

© 2023 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОСЛАБЛЕНИЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ПРОЦЕДУРЫ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ И СМЕШИВАНИЯ¹

Предлагается обобщение процедуры динамического расширения и смешивания, которое в отличие от базовой процедуры, во-первых, гарантирует убывание ошибки идентификации неизвестных параметров при выполнении условия частичного конечного возбуждения регрессора, а во-вторых, при частичном исчезающем возбуждении регрессора с рангом не менее единицы обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю ошибки слежения за регрессионной функцией.

Ключевые слова: идентификация, линейная регрессия, конечное возбуждение, частичное возбуждение, параметрическая ошибка, сходимость, ограниченность, монотонность, сингулярное разложение.

DOI: 10.31857/S0005231023010026, EDN: LUAPNM

1. Введение

За последние годы в отечественной и зарубежной литературе по адаптивному управлению и теории идентификации было опубликовано более сотни работ (см. библиографию цитируемой литературы и обзор [1]), посвященных улучшению идентификации неизвестных постоянных параметров линейных регрессионных уравнений как с точки зрения показателей качества переходных процессов, так и с точки зрения условий, необходимых для сходимости оценок к истинным значениям. Значительная часть из этих работ основана на использовании процедуры динамического расширения и смешивания регрессора (Dynamic Regression Extension and Mixing — DREM) [2] и ее аналогов (интегральной модификации I-DREM [3], процедур генерации нового скалярного возбужденного регрессора G+D и D+G [4, 5], скалярных контуров оценки со сходимостью за конечное время [6] и пр.).

Базовая процедура DREM [2] состоит из этапов расширения и смешивания регрессора. На первом этапе исходная линейная по параметрам регрессия, как правило с векторным регрессором, с помощью устойчивых динамических операторов и специальных схем расширения [1, 7, 8] преобразуется к

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МД.1787.2022.4).

расширенной регрессии с матричным квадратным регрессором. На втором этапе полученное уравнение путем домножения на союзную матрицу расширенного регрессора преобразуется к набору скалярных уравнений с общим скалярным регрессором.

В отличие от хорошо известного стандартного градиентного идентификатора [9] процедура DREM [2], во-первых, позволяет ввести набор скалярных законов оценки, в которых существует возможность за счет регулирования скалярных коэффициентов усиления повышать быстродействие и точность идентификации каждого оцениваемого параметра в отдельности, а во-вторых, ослабляет требование постоянного возбуждения регрессора и гарантирует асимптотическую сходимость оценок к истинным значениям, если скалярный регрессор неинтегрируем с квадратом. Модифицированные аналоги DREM [3–6], в свою очередь, ослабляют данное условие и обеспечивают экспоненциальную или финитную сходимость параметрической ошибки к нулю при условии конечного или начального возбуждения регрессора.

Однако, как было аналитически доказано и экспериментально продемонстрировано в [7, 8], условие конечного возбуждения регрессора для DREM подобных процедур [2–6] необходимо для получения невырожденного скалярного регрессора, а поэтому является не только условием сходимости, но и условием реализуемости. При невыполнении этого требования в схемах [2–6] невозможно убывание ошибки оценки неизвестных параметров, также как и ошибки слежения настраиваемой моделью за регрессионной функцией. В то же время классический градиентный идентификатор [9] даже при невыполнении условия конечного возбуждения обеспечивает убывание ошибки идентификации неизвестных параметров и асимптотическую сходимость ошибки слежения, что в сравнении с этим подходом существенно снижает область применимости DREM подобных процедур [2–6].

Вообще говоря, условие конечного возбуждения регрессора является достаточно слабым требованием [10] и не выполняется в двух основных ситуациях: 1) хотя бы один элемент регрессора тождественно равен нулю; 2) существует линейная зависимость между составляющими регрессора [5].

В [10] доказано, что вектор состояний стационарного объекта в форме Фробениуса возбужден конечно на начальном интервале времени, если задающее воздействие недифференцируемо хотя бы в одной точке из интервала, что выполняется, например, если задающее воздействие описывается функцией Хевисайда. Однако практический опыт показывает существование для каждой конкретной задачи идентификации и каждой конкретной параметризации собственных требований, необходимых для конечного возбуждения регрессора. В настоящее время не предложено обобщенных общепринятых формализованных критериев, позволяющих априорно верифицировать конечное возбуждение регрессора в произвольной параметризации. Поэтому в задачах идентификации и адаптивного управления необходимо использовать процедуры и алгоритмы идентификации, способные гарантировать убывание

ошибки оценки неизвестных параметров и сходимость ошибки слежения при отсутствии конечного возбуждения регрессора, что, в частности, мотивирует разработку модифицированной процедуры динамического расширения и смешивания с ослабленным условием реализуемости.

Таким ослабленным требованием может выступать, например, частичное конечное возбуждение регрессора, которое в отличие от условия конечного возбуждения выполняется, пока хотя бы один из элементов регрессора отличен от нуля, даже при линейной зависимости между всеми элементами регрессора [11].

На сегодняшний день в известной авторам литературе предложено два основных подхода [12–14], ослабляющих условие реализуемости базовой процедуры DREM до требования частичного конечного возбуждения.

В [12] предложено использовать закон идентификации с переключением, в котором при выполнении условия конечного возбуждения используется I-DREM закон идентификации, а при выполнении условия частичного конечного возбуждения — стандартный градиентный закон. Во втором случае этот подход обеспечивает качество идентификации неизвестных параметров, соответствующее стандартному градиентному идентификатору, что и является его основным недостатком. В [13, 14] на основе модифицированного процесса Грамма–Шмидта предложен и развит алгоритм удаления линейно зависимых строк и столбцов из матрицы расширенного регрессора, позволяющий при известной аналитической зависимости неизвестных параметров привести задачу идентификации неизвестных параметров к задаче численного решения систем алгебраических уравнений. Однако вызывает определенные сомнения возможность решения данных уравнений для независимых неизвестных параметров и, следовательно, расширения на общий случай результата, полученного в [13, 14].

Таким образом, проблема ослабления условия реализуемости базовой процедуры динамического расширения и смешивания является актуальной и на сегодняшний день не имеет эффективных решений. Поэтому в этой работе предлагается ослабить условие реализуемости процедуры DREM, дополнив ее новым этапом регуляризации расширенного регрессора.

Целью этапа регуляризации является, во-первых, проверка условий, необходимых и достаточных для генерации скалярного невырожденного регрессора, а во-вторых, виртуальное изменение матрицы расширенного регрессора при их невыполнении. Говоря более детально, на этапе регуляризации предлагается выполнить собственное разложение расширенного регрессора, полученного фильтрацией Крейссельмейера [1], что в силу его симметричности и положительной полуопределенности позволяет:

- верифицировать выполнение условия конечного возбуждения расширенного регрессора по его собственным числам;
- подменить, следуя методу гребневой регрессии [15, 16], нулевые собственные числа регрессора на произвольные постоянные.

Смешивание модифицированного расширенного регрессора, полученного после регуляризации, при выполнении условия частичного конечного возбуждения позволяет получить новую регрессию с невырожденным на интервале частичного конечного возбуждения скалярным регрессором, что без использования регуляризации было невозможно. В работе показано, что закон идентификации, построенный по такой регрессии, при выполнении условия конечного возбуждения совпадает с DREM законом идентификации и, дополнительно, при выполнении необходимого условия частичного конечного возбуждения и ряда достаточных условий обеспечивает убывание ошибок идентификации и слежения.

Основным результатом работы является процедура динамического расширения, регуляризации и смешивания регрессора, ослабляющая условие реализуемости базовой процедуры динамического расширения и смешивания.

Основные определения

Введем основные определения из [3, 9–11, 17], которые будут аксиоматически использованы при постановке задачи и формулировании основного результата.

О п р е д е л е н и е 1. Регрессор $\bar{\varphi}(t) \in R^n$ возбуждается постоянно ($\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$), если для любого $t \geq t_0 \geq 0$ существуют $T > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что верно неравенство

$$(1.1) \quad \lambda_{\min} \left\{ \int_t^{t+T} \bar{\varphi}(\tau) \bar{\varphi}^T(\tau) d\tau \right\} \geq \alpha,$$

где $\alpha > 0$ — степень возбуждения, $\lambda_{\min} \{ \cdot \}$ — оператор, возвращающий минимальное собственное число матрицы.

О п р е д е л е н и е 2. Регрессор $\bar{\varphi}(t) \in R^n$ возбуждается конечно ($\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$) на интервале $[t_r^+; t_e] \subset [t_0; \infty)$, если существуют $t_e > t_r^+ \geq t_0 \geq 0$ и $\alpha > 0$ такие, что верно неравенство

$$(1.2) \quad \lambda_{\min} \left\{ \int_{t_r^+}^{t_e} \bar{\varphi}(\tau) \bar{\varphi}^T(\tau) d\tau \right\} \geq \alpha.$$

О п р е д е л е н и е 3. Регрессор $\bar{\varphi}(t) \in R^n$ возбуждается постоянно и частично ($\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$) с постоянным рангом $0 < r < n$, если для любого $t > t_0 \geq 0$ существуют $T > 0$ и $0 < \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha}$ такие, что $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ верно неравенство

$$(1.3) \quad \underline{\alpha} \leq \lambda_i \left\{ \int_t^{t+T} \bar{\varphi}(\tau) \bar{\varphi}^T(\tau) d\tau \right\} \leq \bar{\alpha},$$

где $0 < \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha}$ — степень частичного возбуждения.

Определение 4. Регрессор $\bar{\varphi}(t) \in R^n$ возбуждается конечно и частично ($\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$) с постоянным рангом $0 < r < n$ на интервале $[t_r^+; t_e] \subset [t_0; \infty)$, если существуют $t_e > t_r^+ \geq 0$ и $0 < \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha}$ такие, что $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ верно неравенство

$$(1.4) \quad \underline{\alpha} \leq \lambda_i \left\{ \int_{t_r^+}^{t_e} \bar{\varphi}(\tau) \bar{\varphi}^T(\tau) d\tau \right\} \leq \bar{\alpha}.$$

Соотношения между введенными пространствами возбуждения регрессора задаются следующим образом:

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{\varphi}(t) \in \text{FE} \\ \bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}.$$

Требования (1.1) и (1.2) накладывают ограничения на все собственные числа матрицы Грамма, а требования (1.3) и (1.4) — только на часть из них. Поэтому условие $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ является наиболее слабым и в предельном случае выполняется с $r = 1$, если хотя бы один элемент $\bar{\varphi}(t)$ отличен от нуля на интервале $[t_r^+; t_e] \subset [t_0; \infty)$.

Важную роль в современной теории идентификации выполняет фильтрация Крейссельмейера, позволяющая преобразовать векторный регрессор $\bar{\varphi}(t) \in R^n$ в матричный $\varphi(t) \in R^{n \times n}$ с сохранением возбуждения регрессора:

$$(1.5) \quad \forall t \geq t_0 \quad \dot{\varphi}(t) = -l\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)\bar{\varphi}^T(t), \quad \varphi(t_0) = 0_{n \times n},$$

где $l > 0$ — параметр фильтра Крейссельмейера.

Выпишем из [8, 11] свойства матричного регрессора $\varphi(t) \in R^{n \times n}$ в зависимости от выполнения условий (1.1)–(1.4) для $\bar{\varphi}(t) \in R^n$.

Следствие 1. $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \lambda_{\min}(t) > \mu$.

Следствие 2. $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE} \Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e] \quad \lambda_{\min}(t) > \mu$.

Следствие 3. $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad \lambda_i(t) > \mu$.

Следствие 4. $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE} \Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e] \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad \lambda_i(t) > \mu$.

Здесь $k \geq 1$ — положительное целое число, $\mu > 0$ — оценка снизу на собственное число, $\lambda_i(t)$ — i -е собственное число регрессора $\varphi(t)$, $\lambda_{\min}(t) = \min_{1 \leq i \leq n-\bar{r}} \lambda_i(t)$ — минимальное отличное от нуля собственное число регрессора $\varphi(t)$, $\bar{r} = n - r$ — ранговый дефицит.

Доказательство следствий 1 и 2 приводится соответственно в [8, 11], а доказательство следствий 3 и 4 может быть получено аналогично.

На основании определения собственного разложения положительно полуопределенной постоянной матрицы из [17] введем определение собственного разложения динамического регрессора $\varphi(t) \in R^{n \times n}$.

Определение 5. Собственное разложение регрессора $\varphi(t) \in R^{n \times n}$ переменного ранга $r(t) \leq n$ задается следующим произведением:

$$\begin{aligned}
 V^T(t)\varphi(t)V(t) &= \begin{bmatrix} V_1^T(t) \\ V_2^T(t) \end{bmatrix} \varphi(t) \begin{bmatrix} V_1(t) & V_2(t) \end{bmatrix} = \\
 (1.6) \quad &= \Lambda(t) = \begin{bmatrix} \Lambda_1(t) & 0_{r(t) \times \bar{r}(t)} \\ 0_{\bar{r}(t) \times r(t)} & 0_{\bar{r}(t)} \end{bmatrix}, \\
 \Lambda_1(t) &\in R^{r(t) \times r(t)} = \text{diag} \{ \lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_{r(t)}(t) \},
 \end{aligned}$$

где $V_1(t) \in R^{n \times r(t)}$ — переменный ортонормальный базис для собственного пространства $\varphi(t)$, $V_2(t) \in R^{n \times \bar{r}(t)}$ — переменный ортонормальный базис для нуль пространства $\varphi(t)$, $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq \dots \geq \lambda_{r(t)}(t) > 0$ — ненулевые собственные числа $\varphi(t)$, $0_{\bar{r}(t)} \in R^{\bar{r}(t) \times \bar{r}(t)}$ — нулевая матрица, $0_{\bar{r}(t) \times r(t)} \in R^{\bar{r}(t) \times r(t)}$, $0_{r(t) \times \bar{r}(t)} \in R^{r(t) \times \bar{r}(t)}$ — нулевые матрицы соответствующих размерностей.

2. Постановка задачи

Рассмотрим классическую задачу идентификации постоянных параметров линейного регрессионного уравнения:

$$(2.1) \quad \forall t \geq t_0 \quad z(t) = \bar{\varphi}^T(t)\theta,$$

где $\bar{\varphi}(t) \in R^n$, $z(t) \in R$ — измеримые регрессор и функция, $\theta \in R^n$ — неизвестные постоянные ($\dot{\theta} \equiv 0$), ограниченные ($\|\theta\| \leq \theta_{\max}$) параметры.

Будем предполагать выполнение для $\bar{\varphi}(t)$ следующего допущения.

Допущение 1. Регрессор $\bar{\varphi}(t)$ ограничен: $\|\bar{\varphi}(t)\| \leq \bar{\varphi}_{\max}$.

Требование допущения 1 для общего случая возможно выполнить, домножив (2.1) на $n_s = \frac{1}{1 + \bar{\varphi}^T(t)\bar{\varphi}(t)}$.

Необходимо построить закон формирования оценок $\hat{\theta}(t) \in R^n$, обеспечивающий при $\bar{\varphi}(t) \in$ s-FE выполнение неравенств:

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad &\left\| \tilde{\theta}(t_e) \right\| \leq \beta \left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\|, \quad \beta \in (0; 1), \\
 &|\tilde{z}(t_e)| \leq \beta |\tilde{z}(t_r^+)|,
 \end{aligned}$$

где $\tilde{z}(t) = \bar{\varphi}^T(t)\hat{\theta} - z(t)$ — ошибка слежения, $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$ — параметрическая ошибка.

Неравенства (2.2) означают убывание соответственно $\tilde{\theta}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ на интервале $[t_r^+; t_e]$. Требование $\bar{\varphi}(t) \in$ s-FE при этом является условием реализуемости целевого закона, а под реализуемостью понимается возможность уменьшения априорных рассогласований $\tilde{z}(t_r^+)$ и $\tilde{\theta}(t_r^+)$.

2.1. Градиентный закон идентификации

Классическим решением, гарантирующим достижение цели (2.2), является градиентный закон идентификации:

$$(2.3) \quad \dot{\hat{\theta}}(t) = -\Gamma \bar{\varphi}(t) \left(\bar{\varphi}^T(t) \hat{\theta}(t) - z(t) \right), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0,$$

который реализуем при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ и в целом обеспечивает следующие свойства:

- $a_1) \quad \bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\theta}(t)\| = 0 \text{ (exp)}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| = 0 \text{ (exp)}; \end{cases}$
- $a_2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| = 0;$
- $a_3) \quad \lambda_{\min}(\Gamma) = \lambda_{\max}(\Gamma) \Rightarrow \|\tilde{\theta}(t_a)\| \leq \|\tilde{\theta}(t_b)\| \quad \forall t_a \geq t_b;$
- $a_4) \quad \bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE} \Rightarrow \begin{cases} \|\tilde{\theta}(t_e)\| \leq \beta \|\tilde{\theta}(t_r^+)\|, \quad \beta \in (0; 1) \\ |\tilde{z}(t_e)| \leq \beta |\tilde{z}(t_r^+)|; \end{cases}$
- $a_5) \quad \text{при } \bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \text{ существует оптимальное значение } \Gamma, \text{ обеспечивающее максимизацию скорости экспоненциальной сходимости параметрической ошибки } \tilde{\theta}(t) \text{ к нулю. Изменение элемента } \Gamma \text{ оказывает влияние на качество переходных процессов по всем } \tilde{\theta}_i(t).$

Закон (2.3), несмотря на реализуемость при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ (a_4), обеспечивает экспоненциальную сходимость $\tilde{\theta}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ к нулю при выполнении ограничительного условия неисчезающего возбуждения регрессора (a_1), гарантирует монотонность только нормы параметрической ошибки (a_3), а элементы варьируемого параметра Γ оказывают влияние на качество переходных процессов по всем ошибкам (a_5).

Для преодоления недостатков закона (2.3) в [2] была предложена процедура DREM, согласно которой сначала выполняется специальная обработка регрессии (2.1), состоящая из расширения и смешивания регрессора, а уже после, по новой регрессии, вводится закон оценки неизвестных параметров. Рассмотрим процедуру синтеза и свойства такого закона подробнее.

2.2. Динамическое расширение и смешивание регрессора

На этапе расширения выполняется преобразование исходного векторного регрессора $\bar{\varphi}(t) \in R^n$ в матричный $\varphi(t) \in R^{n \times n}$, например, с помощью фильтра (1.5):

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= -l\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)\bar{\varphi}^T(t), \quad \varphi(t_0) = 0_{n \times n}, \\ \dot{y}(t) &= -ly(t) + \bar{\varphi}(t)z(t), \quad y(t_0) = 0_n, \end{aligned}$$

где $y(t) \in R^n$ — расширенная регрессионная функция.

После фильтрации (2.4) имеем расширенное регрессионное уравнение:

$$(2.5) \quad y(t) = \varphi(t)\theta,$$

по регрессору которого согласно следствиям 1–4 возможно верифицировать выполнение условий (1.1)–(1.4).

На этапе смешивания согласно [2] осуществляется преобразование матричного регрессора $\varphi(t) \in R^{n \times n}$ в скалярный $\omega(t) \in R$ путем умножения (2.5) на союзную матрицу $\text{adj} \{ \varphi(t) \}$ и использования свойства $\text{adj} \{ \varphi(t) \} \varphi(t) = \det \{ \varphi(t) \} I_{n \times n}$:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} Y(t) &= \omega(t)\theta, \\ Y(t) &:= \text{adj} \{ \varphi(t) \} y(t), \quad \omega(t) := \det \{ \varphi(t) \}, \end{aligned}$$

где $Y(t) \in R^n$.

На основании полученных n скалярных уравнений (2.6) согласно [2] вводится закон идентификации в форме

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_i(t) &= \dot{\tilde{\theta}}_i(t) = -\gamma_i \omega(t) \left(\omega(t) \hat{\theta}_i(t) - \omega(t) \theta_i(t) \right) = \\ &= -\gamma_i \omega^2(t) \tilde{\theta}_i(t), \quad \gamma_i > 0, \end{aligned}$$

который реализуем при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$ и в целом обеспечивает следующие свойства:

- $b_1) \quad \begin{aligned} \omega(t) \notin L_2 &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\theta}(t)\| = 0; \\ \omega(t) \in \text{PE} &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\theta}(t)\| = 0 \text{ (exp)}; \end{aligned}$
- $b_2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\theta}(t)\| = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{|z(t) - \bar{\varphi}^T(t) \hat{\theta}(t)|}_{|\tilde{z}(t)|} = 0 \text{ (certainty equivalence);}$
- $b_3) \quad \left| \tilde{\theta}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\theta}_i(t_b) \right| \forall t_a \geq t_b;$
- $b_4) \quad \bar{\varphi}(t) \in \text{FE} \Rightarrow \begin{cases} \left\| \tilde{\theta}(t_e) \right\| \leq \beta \left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\|, & \beta \in (0; 1) \\ |\tilde{z}(t_e)| \leq \beta |\tilde{z}(t_r^+)|; \end{cases}$
- $b_5) \quad \text{при } \bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \text{ скорость экспоненциальной сходимости параметрической ошибки } \tilde{\theta}_i(t) \text{ может быть увеличена путем увеличения } \gamma_i, \text{ а изменение коэффициента } \gamma_i \text{ оказывает влияние на качество переходного процесса по } \tilde{\theta}_i(t).$

Как следует из сравнения свойств a_1 – a_5 и b_1 – b_5 , ослабленное требование для асимптотической сходимости параметрической ошибки (b_1), монотонность переходных процессов по каждой в отдельности ошибке $\theta_i(t)$ (b_3),

а также возможность влияния с помощью γ_i на качество оценок по конкретной $\tilde{\theta}_i(t)$ (b_5) определяют преимущества закона (2.7) над градиентным (2.3). Однако в то же время закон (2.7) не обеспечивает сходимость к нулю ошибки $\tilde{z}(t)$ без параметрической сходимости (b_2) и обладает более строгим условием реализуемости (b_4).

Поэтому основной целью работы является построение закона идентификации, который сочетает положительные свойства (2.3) и (2.7), а значит, при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$ обладает свойствами b_1 – b_5 закона (2.7), при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ — свойством a_4 закона (2.3) и в отличие от (2.7) обеспечивает сходимость ошибки слежения $\tilde{z}(t)$ без параметрической сходимости (a_2).

3. Основной результат

3.1. Динамическая регуляризация расширенного регрессора

Следуя определению 5, регрессионное уравнение (2.5) может быть приведено к виду

$$(3.1) \quad y(t) = \varphi(t)\theta = \begin{bmatrix} V_1(t) & V_2(t) \end{bmatrix} \Lambda(t) \begin{bmatrix} V_1^T(t) \\ V_2^T(t) \end{bmatrix} \theta = V(t)\Lambda(t)V^T(t)\theta.$$

Заметим, что при $\text{rank} \{\varphi(t)\} = r(t) < n$ матрица $\Lambda(t)$ содержит $\bar{r}(t) > 0$ нулей на главной диагонали, и поэтому $\omega(t) = \det \{\varphi(t)\} \equiv 0 \Rightarrow \|\tilde{\theta}(t_e)\| = \|\tilde{\theta}(t_r^+)\|$. Следовательно, чтобы сделать определитель регрессора $\varphi(t)$ невырожденным при переходе к регрессии со скалярным регрессором (2.6), необходимо виртуально подменить нули главной диагонали матрицы $\Lambda(t)$ числами, отличными от нуля [15, 16]. Для этого введем в рассмотрение величину $\Xi(t)$, дополняющую $\Lambda(t)$ до полного ранга:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Xi(t) &= \bar{\Lambda}(t) - \Lambda(t), \\ \bar{\Lambda}(t) &:= \begin{cases} 0_{n \times n}, & \text{если } \text{diag} \{\bar{\lambda}_1(t), \bar{\lambda}_2(t), \dots, \bar{\lambda}_n(t)\} = \varepsilon I_{n \times n}, \\ \text{diag} \{\bar{\lambda}_1(t), \bar{\lambda}_2(t), \dots, \bar{\lambda}_n(t)\}, & \text{иначе,} \end{cases} \\ \bar{\lambda}_i(t) &:= \begin{cases} \lambda_i(t), & \text{если } \lambda_i(t) \geq \bar{\varepsilon}, \\ \varepsilon, & \text{если } \lambda_i(t) < \bar{\varepsilon}, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где $\bar{\Lambda}(t)$ — новая матрица собственных чисел, $\varepsilon > 0$ — коэффициент, определяющий значение виртуальных собственных чисел, $\bar{\varepsilon} \geq 0$ — параметр, определяющий амплитуду собственных чисел $\varphi(t)$, считающихся эквивалентно равными нулю при наличии погрешностей вычислений и внешних возмущений.

Прибавив к (3.1) выражение $\pm V(t)\Xi(t)V^T(t)\theta$, имеем:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} y(t) &= \varphi(t)\theta = V(t)\Lambda(t)V^T(t)\theta \pm V(t)\Xi(t)V^T(t)\theta = \\ &= V(t)\bar{\Lambda}(t)V^T(t)\theta - V(t)\Xi(t)V^T(t)\theta = \Phi(t)\theta - V(t)\Xi(t)V^T(t)\theta, \end{aligned}$$

где $\Phi(t) \in R^{n \times n}$ — новый регрессор с собственными числами $\bar{\Lambda}(t)$.

Умножив уравнение (3.3) на матрицу $\text{adj} \{\Phi(t)\}$ и воспользовавшись свойствами

$$\begin{aligned}\text{adj} \{\Phi(t)\} &= \det \{\Phi(t)\} \Phi^{-1}(t), \quad \Phi^{-1}(t) = V(t) \bar{\Lambda}^{-1}(t) V^T(t), \\ \text{adj} \{\Phi(t)\} \Phi(t) &= \det \{\Phi(t)\} I_n,\end{aligned}$$

имеем:

$$\begin{aligned}(3.4) \quad \Upsilon(t) &= \omega(t)\theta - \omega(t)V(t)\bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t)V^T(t)\theta = \omega(t)\Theta(t), \\ \Upsilon(t) &:= \text{adj} \{\Phi(t)\} y(t), \quad \omega(t) := \det \{\Phi(t)\}, \\ \Theta(t) &:= \theta - V(t)\bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t)V^T(t)\theta = \theta - \underbrace{V_2(t)V_2^T(t)\theta}_{d(t)},\end{aligned}$$

где $\Theta(t) \in R^n$ — вектор новых неизвестных параметров, $d(t) \in R^n$ — возмущение, вызывающее различие между $\Theta(t)$ и θ .

Свойства нового регрессора $\omega(t) \in R$ опишем в следующем утверждении.

Утверждение 1. Пусть матрица $\bar{\Lambda}(t)$ формируется алгоритмом (3.2) при $\bar{\varepsilon} = 0$, тогда верны импликации:

- 1) $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \omega(t) \geq \lambda_{\min}^n(t) > \mu^n > 0.$
- 2) $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE} \Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e] \quad \omega(t) \geq \lambda_{\min}^n(t) > \mu^n > 0.$
- 3) $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \omega(t) \geq \min \{\lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n\} > 0.$
- 4) $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE} \Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e] \quad \omega(t) \geq \min \{\lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n\} > 0.$

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

На основе регрессии (3.4), учитывая доказанные в утверждении 1 свойства, в соответствии с [18] введем закон идентификации с нормализацией возбуждения регрессора:

$$\begin{aligned}(3.5) \quad \dot{\hat{\theta}}(t) &= -\gamma(t)\omega(t) \left(\omega(t)\hat{\theta}(t) - \Upsilon(t) \right) = \\ &= -\gamma(t)\omega^2(t) \left(\hat{\theta}(t) - \theta \right) - \gamma(t)\omega^2(t)d(t) = \\ &= -\gamma(t)\omega^2(t) \underbrace{\left(\hat{\theta}(t) - \Theta(t) \right)}_{\tilde{\Theta}(t)}, \quad \hat{\theta}(t_r^+) = \theta_0, \\ \gamma(t) &:= \begin{cases} \gamma_1, & \text{если } \omega(t) \leq \min \{\lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n\}, \\ \frac{\gamma_0}{\omega^2(t)} & \text{иначе,} \end{cases}\end{aligned}$$

где $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$ — варьируемые параметры закона идентификации, $\tilde{\Theta}(t) \in R^n$ — ошибка идентификации вектора $\Theta(t)$.

В силу алгоритма формирования матрицы дополнения $\Xi(t)$ для закона (3.5) оказывается справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено допущение 1 и $\bar{\varepsilon} = 0$, тогда:

- 1) если $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$, то (3.5) обладает свойствами b_1 – b_5 ;
- 2) если $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ и выполнены следующие достаточные условия

$$2.1) \quad \left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\| = \beta_1 \theta_{\max}, \quad \beta_1 > 1,$$

$$2.2) \quad \text{произведение } \gamma_0 \delta \text{ такое, что } \frac{1}{\beta_1} + e^{-0,5\gamma_0 \delta} \in (0; 1),$$

то целевые неравенства (2.2) выполняются, а закон (3.5) реализуем;

$$3) \quad \omega(t) \notin L_2 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\theta}(t) \right\| \leq \theta_{\max};$$

$$4) \quad \bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\theta}(t) \right\| \leq \theta_{\max}(\exp).$$

Скорость экспоненциальной сходимости при этом может быть непосредственно отрегулирована выбором параметра γ_0 .

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Как следует из результатов теоремы 1, к сожалению, при произвольных значениях $\tilde{\theta}(t_r^+)$ закон (3.5) оказывается нереализуемым с точки зрения (2.2), поскольку при движении в области с границей $\theta_{\max}$ норма ошибки $\tilde{\theta}(t)$ может принимать значения больше, чем $\left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\|$, что является недостатком закона (3.5) относительно стандартного градиентного (2.3). Поэтому необходимым условием реализуемости (3.5) является частичное конечное возбуждение регрессора $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$, а достаточными — выполнение предпосылок 2.1) и 2.2). Здесь же необходимо отметить, что выбор $\hat{\theta}(t_r^+) = 0_n$ гарантирует невозрастание ошибки $\tilde{\theta}(t)$ на $[t_r^+; t_e]$, что позволяет говорить о квазиреализуемости закона (3.5) с точки зрения (2.2) при выполнении только необходимого условия $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$.

Таким образом, в соответствии с предложенной процедурой динамической регуляризации регрессора (3.1)–(3.4), с одной стороны, при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$ дополнение $\Lambda(t)$ до полного ранга не осуществляется и закон (3.5) вырождается в (2.7), а с другой стороны, при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ выполняется дополнение $\Lambda(t)$ до полного ранга и (3.5) в отличие от (2.7) при выполнении достаточных условий является реализуемым с точки зрения (2.2).

Глобальную устойчивость ошибок $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{\Theta}(t)$ при использовании закона (3.5) исследуем, выдвигая различные предположения относительно ранга $r(t)$ и базиса нуль пространства $V_2(t)$. В подразделе 3.2 предположим их постоянство, а в разделе 3.3 — кусочно-постоянный характер изменения.

3.2. Постоянный ранг и базис нуль пространства

Введем допущение о постоянстве ранга и нуль базиса регрессора $\varphi(t) \in R^{n \times n}$.

Допущение 2. Для $\varphi(t) \in R^{n \times n}$ постоянного ранга $r(t) \equiv r < n$, $\bar{r}(t) \equiv \bar{r} > 0$ существует разложение (1.6) с постоянной матрицей $V_2(t) \equiv V_2$.

При выполнении допущения 2 возмущение $d(t) \equiv d$ и неизвестные параметры $\Theta(t) \equiv \Theta$ также не зависят от времени.

Свойства ошибок $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{\Theta}(t)$ при использовании закона (3.5) и выполнении допущения 2 с учетом результатов утверждения 1 изучим в теореме 2. В ее первой части опишем безусловные свойства, во второй — свойства, гарантируемые при выполнении условия реализуемости, а в третьей и четвертой части сформулируем условия асимптотической и экспоненциальной устойчивости.

Теорема 2. При выполнении допущений 1 и 2 верны утверждения:

- I. $\forall t \geq t_0 \left| \tilde{\Theta}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\Theta}_i(t_b) \right| \quad \forall t_a \geq t_b.$
- II. $\overline{\varphi}(t) \in \text{s-FE} \Rightarrow \begin{cases} \left\| \tilde{\Theta}(t_e) \right\| \leq \beta \left\| \tilde{\Theta}(t_r^+) \right\|; \\ |\tilde{z}(t_e)| \leq \beta |\tilde{z}(t_r^+)|. \end{cases}$
- III. $\omega(t) \notin L_2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\| = 0; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| = 0. \end{cases}$
- IV. $\overline{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\| = 0 \text{ (exp)}; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| = 0 \text{ (exp)}. \end{cases}$

Скорость экспоненциальной сходимости при этом может быть непосредственно отрегулирована выбором параметра γ_0 .

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Замечание 1. Условие асимптотической устойчивости $\omega(t) \notin L_2$ строго слабее условия экспоненциальной устойчивости $\overline{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$, так как, например, существует регрессор $\omega(t) = \varepsilon^{n-1} \lambda_1(t)$, $\lambda_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$, такой что $\omega(t) \notin L_2$ и $\overline{\varphi}(t) \notin \text{s-PE}$, поскольку $\nexists \mu > 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad \lambda_1(t) > \mu$, что противоречит следствию 3. Поэтому при выполнении допущения 2 минимальным требованием для сходимости ошибок $\tilde{\Theta}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ к нулю, а $\hat{\theta}(t)$ — к области $\theta_{\max}$ при использовании закона (3.5) является неинтегрируемость с квадратом произведения r собственных чисел $\varphi(t)$.

3.3. Кусочно-постоянный ранг и базис нуль пространства

Требования допущения 2 ограничительны, а в приложениях как ранг, так и нуль базис регрессора обычно дискретно изменяются. Поэтому проведем анализ свойств закона (3.5) в предположении кусочно-постоянного характера изменения ранга и нуль базиса регрессора $\varphi(t)$.

Допущение 3. Ранг регрессора $\varphi(t)$ является кусочно-постоянной функцией и существует разложение (1.6) с кусочно-постоянной матрицей $V_2(t)$:

$$(3.6) \quad \forall t \geq t_0 \quad r(t) = \sum_{j_r=1}^{\infty} \Delta_{j_r} h(t - t_{j_r}), \quad V_2(t) = \sum_{j_v=1}^{\infty} \Delta_{j_v} h(t - t_{j_v}),$$

где t_{j_r} — момент времени изменения ранга, Δ_{j_r} — величина изменения ранга в момент времени t_{j_r} , t_{j_v} — момент времени изменения базиса $V_2(t)$, $\Delta_{j_v} \in R^{n \times \tau(t)}$ — величина изменения $V_2(t)$, $h(t - t_{j_r})$, $h(t - t_{j_v})$ — функции единичного скачка.

При выполнении (3.6) возмущение $d(t)$ и неизвестные параметры $\Theta(t)$ являются кусочно-постоянными функциями:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} d(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j h(t - t_j), \quad \dot{d}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j \delta(t - t_j), \\ \Theta(t) &= \theta - \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j h(t - t_j), \end{aligned}$$

где $t_j \in \{t_{j_r}, t_{j_v} | j_r \in \mathbb{N}, j_v \in \mathbb{N}\}$ — моменты времени изменения $d(t)$, $\delta(t - t_j)$ — функция единичного импульса, $\|\Delta_j\| \leq \Delta_{\max}$ — ограниченная величина изменения возмущения.

С учетом результатов утверждения 1 сформулируем свойства, гарантируемые законом (3.5) при выполнении допущений 1 и 3.

Теорема 3. Пусть выполнены допущения 1, 3 и $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$ с рангом $r(t) \geq 1$, тогда:

$$(3.8) \quad \forall t \geq kT \quad \left\{ \begin{aligned} \|\tilde{\Theta}(t)\| &\leq a(t_j) e^{-\gamma_0(t-kT)} \|\tilde{\Theta}(kT)\|, \\ |\tilde{z}(t)| &\leq a(t_j) e^{-\gamma_0(t-kT)} |\tilde{z}(kT)|, \end{aligned} \right.$$

где $\{a(t_0), a(t_1), \dots, a(t_j), \dots\}$ — числовая последовательность.

Более того, если $\exists a_{\max} \forall t_j \geq t_0 \ a(t_j) \leq a_{\max}$, то $\tilde{\Theta}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ экспоненциально устойчивы:

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| &= 0 \quad (\exp), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\Theta}(t)\| &= 0 \quad (\exp). \end{aligned} \right.$$

Доказательство теоремы 3 и определение величины $a(t_j)$ приведены в Приложении.

С одной стороны, результаты теоремы 3 демонстрируют робастность закона (3.5) к вариациям ранга и нуль базиса регрессора $\varphi(t)$ в смысле экспоненциального восстановления положения равновесия ошибок $\tilde{\Theta}(t)$ и $\tilde{z}(t)$, а с другой стороны, описывают необходимые и достаточные требования для их экспоненциальной сходимости к нулю. Такими требованиями являются частичное постоянное возбуждение регрессора с рангом не менее единицы и удовлетворение для всех $t_j \geq t_0$ неравенства $a(t_j) \leq a_{\max}$.

Однако в теореме 3 отсутствует конструктивное описание требований к $a(t_j)$ или Δ_j , при выполнении которых для всех $t_j \geq t_0$ гарантируется

$a(t_j) \leq a_{\max}$ и, следовательно, экспоненциальная устойчивость ошибок $\tilde{\Theta}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ при кусочно-постоянном ранге или нуль базисе.

В следующем следствии приведем два дополнительных условия, при выполнении которых для всех $t_j \geq t_0$ доставляется выполнение неравенства $a(t_j) \leq a_{\max}$.

Следствие 5. Пусть выполнены предпосылки теоремы 3 и дополнительно выполнено одно из условий:

- 1) $j \leq j_{\max} < \infty$;
- 2) $\Delta_{\max} \leq c(t_j) e^{-\gamma_0(t_j - kT)}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ $c(t_j) \geq c(t_{j+1}) > 0$.

Тогда существует $a_{\max}$, такой что $\forall t_j \geq t_0$ $a(t_j) \leq a_{\max}$.

Доказательство следствия 5 приведено в Приложении.

В соответствии с результатами следствия 5 условие $a(t_j) \leq a_{\max}$ выполняется, если норма величины изменения параметров $\Delta_{\max}$ ограничена сверху убывающей последовательностью, или при конечном числе j изменений базиса/ранга регрессора.

3.4. Условия частичной идентифицируемости

В задачах идентификации основной целью выступает обеспечение сходимости параметрической ошибки $\tilde{\theta}(t)$. Поэтому дополнительно к результатам разделов 3.2 и 3.3 определим условия, при выполнении которых элементы вектора новых неизвестных параметров $\Theta(t)$ частично или полностью совпадают с элементами вектора θ .

Исследование свойств параметров $\Theta(t)$ оформим в виде утверждения.

Утверждение 2. Пусть матрица $\bar{\Lambda}(t)$ формируется алгоритмом (3.2) при $\bar{\varepsilon} = 0$, тогда:

- 1) $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Rightarrow \Theta(t) = \theta$;
- 2) если выполнено допущение 2 и условия

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}, \quad n > 2,$$

$$\sum_{i=1}^{n-p} w_i \varphi_i(t) + \sum_{j=n-p+1}^n w_j \varphi_j(t) = 0_n, \quad w_i \neq 0, \quad w_j = 0,$$

$$\text{то } \exists M \subset \{1, \dots, n\}, \quad |M| = p, \quad \forall i \in M, \quad \Theta_i = \theta_i.$$

Доказательство утверждения 2 приведено в Приложении².

Таким образом, в соответствии с утверждением 2 условиями частичной идентифицируемости параметров θ является выполнение допущения 2, частичное возбуждение регрессора $\bar{\varphi}(t)$ и линейная независимость p столбцов

² В части 2) без потери общности предполагается, что первые $n - p$ столбцов регрессора $\varphi(t) = [\varphi_1(t) \dots \varphi_i(t) \dots \varphi_n(t)]$ линейно зависимы (к такому виду в случае $\bar{T}(t) > 0$ всегда можно перейти с помощью перестановки столбцов).

регрессора $\varphi(t)$ при ограниченной снизу $n > 2$ размерности задачи идентификации. Из объединения результатов теоремы 1 и утверждения 2 имеем следствие, описывающее условия сходимости по части параметрических ошибок $\tilde{\theta}_i(t)$.

Следствие 6. Пусть выполняются допущения 1–2 и условия:

$$\sum_{i=1}^{n-p} w_i \varphi_i(t) + \sum_{j=n-p+1}^n w_j \varphi_j(t) = 0_n, \quad w_i \neq 0, \quad w_j = 0, \quad n > 2.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} a) \quad \bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE} &\Leftrightarrow \forall i \in M \left\{ \begin{array}{l} \left| \tilde{\theta}_i(t_e) \right| \leq \beta \left| \tilde{\theta}_i(t_r^+) \right|, \\ \left| \tilde{\theta}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\theta}_i(t_b) \right| \quad \forall t_a \geq t_b; \end{array} \right. \\ b) \quad \omega(t) \notin L_2 &\Leftrightarrow \forall i \in M \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \tilde{\theta}_i(t) \right| = 0, \\ \left| \tilde{\theta}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\theta}_i(t_b) \right| \quad \forall t_a \geq t_b; \end{array} \right. \\ c) \quad \bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} &\Leftrightarrow \forall i \in M \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \tilde{\theta}_i(t) \right| = 0 \quad (\text{exp}), \\ \left| \tilde{\theta}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\theta}_i(t_b) \right| \quad \forall t_a \geq t_b. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Следствие 6 получено объединением непротиворечивых предпосылок и результатов теоремы 1 и утверждения 2.

Замечание 2. Необходимо отметить существование регрессоров $\varphi(t)$, не удовлетворяющих требованиям утверждения 2, но при этом обеспечивающих существование нулевых элементов в векторе d и позволяющих идентифицировать часть исходных неизвестных параметров θ . Для таких регрессоров равенство элементов d нулю вызвано не наличием в произведении $V_2^T V_2$ нулевых строк/столбцов (см. доказательство утверждения 2), а равенством нулю в целом элементов произведения $V_2^T V_2 \theta$ (в силу ортогональности V_2 и θ).

Например, если $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\theta = \vartheta \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vartheta \neq 0$, то требования из утверждения 2 не выполняются, но $d = 0_n$, $\Theta = \theta$.

Замечание 3. С практической точки зрения важно не только доказать, что при выполнении ряда условий в векторе параметров Θ некоторые элементы совпадают с элементами θ , но и указывать их позиции в процессе идентификации. Для этой цели при выполнении условий 2-й части утверждения 2 в соответствии с доказательством, в качестве указателя могут быть использованы индексы нулевых строк базиса V_2 .

Замечание 4. При выполнении допущения 3 результаты 2-й части утверждения 2 верны локально на интервалах постоянства ранга и базиса нуль пространства регрессора. Следовательно, при варьировании ранга $r(t)$

на различных интервалах $[t_{j-1}; t_j]$ и $[t_j; t_{j+1}]$ возможна частичная идентифицируемость различного числа p элементов вектора θ , а при варьировании базиса нуль пространства регрессора на различных интервалах $[t_{j-1}; t_j]$ и $[t_j; t_{j+1}]$ возможна идентифицируемость различных элементов вектора θ .

4. Математическое моделирование

В среде Matlab/Simulink сравним DREM закон идентификации с регуляризацией (3.5) с классическим градиентным законом (2.3) и DREM законом идентификации без регуляризации (2.7). Моделирование будем проводить, используя численное интегрирование методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации $\tau_s = 10^{-4}$ секунды.

В разделе 4.1 представлены результаты моделирования при выполнении допущения 2, в разделе 4.2 — при выполнении допущения 3.

4.1. Постоянный ранг и постоянный нуль базис

Регрессионное уравнение (2.1) зададим следующим образом:

$$(4.1.1) \quad z(t) = \bar{\varphi}^T(t)\theta = \begin{bmatrix} -2e^{-t} \cos(t) & e^{-t} \cos(t) & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Параметры фильтра (2.4), алгоритма виртуальной замены собственных чисел (3.2) и законов идентификации (3.5), (2.3) установим следующим образом:

$$(4.1.2) \quad l = 100, \quad \varepsilon = 0,4, \quad \bar{\varepsilon} = 10^{-10}, \quad \gamma_0 = 5, \quad \gamma_1 = 1, \quad \Gamma = 5I_3.$$

Для обеспечения одинаковой скорости сходимости законов (3.5) и (2.7) коэффициент усиления γ закона (2.7) будем формировать аналогично (3.5), следуя методу нормализации возбуждения регрессора [18]:

$$(4.1.3) \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1, & \text{если } \omega(t) \leq \min \{ \lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n \}, \\ \frac{\gamma_0}{\omega^2(t)} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Прежде всего убедимся в выполнении условий реализуемости законов (2.3), (2.7) и (3.5). На рис. 1 представлены значения возмущения d и ранга регрессора $\varphi(t)$ в течение эксперимента.

Как следует из определения регрессора $\bar{\varphi}(t)$, рис. 1,а, условия реализуемости ($\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$) законов (2.3) и (3.5) выполняются для всех $t \geq 0$, а условие реализуемости ($\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$) закона (2.7) не выполняется, поэтому ограничимся результатами моделирования алгоритмов (3.5) и (2.3). Из рис. 1,а,б совместно следует выполнение допущения 2, а значит, поскольку $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$,

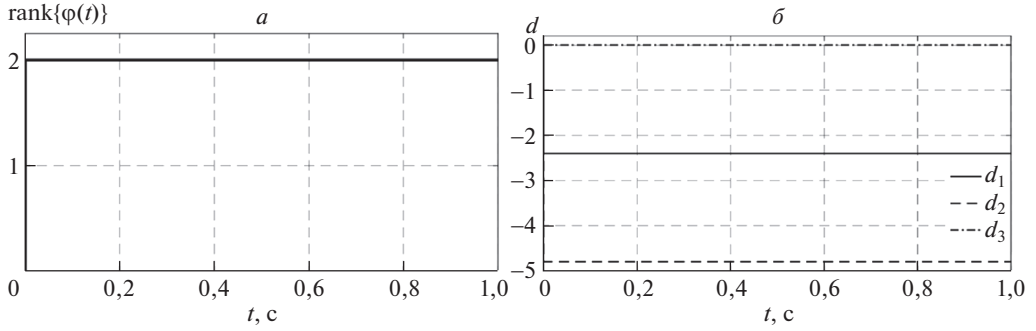


Рис. 1. Значение ранга регрессора $\varphi(t)$ (а), величина возмущения d (б).

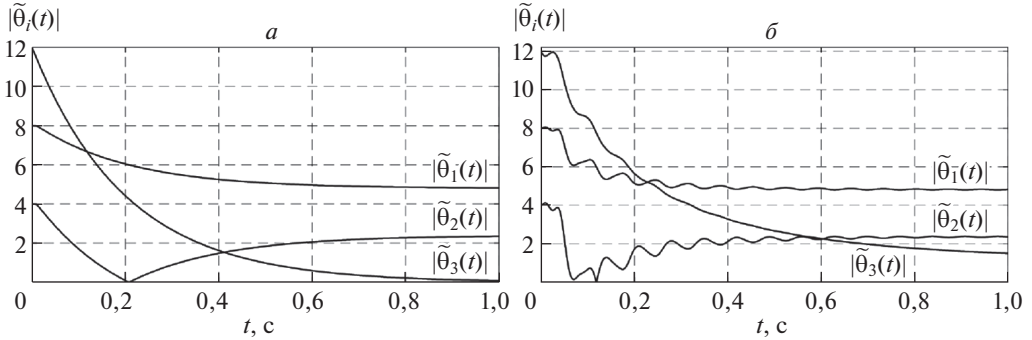


Рис. 2. Переходные процессы по ошибкам $\tilde{\theta}_i(t)$ законов (3.5) — (а) и (2.3) — (б).

закон (3.5) в данном эксперименте гарантирует убывание ошибок $\tilde{\Theta}(t)$, $\tilde{z}(t)$. Более того, поскольку допущение 2 выполнено, $d_3 = 0$ и $r = 2$, то дополнительно также законом (3.5) гарантируется убывание ошибки $\tilde{\theta}_3(t)$.

Сначала установим $\theta_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$, что по теореме 1 соответствует квазиреализуемости закона (3.5) (гарантируется убывание $|\tilde{z}(t)|$ и невозрастание $\|\tilde{\theta}(t)\|$ на интервале времени $[0; 1]$).

На рис. 2 изображены переходные процессы по ошибкам $\tilde{\theta}_i(t)$ законов (3.5) — (а) и (2.3) — (б).

Полученные переходные процессы демонстрируют преимущества (3.5) над (2.7) и классическим градиентным (2.3) законом идентификации. В частности, в отличие от (2.7) закон (3.5) позволил уменьшить априорные значения ошибок $\tilde{\theta}_i(t)$, а в отличие от (2.3) обеспечил аperiodический характер переходных процессов и монотонную экспоненциальную сходимость к нулю ошибки $\tilde{\theta}_3(t)$. Монотонность по $\tilde{\theta}_1(t)$ можно объяснить выполнением в эксперименте условия $\theta_1 \leq \Theta_1$, $\hat{\theta}_1(t_0) > \Theta_1$, что является частной благоприятной ситуацией.

На рис. 3,а изображено сравнение ошибок $\tilde{z}(t)$ законов (3.5) и (2.3), а на рис. 3,б приведены переходные процессы по ошибке $\tilde{\Theta}_i(t)$ при применении закона (3.5).

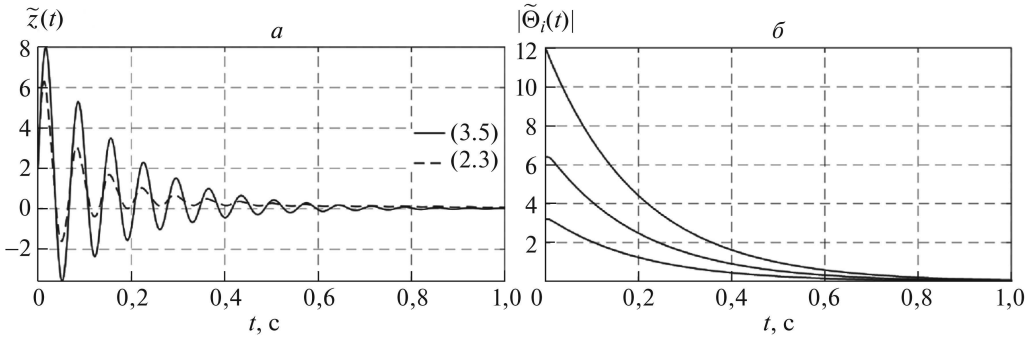


Рис. 3. Переходные процессы (а) по ошибкам $\tilde{z}(t)$ законов (3.5) и (2.3) и (б) по ошибке $\tilde{\Theta}_i(t)$ закона (3.5).

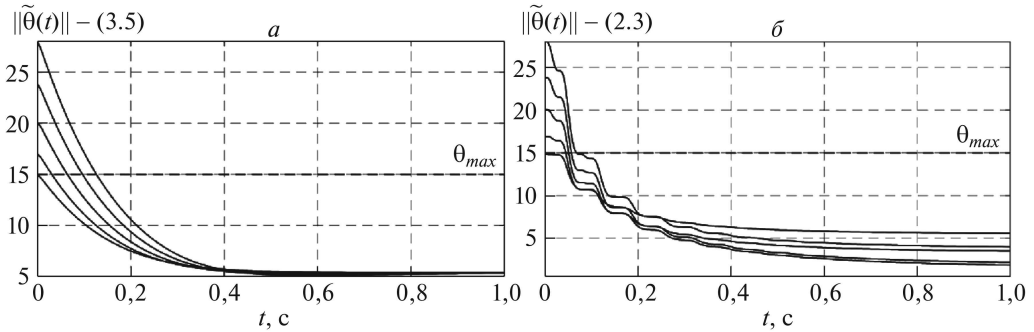


Рис. 4. Переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при различных начальных условиях.

Рисунок 3,а подтверждает убывание $\tilde{z}(t)$ на интервале времени $[0; 1]$ при применении закона (3.5), рис. 3,б демонстрирует монотонность ошибки $\tilde{\Theta}_i(t)$ $\forall i \in \overline{1, n}$, что было аналитически показано в теореме 2.

На рис. 4 приведены графики по $\|\tilde{\theta}(t)\|$, полученные в результате применения законов (3.5) и (2.3) при различных начальных условиях (для всех начальных условий закон (3.5) оставался либо реализуемым, либо квазиреализуемым).

Переходные процессы, представленные на рис. 4, подтверждают доказанную в теореме 1 равномерную по начальным условиям экспоненциальную сходимость ошибки $\tilde{\theta}(t)$ в область размером $\theta_{\max}$.

Теперь установим $\theta_0 = [0 \ -10 \ 14]^T$, что не обеспечивает выполнение достаточных условий реализуемости из теоремы 1, поскольку $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| \approx 4,9$, а $\theta_{\max} = \|\theta\| \approx 15$. На рис. 5 представлены полученные при таком выборе начальных условий переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при применении законов (3.5) и (2.3).

Временные диаграммы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$, представленные на рис. 5, соответствуют выводам, сделанным в теореме 1. Действительно, при $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| < \theta_{\max}$ (3.5) нереализуем, норма ошибки $\|\tilde{\theta}(t)\|$ может принимать значения больше, чем

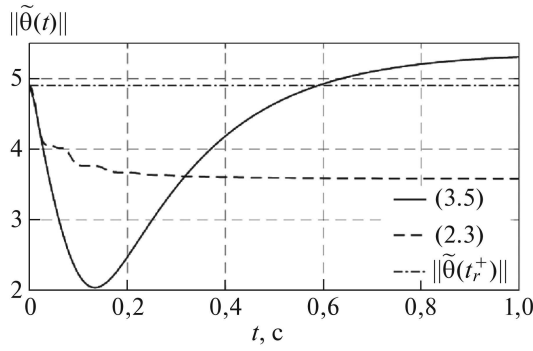


Рис. 5. Переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при применении законов (3.5) и (2.3).

$\|\tilde{\theta}(t_r^+)\|$, а выполнение одновременно всех целевых условий (2.2) не гарантируется.

Таким образом, проведенные численные эксперименты полностью подтвердили описанные в рамках теорем 1–2, утверждения 2 и следствия 6 свойства закона (3.5) при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ и выполнении допущения 2.

4.2. Кусочно-постоянный ранг и нуль базис

4.2.1. Эксперимент первый

Регрессионное уравнение (2.1) зададим следующим образом:

$$(4.2.1) \quad z(t) = \bar{\varphi}^T(t)\theta = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1(t) & \bar{\varphi}_2(t) & \bar{\varphi}_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\varphi}_1(t) = 9 \sin(t); \quad \bar{\varphi}_2(t) = \begin{cases} 2 \sin(t), & 0 \leq t \leq 5, \\ 4, & 5 < t \leq 15, \\ 2 \sin(t), & t > 15; \end{cases}$$

$$\bar{\varphi}_3(t) = \begin{cases} \sin(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ \sin(50t), & 10 < t \leq 15, \\ \sin(t), & t > 15. \end{cases}$$

Параметры фильтра (2.4), алгоритма виртуальной замены собственных чисел (3.2) и законов (2.3), (3.5) выберем в соответствии с выражением:

$$(4.2.2) \quad l = 100, \quad \varepsilon = 0,4, \quad \bar{\varepsilon} = 10^{-10}, \quad \gamma_0 = 5, \quad \gamma_1 = 1, \quad \Gamma = I_3.$$

Для обеспечения одинакового значения скорости сходимости для (3.5) и (2.7) коэффициент усиления γ закона (2.7) будем формировать аналогично (3.5), следуя методу нормализации возбуждения регрессора [18]:

$$(4.2.3) \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1, & \text{если } \omega(t) \leq \min \{ \lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n \}, \\ \frac{\gamma_0}{\omega^2(t)} & \text{иначе.} \end{cases}$$

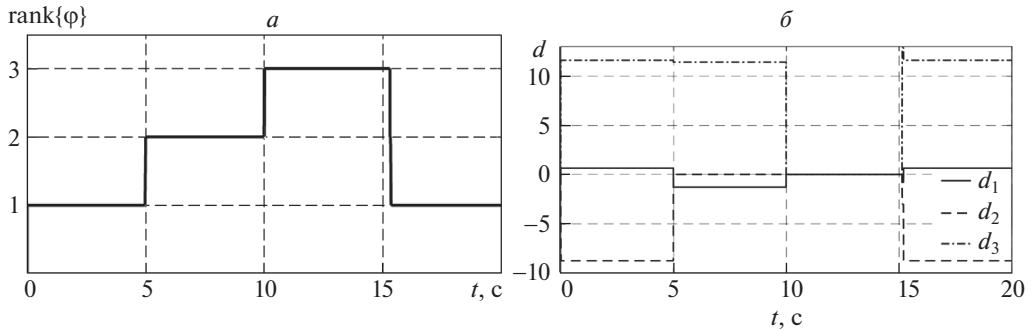


Рис. 6. Значение ранга регрессора $\varphi(t)$ (а), величина возмущения $d(t)$ (б).

Прежде всего убедимся в выполнении условий реализуемости законов (2.3), (2.7) и (3.5). На рис. 6 представлены значения возмущения $d(t)$ и ранга регрессора $\varphi(t)$ в течение эксперимента.

Как следует из рис. 6,а и следствий 2 и 4, необходимое условие реализуемости закона (3.5) выполняется для всех $t \geq 0$, а условие реализуемости (2.7) выполняется только на отрезке $t \in [10; 15,34]$. Согласно рис. 6 число переключений параметров в эксперименте конечно $j \leq j_{\max} < \infty$ и $r(t) \geq 1$, а тогда согласно результатам теоремы 3 и следствия 5 для (3.5) выполняются все необходимые и достаточные условия экспоненциальной сходимости к нулю ошибок $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{\Theta}(t)$. Более того, так как $\forall t \in [5; 10] d_2(t) = 0$, то на интервале $[5; 10]$ также выполнены описанные в утверждении 2 условия частичной идентифицируемости.

Верифицировав выполнение условий реализуемости и сходимости, промоделируем алгоритмы (3.5), (2.7) и (2.3) при различных начальных условиях.

Сначала установим $\theta_0 = [0 \ 5 \ 0]^T$, что по теореме 1 обеспечивает выполнение достаточных условий реализуемости закона (3.5):

$$\beta_1 = \left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\| \left\| \theta \right\|^{-1} \approx \frac{18}{15} = 1,2 \quad \frac{1}{\beta_1} + e^{-\gamma_0 \delta} = \frac{1}{1,2} + e^{-5 \cdot 5} \approx 0,833 \in (0; 1).$$

На рис. 7 изображены переходные процессы по ошибкам $\tilde{\theta}_i(t)$ для (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

Полученные переходные процессы подтверждают теоретические выводы, сделанные в замечании 4. Действительно, при выполнении на $[5; 10]$ условий второй части утверждения 2 закон (3.5), в отличие от (2.7) и (2.3), обеспечивает монотонность по одному элементу вектора $\tilde{\theta}(t)$. Сравнивая качество переходных процессов, можно убедиться в преимуществах закона (3.5) над (2.7) и (2.3). По сравнению с (2.3) закон (3.5) на протяжении эксперимента обеспечивает аperiodический характер изменения $\tilde{\theta}_i(t) \forall i \in \overline{1, n}$. В сравнении с (2.7) закон (3.5) реализуем для всех $t \geq 0$, а не только на отрезке $[10; 15,34]$, и обеспечивает на $[5; 10]$ убывание до нуля одного элемента вектора $\tilde{\theta}(t)$.

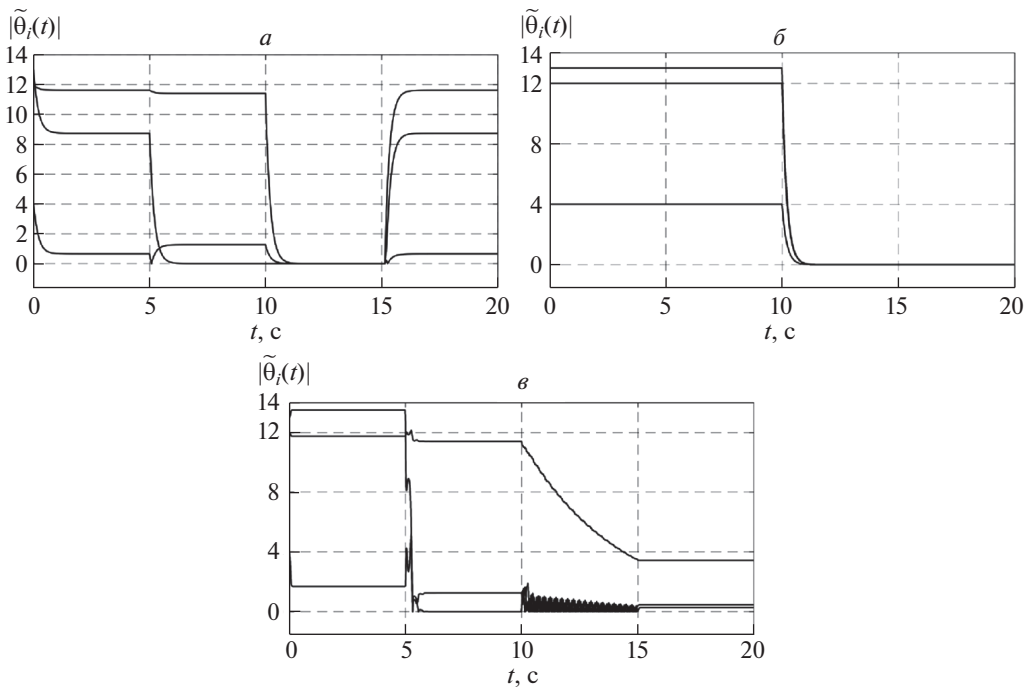


Рис. 7. Переходные процессы по $\tilde{\theta}_i(t)$ законов (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

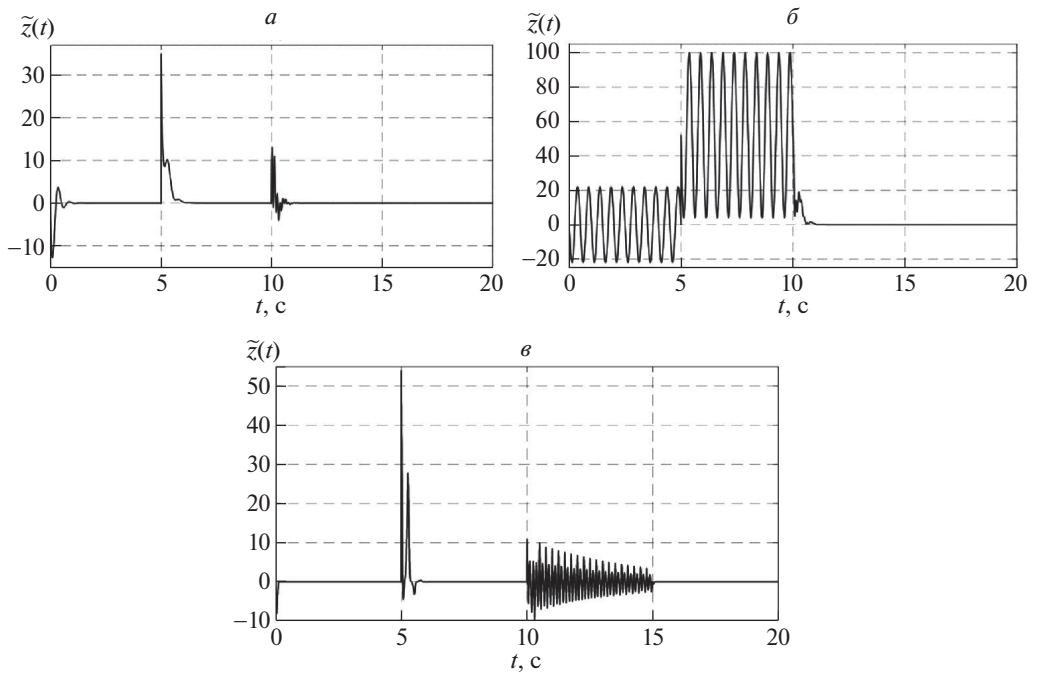


Рис. 8. Переходные процессы по $\tilde{z}(t)$ для (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

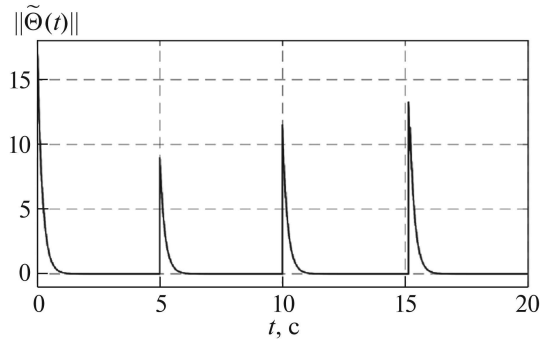


Рис. 9. Изменение нормы ошибки $\tilde{\Theta}(t)$.

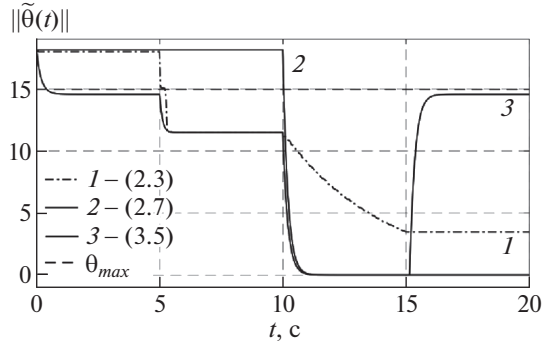


Рис. 10. Переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ для (3.5), (2.7) и (2.3).

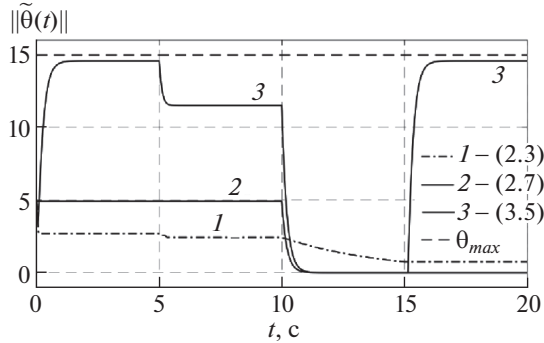


Рис. 11. Переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ для (3.5), (2.7) и (2.3).

На рис. 8 приведены переходные процессы по $\tilde{z}(t)$ при использовании (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

Переходные процессы, представленные на рис. 8, подтверждают доказанную в теореме 3 экспоненциальную восстанавливаемость положения равновесия ошибки слежения $\tilde{z}(t)$ при $\varphi(t) \in \text{s-PE}$ и выполнении допущения 3.

На рис. 9 приведена временная диаграмма по норме $\tilde{\Theta}(t)$.

Из рис. 9 следует экспоненциальная восстанавливаемость положения равновесия параметрической ошибки $\tilde{\Theta}(t)$ при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$ и выполнении допущения 3, что соответствует выводам, сделанным в теореме 3.

Так как число переключений ранга в эксперименте конечно $j \leq j_{\max} < \infty$, то согласно результатам теоремы 3 и следствия 5 экспоненциальная восстанавливаемость положений равновесия ошибок $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{\Theta}(t)$ эквивалентна экспоненциальной устойчивости.

На рис. 10 приведены траектории по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при применении (3.5), (2.7) и (2.3).

Переходный процесс по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ закона (3.5) подтверждает выводы, сделанные в теореме 1 — целевое условие (2.2) выполняется при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ и выполнении достаточных условий, а $\tilde{\theta}(t)$ действительно экспоненциально сходится в множество с границей $\theta_{\max}$, что для (2.3) выполняется только для всех $t \geq 5$, а для (2.7) — только при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$.

Теперь установим $\theta_0 = [0 \ -10 \ 14]^T$, что не обеспечивает выполнение достаточных условий реализуемости из теоремы 1, поскольку $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| \approx 4,9$, а $\theta_{\max} = \|\theta\| \approx 15$. На рис. 11 представлены полученные при таком выборе начальных условий переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при применении законов (3.5), (2.7) и (2.3).

Результаты моделирования, представленные на рис. 11, соответствуют выводам, полученным в теореме 1. Действительно, при $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| < \theta_{\max}$ закон (3.5) нереализуем (при $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| = \theta_{\max}$ — квазиреализуем), а норма ошибки $\|\tilde{\theta}(t)\|$ может принимать значения больше, чем $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\|$.

4.2.2. Эксперимент второй

Регрессионное уравнение (2.1) зададим следующим образом:

$$z(t) = \bar{\varphi}^T(t)\theta = [\bar{\varphi}_1(t) \ \bar{\varphi}_2(t) \ \bar{\varphi}_3(t)] \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix};$$

$$(4.2.4) \quad \bar{\varphi}_1(t) = \begin{cases} -2e^{-t} \cos(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ e^{-t}, & 1 < t \leq 2, \\ e^{-t} \cos(t), & t > 2; \end{cases}$$

$$\bar{\varphi}_2(t) = \begin{cases} e^{-t} \cos(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ -2e^{-t} \cos(t), & 1 < t \leq 2, \\ e^{-t} + 0,1, & t > 2; \end{cases}$$

$$\bar{\varphi}_3(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1, \\ e^{-t} \cos(t), & 1 < t \leq 2, \\ -2e^{-t} \cos(t), & t > 2. \end{cases}$$

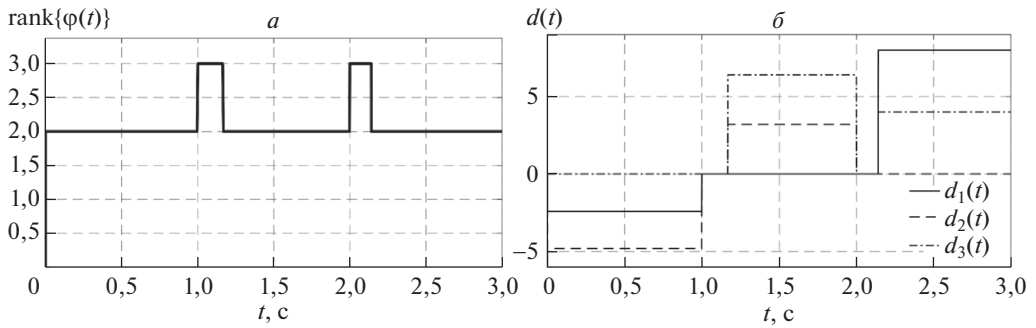


Рис. 12. Значение ранга регрессора $\varphi(t)$ (а), величина возмущения $d(t)$ (б).

Параметры фильтра (2.4), алгоритма виртуальной замены собственных чисел (3.3) и законов (2.3), (3.5) выберем в соответствии с выражением:

$$(4.2.5) \quad l = 100, \quad \varepsilon = 0,4, \quad \bar{\varepsilon} = 10^{-10}, \quad \gamma_0 = 5, \quad \gamma_1 = 1, \quad \Gamma = I_3.$$

Для обеспечения одинакового значения скорости сходимости для (3.5) и (2.7) коэффициент усиления γ закона (2.7) будем формировать аналогично (3.5), следуя методу нормализации возбуждения регрессора [18]:

$$(4.2.6) \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1, & \text{если } \omega(t) \leq \min \{ \lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n \}, \\ \frac{\gamma_0}{\omega^2(t)} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Прежде всего убедимся в выполнении условий реализуемости законов (2.3), (2.7) и (3.5). На рис. 12 представлены значения ранга регрессора $\varphi(t)$ и возмущения $d(t)$ в течение эксперимента.

Интервалы времени $[1; 1,165]$ и $[2; 2,14]$, на которых $\text{rank} \{ \varphi(t) \} = 3$, существенно меньше интервалов времени, на которых $\text{rank} \{ \varphi(t) \} = 2$. Поэтому в отличие от эксперимента в п. 4.2.1 в данном эксперименте ранг регрессора являлся постоянным почти всюду. Отличие ранга от двух на $[1; 1,165]$ и $[2; 2,14]$ вызвано смешиванием фильтром (2.4) информации о регрессорах с различными базисами. Именно благодаря эффекту смешивания в проводимом эксперименте для (2.7) выполняется условие реализуемости на $[1; 1,165]$ и $[2; 2,14]$.

В свою очередь, для закона (3.5) необходимое условие реализуемости выполнено для всех $t \geq 0$. Согласно рис. 12 число переключений параметров в эксперименте конечно $j \leq j_{\max} < \infty$ и $r \geq 1$, а тогда по допущению 3 и результатам теоремы 3 и следствия 5 для (3.5) выполняются все необходимые и достаточные условия экспоненциальной сходимости к нулю ошибок $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{\Theta}(t)$. Более того, так как

$$\forall t \in [0; 1] \ d_3(t) = 0, \quad \forall t \in [1; 2] \ d_1(t) = 0, \quad \forall t \in [2; 3] \ d_2(t) = 0,$$

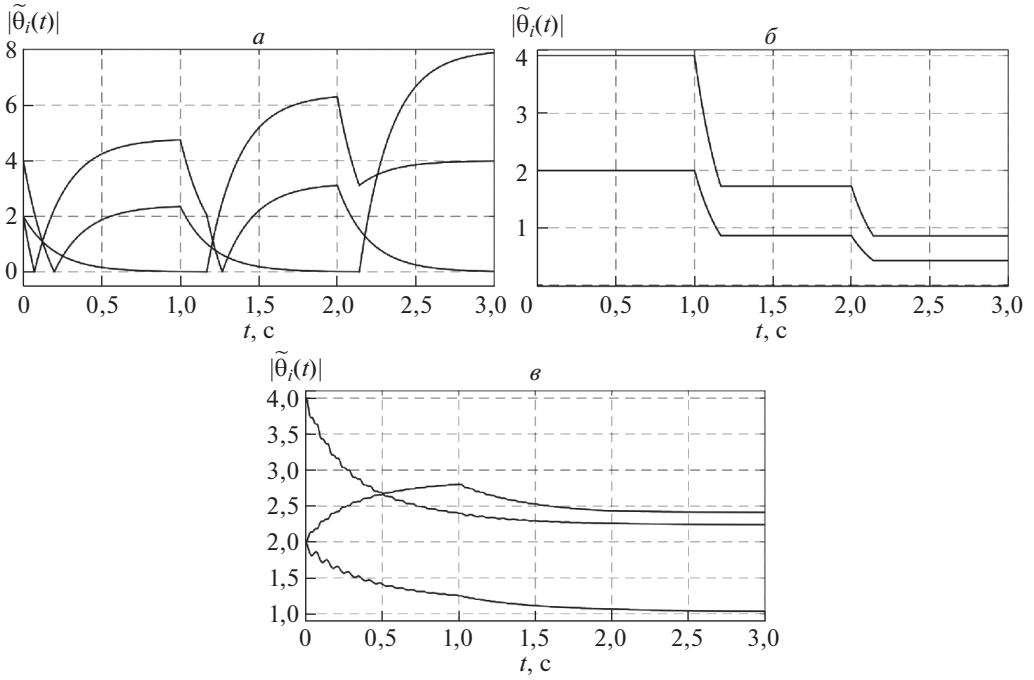


Рис. 13. Переходные процессы по $\tilde{\theta}_i(t)$ законов (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

то в течение эксперимента также выполнялись описанные в утверждении 2 условия частичной идентифицируемости.

Верифицировав выполнение условий реализуемости и сходимости, промоделируем алгоритмы (3.5), (2.7) и (2.3) при различных начальных условиях.

Сначала установим $\theta_0 = [0 \ -10 \ 14]^T$, что не обеспечивает выполнение условий реализуемости из теоремы 1, поскольку $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| \approx 4,9$, а $\theta_{\max} = \|\theta\| \approx 15$.

На рис. 13 изображены переходные процессы по ошибкам $\tilde{\theta}_i(t)$ для (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

Полученные переходные процессы подтверждают теоретические выводы, сделанные в замечании 4. Действительно, при выполнении условий второй части утверждения 2, закон (3.5), в отличие от (2.7) и (2.3), на интервалах времени, соответствующих $d_i(t) = 0$, обеспечивает монотонное убывание соответствующей ошибки $\tilde{\theta}_i(t)$:

$$\left| \tilde{\theta}_3(1) \right| \leq \beta \left| \tilde{\theta}_3(0) \right|, \quad \left| \tilde{\theta}_1(2) \right| \leq \beta \left| \tilde{\theta}_1(1) \right|, \quad \left| \tilde{\theta}_2(3) \right| \leq \beta \left| \tilde{\theta}_2(2) \right|, \quad \beta \in (0; 1).$$

Сравнивая качество переходных процессов, можно убедиться в преимуществах закона (3.5) над (2.7) и (2.3). По сравнению с (2.3) закон (3.5) на протяжении всего эксперимента обеспечивает аperiодический характер из-

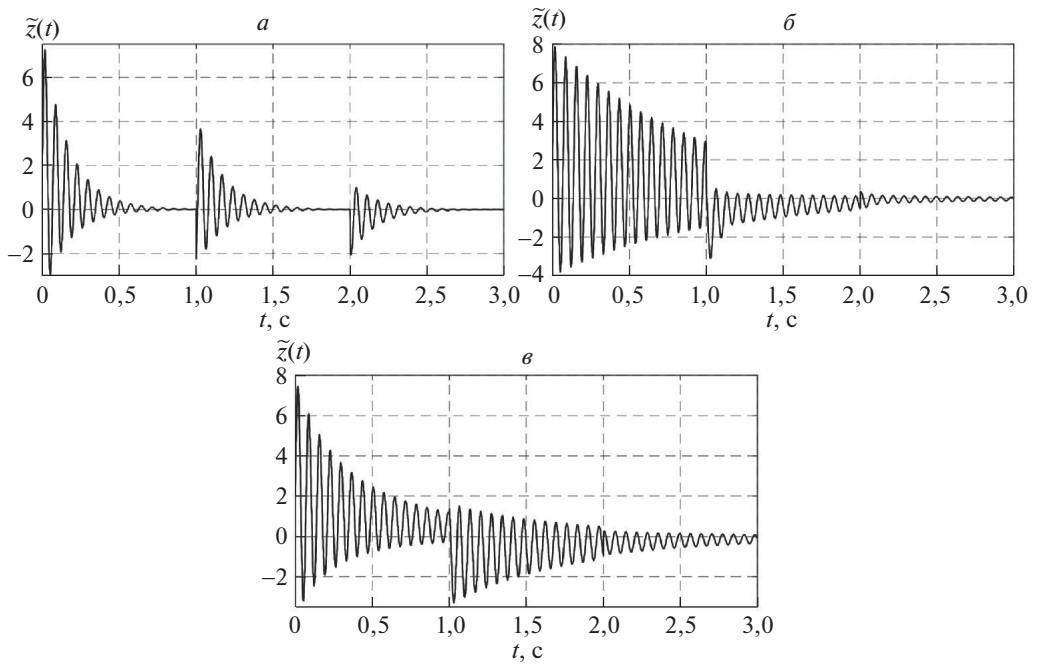


Рис. 14. Переходные процессы по $\tilde{z}(t)$ для (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

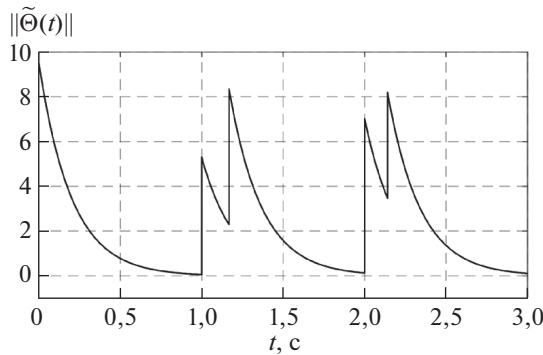


Рис. 15. Изменение нормы ошибки $\tilde{\Theta}(t)$.

менения $\tilde{\theta}_i(t) \forall i \in \overline{1, n}$. В сравнении с (2.7) закон (3.5) реализуем для всех $t \geq 0$, а не только на ограниченных интервалах $[1; 1,165]$ и $[2; 2,14]$.

На рис. 14 приведены переходные процессы по $\tilde{z}(t)$ при использовании (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

Переходные процессы, представленные на рис. 14, подтверждают доказанную в теореме 3 экспоненциальную восстанавливаемость положения равновесия ошибки слежения $\tilde{z}(t)$ при $\varphi(t) \in \text{s-PE}$ и выполнении допущения 3.

На рис. 15 приведена временная диаграмма по норме $\tilde{\Theta}(t)$.

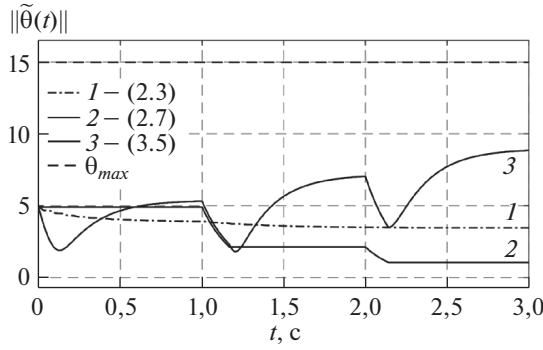


Рис. 16. Переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ для (3.5), (2.7) и (2.3).

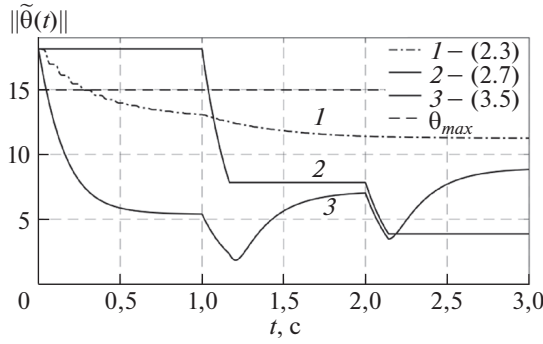


Рис. 17. Переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ для (3.5), (2.7) и (2.3).

Из рис. 15 следует экспоненциальная восстанавливаемость положения равновесия параметрической ошибки $\tilde{\Theta}(t)$ при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$ и выполнении допущения 3, что согласуется с выводами, сделанными в теореме 3.

Так как число переключений ранга в эксперименте конечно $j \leq j_{\max} = 4 < \infty$, то согласно результатам следствия 5 экспоненциальная восстанавливаемость положений равновесия ошибок $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{\Theta}(t)$ эквивалентна экспоненциальной устойчивости.

На рис. 16 приведены траектории по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при применении (3.5), (2.7) и (2.3).

Результаты моделирования, представленные на рис. 16, соответствуют выводам, полученным в теореме 1. Действительно, при $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| < \theta_{\max}$ закон (3.5) нереализуем (при $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| = \theta_{\max}$ — квазиреализуем), а норма ошибки $\|\tilde{\theta}(t)\|$ может принимать значения больше, чем $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\|$.

Теперь установим $\theta_0 = [0 \ 5 \ 0]^T$, что по теореме 1 обеспечивает выполнение достаточных условий реализуемости закона (3.5):

$$\beta_1 = \|\tilde{\theta}(t_r^+)\| \|\theta\|^{-1} \approx \frac{18}{15} = 1,2; \quad \frac{1}{\beta_1} + e^{-\gamma_0 \delta} = \frac{1}{1,2} + e^{-5 \cdot 1} \approx 0,84 \in (0; 1).$$

На рис. 17 представлены полученные при таком выборе начальных условий переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при применении законов (3.5), (2.7) и (2.3).

Переходный процесс по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ закона (3.5) подтверждает выводы, сделанные в теореме 1 — целевое условие (2.2) выполняется при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ и выполнении достаточных условий, а $\tilde{\theta}(t)$ действительно экспоненциально сходится в множество с границей $\theta_{\max}$, что для (2.7) выполняется только при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$.

Таким образом, проведенные численные эксперименты подтвердили все теоретически сформулированные свойства предложенного закона (3.5). Результаты раздела 3.1 справедливы в общем случае $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$, а результаты разделов 3.2 и 3.3 — соответственно при выполнении допущений 2 и 3.

5. Заключение

Для решения задачи идентификации неизвестных постоянных параметров линейного регрессионного уравнения при частичном конечном возбуждении регрессора предложена процедура динамического расширения, регуляризации и смешивания регрессора, обобщающая известную процедуру DREM и расширяющая область ее применимости в прикладных задачах.

В отличие от стандартного градиентного закона идентификации (2.3) предложенная процедура обеспечивает поэлементную монотонность ошибок при выполнении допущения 2 и экспоненциальную сходимость ошибки слежения за функцией (2.1) при частичном постоянном возбуждении регрессора с рангом не менее единицы.

В отличие от DREM разработанная модифицированная процедура, во-первых, ослабляет требование конечного возбуждения регрессора, ранее необходимое для реализуемости (2.7), и гарантирует убывание ошибки идентификации неизвестных параметров при выполнении более слабого условия частичного конечного возбуждения, а во-вторых, обеспечивает экспоненциальную сходимость ошибки слежения за регрессионной функцией (2.1) при частичном неисчезающем возбуждении регрессора с рангом не менее единицы.

Дальнейшие исследования по развитию процедуры динамического расширения, регуляризации и смешивания регрессора могут быть проведены в следующих направлениях:

- синтез схем адаптивного управления с ослабленными требованиями к возбуждению регрессора для экспоненциальной сходимости ошибки слежения за эталонной моделью;
- построение адаптивных наблюдателей состояний с ослабленными требованиями к возбуждению регрессора для экспоненциальной сходимости к нулю ошибки слежения за координатами состояния объекта;
- использование условий частичной идентифицируемости (см. утверждение 2 и рис. 13,а, рис. 7,а, рис. 2,а) для решения задач идентификации полного вектора неизвестных параметров в условиях перепараметризации;

- на основании утверждения 2 и результатов моделирования (рис. 13,а, рис. 7,а, рис. 2,а), построение закона идентификации, не требующего конечного или исчезающего возбуждения регрессора для экспоненциальной сходимости ошибок идентификации полного вектора неизвестных параметров.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Пользуясь следствиями 1–4, запишем оценки снизу на регрессор $\omega(t)$:

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT$$

$$\omega(t) = \det \{\Phi(t)\} = \prod_{i=1}^n \lambda_i(t) \geq \lambda_{\min}^n(t) > \mu^n > 0,$$

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{FE} \Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e]$$

$$\omega(t) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(t) \geq \lambda_{\min}^n(t) > \mu^n > 0,$$

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \omega(t) = \varepsilon^{\bar{r}} \prod_{i=1}^r \lambda_i(t) \geq \min \{\lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n\} > 0,$$

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE} \Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e]$$

$$\omega(t) = \varepsilon^{\bar{r}} \prod_{i=1}^r \lambda_i(t) \geq \min \{\lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n\} > 0.$$

Откуда следует справедливость утверждения 1.

Доказательство теоремы 1. 1. Так как по следствиям 1 и 2 при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ верны импликации:

$$(П.1) \quad \begin{aligned} \bar{\varphi}(t) \in \text{PE} &\Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \lambda_{\min}(t) > \mu > 0, \\ \bar{\varphi}(t) \in \text{FE} &\Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e] \quad \lambda_{\min}(t) > \mu > 0, \end{aligned}$$

то при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ в соответствии с (3.2) подмена нулевых собственных чисел $\Lambda(t)$ не осуществляется $\Xi(t) = 0_{n \times n}$, для матрицы регрессора $\Phi(t)$ выполняется равенство $\Phi(t) = \varphi(t)$, для неизвестных параметров Θ выполняется $\Theta = \theta$ в силу $\bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t) = 0_{n \times n}$, а закон идентификации (3.5) в точности до определения значения коэффициента усиления γ совпадает с (2.7), откуда следует наличие свойств b_1 – b_5 у (3.5) при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$.

2. Введем в рассмотрение следующую функцию (аргументы времени опущены для краткости):

$$(П.2) \quad \forall t \in [t_r^+; t_e] \quad L = \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}.$$

Дифференцируя (П.2) вдоль траекторий (3.5), имеем

$$(П.3) \quad \begin{aligned} \dot{L} &= -2\tilde{\theta}^T \left(\gamma\omega \left(\omega\hat{\theta} - \omega\theta + \omega V\bar{\Lambda}^{-1}\Xi V^T\theta \right) \right) = \\ &= -2\tilde{\theta}^T \gamma\omega^2\tilde{\theta} - 2\tilde{\theta}^T \gamma\omega^2 V\bar{\Lambda}^{-1}\Xi V^T\theta. \end{aligned}$$

С учетом утверждения 1 и определения коэффициента γ оценка сверху на производную (П.3) для всех $t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e]$ принимает вид

$$(П.4) \quad \begin{aligned} \dot{L} &\leq -2\tilde{\theta}^T \frac{\gamma_0}{\omega^2} \omega^2 \tilde{\theta} - 2\tilde{\theta}^T \frac{\gamma_0}{\omega^2} \omega^2 V\bar{\Lambda}^{-1}\Xi V^T\theta \leq \\ &\leq -2\tilde{\theta}^T \gamma_0 \tilde{\theta} - 2\tilde{\theta}^T \gamma_0 V\bar{\Lambda}^{-1}\Xi V^T\theta \leq -2\gamma_0 \|\tilde{\theta}\|^2 + 2\gamma_0 \|\tilde{\theta}\| \theta_{\max}. \end{aligned}$$

Здесь для получения оценки сверху вычислена спектральная норма множителя $V\bar{\Lambda}^{-1}\Xi V^T$, равная единице в силу ортогональности матриц V и V^T .

Положив $a = \sqrt{2\gamma_0}\|\tilde{\theta}\|$, $b = \sqrt{2\gamma_0}\theta_{\max}$ и воспользовавшись неравенством $-a^2 + ab \leq -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, из (П.4) имеем

$$(П.5) \quad \dot{L} \leq -\gamma_0 \|\tilde{\theta}\|^2 + \gamma_0 \theta_{\max}^2.$$

Решив для всех $t \in [t_\delta; t_\delta + \delta]$ дифференциальное неравенство (П.5), получаем:

$$(П.6) \quad \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \quad L \leq e^{-\gamma_0(t-t_\delta)} \|\tilde{\theta}(t_\delta)\|^2 + \theta_{\max}^2.$$

Откуда, учитывая $L = \|\tilde{\theta}\|^2$ и справедливость для всех c, d неравенства $\sqrt{c^2 + d^2} \leq \sqrt{c^2} + \sqrt{d^2}$ имеем

$$(П.7) \quad \|\tilde{\theta}(t_\delta + \delta)\| \leq e^{-0,5\gamma_0\delta} \|\tilde{\theta}(t_\delta)\| + \theta_{\max}.$$

В наиболее консервативном случае для всех $t \in \{[t_r^+; t_\delta], [t_\delta + \delta; t_e]\}$ верно $\omega(t) \equiv 0$, поэтому имеем неравенства $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| \geq \|\tilde{\theta}(t_\delta)\|$, $\|\tilde{\theta}(t_e)\| \leq \|\tilde{\theta}(t_\delta + \delta)\|$, с учетом которых можем переписать (П.7) в виде

$$(П.8) \quad \|\tilde{\theta}(t_e)\| \leq e^{-0,5\gamma_0\delta} \|\tilde{\theta}(t_r^+)\| + \theta_{\max}.$$

Подставим предпосылку 2.1) в оценку (П.8):

$$(П.9) \quad \|\tilde{\theta}(t_e)\| \leq \left(e^{-0,5\gamma_0\delta} + \frac{1}{\beta_1} \right) \|\tilde{\theta}(t_r^+)\|.$$

Откуда следует, что выбор коэффициента γ_0 из условия

$$(П.10) \quad 0 < e^{-0,5\gamma_0\delta} + \frac{1}{\beta_1} < 1 \Leftrightarrow \gamma_0 > \frac{-2\ln\left(1 - \frac{1}{\beta_1}\right)}{\delta}$$

позволяет обеспечить справедливость предпосылки 2.2) и, следовательно, получить оценку:

$$(П.11) \quad \left\| \tilde{\theta}(t_e) \right\| \leq \underbrace{\left(e^{-0,5\gamma_0\delta} + \frac{1}{\beta_1} \right)}_{0 < \beta < 1} \left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\|,$$

что означает убывание ошибки $\tilde{\theta}(t)$ на интервале $[t_r^+; t_e]$.

Подставив оценку (П.11) в оценку сверху на $\tilde{z}(t_e)$, имеем:

$$(П.12) \quad |\tilde{z}(t_e)| \leq \overline{\varphi}_{\max} \left\| \tilde{\theta}(t_e) \right\| \leq \overline{\varphi}_{\max} \beta \left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\| = \beta |\tilde{z}(t_r^+)|,$$

что завершает доказательство части 2 и свидетельствует о реализуемости (3.5) при $\overline{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ и выполнении предпосылок 2.1) и 2.2).

3. Для доказательства части 3 вычислим производную ошибки $\tilde{\Theta}(t)$:

$$(П.13) \quad \dot{\tilde{\Theta}}(t) = -\gamma(t)\omega^2(t)\tilde{\Theta}(t) - \dot{\Theta}(t).$$

Общее решение дифференциального уравнения (П.13) имеет вид:

$$(П.14) \quad \tilde{\Theta}(t) = \phi(t, t_0) \tilde{\Theta}(t_0) - \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) \dot{\Theta}(\tau) d\tau,$$

где

$$\phi(t, s) = e^{-\int_s^t \gamma(\tau)\omega^2(\tau) d\tau}.$$

Так как в силу $\sqrt{\gamma_1} \notin L_2$, $\frac{\sqrt{\gamma_0}}{\omega(t)} \notin L_2$ и $\omega(t) \notin L_2$ при всех возможных вариантах переключений нелинейного оператора в (3.5) верно $\sqrt{\gamma}\omega(t) \notin L_2$, то функция $\phi(t, s)$ обладает следующими свойствами:

$$(П.15) \quad \sqrt{\gamma}\omega(t) \notin L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \phi(t, s) \leq 1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, s) = 0. \end{cases}$$

С использованием первого свойства можем получить оценку сверху на (П.14):

$$(П.16) \quad \tilde{\Theta}(t) \leq \phi(t, t_0) \tilde{\Theta}(t_0) - \Theta(t).$$

Используя в (П.16) определения $\tilde{\Theta}(t) = \tilde{\theta}(t) + d(t)$, $\Theta(t) = \theta - d(t)$, имеем:

$$(П.17) \quad \tilde{\theta}(t) \leq \phi(t, t_0) \tilde{\theta}(t_0) - \theta.$$

Откуда на основании второго свойства из (П.15) следует $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\theta}(t)\| \leq \theta_{\max}$, что завершает доказательство третьей части теоремы.

4. При выполнении условия $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$ в соответствии с третьей частью утверждения 1 для всех $t \geq kT$ верно $\omega(t) \geq \min \{\lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n\} > 0$ и, следовательно, функция $\phi(t, kT)$ принимает вид:

$$(П.18) \quad \phi(t, kT) = e^{-\gamma_0(t-kT)}.$$

Тогда, записав решение уравнения (П.13) для всех $t \geq kT$, по аналогии с (П.14)–(П.17) возможно получить следующую оценку:

$$(П.19) \quad \|\tilde{\theta}(t)\| \leq e^{-\gamma_0(t-kT)} \|\tilde{\Theta}(kT)\| + \theta_{\max}.$$

Откуда следует экспоненциальная сходимость при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$ ошибки $\tilde{\theta}(t)$ к множеству с границей $\theta_{\max}$, что завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 2. I. Для доказательства первой части теоремы 2 запишем (3.4) в поэлементном виде:

$$(П.20) \quad \Upsilon_i(t) = \omega(t)\Theta_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

С учетом (П.20) закон (3.5) для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ можно записать следующим образом:

$$(П.21) \quad \dot{\hat{\theta}}_i(t) = \dot{\tilde{\Theta}}_i(t) = -\gamma(t)\omega(t) \left(\omega(t)\hat{\theta}_i(t) - \omega(t)\Theta_i \right) = -\gamma(t)\omega^2(t)\tilde{\Theta}_i(t).$$

Так как $\gamma(t)\omega^2(t) > 0$, то $\text{sign}\{\dot{\tilde{\Theta}}_i(t)\} = \text{const}$, а для $\tilde{\Theta}_i(t)$ верно $|\tilde{\Theta}_i(t_a)| \leq |\tilde{\Theta}_i(t_b)| \forall t_a \geq t_b$, что завершает доказательство первой части теоремы.

II. При $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ и выполнении допущения 2 в соответствии со следствием 4 решение уравнения (П.13) на $[t_\delta; t_\delta + \delta]$ примет вид:

$$(П.22) \quad \tilde{\Theta}(t) = \phi(t, t_\delta) \tilde{\Theta}(t_\delta) = e^{-\gamma_0(t-t_\delta)} \tilde{\Theta}(t_\delta).$$

В наиболее консервативном случае для всех $t \in \{[t_r^+; t_\delta], [t_\delta + \delta; t_e]\}$ верно $\omega(t) \equiv 0$, поэтому имеем неравенства $\|\tilde{\Theta}(t_r^+)\| \geq \|\tilde{\Theta}(t_\delta)\|$, $\|\tilde{\Theta}(t_e)\| \leq \|\tilde{\Theta}(t_\delta + \delta)\|$, с учетом которых можем получить оценку на ошибку $\tilde{\Theta}(t)$ в момент времени t_e :

$$(П.23) \quad \|\tilde{\Theta}(t_e)\| \leq e^{-\gamma_0\delta} \|\tilde{\Theta}(t_r^+)\|.$$

Ввод в (П.23) обозначения $\beta = e^{-\gamma_0\delta} \in (0; 1)$ позволяет завершить доказательство убывания ошибки $\tilde{\Theta}(t)$ на интервале $[t_r^+; t_e]$.

Для доказательства убывания ошибки $\tilde{z}(t)$ учтем справедливость в силу $V_1^T(t)V_2 = 0_{r \times \bar{r}}$ импликации

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \varphi(t)\theta = V_1(t)\Lambda_1(t)V_1^T(t)(\theta - V_2V_2^T\theta) = \\
 &= \varphi(t)(\theta - V_2V_2^T\theta) = \varphi(t)\Theta = \\
 &= \int_{t_0^+}^t e^{-l(t-\tau)}\bar{\varphi}(\tau)\bar{\varphi}^T(\tau)d\tau\Theta = \int_{t_0^+}^t e^{-l(t-\tau)}\bar{\varphi}(\tau)z(\tau)d\tau = \\
 (П.24) \quad &= \int_{t_0^+}^t e^{-l(t-\tau)}\bar{\varphi}(\tau)\underbrace{\bar{\varphi}^T(\tau)\theta}_{z(\tau)}d\tau = \int_{t_0^+}^t e^{-l(t-\tau)}\bar{\varphi}(\tau)\underbrace{\bar{\varphi}^T(\tau)\Theta}_{z(\tau)}d\tau \\
 &\quad \Updownarrow \\
 z(t) &= \bar{\varphi}^T(t)\theta = \bar{\varphi}^T(t)(\theta - V_2V_2^T\theta) = \bar{\varphi}^T(t)\Theta.
 \end{aligned}$$

Тогда оценка сверху на ошибку слежения с учетом (П.22) имеет вид:

$$(П.25) \quad \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \quad |\tilde{z}(t)| \leq \bar{\varphi}_{\max} e^{-\gamma_0(t-t_\delta)} \left\| \tilde{\Theta}(t_\delta) \right\|.$$

Откуда с учетом (П.23) непосредственно имеем:

$$(П.26) \quad |\tilde{z}(t_e)| \leq \bar{\varphi}_{\max} \beta \left\| \tilde{\Theta}(t_r^+) \right\| = \beta |\tilde{z}(t_r^+)|,$$

что завершает доказательство части II.

III. При выполнении допущения 2 для всех $t \in [t_0; \infty)$ решение уравнения (П.13) принимает вид:

$$(П.27) \quad \tilde{\Theta}(t) = \phi(t, t_0) \tilde{\Theta}(t_0),$$

откуда по второму свойству из (П.15) следует:

$$(П.28) \quad \sqrt{\gamma(t)}\omega(t) \notin L_2 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\| = 0,$$

что выполняется для всех возможных вариантов переключений нелинейного оператора (3.5) в силу $\sqrt{\gamma_1} \notin L_2$, $\frac{\sqrt{\gamma_0}}{\omega(t)} \notin L_2$ и $\omega(t) \notin L_2$.

Применив импликацию (П.28) в оценке сверху на выражение (П.24), получим:

$$(П.29) \quad \sqrt{\gamma(t)}\omega(t) \notin L_2 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\bar{\varphi}_{\max} \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\| \right) = 0.$$

Таким образом, все пункты третьей части теоремы 2 справедливы.

IV. При $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \ \forall t \geq kT$ верно (П.18), откуда на основании (П.22) получаем оценку:

$$(П.30) \quad \forall t \geq kT \quad \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\| \leq e^{-\gamma_0(t-kT)} \left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\|,$$

что подтверждает экспоненциальную сходимость для всех $t \geq kT$ ошибки $\tilde{\Theta}(t)$ к нулю.

Имея оценку (П.30) и учитывая ограниченность $\|\bar{\varphi}(t)\| \leq \bar{\varphi}_{\max}$, аналогично (П.25), пользуясь выражением (П.24), можно убедиться в экспоненциальной сходимости для всех $t \geq kT$ ошибки $\tilde{z}(t)$, что завершает доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. При $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$ по доказанному в третьей части утверждения 1 для всех $t \geq kT$ верно $\omega(t) \geq \min \{\lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n\} > 0$, а значит, уравнение (П.13) может быть записано в виде

$$(П.31) \quad \forall t \geq kT \quad \dot{\tilde{\Theta}}(t) = -\gamma_0 \tilde{\Theta}(t) - \dot{\Theta}(t).$$

Производная $\dot{\Theta}(t)$ в силу допущения 3 в соответствии с выражением (3.7) имеет вид

$$(П.32) \quad \dot{\Theta}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j \delta(t - t_j).$$

С учетом (П.32) решим дифференциальное уравнение (П.31):

$$(П.33) \quad \forall t \geq kT \quad \tilde{\Theta}(t) = e^{-\gamma_0(t-kT)} \tilde{\Theta}(kT) - \int_{kT}^t e^{-\gamma_0(t-\tau)} \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j \delta(\tau - t_j) d\tau.$$

В соответствии с фильтрующим свойством функции единичного импульсного воздействия для любой дифференцируемой функции $f(t)$ имеем:

$$(П.34) \quad \begin{aligned} \int_{t_0}^t f(\tau) \delta(\tau - t_j) d\tau &= f(t_j) h(\tau - t_j)|_{t_0}^t = \\ &= f(t_j) h(t - t_j) - \underbrace{f(t_j) h(t_0 - t_j)}_{=0} \equiv f(t_j) h(t - t_j). \end{aligned}$$

С использованием (П.34) выражение (П.33) может быть приведено к виду:

$$(П.35) \quad \forall t \geq kT \quad \tilde{\Theta}(t) = e^{-\gamma_0(t-kT)} \tilde{\Theta}(kT) - \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\gamma_0(t-t_j)} \Delta_j h(t - t_j).$$

Домножив (П.35) на $\tilde{\Theta}^T(kT)$, получим:

$$(П.36) \quad \forall t \geq kT \quad \tilde{\Theta}^T(kT) \tilde{\Theta}(t) = e^{-\gamma_0(t-kT)} \left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\|^2 - \\ - \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\gamma_0(t-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j).$$

Вынос слагаемого $e^{-\gamma_0(t-kT)} \left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\|^2$ за скобки в правой части выражения (П.36) позволяет для всех $t \geq kT$ записать:

$$(П.37) \quad \tilde{\Theta}^T(kT) \tilde{\Theta}(t) = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\|^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\gamma_0(kT-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j) \right)}_{\in R} \times \\ \times e^{-\gamma_0(t-kT)} \tilde{\Theta}^T(kT) \tilde{\Theta}(kT),$$

$$\tilde{\Theta}(t) = \left(1 - \frac{1}{\left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\|^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\gamma_0(kT-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j) \right) \times \\ \times e^{-\gamma_0(t-kT)} \tilde{\Theta}(kT),$$

где $\left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\| \neq 0$, поскольку для всех $t \in [t_0; kT)$ $\omega(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{\theta}(t) = 0 \Rightarrow \left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\| \geq \left\| \tilde{\Theta}(t_0) \right\|$.

Выражение (П.37) позволяет получить первое выражение из (3.8) с точностью до обозначения:

$$(П.38) \quad a(t_j) = \left| 1 - \frac{1}{\left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\|^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\gamma_0(kT-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j) \right|.$$

Откуда следует экспоненциальная восстанавливаемость положения равновесия параметрической ошибки $\tilde{\Theta}(t)$.

Оценка сверху на ошибку слежения $|\tilde{z}(t)|$ с учетом выражения (П.24) имеет вид

$$(П.39) \quad \forall t \geq kT \quad |\tilde{z}(t)| \leq a(t_j) \bar{\varphi}_{\max} e^{-\gamma_0(t-kT)} \left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\| = \\ = a(t_j) e^{-\gamma_0(t-kT)} |\tilde{z}(kT)|.$$

Откуда следует экспоненциальная восстанавливаемость положения равновесия ошибки $\tilde{z}(t)$.

Если, дополнительно, для $a(t_j)$ существует оценка сверху $a_{\max}$, то из (3.8) мгновенно имеем:

$$(П.40) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\Theta}(t)\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} (a_{\max} e^{-\gamma_0(t-kT)} \|\tilde{\Theta}(kT)\|) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} (a_{\max} \bar{\varphi}_{\max} e^{-\gamma_0(t-kT)} \|\tilde{\Theta}(kT)\|) = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} (a_{\max} e^{-\gamma_0(t-kT)} |\tilde{z}(kT)|) = 0. \end{cases}$$

Откуда следует экспоненциальная устойчивость ошибки слежения $\tilde{z}(t)$ и параметрической ошибки $\tilde{\Theta}(t)$, что завершает доказательство теоремы 3.

Доказательство следствия 5. В соответствии с первой частью следствия 5 предположим, что число изменений $\Theta(t)$ конечно: $j \leq j_{\max} < \infty$.

Тогда можем получить следующую оценку сверху на функцию $a(t_j)$:

$$(П.41) \quad \begin{aligned} a(t_j) &= \left| 1 - \frac{1}{\|\tilde{\Theta}(kT)\|^2} \sum_{j=1}^{j_{\max}} e^{-\gamma_0(kT-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j) \right| \leq \\ &\leq 1 + \left| \frac{1}{\|\tilde{\Theta}(kT)\|^2} \sum_{j=1}^{j_{\max}} e^{-\gamma_0(kT-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j) \right| \leq \\ &\leq 1 + \frac{1}{\|\tilde{\Theta}(kT)\|} \sum_{j=1}^{j_{\max}} \|\Delta_j\| e^{-\gamma_0(kT-t_j)} h(t-t_j). \end{aligned}$$

Поскольку при конечном j моменты времени t_j также конечны, то экспоненциальный множитель в сумме (П.41) ограничен, и верно определение:

$$(П.42) \quad a(t_j) \leq 1 + \frac{1}{\|\tilde{\Theta}(kT)\|} \sum_{j=1}^{j_{\max}} \|\Delta_j\| e^{-\gamma_0(kT-t_j)} h(t-t_j) = a_{\max},$$

что и требовалось доказать в первой части следствия.

Для доказательства второй части следствия с учетом оценки на $\|\Delta_j\|$ аналогично (П.42) получим оценку сверху на $a(t_j)$, но уже при неограниченном числе переключений:

$$(П.43) \quad \begin{aligned} a(t_j) &\leq 1 + \left| \frac{1}{\|\tilde{\Theta}(kT)\|^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\gamma_0(kT-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j) \right| \leq \\ &\leq 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c(t_j) h(t-t_j). \end{aligned}$$

Ряд в (П.43) знакоположительный, и все его частичные суммы ограничены в силу монотонности $0 < c(t_{j+1}) \leq c(t_j)$, а поэтому $1 + \sum_{j=1}^{\infty} c(t_j) h(t - t_j) \leq \leq a_{\max}$, что завершает доказательство следствия 5.

Доказательство утверждения 2. Так как по следствиям 1 и 2 при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ верны импликации:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} &\Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \lambda_{\min}(t) > \mu > 0, \\ \bar{\varphi}(t) \in \text{FE} &\Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e] \quad \lambda_{\min}(t) > \mu > 0,\end{aligned}$$

то в соответствии с выражением (3.3) при $\bar{\varepsilon} = 0$ имеем $\Xi(t) = 0_{n \times n}$, а тогда $\bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t) = 0_{n \times n}$ и, следовательно, $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Rightarrow d(t) = 0_n \Rightarrow \Theta(t) = \theta$, что завершает доказательство п. (а) утверждения 2.

Необходимость условий $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$ следует из того, что только при $0 < r < n$ условия части б) непротиворечивы $\left(\exists p > 0 \sum_{i=1}^{n-p} w_i \varphi_i(t) = 0_n, w_i \neq 0\right)$. Необходимость условия $n > 2$ также следует из противоречия, возникающего при $n = 2$ в общем случае $(\varphi_1(t) \neq 0_n)$:

$$w_1 \varphi_1(t) + w_2 \varphi_2(t) = 0_n \quad w_1 \neq 0, \quad w_2 = 0.$$

Теперь следует доказать для $\exists M \subset \{1, \dots, n\}, |M| = p, \forall i \in M, \Theta_i = \theta_i$ необходимость и достаточность выполнения условия:

$$(П.44) \quad \sum_{i=1}^{n-p} w_i \varphi_i(t) + \sum_{j=n-p+1}^n w_j \varphi_j(t) = 0_n, \quad w_i \neq 0, \quad w_j = 0.$$

Необходимость. Для начала отметим, что согласно (3.5) элементы вектора новых неизвестных параметров Θ совпадают с элементами вектора исходных параметров θ , если соответствующие элементы вектора d равны нулю. Поэтому рассмотрим эту величину подробнее. При $\bar{r} > 0$ произведение $\bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t)$ имеет структуру:

$$(П.45) \quad \bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t) = \begin{bmatrix} \Lambda_1^{-1}(t) & 0_{r \times \bar{r}} \\ 0_{\bar{r} \times r} & \varepsilon^{-1} I_{\bar{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_r & 0_{r \times \bar{r}} \\ 0_{\bar{r} \times r} & \varepsilon I_{\bar{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_r & 0_{r \times \bar{r}} \\ 0_{\bar{r} \times r} & I_{\bar{r}} \end{bmatrix}.$$

Тогда в силу обозначений (3.4) возможно переписать определение d :

$$(П.46) \quad d = V(t)\bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t)V^T(t)\theta = V_2 V_2^T \theta = [d_1 \dots d_i \dots d_n]^T,$$

откуда следует, что d принимает p нулевых значений, если, в частности, число нулевых строк и столбцов матрицы $V_2 V_2^T$ равно p , что, в свою очередь, выполняется, когда матрица V_2 имеет p нулевых строк.

По определению сингулярного разложения положительно полуопределенной симметричной матрицы [15, 16], матрица V_2 может быть найдена решением однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$(П.47) \quad \varphi(t)V_2^k = \sum_{i=1}^n v_i^k \varphi_i(t) = 0_n, \quad \forall k \in \{1, \bar{r}\},$$

где V_2^k — k -й столбец матрицы V_2 .

Для доказательства необходимости условия (П.44) покажем, что если $w_j \neq 0$, то вектор V_2^k , $\forall k \in \{1, \bar{r}\}$, не содержит нулевых элементов.

Выражение (П.47) может быть переписано в следующем эквивалентном виде (с учетом ортонормальности V_2^k , $\forall k \in \{1, \bar{r}\}$):

$$(П.48) \quad \begin{aligned} \varphi(t)V_2^k &= \sum_{i=1}^n v_i^k \varphi_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}} \sum_{i=1}^n w_i \varphi_i(t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}} \left(\sum_{i=1}^{n-p} w_i \varphi_i(t) + \sum_{j=n-p+1}^n w_j \varphi_j(t) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-p} v_i^k \varphi_i(t) + \sum_{j=n-p+1}^n v_j^k \varphi_j(t) = 0_n. \end{aligned}$$

Поскольку при нахождении V_2^k выполняется поиск только нетривиальных решений, то при невыполнении условия (П.44) множество решений задается следующим образом:

$$v_i^k = \frac{w_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}} \neq 0; \quad v_j^k = \frac{w_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}} \neq 0,$$

а тогда V_2^k , $\forall k \in \{1, \bar{r}\}$, не содержит нулевые элементы и, следовательно, $\nexists d_i = 0 \Rightarrow \nexists M \subset \{1, \dots, n\}$, $|M| = p$, $\forall i \in M$, $\Theta_i = \theta_i$, что завершает доказательство необходимости условия (П.45).

Достаточность. Множество решений уравнения вида (П.47) по постановке утверждения при выполнении условия (П.44) задается следующим образом:

$$v_i^k = \frac{w_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}} \neq 0; \quad v_j^k = \frac{w_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}} = 0,$$

а тогда вектор V_2^k , $\forall k \in \{1, \bar{r}\}$, содержит p нулевых элементов и, следовательно, $\exists M \subset \{1, \dots, n\}$, $|M| = p$, $\forall i \in M$, $\Theta_i = \theta_i$, что завершает доказательство достаточности условия (П.44).

Таким образом, условие (П.44) является необходимым и достаточным для идентифицируемости p неизвестных параметров θ , что завершает доказательство 2-й части утверждения 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D.* On Modified Parameter Estimators for Identification and Adaptive Control. A Unified Framework and Some New Schemes // Annual Reviews in Control. 2020. V. 50. P. 278–293.
2. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.* Performance Enhancement Of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // IEEE Trans. Automat. Control. 2016. V. 62, No. 7. P. 3546–3550.
3. *Глушченко А.И., Петров В.А., Ласточкин К.А.* I-DREM: ослабление условия квадратичной интегрируемости // АиТ. 2021. № 7. С. 147–165.
Glushchenko A.I., Petrov V.A., Lastochkin K.A. I-DREM: Relaxing the Square Integrability Condition // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 7. P. 1233–1247.
4. *Korotina M., Romero J.G., Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R.* A New On-Line Exponential Parameter Estimator without Persistent Excitation // Sys. Control Letters. 2022. V. 159. P. 1–10.
5. *Wang L., Ortega R., Bobtsov A., Romero J.G., Yi B.* Identifiability implies robust, globally exponentially convergent on-line parameter estimation: Application to model reference adaptive control // arXiv preprint arXiv:2108.08436. 2021. P. 1–16.
6. *Wang J., Efimov D., Aranovskiy S., Bobtsov A.* Fixed-Time Estimation of Parameters for Non-Persistent Excitation // European J. Control. 2020. V. 55. P. 24–32.
7. *Yi B., Ortega R.* Conditions for convergence of dynamic regressor extension and mixing parameter estimators using LTI filters // IEEE Trans. Automat. Control. 2022. P. 1–6.
8. *Aranovskiy S., Ushirobira R., Korotina M., Vedyakov A.* On preserving-excitation properties of Kreisselmeiers regressor extension scheme // IEEE Trans. Automat. Control. 2022. P. 1–6.
9. *Sastry S., Bodson M.* Adaptive Control — Stability, Convergence, and Robustness. N.J.: Prentice Hall, 1989.
10. *Kreisselmeier G., Rietze-Augst G.* Richness and Excitation on an Interval-with Application to Continuous-Time Adaptive Control // IEEE Trans. Automat. Control. 1990. V. 35. No. 2. P. 165–171.
11. *Roy S.B., Bhasin S.* Novel Model Reference Adaptive Control Architecture Using Semi-Initial Excitation-Based Switched Parameter Estimator // Int. J. Adaptive Control Signal Proc. 2019. V. 33. No. 12. P. 1759–1774.
12. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Robust Time-Varying Parameters Estimation Based on I-DREM Procedure // IFAC-PapersOnLine. 2022. V. 55. No. 12. P. 91–96.
13. *Ovcharov A., Vedyakov A., Kazak S., Bespalov V., Pyrkin A., Bobtsov A.* Flux Observer for The Levitated Ball with Relaxed Excitation Conditions // Proc. European Control Conf. 2021. P. 2334–2339.
14. *Ovcharov A., Vedyakov A., Kazak S., Pyrkin A.* Overparameterized model parameter recovering with finite-time convergence // Int. J. Adapt. Control. Signal Process. 2022. P. 1305–1325.

15. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады Академии наук. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
Tihonov A.N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method // Soviet Math. 1963. V. 4. P. 1035–1038.
16. *Hansen P.C.* The Truncated SVD as a Method For Regularization // BIT Num. Math. 1987. V. 27. No. 4. С. 534–553.
17. *Meyer C.D.* Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Siam, 2000.
18. *Глущенко А.И., Ласточкин К.А., Петров В.А.* Нормализация возбуждения регрессора в процедуре динамического расширения // АиТ. 2022. № 1. С. 22–39.
Glushchenko A.I., Lastochkin K.A., Petrov V.A. Normalization of Regressor Excitation in the Dynamic Extension and Mixing Procedure // Autom. Remote Control. 2022. Vol. 83. No. 1. P. 17–31.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 13.12.2021

После доработки 17.06.2022

Принята к публикации 29.09.2022