма направленности антенны для работы внутри созвездия СВС.

Согласно объективно существующей необходимости упрощения реализации соответствующих технических решений, в процессе перебора преследовалась цель минимизировать требования к дальности и диапазону рабочих углов диаграммы направленности антенн. С учетом предложенных диапазонов было проведено моделирование процессов проведения сеансов измерений и их обработки с целью накопления нужного количества измерений (от трех полных измерений за виток) в имеющихся технических ограничениях. Детальный анализ результатов экспериментов показал, что не существует множества пересекающихся областей значений варьируемых параметров, для которых имеющиеся технические ограничения удовлетворяются одновременно.

Поясним на конкретных примерах. Так, для обмена данными внутри созвездия ВОС с минимальными требованиями по дальности (до 50 тыс. км) обеспечиваются условия регулярного взаимодействия на значительных углах визирования — от 50 до 60° с помощью узконаправленной тороидальной диаграммы антенны с узкими лепестками. Однако при использовании такой антенны сеансов МСИ и обмена данными между ВОС и СВС вообще не происходит. Возможность обмена между ВОС и СВС в некоторые моменты времени появляется при снижении диапазона углов антенны ВОС до $40\text{--}50^\circ$. Это приводит к потере сеансов между номерами 1 и 2 НКА ВОС при требовании увеличить максимальную дальность приема-передачи до 60 тыс. км. Дальнейшее снижение диапазона углов ВОС до $30\text{--}40^\circ$ вызывает в том числе уменьшение частоты сеансов между всеми парами ВОС и повышает требование к дальности до 70 тыс. км, позволяя, однако, установить стабильные сеансы с КА СВС. Тем не менее, доступных на витке сеансов ВОС—ВОС при этом достаточно для сбора необходимого количества измерений в интересах их обра-

ботки с целью уточнения эфемерид КА ВОС, что одновременно снижает возможности передачи значительного объема данных от других целевых нагрузок.

Заметим, что снижение диапазона углов ВОС менее 30° приводит к отсутствию стабильных сеансов между парами и “замыкание” созвездия возможно лишь через промежуточных абонентов, например 1–4; 4–5; 5–2 и т.д. Одновременно требования к дальности поднимаются до 80 тыс. км и появляются стабильные сеансы взаимодействия с СВС, ранее недоступные вследствие ограничений по дальности, углам визирования или геометрии взаимного расположения.

Подводя итоги сказанному, можно утверждать, что поставленная исходно задача на “быстродействие” решается лишь при условии выполнения жестких технических требований к бортовым аппаратным средствам. В связи с этим представляется целесообразным сформировать множество наиболее вероятных сценариев обмена данными с точки зрения наиболее приемлемых для реализации параметров бортовых аппаратных средств НКА. При этом были использованы следующие основные допущения:

обсуждаемые перспективные аппаратные средства МСИ имеют условно круговую диаграмму направленности с ограничением по дальности приема-передачи до 40 тыс км;

наибольший интерес представляет организация обмена данными между элементами ВОС, для чего, по-видимому, должна быть разработана аппаратура, обеспечивающая максимальное количество сеансов внутри этой группировки;

вновь разрабатываемая аппаратура для обеспечения сеансов обмена между ВОС и СВС будет унифицирована;

преодоление всех перечисленных выше технических ограничений возможно в случае использования АФАР, обеспечивающей упрощение организации сеансов внутри и между группировками КА ВОС и СВС.

Таким образом, возможно полное и регулярное взаимодействие ОГ с целью формирования и обмена МСИ для уточнения эфемерид до требуемого уровня:

с помощью обсуждаемых перспективных аппаратных средств для обмена данными внутри группировки СВС;

антенны с диаграммой от 30 до 45° ($\alpha_{\min/\max \text{ВОС}}, \alpha_{\min/\max \text{ВОС-СВС}}$) с дальностью до 65 тыс. км ($D_{\max \text{ВОС}}, D_{\max \text{ВОС-СВС}}$) либо с диаграммой от 30 до 40° с максимальной дальностью до 70 тыс. км для обмена внутри группировки ВОС и одновременно для приема-передачи с ВОС на СВС;

антенны с диаграммой в диапазоне $60-70^\circ$ ($\alpha_{\min/\max \text{СВС-ВОС}}$) либо $70-80^\circ$ (инвариантно) с максимальной дальностью до 65 тыс. км ($D_{\max \text{СВС-ВОС}}$) для КА СВС при взаимодействии с ВОС.

Альтернативным вариантом может быть установка направленной антенны с диаграммой от 25 до 45° с максимальной дальностью до 65 тыс. км, с помощью которой будут организованы сеансы связи и внутри ВОС, и между ВОС и СВС.

Представленные варианты конфигурации позволили организовать требуемое число сеансов МСИ с целью их последующей обработки и получения оценок эфемерид нужной точности.

Заключение. Предложено предварительное решение технической задачи уточнения эфемерид НКА существующего средневисотного сегмента ГЛОНАСС и перспективного ВОС в интересах совершенствования потребительских характеристик ГЛОНАСС и повышения автономности функционирования входящих в ее состав группировок НКА. Полученное решение включает информационную технологию организации сеансов проведения и обработки МСИ, обеспечивающую требуемую точность эфемерид в условиях соблюдения ряда технических ограничений. Одновременно проведен анализ влияния ключевых параметров перспективной бортовой аппаратуры МСИ на количество сеансов измерений, включая ограничения по максимальной дальности и диапазону углов приема-передачи навигационных сообщений и формируемых измерений, а также развит подход к определению требований к аппаратным средствам на основе перебора возможных вариантов их характеристик с учетом планирования всех сеансов ВОС–ВОС, ВОС–СВС и СВС–СВС.

С целью подтверждения эффективности предлагаемых технических решений проведены эксперименты на базе реальных и частично моделируемых данных, которые позволили уточнить требуемый объем аккумулируемых навигационных измерений и соответствующий уровень точ-

ности эфемерид, а также минимальные требования к характеристикам аппаратуры МСИ по каждому из типов аппаратов, необходимый для его достижения.

Авторы полагают, что развитый в данной статье подход к решению проблемы совершенствования потребительских характеристик ГЛОНАСС и снижения зависимости от загрузки данных с Земли для входящих в ее состав группировок НКА может составить основу комплексной технологии по дальнейшему совершенствованию ГЛОНАСС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kruzhkov D.M., Pasyukov V.V.* High-Accuracy Navigation Based on Informational GNSS Technologies. P. II. GLONASS – Information Technologies and Navigation Tasks Solving Algorithms. M.: Moscow Aviation Institute, 2021.
2. *Kruzhkov D.M., Pasyukov V.V.* National Global Navigation Satellite System GLONASS: Features of Creation, Development and Use. M.: Moscow Aviation Institute, 2022.
3. *Bartenev V.A., Grechkoseev A.K., Kozorez D.A., Krasilchshikov M.N., Pasyukov V.V., Sebyakov G.G., Syalo K.I.* Modern and Future Informational GNSS Technologies in High-Precision Navigation Tasks. M.: Fizmatlit. 2014.
4. GLONASS Information Analytics Center. <https://glonass-iac.ru/>, 10.12.2022.
5. *Krasil'shchikov M.N., Kruzhkov D.M.* On the Issue of Autonomous Refining of the Earth Orientation Parameters Onboard Spacecraft. Analysis of the Possibilities of Developed Information Technology // Cosmic Research. 2021. V. 59. № 5. P. 357–365.
6. *Grechkoseev A.K., Krasil'shchikov M.N., Kruzhkov D.M., Mararescul T.A.* Refining the Earth Orientation Parameters Onboard Spacecraft Concept and Information Technologies // J. Computer and Systems Sciences International. 2020. V. 59. № 4. P. 598–608.
7. International Earth Rotation Service. https://www.iers.org/IERS/EN/Home/home_node.html, 10.12.2022.
8. *Yuguo Y., Wenfeng N., Tianhe X., Zhenlong F., Huijie X., Zhangzhen S.* Earth Orientation Parameters Prediction Based on the Hybrid SSA + LS + SVM Model. Measurement Science and Technology. 2022. V. 33. № 12.
9. *Krasil'shchikov M.N., Kruzhkov D.M., Pasyukov V.V.* Current Problems of Improving the Coordinate-Time Support of GLONASS and Promising Methods for Their Solution. 1. Alignment of Coordinate Systems Used by Various Information Technologies to Refine the Geocenter's Position // J. Computer and Systems Sciences International. 2019. V. 58. № 4. P. 648–657.
10. *Montenbruck O., Steigenberger P., Aicher M.* A Long-Term Broadcast Ephemeris Model for Extended Operation of GNSS Satellites // J. of the Institute of Navigation. 2020. V. 68. № 5.
11. *Chen W., Jing G., Qile Z., Maorong G.* Improving the Orbits of the BDS-2 IGSO and MEO Satellites with Compensating Thermal Radiation Pressure Parameters // Remote Sensing. 2022. V. 14. № 3. P. 641.
12. *Krasilchshikov M.N., Sebyakov G.G.* Modern Information Technologies in the Navigation and Guidance Tasks of Unmanned Maneuverable Aircraft. M.: Fizmatlit. 2009.
13. *Grechkoseev A.K.* Study of Observability of Motion of an Orbital Group of Navigation Space System Using Intersatellite Range Measurements. I // J. Computer and Systems Sciences International. 2011. V. 50. № 2. P. 293–308.
14. *Grechkoseev A.K.* Study Of Observability Of Motion of an Orbital Group of Navigation Space System Using Intersatellite Range Measurements. II // J. Computer and Systems Sciences International. 2011. V. 50. № 3. P. 472–482.
15. *Chen W., Qile Z., Jing G., Jingan L., Gucang C.* The Contribution of Intersatellite Links to BDS-3 Orbit Determination: Model Refinement and Comparisons // J. of the Institute of Navigation. 2019. V. 66. № 1. P. 71–82.
16. *Zhao X., Jinhua L., Shanshi Z., Xiaojie L., Qiuli C., Gong Z., Haihong W.* Research on the Enhancement of BDS-3 Constellation Orbit Determination and ERP by Inter-satellite Link. China Satellite Navigation Conf. (CSNC 2022) Proceedings. China, Pekin, 2022.
17. *Akimov E.V., Kruzhkov D.M., Yakimenko V.A.* High-Precision Simulation of Onboard Signal Receivers in Global Navigation Systems // Russian Engineering Research. 2020. V. 40. № 2. P. 152–155.

18. *Akimov E.V., Kruzhkov D.M., Yakimenko V.A.* Prototype Information System for High-Precision Navigation in Global Satellite Systems // Russian Engineering Research. 2020. V. 40. № 2. P. 156–159.
19. *SVOEVP*. <http://www.glonass-svoevp.ru/index.php?lang=ru>, 10.12.2022.
20. *Vallado D.A.* Fundamentals of Astrodynamics and Applications. Portland: Microcosm Press, 2022. P. 1122.
21. *Kruzhkov D.M., Pasyukov V.V.* High-Accuracy Navigation Based on Informational GNSS Technologies. P. I. Mathematical Basis. M.: Moscow Aviation Institute, 2021.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 531.38

КАЧЕНИЕ МОНОКОЛЕСА ПО ДЕФОРМИРУЕМОМУ БРУСУ

© 2023 г. Ю. Ф. Голубев^{a,*}, В. В. Корянов^{a,**}

^aИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*e-mail: golubev@keldysh.ru

**e-mail: korianov@keldysh.ru

Поступила в редакцию 27.02.2023 г.

После доработки 13.03.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Представлен метод расчета колебаний упруговязкого бруса, лежащего на двух разновысоких упругих опорах, при движении по нему моноколеса с постоянной продольной скоростью. Получены уравнения движения моноколеса, соответствующие главной моде колебаний системы. Предложен метод вычисления частоты колебаний моноколеса на брус. Найдено приближенное усредненное решение, позволяющее аналитически оценить влияние параметров системы на ее динамику. Приведены результаты численных экспериментов по оценке точности приближенного решения.

DOI: 10.31857/S0002338823040066, EDN: OCLSTR

Введение. Рассматривается вопрос о преодолении широкой и протяженной расщелины с использованием бруса в качестве опоры. Исследуется влияние помех на движение, возникающих из-за основной моды малых упруговязких колебаний бруса. Для простоты изучается вариант, когда робот имеет только одну точку контакта. Естественным материальным объектом, для которого это, очевидно, выполнено, является недеформируемое моноколесо. Моноколесо как транспортное средство было создано в 2009 г. [1] и с той поры стало популярным, особенно в городах. В работе предполагается, что управление системой состоит в том, чтобы поддерживать постоянной продольную скорость движения моноколеса, направленную вдоль первоначально недеформированного бруса, и отслеживать осевую линию бруса. Вопросы путевой устойчивости робота не исследуются. Аналогичная задача о движении материальной точки по упругому рельсу анализировалась ранее в связи с необходимостью изучения движения поездов по железнодорожным мостам [2], при создании аттракционов с учетом воздействия подвижных нагрузок [3], при анализе движения реактивных снарядов по направляющим [4]. Поэтому задача представляет интерес не только с теоретической, но также и с практической точки зрения. В аккуратной постановке изучаемая механическая система относится к разряду гибридных, описываемых совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Решение подобных задач требует сравнительно больших вычислительных ресурсов и мало пригодно для проведения массовых расчетов. Авторами преследуется цель создать достаточно удобную и малозатратную приближенную модель динамики системы, пригодную для предварительной оценки работоспособности алгоритмов преодоления препятствий. Переправа моноколеса по деформируемому брус рассматривалась ранее авторами в работе [5]. Ниже представлен вариант с некоторыми уточнениями, добавлениями и исправленными опечатками. Статья содержит вывод упрощенной динамической модели движения моноколеса по упруговязкому брус, лежащему на разновысоких упругих опорах, и аналитическое исследование некоторых свойств решений полученных уравнений движения. В конечном виде найдено приближенное решение и выполнена оценка его точности. Результаты свидетельствуют о том, что построенная модель пригодна для предварительной оценки робастности алгоритмов управления.

1. Уравнения движения колеса по упруговязкому брус. Пусть прямой однородный брус длины l висит между двумя упругими разновысокими шарнирно-подвижными опорами: A — левая опора и B — правая опора. Ось недеформированного бруса составляет с горизонтальной плоскостью угол ϑ : $\sin \vartheta = (H_B - H_A)/l$, где H_A — высота точки A и H_B — высота точки B над опорной горизонтальной плоскостью. В каждой точке опоры может возникать реакция, действующая со

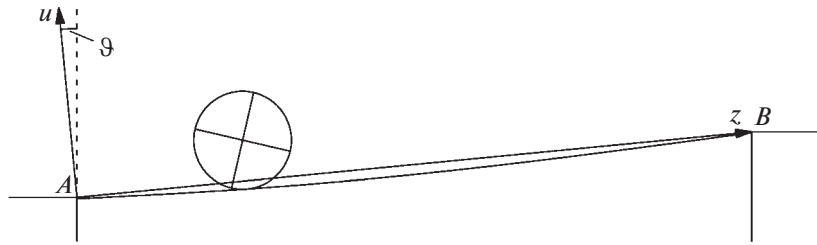


Рис. 1. Общий вид механической системы.

стороны опоры на брус, пропорциональная смещению точки опоры. Брус имеет вес $P_r = \gamma l$ и обладает свойством упругого сопротивления изгибу с жесткостью EJ поперечного сечения при изгибе, где E — модуль Юнга: $[E] = L^{-1}MT^{-2}$, J — момент инерции поперечного сечения бруса относительно горизонтальной оси сечения, перпендикулярной к плоскости изгиба. Например, для деревянного бруса модуль Юнга можно принять равным $E = 10^{10}$ Па. Если сечение бруса прямоугольное со сторонами a и b , то $J = ab^3/12$ при горизонтальной стороне a , расположенной перпендикулярно плоскости изгиба. На брус на расстоянии x от его левого конца находится колесо массы m и радиуса r . Центр масс колеса совпадает с центром колеса. Момент инерции относительно оси колеса равен I . Колесо катится по брусу без проскальзывания (рис. 1). Проекция точки опоры колеса на ось недеформированного бруса движется вдоль бруса от точки A к точке B с постоянной скоростью v . Требуется оценить влияние упругих свойств бруса на движение колеса.

Возьмем вертикальную плоскость, содержащую точки A и B . В этой плоскости пустим ось Az из точки A вдоль оси недеформированного бруса по направлению к точке B . Ось Au направим вверх перпендикулярно к оси недеформированного бруса. Брус взаимодействует с колесом в единственной точке, расположенной на оси бруса на расстоянии x от точки A . Колесо действует на брус силой F , а брус действует на колесо силой $-F$ соответственно. Силовой момент в точке контакта отсутствует. Пусть функция $u(t, z)$ описывает отклонение оси деформированного бруса от оси Az . Будем считать относительную деформацию бруса вместе с ее частной производной по z малыми первого порядка. Тогда с точностью до малых второго порядка единичный вектор $\tau \approx (1, u'_z)$ направлен по касательной к брусу в фиксированный момент времени, а единичный вектор нормали к оси бруса можно представить в виде $\mathbf{v} \approx (-u'_z, 1)$. С учетом того, что точка опоры колеса о брус имеет координаты $(x, u(t, x))$, радиус-вектор $\mathbf{r}_c$ центра масс колеса можно записать как $\mathbf{r}_c = (x - ru'_z(t, x), u(t, x) + r)$. Найдем проекцию центра масс на ось, параллельную касательному вектору τ и проходящую через точку A :

$$\mathbf{r}_c \cdot \tau = x + u(t, x)u'_z(t, x) \approx x$$

с точностью до малых второго порядка. Таким образом, можно считать, что точка касания колеса с деформированным брусом отстоит от точки A на расстояние x и, следовательно, колесо имеет постоянную угловую скорость качения $\omega = \dot{x}/r = v/r$. Пусть M — управляющий момент относительно оси моноколеса. Из уравнения баланса силовых моментов относительно точки касания моноколеса с брусом получим

$$M + mgr[\sin \vartheta + u'_z(t, x)\cos \vartheta] + M_{\text{тр}} = 0.$$

Отсюда видно, что управляющий момент должен преодолевать момент силы тяжести, возникающий из-за наклона деформированного бруса, и момент трения качения $M_{\text{тр}}$. Предположим, что следящая по угловой скорости система справляется с этой задачей и обратимся к анализу составляющей движения вдоль оси Au .

Будем считать, что моноколесо совершает безотрывное движение вдоль бруса и касается его в единственной точке, определяемой координатой x на оси недеформированного весомого бруса.

Тогда колесо в направлении оси Au воздействует на брус сосредоточенной силой $\mathbf{F} = (0, F)$. Деформация бруса описывается уравнением [2]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\gamma \cos \vartheta - \frac{m}{l} \left(g \cos \vartheta + \frac{d^2 u_d}{dt^2} \right) \delta(z - x), \quad (1.1)$$

где u — отклонение оси бруса от оси Az , ρ — погонная плотность бруса, g — ускорение силы тяжести, $\delta(z - x)$ — сингулярная δ -функция:

$$\delta(z - x) = \begin{cases} 0, & z \neq x, \\ +\infty, & z = x, \end{cases} \quad \int_0^z \delta(z - x) dz = \sigma(z - x) = \begin{cases} 0, & z < x, \\ 1, & z \geq x, \end{cases}$$

$\sigma(z - x)$ — сингулярная функция Хевисайда. Полная производная от вертикальной координаты u_d , движущейся по брусу точки приложения силы вычисляется как

$$\frac{d^2 u_d}{dt^2} = \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 u_d}{\partial t \partial z} + v^2 \frac{\partial^2 u_d}{\partial z^2},$$

когда горизонтальная скорость v перемещения точки x по брусу постоянна. В общем случае решение уравнения (1.1) получается численным методом [2] и затруднено из-за наличия δ -функции с переменным положением порога.

Уравнение движения предстанет в еще более сложном виде, чем уравнение (1.1), если учесть внутреннюю диссипацию бруса. Вместе с тем наличие диссипации успокаивает собственные высокочастотные колебания бруса, приводя в конечном итоге его осевую линию к равновесной форме. Предположим, что процесс успокоения собственных колебаний бруса происходит так быстро, что можно ограничиться случаем квазистатического подсчета сил, влияющих со стороны бруса на колесо. В этом предположении брус при любом расположении колеса на нем будет отслеживать форму равновесия, мгновенно соответствующую положению колеса и силам инерции, которые действуют на брус со стороны колеса. По постановке задачи колесо может совершать движение лишь в связанной с брусом вертикальной плоскости.

Точечное взаимодействие колеса с брусом описывается контактной силой $\mathbf{F}$ воздействия колеса на брус, направленной по оси Au . Тогда сила $\mathbf{F}_p$ воздействия бруса на колесо будет равна $\mathbf{F}_p = -\mathbf{F}$. Брус оказывает сопротивление движению колеса в отрицательном направлении оси Au и не препятствует уходу колеса с бруса в положительном направлении этой оси. Найдем соотношение между силой $\mathbf{F}$ и осевой линией равновесия бруса.

Пусть в некоторой точке x к брусу приложена сила $\mathbf{F}$, перпендикулярная к оси недеформированного бруса. Составляющие реакций опор $\mathbf{N}_A$ и $\mathbf{N}_B$, направленные вдоль оси Au , выражаются формулами

$$N_A = \frac{P}{2} - (1 - \kappa)F, \quad N_B = \frac{P}{2} - \kappa F,$$

где $P = P_r \cos \vartheta$, $\kappa = x/l$, а величина F учитывается со знаком. Если сила $\mathbf{F}$ сонаправлена с осью Au , то $F > 0$, а если нет, то $F < 0$. Пусть функция $u(z)$ задает форму оси бруса. Считая деформации и угол ϑ малыми, представим функцию $u(z)$ в виде суммы: $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$, где $u_1(z)$ — статическое смещение точек оси бруса при условии, что опоры не деформируются, а $u_2(z)$ — смещение точек оси бруса из-за деформации опор. Тогда производная $u'_1(z) = du_1/dz$ выражается формулой [2]

$$EJu'_1(z) = EJ u'_1(0) + \left[\frac{P}{2} - (1 - \kappa)F \right] \frac{z^2}{2} + \frac{(z - x)^2}{2} F \sigma(z - x) - \frac{\gamma \cos \vartheta z^3}{6}. \quad (1.2)$$

Зависимость $u_1(z)$ имеет вид

$$EJu_1(z) = EJ u_1(0)z + \left[\frac{P}{2} - (1 - \kappa)F \right] \frac{z^3}{6} + F \frac{(z - x)^3}{6} \sigma(z - x) - \frac{\gamma \cos \vartheta z^4}{24}. \quad (1.3)$$

При $z = l$ прогиб бруса должен равняться нулю: $u_1(l) = 0$. Поэтому

$$EJu'_1(0) = \frac{Fl^2}{6} \kappa(1 - \kappa)(2 - \kappa) - \frac{Pl^2}{24}. \quad (1.4)$$

Компонента $u_1(x)$ прогиба бруса в точке x дается соотношением

$$EJu_1(x) = \frac{Fl^3}{3} \kappa^2 (1 - \kappa)^2 - \frac{Pl^3}{24} \kappa (1 - \kappa) (1 + \kappa - \kappa^2). \quad (1.5)$$

Компоненту $u_2(z)$ прогиба бруса в точке z можно выразить формулой

$$u_2(z) = - \left[\frac{N_A}{k_A} \left(1 - \frac{z}{l} \right) + \frac{N_B z}{k_B l} \right], \quad (1.6)$$

где k_A, k_B — коэффициенты упругости опоры в точках A и B соответственно. Подставив сюда найденные ранее значения N_A и N_B , найдем

$$u_2(x) = F \left[\frac{(1 - \kappa)^2}{k_A} + \frac{\kappa^2}{k_B} \right] - \frac{P}{2} \left(\frac{1 - \kappa}{k_A} + \frac{\kappa}{k_B} \right). \quad (1.7)$$

Суммарное смещение бруса в точке x принимает вид

$$u(x) = F\delta_F - P\delta_P, \quad (1.8)$$

где коэффициенты влияния δ_F и δ_P даются выражениями

$$\delta_F = \left(\mu \kappa^2 + \frac{1}{k_A} \right) (1 - \kappa)^2 + \frac{\kappa^2}{k_B}, \quad \delta_P = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\mu \kappa (1 + \kappa - \kappa^2)}{4} + \frac{1}{k_A} \right) (1 - \kappa) + \frac{\kappa}{k_B} \right], \quad (1.9)$$

причем $\mu = l^3/(3EJ)$. Эти формулы можно представить в более симметричном виде, применив замену $\kappa = 1/2 + \xi$:

$$\begin{aligned} \delta_F &= \mu \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right)^2 + \frac{1}{k_A} \left(\frac{1}{2} - \xi \right)^2 + \frac{1}{k_B} \left(\frac{1}{2} + \xi \right)^2, \\ \delta_P &= \frac{\mu}{8} \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \left(\frac{5}{4} - \xi^2 \right) + \frac{1}{2k_A} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) + \frac{1}{2k_B} \left(\frac{1}{2} + \xi \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнение движения центра масс колеса в проекции на ось Au принимает вид

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + fm\dot{u} = -m\hat{g} - F,$$

где $\hat{g} = g \cos \vartheta$, F — сила, с которой колесо действует на брус, $fm > 0$ — коэффициент демпфирования, возникающий из-за внутренней диссипации энергии бруса. Приняв, что сила $(-F)$ вызывается упругостью бруса, с помощью соотношения (1.8) получим замкнутое уравнение движения центра масс колеса в проекции на ось Au :

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + fm\dot{u} + \frac{1}{\delta_F} u = -m\hat{g} - P \frac{\delta_P}{\delta_F}, \quad (1.11)$$

причем $\kappa = vt/l$, $\xi = -1/2 + vt/l$. Уравнение (1.11) представляет собой аналог уравнения Виллиса—Стокса, полученного ими ранее для движения груза с постоянной скоростью по невесомой упругой балке с закрепленными концами [6]. При этом уравнение (1.11), в отличие от уравнения Виллиса—Стокса, не содержит особенностей, что делает его более физически правдоподобным. Поскольку брус представляет собой освобождающую связь, имеем ограничение $u < 0$. Если оно нарушено, то колесо может с бруса упасть. Кроме того, должно быть выполнено условие, что колесо касается бруса только в одной точке. Поэтому радиус кривизны ρ_r осевой линии бруса должен быть больше, чем радиус колеса r . Следовательно, должно быть выполнено

$$\frac{1}{\rho_r} = \frac{|u''(x)|}{\sqrt{1 + [u'(x)]^2}} < \frac{1}{r}, \quad (1.12)$$

где штрих, как и прежде, обозначает дифференцирование по z . В соответствии с формулами (1.2), (1.3) и (1.6) получим

$$\begin{aligned} u''(x) &= \frac{3\mu}{l^2} \kappa(1-\kappa) \left[\frac{P}{2} - F \right] = \frac{3\mu}{l^2} \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \left[\frac{P}{2} - F \right], \\ u'(x) &= \frac{\mu}{l} (1-2\kappa) \left[F \kappa(1-\kappa) - \frac{P}{8} (1+2\kappa-2\kappa^2) \right] + u'_2(x), \\ u'_2(x) &= F \left(\frac{\kappa}{k_B} - \frac{1-\kappa}{k_A} \right) + \frac{P}{2} \left(\frac{1}{k_A} - \frac{1}{k_B} \right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u''(x) &= \frac{3\mu}{l^2} \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \left[\frac{P}{2} - F \right], \\ u'(x) &= -\frac{2\mu}{l} \xi \left[F \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) - \frac{P}{8} \left(\frac{3}{2} - 2\xi^2 \right) \right] + u'_2(x), \\ u'_2(x) &= F \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_B} - \frac{1}{k_A} \right) + \left(\frac{1}{k_B} + \frac{1}{k_A} \right) \xi \right] + \frac{P}{2} \left(\frac{1}{k_A} - \frac{1}{k_B} \right). \end{aligned}$$

Уравнение (1.11) следует интегрировать при начальных условиях

$$u(0) = -\frac{m\hat{g} + P/2}{k_A}, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (1.13)$$

и постоянном значении v .

2. Исследование качения колеса по брусу. Если в уравнении (1.11) принять $v = 0$, то оно превращается в обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Как видно из первой формулы (1.9), коэффициент δ_F оказывается строго положительным. Тогда при значениях параметра $f < 2/\sqrt{m\delta_F}$ уравнение (1.11) описывает затухающие колебания с постоянной частотой

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m\delta_F} - \frac{f^2}{4}}$$

относительно равновесного значения

$$u_s(\kappa) = -m\hat{g}\delta_F - P\delta_P. \quad (2.1)$$

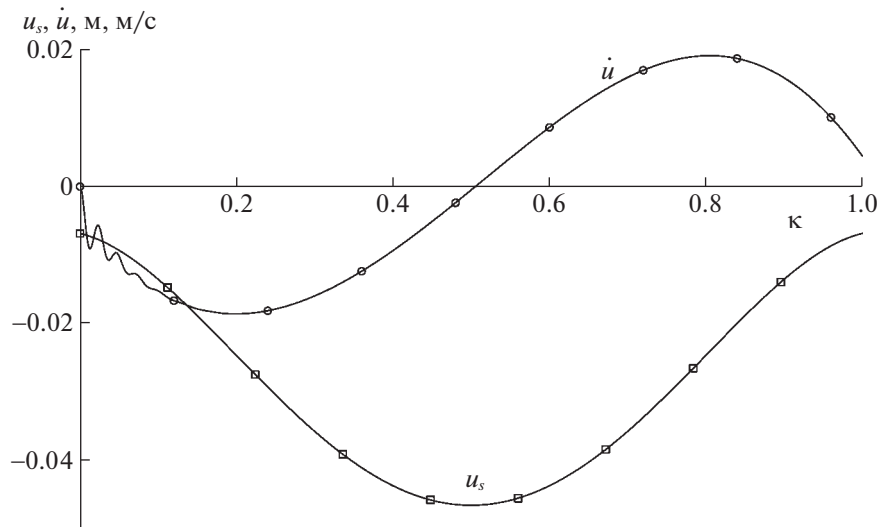
На рис. 2 показана функция $u_s(\kappa)$ при массе колеса $m = 16$ кг для деревянного бруса, имеющего размеры $l = 2.5$ м, $a = 25$ см, $b = 2$ см. Коэффициенты жесткости при взаимодействии бруса с грунтом приняты равными $k_A = k_B = 30000$ Н/м. Функция $u_s(\kappa)$ симметрична относительно значения $\kappa = 1/2$. В начальной ($\kappa = 0$) и конечной ($\kappa = 1$) точках она выпукла вверх. Видно, что в точках A и B брус вместе с колесом продавливает грунт меньше, чем на 1 см. Минимальное значение прогиба бруса относительно прямой, соединяющей ее концы, достигается, когда колесо находится в середине бруса, и составляет ~ -5 см.

При $v \neq 0$ и

$$\frac{v}{l} \ll \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m\delta_F} - \frac{f^2}{4}}$$

величина $u_s(x)$ представляет собой медленно меняющуюся функцию в зависимости от времени. Смысл ограничения на величину v состоит в том, что в пределах времени каждого колебания значение функции $u_s(x)$ можно считать практически неизменным и равным, например, значению, соответствующему началу колебания. Тем самым получается, что при малых значениях скорости v колебания по координате u в среднем будут происходить в окрестности функции $u_s(x)$. Понятно, что приведенный анализ является интуитивным и носит в основном качественный характер.

При скорости $v = 0.4$ м/с и коэффициенте диссипации $f = 10$ с⁻¹ получается решение $u(\kappa)$ уравнения (1.11), график которого в выбранном на рис. 2 масштабе мало отличается от графика

Рис. 2. Функции $u_s(\kappa)$, $\dot{u}_s(\kappa)$.

функции $u_s(\kappa)$. На этом рисунке показан лишь график производной по времени $\dot{u}_s(\kappa)$, который свидетельствует о том, что в начале движения брус вместе с грузом колеблется и колебания затухают достаточно быстро.

Для того, чтобы выявить более точную зависимость средних значений деформации бруса от скорости движения точки, представим решение уравнения (1.11) в виде

$$u = y + u_s(x) \quad (2.2)$$

и учтем, что

$$\dot{u}_s(x) = -\frac{v}{l} \left[m\hat{g} \frac{d\delta_F}{d\kappa} + P \frac{d\delta_P}{d\kappa} \right], \quad \ddot{u}_s(x) = -\frac{v^2}{l^2} \left[m\hat{g} \frac{d^2\delta_F}{d\kappa^2} + P \frac{d^2\delta_P}{d\kappa^2} \right], \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_F}{d\kappa} &= 2(1-\kappa) \left[\mu\kappa(1-2\kappa) - \frac{1}{k_A} \right] + \frac{2\kappa}{k_B}, \quad \frac{d\delta_P}{d\kappa} = \frac{1}{2} \left[\frac{\mu(1-2\kappa)(1+2\kappa-2\kappa^2)}{4} - \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right], \\ \frac{d^2\delta_F}{d\kappa^2} &= 2 \left[\mu(1-6\kappa+6\kappa^2) + \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right], \quad \frac{d^2\delta_P}{d\kappa^2} = -\frac{3\mu\kappa(1-\kappa)}{2}. \end{aligned}$$

Или

$$\dot{u}_s(x) = -\frac{v}{l} \left[m\hat{g} \frac{d\delta_F}{d\xi} + P \frac{d\delta_P}{d\xi} \right], \quad \ddot{u}_s(x) = -\frac{v^2}{l^2} \left[m\hat{g} \frac{d^2\delta_F}{d\xi^2} + P \frac{d^2\delta_P}{d\xi^2} \right], \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_F}{d\xi} &= -4\mu \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \xi - \frac{2}{k_A} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) + \frac{2}{k_B} \left(\frac{1}{2} + \xi \right), \quad \frac{d\delta_P}{d\xi} = \frac{1}{2} \left[-\mu\xi \left(\frac{3}{4} - \xi^2 \right) - \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right], \\ \frac{d^2\delta_F}{d\xi^2} &= 2 \left[-2\mu \left(\frac{1}{4} - 3\xi^2 \right) + \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right], \quad \frac{d^2\delta_P}{d\xi^2} = -\frac{3}{2} \mu \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right). \end{aligned}$$

Тогда y должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\ddot{y} + f\dot{y} + \frac{1}{m\delta_F} y = f \frac{v}{l} \left[m\hat{g} \frac{d\delta_F}{d\kappa} + P \frac{d\delta_P}{d\kappa} \right] + \frac{v^2}{l^2} \left[m\hat{g} \frac{d^2\delta_F}{d\kappa^2} + P \frac{d^2\delta_P}{d\kappa^2} \right] \quad (2.5)$$

при начальных условиях

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = -\dot{u}_s(0). \quad (2.6)$$

Формула (2.5) показывает, что решение уравнения (1.11) будет отклоняться от функции $u_s(x)$ не только пропорционально квадрату скорости v , но при учете диссипации оказывается пропорциональным еще и произведению скорости на коэффициент демпфирования.

Для упрощения дальнейшего анализа примем $k_A = k_B = k$. При этом формулы (1.10) записываются как

$$\delta_F = \mu \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right)^2 + \frac{2}{k} \left(\frac{1}{4} + \xi^2 \right), \quad \delta_P = \frac{\mu}{8} \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \left(\frac{5}{4} - \xi^2 \right) + \frac{1}{2k} \quad (2.7)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_F}{d\xi} &= 4\xi \left[-\mu \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) + \frac{1}{k} \right], & \frac{d\delta_P}{d\xi} &= -\frac{\mu\xi}{2} \left(\frac{3}{4} - \xi^2 \right), \\ \frac{d^2\delta_F}{d\xi^2} &= 4 \left[-\mu \left(\frac{1}{4} - 3\xi^2 \right) + \frac{1}{k} \right], & \frac{d^2\delta_P}{d\xi^2} &= -\frac{3}{2}\mu \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} C(\xi) &= m\hat{g} \frac{d\delta_F}{d\xi} + P \frac{d\delta_P}{d\xi} = G\xi(\xi^2 + \alpha), \\ D(\xi) &= m\hat{g} \frac{d^2\delta_F}{d\xi^2} + P \frac{d^2\delta_P}{d\xi^2} = 3G(\xi^2 + \beta), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$G = \frac{\mu(8m\hat{g} + P)}{2}, \quad \alpha = \frac{8m\hat{g}(4 - k\mu) - 3k\mu P}{4k\mu(8m\hat{g} + P)}, \quad \beta = \frac{8m\hat{g}(4 - k\mu) - 3k\mu P}{12k\mu(8m\hat{g} + P)}, \quad (2.9)$$

так что

$$\beta = \frac{\alpha}{3}, \quad -\frac{3}{4} < \alpha < \frac{4 - k\mu}{4k\mu}. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.5) можно переписать следующим образом:

$$\ddot{y} + f\dot{y} + \frac{1}{m\delta_F}y = f\frac{v}{l}C(\xi) + \frac{v^2}{l^2}D(\xi). \quad (2.11)$$

Видно, что если скорость $v = 0$, то уравнение (2.11) описывает при $t \rightarrow \infty$ асимптотическое стремление функции $y(t)$ к нулевому среднему значению $y = y_r = 0$, а функция $u(t)$ будет тогда стремиться к значению $u_s(\xi)$, соответствующему фиксированному значению ξ . Если ξ меняется, т.е. $v \neq 0$, то из-за влияния функций $C(\xi)$ и $D(\xi)$ среднее значение $y_r(\xi)$ будет отклоняться от нуля в зависимости от положения колеса на бруссе.

Для того чтобы качественно исследовать зависимость $y_r(\xi)$, если $v \neq 0$, рассмотрим поведение функции $\delta_F(\xi)$, представленной формулой (2.7). При $k_A = k_B = k$ ее можно записать в виде

$$\delta_F = \mu \left(\xi^4 - \frac{k\mu - 4}{2k\mu} \xi^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{2k\mu} \right). \quad (2.12)$$

Функция $\delta_F(\xi^2)$ имеет минимум, когда $\xi^2 = \xi_m^2 = (k\mu - 4)/(4k\mu)$.

Если $0 < k\mu < 4$, то этот минимум в области $0 \leq \xi^2 \leq 1/4$ не существует, и тогда в указанной области функция δ_F монотонно меняется в пределах

$$\frac{\mu}{16} + \frac{1}{2k} \leq \delta_F \leq \frac{1}{k} \rightarrow k \leq \frac{1}{\delta_F} \leq \frac{16k}{k\mu + 8},$$

а локальная круговая частота $\omega(\xi) = 1/(\sqrt{m\delta_F})$ принадлежит диапазону

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \leq \omega(\xi) \leq \sqrt{\frac{16k}{m(k\mu + 8)}}, \quad k\mu < 4. \quad (2.13)$$

Пусть теперь $k\mu \geq 4$. Представим аргумент минимума в виде

$$\xi_m^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{k\mu}.$$

Следовательно, справедливо неравенство $0 \leq \xi_m^2 < 1/4$. Минимальное значение δ_F имеет вид

$$\delta_F^m = \frac{k\mu - 1}{k^2\mu}$$

Максимальные значения δ_F достигаются на границах диапазона $0 \leq \xi^2 < 1/4$:

$$\delta_F(0) = \frac{k\mu + 8}{16k}, \quad \delta_F\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{k}.$$

Таким образом, функция $\delta_F(\xi)$ изменяется в диапазоне

$$\frac{k\mu - 1}{k^2\mu} \leq \delta_F(\xi) \leq \max\left[\frac{k\mu + 8}{16k}, \frac{1}{k}\right],$$

а локальная круговая частота ограничена значениями

$$\min\left[\sqrt{\frac{16k}{m(k\mu + 8)}}, \sqrt{\frac{k}{m}}\right] \leq \omega(\xi) \leq \sqrt{\frac{k^2\mu}{m(k\mu - 1)}}. \quad (2.14)$$

Объединив формулы (2.13) и (2.14), получим

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{k}{m}} \leq \omega(\xi) \leq \sqrt{\frac{16k}{m(k\mu + 8)}}, & 0 < k\mu < 4, \\ \min\left[\sqrt{\frac{16k}{m(k\mu + 8)}}, \sqrt{\frac{k}{m}}\right] \leq \omega(\xi) \leq \sqrt{\frac{k^2\mu}{m(k\mu - 1)}}, & k\mu \geq 4. \end{cases} \quad (2.15)$$

На рис. 3 показан график зависимости $\omega(\kappa) = \sqrt{1/(m\delta_F)}$, которая соответствует указанным выше параметрам движения и характеризует тип локальных деформаций бруса при $v = 0$. График отвечает второй формуле (2.15). Точка $\kappa = 0.5$ соответствует значению $\xi = 0$ и доставляет минимум функции $\omega(\kappa)$. Максимумы, соответствующие правой части второй формулы (2.15), расположены вблизи границ $\xi = \pm 1/2$. По графику можно, например, судить, что при выбранном ранее коэффициенте демпфирования $f = 10 \text{ с}^{-1}$ это будут затухающие колебания для любой точки бруса. Видно также, что локальная круговая частота колебаний бруса меняется в значительном диапазоне и в середине бруса колебания происходят с меньшей частотой, чем на его концах.

На рис. 4 показаны графики $u(\kappa)$ для сравнительно небольших значений коэффициента вязкого трения. Как и следовало ожидать, при $f = 0$ затухание не происходит, а частота колебаний оказывается переменной. При $f = 2$ колебания затухают лишь ближе к концу бруса, а для $f = 10$ колебания практически незаметны уже для значений $\kappa > 0.2$. Значения u оказываются на два порядка меньше, чем соответствующие значения $u_s(\kappa)$, представленные на рис. 2, так что движение колеса происходит без отскоков от бруса. Кроме того, на рис. 4 видно, что асимптотические решения пересекаются приблизительно в одной точке в окрестности значения $\kappa = 0.5$.

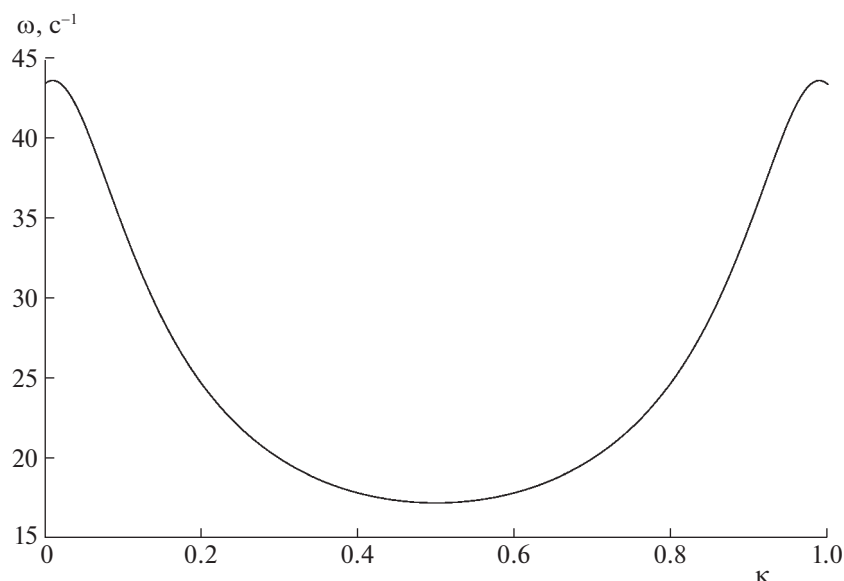


Рис. 3. Зависимость $\omega(\kappa) = \sqrt{1/(m\delta_F)}$.

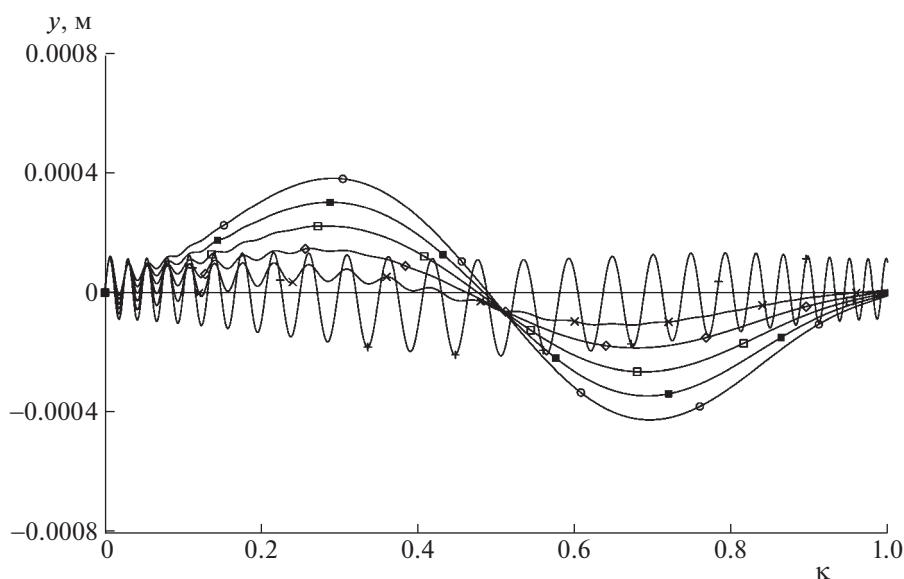


Рис. 4. Зависимости $y(\kappa)$ для малых значений коэффициента f : $f = 0$ (+), $f = 2$ (x), $f = 4$ (◇), $f = 6$ (□), $f = 8$ (■), $f = 10$ (○).

На рис. 5 представлены графики $y(\kappa)$ для значений $f > 10$. Их масштаб не позволяет разглядеть начальные колебания груза, которые, конечно, есть, а видны только асимптотические кривые. Они уже не пересекаются все в одной точке в окрестности значения $\kappa = 0.5$. Точки пересечения графиков, соответствующих соседним значениям параметра f , приближаются с ростом f к правому концу бруса. Положительные отклонения оказываются более значительными, чем отрицательные, и занимают большую часть бруса. Вместе с тем суммарные отклонения бруса от оси Az оказываются пока еще отрицательными на всем протяжении бруса, и колесо не отскакивает от бруса. Сам по себе факт разгрузки бруса на начальном участке движения колеса представ-

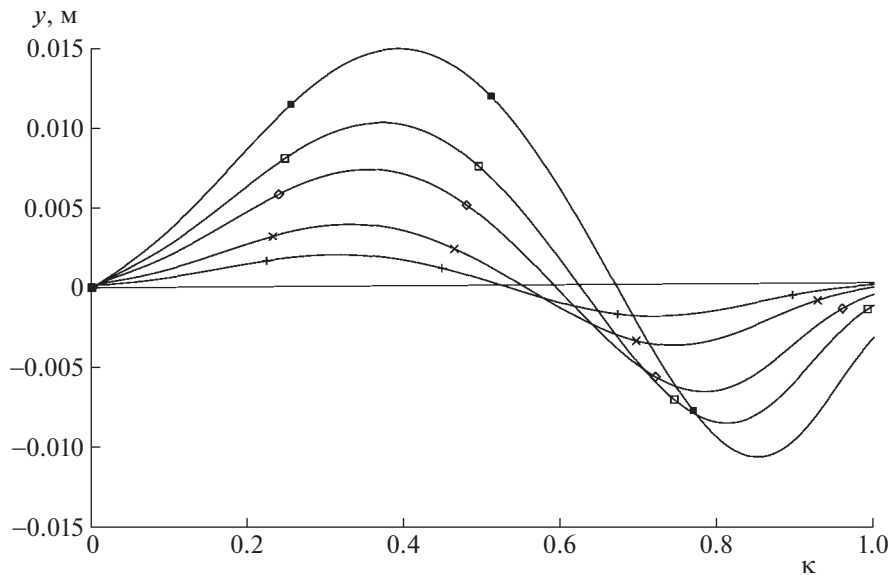


Рис. 5. Зависимости $y(\kappa)$ для больших значений коэффициента f : $f = 50$ (+), $f = 100$ (×), $f = 200$ (◇), $f = 300$ (□), $f = 500$ (■).

ляет интерес и объясняется, по-видимому, тем, что при больших коэффициентах демпфирования брус как бы не успевает дойти до своего нижнего положения, когда колесо по нему перемещается.

Уравнение (2.5) не поддается аналитическому интегрированию в основном из-за того, что частота колебаний бруса оказывается переменной по его длине. Численно полученные зависимости $y(\kappa)$ представляют свойства движения системы в ограниченной области параметров. Для понимания этих свойств “в большом” применим аналитическое приближение решений уравнения (2.5), сначала приняв, что частота колебаний постоянна.

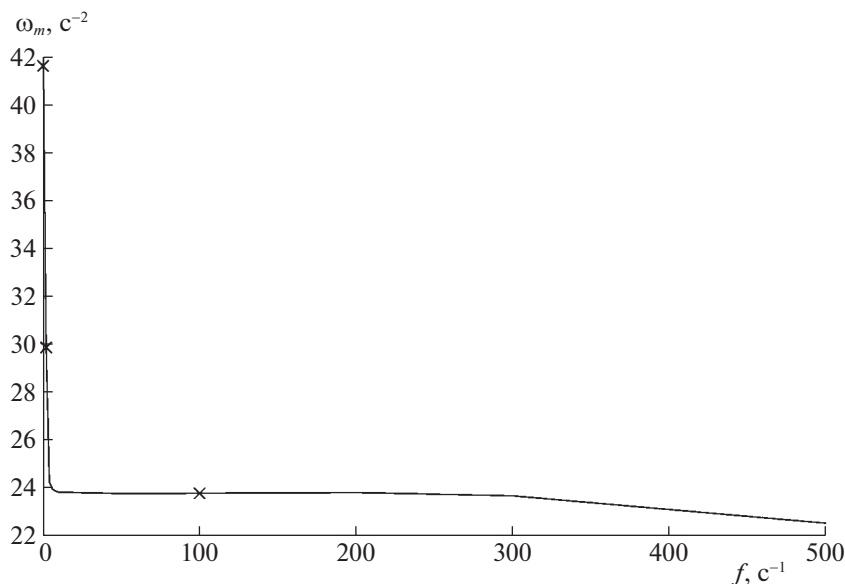
3. Приближенное решение. Рассмотрим уравнение, структурно похожее на уравнение (2.11):

$$\ddot{y}_m + f\dot{y}_m + \omega_m^2 y_m = f \frac{v}{l} C(\xi) + \frac{v^2}{l^2} D(\xi), \quad (3.1)$$

где $\xi = -1/2 + vt/l = \kappa - 1/2$, а функции $C(\xi)$, $D(\xi)$ определены формулами (2.8). Для каждого заданного значения κ подберем в указанных диапазонах (2.15) некоторое постоянное число ω_m , так чтобы решение y_m как можно меньше отличалось от соответствующего решения уравнения (2.11). В простейшем случае в качестве некоторого грубого приближения можно выбрать среднее между предельными значениями для $\omega(\xi)$ в формуле (2.15). Более точную настройку подходящего значения ω_m можно осуществить следующим образом. Возьмем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{y} + f\dot{y} + \frac{1}{m\delta_F} y = f \frac{v}{l} C(\xi) + \frac{v^2}{l^2} D(\xi), \\ \ddot{y}_m + f\dot{y}_m + \omega_m^2 y_m = f \frac{v}{l} C(\xi) + \frac{v^2}{l^2} D(\xi), \\ \dot{w} = p(t)(y - y_m)^2. \end{cases} \quad (3.2)$$

В этой системе $p(t) > 0$ — весовой коэффициент, выбираемый эмпирически в зависимости от того, для какого участка траектории приближение должно быть наилучшим. Пусть $y(0)$ и $y_m(0)$ удовлетворяют одинаковым начальным условиям (2.6), а $w(0) = 0$. Интегрирование по времени заканчивается, когда $t = T = l/v$. Функция $w(t)$ является монотонно возрастающей. Значение

Рис. 6. Зависимость $\omega_m(f)$

$W(\omega_m) = w(T)$ неотрицательно и зависит от выбранной величины ω_m . Тогда наилучшим выбором для параметра ω_m можно считать

$$\omega_m^* = \arg \min_{\omega_m} W(\omega_m). \quad (3.3)$$

Следует отметить, что при использовании формулы (3.3) возникает зависимость $\omega_m^* = \omega_m^*(f)$, поскольку и первое, и второе уравнения системы (3.2) содержат параметр f . На рис. 6 показана типичная зависимость коэффициента $\omega_m(f)$, удовлетворяющая условию (3.3) при $p(t) \equiv 1$. Видно, что при $f = 0$ значения этого коэффициента довольно большие, но с ростом f они резко падают и остаются практически постоянными для значений $f > 10$. Это, возможно, связано с тем, что при наличии демпфирования колебания быстро успокаиваются и изменение частоты мало влияет на общий характер траектории.

Пусть значение ω_m так или иначе выбрано. Тогда корни характеристического уравнения для (3.1) имеют общий вид

$$\lambda_1 = \frac{-f - \sqrt{f^2 - 4\omega_m^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-f + \sqrt{f^2 - 4\omega_m^2}}{2}. \quad (3.4)$$

При $f < 2\omega_m$ они определяют асимптотически затухающий колебательный процесс около частного притягивающего решения y_r уравнения (3.1), а при $f \geq 2\omega_m$ процесс становится аperiodически приближающимся к частному решению y_r . Правая часть уравнения (3.1) есть многочлен $L(\xi)$ третьей степени по ξ :

$$L(\xi) = G \frac{V}{l} \left(f \xi^3 + 3 \frac{V}{l} \xi^2 + f \alpha \xi + \frac{V}{l} \alpha \right). \quad (3.5)$$

Частное решение $y_r(\xi)$ будем искать в виде

$$y_r(\xi) = G(a_3 \xi^3 + a_2 \xi^2 + a_1 \xi + a_0), \quad (3.6)$$

где коэффициенты a_i , $i = \overline{0, 3}$, постоянны. Подставляя выражение (3.6) в уравнение (3.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим систему уравнений относительно коэффициентов a_0 , a_1 , a_2 , a_3 :

Таблица. Значения ω_m , v , a_0 , a_1 , a_2 , a_3 для различных f

f	ω_m	v	a_0	a_1	a_2	a_3
0	$4.158e + 01$	$1.480e - 05$	$-4.080e - 06$	$-0.000e + 00$	$4.441e - 05$	$0.000e + 00$
1	$4.064e + 01$	$1.550e - 05$	$-4.269e - 06$	$-2.671e - 05$	$4.647e - 05$	$9.688e - 05$
2	$2.985e + 01$	$2.873e - 05$	$-7.884e - 06$	$-9.905e - 05$	$8.580e - 05$	$3.591e - 04$
3	$2.443e + 01$	$4.288e - 05$	$-1.164e - 05$	$-2.219e - 04$	$1.267e - 04$	$8.040e - 04$
4	$2.425e + 01$	$4.353e - 05$	$-1.168e - 05$	$-3.003e - 04$	$1.270e - 04$	$1.088e - 03$
5	$2.406e + 01$	$4.422e - 05$	$-1.167e - 05$	$-3.814e - 04$	$1.269e - 04$	$1.382e - 03$
6	$2.396e + 01$	$4.461e - 05$	$-1.153e - 05$	$-4.617e - 04$	$1.254e - 04$	$1.673e - 03$
7	$2.390e + 01$	$4.483e - 05$	$-1.130e - 05$	$-5.413e - 04$	$1.229e - 04$	$1.961e - 03$
8	$2.386e + 01$	$4.496e - 05$	$-1.100e - 05$	$-6.205e - 04$	$1.197e - 04$	$2.248e - 03$
9	$2.384e + 01$	$4.505e - 05$	$-1.065e - 05$	$-6.994e - 04$	$1.159e - 04$	$2.534e - 03$
10	$2.382e + 01$	$4.511e - 05$	$-1.024e - 05$	$-7.781e - 04$	$1.115e - 04$	$2.819e - 03$
50	$2.376e + 01$	$4.534e - 05$	$4.272e - 05$	$-3.894e - 03$	$-4.662e - 04$	$1.417e - 02$
100	$2.377e + 01$	$4.529e - 05$	$2.051e - 04$	$-7.678e - 03$	$-2.268e - 03$	$2.831e - 02$
200	$2.381e + 01$	$4.516e - 05$	$8.072e - 04$	$-1.450e - 02$	$-9.426e - 03$	$5.646e - 02$
300	$2.367e + 01$	$4.569e - 05$	$1.692e - 03$	$-1.987e - 02$	$-2.188e - 02$	$8.567e - 02$
500	$2.253e + 01$	$5.044e - 05$	$3.149e - 03$	$-2.002e - 02$	$-7.437e - 02$	$1.576e - 01$

$$\begin{cases} 2\frac{v}{l}a_2 + fa_1 + \frac{l\omega_m^2}{v}a_0 = \frac{v}{l}\alpha, \\ 6\frac{v}{l}a_3 + 2fa_2 + \frac{l\omega_m^2}{v}a_1 = f\alpha, \\ 3fa_3 + \frac{l\omega_m^2}{v}a_2 = 3\frac{v}{l}, \\ \omega_m^2a_3 = f\frac{v}{l}. \end{cases}$$

Из этой системы найдем

$$\begin{aligned} a_0 &= v(\alpha - 2a_2) - a_1a_3, & a_2 &= 3(v - a_3^2), \\ a_1 &= a_3(\alpha - 2a_2 - 6v), & a_3 &= \frac{fv}{\omega_m^2 l}, & v &= \frac{v^2}{\omega_m^2 l^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, коэффициент a_3 прямо пропорционален коэффициенту диссипации f . Выразим остальные коэффициенты частного решения явным образом через a_3 :

$$\begin{aligned} a_2 &= 3(v - a_3^2), & a_1 &= a_3(\alpha - 12v + 6a_3^2), \\ a_0 &= v(\alpha - 6v) + (18v - \alpha)a_3^2 - 6a_3^4. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Пусть диссипация отсутствует ($f=0$), тогда частное решение имеет вид

$$y_r(\xi) = Gv[3\xi^2 + (\alpha - 6v)].$$

Оно оказывается симметричным относительно точки $\xi = 0$, и на концах бруса принимает значения

$$y_r\left(\frac{1}{2}\right) = y_r\left(-\frac{1}{2}\right) = Gv\left[\frac{3}{4} + (\alpha - 6v)\right].$$

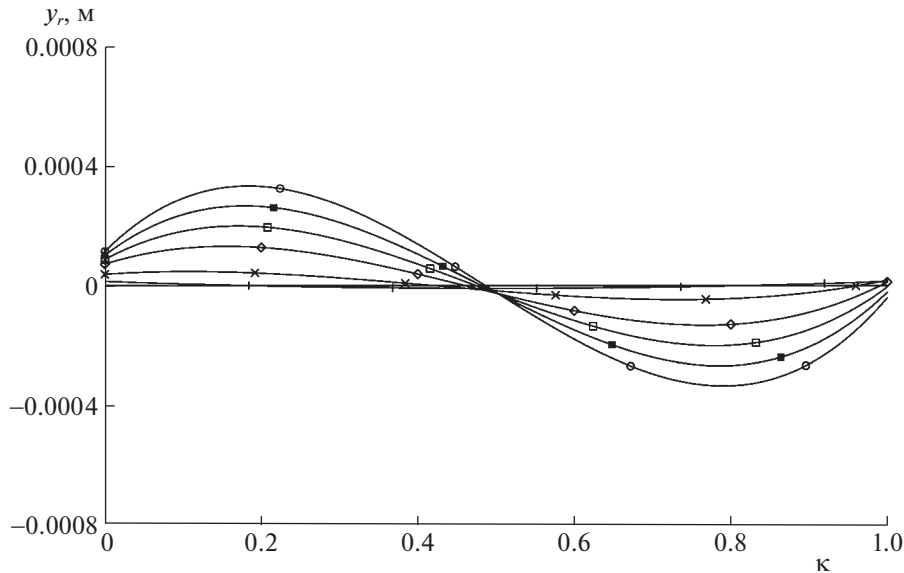


Рис. 7. Зависимости $y_r(\kappa)$ для малых значений коэффициента f : $f = 0$ (+), $f = 2$ (x), $f = 4$ (◊), $f = 6$ (□), $f = 8$ (■), $f = 10$ (○)

Если $\alpha \geq 6v$ (скорость качения моноколеса невелика), то $y_r \geq 0$. Другими словами, качение колеса в этом случае в среднем ослабляет квазистационарную деформацию бруса и тем меньше, чем ближе колесо находится к середине бруса. Термин “в среднем” означает, что полное решение уравнения (3.1) включает в себя не только частное решение $y_r(\xi)$, но и незатухающую при $f = 0$ колебательную составляющую.

Если $6v > \alpha > 6v - 3/4$, то в интервалах

$$-\frac{1}{2} \leq \xi < -\sqrt{\frac{6v - \alpha}{3}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{6v - \alpha}{3}} < \xi \leq \frac{1}{2}$$

качение колеса в среднем ослабляет квазистационарную составляющую деформации, а в интервале

$$-\sqrt{\frac{6v - \alpha}{3}} < \xi < \sqrt{\frac{6v - \alpha}{3}}$$

усиливает. Наконец, если $\alpha < 6v - 3/4$, то качение колеса усиливает квазистационарную деформацию на всем протяжении бруса.

При $f \neq 0$ частное решение усложняется. Оно представляет собой полином третьей степени вида (3.6). Причем коэффициенты полинома зависят от f не только через коэффициент a_3 , но и через параметр v , который тоже зависит от f в силу метода получения величины ω_m . В таблице 1 представлены значения коэффициентов полинома (3.6) в зависимости от f . Видно, например, что коэффициент a_0 становится положительным при $f > 10$, а коэффициент a_1 остается отрицательным во всем диапазоне выбранных значений параметра f .

Вместе с тем многочлен третьей степени имеет по крайней мере один действительный корень. Кроме того,

$$\begin{aligned} y_r(0) &= Ga_0 = G[v(\alpha - 6v) + (18v - \alpha)a_3^2 - 6a_3^4], \\ y_r'(0) &= Ga_1 = G[a_3(\alpha - 12v + 6a_3^2)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Следовательно, учитывая общий характер поведения функции $\omega_m(f)$, можно сделать вывод, что для коэффициента трения в диапазоне $0 < f < 10$ значения функции $y_r(\kappa)$ при $\kappa = 1/2$ могут существенно различаться из-за изменения $\omega_m(f)$. Затем при увеличении f эти различия начнут практически исчезать (см. рис. 6), и на некотором интервале малых значений коэффициента f

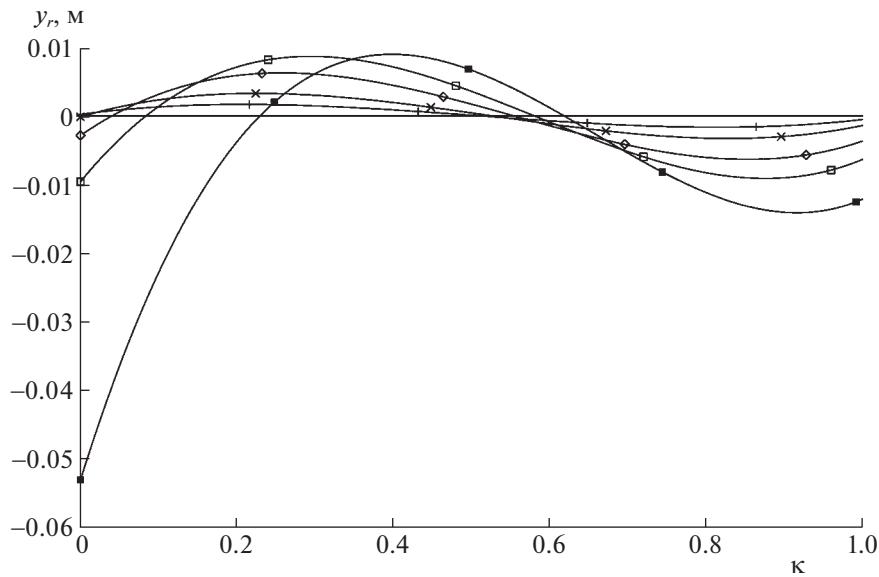


Рис. 8. Зависимости $y_r(\kappa)$ для больших значений коэффициента f : $f = 50$ (+), $f = 100$ (x), $f = 200$ (◊), $f = 300$ (□), $f = 500$ (■).

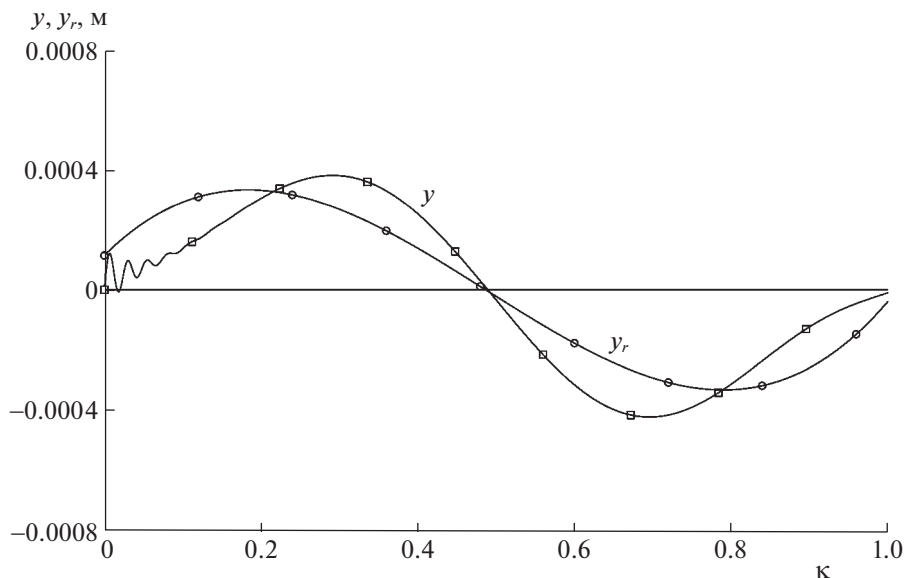


Рис. 9. Зависимости $y(\kappa)$ и $y_r(\kappa)$ для $f = 10 \text{ c}^{-1}$.

значение $y_r(1/2)$ будет оставаться почти постоянным из-за того, что в выражение для $y_r(1/2)$ коэффициент a_3 входит со степенями выше первой.

На рис. 7 показаны графики функции $y_r(\kappa)$ для малых значений коэффициента демпфирования f , подтверждающие сказанное.

При дальнейшем увеличении коэффициента f значения $y_r(1/2)$ снова начнут увеличиваться (см. рис. 8), а потом, как это следует из первой формулы (3.9), достигнув максимума, станут убывать. Аналогичные эффекты можно обнаружить на рис. 4 и 5, что говорит о том, что частное решение приближенного уравнения (3.1) верно ухватывает основные качественные особенности деформации бруса.

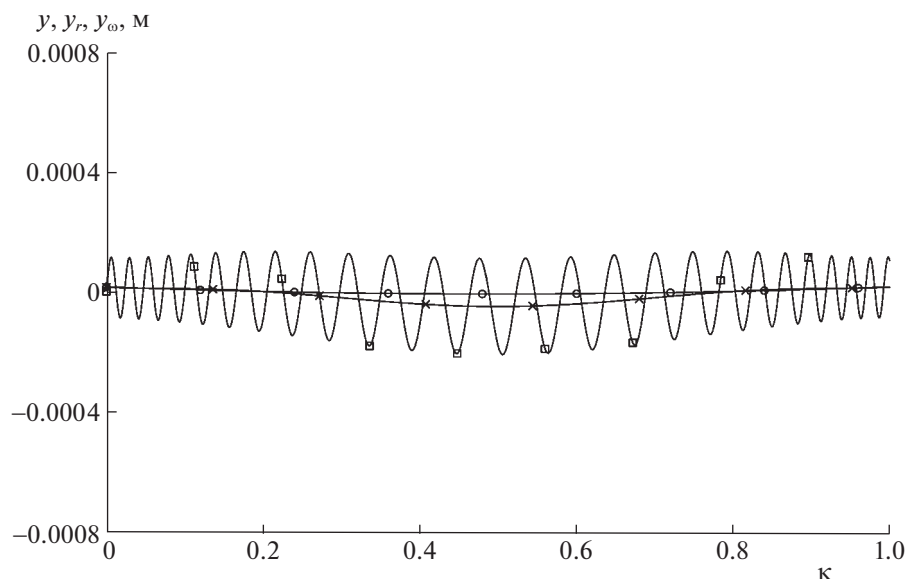


Рис. 10. Зависимости $y(k)$, $y_r(k)$ и $y_\omega(k)$ для $f = 0$: $y \leftrightarrow \square$, $y_r \leftrightarrow \circ$, $y_\omega \leftrightarrow \times$.

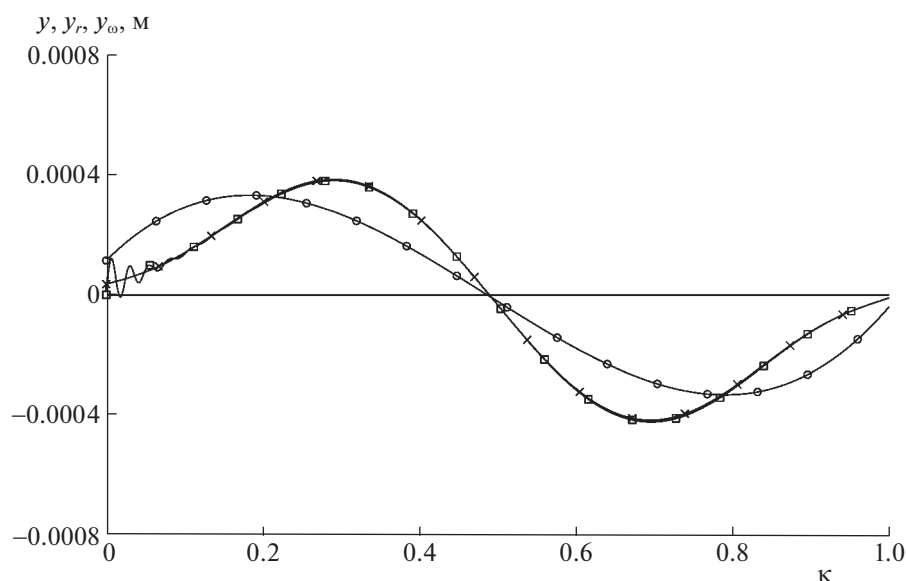


Рис. 11. Зависимости $y(k)$, $y_r(k)$ и $y_\omega(k)$ для $f = 10 \text{ с}^{-1}$: $y \leftrightarrow \square$, $y_r \leftrightarrow \circ$, $y_\omega \leftrightarrow \times$.

Из второй формулы (3.9) видно, что если $\alpha < 6\nu$, то при малых $f \neq 0$ будет выполнено $y_r(0) < 0$, а тогда и подавно будет верно $y_r' < 0$. Поскольку $y_r(\xi)$ представляет собой многочлен третьей степени с $a_3 > 0$, можно заключить, что функция $y_r(k)$ имеет два экстремума, причем максимум соответствует меньшим значениям параметра k . Этот эффект также виден на рис. 4 и 5.

Вместе с тем если сопоставить графики на рис. 4 и 7, а также на рис. 5 и 8, то для соответствующих значений f можно заметить расхождение как по величине экстремумов, так и по их расположению на оси k . Например, эти расхождения хорошо видны на рис. 9 и в значительной мере связаны с тем, что при расчете зависимости $y_r(k)$ задавалось постоянное значение ω_m в соответствии с правилом (3.3).

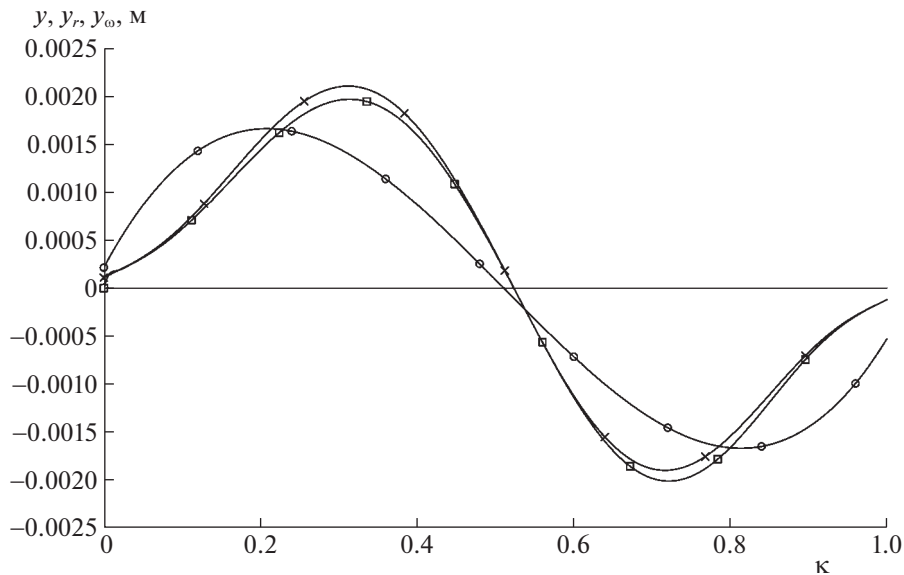


Рис. 12. Зависимости $y(\kappa)$, $y_r(\kappa)$ и $y_\omega(\kappa)$ для $f = 50 \text{ c}^{-1}$: $y \leftrightarrow \square$, $y_r \leftrightarrow \circ$, $y_\omega \leftrightarrow \times$.

Решение $y_r(\xi)$ можно существенно улучшить, если коэффициенты a_0, a_1, a_2 вычислять по формулам (3.8), а коэффициенты v и a_3 рассчитывать в соответствии с выражениями

$$a_3 = \frac{fv}{\omega^2 l}, \quad v = \frac{v^2}{\omega^2 l^2}, \quad (3.10)$$

где $\omega = \omega(\xi) = 1/(\sqrt{m\delta_f})$ – “правильное” значение круговой частоты.

Другими словами, все коэффициенты в формуле (3.6) будут теперь зависеть от ξ :

$$y_\omega = G[a_3(\xi)\xi^3 + a_2(\xi)\xi^2 + a_1(\xi)\xi + a_0(\xi)], \quad (3.11)$$

где коэффициенты $a_i(\xi)$, $i = 0, 3$, следует вычислять по формулам (3.8), (3.10). На рис. 10 видно, что функция $y_\omega(\kappa)$ при отсутствии диссипации лучше отслеживает среднюю линию колебаний бруса, чем функция $y_r(\kappa)$. Рисунок 11 свидетельствует, что при наличии диссипации функция y_ω существенно лучше приближает асимптотику точного решения $y(\kappa)$, чем функция $y_r(\kappa)$. Это свойство уверенно выполняется для всех значений $f \in [0; 10 \text{ c}^{-1}]$ и достаточно хорошо выполняется для значений $f \in (10; 50 \text{ c}^{-1}]$ (см. рис. 12). Для значений $f > 50 \text{ c}^{-1}$ ошибка аппроксимации для функции $y_\omega(\kappa)$ увеличивается, но все же остается существенно меньше, чем для функции $y_r(\kappa)$.

Заключение. Установлена зависимость коэффициента упругости бруса от положения на ней моноколеса и параметров конструкции системы. В предположениях о точечном контакте моноколеса и бруса и об отсутствии проскальзывания в точке контакта построена приближенная математическая модель движения системы с учетом основной моды колебаний бруса и вязкого сопротивления скорости деформации. Для возможности аналитического исследования закономерностей движения найдена и верифицирована приближенная конечная формула, верно отражающая основные качественные и с хорошей точностью количественные особенности поведения точки контакта колеса с брусом. Выполнено компьютерное исследование динамики системы для реалистичного набора параметров. По результатам исследования можно сделать следующие выводы.

1. Учет деформации грунта в точках опоры бруса позволяет регуляризовать задачу о движении колеса по деформируемому брусом и избежать особенностей в уравнениях движения системы.

2. Принятые предположения о точечном контакте колеса с брусом и о безотрывном качении колеса по брусу выполняются в диапазоне изменения параметров, принятом в данной работе.

3. Установлено, что при квазистатическом качении колеса по брусу средний прогиб бруса под колесом оказывается симметричным относительно середины бруса. При увеличении скорости и (или) коэффициента диссипации указанная симметрия нарушается таким образом, что вначале движения средний прогиб бруса становится меньше квазистатического, а на завершающих этапах движения — больше. Однако это не приводит к нарушению предположений, принятых в данной работе.

4. Приближенная формула для усредненного прогиба бруса под колесом в процессе его движения при наличии диссипации дает для принятых в работе значений параметров системы и коэффициента вязкого сопротивления в пределах $0 \leq f \leq 50 \text{ с}^{-1}$ относительную погрешность приближения, которая монотонно возрастает от 0 и не превосходит ~ 0.1 .

5. Полученные в работе общие формулы справедливы не только для переправы в форме бруса, но также и для однородной балки, сделанной из любого материала, и постоянного сечения любой формы вдоль ее длины. Форма поперечного сечения и материал бруса учитываются лишь при подсчете жесткости бруса *EJ*. Деревянный брус в работе был выбран для численных экспериментов в качестве примера наиболее распространенного строительного материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моноколесо. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Моноколесо> (дата обращения: 25.09.2022).
2. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. Изд. 2-е перераб. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
3. Гнездилов В.А. Проектирование и изготовление металлоконструкций для сложных механизированных аттракционов // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2000. № 6.
4. Русских С.В. Колебания упругой направляющей балки с движущимся по ней реактивным снарядом // Изв. вузов. Авиационная техника. 2014. № 1. С. 80.
5. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. О качении моноколеса по деформируемому брусу, лежащему на двух опорах // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023. № 1. 25 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-1>
6. Stokes G.G. Discussion of a Differential Equation Relating to the Breaking of Railway Bridges // Mathematical and Physical Papers. 1883. V. II. P. 178–220.