

УДК 532.59:551.466

РАСПРОСТРАНЕНИЕ БЕЗ ОТРАЖЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ОБМЕННОМ ТЕЧЕНИИ МЕЛКОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЫ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

© 2024 г. С. М. Чурилов

*Институт солнечно-земной физики СО РАН,
ул. Лермонтова, 126 А, Иркутск, 664033 Россия
e-mail: churilov@iszf.irk.ru*

Поступила в редакцию 28.02.2024 г.

После доработки 05.04.2024 г.

Принята к публикации 29.05.2024 г.

В линейном приближении рассматривается распространение длинных внутренних волн произвольной формы в стационарном течении мелкой двухслойной жидкости в узком канале переменного сечения. Скорости течения в слоях направлены противоположно. Показано, что есть три класса течений, в которых волны распространяются без отражения в обе стороны, и свойства таких течений подробно изучены. Путем детального анализа установлено, что только один из этих классов содержит регулярные течения, не ограниченные по протяженности, в то время как в двух других классах течения всегда ограничены (с одной или обеих сторон) сингулярностью. Обсуждаются возможности приложения полученных результатов и перспективы дальнейших исследований.

Ключевые слова: двухслойное обменное течение, канал переменного сечения, внутренние волны, распространение без отражения

DOI: 10.31857/S0002351524040019 EDN: JHOPCG

ВВЕДЕНИЕ

Внутренние волны (ВВ) – это неотъемлемая компонента волновых движений в стратифицированных средах, в том числе в океане, морях и внутренних водоемах [Миропольский, 1981; Морозов, 1985]. Они играют важную, а порой и ключевую роль во многих процессах, включая перенос энергии и перемешивание [Pedlosky, 2003; Sutherland, 2010]. В ряде случаев, в зависимости от конкретных условий (рельеф дна, характер изменения ширины канала или пролива и др.), ВВ могут распространяться без отражения и рассеяния на неоднородностях рельефа и течения (см., например, [Pelinovsky et al., 2019] и цитированную там литературу), т.е. без потерь энергии. В таком случае влияние ВВ существенно усиливается.

Поиск «безотражательных» конфигураций рельефа и течения – довольно сложная задача. Поэтому на первый план здесь выходит анализ относительно простых моделей, особенно допускающих аналитическое исследование. Это необходимо для более глубокого понимания физики явления и крайне полезно для выработки интуи-

ции. На сегодняшний день есть значительные достижения в изучении безотражательных конфигураций водоемов без течения [Галипова и др., 2009, 2011, 2013; Багаев и Пелиновский, 2016; Grimshaw et al., 2010; Pelinovsky et al., 2019]. Также начато исследование неоднородных двухслойных течений в каналах переменного сечения [Чурилов, 2022; Churilov, 2023, 2023a], но пока лишь таких, в которых скорости жидкости в слоях направлены в одну сторону.

Следует, однако, иметь в виду, что природные течения в каналах – это, в значительной мере, течения в проливах, соединяющих различные водоемы, в частности, моря между собой и с океаном. Зачастую эти течения носят обменный характер, когда вода из одного водоема (скажем, менее соленая) полностью или частично замещается водой из другого. Наиболее простой моделью в таком случае будет двухслойное течение с встречно направленными скоростями жидкости в слоях. Цель настоящей работы – изучить условия, при которых длинные ВВ малой амплитуды распространяются в подобных течениях без отражения.

Термин «длинные ВВ» означает, что длина волны значительно больше глубины и ширины канала, но меньше его длины. Если учесть, что длина проливов обычно не превышает нескольких десятков километров, частоты таких волн велики по сравнению с параметром Кориолиса, поэтому влияние вращения Земли не учитывается.

В § 2 описана модель течения, дана математическая постановка задачи и выведены основные уравнения. § 3 посвящен анализу условий распространения ВВ без отражения и свойств удовлетворяющих им течений, а в § 4 обсуждаются полученные результаты и задачи дальнейшего исследования. Громоздкие формулы и вычисления вынесены в два приложения.

МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим течение двухслойной среды со свободной верхней границей в приближении

$$\begin{aligned} P_1 &= P_a + \rho_1 g(B + h_1 + h_2 - z)\theta(B + h_1 + h_2 - z), & B + h_2 < z < B + h_1 + h_2, \\ P_2 &= P_a + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g(B + h_2 - z)\theta(B + h_2 - z), & B \leq z < B + h_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $P_a = \text{const}$ – атмосферное давление на свободной поверхности, g – ускорение силы тяжести, координата z отсчитывается вверх от некоторого горизонтального уровня, $B = B(x)$ – возвышение дна над этим уровнем, а $\theta(Z)$ – единичная ступенчатая функция. Подставляя (2) в (1), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{V_1^2}{2} + g(B + h_1 + h_2) \right] &= 0, \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{V_2^2}{2} + g(B + \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1 + h_2) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\frac{\partial h_{1,2}}{\partial t} + \frac{1}{W} \frac{\partial}{\partial x} (W h_{1,2} V_{1,2}) = 0, \quad (4)$$

а вычитание второго уравнения (3) из первого дает

$$\frac{\partial}{\partial t} (V_1 - V_2) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + \varepsilon^2 g h_1 \right) = 0. \quad (5)$$

мелкой воды, считая жидкости в слоях однородными, идеальными и не смешивающимися. Пусть $\rho_{1,2} = \text{const}$ и $V_{1,2}(x, t)$ – плотности и скорости течения в верхнем (1) и нижнем (2) слоях, причем $\rho_1 < \rho_2$ и их разность мала, $\varepsilon^2 = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_2 \ll 1$, что соответствует условиям в природных водоемах. Исходим из уравнений Эйлера и сохранения вещества для каждого слоя (см., например, [Vaines, 1984, 1995])

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{1,2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V_{1,2}^2}{2} + \frac{P_{1,2}}{\rho_{1,2}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial S_{1,2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (S_{1,2} V_{1,2}) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $h_{1,2}(x, t)$ и $S_{1,2}(x, t) = W(x)h_{1,2}(x, t)$ – глубины и площади поперечного сечения слоев (см. рис. 1). Давление определяется гидростатическими соотношениями

Скорость распространения длинных ВВ в двухслойной среде (без течения, см., например, [Pelinovsky et al., 2019]) мала,

$$s = \varepsilon \left(\frac{g h_1 h_2}{h_1 + h_2} \right)^{1/2} = O(\varepsilon),$$

поэтому с целью фильтрации быстрых движений среды (например, поверхностных гравитационных волн) считаем, что скорости $V_{1,2}$ имеют тот же порядок величины, и перейдем к переменным (ср. с [Овсянников, 1979])

$$\tilde{t} = \varepsilon g^{1/2} t, \quad V_{1,2} = \varepsilon g^{1/2} \tilde{V}_{1,2},$$

опуская в дальнейшем тильды. В новых переменных вид уравнений (4) не изменится, уравнение (5) запишется как

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (V_1 - V_2) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + h_1 \right) = 0, \quad (6)$$

а первое уравнение (3),

$$\frac{\partial}{\partial x} (B + h_1 + h_2) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial V_1}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{V_1^2}{2} \right) = 0,$$

показывает, что в отсутствие нестационарных источников с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$

$$B + h_1 + h_2 = h_0 = \text{const}, \quad \text{или} \quad h_1(x, t) + h_2(x, t) = H(x) \equiv h_0 - B(x), \quad (7)$$

так что, несмотря на нестационарное течение над неровным дном, в главном порядке полная глу-

бина течения $H(x)$ не зависит от времени, а свободная поверхность горизонтальна. Уравнения

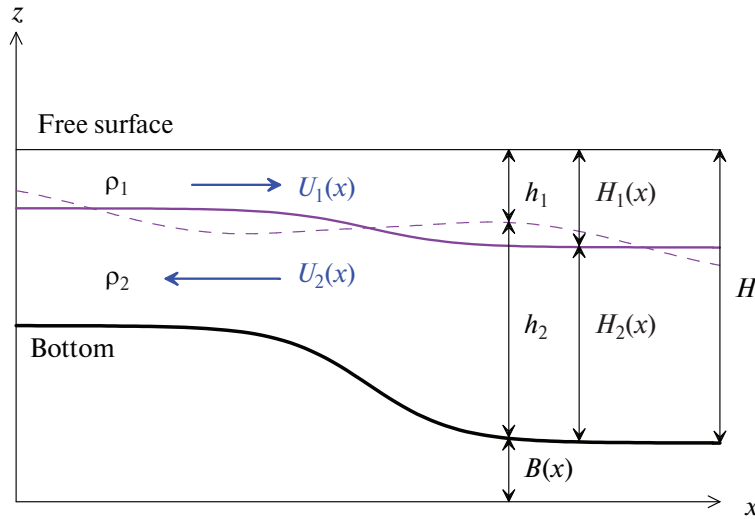


Рис. 1. Схема течения в канале. Пунктиром показана возмущенная граница раздела.

(4), (6) и (7) полностью описывают течение в принятом приближении.

В силу уравнений (4) и (6) параметры стационарного течения $V_1 = U_1(x)$, $V_2 = -U_2(x)$ и $h_{1,2} = H_{1,2}(x)$ связаны законами сохранения потока жидкости в каждом слое,

$$\Phi_{1,2} = W(x)H_{1,2}(x)U_{1,2}(x) = \text{const}, \quad (8)$$

и аналогом уравнения Бернулли

$$U_2^2(x) - U_1^2(x) = 2[H_1(x) - H_0], \quad H_0 = \text{const}. \quad (9)$$

Течение можно определить, задав потоки $\Phi_{1,2}$ и константу Бернулли H_0 , а также любые две независимые функции, характеризующие течение,

$$V_1(x,t) = U_1(x) + u_1(x,t), \quad V_2(x,t) = -U_2(x) - u_2(x,t), \\ h_1(x,t) = H_1(x) - \zeta(x,t), \quad h_2(x,t) = H_2(x) + \zeta(x,t),$$

и линеаризовав по ним уравнения (4) и (6). Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 + u_2) + \frac{\partial}{\partial x}(U_1 u_1 - U_2 u_2 - \zeta) = 0$$

и

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{W} \frac{\partial}{\partial x}[W(U_1 \zeta - H_1 u_1)] = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{1}{W} \frac{\partial}{\partial x}[W(U_2 \zeta + H_2 u_2)] = 0,$$

откуда, с учетом (7), следует, что

$$H_1 u_1 - H_2 u_2 - (U_1 + U_2) \zeta = 0.$$

Исключая u_1 , приходим к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}[(\eta_1 + \eta_2)v_2 + \eta_1(U_1 + U_2)\zeta] + \frac{\partial}{\partial x}[(\eta_1 U_1 - \eta_2 U_2)v_2 + \eta_1 U_1(U_1 + U_2)\zeta - \zeta] = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(W\zeta) = \frac{\partial}{\partial x}[W(U_2 \zeta + v_2)],$$

например, $U_1(x)$ и $U_2(x)$ или $H_1(x)$ и $H_2(x)$. Остальные три функции можно найти с помощью соотношений (8) и (9) (см. Приложение А). Далее считаем все функции $W(x)$, $H_{1,2}(x)$ и $U_{1,2}(x)$ положительными. Обращение любой из них в нуль в некоторой точке означает выход за пределы применимости модели. Наша цель – используя методы, разработанные ранее для однонаправленных течений [Churilov, 2023, 2023a], найти условия, при которых ВВ распространяются вдоль границы раздела без отражения, несмотря на неоднородность канала и течения.

Для этого выведем уравнения для волн, наложив возмущения,

где

$$v_2(x, t) = H_2(x)u_2(x, t), \quad \eta_{1,2}(x) = \frac{1}{H_{1,2}(x)}.$$

Введем две новые функции, $\varphi(x, t)$ и $\phi(x, t)$ (ср. с [Churilov, 2023], уравнения (2.11))

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = [\eta_1(x) + \eta_2(x)]v_2(x) + \eta_1(x)[U_1(x) + U_2(x)]\zeta(x, t), \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = W(x)\zeta(x, t), \quad (11)$$

и обозначения (ср. с [Churilov, 2023], уравнения (2.12), (2.13) и (2.14))

$$U(x) = \frac{\eta_1(x)U_1(x) - \eta_2(x)U_2(x)}{\eta_1(x) + \eta_2(x)} \equiv \frac{H_2(x)U_1(x) - H_1(x)U_2(x)}{H_1(x) + H_2(x)}, \quad (12)$$

$$D(x) = 1 - \frac{\eta_1(x)\eta_2(x)[U_1(x) + U_2(x)]^2}{\eta_1(x) + \eta_2(x)} \equiv 1 - \frac{[U_1(x) + U_2(x)]^2}{H_1(x) + H_2(x)}, \quad (13)$$

$$c^2(x) = \frac{D(x)}{\eta_1(x) + \eta_2(x)} \equiv \frac{H_1(x)H_2(x)}{H_1(x) + H_2(x)} \left(1 - \frac{[U_1(x) + U_2(x)]^2}{H_1(x) + H_2(x)} \right). \quad (14)$$

Подставив (11) в уравнения (10) и проинтегрировав их по x , получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{D(x)}{W(x)}\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + U(x)\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{W(x)}{\eta_1(x) + \eta_2(x)}\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (15)$$

Уравнения характеристик системы (15)

$$\frac{dx}{dt} = U(x) \pm c(x) \quad (16)$$

показывают, что она имеет гиперболический тип, если $c^2(x) > 0$ (см. (14)), т.е. если перепад скоростей течения в слоях не слишком велик (ср. с [Овсянников, 1979; Armi, 1986]),

$$[U_1(x) + U_2(x)]^2 < H_1(x) + H_2(x) \equiv H(x), \quad (17)$$

и эллиптический тип, если $c^2(x) < 0$. Отметим, что неравенство, обратное (17), совпадает с критерием неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (см., например, [Redekopp, 2001]). В интересующем нас гиперболическом случае $U(x)$ и $c(x)$ имеют физический смысл взвешенной разности скоростей течения в слоях и «эффективной» скорости распространения ВВ. В дальнейшем считаем, что неравенство (17) выполнено и $c(x) > 0$.

Из системы (15) нетрудно получить уравнения на каждую из функций $\varphi(x, t)$ и $\phi(x, t)$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} + \frac{D}{W}\left(\frac{UW}{D}\right)' \right] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{D}{W}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{W}{\eta_1 + \eta_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad (18)$$

и

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} + \frac{W}{\eta_1 + \eta_2}\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{W}U\right)' \right] \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + U\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{W}{\eta_1 + \eta_2}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{D}{W}\frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \quad (19)$$

где штрих обозначает производную по x . Они в точности совпадают с уравнениями (2.15) статьи [Churilov, 2023], поэтому опустим промежу-

точные выкладки и приведем результат: функция $\psi(x, t) = \varphi(x, t) / a(x)$ удовлетворяет паре эквивалентных уравнений

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + [U(x) - c(x)]\frac{\partial}{\partial x} + U(x)\left(\frac{U'(x)}{U(x)} - \frac{c'(x)}{c(x)}\right) \right\} \left(\frac{\partial}{\partial t} + [U(x) + c(x)]\frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \equiv \\ & \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + [U(x) + c(x)]\frac{\partial}{\partial x} + U(x)\left(\frac{U'(x)}{U(x)} - \frac{c'(x)}{c(x)}\right) \right\} \left(\frac{\partial}{\partial t} + [U(x) - c(x)]\frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

если параметры течения связаны соотношением

$$\frac{da}{dx} = \frac{Ba^2(x)c(x)}{c^2(x) - U^2(x)} \equiv \frac{Bc^2(x)V(x)}{c^2(x) - U^2(x)}, \quad B = \text{const}, \quad (21)$$

где

$$a(x) = [c(x)V(x)]^{1/2}, \quad V(x) = V_0 \left(\frac{U_1}{\Phi_1} + \frac{U_2}{\Phi_2} \right), \quad V_0 = \text{const}. \quad (22)$$

Уравнения (21) описывают распространение волн вдоль характеристик (16) без отражения, а их общее решение имеет вид

$$\psi(x,t) = \psi_1 \left(t - \int \frac{dx}{U(x) + c(x)} \right) + \psi_2 \left(t - \int \frac{dx}{U(x) - c(x)} \right). \quad (23)$$

В свою очередь, функция $\chi(x,t) = a(x)\phi(x,t)$ удовлетворяет тем же уравнениям (20), но при другой связи между параметрами течения,

$$\frac{da}{dx} = \frac{Cc(x)}{c^2(x) - U^2(x)}, \quad C = \text{const}, \quad (24)$$

и в этом случае тоже представляет собой суперпозицию волн произвольной формы,

$$\chi(x,t) = \chi_1 \left(t - \int \frac{dx}{U(x) + c(x)} \right) + \chi_2 \left(t - \int \frac{dx}{U(x) - c(x)} \right), \quad (25)$$

распространяющихся вдоль характеристик (16) без отражения. Как и в [Churilov, 2023], удобно положить в (22) константу $V_0 = \Phi_1\Phi_2 / (\Phi_1 + \Phi_2)$. Тогда

$$V(x) = \mu_1 U_1(x) + \mu_2 U_2(x), \quad \mu_{1,2} = \frac{\Phi_{2,1}}{\Phi_1 + \Phi_2} = \text{const}. \quad (26)$$

АНАЛИЗ УСЛОВИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВВ БЕЗ ОТРАЖЕНИЯ

В дальнейшем ограничимся для простоты рассмотрением сбалансированных обменных течений, в которых потоки жидкости в слоях одинаковы, т.е.

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \text{или} \quad \mu_1 = \mu_2 = 0.5. \quad (27)$$

При этом соотношения между параметрами течения существенно упрощаются (см. Приложение А). Как видно из формул (А3), $c^2(x) > 0$ в том случае, если $H_0 - 2V^2(x) > 0$, т.е. заведомо при $H_0 > 0$. Для упрощения дальнейших выкладок масштабируем глубины на H_0 , а скорости на $H_0^{1/2}$, что эквивалентно выбору $H_0 = 1$.

Чтобы ВВ распространялись без отражения, параметры течения должны удовлетворять хотя бы одному из условий (21) и (24). Как и в предыду-

щих работах, будем различать течения класса *A*, в которых

$$V(x)c(x) = \Pi = \text{const} > 0, \quad (28)$$

т.е. выполняются *оба* условия (21) и (24), но с $B = C = 0$, а также течения класса *B*, для которых справедливо условие (21) с $B \neq 0$, и течения класса *C*, подчиненные условию (24) с $C \neq 0$.

Течения класса *A*

Общее решение уравнения (28) зависит от одной произвольной константы (Π) и одной произвольной функции, в качестве которой удобно взять $V(x)$, равную, при условии (27), половине сдвига скорости между слоями. Выражая $c^2(x)$ через V и U_1 с помощью (А3) и подставляя в (28), получим (напомним, что $2V^2 < H_0 = 1$)

$$U_1(x) = \frac{2\Pi^2}{V(x)[1 - 2V^2(x)]}, \quad U_2(x) = -2\frac{2V^4(x) - V^2(x) + \Pi^2}{V(x)[1 - 2V^2(x)]}.$$

Видно, что $U_2 > 0$ только в том случае, если

$$V_-^2 < V^2(x) < V_+^2, \quad V_{\pm}^2 = \frac{1}{4}\left[1 \pm \sqrt{1 - 8\Pi^2}\right], \quad \Pi^2 < \frac{1}{8}. \tag{29}$$

С помощью формул (А3) легко убедиться, что при выполнении этих неравенств $c^2(x) > 0$ и $H_{1,2}(x) > 0$. Итак, течение класса *A* определяется заданием Π и ограниченной неравенствами (29) положительной функции $V(x)$. Зависимости параметров течения от V при различных значениях Π показаны на рис. 2 и 3.

На каждом графике V изменяется в пределах, заданных неравенствами (29). На границах этого интервала $U_2 \rightarrow 0$, что сопряжено с неограниченным ростом глубины нижнего слоя

$$0 < V^{(-)} < V < V^{(+)}, \quad V^{(\pm)^2} = \frac{1}{4}\left(1 + \Pi \pm \sqrt{1 - 2\Pi - 7\Pi^2}\right).$$

Случай $\Pi = 0.25$ примечателен тем, что графики скоростей $U_{1,2}(V)$ и $c(V)$ пересекаются в одной точке, при $V = 0.5$, а $H_1(V)$ и $H_2(V)$ в этой точке касаются. Если $\Pi > 0.25$, глубина верхнего слоя при всех значениях V меньше глубины нижнего (рис. 3).

Таким образом, выбрав подходящее значение константы Π и варьируя $V(x)$ в пределах (29), можно получить большое разнообразие безотражательных течений, определенных на всей оси x . При этом скорости течения в слоях $U_{1,2}(x)$ могут меняться в достаточно широких пределах по отношению как друг к другу, так и к скорости волн c .

Течения классов В и С

При изучении течений классов *B* и *C* их параметры удобно выражать через глубину канала $H(x)$ и глубину верхнего слоя $H_1(x)$ (см. Приложение А, формулы (А4)). Допустимая область изменения параметров (ДО) определяется условием положительности $H_{1,2}$, U^2 , V^2 и c^2 , что равносильно одновременному выполнению неравенств

$$0 < H_1 < H, \quad \frac{H_1 - 1}{2H_1 - H} > 0, \quad \frac{2 - H}{2H_1 - H} > 0. \tag{30}$$

H_2 и полной глубины канала H . Сравним скорости течения $U_{1,2}$ со скоростью волн c . Легко показать, что $U_1 > c$ при любых значениях V , если $1/3 < \Pi < 1/\sqrt{8}$ (рис. 3, нижняя часть). При меньших значениях Π , $0 < \Pi < 1/3$, кривые $U_1(V)$ и $c(V)$ пересекаются, и $U_1 < c$, если $V < V_1 = \sqrt{0.5 - \Pi}$ (рис. 2 и рис. 3, верхняя часть). Скорость $U_2 < c$ при любом V , если $\Pi > (\sqrt{8} - 1)/7 \approx 0.261204$, а если Π меньше, $U_2 > c$, когда V лежит в интервале (см. рис. 2)

Соответствующая им ДО состоит из треугольника и полосы ($0 < H_1 < 1; 2 < H$) (рис. 4), на границах которых принятая модель течения становится неприменима.

Параметры течений класса *B* должны удовлетворять уравнению (21) с $B \neq 0$, а течений класса *C* – уравнению (24) с $C \neq 0$. Эти уравнения становятся сингулярными на границах ДО, при $V=0$, когда в нуль обращаются обе скорости, $U_1(x)$ и $U_2(x)$, а ширина канала $W(x)$ неограниченно растет, и при $c = 0$, когда нарушается условие гиперболичности (17). Стандартный анализ (см. [Churilov, 2023, 2023a] и Приложение В) показывает, что в обоих классах $c = 0$ может быть достигнуто только асимптотически, при $x \rightarrow \infty$, в то время как $V = 0$ достигается асимптотически в классе *B* и при конечном x в классе *C*. Кроме того, есть две сингулярные линии внутри ДО, которые достигаются при конечных x в обоих классах. Это $U(H_1, H) = c(H_1, H)$ и еще одна особенность, связанная с устройством функции $a(H_1, H)$; они анализируются в основном тексте.

Перепишем уравнения (21) и (24) в виде

$$\frac{da^4}{dx} = \frac{4Bc^{7/2}(x)V^{5/2}(x)}{c^2(x) - U^2(x)} \equiv \tilde{\mathcal{R}}_B, \quad \frac{da^4}{dx} = \frac{4Cc^{5/2}(x)V^{3/2}(x)}{c^2(x) - U^2(x)} \equiv \mathcal{R}_C, \tag{31}$$

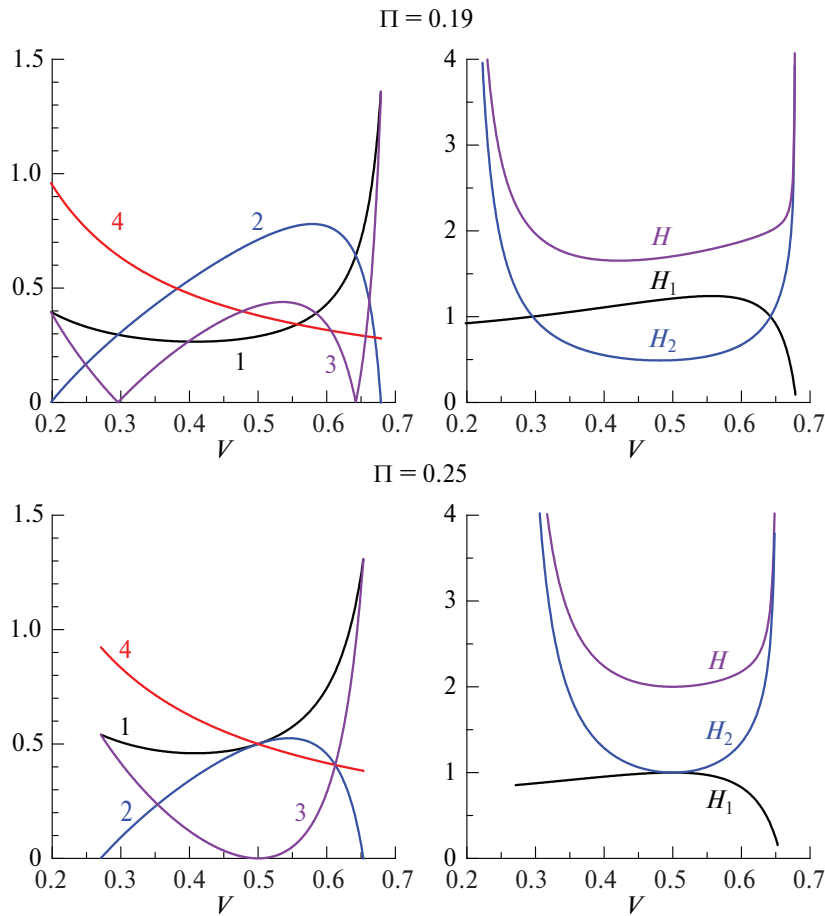


Рис. 2. Зависимость параметров течений класса *A* от *V* при $\Pi = 0,19$ и $\Pi = 0,25$. Кривые: 1 – $U_1(V)$, 2 – $U_2(V)$, 3 – $|U(V)|$, 4 – $c(V)$.

и с помощью (A4) выразим входящие в них функции через $H_1(x)$ и $H(x)$. Несложные вычисления дают

$$\frac{\partial a^4}{\partial H_1} = \frac{H - 2}{2(2H_1 - H)^3} (2H_1^3 - 3HH_1^2 + 2H^2H_1 - H^2),$$

$$\frac{\partial a^4}{\partial H} = \frac{H_1(H_1 - 1)}{2(2H_1 - H)^3} (2H_1^2 - 3HH_1 + 2H),$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_B = -\frac{2^{3/4} \mathcal{B} [H_1(H - H_1)(2 - H)(2H_1 - H)]^{7/4} [(H_1 - 1)(2H_1 - H)]^{5/4} H^{1/2}}{(2H_1 - H)^5 [8H_1^3 - 3(3H + 2)H_1^2 + 3H(H + 2)H_1 - 2H^2]},$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_C = -\frac{2^{5/4} \mathcal{C} [H_1(H - H_1)(2 - H)(2H_1 - H)]^{5/4} [(H_1 - 1)(2H_1 - H)]^{3/4} H^{1/2}}{(2H_1 - H)^3 [8H_1^3 - 3(3H + 2)H_1^2 + 3H(H + 2)H_1 - 2H^2]},$$

причем, как следует из неравенств (30), правые части $\mathcal{R}_{B,C}$ содержат дробные степени заведомо положительных выражений. Теперь удобно ввести для каждого класса течений свою координату вдоль канала

$$\xi_B = 2^{3/4} \mathcal{B} x, \quad \xi_C = 2^{5/4} \mathcal{C} x,$$

и записать уравнения (31) в виде

$$D_1(H_1, H) \frac{dH_1}{d\xi_n} - D(H_1, H) \frac{dH}{d\xi_n} = \mathcal{R}_n, \quad n = B, C, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{1}{2}(2H_1^3 - 3HH_1^2 + 2H^2H_1 - H^2), \\
 D &= \frac{H_1(H_1 - 1)}{2(2 - H)}(2H_1^2 - 3HH_1 + 2H), \\
 \mathcal{R}_B &= \frac{H^{1/2}[H_1(H - H_1)]^{7/4}(2H_1 - H)(2 - H)^2}{8H_1^3 - 3(3H + 2)H_1^2 + 3H(H + 2)H_1 - 2H^2} \left(\frac{H_1 - 1}{2 - H}\right)^{5/4}, \\
 \mathcal{R}_C &= \frac{H^{1/2}[H_1(H - H_1)]^{5/4}(2H_1 - H)^2(2 - H)}{8H_1^3 - 3(3H + 2)H_1^2 + 3H(H + 2)H_1 - 2H^2} \left(\frac{H_1 - 1}{2 - H}\right)^{3/4}.
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Решения этих уравнений зависят, как и в случае течений класса *A*, от одной произвольной функции (в качестве которой можно взять $H(x)$) и константы интегрирования соответствующего уравнения. Заметим, что числители \mathcal{R}_B и \mathcal{R}_C положительны в треугольнике и отрицательны

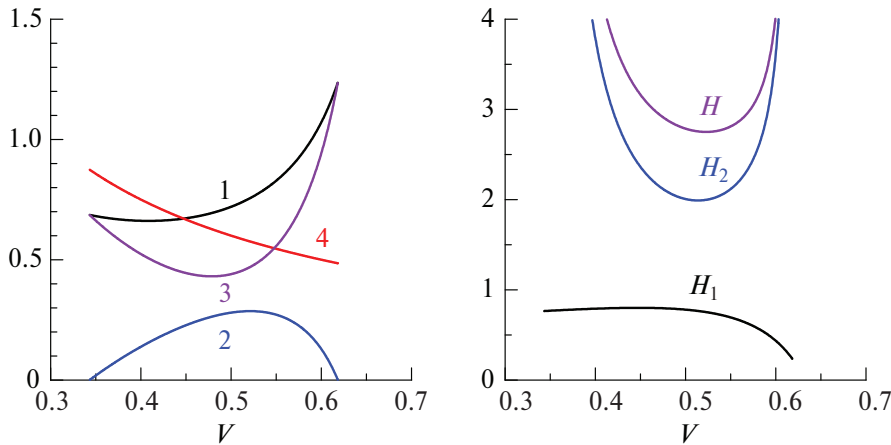
в полосе (см. рис. 4). Поэтому \mathcal{R}_n меняют знак вместе со знаменателем, на критической линии $U(H_1, H) = c(H_1, H)$, описываемой уравнением

$$8H_1^3 - 3(3H + 2)H_1^2 + 3H(H + 2)H_1 - 2H^2 = 0.$$

При любом $H \geq 1$ оно имеет единственный вещественный корень [Корн и Корн, 1974]

$$H_{1c} = \frac{2-H}{8} \left[\left(\sqrt{1 + \frac{4H^2}{(2-H)^2}} + \frac{2H}{2-H} \right)^{2/3} + \left(\sqrt{1 + \frac{4H^2}{(2-H)^2}} - \frac{2H}{2-H} \right)^{2/3} \right] + \frac{3H + 2}{8} > 0. \tag{34}$$

$\Pi = 0.3$



$\Pi = 0.345$

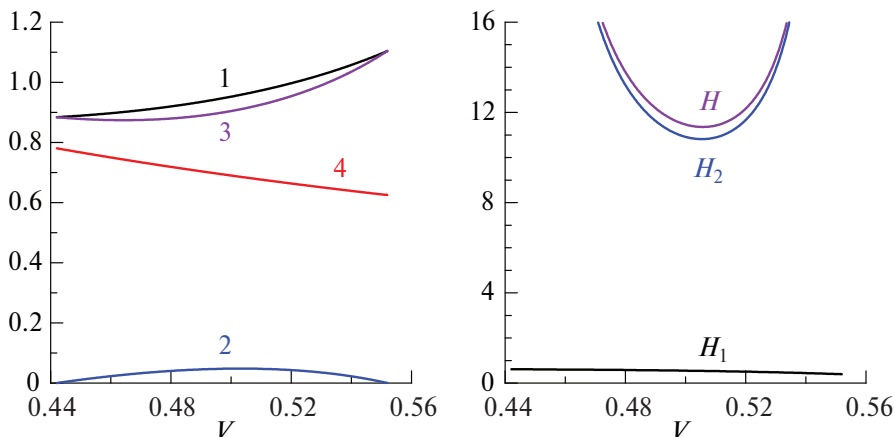


Рис. 3. То же, при $\Pi = 0.3$ и $\Pi = 0.345$.

При $U = c$ все параметры течения конечны и отличны от нуля, сингулярными могут быть только их производные. Особенность формируется в процессе установления течения, поэтому естественно предположить, что ее могут иметь лишь функции, характеризующие собственно течение, – глубины слоев $H_{1,2}$ и скорости течения $U_{1,2}$ в них. При этом параметры канала, его ширину W и глубину

$H = H_1 + H_2$, следует считать непрерывными вместе с производными. Заметим, что именно по этой причине в начале раздела в качестве базовых были выбраны параметр канала H и параметр течения H_1 .

Пусть $U = c$ при $\xi_n = \xi_*$, и $H_1(\xi_*) = H_{1*}$, $H(\xi_*) = H_*$. Тогда при $\xi_n \rightarrow \xi_*$ уравнения (32) можно приближенно представить в виде

$$D_1(H_{1*}, H_*)(H_1 - H_{1*}) \frac{dH_1}{d\xi_n} [1 + O(H_1 - H_{1*})] = R_n(H_{1*}, H_*) \neq 0,$$

если $D_1(H_{1*}, H_*) \neq 0$. Его решение имеет две ветви,

$$H_1 = H_{1*} \pm \left[\frac{2R_n(\xi_n - \xi_*)}{D_1(H_{1*}, H_*)} \right]^{1/2} + O(\xi_n - \xi_*),$$

и определено только по одну сторону от особой точки, – при $\xi_n > \xi_*$, если $R_n / D_1 > 0$, или при $\xi_n < \xi_*$, если $R_n / D_1 < 0$, – что соответствует особенности типа складки [Арнольд, 1990]. Отметим, что скорости течения в критической точке не обращаются в нуль, поэтому течение продолжается и по другую сторону от ξ_* , но перестает быть

безотражательным. Вопрос о том, что происходит при переходе через ξ_* , – отражение волны, ее (скорее всего, частичное) поглощение или их комбинация, – требует отдельного исследования.

Другая особенность типа складки связана с обращением в нуль производной $\partial a^4 / \partial H_1$, т.е. коэффициента D_1 в уравнениях (32),

$$D_1(H_1, H) = H_1^3 - \frac{3}{2} H H_1^2 + H^2 H_1 - \frac{1}{2} H^2 = 0.$$

Здесь при любом $H > 1$ тоже только один вещественный корень [Корн и Корн, 1974],

$$H_{1D} = \frac{H}{2} \left\{ \left[\sqrt{\left(\frac{2}{H} - 1 \right)^2 + \frac{1}{27} + \frac{2}{H} - 1} \right]^{1/3} - \left[\sqrt{\left(\frac{2}{H} - 1 \right)^2 + \frac{1}{27} - \frac{2}{H} + 1} \right]^{1/3} + 1 \right\}. \quad (35)$$

Пусть $H_1 = H_{1D}$ при $\xi_n = \xi_D$, $H(\xi_D) = H_D$. Представим $D_1 = (H_1 - H_{1D}) P(H_1, H)$, где, очевидно, $P(H_1, H) > 0$. При $\xi_n \rightarrow \xi_D$ уравнения (32) можно приближенно записать как

$$(H_1 - H_{1D}) \frac{dH_1}{d\xi_n} [1 + O(H_1 - H_{1D})] = \frac{R_n}{P}.$$

Обе ветви решения,

$$H_1 = H_{1D} \pm \left[\frac{2R_n}{P} (\xi_n - \xi_D) \right]^{1/2} + O(\xi_n - \xi_D),$$

$$H_1 = H_{1D} + \left[\frac{3R_n}{P} (\xi_n - \xi_D) \right]^{1/3} + O[(\xi_n - \xi_D)^{2/3}].$$

Это решение, оставаясь сингулярным, определено уже по обе стороны от $\xi_n = \xi_D$ (складка «распрямляется»). Других особенностей внутри ДО нет. В частности, при $\partial a^4 / \partial H = 0$ (т.е. $D = 0$) решение остается гладким.

Кривые $H_{1c}(H)$ и $H_{1D}(H)$ проходят через точки $H_1 = H = 1$ и $(H_1 = 1, H = 2)$, а также имеют по одной точке пересечения внутри полосы

тоже определены только по одну сторону от особой точки, – при $\xi_n > \xi_D$, если $R_n > 0$, или при $\xi_n < \xi_D$, если $R_n < 0$.

Если же $\xi_* = \xi_D$, особенности сливаются, уравнения (32) приближенно дают

$$(H_1 - H_{1D})^2 \frac{dH_1}{d\xi_n} [1 + O(H_1 - H_{1D})] = \frac{R_n}{P},$$

а решение приобретает вид

и треугольника (рис. 5). Отметим, что при пересечении любой из этих кривых знак производной $dH_1 / d\xi_n$ в уравнениях (32) меняется на противоположный. При $H \rightarrow \infty$ $H_{1D} \rightarrow 1/2 + 0$, а H_{1c} остается меньше корня уравнения $D = 0$, но оба стремятся к $H_1 = 2/3 + 0$.

Таким образом, как и в рассмотренных ранее случаях [Churilov, 2023, 2023a], неограниченному

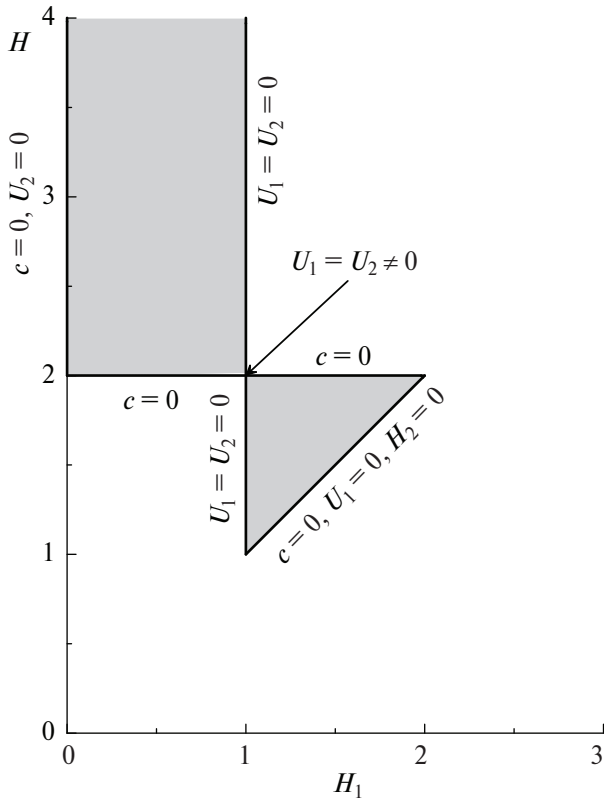


Рис. 4. Допустимая область изменения базовых параметров течения H_1 и H . У каждой из границ указан характер особенности.

распространению ВВ без отражения в течениях классов B и C препятствуют особенности, достигаемые при конечных значениях x (ξ_n), — особенности типа складки $U = c$ и $D_1 = 0$ в обоих классах и $V = 0$ ($H_1 = 1$) в классе C . Они обычно ограничивают интервал безотражательного распространения с одной, либо с обеих сторон, как это видно на примере течений в каналах постоянной глубины (см. рис. 6 и 7). Обратим внимание на две детали. Во-первых, в течениях класса C , как и следует из общего анализа, особенность $H_1 = 1$ ($V = 0$) достигается при некотором конечном значении $\xi_C = \xi_{C0}$. Во-вторых, во всех случаях путь между особенностями типа складки (т.е. между H_{1c} и H_{1D}) очень короток, поэтому решения в этом интервале изменения H_1 на каждом рисунке показаны еще и отдельно, на графиках (b) и (d), с растяжением $\xi_{B,C}$ в 1000 раз.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенное выше исследование показало, что задача о распространении без отражения внутренних волн в обменном течении в общих чертах очень похожа на аналогичную задачу для однонаправленных разноскоростных течений

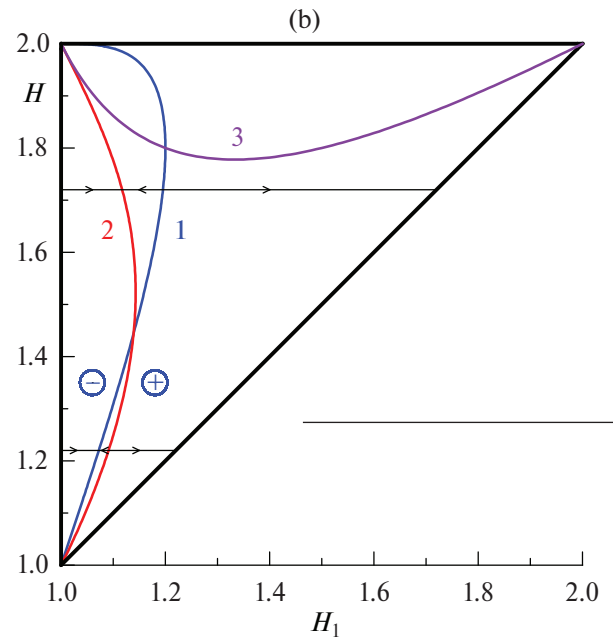
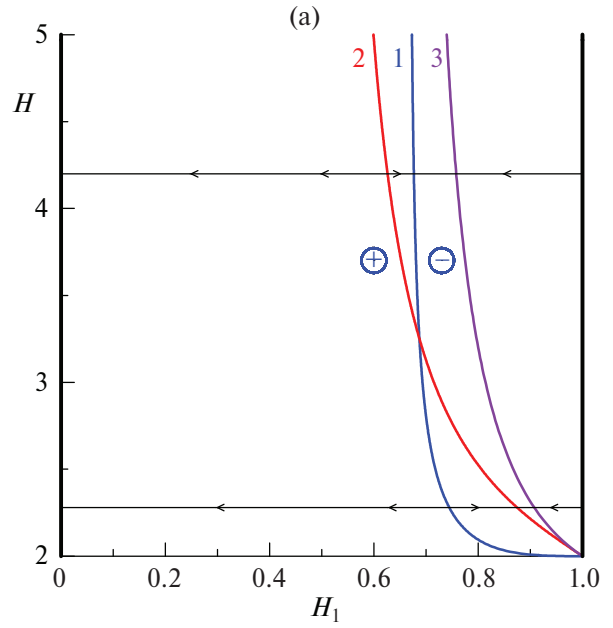


Рис. 5. Сингулярные линии $H_1 = H_{1C}(H)$ (кривые 1) и $H_1 = H_{1D}(H)$ (кривые 2) внутри (a) полосы и (b) треугольника; 3 — линии $D = 0$. Тонкие горизонтальные прямые изображают решения уравнений (32) при $H = \text{const}$, стрелки на них указывают направление изменения H_1 с ростом ξ_n . Обведенные кружком знаки соответствуют знаку R_n (который меняется при пересечении кривых 1).

двухслойной среды в каналах переменного сечения [Churilov, 2023, 2023a]. Безотражательные течения так же подразделяются на три класса. В каждом классе общее решение зависит от одной произвольной функции и одной произвольной константы, но течения, принадлежащие раз-

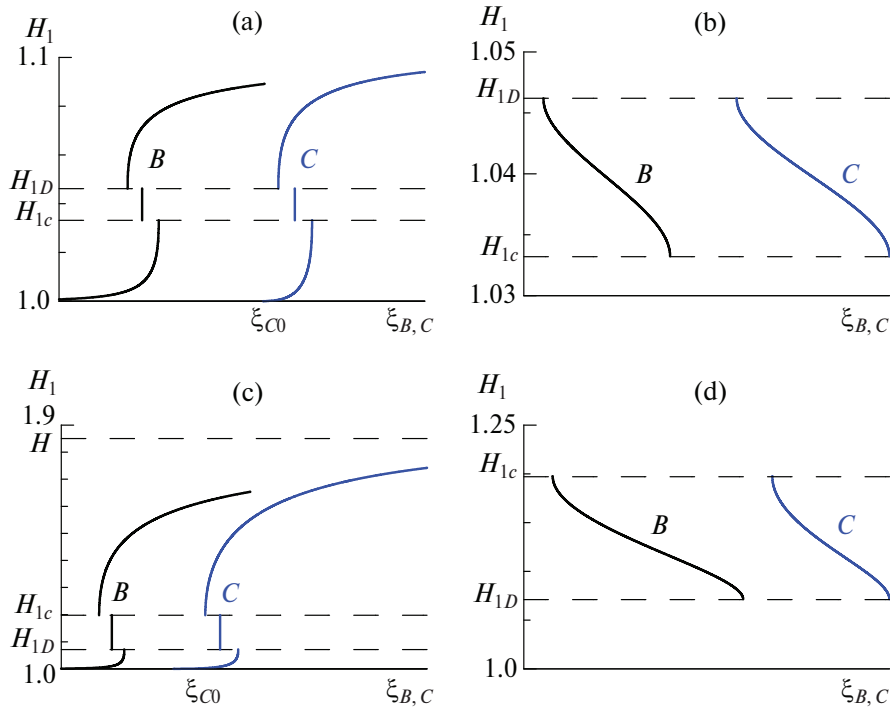


Рис. 6. Решения уравнений (32) в треугольной части ДО: (a) и (b) при $H = 1.1$, (c) и (d) – при $H = 1.85$.

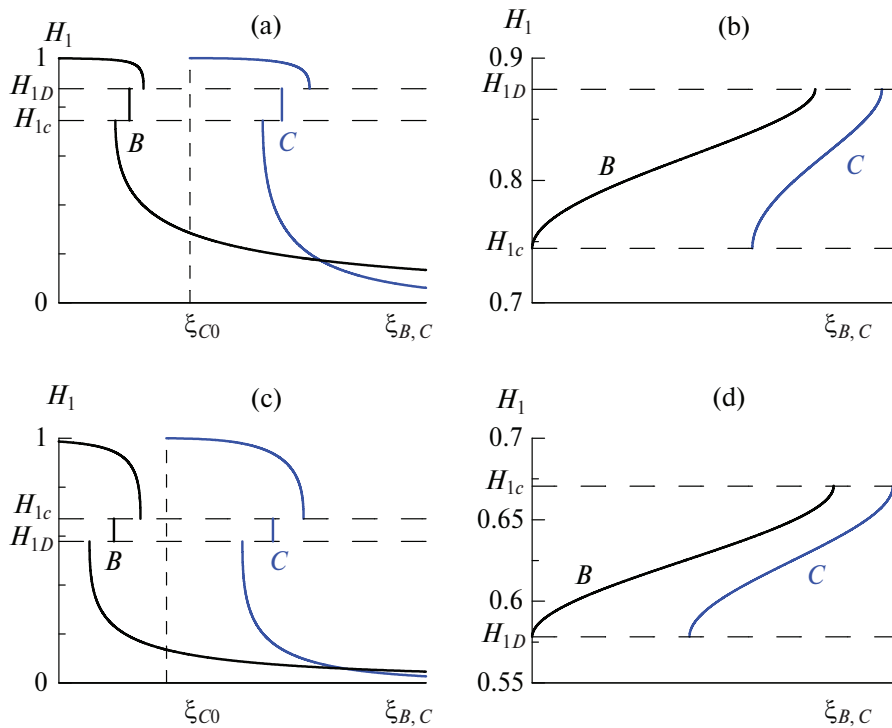


Рис. 7. То же, в полосе: (a) и (b) при $H = 2.28$, (c) и (d) – при $H = 6$.

ным классам, обладают заметно отличающимися свойствами.

Наибольшим разнообразием отличаются течения класса A , описываемые уравнением (28) и являющиеся обобщением регулярных безотражательных конфигураций, найденных в работе [Багаев и Пелиновский, 2016] для каналов без те-

чения. Течение класса A определено и регулярно на всей оси x , а его параметры (скорости жидкости в слоях $U_{1,2}(x)$ и глубины слоев $H_{1,2}(x)$) определяются (с учетом неравенств (29)) константой Π и зависимостью от x сдвига скорости между слоями, $U_1 + U_2 = 2V$, и могут меняться

в очень широких пределах (см. рис. 2 и 3). В частности, скорость жидкости в любом из слоев на разных участках течения может быть как больше, так и меньше скорости волн $c(x)$.

$$W(x)\zeta(x,t) = -\frac{\Pi^{1/2}}{U(x) + c(x)}\chi'_1\left(t - \int \frac{dx}{U(x) + c(x)}\right) - \frac{\Pi^{1/2}}{U(x) - c(x)}\chi'_2\left(t - \int \frac{dx}{U(x) - c(x)}\right),$$

где штрих означает производную по аргументу. Напомним, что в рассматриваемой задаче (см. (A3)) $U = 2(U_1 - V) \equiv U_1 - U_2$ есть алгебраическая сумма скоростей течения в слоях. Зависимость $|U(V)|$ при разных значениях Π показана на рис. 2 и 3 (кривые 3), причем на краях интервала изменения V всегда $U > 0$. Если течение всюду докритическое ($U^2 < c^2$) или сверхкритическое ($U^2 > c^2$), каждая из волн 1 и 2 регулярна и может как иметь определенную полярность, так и быть знакопеременной, в зависимости от вида функций $\chi_{1,2}(Z)$. Например, при $\chi_{1,2}(Z) \sim \text{th}(Z / \tau_{1,2})$ каждая из волн имеет вид импульса возвышения или понижения границы раздела и бежит вдоль всей оси x независимо от другой. В общем случае смещение границы раздела определяется формой волны $\chi_{1,2}(Z)$ и обратно пропорционально локальному значению произведения ее скорости относительно берегов на ширину канала, $[c(x) \pm U(x)]W(x)$.

Картина распространения волн становится сложнее в тех случаях, когда в течении есть критическая точка (точки) $x = x_*$, где $U^2(x_*) = c^2(x_*)$ и происходит переход между режимами (на рис. 2 и 3 это точки пересечения кривых 3 и 4). Хотя параметры течений класса A остаются в таких точках регулярными, а любая поляризация волн по-прежнему допустима, меняется характер распространения одной из волн. С качественной стороны дело вот в чем. «Быстрая» волна проходит критическую точку $x = x_*$ со скоростью $c + |U| = 2c(x_*)$ и фактически не замечает ее. Скорость же «медленной» волны, $c - |U|$, при приближении к x_* стремится к нулю вместе с характерной длиной волны, в общем случае – линейно по x , поэтому путь между критической точкой и текущим положением требует бесконечного времени. Если волна монохроматическая [$\chi = \chi_0 \cos(\omega t - f(x))$], смещение границы раздела при приближении к x_* неограниченно растет, но в случае локализованной по x волны оно остается ограниченным, так как $\chi' \rightarrow 0$. За-

Бегущие ВВ проявляют себя, прежде всего, смещением $\zeta(x,t)$ границы раздела. Так как в течениях класса A $a(x) = \Pi^{1/2} = \text{const}$, из уравнений (11) и (25) находим, что

метим, что скорости “медленных” волн по разные стороны от x_* направлены противоположно, т.е. они либо убегают от критической точки, либо сходятся к ней. В последнем случае переносимый волнами поток энергии поглощается в окрестности x_* даже при исчезающе малой диссипации, см. [Churilov and Stepanyants, 2021].

Течения классов B и C должны удовлетворять гораздо более сложным, чем (28), условиям – уравнениям (32), которые имеют особенности как на границах, так и внутри допустимой области параметров течения (см. рис. 4 и 5), и эти особенности ограничивают интервалы существования безотражательных течений классов B и C . В предшествующих исследованиях [Churilov, 2023, 2023a] отдельное внимание уделялось поиску таких профилей дна канала $H(x)$, при которых безотражательное течение класса B (или C) определено на всей оси x , т.е. является *глобальным*. Обсудим такую возможность для обменных течений.

Течение полностью задается глубиной канала $H(x)$ и глубиной верхнего слоя $H_1(x)$, или, эквивалентно, кривой $H = H(H_1)$, которую удобно назвать траекторией. Чтобы траектория была глобальной, она должна начинаться (при $\xi_n \rightarrow -\infty$) и заканчиваться (при $\xi_n \rightarrow +\infty$) на границах допустимой области и не пересекать линий $U = c$ и $D_1 = 0$ (кривых 1 и 2 на рис. 5). Проведенный в Приложении В анализ показывает, что при $\xi_n \rightarrow -\infty$ достижима только граница $H_1 = 1$ ($V = 0$) и только в течениях класса B , в течениях класса C она достигается при конечных ξ_C . Остальные границы ($H_1 = 0$, $H = 2$ и $H = H_1$) достижимы в обоих классах при $\xi_n \rightarrow +\infty$. Как легко видеть на рис. 5, ни в треугольнике, ни в полосе провести траекторию, начинающуюся при $H_1 = 1$, заканчивающуюся на любой из остальных границ и не пересекающую линии $U = c$ и $D_1 = 0$, невозможно. Таким образом, в классах B и C глобальных течений нет, и в каналах переменной глубины описывающие течения траектории ведут себя качественно так же,

как и при $H = \text{const}$, т.е. ограничены сингулярностью либо с одной, либо с обеих сторон (рис. 6 и 7).

Следует, однако, отметить, что отсутствие глобальных решений уравнений (32) не препятствует сопоставлению течений в проливах течениям классов B и C . Более того, они, видимо, будут даже лучшими кандидатами, чем течения класса A . Обусловлено это, прежде всего, относительно небольшой (несколько десятков километров) протяженностью проливов. Кроме того, при переходе из пролива в водоем ширина потока, как правило, существенно увеличивается, а скорости течения уменьшаются практически до нуля. На языке представленного выше анализа это соответствует $V(x) \rightarrow 0$ на границе допустимой области, что свойственно течениям классов B и C , но несовместимо с уравнением (28), определяющим класс A .

И последнее. Вопрос о допустимой поляризации волн в течениях классов B и C оказывается значительно труднее, чем в случае течений класса A , так как здесь форм-фактор $a(x)$ меняется вдоль течения, причем достаточно сложным образом. Поэтому остается неясным, возможны ли волны определенной поляризации в этих классах течений.

В заключение уместно остановиться на перспективе дальнейших исследований. Условие безотражательности предъявляет довольно жест-

кие требования к параметрам течений классов B и C , и даже при этом такие течения существуют лишь в ограниченной области пространства. Это ставит интересную и трудную задачу сопряжения безотражательных течений как между собой, так и с иными конфигурациями течений. Для водоемов без течения подобная задача рассматривалась как для поверхностных [Диденкулова и др., 2008; Диденкулова и Пелиновский, 2011], так и для внутренних волн [Талипова и Пелиновский, 2011], а при наличии течения, насколько нам известно, только для поверхностных волн [Churilov and Stepanyants, 2022]. В последнем случае удалось найти условия, при которых не возникает отражения волн в точке сопряжения различных безотражательных течений. Обобщение этих исследований на случай внутренних волн в течениях представляется насущной задачей.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

1. Формулы, выражающие все параметры течения через $U_1(x)$ и $U_2(x)$:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \mu_1 U_1(x) + \mu_2 U_2(x), & U(x) &= \frac{\mu_1 U_1^2(x) - \mu_2 U_2^2(x)}{\mu_1 U_1(x) + \mu_2 U_2(x)} \equiv \frac{\mu_1 U_1^2(x) - \mu_2 U_2^2(x)}{V(x)}, \\
 H_1(x) &= \frac{1}{2}[U_2^2(x) - U_1^2(x)] + H_0, & H_2(x) &= \frac{\mu_1 U_1(x)}{\mu_2 U_2(x)} \left(\frac{U_2^2(x) - U_1^2(x)}{2} + H_0 \right), \\
 c^2(x) &= \frac{\mu_1 U_1(x)}{V(x)} \left(\frac{U_2^2(x) - U_1^2(x)}{2} + H_0 \right) - \frac{\mu_1 \mu_2 U_1(x) U_2(x)}{V^2(x)} [U_1(x) + U_2(x)]^2, & (A1) \\
 w(x) &\equiv \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{W(x)} = \frac{U_1}{\mu_2} \left(\frac{U_2^2(x) - U_1^2(x)}{2} + H_0 \right), \\
 a^4(x) &= \mu_1 U_1(x) V(x) \left(\frac{U_2^2(x) - U_1^2(x)}{2} + H_0 \right) - \mu_1 \mu_2 U_1(x) U_2(x) [U_1(x) + U_2(x)]^2.
 \end{aligned}$$

2. Формулы, выражающие все параметры течения через $H_1(x)$ и $H_2(x)$:

$$\begin{aligned}
 U_{1,2}^2(x) &= \frac{2\mu_{2,1}^2 H_{2,1}^2(x) [H_1(x) - H_0]}{\mu_1^2 H_1^2(x) - \mu_2^2 H_2^2(x)}, & w^2(x) &= \frac{2H_1^2(x) H_2^2(x) [H_1(x) - H_0]}{\mu_1^2 H_1^2(x) - \mu_2^2 H_2^2(x)}, & (A2) \\
 V^2(x) &= \frac{2\mu_1^2 \mu_2^2 H^2(x) [H_1(x) - H_0]}{\mu_1^2 H_1^2(x) - \mu_2^2 H_2^2(x)}, & H(x) &= H_1(x) + H_2(x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U^2(x) &= \frac{2[\mu_1 H_1^2(x) - \mu_2 H_2^2(x)]^2 [H_1(x) - H_0]}{H^2(x) [\mu_1^2 H_1^2(x) - \mu_2^2 H_2^2(x)]}, \\
 c^2(x) &= \frac{H_1(x) H_2(x)}{H(x)} \left(1 - \frac{2[\mu_1 H_1(x) + \mu_2 H_2(x)] [H_1(x) - H_0]}{[\mu_1 H_1(x) - \mu_2 H_2(x)] H(x)} \right), \\
 a^4(x) &= \frac{2\mu_1^2 \mu_2^2 H_1(x) H_2(x) [H_1(x) - H_0]}{\mu_1^2 H_1^2(x) - \mu_2^2 H_2^2(x)} \left(H(x) - \frac{2[\mu_1 H_1(x) + \mu_2 H_2(x)] [H_1(x) - H_0]}{\mu_1 H_1(x) - \mu_2 H_2(x)} \right).
 \end{aligned} \tag{A2}$$

При этом следует иметь в виду, что всюду в течении

$$\frac{2[H_1(x) - H_0]}{\mu_1 H_1(x) - \mu_2 H_2(x)} > 0.$$

3. Сбалансированные течения, $\eta_{1,2} = 0.5$.

В этом случае основные соотношения в переменных U_1 и $V = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 U_2 &= 2V - U_1, \quad U = 2(U_1 - V), \quad H_1 = H_0 + 2V(V - U_1), \quad H_2 = \frac{U_1 H_1}{2V - U_1}, \\
 c^2 &= \frac{U_1}{2V} (H_0 - 2V^2), \quad a^4 = \frac{1}{2} U_1 V (H_0 - 2V^2), \quad w = 2U_1 [H_0 + 2V(V - U_1)].
 \end{aligned} \tag{A3}$$

Отметим, что $c^2(x) > 0$ требует $2V^2(x) < H_0$.

С другой стороны, в переменных H_1 и $H = H_1 + H_2$:

$$\begin{aligned}
 U_1^2 &= \frac{2(H_1 - H_0)(H - H_1)^2}{(2H_1 - H)H}, \quad U_2^2 = \frac{2(H_1 - H_0)H_1^2}{(2H_1 - H)H}, \quad V^2 = \frac{(H_1 - H_0)H}{2(2H_1 - H)}, \\
 U^2 &= \frac{2(H_1 - H_0)(2H_1 - H)}{H}, \quad c^2 = \frac{H_1(H - H_1)(2H_0 - H)}{(2H_1 - H)H}, \\
 c^2 - U^2 &= \frac{H_1(H - H_1)}{H} - \frac{2(H_1 - H_0)(3H_1^2 - 3H_1H + H^2)}{(2H_1 - H)H}, \\
 a^4 &= \frac{H_1(H_1 - H_0)(H - H_1)(2H_0 - H)}{2(2H_1 - H)^2}, \quad w^2 = \frac{8H_1^2(H_1 - H_0)(H - H_1)^2}{(2H_1 - H)H}.
 \end{aligned} \tag{A4}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В. АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ У ГРАНИЦ ДО

Допустимая область имеет прямолинейные границы:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= 0, & H &> 2; \\
 H_1 &= 1, & H &\in (1, 2) \cup (2, \infty);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H &= 2, & H_1 &\in (0, 1) \cup (1, 2); \\
 H &= H_1, & H_1 &\in (1, 2).
 \end{aligned}$$

Вычислим асимптотики решений уравнений (32) вблизи этих границ.

1. $H_1 \rightarrow 0$, $H \rightarrow H_* > 2$. Из уравнений (33) находим

$$D_1 = -\frac{1}{2} H_*^2 + O(H_1), \quad D = \frac{H_1 H_*}{H_* - 2} + O(H_1^2),$$

$$\mathcal{R}_B = \frac{1}{2} H_*^{5/4} (H_* - 2)^{3/4} H_1^{7/4} + O(H_1^{11/4}), \quad \mathcal{R}_C = \frac{1}{2} H_*^{7/4} (H_* - 2)^{1/4} H_1^{5/4} + O(H_1^{9/4}).$$

Так как $D \sim H_1 \rightarrow 0$, членом с $dH / d\xi_n$ в уравнениях (32) можно пренебречь. Для течений класса B получим уравнение

$$-H_1^{-7/4} \frac{dH_1}{d\xi_B} [1 + O(H_1)] = \left(\frac{H_* - 2}{H_*} \right)^{3/4},$$

интегрирование которого дает

$$\frac{3}{4} H_1^{-3/4} [1 + O(H_1)] = \left(\frac{H_* - 2}{H_*} \right)^{3/4} (\xi_B - \xi_{B1}), \quad \xi_B \geq \xi_{B1},$$

или

$$H_1(\xi_B) = \frac{H_*}{H_* - 2} \left(\frac{3}{4\xi_B} \right)^{4/3} + O(\xi_B^{-7/3}), \quad \xi_B \rightarrow +\infty. \tag{B1}$$

Аналогично, для течений класса C приходим к уравнению

$$-H_1^{-5/4} \frac{dH_1}{d\xi_C} [1 + O(H_1)] = \left(\frac{H_* - 2}{H_*} \right)^{1/4},$$

интегрирование которого дает

$$H_1(\xi_C) = \frac{256H_*}{H_* - 2} \xi_C^{-4} + O(\xi_C^{-5}), \quad \xi_C \rightarrow +\infty. \tag{B2}$$

Другие параметры течения при $H_1 \rightarrow 0$ ведут себя следующим образом:

$$U_1 \rightarrow \sqrt{2}, \quad U_2 = \frac{\sqrt{2}H_1}{H_*} + O(H_1^2), \quad c^2 = H_1 + O(H_1^2), \quad W \sim H_1^{-1}. \tag{B3}$$

2. $H_1 \rightarrow 1, H \rightarrow H_*$. Из уравнений (33) получаем

$$D_1 = \frac{1}{2}(H_* - 1)(H_* - 2) + O(H_1 - 1), \quad D = \frac{1}{2}(H_1 - 1) + O[(H_1 - 1)^2],$$

$$\mathcal{R}_B = -H_*^{1/2}(H_* - 1)^{3/4}(H_* - 2)^2 \left(\frac{H_1 - 1}{2 - H_*} \right)^{5/4} [1 + O(H_1 - 1)],$$

$$\mathcal{R}_C = -H_*^{1/2}(H_* - 1)^{1/4}(H_* - 2)^2 \left(\frac{H_1 - 1}{2 - H_*} \right)^{3/4} [1 + O(H_1 - 1)].$$

Здесь тоже можно пренебречь членом с $dH / d\xi_n$ в уравнениях (32). Дальнейшие вычисления аналогичны проделанным выше. Течения класса B достигают $H_1 = 1$ асимптотически,

$$H_1(\xi_B) = 1 - \frac{16(H_* - 1)(H_* - 2)}{H_*^2 \xi_B^4} + O(\xi_B^{-5}), \quad \xi_B \rightarrow -\infty,$$

а течения класса C – при некотором конечном $\xi_C = \xi_{C0}$:

$$H_1(\xi_C) = 1 - \frac{H_*^2(H_* - 2)}{16(H_* - 1)^3} (\xi_C - \xi_{C0})^4 + O[(\xi_C - \xi_{C0})^8], \quad \xi_C \geq \xi_{C0}. \tag{B5}$$

Для других параметров течения при $H_1 \rightarrow 1$ находим

$$U_1, U_2, V \sim |H_1 - 1|^{1/2}, \quad c^2 \approx \frac{H_* - 1}{H_*} = \frac{H_2}{H_*}, \quad W \sim |H_1 - 1|^{-1/2}. \tag{B6}$$

3. $H \rightarrow 2, H_1 \rightarrow H_a \in (0,1) \cup (1,2)$. Уравнения (33) дают

$$D_1 = (H_a - 1)(H_a^2 - 2H_a + 2) + O(H - 2),$$

$$D = \frac{H_a(H_a - 1)^2(2 - H_a)}{H - 2} [1 + O(H - 2)],$$

$$\mathcal{R}_B = 2^{-3/2} [H_a(2 - H_a)]^{7/4} \left(\frac{2 - H}{H_a - 1} \right)^{3/4} [1 + O(H - 2)],$$

$$\mathcal{R}_C = 2^{-1/2} [H_a(2 - H_a)]^{5/4} \left(\frac{2 - H}{H_a - 1} \right)^{1/4} [1 + O(H - 2)].$$

В этом случае, напротив, $D_1 / D \rightarrow 0$, Стандартные вычисления показывают, что и в уравнениях (32) можно пренебречь членом в обоих классах эта граница достигается асимптотически: с $dH_1 / d\xi_n$.

$$H(\xi_B) = 2 - \frac{2[2(H_a - 1)]^{1/3}}{H_a(2 - H_a)(3\xi_B)^{4/3}} + O(\xi_B^{-7/3}), \quad \xi_B \rightarrow +\infty, \tag{B7}$$

$$H(\xi_C) = 2 - \frac{2^{10}(H_a - 1)^9}{H_a(2 - H_1)\xi_C^4} + O(\xi_C^{-5}), \quad \xi_C \rightarrow +\infty, \tag{B8}$$

Все параметры течения остаются конечными, только $c^2 \sim |H - 2| \rightarrow 0$.

4. $H \rightarrow H_1 + 0$. Из уравнений (33) находим

$$D_1 = \frac{1}{2} H_1^2 (H_1 - 1) + O(H - H_1), \quad D = \frac{1}{2} H_1^2 (H_1 - 1) + O(H - H_1),$$

$$\mathcal{R}_B = \frac{1}{2} H_1^{5/4} (H_1 - 1)^{1/4} (2 - H_1)^{3/4} (H - H_1)^{7/4} [1 + O(H - H_1)],$$

$$\mathcal{R}_C = \frac{1}{2} H_1^{7/4} (H_1 - 1)^{-1/4} (2 - H_1)^{1/4} (H - H_1)^{5/4} [1 + O(H - H_1)].$$

Коэффициенты D и D_1 в главном порядке равны. Поэтому уравнение (32) для течений класса B примет вид

$$-(H - H_1)^{-7/4} \frac{d}{d\xi_B} (H - H_1) = \left[\frac{2 - H_1}{H_1(H_1 - 1)} \right]^{3/4} + O(H - H_1),$$

а его решение

$$H = H_1 + \frac{H_1(H_1 - 1)}{2 - H_1} \left(\frac{4}{3\xi_B} \right)^{4/3} + O(\xi_B^{-7/3}), \quad \xi_B \rightarrow +\infty. \tag{B9}$$

Аналогично, для течений класса C получим уравнение

$$-(H - H_1)^{-5/4} \frac{d}{d\xi_C} (H - H_1) = \frac{(2 - H_1)^{1/4}}{H_1^{1/4}(H_1 - 1)^{5/4}} + O(H - H_1)$$

и его асимптотическое решение,

$$H = H_1 + \frac{256H_1(H_1 - 1)^5}{(2 - H_1)\xi_C^4} + O(\xi_C^{-5}), \quad \xi_C \rightarrow +\infty. \tag{B10}$$

При этом

$$U_1 c^2 \sim (H - H_1) = H_2 \rightarrow 0, \quad W \sim (H - H_1)^{-1} \rightarrow \infty. \tag{B11}$$

5. Рассмотрим также верхнюю границу полосы, $H \rightarrow +\infty$, $0 < H_1 < 1$. Положив в уравнениях (32) и (33) $h = 1/H$, получим

$$Z(H_1, h) \left[D(H_1, h) \frac{dh}{d\xi_n} - \hat{D}_1(H_1, h) \frac{dH_1}{d\xi_n} \right] = P_n(H_1, h), \tag{B12}$$

где

$$\begin{aligned} Z(H_1, h) &= (2 - 3H_1)(1 - 3H_1h) + 2H_1^2(3 - 4H_1)h^2, \\ D(H_1, h) &= \frac{H_1(1 - H_1)}{2(1 - 2h)}(2 - 3H_1 + 2H_1^2h), \\ \hat{D}_1 &= \frac{1}{2}(1 - 2H_1 + 3H_1^2h - 2H_1^3h^2), \\ P_B(H_1, h) &= H_1^{7/4}(1 - H_1)^{5/4}(1 - H_1h)^{7/4}(1 - 2H_1h)(1 - 2h)^{3/4} = \\ &= H_1^{7/4}(1 - H_1)^{5/4} \left[1 - \frac{15}{4}H_1h - \frac{3}{2}h + O(h^2) \right], \\ P_C(H_1, h) &= H_1^{5/4}(1 - H_1)^{3/4}(1 - H_1h)^{5/4}(1 - 2H_1h)^2(1 - 2h)^{1/4} = \\ &= H_1^{5/4}(1 - H_1)^{3/4} \left[1 - \frac{21}{4}H_1h - \frac{1}{2}h + O(h^2) \right]. \end{aligned}$$

Коэффициенты Z , D и \hat{D}_1 ограничены, и если H_1 не близко ни к нулю, ни к единице, правые части (B12) порядка единицы, и $h = 0$ достигается, очевидно, при конечном ξ_n .

Посмотрим, что будет, если при $h \rightarrow 0$ H_1 стремится к 0 или 1.

Пусть $H_1 \rightarrow 0$ вместе с h так, что $h \approx \lambda H_1^\alpha$, $\alpha > 0$. Тогда левую часть (B12) можно записать как

$$2\alpha\lambda H_1^\alpha \frac{dH_1}{d\xi_n} [1 + O(H_1 + H_1^\alpha)] - \frac{dH_1}{d\xi_n} [1 + O(H_1 + H_1^\alpha)].$$

Видно, что первым слагаемым можно пренебречь, поэтому решения (B12) описываются фор-

мулами (B1) и (B2) в пределе $H_* \rightarrow \infty$, т.е. в классе B

$$H_1(\xi_B) = \left(\frac{3}{4\xi_B} \right)^{-4/3} + \dots, \quad h(\xi_B) = \lambda \left(\frac{3}{4\xi_B} \right)^{-4\alpha/3} + \dots, \quad \xi_B \rightarrow +\infty,$$

а в классе C

$$H_1(\xi_C) = 256\xi_C^{-4} + \dots, \quad h(\xi_C) = \lambda \left(\frac{256}{\xi_C^4} \right)^\alpha + \dots, \quad \xi_C \rightarrow +\infty.$$

Если же $h \rightarrow 0$ и $H_1 \rightarrow 1 - 0$ так, что $h \approx \lambda_1(1 - H_1)^\beta$, $\beta > 0$, аналогичным образом можно показать, что решения (B12) описывают-

ся формулами (B4) и (B5) в пределе $H_* \rightarrow \infty$, т.е. в классе B предел достигается при $\xi_B \rightarrow -\infty$, а в классе C — при конечном ξ_C .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Арнольд В. И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 127 с.
- Багаев А. В., Пелиновский Е. Н.* Конфигурация канала переменного сечения, допускающая безотражательное распространение внутренних волн в океане // Журн. СВМО. 2016. Т. 18. № 3. С. 127–136.
- Диденкулова И. И., Заубо Н., Пелиновский Е. Н.* Отражение длинных волн от «безотражательного» донного профиля // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2008. Т. 43. № 4. С. 102–108.
- Диденкулова И. И., Пелиновский Е. Н.* Об отражение длинной волны от подводного склона // Океанология. 2011. Т. 51. № 4. С. 606–611.
- Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1974. 831 с.
- Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.
- Морозов Е. Г.* Океанские внутренние волны. М.: Наука, 1985. 151 с.
- Овсянников Л. В.* Модели двухслойной «мелкой воды» // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
- Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н., Петрухин Н. С.* О проникновении длинной внутренней волны в толщу океана // Океанология. 2009. Т. 49. № 5. С. 673–680.
- Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н.* Трансформация внутренних волн над неровным дном: аналитические результаты // Океанология. 2011. Т. 51. № 4. С. 621–626.
- Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н., Куркина О. Е., Рувинская Е. А., Гиниятуллин А. Р., Наумов А. А.* Безотражательное распространение внутренних волн в канале переменного сечения и глубины // Фундамент. и прикл. геофиз. 2013. Т. 6. № 3. С. 46–53.
- Чурилов С. М.* Безотражательное распространение внутренних волн в канале переменного сечения при наличии течения // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2022. Т. 58. № 3. С. 300–309.
- Armi L.* The hydraulics of two flowing layers with different densities // J. Fluid Mech. 1986. V. 163. P. 27–58.
- Baines P. G.* A unified description of two-layer flow over topography // J. Fluid Mech. 1984. V. 146. P. 127–167.
- Baines P. G.* Topographic effects in stratified flows. Cambridge: CUP, 1995. 498 p.
- Churilov S. M.* Traveling internal waves in a two-layer shallow medium with variable bathymetry and current // Phys. Fluids. 2023a. V. 35. 026602.
- Churilov S. M.* Traveling internal waves in a two-layer shallow medium with variable bathymetry and current. Surface and near-bottom flows // Phys. Fluids. 2023b. V. 35. 076613.
- Churilov S. M., Stepanyants Yu. A.* Hydrodynamic models of astrophysical wormholes: The general concept // Phys. Fluids. 2021. V. 33. 077121.
- Churilov S. M., Stepanyants Yu. A.* Reflectionless wave propagation on shallow water with variable bathymetry and current // J. Fluid Mech. 2022. V. 931. A15. 25 p.
- Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* Nonreflecting internal wave beam propagation in the deep ocean // J. Phys. Oceanography. 2010. V. 40. P. 802–813.
- Pedlosky J.* Waves in the Ocean and Atmosphere. Introduction to Wave Dynamics. Berlin: Springer, 2003. 268 p.
- Pelinovsky E., Talipova T., Didenkulova I., Didenkulova E.* Interfacial long traveling waves in a two-layer fluid with variable depth // Stud. Appl. Math. 2019. V. 142. P. 513–527.
- Redekopp L. G.* Elements of instability theory for environmental flows // Environmental Stratified Flows / Ed. Grimshaw R. London: Kluwer, 2001. P. 223–281.
- Sutherland B. R.* Internal gravity waves. Cambridge: CUP, 2010. 394 p.

REFLECTIONLESS INTERNAL WAVE PROPAGATION IN AN EXCHANGE FLOW OF SHALLOW TWO-LAYER MEDIUM IN A CHANNEL WITH VARIABLE CROSS-SECTION

S. M. Churilov

*Institute of Solar–Terrestrial Physics SB RAS,
126 A Lermontov St., Irkutsk, 664033 Russia
e-mail: churilov@iszf.irk.ru*

The propagation of long linear internal waves of arbitrary shape in a steady flow of shallow two-layer fluid in a narrow channel of variable cross-section is considered. The flow velocities in the layers are oppositely directed. It is shown that there are three classes of flows in which waves can propagate without reflection in both directions, and the properties of such flows are examined. A detailed analysis has demonstrated that only one of these classes contains regular flows of unlimited extent, while the flows belonging to the other two classes are always limited (on one or both sides) by a singularity. Possible applications of the results obtained and prospects for further research are discussed.

Keywords: two-layer exchange flow, channel with variable cross-section, internal waves, propagation without reflection