

# ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ СТРУКТУРЫ ПРОТОПЛАНЕТНОГО ДИСКА В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

© 2024 г. Я. Н. Павлюченков<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение Российской академии наук  
Институт астрономии, Москва, Россия

\*E-mail: pavyar@inasan.ru

Поступила в редакцию 29.06.2024 г.

После доработки 15.08.2024 г.

Принята в печать 15.08.2024 г.

В статье подробно описана модель для расчета нестационарной тепловой структуры протопланетного диска в аксиально-симметричном приближении. В основе модели лежит широко используемый подход разделения поля излучения на звездное и собственное тепловое излучение среды. Нагрев звездным излучением рассчитывается методом трассировки, а для описания теплового излучения используется известное диффузионное приближение с ограничителем потока (FLD-приближение). Для решения возникающей системы линейных уравнений предложена модификация метода Гаусса, которая позволяет в десятки раз ускорить вычисления по сравнению с обычно используемым методом GMRES. С помощью данной модели проведен расчет стационарной тепловой структуры двух дисков, параметры одного из которых близки к системе EX Lup. Проведен детальный анализ результатов моделирования. Сравнение с результатами более точных методов позволило выявить основные недостатки модели, связанные с пренебрежением рассеяния света и диффузионной природой приближения FLD. Показано, что тепловая структура диска при использовании приближения FLD эволюционирует в соответствии с аналитическими оценками для характерного теплового времени.

**Ключевые слова:** протопланетные диски, перенос излучения, численное моделирование

**DOI:** 10.31857/S0004629924110023 **EDN:** JLPNXG

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Температурная структура газопылевого (протопланетного) диска у молодой звезды неразрывно связана со множеством процессов, влияющих на эволюцию диска. Температура контролирует физическую, химическую, ионизационную структуру диска, расположение фронтов испарения льдов и мертвых зон. От распределения температуры в диске зависят его наблюдаемые свойства в инфракрасном диапазоне. Детали процессов нагрева и охлаждения определяют развитие целого ряда неустойчивостей: гравитационной, конвективной, тепловой, сдвиговой (vertical shear instability), бароклинной, пульсационной (convective overstability) и других (см., напр., обзоры [1, 2]).

Основными механизмами нагрева диска являются поглощение звездного, межзвездного и собственного теплового излучения [3], диссипативные процессы, обеспечивающие высокую турбулентную вязкость диска в результате развития различных неустойчиво-

стей, в частности, магниторотационной [4, 5], а также нагрев, связанный с диссипацией спиральных волн в самогравитирующем диске [6]. Охлаждение диска связано главным образом с диффузией и выходом инфракрасного и микроволнового теплового излучения, генерируемого пылью и газом. Совокупность процессов нагрева, охлаждения и переноса излучения приводит к формированию сложной температурной структуры диска с вертикальной стратификацией и радиальными градиентами (см., напр., [7]).

В связи с многообразием процессов и математической сложностью задачи расчет самосогласованной температурной структуры диска и его тепловой эволюции проводится, как правило, методами численного моделирования. На текущий момент достигнут значительный прогресс в разработке и использовании численных методов для моделирования переноса излучения в астрофизических задачах в общем и в приложении к околозвездным дискам в частности. Хороший обзор методов и основанных на них программных комплексах представлен в работах [8, 9].

Современные методы можно разделить на две большие группы: методы для решения исходного уравнения переноса излучения, и методы, основанные на преобразовании уравнения переноса к системе моментных уравнений. Первая группа методов используется, как правило, для решения стационарных задач, в то время как вторая — в динамических задачах.

Одним из наиболее ярких и востребованных подходов для решения нестационарных задач переноса излучения является метод, основанный на теории диффузии излучения с ограничителем потока (Flux Limited Diffusion (FLD) [10]). В основе этого метода лежит предположение, что функция  $\psi$ , описывающая угловую зависимость интенсивности  $I = cE\psi$  ( $E$  — плотность лучистой энергии,  $c$  — скорость света), медленно меняется в пространстве и во времени. Это предположение при переходе к уравнениям моментов позволяет выразить поток излучения  $\mathbf{F}$  через градиент плотности лучистой энергии:  $\mathbf{F} = -\frac{c\lambda}{\sigma_R} \nabla E$  ( $\sigma_R$  — коэффициент непрозрачности), т. е. перейти к диффузионному приближению. Полученный в рамках такого подхода нелинейный коэффициент  $\lambda$  (ограничитель потока) позволяет корректно описывать перенос излучения не только в оптически толстом случае, при котором  $\mathbf{F} = -\frac{c}{3\sigma_R} \nabla E$ , но и в потоковом оптически тонком пределе, когда  $|\mathbf{F}| = cE$ .

В различных реализациях и комбинациях метод FLD используется для исследования самых разнообразных процессов в протопланетных дисках (см., напр., [11, 12, 13]). Однако, несмотря на его широкое использование, исследователям непросто сделать вывод об области его надежной применимости для моделирования околозвездных газопылевых дисков. При описании данного метода часто опускаются важные детали его технической реализации. В связи с этим данная работа преследует две цели: 1) детальное описание метода расчета тепловой эволюции аксиально-симметричного протопланетного диска на основе приближения FLD; 2) анализ результатов моделирования тепловой структуры диска с различными параметрами и их сравнение с точными результатами. Описанный в данной статье метод расчета тепловой эволюции планируется использовать в программном комплексе HURAKAN [14], предназначенном для моделирования динамики протопланетных дисков в аксиально-симметричном приближении.

## 2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

### 2.1. Уравнения тепловой модели

Для расчета тепловой структуры газопылевого диска проведена модификация нестационарной тепловой модели из работы [14] посредством включения в нее диффузионного приближения с ограничителем потока. В модели учитывается нагрев среды прямым излучением звезды и диффузия теплового излучения. Соответствующая система уравнений имеет вид:

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = c \sigma_P (E - aT^4) + S, \quad (1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c \sigma_P (E - aT^4) + \hat{\Lambda} E, \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность газопылевой среды,  $c_V$  — удельная теплоемкость среды [эрг/г/К],  $c$  — скорость света,  $\sigma_P$  [см<sup>-1</sup>] — усредненный по спектру коэффициент поглощения теплового излучения (без вклада рассеяния, на единицу объема газопылевой среды),  $S$  [эрг/с/см<sup>3</sup>] — темп нагрева звездным излучением,  $T$  — температура среды,  $E$  — плотность энергии теплового излучения. Уравнение (1) описывает изменение объемной тепловой энергии среды в результате поглощения и переизлучения теплового излучения (слагаемые  $c \sigma_P E$  и  $c \sigma_P aT^4$  соответственно), а также в результате поглощения прямого излучения звезды ( $S$ ). Уравнение (2) представляет собой моментное уравнение переноса излучения и описывает изменение плотности энергии излучения в результате поглощения и переизлучения теплового излучения, а также в результате пространственной диффузии теплового излучения, представленной оператором  $\hat{\Lambda} E$ :

$$\hat{\Lambda} E = -\nabla \mathbf{F} = \nabla \left( \frac{c\lambda}{\sigma_R} \nabla E \right), \quad (3)$$

где  $\mathbf{F}$  — поток теплового излучения,  $\sigma_R$  — усредненный по спектру коэффициент ослабления теплового излучения,  $\lambda$  — так называемый ограничитель потока. Вычисление  $\lambda$  проводится в соответствии с формулами теории FLD<sup>1</sup>:

$$\mathbf{R} = -\frac{\nabla E}{\sigma_R E}, \quad (4)$$

$$\lambda(R) = \frac{1}{R} \left( \coth R - \frac{1}{R} \right). \quad (5)$$

<sup>1</sup> Отметим, что используемый здесь формализм является общераспространенным, см. [9], но он упрощен по сравнению с тем, что изложен в оригинальной статье [10].

Использование фиксированного значения  $\lambda = 1/3$  в уравнении (3) приводит к эддингтоновскому приближению.

В реализованном методе нагрев диска прямым излучением звезды рассчитывается с помощью метода трассировки с использованием спектральных коэффициентов поглощения, аналогично тому, как предложено в работе [15]. Функция нагрева  $S$  определяется поглощением звездного излучения рассматриваемым элементом объема, т. е.

$$S = -\nabla \mathbf{F}^*, \quad (6)$$

где  $\mathbf{F}^*$  — поток звездного излучения, проинтегрированный по частоте:

$$\mathbf{F}^* = \int_0^\infty \mathbf{F}_\nu^* d\nu. \quad (7)$$

Спектральный поток  $\mathbf{F}_\nu^*$  рассчитывается с учетом истинного поглощения излучения от звезды до рассматриваемого элемента среды вдоль радиального направления. В этом случае радиальный компонент потока равен:

$$F_\nu^* = B_\nu(T_*) \Omega(r) e^{-\tau_\nu(r)}, \quad (8)$$

где  $B_\nu(T_*)$  — функция Планка для температуры звезды  $T_*$ ,  $\Omega(r)$  — пространственный угол, под которым звезда видна с расстояния  $r$ ,  $\tau_\nu(r)$  — оптическая толщина на частоте  $\nu$  на луче зрения от звезды до рассматриваемой точки. Стоит отметить, что в рамках такого вычисления  $\mathbf{F}_\nu^*$  не учитывается рассеяние звездного излучения. В связи с тем, что приближение FLD используется в комбинации с отдельной процедурой расчета поглощения звездного излучения, в дальнейшем для данного комбинированного метода будем использовать обозначение FLD<sup>S</sup>.

Отметим также, что описанная здесь тепловая модель не является новой, она в общих деталях близка к той, что использована, например, в работе [16].

## 2.2. Коэффициенты поглощения

В модели предполагается, что единственным источником непрозрачности является пыль, причем температуры газа и пыли равны. Отношение плотности пыли к плотности газа по всему диску предполагается постоянным и равным 0.01, т. е. пыль считается однородно перемешанной с газом. Фигурирующие в приведенных выше уравнениях коэффициенты  $\sigma_P = \rho \kappa_P$  и  $\sigma_R = \rho \kappa_R$ , где  $\kappa_P$  и  $\kappa_R$  [см<sup>2</sup>/г] — планковская и Росселандовская не-

прозрачности, являются средними по спектру величинами:

$$\kappa_P(T) = \int_0^\infty \kappa_\nu^{\text{abs}} B_\nu d\nu / \int_0^\infty B_\nu d\nu, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\kappa_R(T)} = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu^{\text{abs}} + \kappa_\nu^{\text{sca}}} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu / \int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu. \quad (10)$$

Усредненные коэффициенты рассчитывались по частотно-зависимым коэффициентам поглощения  $\kappa_\nu^{\text{abs}}$  и рассеяния  $\kappa_\nu^{\text{sca}}$  для смеси сферических силикатных и графитовых пылинок (массовая доля графитовых пылинок 0.2). Сами спектральные коэффициенты поглощения и рассеяния рассчитаны с помощью теории Ми, при этом распределение пылинок по размерам бралось степенным  $n(a) \propto a^{-3.5}$  с минимальным и максимальным радиусами пылинок  $a_{\min} = 5 \times 10^{-7}$  см и  $a_{\max} = 10^{-4}$  см (т. е. в соответствии с распределением MRN для межзвездной пыли [17]). Зависимости коэффициентов поглощения  $\kappa_\nu^{\text{abs}}$  и рассеяния  $\kappa_\nu^{\text{sca}}$  от длины волны и усредненных непрозрачностей  $\kappa_P$  и  $\kappa_R$  от температуры показаны на рис. 1. Отметим, что такие непрозрачности рассчитаны для достаточной примитивной модели пыли и используются здесь прежде всего для тестирования методов переноса излучения. В действительности протопланетная пыль может включать в себя полициклические ароматические углеводороды, частицы с ледяными мантиями; сами пылинки могут иметь сложную, в том числе, фрактальную форму. Кроме того, пылинки движутся относительно газа (осаждаются к экватору и мигрируют вдоль радиуса), а также эволюционируют (растут и разрушаются при взаимных столкновениях, теряют и приобретают углеводородные и ледяные мантии и т. д.), что существенно влияет на распределение пылинок по размерам. Эволюция пыли активно изучается в рамках теоретических моделей и является предметом наблюдательных исследований (см. обзоры [18, 19]). Для расчета тепловой структуры в рамках более реалистичных моделей необходимо учитывать изменение непрозрачностей за счет этих процессов.

## 2.3. Численный метод решения

Уравнения (1), (2) формируют нелинейную систему уравнений в частных производных диффузионного типа. Ее решение находится в аксиально-симметричном приближении с использованием

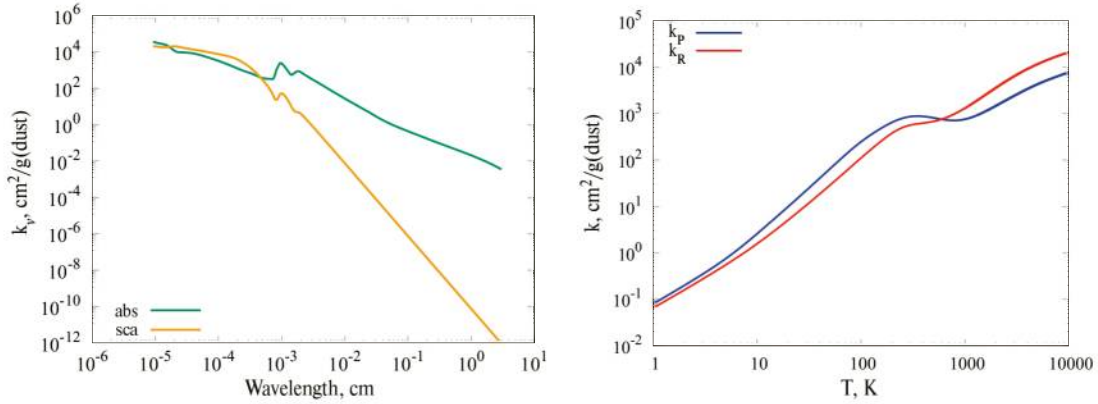


Рис. 1. Левая панель: зависимости коэффициентов поглощения  $\kappa_v^{\text{abs}}$  и рассеяния  $\kappa_v^{\text{sca}}$  от длины волны. Правая панель: зависимости усредненных непрозрачностей  $\kappa_p$  и  $\kappa_R$  от температуры.

сферической системы координат. Расчетная сетка, основные обозначения для которой приведены на рис. 2, в общем случае неоднородная по радиусу  $r$  и по углу  $\theta$ . Для решения используется неявный конечно-разностный метод, в котором обменные члены  $E$  и  $aT^4$  в правой части уравнений (1), (2), а также дифференциальный оператор (3), зависят от значений функций на новом  $(n + 1)$  временном слое:

$$\rho c_V \frac{T - T^n}{\Delta t} = c_R \kappa_R^n (E - aT^4) + S, \quad (11)$$

$$\frac{E - E^n}{\Delta t} = -c_R \kappa_R^n (E - aT^4) + \hat{\Lambda} E, \quad (12)$$

где  $T^n$  и  $E^n$  — значения с  $n$ -го временного слоя,  $T$  и  $E$  — искомые значения на временном слое  $(n + 1)$  для заданной пространственной ячейки. В уравнениях сверху для краткости опущены нижние пространственные индексы: для всех величин они соответствуют рассматриваемой ячейке  $(i, j)$ , за исключением оператора  $\hat{\Lambda}$ , связывающего ячейку  $(i, j)$  с четырьмя примыкающими ячейками по радиусу  $r$  и углу  $\theta$ .

Система уравнений тепловой эволюции среды (11), (12) решается с помощью итераций Ньютона, для этого уравнения линеаризуются с помощью аппроксимации:

$$T^4 \approx 4T_k^3 T - 3T_k^4,$$

где  $T_k$  — значение температуры на предыдущей  $k$ -ой итерации, после чего уравнения (11), (12) можно привести к виду:

$$T = \frac{b_d + \omega_p \Delta t E}{c_d + c_r}, \quad (13)$$

$$\left[ 1 + \frac{c_d}{c_d + c_r} \omega_p \Delta t - \Delta t \hat{\Lambda} \right] E = g. \quad (14)$$

Фигурирующие в данных уравнениях коэффициенты  $c_d$ ,  $\omega_p$ ,  $c_r$ ,  $b_d$ ,  $g$  вычисляются следующим образом:

$$c_d = \rho c_V,$$

$$\omega_p = c_R \kappa_R^n,$$

$$c_r = 4aT_k^3 \omega_p \Delta t,$$

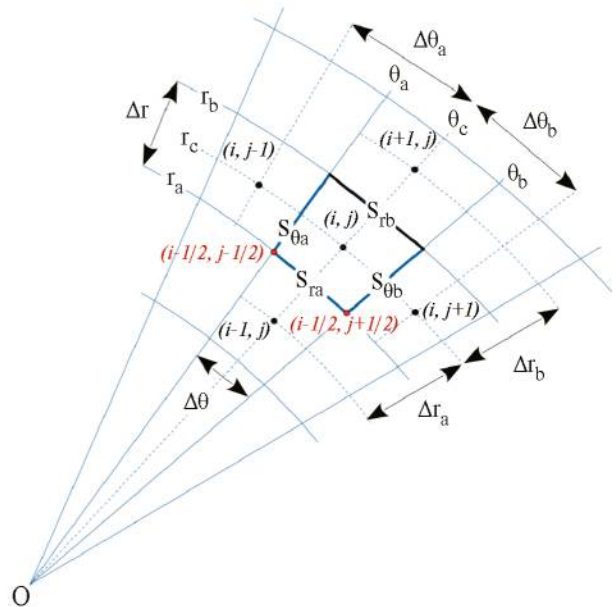


Рис. 2. Схема расчетной сетки с основными обозначениями.



$$b_d = c_d T^n + \frac{3}{4} c_r T_k + S \Delta t,$$

$$g = E^n - \frac{3}{4} c_r T_k + \frac{c_r b_d}{c_d + c_r}.$$

Дифференциальный оператор  $\hat{\Lambda}$  в сферической системе координат с учетом аксиальной симметрии задачи аппроксимируется в следующем конечно-разностном виде:

$$\hat{\Lambda} E = \frac{1}{\Delta V} (S_{ra} F_{ra} - S_{rb} F_{rb} + S_{\theta a} F_{\theta a} - S_{\theta b} F_{\theta b}), \quad (15)$$

где  $\Delta V$  — объем ячейки,  $S_{ra}, S_{rb}, S_{\theta a}, S_{\theta b}$  — площади граней текущей ячейки. Индексами  $r$  и  $\theta$  обозначены грани, ограничивающие ячейку по координатам  $r$  и  $\theta$  соответственно, индексы  $a$  и  $b$  относятся к граням с меньшим и большим значениям координаты (см. рис. (2)). Потоки через грани ячейки находятся по формулам:

$$F_{ra} = -f_{ra} \frac{E_{i,j} - E_{i-1,j}}{\Delta r_a},$$

$$F_{rb} = -f_{rb} \frac{E_{i+1,j} - E_{i,j}^n}{\Delta r_b},$$

$$F_{\theta a} = -f_{\theta a} \frac{E_{i,j} - E_{i,j-1}}{r_c \Delta \theta_a},$$

$$F_{\theta b} = -f_{\theta b} \frac{E_{i,j+1} - E_{i,j}}{r_c \Delta \theta_b},$$

где  $E_{i,j}$  — энергия в ячейке с индексами  $(i, j)$  для нового  $(n+1)$  временного шага,  $r_c$  — радиальная координата центра текущей ячейки,  $\Delta r_a, \Delta r_b, r_c \Delta \theta_a$  и  $r_c \Delta \theta_b$  — расстояния от центра текущей ячейки до центров прилегающих ячеек для соответствующих граней. Значения  $f = \frac{c\lambda}{\sigma_R}$  рассчитываются для соответствующих граней, используя переменные с предыдущего  $(n)$  временного шага. При этом значения  $\sigma_R$  на гранях получаются путем усреднения центральных значений прилегающих ячеек:  $\sigma_{ra} = (\sigma_{i-1,j} + \sigma_{i,j}) / 2$ . Для вычисления вектора  $\mathbf{R}$  используется конечно-разностная аппроксимация уравнения (4), причем задействуются не только прилегающие к грани ячейки, но и смежные с ними, поскольку вектор  $\mathbf{R}$  содержит два компонента, один из которых перпендикулярен грани, а другой копланарен ей. Так, радиальный и угловой компоненты градиента энергии, фигурирующего в формуле (4), для грани  $(ra)$  вычисляются следующим образом:

$$(\nabla E)_r|_{ra} = \frac{E_{i,j}^n - E_{i-1,j}^n}{\Delta r_a}, \quad (16)$$

$$(\nabla E)_\theta|_{ra} = \frac{E_{i-1/2,j+1/2}^n - E_{i-1/2,j-1/2}^n}{r_a \Delta \theta}, \quad (17)$$

где значения на пересечении граней находятся путем усреднения центральных значений энергии, т. е.  $E_{i-1/2,j+1/2}^n = (E_{i-1,j}^n + E_{i-1,j+1}^n + E_{i,j}^n + E_{i,j+1}^n) / 4$ .

Численную модель необходимо также дополнить граничными условиями. На внутренней границе расчетной области задается нулевой поток излучения  $F_{ra} = 0$ , что соответствует условию  $E_{1,j} = E_{2,j}$ , т. е. энергия, выходящая из текущей ячейки, полностью компенсируется энергией, приходящей из зеркальной относительно центра ячейки. На внешней границе предполагается, что излучение свободно покидает среду, т. е. поток излучения пропорционален произведению плотности энергии на скорость света:

$$-\frac{c\lambda}{\sigma_R} \left( \frac{E_{N,j} - E_{N-1,j}}{\Delta r_a} \right) = c(E_{N,j} - E_{cmb}), \quad (18)$$

где  $E_{cmb}$  — плотность энергии микроволнового фона с температурой 2.73 К.

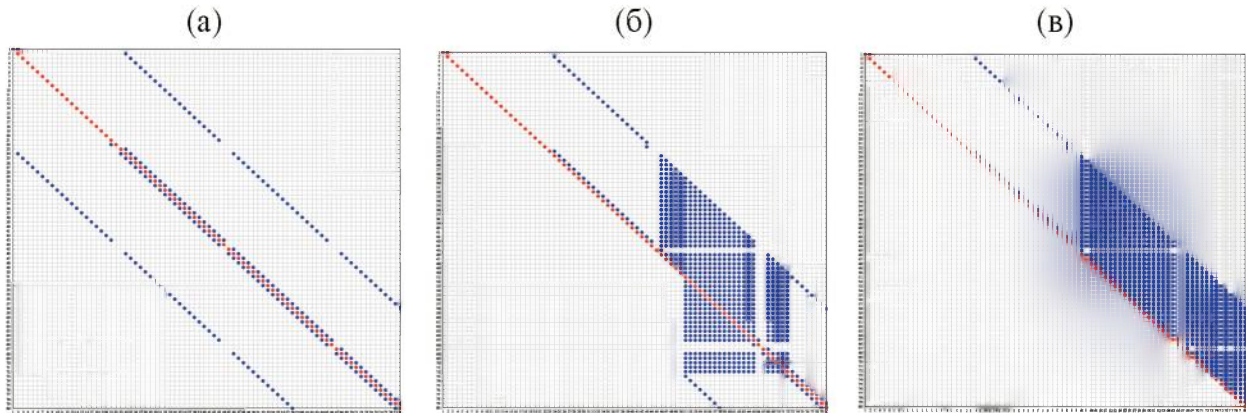
В конечном счете уравнение (14) можно переписать в следующем операторном виде:

$$\hat{\Omega} E = \mathbf{g}, \quad (19)$$

где  $\hat{\Omega} = \left( 1 + \frac{c_d}{c_d + c_r} \omega_p \Delta t \right) \hat{I} - \Delta t \hat{\Lambda}$ , и  $\hat{I}$  — единичный тензор. Уравнение (19) представляет собой компактную запись системы линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей, структура которой показана на левой панели рис. 3.

Решение данной системы уравнений проводится с помощью разработанной автором статьи модификации метода Гаусса. Основные идеи метода, реализованного в данной работе, состоят в следующем:

1. Как и в оригинальном методе Гаусса задача сводится к преобразованию исходной матрицы к верхнему треугольному виду.
2. При создании матрицы и в процессе ее преобразования используется компактная форма записи матрицы, т. е. хранятся только ненулевые элементы с указанием строки и столбца. Дополнительно используются динамические массивы строк и столбцов с указанием положения ненулевых элементов.



**Рис. 3.** Структура исходной матрицы СЛАН (слева), структура матрицы в процессе преобразования к верхнему треугольному виду (в центре) и структура финальной матрицы (справа). Показана верхняя левая часть матрицы размером  $80 \times 80$  элементов из полной матрицы  $1100 \times 1100$  элементов. Красными и синими точками показаны положительные и отрицательные элементы соответственно. На средней панели показана матрица после приведения первых 50 столбцов.

3. В процессе преобразования возникают новые ненулевые элементы, положение которых фиксируется в динамических массивах, описывающих компактную структуру матрицы.
4. В отличие от оригинального метода, где цикл исключения переменных в текущем столбце затрагивает последовательно все нижестоящие под диагональю строки матрицы, в данном алгоритме исключаются строки с заранее известными ненулевыми ведущими элементами.

Реализация данного алгоритма показала его устойчивость и хорошую точность для рассматриваемой задачи диффузии излучения. Пример преобразования матрицы размерностью  $1100 \times 1100$  элементов для системы уравнений (19) в задаче со 128 радиальными и 32 угловыми ячейками, показан на рис. 3. Расчет с помощью данного метода, реализованного на языке Фортран, оказался в десятки раз быстрее по сравнению с методом GMRES (generalized minimal residual method) [20], часто применяемом для данных задач и использованным нами ранее в работе [14]<sup>2</sup>. Так, обращение матрицы для сетки  $128 \times 32$  модифицированным методом Гаусса составило 0.023 секунд, методом GMRES (с нулевым начальным приближением) заняло 0.36 секунд на процессоре AMD Ryzen 5 с использованием компилятора gfortran (без дополнительных опций) в системе Linux Ubuntu 22.04. Для сетки  $200 \times 100$  эти времена составили 28 и 537 с соответственно. Стоит

отметить, что метод GMRES является итерационным и используется, как правило, при близком к решению начальном приближении (в качестве которого, например, можно выбрать решение с предыдущего временного шага), при этом время его сходимости существенно уменьшается. Тем не менее, расчет рассмотренных двумерных задач оказывается в несколько раз быстрее при использовании модифицированного метода Гаусса по сравнению с методом GMRES.

В данной работе для моделирования тепловой эволюции диска использована неоднородная дискретная сетка, сгущающаяся к центру в радиальном ( $r$ ) направлении и к экватору при разбиении по углу  $\theta$ , с разрешением 200 радиальных на 100 угловых ячеек.

#### 2.4. Физические параметры протопланетного диска

Моделирование тепловой структуры проводилось для диска вокруг центральной звезды с параметрами:  $M_* = 0.5 M_\odot$ ,  $L_* = 0.7 L_\odot$ ,  $T_* = 3800$  К. Распределение поверхностной плотности взято в виде:

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \left( \frac{R}{R_2} \right)^{-\gamma} \exp \left[ - \left( \frac{R}{R_2} \right)^{2-\gamma} \right] \exp \left[ - \left( \frac{R}{R_1} \right)^{\gamma-2} \right], \quad (20)$$

где  $R$  — расстояние от полярной оси,  $\gamma = 1$ , параметры  $R_1 = 10$  а. е. и  $R_2 = 70$  а. е. определяют сглаживание распределения к внутренней и к внешней границе диска, которые выбраны равными  $R_{\text{in}} = 0.5$  а. е. и  $R_{\text{out}} = 250$  а. е. соответственно. Отношение массы пыли к массе газа предполагалось однородным по диску и равным 0.01. В работе об-

<sup>2</sup> Использована реализация метода GMRES на языке Фортран, разработанная Джоном Буркардтом (John Burkardt): [https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/f77\\_src/mgmres/mgmres.html](https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/f77_src/mgmres/mgmres.html)

суждаются три модели. В модели M1 нормировка плотности  $\Sigma_0 = 0.053 \text{ г/см}^2$ , что соответствует сравнительно разреженному протопланетному диску с массой  $M_{\text{disk}} = 2.5 \times 10^{-4} M_{\odot}$ . В модели M1 пренебрегается рассеянием излучения, т. е. искусственно положено  $\kappa_v^{\text{sca}} = 0$ . В модели M2 по сравнению с моделью M1 рассеяние света учтено. В модели M3 параметр  $\Sigma_0 = 5.3 \text{ г/см}^2$ , т. е. диск в 100 раз более массивный ( $M_{\text{disk}} = 0.025 M_{\odot}$ ), чем в модели M1. В модели M3, как и в M1, рассеяние излучения не учитывается. Отметим, что параметры диска в модели M3 близки к протопланетной системе EX Lup в спокойном состоянии [21].

Двумерное распределение плотности (для M3 — см. левую верхнюю панель на рис. 4) рассчитывается из  $\Sigma(R)$ , предполагая, что диск находится в вертикальном гидростатическом равновесии при зафиксированном распределении температуры  $T(R) = 300(R/1 \text{ а.е.})^{-0.5} \text{ К}$ . Для изучения процесса тепловой релаксации начальное распределение температуры непосредственно для расчета переноса излучения бралось однородным с  $T = 2.73 \text{ К}$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

#### 3.1. Стационарное состояние

Проанализируем результаты расчета стационарной тепловой структуры с использованием метода FLD<sup>3</sup> на примере модели M3. На рис. 4 приведены результаты расчетов для данной модели на момент  $10^4$  лет, что многократно превышает время выхода на стационар (см. раздел 3.3). Как и следовало ожидать максимальная мощность нагрева диска звездным излучением  $S$  наблюдается в приповерхностных слоях. Из распределения альбеда,  $\omega = aT^4 / E$ , видно, что тепловое излучение в толще диска близко к термодинамическому равновесию со средой ( $E \approx aT^4$ ). В то же время в оболочке плотность энергии теплового излучения значительно ниже термодинамического значения ( $E \ll aT^4$ ). Морфология распределения ограничителя потока  $\lambda$  близка к морфологии распределения плотности. В толще диска  $\lambda \approx 1/3$ , что свидетельствует о том, что условия там близки к ЛТР. Распределение плотности лучистой энергии  $E$  на момент достижения стационарного состояния близко к сферически-симметричному, за исключением самых центральных областей. Диффузия теплового излучения эффективно перераспределяет энергию, а ее радиальный градиент в глобальном масштабе соответствует закону  $cE \propto L / (4\pi r^2)$ . В распределении температуры отчетливо выделяются две области: оболочка и внут-

ренность диска. Температура в диске существенно ниже температуры в оболочке. Распределение температуры в оболочке близко к сферически-симметричному. Внутри диска присутствует радиальный градиент температуры, в то время как вертикальный градиент не выражен.

#### 3.2. Сравнение результатов расчетов по методу FLD с результатами других методов

Естественным является вопрос насколько тепловая структура, вычисляемая в рамках представленной модели, согласуется с результатами других методов. Для ответа на него рассмотрим сравнение стационарных решений с двумя другими расчетами. В качестве эталонного был использован расчет с помощью программного комплекса NATALY, описанного в статье [22]. В основе NATALY лежит метод ускоренных  $\Lambda$ -итераций со случайным выбором лучей для вычисления средней интенсивности излучения. В NATALY используются коэффициенты поглощения и рассеяния, зависящие от частоты, т. е. исходные функции  $\kappa_v^{\text{abs}}$  и  $\kappa_v^{\text{sca}}$ . Достоинством кода NATALY является то, что он обеспечивает решение исходных уравнений переноса излучения без использования каких-либо физических приближений. Точность алгоритма NATALY контролируется условием сходимости  $\Lambda$ -итераций и шумом, связанным со случайным выбором лучей. Однако код NATALY ориентирован только на решение стационарных задач и является относительно медленным. Отметим также, что эталонное решение, полученное NATALY, было верифицировано путем успешного сравнения с результатами моделирования широко известным кодом RADMC-3D<sup>3</sup> [23].

Для дальнейшего обсуждения также выбран нестационарный метод расчета на основе приближения Эддингтона, использованный в работе [14]. Как было отмечено, этот метод реализуется в рамках описанного выше алгоритма при фиксировании значения  $\lambda = 1/3$ . Для обозначения этого метода будем использовать аббревиатуру EDD<sup>3</sup>.

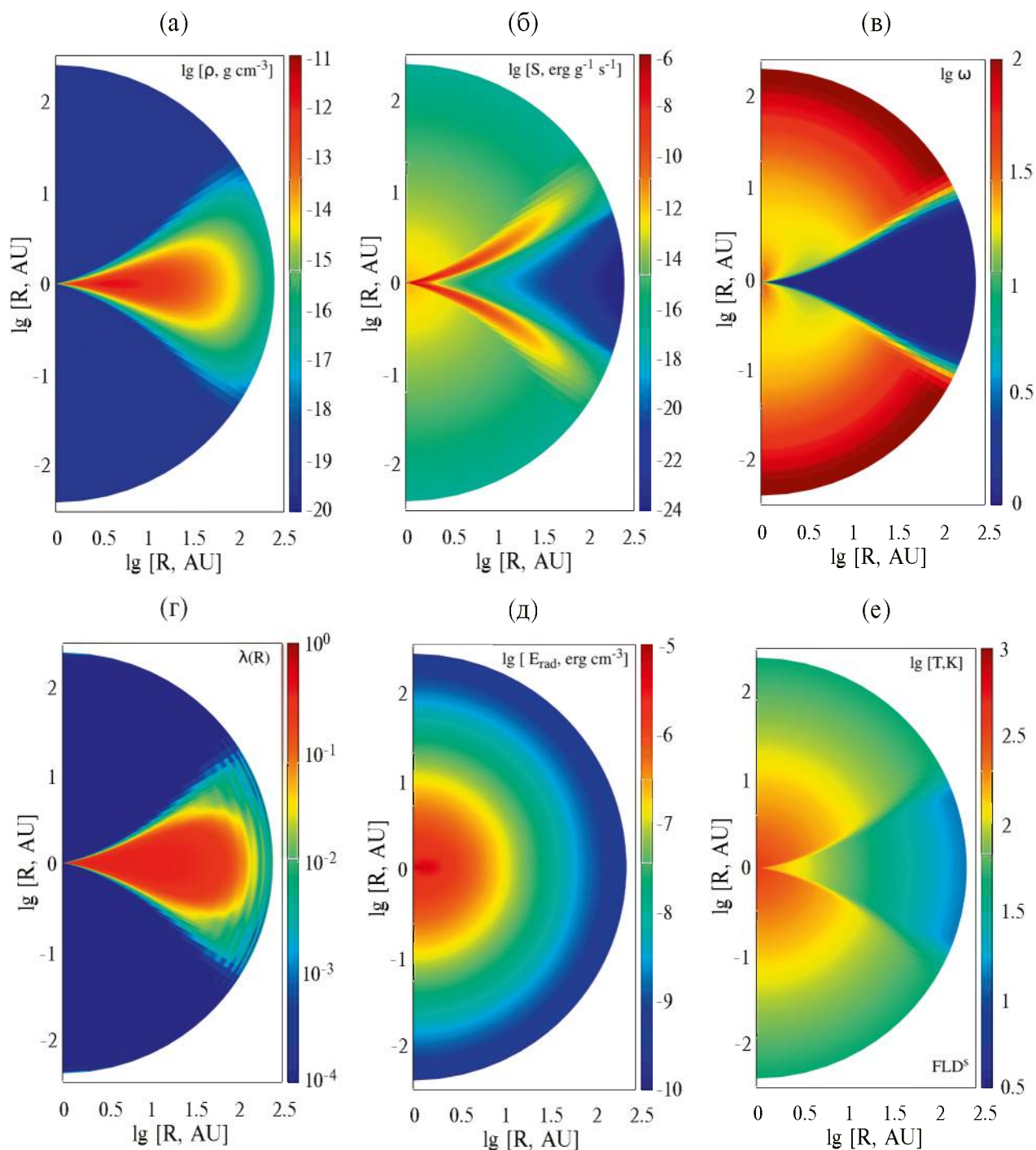
На рис. 5 для моделей M1, M2 и M3 приведены распределения температуры, полученные методами FLD<sup>3</sup>, NATALY и EDD<sup>3</sup>, вдоль полярной оси, вдоль радиального направления  $\theta = 75^\circ$  относительно полярной оси, вдоль экваториальной плоскости диска и вдоль вертикального направления на расстоянии  $R = 10 \text{ а.е.}$  от звезды. Распределения, полученные в рамках методов FLD<sup>3</sup> и EDD<sup>3</sup> соответствуют моменту  $10^4$  лет, при котором наблюдается стационар.

<sup>3</sup> <https://www.ita.uni-heidelberg.de/dullemond/software/radmc-3d/index.php>



Для случая M1 результаты моделирования с помощью метода  $\text{FLD}^S$  хорошо согласуются с результатами, полученными кодом NATALY для всех областей диска. Отметим, что на распределениях, полученных кодом NATALY, присутствуют мелкомасштабные пики, что связано со случайным конечным набором

лучей интегрирования уравнения переноса излучения для каждой ячейки. Сравнительно сильные пики проявляются, если в набор лучей попадает направление на локализованную горячую область. Данный шум можно уменьшить повышением числа лучей. Распределение температуры в экваториальной плос-

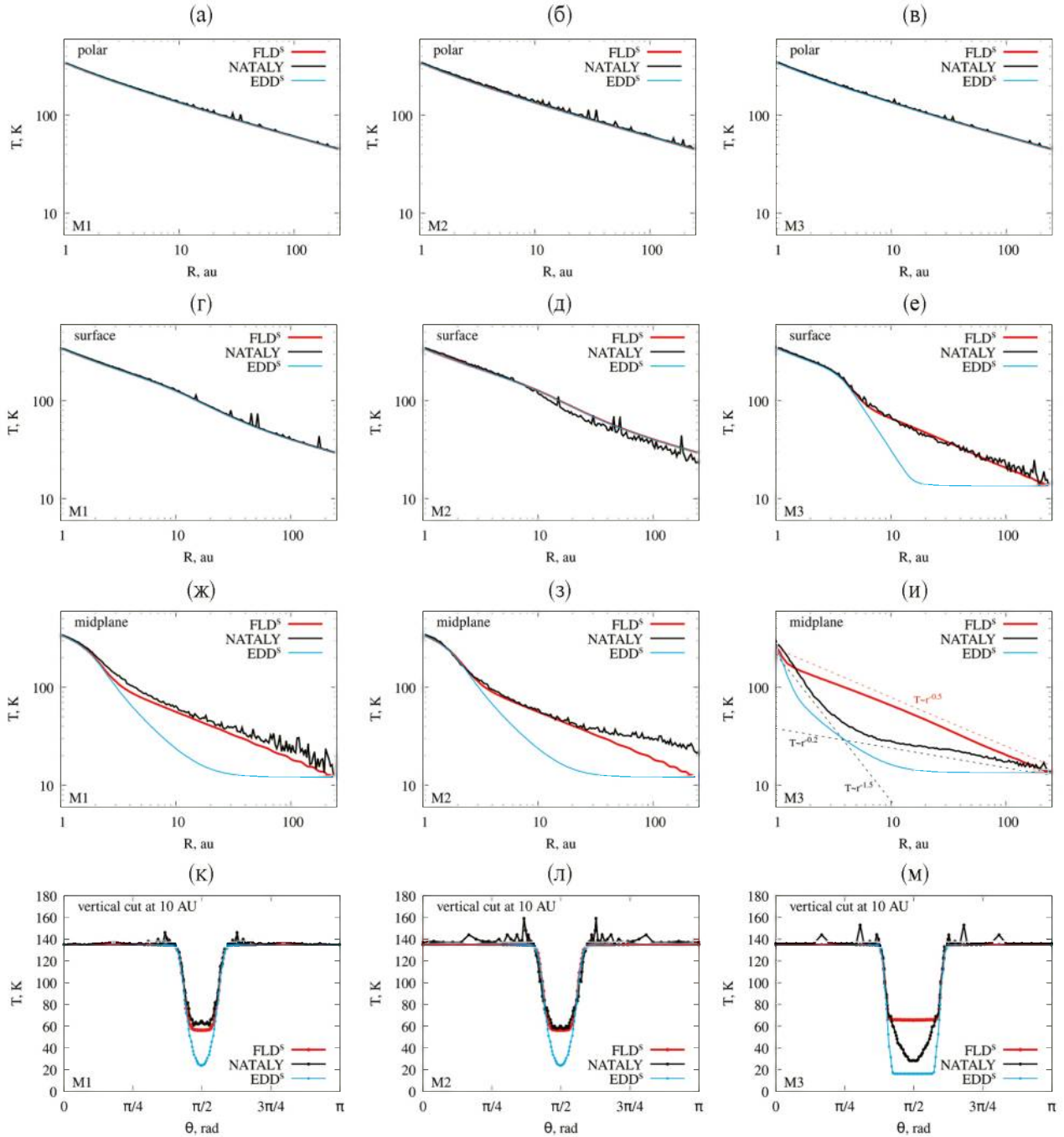


**Рис. 4.** Результаты расчетов стационарной тепловой структуры с использованием метода  $\text{FLD}^S$  для модели M3. На панелях показаны распределения плотности, мощности нагрева звездным излучением, альбедо, ограничителя потока, плотности лучистой энергии, температуры.



кости, полученное с помощью метода EDD<sup>S</sup> для M1, лежит значительно ниже эталонного и выходит на плато  $T = 14$  K за пределами 30 а. е., что не согласуется с морфологией эталонного распределения. Очевидно, что диффузия излучения в рамках эддингтоновского приближения слишком быстро выводит энергию из среды, приводя к нереалистично низкой температуре.

Для модели M2 между результатами FLD<sup>S</sup> и NATALY появляются различия в экваториальных температурах за радиусом 30 а. е. В эталонном расчете рассеяние звездного излучения в атмосфере диска приводит к дополнительному нагреву внутренности диска рассеянным излучением. Этот эффект не описывается уравнением (8), поэтому тем-



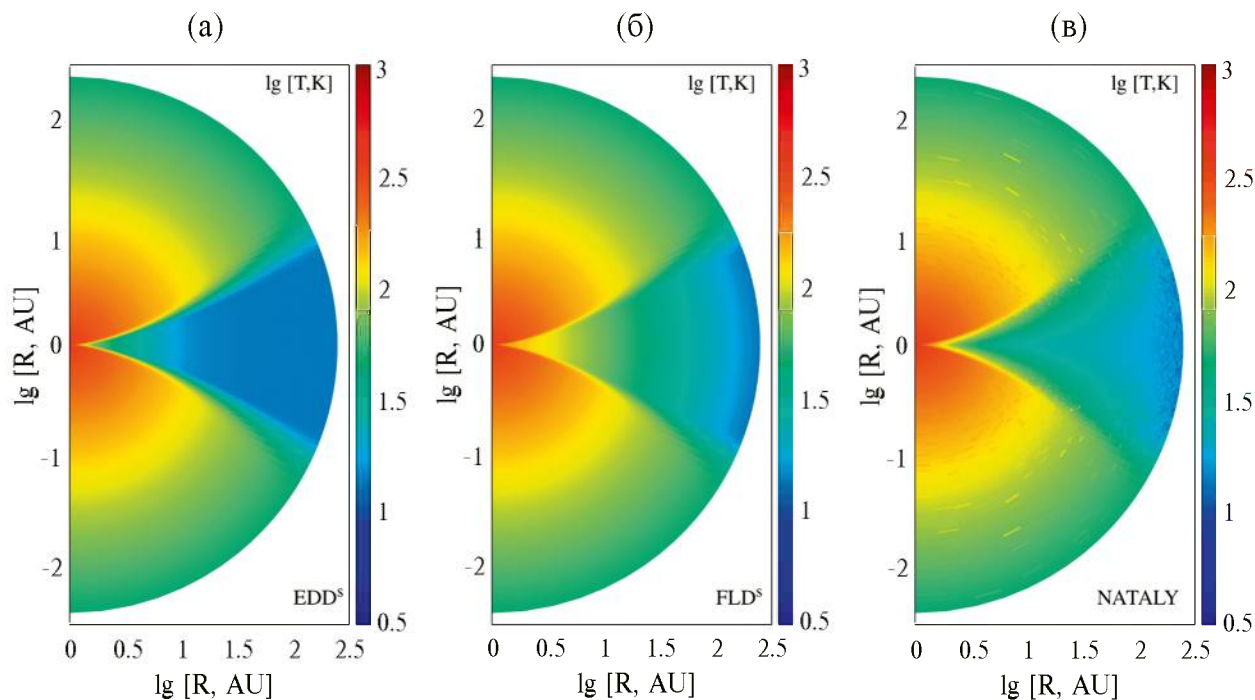
**Рис. 5.** Распределения температуры вдоль полярной оси (верхний ряд), вдоль радиального направления  $\theta = 75^\circ$  относительно полярной оси (второй ряд), вдоль экваториальной плоскости диска (третий ряд) и вдоль вертикального направления на расстоянии  $R = 10$  а. е. от звезды (последний ряд). В левом, среднем и правом столбцах представлены результаты для моделей M1, M2 и M3 соответственно.

пература в методе  $\text{FLD}^S$  получается ниже эталонной в экваториальной плоскости диска.

Для модели М3 все три метода обеспечивают одинаковое распределение температуры в оптически тонкой оболочке. Этот результат является закономерным, поскольку нагрев этой области обеспечивается прямым звездным излучением и во всех трех подходах рассчитывается единообразно, т. е. непосредственно путем интегрирования уравнения переноса излучения от звезды. В то же время охлаждение в оболочке происходит путем высвечивания теплового излучения в оптически тонком режиме, при котором детали его переноса не важны. Однако, в самом диске наблюдаются существенные отличия между температурами, полученными тремя методами. Видно, что метод  $\text{EDD}^S$  не воспроизводит профиль температуры ни вдоль направления  $\theta = 75^\circ$ , ни вдоль экваториальной плоскости. В то же время метод  $\text{FLD}^S$  корректно описывает распределение температуры в приповерхностных слоях (вдоль направления  $\theta = 75^\circ$ ), но не воспроизводит эталонный профиль экваториальной температуры. Наклон профиля экваториальной температуры  $T \propto r^p$  для  $\text{FLD}^S$  близок к показателю степени  $p = -0.5$ , в то время как эталонный профиль NATALY имеет показатель  $p \approx -1.5$  внутри 4 а. е. и  $p \approx -0.2$  за 4 а. е.

На рис. 6 отдельно показаны двумерные распределения температуры, полученные рассматриваемыми методами для модели М3. Из рис. 6 видно, что в эталонном распределении внутри диска присутствует вертикальный градиент температуры, который не воспроизводится методом  $\text{FLD}^S$ . Это может показаться странным, ведь метод FLD известен тем, что асимптотически верно описывает перенос излучения в оптически толстых и оптически тонких средах. Причина несоответствия результатов в том, что метод FLD все же является диффузионным по своей природе и не обеспечивает сохранение информации о геометрии поля излучения в многомерных анизотропных задачах [24].

Отметим, что благодаря прогрессу в области наблюдений протопланетных дисков, связанным прежде всего с работой интерферометра ALMA, стало возможным получать достаточно детальную информацию о тепловой структуре протопланетных дисков (см., напр., [25, 26, 27, 28]). Однако, несмотря на близкие количественные оценки температур, параметры законов распределения температуры в работах различных авторов пока не полностью согласуются друг с другом. Так, в статье [27] на основе анализа спектральных карт излучения CO от протопланетного диска HD 163296 восстановлена экваториальная температура



**Рис. 6.** Результаты моделирования тепловой структуры диска для расчета модели М3 на основе приближения Эддингтона  $\text{EDD}^S$  (слева), FLD-приближения  $\text{FLD}^S$  (средняя панель) и с помощью кода NATALY (справа).

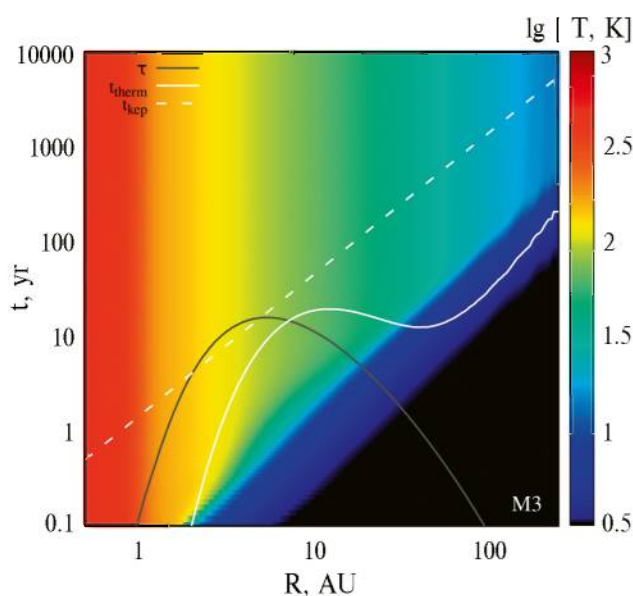
$T \approx 21.8 \times (r / 150 \text{ а. е.})^{-0.278}$  К во внешних областях диска ( $r > 50$  а. е.), в то время как в работе [28] получен закон  $T \approx 18.7 \times (r / 400 \text{ а. е.})^{-0.14}$  К. Тем не менее, получаемые при наблюдениях оценки температур уже накладывают существенные требования на точность используемых для расчетов тепловой структуры методов.

### 3.3. Релаксация к стационарному состоянию

Рассмотрим процесс релаксации распределения температуры к стационарному состоянию из начального состояния с однородной температурой 2.73 К. На рис. 7 приведена эволюция распределения температуры в экваториальной плоскости диска для модели M3 на базе метода FLD<sup>S</sup>.

Видно, что для рассмотренной модели быстрее к тепловому равновесию приходят внутренние области диска. Внешний край диска достигает стационара за  $t \approx 500$  лет. Сравним эту картину с теоретическими оценками. В работе [29] приведен вывод функции охлаждения диска  $\Lambda_{\text{IR}}$  за счет высвечивания теплового излучения в вертикальном направлении:

$$\Lambda_{\text{IR}} = \frac{4\tau_{\text{P}} \sigma_{\text{SB}} T_{\text{mid}}^4}{1 + 2\tau_{\text{P}} \left(1 + \frac{3}{4}\tau_{\text{R}}\right)}, \quad (21)$$



**Рис. 7.** Эволюция распределения температуры в экваториальной плоскости диска в расчете для модели M3 с помощью метода FLD<sup>S</sup>. Распределение оптической толщины  $\tau(r)$  показано серой линией. Радиальные зависимости характерного теплового  $t_{\text{therm}}(r)$  и динамического  $t_{\text{dyn}}(r)$  времен показаны сплошной белой и штриховой белой линиями соответственно.

где  $\tau_{\text{P}}$  и  $\tau_{\text{R}}$  — планковская и росселандовская оптические толщины диска в вертикальном направлении,  $T_{\text{mid}}$  — экваториальная температура,  $\sigma_{\text{SB}}$  — постоянная Стефана-Больцмана. Характерное тепловое время  $t_{\text{therm}}$  можно получить, рассматривая уравнение для охлаждения диска:  $c_v \sum \frac{dT}{dt} = -\Lambda_{\text{IR}}$ , где  $c_v$  — удельная теплоемкость. Переходя к алгебраическому аналогу этого уравнения, можно получить:

$$t_{\text{therm}} = \frac{c_v}{4\kappa_{\text{P}} \sigma_{\text{SB}} T^3} \left(1 + 2\tau + \frac{3}{2}\tau^2\right), \quad (22)$$

где было учтено, что  $\tau_{\text{R}} \approx \tau_{\text{P}} \equiv \tau = \Sigma \kappa_{\text{P}}$ .

На рис. 7 приведены графики  $\tau(R)$  и  $t_{\text{therm}}(R)$ , полученные с использованием финального (стационарного) распределения температуры. Максимальная оптическая толщина диска к собственному тепловому излучению составляет  $\tau \approx 20$  и достигается на  $r = 6$  а. е. Диск становится оптически тонким за пределами 50 а. е. Профиль характерного времени  $t_{\text{therm}}(R)$  имеет локальный максимум в районе 10 а. е., а после 50 а. е. монотонно возрастает. С учетом того, что формула (22) получена без учета диффузии излучения в радиальном направлении, можно утверждать, что в целом характерная тепловая шкала эволюции диска в рамках FLD моделирования согласуется с аналитическими оценками.

На рис. 7 приведена также зависимость орбитального периода от расстояния (характерное динамическое время). Видно, что для данных параметров диска характерное тепловое время значительно короче динамического для всех областей, за исключением окрестности 10 а. е., где эти времена сопоставимы. Поэтому для расчета динамики такого диска стационарное приближение для тепловой модели может быть оправдано. Отметим, однако, что тепловое время пропорционально квадрату поверхностной плотности (см. уравнение (22)), поэтому для более массивного диска характерные тепловые времена могут уже превышать динамические, что делает востребованным использование нестационарных тепловых моделей. Нестационарная тепловая модель необходима также для моделирования реакции диска на вспышечные (аккреционные) явления, когда продолжительность вспышки короче динамического времени для внешних областей диска.



## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье подробно описан метод  $\text{FLD}^S$  для расчета тепловой структуры протопланетного диска в нестационарных задачах с аксиальной симметрией. В его основе лежит разделение поля излучения на звездное и собственное излучение диска — тепловое. Нагрев звездным излучением рассчитывается прямым методом трассировки, а для описания теплового излучения используется диффузионное приближение с ограничителем потока (реализация метода  $\text{FLD}$ ). Неявная конечно-разностная схема для уравнения диффузии теплового излучения приводит к системе линейных алгебраических уравнений, для решения которой в работе предложен модифицированный метод Гаусса, позволяющий в десятки раз ускорить обращение исходной матрицы СЛАУ. Основным приложением тепловой модели представляется ее использование в гидродинамических моделях эволюции протопланетных дисков, а также для расчета тепловой эволюции (отклика) диска при вспышках аккреции.

Результаты сравнения стационарных распределений температуры, полученных методом  $\text{FLD}^S$  и методом ускоренных  $\Lambda$ -итераций (используемым в качестве эталона) для параметров диска EX Lup, показали, что метод  $\text{FLD}^S$  корректно воспроизводит температуру в верхних и приповерхностных слоях диска, но завышает температуру в экваториальной плоскости диска (в 1.5–2 раза для модели EX Lup). Также необходимо отметить, что в рамках метода  $\text{FLD}^S$  распределение температуры в толще диска (т. е. в оптически толстой к звездному излучению области) близко к изотермическому в вертикальном направлении, что не согласуется с результатами более точных методов. Эти особенности необходимо учитывать при моделировании конкретных физических процессов в диске с помощью приближения  $\text{FLD}^S$ . В случае, если эти особенности критичны для рассматриваемой задачи, необходимо использовать более точные методы, такие как метод переменного тензора Эддингтона (см., напр., [24]) или метод M1 замыкания моментов (см., напр., [30]). В статье также продемонстрировано, что тепловая структура диска при использовании метода  $\text{FLD}^S$  эволюционирует в соответствии с аналитическими оценками для характерного теплового времени, что принципиально важно для нестационарных задач.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-72-10029<sup>4</sup>.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания и предложения по улучшению статьи, а также В.В. Акимкину и Л.Н. Цвикки за помощь в тестировании и сравнении методов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *P. J. Armitage*, arXiv:1509.06382 [astro-ph.SR] (2015).
2. *G. Lesur, M. Flock, B. Ercolano, M. Lin, et al.*, in *Protostars and Planets VII*, Proc. of a conference held 10–15 April 2023 at Kyoto, Japan; edited by S. Inutsuka, Y. Aikawa, T. Muto, K. Tomida, and M. Tamura, ASP Conf. Ser. 534, 465 (2023).
3. *P. D'Alessio, J. Canto, N. Calvet, and S. Lizano*, 500(1), 411 (1998), arXiv:astro-ph/9806060.
4. *S. A. Balbus and J. F. Hawley*, Rev. Modern Physics 70(1), 1 (1998).
5. *A. M. Skliarevskii, Ya. N. Pavlyuchenkov, and E. I. Vorobyov*, Astron. Rep. 65(3), 170 (2021), arXiv:2104.10787 [astro-ph.EP].
6. *K. Kratter and G. Lodato*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 54, 271 (2016), arXiv:1603.01280 [astro-ph.SR].
7. *P. Woitke, I. Kamp, and W. F. Thi*, Astron. and Astrophys. 501(1), 383 (2009), arXiv:0904.0334 [astro-ph.EP].
8. *R. Teyssier and B. Commerçon*, Frontiers in Astron. and Space Sci. 6, id. 51 (2019), arXiv:1907.08542 [astro-ph.IM].
9. *R. Wünsch*, Frontiers in Astron. and Space Sci. 11, id. 1346812 (2024), arXiv:2403.05410 [astro-ph.IM].
10. *C. D. Levermore and G. C. Pomraning*, 248(1), 321 (1981).
11. *W. Kley, B. Bitsch, and H. Klahr*, Astron. and Astrophys. 506(2), 971 (2009), arXiv:0908.1863 [astro-ph.EP].
12. *R. Kuiper, H. W. Yorke, and N. J. Turner*, 800(2), id. 86 (2015), arXiv:1412.6528 [astro-ph.SR].
13. *Y.-N. Lee, S. Charnoz, and P. Hennebelle*, Astron. and Astrophys. 648, id. A101 (2021), arXiv:2102.07963 [astro-ph.EP].
14. *Y. N. Pavlyuchenkov, L. A. Maksimova, and V. V. Akimkin*, Astron. Rep. 66(9), 800 (2022), arXiv:2211.04896 [astro-ph.EP].
15. *R. Kuiper, H. Klahr, C. Dullemond, W. Kley, and T. Henning*, Astron. and Astrophys. 511, id. A81 (2010), arXiv:1001.3301 [astro-ph.SR].

<sup>4</sup> <https://rscf.ru/project/22-72-10029/>



16. *M. Flock, S. Fromang, M. González, and B. Commerçon*, *Astron. and Astrophys.* 560, id. A43 (2013), arXiv:1310.5865 [astro-ph.EP].
17. *J. S. Mathis, W. Rumpl, and K. H. Nordsieck*, 217, 425 (1977).
18. *L. Testi, T. Birnstiel, L. Ricci, S. Andrews, et al.*, in *Protostars and Planets VI*, edited by H. Beuther, R. S. Klessen, C. P. Dullemond, and T. Henning (Tucson: University of Arizona Press, 2014), pp. 339, arXiv:1402.1354 [astro-ph.SR].
19. *S. M. Andrews*, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 58, 483 (2020), arXiv:2001.05007 [astro-ph.EP].
20. *Y. Saad and M. H. Schultz*, *SIAM J. Sci. and Stat. Comp.* 7(3), 856 (1986). [://doi.org/10.1137/0907058](https://doi.org/10.1137/0907058).
21. *Á. Kóspál, P. Ábrahám, T. Csengeri, U. Gorti, et al.*, *Astrophys. J. Letters* 821(1), id. L4 (2016), arXiv:1603.02855 [astro-ph.SR].
22. *Y. N. Pavlyuchenkov, D. S. Wiebe, V. V. Akimkin, M. S. Khramtsova, and T. Henning*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 421(3), 2430 (2012), arXiv:1201.0642 [astro-ph.GA].
23. *C. P. Dullemond, A. Juhasz, A. Pohl, F. Sereshti, R. Shetty, T. Peters, B. Commerçon, and M. Flock*, *RADM3D: A multi-purpose radiative transfer tool*, *Astrophysics Source Code Library*, record ascl:1202.015 (2012).
24. *J. C. Hayes and M. L. Norman*, *Astrophys. J. Supp.* 147(1), 197 (2003), arXiv:astro-ph/0207260.
25. *K. M. Flaherty, A. M. Hughes, K. A. Rosenfeld, S. M. Andrews, E. Chiang, J. B. Simon, S. Kerzner, and D. J. Wilner*, *Astrophys. J.* 813(2), id. 99 (2015), arXiv:1510.01375 [astro-ph.SR].
26. *C. Pinte, F. Ménard, G. Duchêne, T. Hill, et al.*, *Astron. and Astrophys.* 609, id. A47 (2018), arXiv:1710.06450 [astro-ph.SR].
27. *A. Isella, J. Huang, S. M. Andrews, C. P. Dullemond, et al.*, *Astrophys. J. Letters* 869(2), id. L49 (2018), arXiv:1812.04047 [astro-ph.SR].
28. *C. P. Dullemond, A. Isella, S. M. Andrews, I. Skobleva, and N. Dzyurkevich*, *Astron. and Astrophys.* 633, id. A137 (2020), arXiv:1911.12434 [astro-ph.EP].
29. *Y. N. Pavlyuchenkov, V. V. Akimkin, A. P. Topchieva, and E. I. Vorobyov*, *Astron. Rep.* 67(5), 470 (2023), arXiv:2307.15544 [astro-ph.EP].
30. *J. D. Melon Fuksman, H. Klahr, M. Flock, and A. Mignone*, 906(2), id. 78 (2021), arXiv:2005.01785 [astro-ph.EP].

## DETAILS OF MODELLING THE NON-STATIONARY THERMAL STRUCTURE OF AN AXIALLY SYMMETRIC PROTOPLANETARY DISK

Ya. N. Pavlyuchenkov<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Astronomy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

\*E-mail: pavyar@inasan.ru

The paper provides a model for simulating the non-stationary thermal structure of protoplanetary disk in axial symmetry. The model is based on the widely used approach of splitting the radiation field into stellar and intrinsic thermal radiation of the medium. The heating by stellar radiation is calculated by the ray tracing method, while the well-known diffusion approximation with a flux limiter (FLD approach) is used to treat the thermal radiation. To solve the resulting system of linear equations, a modification to Gauss method is proposed, which allows to speed up the calculations by a factor of ten compared to the widely adopted GMRES method. This model has been used to calculate the steady-state thermal structure of two disks, including those with the parameters of the EX Lup system. A detailed analysis of the simulation results has been performed. Comparison with the results of more accurate methods has allowed to identify the main shortcomings of the model related to the ignoring of light scattering and to the diffusion nature of the FLD approximation. It is shown that the disk thermal structure calculated with the FLD approximation evolves according to analytical estimates of the characteristic thermal time.

**Keywords:** protoplanetary disks, radiative transfer, numerical simulations