АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2023, том 100, № 12, с. 1332–1342

ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН: АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ, АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ *N*-го ПОРЯДКА И УТОЧНЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

© 2023 г.
С. А. Серов[1,*], С. С. Серова[2]

[1]*Институт теоретической и математической физики, Саров, Россия*

[2]*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*

**E-mail: S.A.Serov@inbox.ru*

Поступила в редакцию 06.07.2023 г.
После доработки 15.08.2023 г.
Принята к публикации 19.09.2023 г.

Предложено новое асимптотическое приближение *n*-го порядка для использования в расчетах распространения излучения в оптически толстых средах без рассеяния; асимптотическое приближение проще и точнее известного диффузионного приближения. Показано, что для оптически толстых сред асимптотическое решение кинетического уравнения распространения излучения без рассеяния является асимптотическим разложением точного интегрального решения этого кинетического уравнения. Получен строгий вывод уравнения диффузионного приближения. Выведены важные для практического применения в расчетах распространения излучения уточненные граничные условия.

Ключевые слова: звезды, строение галактики, лучистый теплообмен, кинетическое уравнение, асимптотическое решение, асимптотическое приближение *n*-го порядка, уточненные граничные условия

DOI: 10.31857/S0004629923120095, **EDN:** DEKMSZ

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается распространение излучения в оптически толстых (неподвижных) средах без рассеяния в предположении локального термодинамического равновесия (ЛТР), т.е. предполагается, что локально определены температура и плотность вещества, так как рассматриваемое ниже кинетическое уравнение распространения излучения (1) включает в себя уменьшенный на вынужденное испускание коэффициент поглощения излучения κ'_ν, зависящий от свойств вещества, его плотности и температуры, и спектральную интенсивность равновесного излучения $I_{\nu P}$, которая зависит только от температуры. Как правило, при увеличении частоты излучения пробег световых квантов растет, соответственно спектральная оптическая толщина среды уменьшается (см. ниже уравнения (5) и (10)), но и уменьшается число квантов с высокой энергией (ср. с уравнением (3)). Среду́ мы называем оптически толстой, если для некоторой частоты ν_{max} суммарной энергией световых квантов с частотой $\nu > \nu_{max}$ можно пренебречь и оптическая толщина среды Θ, определяемая в разделе 5 уравнением (61), больше единицы. Мы рассматриваем распространение излучения в неподвижных средах, полагая, что заинтересовавшиеся предлагаемым ниже асимптотическим приближением сами учтут движение среды, как это обычно делается, в своих уравнениях газовой динамики с излучением (см., напр., [1, гл. II, § 17]). Как показывают оценки (см., напр., [1, гл. II, § 2] или [2, гл. 4, §§ 4.4–4.5]), в оптически толстых средах рассеянием излучения по сравнению с поглощением излучения часто можно пренебречь.

В расчетах распространения излучения (газодинамических расчетах с излучением) в оптически толстых средах без рассеяния в настоящее время используются 3 основных приближения: кинетическое приближение (численно решается кинетическое уравнение распространения излучения), диффузионное приближение и приближение лучистой теплопроводности.

Кинетическое приближение, наиболее точное с физической точки зрения, является существенно более затратным по времени выполнения расчетов. Кинетическое приближение трудно использовать в расчетах распространения излучения в оптически очень толстых средах (в веществах с высокой плотностью и большим зарядом атомного ядра, когда пробег излучения очень мал). Кроме того, естественная разностная аппроксимация производных первого порядка в кинетическом уравнении распространения излучения приводит к немонотонным разностным схемам. Из-за этого до сих пор большая часть расчетов распространения излучения в оптически толстых средах без рассеяния проводится в диффузионном приближении и приближении лучистой теплопроводности.

Диффузионное приближение имеет нулевой порядок асимптотической точности (см. ниже), поэтому плохо описывает угловое распределение излучения в оптически не очень толстых средах (использование этого приближения в оптически тонких средах не обосновано); к тому же диффузионное приближение является довольно сложным для расчетов, так как нужно численно решать уравнение в частных производных (первое уравнение диффузионного приближения).

Принципиальный недостаток приближения лучистой теплопроводности связан с вертикально обрывающимся профилем тепловой волны, который получается при использовании этого приближения в газодинамических расчетах с излучением (см., напр., [1, гл. X, § 3]); в результате на фронте тепловой волны в разностных программах расчета распространения излучения можно получить противоестественно большой по величине (абсурдный с физической точки зрения) поток энергии излучения. Применения разного рода ограничений потока энергии излучения (см., напр., обзор [3] и ссылки в нем) не являются теоретически обоснованными.

Ниже в разделе 2 рассмотрено асимптотическое решение кинетического уравнения распространения излучения без рассеяния в предельном случае, когда оптическая толщина среды стремится к бесконечности. Из этого асимптотического решения кинетического уравнения получена система уравнений *асимптотического приближения n-го порядка* (целое $n \geq 1$), которую предлагается использовать для расчетов распространения излучения в оптически толстых средах без рассеяния вместо кинетического приближения, диффузионного приближения и приближения лучистой теплопроводности. В частности, для $n = 1$ мы получаем также строгий вывод второго уравнения диффузионного приближения (уравнения диффузии).

Рассматриваемое кинетическое уравнение распространения излучения в средах без рассеяния интересно, с теоретической точки зрения, тем, что известно его точное интегральное решение, и мы можем непосредственно сравнить точное и асимптотическое решения кинетического уравнения. В разделе 3 мы показываем, что наше асимптотическое решение кинетического уравнения распространения излучения без рассеяния отличается от точного интегрального решения только малым по сравнению с последним членом асимптотического решения остатком, стремящимся к нулю, когда оптическая толщина среды стремится к бесконечности, т.е. для оптически толстых сред асимптотическое решение кинетического уравнения распространения излучения без рассеяния является *асимптотическим разложением* точного интегрального решения этого кинетического уравнения (непривычные члены асимптотического решения, содержащие временны́е производные, соответствуют “запаздывающему” излучению).

Когда в расчетах распространения излучения используются новое асимптотическое приближение *n*-го порядка или диффузионное приближение повышенной точности (см. ниже), чтобы не снизить общую точность расчетов нужно использовать граничные условия более высокого порядка асимптотической точности. Поэтому в разделе 4 из асимптотического решения кинетического уравнения распространения излучения для оптически толстых сред без рассеяния будут получены *уточненные граничные условия* (для внутренних границ и внешних границ с вакуумом), которые предлагается использовать в расчетах распространения излучения.

Некоторые результаты современного анализа, использованные в разделе 2, могут быть найдены в монографии [4]. Используемые ниже обозначения близки к обозначениям в работах [1, 4], очевидные зависимости рассматриваемых функций (от времени, пространственных координат, направления ...) опускаются. Если не оговорено иное, предполагается, что в трехмерном пространстве введена прямоугольная декартова система координат (x, y, z). Индексы трехмерных векторов и тензоров обозначаются греческими буквами и пробегают значения от 1 до 3; по одинаковым верхнему и нижнему координатным индексам трехмерных тензоров подразумевается суммирование, если же некоторые индексы не являются координатными тензорными индексами, то при необходимости знак суммы указывается явно. Метрика считается определенной с помощью диагонального метрического тензора, компоненты которого: $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$; компоненты тензора давления излучения ниже записаны через компоненты $g^{\alpha\beta}$ контравариантного метрического тензора, определяемые уравнением $g_{\alpha\beta}\, g^{\beta\xi} = \delta_\alpha^\xi$, где δ_α^ξ – δ-символ Кронекера ранга 2 (компоненты единичного трехмерного тензора), $\delta_\alpha^\xi = 0$ при $\alpha \neq \xi$, $\delta_\alpha^\xi = 1$ при $\alpha = \xi$; $g^{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1$;

для четырехмерных координат также используются обозначения: t — время, $\mathbf{r}$ — трехмерный радиус-вектор.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Если в общем кинетическом уравнении распространения излучения (см., напр., [1, уравнение (2.24)], [2, уравнение (2.26)], ср. [5, уравнение (2.26)] или [6, гл. I, уравнение (48)]) пренебречь рассеянием излучения, и в предположении локального термодинамического равновесия в соответствии с законом Кирхгофа (см. [1, уравнения (2.21), (2.27)] или [2, уравнения (2.4), (2.5)]) выразить коэффициент излучения через коэффициент поглощения и спектральную интенсивность равновесного излучения в состоянии термодинамического равновесия, то приближенное кинетическое уравнение распространения излучения без рассеяния, представляющее собой дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для зависящей от времени, пространственных координат и направления спектральной интенсивности излучения $I_\nu(t,\mathbf{r},\mathbf{\Omega})$ можно записать в следующем виде (ср. с [1, уравнение(2.28)]):

$$l'_\nu\left(\frac{\partial}{c\partial t}+\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\right)I_\nu = I_{\nu\mathrm{P}} - I_\nu. \qquad (1)$$

В уравнении (1) ν — частота световых квантов; c — скорость света в вакууме;

$$I_\nu(t,\mathbf{r},\mathbf{\Omega})d\nu d\mathbf{\Omega} = h\nu c f(\nu,t,\mathbf{r},\mathbf{\Omega})d\nu d\mathbf{\Omega} \qquad (2)$$

дает количество лучистой энергии в спектральном интервале $d\nu$, переносимой световыми квантами с энергией $h\nu$, имеющими направление движения в элементе телесного угла $d\mathbf{\Omega}$ около единичного вектора $\mathbf{\Omega}$, за единицу времени через площадку единичной площади, помещенную в точке $\mathbf{r}$, перпендикулярно к направлению $\mathbf{\Omega}$; h — постоянная Планка; $f(\nu,t,\mathbf{r},\mathbf{\Omega})$ — плотность числа световых квантов в спектральном интервале от ν до $\nu+d\nu$, находящихся в момент t около точки $\mathbf{r}$ и имеющих направление движения в элементе телесного угла $d\mathbf{\Omega}$ около единичного вектора $\mathbf{\Omega}$, аналогичная функции распределения скоростей частиц газа в кинетической теории разреженных газов; $I_{\nu\mathrm{P}}$ — спектральная интенсивность равновесного излучения в состоянии термодинамического равновесия, определяемая формулой Планка:

$$I_{\nu\mathrm{P}} \equiv B_\nu \equiv \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/T}-1}. \qquad (3)$$

Здесь T — температура вещества, отсчитываемая по энергетической шкале температур; $\kappa'_\nu \equiv 1/l'_\nu$ — уменьшенный на вынужденное испускание коэффициент поглощения (см., напр., [1, гл. II, § 5]),

$$\kappa'_\nu \equiv \kappa_\nu\left(1-e^{-h\nu/T}\right), \qquad (4)$$

$\kappa_\nu I_\nu d\nu d\mathbf{\Omega}$ равно энергии световых квантов с частотой от ν до $\nu+d\nu$, имеющих направление движения в элементе телесного угла $d\mathbf{\Omega}$ около единичного вектора $\mathbf{\Omega}$, поглощаемых веществом в единице объема в единицу времени.

Единичные векторы $\mathbf{\Omega}$ отождествляются с точками компактной единичной сферы $\mathbf{S}_2$ в $\mathbf{R}^3$. Без существенного ограничения общности мы можем рассматривать решение уравнения (1) на произведении $K\times\mathbf{S}_2$, рассматриваемом как подпространство топологического пространства $\mathbf{R}^4\times\mathbf{R}^3$, где K — ограниченный замкнутый (и, следовательно, компактный) параллелепипед топологического пространства пространственно-временны́х координат $\mathbf{R}^4$, содержащийся в некотором открытом параллелепипеде M топологического пространства $\mathbf{R}^4$. Функции пространственно-временны́х координат $l'_\nu(t,\mathbf{r})$, $T(t,\mathbf{r})$ и $I_{\nu\mathrm{P}}(T(t,\mathbf{r}))$ будем предполагать бесконечно непрерывно дифференцируемыми, т.е. имеющими непрерывные смешанные частные производные любого порядка по (t,x,y,z) на M. Как непрерывно дифференцируемые функции они непрерывны на компактном множестве K и, следовательно, принимают на K свое максимальное значение $l'^{\max}_\nu$, $T^{\max}$ и $I^{\max}_{\nu\mathrm{P}} = I_{\nu\mathrm{P}}(T^{\max})$.

Под спектральной оптической толщиной среды Θ_ν мы будем понимать отношение

$$\Theta_\nu = \frac{L_\nu}{l'^{\max}_\nu}, \qquad (5)$$

где L_ν — некоторое характерное расстояние изменения интенсивности излучения (см. ниже уравнение (10)). Построим асимптотическое решение уравнения (1) для предельного случая, когда спектральная оптическая толщина среды стремится к бесконечности или

$$\varepsilon_\nu = \frac{l'^{\max}_\nu}{L_\nu} \to 0, \qquad (6)$$

например, когда $l'^{\max}_\nu \to 0$.

Малый параметр, по степеням которого при стремлении его к нулю строится асимптотическое разложение с переменными коэффициентами (ср. с [7, гл. XXII]) решения кинетического уравнения, выделить просто, достаточно в уравнении (1) перейти к безразмерным переменным $(ct/L_\nu, x/L_\nu, y/L_\nu, z/L_\nu)$ и $l'_\nu/l'^{\max}_\nu$. Уравнение (1) можно тогда переписать следующим образом:

$$\varepsilon_\nu\left(\frac{l'_\nu}{l'^{\max}_\nu}\right)\left(\frac{L_\nu}{c}\frac{\partial}{\partial t} + L_\nu\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\right)I_\nu = I_{\nu P} - I_\nu. \qquad (7)$$

Запишем асимптотическое разложение спектральной интенсивности излучения в виде формального ряда последовательных приближений по степеням ε_ν:

$$I_\nu = \varepsilon_\nu^0\tilde{I}_\nu^{(0)} + \varepsilon_\nu\tilde{I}_\nu^{(1)} + \varepsilon_\nu^2\tilde{I}_\nu^{(2)} + \cdots, \qquad (8)$$

подставим этот степенной ряд в уравнение (7) и приравняем функции одного порядка малости. В результате получим следующую систему уравнений метода последовательных приближений:

$$\tilde{I}_\nu^{(0)} = I_{\nu P}, \qquad (9a)$$

$$\tilde{I}_\nu^{(1)} = -\left(\frac{l'_\nu}{l'^{\max}_\nu}\right)\left(\frac{L_\nu}{c}\frac{\partial}{\partial t} + L_\nu\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\right)\tilde{I}_\nu^{(0)}, \qquad (9b)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{I}_\nu^{(n)} = -\left(\frac{l'_\nu}{l'^{\max}_\nu}\right)\left(\frac{L_\nu}{c}\frac{\partial}{\partial t} + L_\nu\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\right)\tilde{I}_\nu^{(n-1)}. \qquad (9c)$$

В соответствии с уравнениями (9) естественно определить L_ν как нижнюю грань ограниченного снизу множества действительных чисел $L_\nu^{(n)}(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$:

$$L_\nu = \inf_{(t,\mathbf{r},\mathbf{\Omega})\in K\times\mathbf{S}_2}\left\{L_\nu^{(n)}(t,\mathbf{r},\mathbf{\Omega})\times \right. $$
$$\left. \times\frac{I_{\nu P}^{\max}}{l'_\nu\left[\left|\frac{\partial}{c\partial t}I_\nu^{(n)}\right| + \left|(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\,I_\nu^{(n)}\right|\right]}\right\}. \qquad (10)$$

Подставляя так определенное L_ν в уравнения (9) получаем

$$\left|\tilde{I}_\nu^{(n)}\right| \leqslant \left|\tilde{I}_\nu^{(n-1)}\right| \leqslant \ldots\left|\tilde{I}_\nu^{(1)}\right| \leqslant I_{\nu P}^{\max}. \qquad (11)$$

Следовательно, при

$$\varepsilon_\nu < 1 \qquad (12)$$

ряд (8) сходится равномерно на $K\times\mathbf{S}_2$, так как мажорируется сходящимся степенны́м рядом. Также равномерно на $K\times\mathbf{S}_2$ сходятся ряды, полученные почленным дифференцированием по (t, x, y, z) ряда (8) (аналогично равномерно на K сходятся рассматриваемые ниже ряды, полученные почленным интегрированием по углам ряда (8), и ряды, полученные из последних почленным дифференцированием по (t, x, y, z)). Поэтому, согласно известным теоремам анализа (см., напр., [4, гл. IV, § 11) при выполнении условия (12) ряд (8) определяет бесконечно непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1).

Чтобы не менять вида физических уравнений, удобно не выделять явно малый параметр ε_ν в исходном кинетическом уравнении, а просто вводить формально индикатор малости λ_ν соответствующих членов уравнения как в работе Гильберта [7, гл. XXII]. Вместо уравнений (7)–(9) в этом случае имеем уравнения:

$$\lambda_\nu l'_\nu\left(\frac{\partial}{c\partial t} + \mathbf{\Omega}\cdot\nabla\right)I_\nu = I_{\nu P} - I_\nu. \qquad (13)$$

$$I_\nu = \lambda_\nu^0 I_\nu^{(0)} + \lambda_\nu I_\nu^{(1)} + \lambda_\nu^2 I_\nu^{(2)} + \cdots, \qquad (14)$$

$$I_\nu^{(0)} = I_{\nu P}, \qquad (15a)$$

$$I_\nu^{(1)} = -l'_\nu\left(\frac{\partial}{c\partial t} + \mathbf{\Omega}\cdot\nabla\right)I_{\nu P}, \qquad (15b)$$

$$\vdots$$

$$I_\nu^{(n)} = -l'_\nu\left(\frac{\partial}{c\partial t} + \mathbf{\Omega}\cdot\nabla\right)I_\nu^{(n-1)}. \qquad (15c)$$

Из уравнений [14] и (15) в соответствии с общими определениями спектральной плотности энергии излучения,

$$U_\nu \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{c}\int\limits_{(4\pi)} I_\nu d\mathbf{\Omega}, \qquad (16)$$

и спектрального потока энергии излучения,

$$\mathbf{S}_\nu \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{(4\pi)} I_\nu\mathbf{\Omega}d\mathbf{\Omega}, \qquad (17)$$

получаем асимптотическое разложение спектральной плотности энергии излучения:

$$U_\nu = \lambda_\nu^0 U_\nu^{(0)} + \lambda_\nu U_\nu^{(1)} + \lambda_\nu^2 U_\nu^{(2)} + \cdots, \qquad (18)$$

где, в частности,

$$U_\nu^{(0)} = \frac{4\pi}{c}I_{\nu P} = U_{\nu P} \qquad (19)$$

– равновесная спектральная плотность энергии излучения,

$$U_\nu^{(1)} = -l'_\nu\frac{\partial U_{\nu P}}{c\partial t}, \qquad (20)$$

$$U_\nu^{(2)} = l'_\nu\frac{\partial}{c\partial t}\left(l'_\nu\frac{\partial U_{\nu P}}{c\partial t}\right) + \frac{1}{3}l'_\nu\nabla\cdot\left(l'_\nu\nabla U_{\nu P}\right), \qquad (21)$$

и асимптотическое разложение спектрального потока энергии излучения

$$\mathbf{S}_\nu = \lambda_\nu^0\mathbf{S}_\nu^{(0)} + \lambda_\nu\mathbf{S}_\nu^{(1)} + \lambda_\nu^2\mathbf{S}_\nu^{(2)} + \cdots, \qquad (22)$$

где

$$\mathbf{S}_\nu^{(0)} = 0, \tag{23}$$

$$\mathbf{S}_\nu^{(1)} = -\frac{c}{3} l'_\nu \nabla U_{\nu P} = -\frac{c}{3} l'_\nu \nabla U_\nu^{(0)}, \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{S}_\nu^{(2)} = \frac{c}{3} l'_\nu \nabla \left(l'_\nu \frac{\partial U_{\nu P}}{c\partial t} \right) + \frac{c}{3} l'_\nu \frac{\partial}{c\partial t} \left(l'_\nu \nabla U_{\nu P} \right) = \\ = -\frac{c}{3} l'_\nu \nabla U_\nu^{(1)} - l'_\nu \frac{\partial \mathbf{S}_\nu^{(1)}}{c\partial t}.\end{gathered} \tag{25}$$

Тензор спектрального давления излучения определяется аналогично тензору давления частиц газа в кинетической теории разреженных газов,

$$\mathrm{p}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I_\nu \mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{\Omega} d\mathbf{\Omega}, \tag{26}$$

или в компонентах

$$\begin{gathered}\mathrm{p}_\nu^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I_\nu \Omega^\alpha \Omega^\beta d\mathbf{\Omega} = \\ = \int_{(4\pi)} \left[f(\nu, t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) c\Omega^\alpha \right] \left(\frac{h\nu}{c} \Omega^\beta \right) d\mathbf{\Omega},\end{gathered} \tag{27}$$

(см., напр., [8, уравнение (85)]). Из уравнений (14), (15) и (27) получаем асимптотические разложения компонентов тензора спектрального давления излучения

$$\mathrm{p}_\nu^{\alpha\beta} = \lambda_\nu^0 \mathrm{p}_\nu^{\alpha\beta(0)} + \lambda_\nu \mathrm{p}_\nu^{\alpha\beta(1)} + \lambda_\nu^2 \mathrm{p}_\nu^{\alpha\beta(2)} + \cdots, \tag{28}$$

где

$$\mathrm{p}_\nu^{\alpha\beta(0)} = \frac{1}{3} U_{\nu P} g^{\alpha\beta} = \frac{1}{3} U_\nu^{(0)} g^{\alpha\beta}, \tag{29}$$

$$\mathrm{p}_\nu^{\alpha\beta(1)} = \frac{1}{3} \left(-l'_\nu \frac{\partial U_{\nu P}}{c\partial t} \right) g^{\alpha\beta} = \frac{1}{3} U_\nu^{(1)} g^{\alpha\beta}, \tag{30}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{p}_\nu^{\alpha\beta(2)} = \frac{1}{c} l'_\nu \frac{\partial}{\partial x^\xi} \left(l'_\nu \frac{\partial I_{\nu P}}{\partial x^\zeta} \right) \int_{(4\pi)} \Omega^\xi \Omega^\zeta \Omega^\alpha \Omega^\beta d\mathbf{\Omega} + \\ + \frac{1}{3} l'_\nu \frac{\partial}{c\partial t} \left(l'_\nu \frac{\partial U_{\nu P}}{c\partial t} \right) g^{\alpha\beta} = \frac{1}{15} l'_\nu \frac{\partial}{\partial x^\xi} \left(l'_\nu \frac{\partial U_{\nu P}}{\partial x^\zeta} \right) \times \\ \times \left(g^{\xi\zeta} g^{\alpha\beta} + g^{\xi\alpha} g^{\zeta\beta} + g^{\xi\beta} g^{\alpha\zeta} \right) + \\ + \frac{1}{3} l'_\nu \frac{\partial}{c\partial t} \left(l'_\nu \frac{\partial U_{\nu P}}{c\partial t} \right) g^{\alpha\beta},\end{gathered} \tag{31}$$

и

$$\begin{gathered}\int_{(4\pi)} \Omega^\xi \Omega^\zeta \Omega^\alpha \Omega^\beta d\mathbf{\Omega} = \frac{2}{(2+1)(2+2+1)} \times \\ \times 2\pi \left(g^{\xi\zeta} g^{\alpha\beta} + g^{\xi\alpha} g^{\zeta\beta} + g^{\xi\beta} g^{\alpha\zeta} \right),\end{gathered} \tag{32}$$

другие интегралы по углам вычисляются и записываются аналогично.

Уравнения (15), (18), (22) и (28) образуют систему уравнений асимптотического приближения n-го порядка, которую можно использовать в расчетах распространения излучения (газодинамических расчетах с излучением) вместо рассматриваемых ниже уравнений диффузионного приближения и приближения лучистой теплопроводности.

Для $\lambda_\nu = 0$ ($l'_\nu \equiv 0$) асимптотическое решение (14) уравнения (13) является точным:

$$I_\nu = I_\nu^{(0)} = I_{\nu P}, \tag{33}$$

см. уравнение (15a): фотоны с анизотропным распределением по углу (например, вблизи границы среды) поглощаются на нулевом отрезке пути и переизлучаются изотропно в соответствии со спектральной интенсивностью равновесного излучения, определяемой формулой Планка.

Согласно уравнению (15a) в нулевом асимптотическом приближении спектральная интенсивность излучения изотропна. Угловая зависимость интенсивности излучения появляется только начиная с первого порядка асимптотической точности (см. уравнения (15b) и (15c)). Поэтому в газодинамических расчетах с излучением для корректного описания угловых распределений, зависящих от излучения газодинамических величин, например, температуры и давления, нужно использовать асимптотическое приближение, как минимум, первого порядка (это замечание относится также к рассматриваемому ниже диффузионному приближению).

Первое уравнение диффузионного приближения получается (точно) из кинетического уравнения распространения излучения (1) интегрированием по углам:

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S}_\nu = c\kappa'_\nu \left(U_{\nu P} - U_\nu \right). \tag{34}$$

Второе уравнение диффузионного приближения можно получить из уравнения (24), добавив в уравнение (24) члены более высокого порядка малости асимптотических разложений спектральной плотности энергии излучения (18) и спектрального потока энергии излучения (22):

$$\mathbf{S}_\nu = -\frac{c}{3} l'_\nu \nabla U_\nu. \tag{35}$$

Из-за наличия второго слагаемого в правой части уравнения (25) второе уравнение диффузионного приближения имеет первый порядок асимптотической точности.

Уравнения диффузионного приближения (34), (35) представляют собой систему двух уравнений в частных производных первого порядка для двух неизвестных функций, зависящих от частоты излучения (но не от направления), пространственных координат и времени: спектральной плотности энергии излучения и спектрального потока энергии излучения. Для оптически толстых сред диффузионное приближение не точнее асимптотического приближения первого порядка, но асимптотическое приближение первого порядка проще.

Газодинамические расчеты с излучением в диффузионном приближении имеют нулевой порядок асимптотической точности, если используются обычные граничные условия по излучению нулевого порядка или если для давления излучения используется выражение из уравнения состояния вещества с излучением (см. уравнение (29)).

В приближении лучистой теплопроводности полный (проинтегрированный по всем частотам) поток энергии излучения задается аналитической формулой (см. [9, уравнение (2.76)]:

$$\mathbf{S} = -\frac{c}{3} l'_{\mathrm{R}} \nabla U_{\mathrm{P}} = -\frac{16 l'_{\mathrm{R}} \sigma T^3}{3} \nabla T; \tag{36}$$

в этом уравнении

$$l'_{\mathrm{R}} = \frac{\int_0^\infty l'_\nu \frac{dI_{\nu\mathrm{P}}}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dI_{\nu\mathrm{P}}}{dT} d\nu} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa'_\nu} \frac{dI_{\nu\mathrm{P}}}{dT} d\nu}{\frac{dI_{\mathrm{P}}}{dT}} \tag{37}$$

– усредненный по Росселанду (росселандов) пробег излучения [10];

$$I_{\mathrm{P}} = \int_0^\infty I_{\nu\mathrm{P}} d\nu = \frac{\sigma T^4}{\pi} \tag{38}$$

– полная (полученная интегрированием по частотам от 0 до ∞) интенсивность равновесного излучения;

$$U_{\mathrm{P}} = \int_0^\infty U_{\nu\mathrm{P}} d\nu = \frac{4\sigma T^4}{c} \tag{39}$$

– полная равновесная плотность энергии излучения; σ – постоянная Стефана–Больцмана. Полная равновесная плотность энергии излучения входит в газодинамическое уравнение переноса энергии через уравнение состояния вещества с излучением.

Уравнение (36) соответствует второму уравнению диффузионного приближения (35). Принципиальный недостаток приближения лучистой теплопроводности, о котором говорилось во Введении, связан с вертикально обрывающимся профилем тепловой волны, который получается в этом приближении в газодинамических расчетах с излучением.

Для оптически толстых сред газодинамические расчеты с излучением в приближении лучистой теплопроводности имеют нулевой порядок асимптотической точности, так как в газодинамическое уравнение переноса энергии входит только равновесная плотность энергии излучения,

$$U_{\mathrm{P}} = U^{(0)}, \tag{40}$$

используются обычные граничные условия по излучению нулевого порядка (см. ниже), а для давления излучения используется выражение нулевого порядка из уравнения состояния вещества с излучением.

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

При отсутствии рассеяния излучения, приводящего к изменению направления движения фотонов, в среде, находящейся в локальном термодинамическом равновесии, мы можем рассматривать распространение излучения вдоль линии, заданной уравнением

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{\Omega}, \tag{41}$$

и переписать уравнение (1) в виде:

$$\left(\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right) I_\nu = \kappa'_\nu \left(I_{\nu\mathrm{P}} - I_\nu\right). \tag{42}$$

Решение уравнения (42) хорошо известно:

$$\begin{aligned} &I_\nu(t, s, \mathbf{\Omega}) = \\ &= \int_{s_b}^{s} (\kappa'_\nu I_{\nu\mathrm{P}})_{t-\frac{s-s'}{c}, s'} \exp\left[-\int_{s'}^{s} (\kappa'_\nu)_{t-\frac{s-s''}{c}, s''} ds''\right] ds' + \\ &+ (I_{\nu b})_{t-\frac{s}{c}, s_b} \exp\left[-\int_{s_b}^{s} (\kappa'_\nu)_{t-\frac{s-s''}{c}, s''} ds''\right], \end{aligned} \tag{43}$$

ср., напр., с [1, уравнение (2.33)]. Через $I_{\nu b}$ в (43) обозначена произвольная константа интегрирования, соответствующая интенсивности входящего излучения в точке $\mathbf{r}(s_b)$ (или просто s_b, $s_b \le s$) на (левой) границе среды в момент времени $(t - s/c)$ в направлении, задаваемом единичным вектором $\mathbf{\Omega}$. Решение (43) можно проверить непосредственной подстановкой в уравнение (42).

Согласно первому слагаемому в (43) излучение в точке s рассматриваемой линии складывается из фотонов, “рожденных” в точках s' отрезка $[s_b, s]$ в предшествующие моменты времени, из которых до точки s доходит только часть

$$\exp\left[-\int_{s'}^{s} (\kappa'_\nu)_{t-\frac{s-s''}{c}, s''} ds''\right]. \tag{44}$$

Поэтому, если

$$\kappa'_\nu(s-s_b)\gg 1, \tag{45}$$

мы можем в уравнении (43) положить $s_b=-\infty$ и для интенсивности излучения в точке $\mathbf{r}_0$ $(s=0)$ получить выражение:

$$\begin{gathered}I_\nu(t,\mathbf{r}_0,\mathbf{\Omega})\int\limits_{-\infty}^{0}(\kappa'_\nu I_{\nu P})_{t+\frac{s'}{c},s'}\exp\left[-\int\limits_{s'}^{0}(\kappa'_\nu)_{t+\frac{s''}{c},s''}ds''\right]ds'= \\ =\int\limits_{0}^{\infty}I_{\nu P}e^{-\tau}d\tau=I_{\nu P}+\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial^i I_{\nu P}}{\partial\tau^i}\right|_{\tau=0}+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial^{n+1}I_{\nu P}}{\partial\tau^{n+1}}e^{-\tau}d\tau,\end{gathered} \tag{46}$$

где

$$\tau=\int\limits_{s'}^{0}(\kappa'_\nu)_{t+\frac{s''}{c},s''}ds'', \tag{47a}$$

$$d\tau=-(\kappa'_\nu)_{t+\frac{s'}{c},s'}ds'. \tag{47b}$$

В соответствии с уравнениями (41), (47) и (15c)

$$\begin{gathered}\left.\frac{\partial^n I_{\nu P}}{\partial\tau^n}\right|_{\tau=0}=\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial^{n-1}I_{\nu P}}{\partial\tau^{n-1}}\right]_{\tau=0}= \\ =\left[\left(\frac{\partial s'}{c\partial\tau}\frac{\partial}{\partial(t+s'/c)}+\frac{\partial s'}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial s'}\right)\frac{\partial^{n-1}I_{\nu P}}{\partial\tau^{n-1}}\right]_{\tau 0}= \\ =\left[\left(\frac{\partial s'}{c\partial\tau}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial s'}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial s'}\right)\frac{\partial^{n-1}I_{\nu P}}{\partial\tau^{n-1}}\right]_{\tau=0}= \\ =\left[-l'_\nu\left(\frac{\partial}{c\partial t}+\frac{\partial}{\partial s'}\right)\frac{\partial^{n-1}I_{\nu P}}{\partial\tau^{n-1}}\right]_{\tau=0}= \\ =\left[-l'_\nu\left(\frac{\partial}{c\partial t}+\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\right)\frac{\partial^{n-1}I_{\nu P}}{\partial\tau^{n-1}}\right]_{\tau=0}=I_\nu^{(n)}.\end{gathered} \tag{48}$$

Таким образом, асимптотическое решение (14), (15) отличается от точного интегрального решения (46) только малым для оптически толстых сред членом

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial^{n+1}I_{\nu P}}{\partial\tau^{n+1}}e^{-\tau}d\tau, \tag{49}$$

стремящемся к нулю как $\left(\frac{l'^{\max}_\nu}{L_\nu}\right)^{n+1}$, т.е. асимптотическое решение является асимптотическим разложением точного интегрального решения, как это и должно быть.

Необычные временны́е производные в уравнении (48) связаны с временно́й задержкой излучения $t+s'/c$ в уравнении (46).

4. УТОЧНЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Переходя к выводу уточненных граничных условий, предположим, что границу двух веществ или границу вещества с вакуумом локально можно считать плоской — это хорошее приближение, если пробег фотонов много меньше радиуса кривизны границы

$$\frac{l'_\nu}{R}\ll 1. \tag{50}$$

Выберем в пространстве сферическую систему координат (r,θ,φ) с началом на границе $\mathbf{r}_0=0$, см. уравнение (41). Будем предполагать, что имеет место плоская симметрия, т.е. параметры веществ зависят только от координаты

$$z=s\cos\theta=r\cos(\pi-\theta)=-r\cos\theta \tag{51}$$

и времени t.

Рассмотрим случай, когда среда, в которой распространяется излучение (слева направо), занимает бесконечное полупространство $z\le 0$, ограниченное плоской поверхностью $z=0$ (полярная ось направлена по внешней нормали к поверхности $z=0$). Из уравнений (46), (48), с учетом уравнения (51), для спектральной интенсивности излучения, выходящего с поверхности вещества, занимающего левое полупространство $z\le 0$, имеем

$$\begin{gathered}I^-_\nu(t,0,\theta,\varphi)\simeq I^-_{\nu P}- \\ -\cos\theta\left.\left(l'_\nu\frac{\partial I^-_{\nu P}}{\partial z}\right)\right|_{z=-0}-\left.\left(l'_\nu\frac{\partial I^-_{\nu P}}{c\partial t}\right)\right|_{z=-0}+ \\ +\sum_{i=2}^{n}(-1)^i(\cos\theta)^i\times \\ \times\left.\underbrace{\left(l'^-_\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdots\left(l'^-_\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{i-1}\left(l'^-_\nu\frac{\partial I^-_{\nu P}}{\partial z}\right)\right|_{z=-0}+ \\ +\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^i(\cos\theta)^j\times \\ \times\left[\cdots\left(l'^-_\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(l'^-_\nu\frac{\partial I^-_{\nu P}}{c\partial t}\right)\cdots+\cdots\right]_{z=-0}+ \\ +\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^i(\cos\theta)^j \\ \times\left[\cdots\left(l'^-_\nu\frac{\partial}{c\partial t}\right)\left(l'^-_\nu\frac{\partial I^-_{\nu P}}{\partial z}\right)\cdots+\cdots\right]_{z=-0}+ \\ +\sum_{i=2}^{n}(-1)^i\left.\underbrace{\left(l'^-_\nu\frac{\partial}{c\partial t}\right)\cdots\left(l'^-_\nu\frac{\partial}{c\partial t}\right)}_{i-1}\left(l'^-_\nu\frac{\partial I^-_{\nu P}}{c\partial t}\right)\right|_{z=-0}.\end{gathered} \tag{52}$$

Все слагаемые в правой части уравнения (52) относятся к границе $z = -0$.

Интегрируя (52) по углам по (правой) полусфере, с учетом (16) и (19) получаем выражение для спектральной плотности энергии излучения в левом веществе вблизи поверхности

$$
\begin{aligned}
U_\nu^- &\simeq \frac{1}{c}\int\limits_{(2\pi)} I_\nu^-(t,0,\theta,\varphi)\,d\boldsymbol{\Omega} = \\
&= \frac{1}{2}U_{\nu P}^- - \frac{1}{4}\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=-0} - \frac{1}{2}\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=-0} + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i+1}\underbrace{\left(l_\nu^- \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdots\left(l_\nu^- \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{i-1}\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=-0} + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(-1)^i}{j+1}\left[\cdots\left(l_\nu^- \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{c\partial t}\right)\cdots + \cdots\right]\Bigg|_{z=-0} + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(-1)^i}{j+1}\left[\cdots\left(l_\nu^- \frac{\partial}{c\partial t}\right)\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{\partial z}\right)\cdots + \cdots\right]\Bigg|_{z=-0} + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}(-1)^i\underbrace{\left(l_\nu^- \frac{\partial}{c\partial t}\right)\cdots\left(l_\nu^- \frac{\partial}{c\partial t}\right)}_{i-1}\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=-0}.
\end{aligned} \tag{53}
$$

Все слагаемые в правой части уравнения (53) относятся к границе $z = -0$.

Умножив (52) на $\cos\theta$ и интегрируя по углам по (правой) полусфере, с учетом (17) находим, что проекция на ось z спектрального потока энергии излучения с поверхности левого вещества равна

$$
\begin{aligned}
S_\nu^- &\simeq \int\limits_{(2\pi)} I_\nu^-(t,0,\theta,\varphi)\cos\theta\,d\boldsymbol{\Omega} = \\
&= \frac{c}{4}U_{\nu P}^- - \frac{c}{6}\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=-0} - \frac{c}{4}\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=-0} + \\
&+ \frac{c}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i+2}\underbrace{\left(l_\nu^- \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdots\left(l_\nu^- \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{i-1}\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=-0} + \\
&+ \frac{c}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(-1)^i}{j+2}\left[\cdots\left(l_\nu^- \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{c\partial t}\right)\cdots + \cdots\right]\Bigg|_{z=-0} + \\
&+ \frac{c}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(-1)^i}{j+2}\left[\cdots\left(l_\nu^- \frac{\partial}{c\partial t}\right)\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{\partial z}\right)\cdots + \cdots\right]\Bigg|_{z=-0} + \\
&+ \frac{c}{4}\sum_{i=2}^{n}(-1)^i\underbrace{\left(l_\nu^- \frac{\partial}{c\partial t}\right)\cdots\left(l_\nu^- \frac{\partial}{c\partial t}\right)}_{i-1}\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=-0}.
\end{aligned} \tag{54}
$$

Все слагаемые в правой части уравнения (54) относятся к границе $z = -0$.

Сравнивая выражения (53), (54) и ограничиваясь в правых частях (53), (54) только первыми слагаемыми, в частности, получаем соотношение:

$$
S_\nu^{-(0)} \approx \frac{c}{2}U_\nu^{-(0)} = \frac{c}{4}U_{\nu P}^-, \tag{55}
$$

которое часто используется в качестве граничного условия на границе вещества с вакуумом в диффузионном приближении, но условие (54) точнее, оно учитывает неоднородность характеристик вещества в направлении, перпендикулярном поверхности вещества.

Поток z-компонента импульса, переносимого световыми квантами с импульсом $h\nu/c$ через площадку с нормалью, направленной вдоль оси z, определяется компонентом спектрального давления излучения p_ν^{33} (см. уравнение (27)). Умножив (52) на $\cos^2\theta$ и интегрируя по углам по (правой) полусфере, получаем:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p}_\nu^{33-} &\simeq \frac{1}{c}\int\limits_{(2\pi)} I_\nu^-(t,0,\theta,\varphi)\cos^2\theta\,d\boldsymbol{\Omega} = \\
&= \frac{1}{6}U_{\nu P}^- - \frac{1}{8}\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=-0} - \frac{1}{6}\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=-0} + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i+3}\underbrace{\left(l_\nu^- \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdots\left(l_\nu^- \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{i-1}\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=-0} + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(-1)^i}{j+3}\times \\
&\times\left[\cdots\left(l_\nu^- \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{c\partial t}\right)\cdots + \cdots\right]\Bigg|_{z=-0} + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(-1)^i}{j+3}\left[\cdots\left(l_\nu^- \frac{\partial}{c\partial t}\right)\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{\partial z}\right)\cdots + \cdots\right]\Bigg|_{z=-0} + \\
&+ \frac{1}{6}\sum_{i=2}^{n}(-1)^i\underbrace{\left(l_\nu^- \frac{\partial}{c\partial t}\right)\cdots\left(l_\nu^- \frac{\partial}{c\partial t}\right)}_{i-1}\left(l_\nu^- \frac{\partial U_{\nu P}^-}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=-0}.
\end{aligned} \tag{56}
$$

Все слагаемые в правой части уравнения (56) относятся к границе $z = -0$.

Для вещества, занимающего правое полупространство $z \geq 0$, после интегрирования по углам по левой полусфере получаются выражения, аналогичные выражениям (52)–(54) и (56):

$$
\begin{aligned}
I_\nu^+(t,0,\theta,\varphi) &\simeq I_{\nu P}^+ - \cos\theta\left(l_\nu^- \frac{\partial I_{\nu P}^+}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=+0} - \\
&- \left(l_\nu^+ \frac{\partial I_{\nu P}^+}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=+0} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^i(\cos\theta)^i\times
\end{aligned}
$$

$$\times \underbrace{\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{i-1}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial I^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=+0}+$$
$$+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{i}(\cos\theta)^{j}\times$$
$$\times\left[\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial I^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{c\partial t}\right)\cdots+\cdots\right]_{z=+0}+ \qquad (57)$$
$$+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{i}(\cos\theta)^{j}\times$$
$$\times\left[\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{c\partial t}\right)\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial I^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{\partial z}\right)\cdots+\cdots\right]_{z=+0}+$$
$$+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}\underbrace{\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{c\partial t}\right)\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{c\partial t}\right)}_{i-1}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial I^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=+0},$$

$$U^{+}_{\nu}\simeq\frac{1}{c}\int_{(2\pi)}I^{+}_{\nu}(t,0,\theta,\varphi)\,d\mathbf{\Omega}=$$
$$=\frac{1}{2}U^{+}_{\nu\mathrm{P}}+\frac{1}{4}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=+0}-\frac{1}{2}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=+0}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i+1}\underbrace{\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{i-1}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=+0}+ \qquad (58)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(-1)^{i+j}}{j+1}\left[\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{c\partial t}\right)\cdots+\cdots\right]_{z=+0}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(-1)^{i+j}}{j+1}\left[\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{c\partial t}\right)\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{\partial z}\right)\cdots+\cdots\right]_{z=+0}-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\underbrace{\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{c\partial t}\right)\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{c\partial t}\right)}_{i-1}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=+0},$$

$$S^{+}_{\nu}\simeq\int_{(2\pi)}I^{+}_{\nu}(t,0,\theta,\varphi)\cos\theta\,d\mathbf{\Omega}=$$
$$=-\frac{c}{4}U^{+}_{\nu\mathrm{P}}-\frac{c}{6}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=+0}+\frac{c}{4}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=+0}-$$
$$-\frac{c}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i+2}\underbrace{\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{i-1}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=+0}-$$
$$-\frac{c}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(-1)^{i+j}}{j+2}\times$$
$$\times\left[\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{c\partial t}\right)\cdots+\cdots\right]_{z=+0}- \qquad (59)$$
$$-\frac{c}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(-1)^{i+j}}{j+2}\times$$
$$\times\left[\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{c\partial t}\right)\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{\partial z}\right)\cdots+\cdots\right]_{z=+0}-$$
$$-\frac{c}{4}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}\underbrace{\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{c\partial t}\right)\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{c\partial t}\right)}_{i-1}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=+0},$$

$$\mathrm{p}^{33+}_{\nu}\simeq\frac{1}{c}\int_{(2\pi)}I^{+}_{\nu}(t,0,\theta,\varphi)\cos^{2}\theta\,d\mathbf{\Omega}=$$
$$=\frac{1}{6}U^{+}_{\nu\mathrm{P}}+\frac{1}{8}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=+0}-\frac{1}{6}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=+0}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i+3}\underbrace{\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{i-1}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=+0}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(-1)^{i+j}}{j+3}\times$$
$$\times\left[\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{c\partial t}\right)\cdots+\cdots\right]_{z=+0}+ \qquad (60)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(-1)^{i+j}}{j+3}\times$$
$$\times\left[\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{c\partial t}\right)\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{\partial z}\right)\cdots+\cdots\right]_{z=+0}-$$
$$-\frac{1}{6}\sum_{i=2}^{n}\underbrace{\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{c\partial t}\right)\cdots\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial}{c\partial t}\right)}_{i-1}\left(l'^{+}_{\nu}\frac{\partial U^{+}_{\nu\mathrm{P}}}{c\partial t}\right)\Bigg|_{z=+0}.$$

Все слагаемые в правых частях уравнений (57)–(60) относятся к границе $z = +0$.

На внутренних границах односторонние физические величины, определяемые уравнениями (53)–(54), (56) и (58)–(60), суммируются.

5. О ПРИМЕНЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Выше в разделе 2 мы определили спектральную оптическую толщину среды Θ_ν соотношением (5). Общую оптическую толщину среды или просто оптическую толщину среды определим как нижнюю грань ограниченного снизу множества спектральных оптических толщин среды,

$$\Theta = \inf_{0<\nu\le\nu_{\max}}\{\Theta_\nu\} = \frac{1}{\varepsilon}, \tag{61}$$

где

$$\varepsilon = \sup_{0<\nu\le\nu_{\max}}\{\varepsilon_\nu\} < 1. \tag{62}$$

Область применения полученного из асимптотического решения кинетического уравнения распространения излучения асимптотического приближения n-го порядка совпадает с областью обоснованного применения диффузионного приближения, это использование в расчетах распространения излучения (газодинамических расчетах с излучением) в движущихся оптически толстых ($\Theta > 1$) средах без рассеяния. Для оптически толстых сред условие (62) гарантирует равномерную сходимость всех рядов, рассмотренных в разделе 2.

Прежде всего, мы предлагаем заменить диффузионное приближение на асимптотическое приближение 1-го порядка. Асимптотическое приближение 1-го порядка по сравнению с диффузионным приближением имеет несколько существенных преимуществ и не имеет недостатков. В уравнения газовой динамики входят интегральные по частоте характеристики излучения. Чтобы перейти от спектральных характеристик излучения (см. уравнения (15a), (15b), (19), (20), (24), (29), (30)) к интегральным, фотоны разбиваются на m групп по принадлежности их частоты к интервалам: $[0,\nu_1]$, $[\nu_1,\nu_2]$, ..., $[\nu_{m-1},\nu_{\max}]$ (предполагается, что суммарной энергией световых квантов с частотой $\nu > \nu_{\max}$ для оптически толстой среды можно пренебречь, см. Введение), и интегрирование по частоте излучения на интервале $[0,+\infty]$ заменяется на суммирование следующих групповых величин:

$$\int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} I_{\nu\mathrm{P}}\,d\nu = I_{i\mathrm{P}} \quad (i = 1\ldots m), \tag{63a}$$

$$\int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} \frac{dI_{\nu\mathrm{P}}}{dT}\,d\nu = \frac{dI_{i\mathrm{P}}}{dT} \quad (i = 1\ldots m), \tag{63b}$$

$$\int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} l'_\nu \frac{dI_{\nu\mathrm{P}}}{dT}\,d\nu = \frac{\int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} l'_\nu \frac{dI_{\nu\mathrm{P}}}{dT}\,d\nu}{\int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} \frac{dI_{\nu\mathrm{P}}}{dT}\,d\nu}\,\frac{dI_{i\mathrm{P}}}{dT} = l'_{i\mathrm{R}}\,\frac{dI_{i\mathrm{P}}}{dT} \tag{63c}$$

$$(i = 1\ldots m),$$

с коэффициентами, возможно, включающими частные производные от температуры по времени и пространственным координатам. В уравнении (63c) $l'_{i\mathrm{R}}$ – усредненные по Росселанду [10] групповые пробеги излучения. Важно отметить, что при использовании их в асимптотическом приближении 1-го порядка ошибка усреднения равна нулю, уравнения (63) – это просто определения групповых величин (для асимптотических приближений второго и более высоких порядков это, к сожалению, уже неверно). Поэтому число групп можно свести к минимуму: 2–3 группы, только чтобы образовывался носик у тепловых волн. Образование носика у тепловых волн аналогично размытию фронта ударных волн при применении искусственной вязкости в газодинамических расчетах. Помимо усредненных по Росселанду групповых пробегов излучения в диффузионном и кинетическом приближениях используются планковские пробеги излучения:

$$l'_{i\mathrm{P}} = \frac{1}{\kappa'_{i\mathrm{P}}} = \frac{I_{i\mathrm{P}}}{\int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} \kappa'_\nu I_{\nu\mathrm{P}}\,d\nu} \quad (i = 1\ldots m). \tag{64}$$

Структура кинетического уравнения (1) и полученного из него интегрированием по углам первого уравнения диффузионного приближения (34) такова, что использование и росселандовых, и планковских групповых пробегов приводит к ошибке усреднения. Неясно даже, какие пробеги рекомендовать к использованию, при том, что одногрупповые росселандовы и планковские пробеги могут отличаться почти в восемь раз (см., напр., [11, гл. 7, § 2]). Уменьшить ошибку усреднения можно только увеличивая число групп, но при этом значительно увеличивается сложность (время) расчетов. Кроме того, вместо вычисления явных выражений для характеристик излучения в асимптотическом приближении, в диффузионном и кинетическом приближениях нужно численно решать уравнения в частных производных. Для кинетического приближения это создает дополнительную проблему из-за немонотонности получающихся разностных схем.

Приближение лучистой теплопроводности можно рассматривать как частный случай одногруппового по частоте излучения асимптотического приближения 1-го порядка, если в последнем отбросить поправки первого порядка к плотности энергии излучения (см. уравнение (20)), к тензору давления излучения (см. уравнение (30)), и в граничных условиях в уравнениях (53)–(54), (56) и (58)–(60). Для приближения лучистой теплопроводности при использовании в расчетах одногруппового росселандова пробега излучения ошибка усреднения также равна нулю, но необходимость введения ограничений на поток энергии излучения из-за вертикально обрывающегося профиля тепловых волн (см. Введение) делает результаты расчетов в приближении лучистой теплопроводности недостоверными.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное из асимптотического решения кинетического уравнения распространения излучения асимптотическое приближение 1-го порядка предлагается использовать следующим образом:

1) заменить в расчетах распространения излучения (газодинамических расчетах с излучением) в оптически толстых средах без рассеяния кинетическое приближение, что позволит существенно уменьшить время расчета и повысить точность расчетов (см. раздел 5);

2) заменить диффузионное приближение на асимптотическое приближение 1-го порядка, что существенно упростит газодинамические расчеты с излучением (в частности, не нужно будет численно решать уравнение в частных производных), повысив точность расчетов, и позволит лучше описать угловое распределение излучения;

3) повысить асимптотическую точность газодинамических расчетов с излучением (без рассеяния) в диффузионном приближении до n-го порядка, использовав для спектрального потока энергии излучения выражение (22), а для давления излучения – выражение (28). Довольно просто повысить асимптотическую точность газодинамических расчетов с излучением в диффузионном приближении до 1-го порядка: нужно только в газодинамические уравнения добавить тензор давления излучения 1-го порядка (см. уравнение (30)) и использовать граничные условия 1-го порядка асимптотической точности; по разнице росселандовых и планковских групповых пробегов излучения для характерных температур и плотностей вещества в конкретной задаче можно оценивать необходимое в расчетах число групп.

В расчетах распространения излучения нужно использовать граничные условия соответствующего порядка асимптотической точности, когда используются новое асимптотическое приближение n-го порядка или диффузионное приближение повышенной точности, для асимптотического приближения 1-го порядка это начальные две строки в уравнениях (53)–(54), (56) и (58)–(60).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер*, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений* (М.: Физматлит, 2008).
2. *Д. Михалас*, *Звездные атмосферы.* Т. 1 (М.: Мир, 1982).
3. *T. A. Brunner*, *Forms of Approximate Radiation Transport*, Sandia Report SAND2002-1778, (New Mexico; California: Sandia National Laboratories, 2002).
4. *Л. Шварц*, *Анализ*, Т. 1 (М.: Мир, 1972).
5. *В. А. Амбарцумян, Э. Р. Мустель, А. Б. Северный, В. В. Соболев*, *Теоретическая астрофизика* (М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1952).
6. *S. Chandrasekhar*, *Radiative transfer* (New York: Dover Publications Inc., 1960).
7. *D. Hilbert*, *Grundzüge einer Allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen* (Leipzig and Berlin: Teubner, 1912).
8. *S. A. Serov and S. S. Serova*, J. Appl. Mathematics and Physics **4**, 1687 (2016).
9. *Y. B. Zel'dovich and Y. P. Raizer*, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Mineola, New York: Dover Publications Inc., 2012).
10. *S. Rosseland*, in *Selected Papers on the Transfer of Radiation*, edited by *D. H. Menzel* (New York: Dover Publications Inc., 1965), p. 73.
11. *Н. Н. Пилюгин и Г. А. Тирский*, *Динамика ионизованного излучающего газа* (М.: Изд-во МГУ, 1989).

RADIATIVE TRANSFER: ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE KINETIC EQUATION OF RADIATION PROPAGATION, *N*-th ORDER ASYMPTOTIC APPROXIMATION AND IMPROVED BOUNDARY CONDITIONS

S. A. Serov[a] and S. S. Serova[b]

[a]*Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Sarov, Russia*
[b]*St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*

In the article, new asymptotic approximation of the n-th order is obtained and proposed to be used in calculations of radiation propagation in optically thick media without scattering; the asymptotic approximation is simpler and more precise than the known diffusion approximation. It is shown, that for optically thick media the asymptotic solution of the kinetic equation of radiation propagation without scattering is asymptotic expansion of the exact integral solution of that kinetic equation. The rigorous derivation of the diffusion approximation equation is obtained. Improved boundary conditions, which are essential for practical application in calculations of radiation propagation, are derived.

Keywords: radiative transfer, kinetic equation, asymptotic solution, asymptotic approximation of the n-th order, improved boundary conditions