

ТОНКИЕ И ТОЛСТЫЕ ДИСКИ ВОКРУГ ЧЕРНЫХ ДЫР И КРотовых НОР

© 2023 г. С. В. Чернов^{1,*}

¹Астрокосмический центр, Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: chernov@lpi.ru

Поступила в редакцию 30.12.2022 г.

После доработки 20.06.2023 г.

Принята к публикации 17.07.2023 г.

В работе исследуется распределение вещества в толстых дисках вокруг черных дыр и кротовых нор численно и аналитически. Рассматриваются метрики Керра и Лами. Выписываются точные аналитические решения. Учитывается влияние тороидального магнитного поля на структуру толстого диска. Строятся образы тонкого диска в зависимости от значений параметров метрики.

Ключевые слова: черные дыры, кротовые норы, диски, магнитные поля

DOI: 10.31857/S0004629923080042, **EDN:** HLBOIY

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из научных задач обсерватории Миллиметров является задача о возможности наблюдения кротовых нор [1, 2]. Главная проблема, которая здесь возникает, заключается в том, чтобы отличить кротовую нору от черной дыры. Одним из наблюдательных проявлений, который позволяет наблюдательно отличить черную дыру от кротовой норы, является наличие системы фотонных колец. Фотонные кольца характеризуются присутствием круговых фотонных орбит, благодаря чему фотоны могут совершать бесконечное число оборотов вокруг черной дыры или кротовой норы. Каждый такой оборот будет проявляться в виде кольца (и/или серпа) в образе черной дыры или кротовой норы. Наблюдательно это будет проявляться в виде быстрых осцилляций в функции видности на базах больше диаметра Земли [3]. Анализируя функции видности на таких базах, можно будет сделать вывод о присутствии в центрах активных ядер галактик черных дыр или кротовых нор [4, 5].

Другим наблюдательным проявлением, с помощью которого можно отличить черную дыру от кротовой норы, являются вспышки вблизи горизонта событий черной дыры или горловины кротовой норы [6]. Вспышки могут проявляться в виде ярких пятен в образах. По расположению и количеству пятен в образах можно сделать вывод о наличии в источнике черной дыры или кротовой норы [6].

Для непосредственного наблюдения образов черных дыр или кротовых нор необходим источ-

ник излучения. В активных ядрах галактик таким источником является аккреционный диск, который подсвечивает черную дыру или кротовую нору. В литературе исследуется два вида аккреционных дисков: геометрически тонкие, но оптически толстые [7] и геометрически толстые, но оптически тонкие диски [8]. Считается, что вокруг источников SGR A* и M87* расположены геометрически толстые диски. Различают два вида геометрически толстых дисков. Первый тип со стандартной и нормальной эволюцией (SANE) и второй тип с захваченным магнитным полем (MAD) [9]. Изучение таких дисков имеет важное значение как в теоретическом плане, так и в наблюдательном. В данной работе изучается распределение материи в толстых дисках вокруг черных дыр и кротовых нор.

Для этого рассматривается метрика Лами, которая максимально близко приближена к метрике черной дыры Керра. Отличие метрики Лами от метрики Керра заключается в том, что параметр метрики масса не является постоянной величиной, а есть функция радиальной координаты [10]. Простейший способ это сделать — добавить магнитный заряд в центр черной дыры [11]. В зависимости от величины этого магнитного заряда данная метрика может быть как метрикой черной дыры, так и метрикой кротовой норы [10]. В предельном случае, когда магнитный заряд стремится к нулю, метрика Лами переходит в метрику вращающейся черной дыры Керра. В разделе 2 выписывается метрика Лами и изучаются основные свойства данной метрики. В разделе 3 выведено новое точное аналитическое решение рас-

пределения материи в толстом диске в метрике Лами. В разделе 4 обобщается полученное решение на случай наличия тороидального магнитного поля. В разделе 5 численно построены образы метрики Лами для тонкого диска в зависимости от параметров метрики и угла наклона между лучом зрения наблюдателя и осью вращения черной дыры или кротовой норы.

В статье принята система единиц, в которой гравитационная постоянная и скорость света равны единице, $G = c = 1$.

2. ПРОСТРАНСТВО–ВРЕМЯ КРОВОЙ НОРЫ

Рассмотрим метрику Лами, которая впервые была рассмотрена в работе [10]. В этой работе авторы обобщили сферически-симметричное решение, полученное в работе [12] в случае вращения. Данная метрика имеет вид

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\lambda} dr^2 + e^{2\mu} d\theta^2, \quad (1)$$

где введены стандартные обозначения:

$$e^{2\mu} = \Sigma, \quad e^{2\lambda} = \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad \omega = \frac{2arM(r)}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta},$$

$$e^{2\psi} = \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta,$$

$$e^{2\nu} = \frac{\Delta \Sigma}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta},$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2rM(r) + a^2.$$

Эта метрика отличается от метрики вращающейся черной дыры Керра тем, что параметр массы M не является постоянной величиной, а есть функция радиальной координаты вида [10]:

$$M(r) = m \frac{|r|^3}{|r|^3 + 2mb^2}. \quad (2)$$

В этом случае, параметр m является постоянной величиной и мы будем называть его параметром массы, а параметр b , как было показано в работе [11], является магнитным зарядом. В данной работе параметр b является макропараметром и может принимать значения в диапазоне $0 \leq b \leq m$. В случае, когда магнитный заряд равен нулю, $b = 0$, данная метрика совпадает с метрикой вращающейся черной дыры Керра. Без потери общности будем считать, что параметр массы равен единице, $m = 1$. В этом случае магнитный заряд принимает значения от нуля до единицы, $0 \leq b \leq 1$. Как было показано в работе [10], данное многообразие является геодезически полным и не сингулярным во всем пространстве-времени $-\infty < r < \infty$.

Это означает, что два асимптотически плоских пространства-времени соединены между собой в точке $r = 0$. Из выражения (2) можно видеть, что величина $M(r) \geq 0$ всегда больше или равна нулю для любого радиуса, $-\infty < r < \infty$. В Приложении А приведены метрические коэффициенты и символы Кристоффеля для метрики (1) с функцией (2).

Данная метрика обладает координатными особенностями, которые соответствуют горизонтам событий в случае метрики Керра. Эти условия определяются выражением $\Delta = r^2 - 2rM(r) + a^2 = 0$. Для случая, когда магнитный заряд равен нулю, $b = 0$, данное уравнение имеет два корня, которые соответствуют горизонтам событий в метрике Керра $r = 1 \pm \sqrt{1 - a^2}$. В случае, когда параметр вращения в метрике Лами равен нулю, $a = 0$, данное уравнение имеет один корень $r_1 = 0$ для случая, когда магнитный заряд $b > 4\sqrt{3}/9$, два корня $r_1 = 0$ и $r_2 = 4/3$ для случая, когда магнитный заряд равен $b = 4\sqrt{3}/9$, и три корня $r_1 = 0$, $r_2 = 4/3 \cos(\phi - 2\pi/3) + 2/3$ и $r_3 = 4/3 \cos(\phi) + 2/3$, где $\phi = 1/3 \arccos(1 - 27b^2/8)$, для случая, когда магнитный заряд принимает значения в интервале $0 < b < 4\sqrt{3}/9$.

В общем случае, когда оба параметра a и b не равны нулю, уравнение $\Delta = 0$ решается численно. В статье [10], рис. 4 показаны случаи, когда данное уравнение имеет один, два и три корня. Данные корни уравнения $\Delta = 0$ будем называть горизонтами событий по аналогии с корнями уравнения в метрике Керра. Если метрика Лами обладает двумя или одним (экстремальный случай) горизонтом событий, то данная метрика соответствует метрике черной дыры, в противном случае – кротовой норе.

3. ТОЛСТЫЕ ДИСКИ ВОКРУГ ЧЕРНЫХ ДЫР И КРОВОЙ НОР

Нас будет интересовать распределение вещества вокруг метрики Лами. Вещество будем описывать тензором энергии-импульса идеальной жидкости, который имеет вид

$$T^{\alpha\beta} = (P + \rho)u^\alpha u^\beta + Pg^{\alpha\beta}, \quad (3)$$

где P – давление, ρ – плотность энергии, а u^α – четыре-скорость. Будем рассматривать идеализированную модель в предположении, что радиальный и полярный компоненты скорости равны нулю $u^r = u^\theta = 0$. Также предполагается, что течение осесимметричное $\partial/\partial\phi$ и стационарное $\partial/\partial t$. В этом случае ненулевые компоненты четыре-скорости u^t , u^ϕ являются функциями двух перемен-

ных r и θ . Тогда уравнения непрерывности и адиабатичности будут выполняться автоматически,

$$(nu^\alpha)_{;\alpha} = 0, \quad (4)$$

$$u^\alpha s_{;\alpha} = 0, \quad (5)$$

где n — плотность и s — удельная энтропия вещества. Остается только система из двух уравнений: нормировки скорости и дивергенции тензора энергии-импульса,

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1, \quad (6)$$

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (7)$$

Легко видеть, что временной t и азимутальный ϕ компоненты в уравнении дивергенции тензора энергии-импульса удовлетворяются тождественно. Тогда оставшиеся уравнения можно переписать в развернутом виде:

$$g_{tt}u^{t2} + 2g_{t\phi}u^t u^\phi + g_{\phi\phi}u^{\phi2} = -1, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial a} (P\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} g_{\gamma\delta,a} T^{\gamma\delta}, \quad (9)$$

где обозначение a принимает два значения, либо $a = r$, либо $a = \theta$. После несложных преобразований из двух приведенных выше уравнений можно получить одно выражение вида:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p + \rho} \frac{\partial P}{\partial a} &= \frac{1}{2} g_{tt,a} u^{t2} + g_{t\phi,a} u^t u^\phi \\ &+ \frac{1}{2} g_{\phi\phi,a} u^{\phi2} = -v_{,a} + u_t u_\phi \omega_a e^{-2v} \\ &+ u_\phi^2 (\omega \omega_a e^{-2v} + (\psi_{,a} - v_{,a}) e^{-2\psi}). \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что данное выражение совпадает с уравнением (2.10) из статьи [13]. Это основное наше уравнение, которое мы будем решать ниже аналитически при разных предположениях. В работе [13] авторы предположили, что величина $l = u_\phi u^t$ есть полный угловой момент толстого диска, и она является постоянной величиной. В Приложении Б приведено точное решение этого уравнения при таком условии, основанное на интегрировании уравнения (10). В работе [14] было предположено, что другая величина, $l = -u_\phi/u_t$, является полным угловым моментом толстого диска и также является постоянной величиной. В Приложении В выписано точное решение в этом предположении, основанное на интегрировании уравнения (10). В данной работе сделано другое предположение, которое позволяет найти новое точное аналитическое решение.

Предположим, что величина $l = u_\phi u^t$ остается постоянной. В этом случае уравнение (10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{p + \rho} \frac{\partial P}{\partial a} &= -v_{,a} + l(\psi_{,a} - v_{,a}) + \\ &+ \frac{z_{,a}(1 + 2l)z \pm \sqrt{4l(l+1)z + z^2}}{2z(1-z)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где была введена величина $z = \omega^2 e^{2\chi}$.

Если ввести функцию энтальпии, которая определяется соотношением $h = \frac{P + \rho}{n}$, и использовать первое начало термодинамики $dP = ndh$ для энтропийного течения, то приведенное выше выражение (11) легко проинтегрировать в явном виде. В результате получаем:

$$\begin{aligned} \ln(h) &= -v + l(\psi - v) - \frac{1 + 2l}{4} \ln(1 - z) \pm \\ &\pm \frac{1}{4} \left[(1 + 2l) \ln \frac{4l(l+1) + \sqrt{z} + (1 + 2l)\sqrt{4l(l+1) + z}}{4l(l+1) - \sqrt{z} + (1 + 2l)\sqrt{4l(l+1) + z}} \times \right. \\ &\times \left. \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} - 2 \ln(\sqrt{z} + \sqrt{4l(l+1) + z}) \right] - \ln(h_{in}). \end{aligned} \quad (12)$$

Данное аналитическое решение является точным и описывает толстый диск в метрике Лами. В предельном случае, когда магнитный заряд равен нулю, $b = 0$, данное решение будет описывать толстый диск вокруг черной дыры Керра. Постоянная интегрирования $\ln(h_{in})$ определяется аналогичным образом, как и в работах [13, 14] (см. также Приложения Б и В), на внутренней границе диска $r = r_{in}$, в плоскости, перпендикулярной оси вращения $\theta = \pi/2$, предполагая, что $\ln(h) = 0$ при $r = r_{in}$. Величину l можно найти из условия максимальности плотности (энтальпии) $dh/dr|_{r=r_{max}, \theta=\pi/2} = 0$ в экваториальной плоскости диска. В данном случае эта величина определяется из квадратного уравнения

$$\begin{aligned} &l^2 (\chi'^2 - \omega'^2 e^{2\chi}) - \\ &- l (2\chi' v' + (\psi' + v') \omega \omega' e^{2\chi} + \omega'^2 e^{2\chi}) + \\ &+ v' (v' - \omega'^2 e^{2\chi} \psi' - \omega \omega' e^{2\chi}) = 0 \end{aligned}$$

в точке $r = r_{max}$ и $\theta = \pi/2$. В приведенном выше выражении штрих означает дифференцирование по радиальной координате. Таким образом, задавая значения r_{in} и r_{max} , мы определяем неизвестные постоянные h_{in} и l и получаем общее аналитическое решение. На рис. 1 показаны контуры границ величины энтальпии $\ln h = -0.0005; 0.0; 0.0005$ для метрики Лами с параметрами $a = 1$,

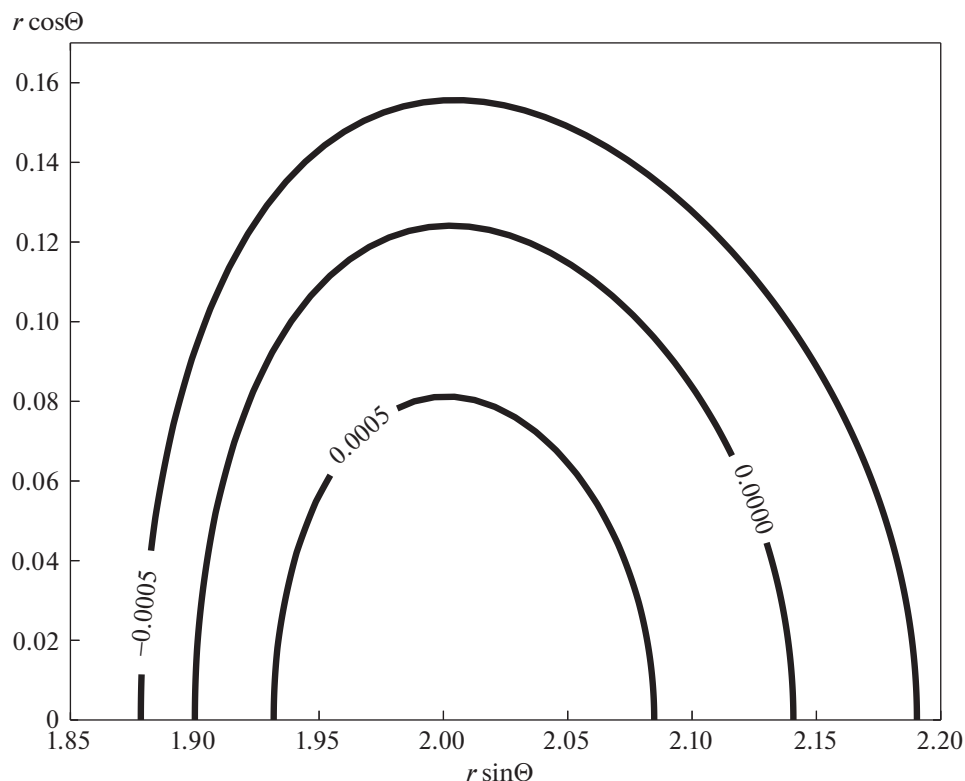


Рис. 1. Контуры энthalпии $\ln(h) = -0.0005, 0.0$ и 0.0005 аналитического решения (13) для метрики Лами с параметрами $a = 1, b = 0.5, r_{in} = 1.9$ и $r_{max} = 2$.

$b = 0.5$. Данные параметры соответствуют случаю, когда метрика Лами не имеет горизонтов и является кротовой норой. Параметры диска задавались следующим образом: $r_{in} = 1.9, r_{max} = 2$. Данное решение описывает торообразное распределение материи в виде толстого диска вокруг кротовой норы в метрике Лами.

4. ТОЛСТЫЕ ДИСКИ С ТОРОИДАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ВОКРУГ ЧЕРНЫХ ДЫР И КРотовых НОР

Следуя работе [15], можно обобщить приведенное выше решение на случай наличия тороидального магнитного поля в толстом диске. Для этого рассмотрим тензор энергии-импульса, который состоит из двух частей: тензора энергии-импульса идеальной жидкости и тензора энергии-импульса электромагнитного поля,

$$T^{\alpha\beta} = (P + \rho)u^\alpha u^\beta + P g^{\alpha\beta} + F_\delta^\alpha F^{\beta\delta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta},$$

где $F^{\alpha\beta}$ — тензор электромагнитного поля. Будем предполагать, что жидкость является идеальным

проводником. Это означает, что выполняются условия

$$F^{\mu\nu} u_\nu = 0. \quad (13)$$

Удобно ввести величину b^μ , которая является четырех-вектором магнитного поля и определяется следующим образом:

$$b^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} u_\nu F_{\kappa\lambda}. \quad (14)$$

Тогда тензор энергии-импульса можно переписать в виде [15]

$$T^{\alpha\beta} = (P + \rho + b^2)u^\alpha u^\beta + \left(P + \frac{1}{2}b^2\right)g^{\alpha\beta} - b^\alpha b^\beta.$$

Величина b^2 является сверткой четырех-вектора магнитного поля, $b^2 = b_\mu b^\mu$. Условие идеальной проводимости (13) переписывается в виде

$$b_\mu u^\mu = 0.$$

Как и в гидродинамическом случае, предположим, что радиальный и полярный компоненты четырех-скорости равны нулю, $u^r = u^\theta = 0$. Тогда из уравнения (14) легко получить, что радиальный и полярный компоненты четырех-векто-

ра магнитного поля b^α также равны нулю, $b^r = b^\theta = 0$. Тогда из системы уравнений,

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta &= -1, \quad T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0, \quad (nu^\alpha)_{;\alpha} = 0, \\ u^\alpha s_{;\alpha} &= 0, \quad F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

допуская осесимметричные и стационарные условия $\partial/\partial\phi = 0$, остается только первое уравнение и r и θ компоненты второго уравнения. Остальные уравнения выполняются тождественно. Перепишем второе уравнение в развернутом виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial a} \left(\sqrt{-g} \left(P + \frac{1}{2} b^2 \right) \right) = \frac{1}{2} g_{\gamma\delta,a} T^{\gamma\delta},$$

где, как и раньше, параметр a принимает два значения $a = r, \theta$. В развернутом виде, после несложных преобразований, данное уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{P + \rho + b^2} \frac{\partial}{\partial a} \left(P + \frac{1}{2} b^2 \right) &= \\ &= \left(\omega \omega_{,a} e^{2\psi} + \omega^2 \psi_{,a} e^{2\psi} - v_{,a} e^{2v} \right) \left[u^t u^t - \frac{b^t b^t}{P + \rho + b^2} \right] + \\ &+ \psi_{,a} e^{2\psi} \left[u^\phi u^\phi - \frac{b^\phi b^\phi}{P + \rho + b^2} \right] - \\ &- (\omega_{,a} + 2\omega \psi_{,a}) e^{2\psi} \left[u^t u^\phi - \frac{b^t b^\phi}{P + \rho + b^2} \right]. \end{aligned}$$

Используя первое уравнение из системы (15) и выражая временной компонент четыре-скорости, в результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{P + \rho + b^2} \frac{\partial}{\partial a} \left(P + \frac{1}{2} b^2 \right) &= -v_{,a} + \omega_{,a} e^{-2v} u_t u_\phi + \\ &+ \left(\omega \omega_{,a} e^{-2v} + (\psi_{,a} - v_{,a}) e^{-2\psi} \right) u_\phi^2 - \\ &- b^2 \frac{\psi_{,a} + \omega_{,a} e^{-2v} u_t u_\phi + \left(\omega_{,a} \omega e^{-2v} + (\psi_{,a} - v_{,a}) e^{-2\psi} \right) u_\phi^2}{P + \rho + b^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Это есть окончательно уравнение, которое мы будем решать аналитически для каждого рассмотренного случая отдельно. Так же, как и в работе [15], введем параметр β , который определяется отношением полной энергии к энергии магнитного поля и задается следующим образом:

$$\beta = \frac{P + \rho}{b^2}. \quad (17)$$

Также нам понадобится уравнение состояния идеальной жидкости. Для простоты будем рассматривать баротропное уравнение состояния вида:

$$P = k\rho^\gamma, \quad (18)$$

где $\gamma = \text{const}$ — постоянная величина. Далее везде будем предполагать, что параметр β является постоянной величиной. Предельный случай $\beta \rightarrow \infty$ соответствует чисто гидродинамической модели, обратный случай $\beta \rightarrow 0$ — электромагнитной модели.

С помощью параметра β уравнение (16) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{P + \rho} \frac{\partial P}{\partial a} + \frac{1}{2b^2\beta} \frac{\partial b^2}{\partial a} &= -\frac{1}{\beta} (\psi_{,a} + v_{,a}) - v_{,a} + \\ &+ \omega_{,a} e^{-2v} u_t u_\phi + \left(\omega \omega_{,a} e^{-2v} + (\psi_{,a} - v_{,a}) e^{-2\psi} \right) u_\phi^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Как и в разделе 3, предполагая, что $l = u_\phi u^\phi = \text{const}$ и, используя уравнение состояния (18), приведенное выше уравнение легко интегрируется явно. Решение данного уравнения запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln(1 + k\rho^{\gamma-1}) + \frac{1}{2\beta} \ln(b^2) &= \\ &= -\frac{1}{\beta} (\psi + v) + \ln(h_{hyd}), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\ln(h_{hyd})$ обозначает правую часть выражения (12). Как и должно быть, в предельном случае, когда $\beta \rightarrow \infty$, данное решение переходит в гидродинамическое решение (12). Постоянная интегрирования определяется из условия того, что левая часть выражения (20) равна нулю на внутреннем радиусе диска $r = r_{in}$ в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$. Постоянная величина l определяется из условия экстремума левой части выражения (20). Задав внутренний и экстремальный радиус, мы полностью определяем решение задачи.

На рис. 2 показан пример торообразного распределения материи в толстом диске для контура, когда левая часть выражения (20) равна нулю для разных случаев параметра β . Параметры метрики и толстого диска соответствуют параметрам на рис. 1. Сплошная кривая соответствует параметру $\beta = 1000$ и с хорошей точностью соответствует кривой $\ln(h) = 0$ на рис. 1. Штриховая кривая соответствует случаю $\beta = 10$, пунктирная кривая — $\beta = 1$. Из рис. 2 видно, что с увеличением влияния тороидального магнитного поля торообразное распределение материи уширяется в вертикальном направлении.

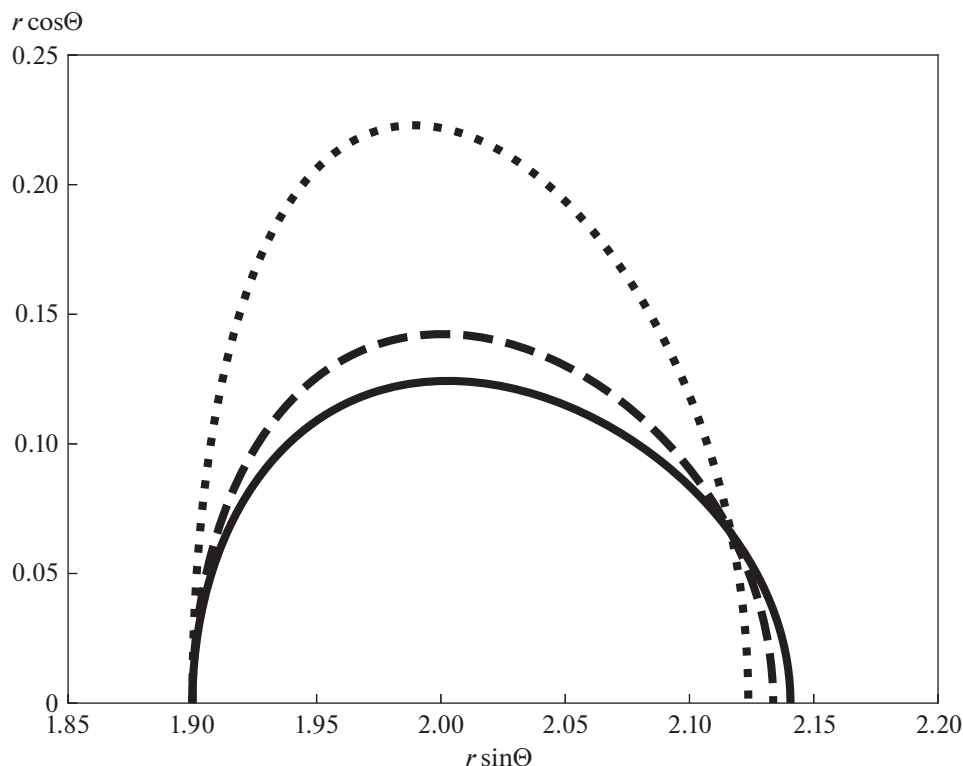


Рис. 2. Торообразное распределение материи в толстом диске для контура, когда левая часть выражения (20) равна нулю, для разных случаев параметра β , равного 1000 (сплошная кривая), 10 (штриховая кривая) и 1 (пунктирная кривая). Параметры метрики и толстого диска те же, что на рис. 1: $a = 1$, $b = 0.5$, $r_{in} = 1.9$ и $r_{max} = 2$.

5. ОБРАЗЫ ЧЕРНЫХ ДЫР И КРотовых НОР

В данном разделе будут представлены результаты моделирования образов черных дыр и кротовых нор для геометрически тонкого диска. Предполагается, что тонкий диск расположен в экваториальной плоскости черной дыры или кротовой норы и излучает изотропно во все стороны. Пространство-время описывается метрикой Лами (1) с параметром вращения $a = 0.9$. Магнитный заряд задавался в диапазоне $0 \leq b \leq 2$. Внутренний радиус диска выбирается равным $r_{in} = 8$ (такой радиус выбирался из условий, чтобы образ диска не пересекался с образом колец, и кольца отчетливо изображались в образах), а наблюдатель расположен на расстоянии $r_o = 50$ под углами $i = 17^\circ, 45^\circ$ и 80° к оси вращения черной дыры или кротовой норы. Для построения образов использовался метод обратной трассировки лучей. Уравнения геодезических решались численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. На рис. 3 показаны примеры образов черной дыры и кротовой норы для углов наклона $i = 17^\circ, 45^\circ$ и 80° (слева направо) и величины магнитного заряда, равного $b = 0.0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 2.0$ (сверху вниз). Случай $b = 0$ соответствует чер-

ной дыре Керра, остальные случаи — кротовой норе. Образы показаны в масштабе от -10 до $+10$ в единицах GM/c^2 и с разрешением 2500×2500 пикселей. Цветом показан азимутальный угол (ϕ) прихода луча из диска к наблюдателю, нормированный на 2π . Другими словами, один и тот же цвет соответствует одному и тому же азимутальному углу в диске.

Из рис. 3 видно, что образы тонкого диска для метрики Лами имеют более богатую и сложную структуру, чем для метрики Керра. Это связано с тем, что радиальный потенциал для нулевых геодезических в метрике Лами является полиномом седьмой степени, а не четвертой, как для метрики Керра [10]. Следовательно, радиальный потенциал для некоторых траекторий фотонов может иметь более одной экстремальной точки [10], а следовательно, и несколько круговых орбит. Это приводит к тому, что часть колец будет иметь не кольцевую форму, а серповидную. Серповидная форма образуется из слияния кольцевых колец в зависимости от параметров модели. Так, например, в третьем, четвертом и пятом ряду рис. 3 видно, как происходит слияние колец и образование серповидного кольца с увеличением угла наклона

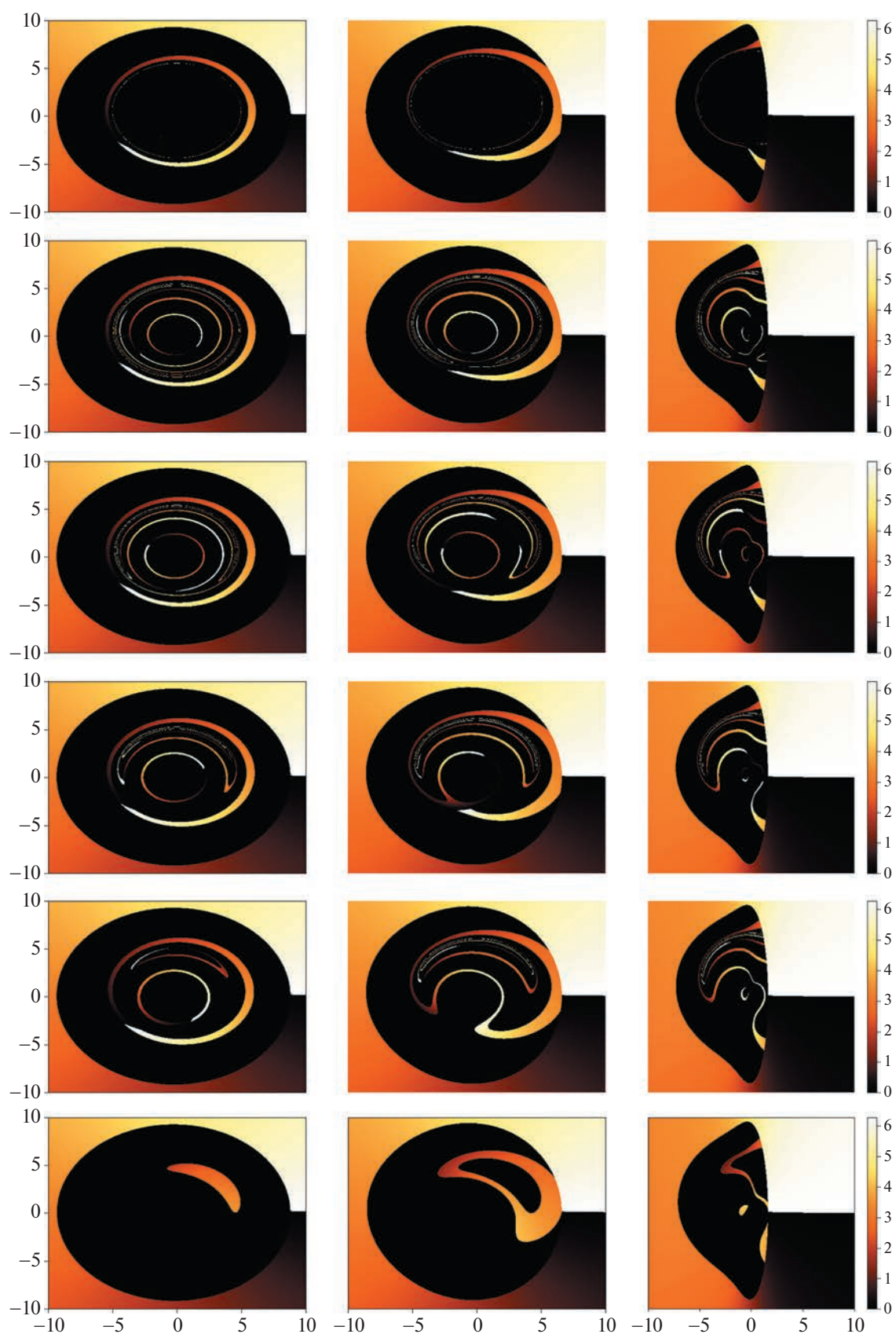


Рис. 3. Образы черных дыр и кротовых нор в зависимости от наклона луча зрения наблюдателя i к оси вращения черной дыры или кротовой норы, $i = 17^\circ, 45^\circ, 80^\circ$ (слева направо) и магнитного заряда b , $b = 0.0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 2$ (сверху вниз). Масштаб от $-10 GM/c^2$ до $10 GM/c^2$.

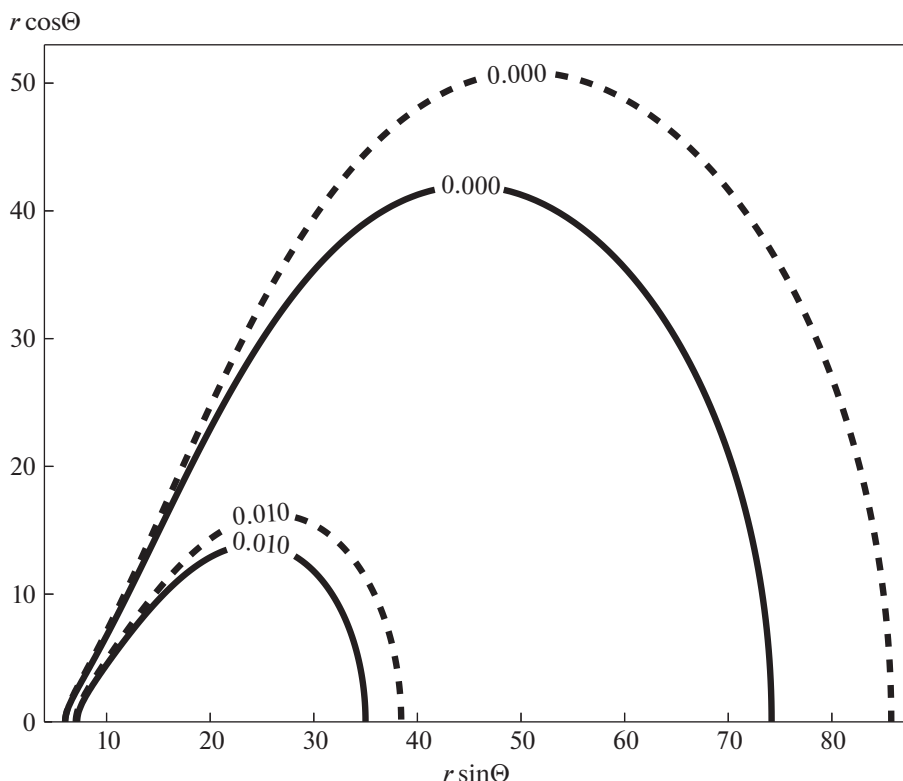


Рис. 4. Контуры энthalпии для случая $\ln h = 0$ и 0.01 для метрик Керра и Лами. Сплошная кривая соответствует метрике Керра с параметром $a = 1$, штриховая — метрике Лами с параметрами $a = 1$ и $b = 0.9$. Внутренний радиус задан равным $r_{\text{in}} = 6$, а радиус максимальной плотности $r_{\text{max}} = 12.9$.

луча зрения наблюдателя к оси вращения кротовой норы.

В зависимости от величины магнитного заряда, данные образы имеют следующие характеристики. При величине магнитного заряда меньше, чем $b \sim 0.5$, образ содержит центральное темное пятно, которое при увеличении величины магнитного заряда и угла наклона может разрываться и увеличиваться до исчезновения кольцевой структуры. При больших углах наклона в центре появляется светлое кольцо, которое с увеличением величины магнитного заряда стягивается в пятно.

Также в метрике Лами наблюдается система ярких узких и широких колец, которые образуются за счет сильно линзированных фотонов. Такие фотоны выполняют множество оборотов вокруг черной дыры или кротовой норы, прежде чем достигнут наблюдателя. Данные кольца можно разделить на фотонные кольца и субкольца, которые определяются числом n полупериодов между точками остановки в угловом потенциале. Число и расположение колец определяются параметрами метрики (массой, спином, магнитным зарядом) и углом наклона луча зрения наблюдателя к оси вращения. С увеличением величины магнитного

заряда число субколец увеличивается. Это связано с тем, что радиальный потенциал покрывает полностью все многообразие, на котором имеется более одной точки экстремума и, следовательно, более сложное разнообразие в структуре фотонных колец.

В Приложении Е показан пример исследования зависимости образов от расстояния до наблюдателя. Качественно из этих исследований следует, что образы, полученные для наблюдателя, расположенного на расстоянии $r_o \geq 50$, дают достаточно точную картину образов, необходимую для их построения.

Стоит отметить, что фотонные кольца можно будет наблюдать с помощью космической РСДБ сети в миссии Миллиметрон [3, 16], а по количеству фотонных колец, ширине, структуре, диаметру, эллиптичности и асимметрии яркости [17] можно будет отличить черную дыру от кротовой норы. Здесь возникают трудности, связанные с выделением полезного сигнала из зашумленного, вызванного сложной топологией фотонных колец [17].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена модель толстых и тонких дисков в метрике Лами. Данная метрика выбиралась по следующим причинам. Она описывает модель как кротовой норы, так и черной дыры. В предельном случае, при малых параметрах магнитного заряда, метрика Лами совпадает с метрикой вращающейся черной дыры Керра. На малых масштабах данная метрика может существенно отличаться от метрики Керра, а на больших масштабах совпадать с ней. Следовательно, изучение фотонных колец и их наблюдательных проявлений может выявить отличия от метрики черной дыры. Данные исследования помогут лучше понять высоколинзирующие характеристики образов в сильном гравитационном поле и являются альтернативой при сравнении с наблюдательными данными командой телескопа Горизонта Событий.

Были получены точные аналитические выражения торообразного распределения материи вокруг черных дыр и кротовых нор, которые могут быть использованы при построении численных моделей эволюции толстых дисков вокруг кротовых нор. Данные решения являются новыми или обобщают ранее полученные результаты на случай метрики Лами с тороидальным магнитным полем. Для случая тонкого диска были построены образы черных дыр и кротовых нор в зависимости от параметров модели. Из-за сильного отличия метрики Лами от метрики Керра на масштабах порядка $r \sim M \sim b$, система фотонных колец имеет заметные отличия. Данные отличия возможно удастся непосредственно наблюдать с помощью РСДБ методов в миллиметровом диапазоне на базах больше диаметра Земли [3].

Приложение А

Метрические коэффициенты метрики Лами равны:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= \omega^2 e^{2\psi} - e^{2\nu} = -\left(1 - \frac{2M(r)r}{\Sigma}\right), & g_{rr} &= e^{2\lambda} = \frac{\Sigma}{\Delta}, \\ g_{\theta\theta} &= e^{2\mu} = \Sigma, \\ g_{\phi\phi} &= e^{2\psi} = \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} \left((r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta \right), \\ g_{t\phi} &= -\omega e^{2\psi} = -\frac{2M(r)ra \sin^2 \theta}{\Sigma}, \\ g^{tt} &= -e^{-2\nu} = -\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{rr} &= e^{-2\lambda} = \frac{\Delta}{\Sigma}, & g^{\theta\theta} &= e^{-2\mu} = \frac{1}{\Sigma}, \\ g^{\phi\phi} &= e^{-2\psi} - \omega^2 e^{-2\nu} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta \Sigma \sin^2 \theta}, \\ g^{t\phi} &= -\omega e^{-2\nu} = -\frac{2M(r)ra}{\Sigma \Delta}. \end{aligned}$$

Определитель метрики равен

$$g = -e^{2\lambda+2\mu+2\psi+2\nu} = -\Sigma^2 \sin^2 \theta.$$

Символы Кристоффеля равны:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= \Gamma_{t\phi}^t = \Gamma_{rr}^t = \Gamma_{r\theta}^t = \Gamma_{\theta\theta}^t = \Gamma_{\phi\phi}^t = \Gamma_{t\theta}^t = 0, \\ \Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{t\theta}^r = \Gamma_{r\phi}^r = \Gamma_{\theta\phi}^r = \Gamma_{rr}^r = \Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{\theta\phi}^r = 0, \\ \Gamma_{tt}^\phi &= \Gamma_{t\phi}^\phi = \Gamma_{rr}^\phi = \Gamma_{r\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\theta}^\phi = \Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0, \\ \Gamma_{tr}^t &= -\frac{(p + rM'/\Sigma)B}{\Delta}, & \Gamma_{t\theta}^\phi &= \frac{2qa \cos \theta}{\Sigma \sin \theta}, \\ \Gamma_{r\phi}^t &= \frac{a \sin^2 \theta}{\Delta} (B(p + rM'/\Sigma) + 2qr), \\ \Gamma_{\theta\phi}^t &= -\frac{qa^3}{\Sigma} \sin^2 \theta \sin 2\theta, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r\Delta}{\Sigma}, \\ \Gamma_{tt}^r &= -\frac{\Delta}{\Sigma} (p + rM'/\Sigma), & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{r}{\Sigma}, \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{r}{\Sigma} + \frac{M - r + rM'}{\Delta}, & \Gamma_{r\theta}^r &= -\frac{a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^\theta &= -\frac{a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma}, & \Gamma_{rr}^\theta &= \frac{a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma \Delta}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Sigma} (r + (p + rM'/\Sigma)a^2 \sin^2 \theta), \\ \Gamma_{t\theta}^t &= \frac{qa^2 \sin 2\theta}{\Sigma}, \\ \Gamma_{tt}^\theta &= \frac{qa^2 \sin 2\theta}{\Sigma^2}, & \Gamma_{t\phi}^r &= \frac{a\Delta \sin^2 \theta}{\Sigma} (p + rM'/\Sigma), \\ \Gamma_{t\phi}^\theta &= -\frac{qaB \sin 2\theta}{\Sigma^2}, & \Gamma_{tr}^\phi &= -\frac{a}{\Delta} (p + rM'/\Sigma), \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\frac{\sin 2\theta}{2\Sigma} \left[B - 2a^2 q \sin^2 \theta \left(2 + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \right], \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{r}{\Delta} (1 + 2q) + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Delta} (p + rM'/\Sigma), \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos \theta}{\Delta \sin \theta} \left[(1 + 2q) (B - 2qa^2 \sin^2 \theta) - \frac{2qa^2 B \sin^2 \theta}{\Sigma} \right], \end{aligned}$$

где введены обозначения $B = r^2 + a^2$, $q = -\frac{rM(r)}{\Sigma}$,

$p = M(r) \frac{\Sigma - 2r^2}{\Sigma^2}$. Обозначение M' означает про-

изводную параметра M по радиусу r , которая равна $M' = \frac{6m^2 b^2 r |r|}{(2mb^2 + |r|^3)^2}$.

Приложение Б

В данном разделе приведено решение, полученное в работе [13] на случай метрики Лами. Согласно выводам [13] угловой момент определяется выражением вида, $l = u_\phi u^t$. Используя это выражение, уравнение (10) можно переписать в виде

$$\frac{1}{p + \rho} \frac{\partial P}{\partial a} = -v_{,a} - l\omega_{,a} + \frac{-1 + \sqrt{1 + 4l^2 e^{-2\chi}}}{2} \chi_{,a}, \quad (21)$$

где было введено обозначение $\chi = \psi - v$ [13]. Приведенное выше выражение (21) интегрируется явно. В итоге получаем

$$\ln(h) = -v - l\omega + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \sqrt{1 + 4l^2 e^{-2\chi}} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4l^2 e^{-2\chi}} - \ln(h_{in}).$$

Данное решение можно переписать в более развернутом виде, подставив метрические коэффициенты

$$\ln(h) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4l^2 \Sigma^2 \Delta}{A^2 \sin^2 \theta}}}{\frac{\Sigma \Delta}{A}} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4l^2 \Sigma^2 \Delta}{A^2 \sin^2 \theta}} - \frac{2arM(r)l}{A} - \ln(h_{in}). \quad (22)$$

Это выражение совпадает с выражением (3.6) работы [13] в случае, когда магнитный заряд равен нулю $b = 0$. Величина $\ln(h_{in})$ является постоянной интегрирования и определяется из начальных условий. В работе [13] начальные условия задавались следующим образом. На внутреннем радиусе диска в плоскости, перпендикулярной оси вращения черной дыры (в данном случае черной дыры или кротовой норы), энтальпия равна нулю. Из этого условия следует, что

$$\ln(h_{in}) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4l^2 \Sigma_{in}^2 \Delta_{in}}{A_{in}^2}}}{\frac{\Sigma_{in} \Delta_{in}}{A_{in}}} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4l^2 \Sigma_{in}^2 \Delta_{in}}{A_{in}^2}} - \frac{2ar_{in}M(r_{in})l}{A}. \quad (23)$$

Обозначение “ in ” означает, что радиальная координата берется при внутреннем радиусе диска $r = r_{in}$, в плоскости, перпендикулярной оси вращения $\theta = \pi/2$.

Величину углового момента l можно определить из условия того, что в экваториальной плоскости в точке максимума плотности (давления) производная энтальпии по радиальной координате равна нулю. Это условие имеет вид

$$[\ln(h(r_{\max}, \pi/2))]_{,r} = 0.$$

Данное выражение в развернутом виде есть

$$-\frac{1}{2}(v' + \psi') - l\omega' \pm \frac{\sqrt{1 + 4l^2 e^{-2\chi}}}{2} \chi' = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по радиальной координате. Из этого уравнения следует, что величина углового момента определяется формулой

$$l = \frac{\omega'(v' + \psi') + \chi' \sqrt{\omega'^2 + 4v'\psi' e^{-2\chi}}}{2(\chi'^2 e^{-2\chi} - \omega'^2)}. \quad (24)$$

Данная величина берется в точке максимума плотности диска $r = r_{\max}$ в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения черной дыры (кротовой норы) $\theta = \pi/2$. Таким образом, задавая два параметра r_{in} и $r_{\max}$, решение определяется однозначно. На рис. 4 показаны контуры границы энтальпии $\ln h = 0$; 0.01 для метрики Керра с параметром вращения $a = 1$ (сплошная кривая) и для метрики Лами с параметрами вращения $a = 1$ и $b = 0.9$ (штриховая кривая). Эти параметры были выбраны таким образом, чтобы метрика Лами соответствовала кротовой норе. Внутренний радиус задавался равным $r_{in} = 6$, а радиус максимальной плотности $r_{\max} = 12.9$. Сплошная кривая для метрики Керра совпадает с аналогичной кривой, изображенной в статье [13], рис. 2.

Из рис. 4 видно, что для выбранных параметров качественное распределение идеальной жидкости в метриках Керра и Лами не сильно отличается друг от друга. Это связано с тем, что сильное отличие будет заметно на масштабах горизонта событий $r \approx 2m$ или радиуса горловины $r \approx b$.

Приложение В

В данном разделе выпишем решение, полученное в работе [14] на случай метрики Лами. Согласно работе [14] угловой момент определяется

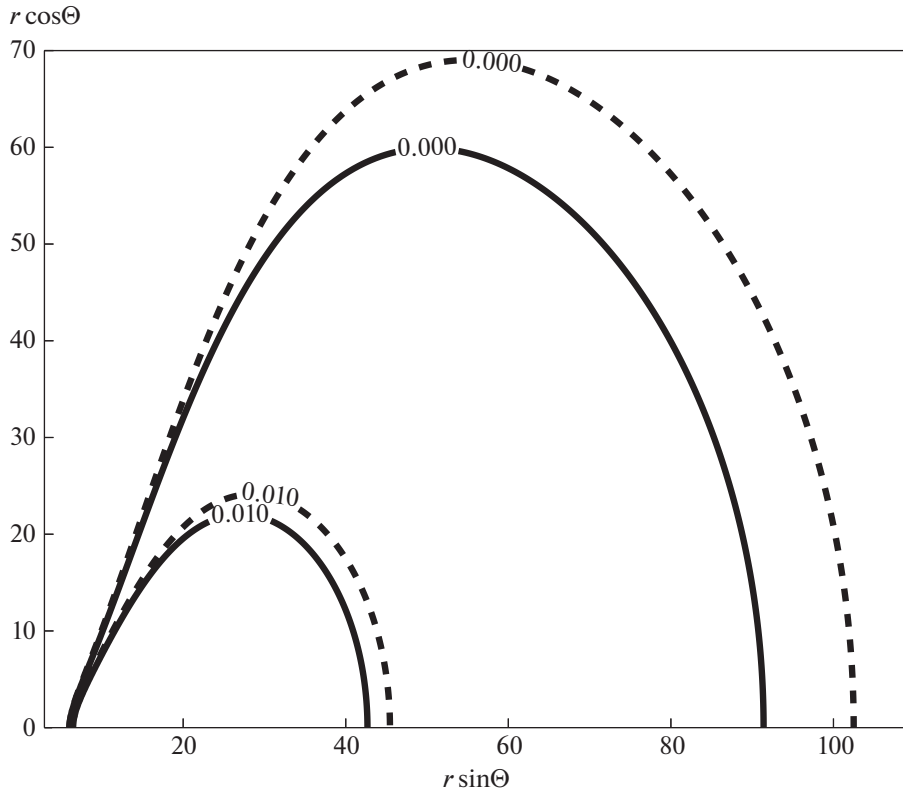


Рис. 5. Контуры энthalпии $\ln h = 0$ и 0.01 для случая толстого диска в метриках Керра и Лами. Сплошная кривая соответствует метрике Керра с параметром $a = 1$, штриховая кривая соответствует метрике Лами с параметрами $a = 1$ и $b = 0.9$. Метрика Лами с выбранными параметрами соответствует кротовой норе. Внутренний радиус задавался равным $r_{in} = 6$, а радиус максимальной плотности $r_{max} = 11$.

выражением $u_\phi = -lu_t$. Используя это выражение, уравнение (10) можно переписать в виде

$$\frac{1}{p + \rho} \frac{\partial P}{\partial a} = -v_{,a} + \frac{1}{2} \left(\ln \left((1 - \omega l)^2 - l^2 e^{2\nu - 2\psi} \right) \right)_{,a}.$$

Приведенное выше выражение легко проинтегрировать в явном виде. В итоге получаем решение вида

$$\ln(h) = -\nu + \frac{1}{2} \ln \left((1 - \omega l)^2 - l^2 e^{2\nu - 2\psi} \right) - \ln(h_{in}),$$

где, как и раньше, величина $\ln(h_{in})$ является постоянной интегрирования. Подставляя значения метрических коэффициентов, данное решение перепишем в виде

$$\ln(h) = \frac{1}{2} \ln \left(\left(1 - l \frac{2arM}{A} \right)^2 - l^2 \frac{\Delta \Sigma^2}{A^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\Delta \Sigma}{A} \right) - \ln(h_{in}). \quad (25)$$

Постоянная интегрирования $\ln(h_{in})$ может быть определена аналогичным образом, как в предыдущем случае. В результате получаем

$$\ln(h_{in}) = \frac{1}{2} \ln \left(\left(1 - l \frac{2ar_{in}M(r_{in})}{A_{in}} \right)^2 - l^2 \frac{\Delta_{in}\Sigma_{in}^2}{A_{in}^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\Delta_{in}\Sigma_{in}}{A_{in}} \right).$$

Аналогичным образом, из условия максимума плотности (давления) можно получить величину углового момента l . Несложные вычисления приводят к выражению вида

$$l = \frac{\omega' - 2\omega\nu' + \sqrt{\omega'^2 + 4\nu'\psi'e^{-2\chi}}}{2(\omega\omega' + \psi'e^{-2\chi} - \omega^2\nu')},$$

где величина l задается в точке максимума плотности $r = r_{max}$ в плоскости, перпендикулярной вращению черной дыры (кротовой норы) $\theta = \pi/2$.

На рис. 5 показаны контуры границ величины $\ln h = 0; 0.01$ для метрики Керра с параметром вращения $a = 1$ (сплошная кривая), и для метрики Лами с параметрами вращения $a = 1$ и $b = 0.9$ (штриховая кривая). Метрика Лами с выбранными параметрами соответствует кротовой норе.

Внутренний радиус задавался равным $r_{in} = 6$, а радиус максимальной плотности $r_{max} = 11$.

Приложение Г

В данном разделе обобщим решение, полученное в работе [13], на случай присутствия тороидального магнитного поля в метрике Лами. В данном решении угловой момент является постоянной величиной и определяется выражением вида

$l = u_\phi u^t$. Используя параметр β и выражая четырехскорость через угловой момент l , уравнение (16) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{1+\beta} \frac{1}{P+\rho} \frac{\partial P}{\partial a} + \frac{1}{2(1+\beta)b^2} \frac{\partial b^2}{\partial a} = \\ & = -v_{,a} - l\omega_{,a} + 0.5\chi_{,a} \left(-1 + \sqrt{1+4l^2 e^{-2\chi}} \right) - \\ & - \frac{\psi_{,a} - l\omega_{,a} + 0.5\chi_{,a} \left(-1 + \sqrt{1+4l^2 e^{-2\chi}} \right)}{1+\beta}. \end{aligned} \quad (26)$$

Данное уравнение легко проинтегрировать явно аналитически. После интегрирования получаем решение в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{1+\beta} \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln(1+k\rho^{\gamma-1}) + \frac{1}{2(1+\beta)} \ln b^2 = \\ & = -v - \omega l + 0.5 \ln \left(1 + \sqrt{1+4l^2 e^{-2\chi}} \right) - \\ & - 0.5 \sqrt{1+4l^2 e^{-2\chi}} - \\ & - \frac{\psi - l\omega + 0.5 \ln \left(1 + \sqrt{1+4l^2 e^{-2\chi}} \right)}{1+\beta} - \\ & - \frac{0.5 \sqrt{1+4l^2 e^{-2\chi}}}{1+\beta} - \ln h_{in}, \end{aligned} \quad (27)$$

где h_{in} — является постоянной интегрирования и определяется на внутреннем радиусе диска ($r = r_{in}$) в плоскости, перпендикулярной оси вращения черной дыры или кротовой норы ($\theta = \pi/2$), аналогичным образом, как в Приложении Б.

Угловой момент l определяется из условия экстремума правой части выражения (27) в экваториальной плоскости диска $\theta = \pi/2$. Приравняв к нулю правую часть выражения (26) и считая, что $a = r$, после несложных преобразований по-

лучаем выражение для углового момента l в точке экстремума r_{max} :

$$\begin{aligned} l = & \frac{1}{2(\chi'^2 e^{-2\chi} - \omega'^2)} \left(\omega'(\psi' + v') \frac{2+\beta}{\beta} + \right. \\ & \left. + \chi' \sqrt{(\psi' + v')^2 e^{-2\chi} \frac{(2+\beta)^2}{\beta^2} + \omega'^2 - \chi'^2 e^{-2\chi}} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

В предельном случае, когда параметр $\beta \rightarrow \infty$, данное выражение сводится к выражению (24) без тороидального магнитного поля.

На рис. 6 показаны контуры правой части выражения (27) для случая, когда левая часть выражения (27) равна нулю для тех же начальных параметров $r_{in} = 6$ и $r_{max} = 12.9$, как и на рис. (4). Сплошная кривая, которая соответствует параметру $\beta = \infty$, совпадает с штриховой кривой на рис. 4 для $\ln h = 0$.

Из рис. 6 видно, что даже при больших параметрах β отклонения от решения без тороидального поля довольно сильные. Это связано с тем, что при большом, но конечном параметре β , изменяется параметр l . А малые изменения параметра l приводят к большим изменениям правой части решения (27).

Приложение Д

В данном разделе обобщим решение, полученное в работе [14], на случай наличия тороидального магнитного поля в метрике Лами. В данном решении угловой момент определяется выражением вида $u_\phi = -lu_t$. Используя приведенное выше условие, уравнение (16) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P+\rho+b^2} \frac{\partial}{\partial a} \left(P + \frac{1}{2} b^2 \right) = -v_{,a} + \\ & + \frac{l^2(\psi_{,a} - v_{,a})e^{2v-2\psi} - l\omega_{,a}(1-\omega l)}{(1-l\omega)^2 - l^2 e^{2v-2\psi}} - \frac{b^2}{P+\rho+b^2} \times \\ & \times \left[\psi_{,a} + \frac{l^2(\psi_{,a} - v_{,a})e^{2v-2\psi} - l\omega_{,a}(1-l\omega)}{(1-l\omega)^2 - l^2 e^{2v-2\psi}} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Данное уравнение интегрируется аналитически. В результате получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{1+\beta} \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln(1+k\rho^{\gamma-1}) + \frac{1}{2(1+\beta)} \ln b^2 = \\ & = -v + 0.5 \left(\ln \left((1-l\omega)^2 - l^2 e^{2v-2\psi} \right) \right) - \\ & - \frac{1}{1+\beta} \left(\psi + 0.5 \left(\ln \left((1-l\omega)^2 - l^2 e^{2v-2\psi} \right) \right) \right) - \ln h_{in}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\ln h_{in}$ является постоянной интегрирования, которая определяется на внутреннем радиусе диска в плоскости, перпендикулярной оси вра-

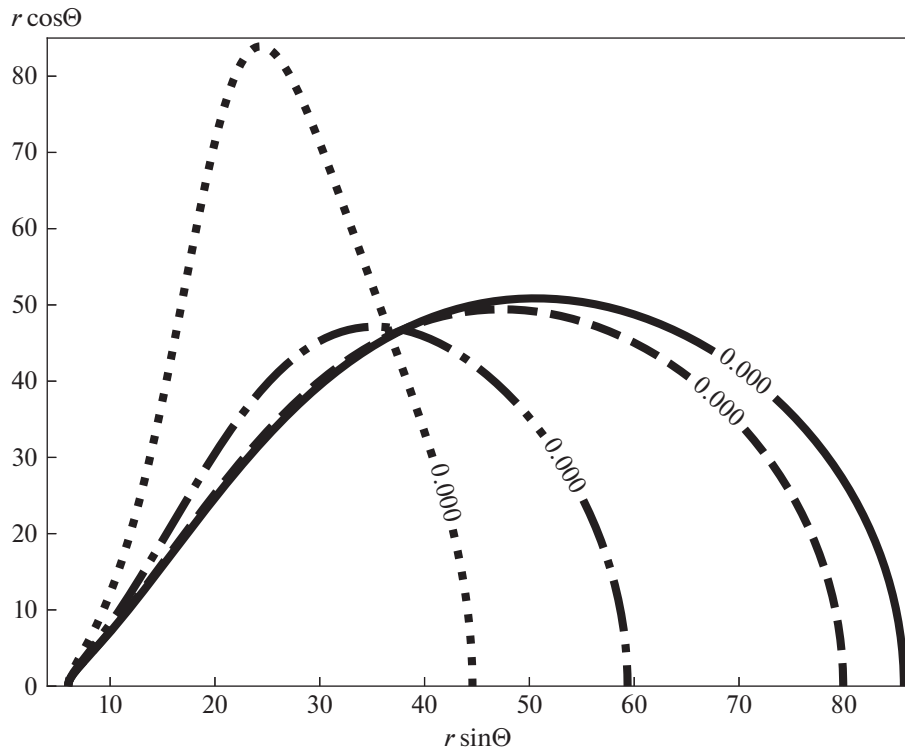


Рис. 6. Контуры правой части выражения (27) для случая, когда левая часть выражения (27) равна нулю для метрики Лами с параметрами $a = 1$, $b = 0.9$. Приведены кривые для параметра $\beta = \infty$ (сплошная линия), 1000 (штриховая), 100 (штрихпунктирная) и 20 (пунктирная).

щения черной дыры или кротовой норы ($\theta = \pi/2$) аналогичным образом, как в Приложении В.

Величина углового момента l определяется из условия экстремума правой части выражения (30) в плоскости, перпендикулярной оси вращения черной дыры или кротовой норы. Приравняв правую часть выражения (29) нулю и считая, что $a = r$, после несложных преобразований получаем квадратное уравнение относительно углового момента l в точке экстремума:

$$l^2 \left[\psi' e^{-2\chi} - v' \omega^2 + \frac{\beta \omega \omega' - \psi' \omega'^2 + v' e^{-2\chi}}{1 + \beta} \right] + l \left[2\omega v' + \frac{2\omega \psi' - \beta \omega'}{1 + \beta} \right] - v' - \frac{\psi'}{1 + \beta} = 0,$$

решение которого имеет вид

$$l = \left(-2\omega v' + \frac{\beta \omega' - 2\omega \psi'}{1 + \beta} + \sqrt{4v' \psi' e^{-2\chi} + 4e^{-2\chi} \frac{\psi'^2 + v'^2}{1 + \beta} + \frac{\beta^2 \omega'^2 + 4\psi' v' e^{-2\chi}}{(1 + \beta)^2}} \right) \times \left(2 \left(\psi' e^{-2\chi} - v' \omega^2 - \frac{\psi' \omega'^2 - v' e^{-2\chi} - \beta \omega \omega'}{1 + \beta} \right) \right)^{-1}.$$

На рис. 7 показаны контуры правой части выражения (30) для случая, когда левая часть выражения (30) равна нулю для тех же начальных параметров $r_{in} = 6$ и $r_{max} = 11$, как и на рис. 5. Сплошная кривая, которая соответствует параметру $\beta = \infty$, совпадает с штриховой кривой на рис. 5 для $\ln h = 0$. Даже при больших параметрах β отличия данного решения от решения без магнитного поля становятся существенными.

Приложение E

В данном разделе приведены сравнения образов кротовых нор в зависимости от расстояния до наблюдателя. Задавались следующие параметры модели: параметр вращения $a = 0.9$, магнитный заряд $b = 0.3$, угол наклона наблюдателя к оси вращения $i = 45^\circ$. Разрешение образов выбиралась равным 500×500 точек. Наблюдатель располагался на расстоянии $r_o = 50$ и $r_0 = 250$. Для наблюдателя, расположенного на расстоянии $r_o = 50$, образ показан во втором столбце, во втором ряду сверху на рис. 3. На рис. 8 показана разность между образами. Если не брать во внимание фотонные кольца, где из-за маленького разрешения и небольшого сдвига кольцам сложно

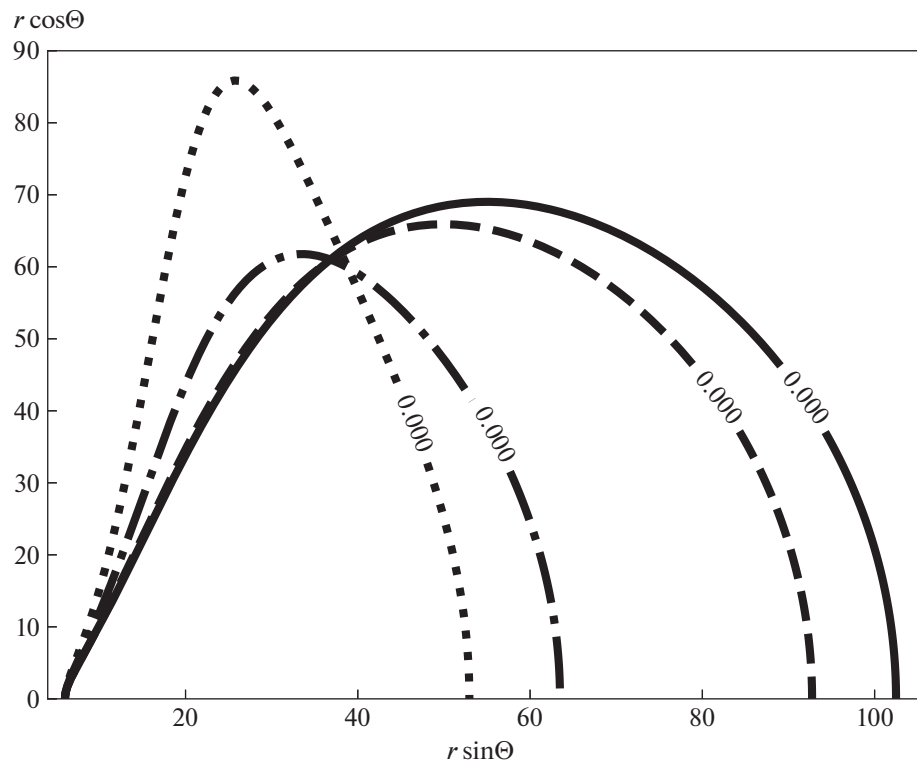


Рис. 7. Контурь правой части выражения (30) для случая, когда левая часть выражения (30) равна нулю для метрики Лами с параметрами $a = 1$, $b = 0.9$. Приведены кривые для параметра $\beta = \infty$ (сплошная линия), 1000 (штриховая), 100 (штрихпунктирная) и 40 (пунктирная).

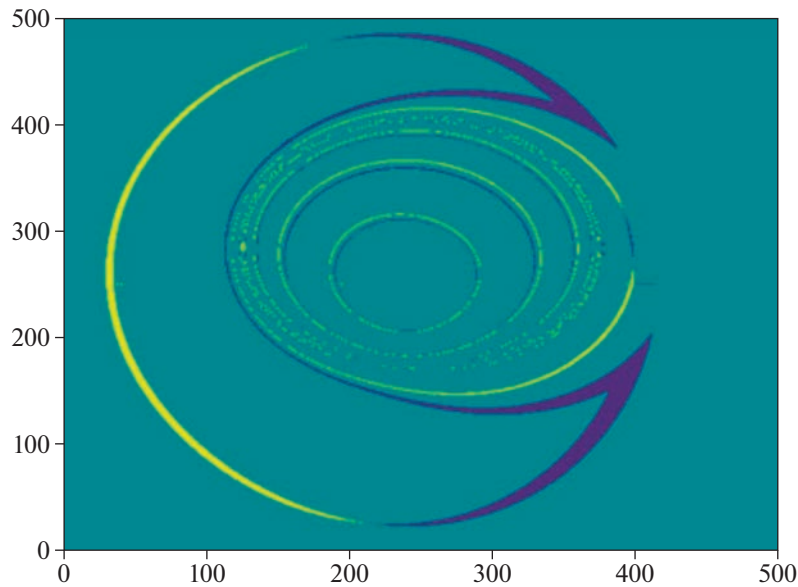


Рис. 8. Разность образов, полученных для наблюдателя, расположенного на расстояниях $r_0 = 50$ и 250. Параметры модели: $a = 0.9$, $b = 0.3$, $i = 45^\circ$.

точно соответствовать друг другу, то из образа диска видно, что присутствует небольшой сдвиг, связанный с разным положением наблюдателя. Величина сдвига и знак зависят от параметров метрики и угла наклона луча зрения наблюдателя к оси вращения. В целом качественно картина не зависит от расстояния наблюдателя до кротовой норы, но для более точных численных расчетов необходимо как можно дальше располагать наблюдателя от центрального источника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Н. С. Кардашев, И. Д. Новиков, В. Н. Лукаш, С. В. Пилипенко, и др.*, Успехи физ. наук **184** (12), 1319 (2014).
2. *И. Д. Новиков, С. Ф. Лухачёв, Ю. А. Шекинов, А. С. Андрианов, и др.*, Успехи физ. наук **191** (4), 404 (2021).
3. *M. D. Johnson, A. Lupsasca, A. Strominger, G. N. Wong, et al.*, Science Advances **6**, 1310 (2020).
4. *S. F. Likhachev, A. G. Rudnitskiy, M. A. Shchurov, A. S. Andrianov, A. M. Baryshev, S. V. Chernov, and V. I. Kostenko*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **511**, 668 (2022).
5. *A. S. Andrianov, A. M. Baryshev, H. Falcke, I. A. Girin, et al.*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **500**, 4866 (2021).
6. *A. Andrianov, S. Chernov, I. Girin, S. Likhachev, A. Lyakhovets, and Yu. Shchekinov*, Phys. Rev. D. **105**, id. 063015 (2022).
7. *N. I. Shakura and R. A. Sunyaev*, Astron. and Astrophys. **24**, 337 (1973).
8. *R. Narayan and I. Yi*, Astrophys. J. Letters **428**, L13 (1994).
9. *П. Б. Иванов, Е. В. Михеева, В. Н. Лукаш, А. М. Малиновский, С. В. Чернов, А. С. Андрианов, В. И. Костенко, С. Ф. Лухачёв*, Успехи физ. наук **189** (5), 449 (2019).
10. *F. Lamy, E.ourgoulhon, T. Paumard, and F. H. Vincent*, Classical and Quantum Gravity **35** (11), id. 115009 (2018).
11. *Z.-Y. Fan and X. Wang*, Phys. Rev. D **94**, id. 124027 (2016).
12. *S. A. Hayward*, Phys. Rev. Letters **96**, id. 031103 (2006).
13. *L. G. Fishbone and V. Moncrief*, Astrophys. J. **207**, 962 (1976).
14. *M. Kozłowski, M. Jaroszynski, and M. A. Abramowicz*, Astron. and Astrophys. **63** (1–2), 209 (1978).
15. *S. S. Komissarov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **368**, 993 (2006).
16. *С. В. Чернов*, ЖЭТФ **159** (6), 1018 (2021).
17. *P. Tiede, M. D. Johnson, D. W. Pesce, D. C. M. Palumbo, D. O. Chang, and P. Galison*, arXiv:2210.13498 [astro-ph.HE] (2022).

THIN AND THICK DISKS AROUND BLACK HOLES AND WORMHOLES

S. V. Chernov^a

^a*Lebedev Physical Institute, Astro Space Center, Moscow, Russia*

The paper investigates the distribution of matter in thick disks around black holes and wormholes numerically and analytically. Metrics are considered Kerr and Lamy. Accurate analytical solutions are written out. The influence of a toroidal magnetic field on the structure of a thick disk is taken into account. Images of a thin disk are constructed depending on the values of the metric parameters.

Keywords: black holes, wormholes, disks, magnetic fields