

© 2023 г. А.Р. ГАЙДУК, д-р техн. наук (gaiduk_2003@mail.ru)
(Институт радиотехнических систем и управления
Южного федерального университета, Таганрог)

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СЕЛЕКТИВНО-ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ¹

Разработан оригинальный аналитический метод синтеза селективно-инвариантных систем управления нелинейными объектами с дифференцируемыми нелинейностями. Задача синтеза решается с применением метода синтеза нелинейных систем управления на основе квазилинейной модели нелинейных объектов и принципа внутренних моделей внешних воздействий с учетом требований к относительному порядку устройства управления и быстродействию синтезируемой системы. Параметры нелинейного устройства управления определяются решением системы линейных алгебраических уравнений. Предложенный метод может применяться для синтеза систем управления нелинейными объектами различного назначения, работающими в условиях регулярных внешних воздействий известной формы.

Ключевые слова: нелинейный объект, дифференцируемая нелинейность, квазилинейная модель, селективно-инвариантная система, воздействие, спектр, спектральная модель, устойчивость, грубость.

DOI: 10.31857/S0005231023020058, EDN: ONBOCY

1. Введение

На практике часто встречаются объекты управления, подверженные влиянию регулярных внешних воздействий известной формы. К таким объектам относятся электромеханические системы, электро- и пневмоприводы, мобильные роботы, беспилотные летательные аппараты, зерноуборочные комбайны и многие другие объекты [1–6]. Системы управления этими объектами обычно должны обеспечить полное парирование влияния этих воздействий в установившемся режиме. Как известно, наиболее эффективным способом решения этой задачи является обеспечение инвариантности систем автоматического управления (САУ) к внешним воздействиям. Однако условия обеспечения абсолютной инвариантности чаще всего недостижимы, поэтому применяется

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00533).

селективная инвариантность, для обеспечения которой в систему вводятся модели внешних воздействий, что обуславливает существенное увеличение порядка и сложности устройства управления.

Традиционно синтез селективно-инвариантных САУ осуществляется на основе линейных моделей объектов управления (ОУ) [1, 2, 7–12] и принципа внутренних моделей внешних воздействий. В некоторых работах внешние воздействия рассматриваемого типа называются «конечномерными» воздействиями [12, 13], однако задача синтеза систем управления решается также на основе принципа внутренних моделей.

Повышенные требования к качеству САУ приводят к необходимости использования нелинейных моделей ОУ [13–19]. При использовании известных методов синтеза нелинейных САУ, таких как преобразование модели ОУ к канонической форме Бруновского, линеаризация обратными связями по состоянию, метод бэкстеппинга, пассивфикации и др., обычно предполагается, что нелинейности объекта являются дифференцируемыми, а их переменные состояния измеряемыми. Однако применение указанных методов синтеза нелинейных САУ осложнено необходимостью приведения нелинейных моделей ОУ к специальным формам, что требует поиска подходящих нелинейных преобразований.

В работах В.О. Никифорова, А.А. Бобцова и др. (см. [13]) рассматриваются нелинейные системы, подверженные влиянию конечномерных внешних возмущений. Задача парирования их влияния на систему также решается на основе принципа внутренних моделей с применением метода функций Ляпунова, но при условии, что для невозмущенного объекта известны: а) стабилизирующее управление и б) функция Ляпунова, которая позволяет доказать устойчивость положения равновесия замкнутой невозмущенной системы.

В предлагаемом подходе к синтезу нелинейных селективно-инвариантных систем управления нелинейными объектами учитываются и задающее, и возмущающее внешние воздействия. Для решения задачи здесь используется метод синтеза нелинейных систем управления на основе квазилинейных моделей (КЛМ) нелинейных объектов, предложенный в [20, 21]. Преимущество этого метода по сравнению с указанными выше методами синтеза нелинейных систем [14–19] заключается в том, что для построения КЛМ требуется лишь дифференцируемость нелинейностей объекта по всем их аргументам, а параметры нелинейного устройства управления определяются решением разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Условия разрешимости рассматриваемой задачи синтеза нелинейных селективно-инвариантных САУ определяются свойством полноты (управляемости и наблюдаемости) канала «управление-выход» КЛМ нелинейного объекта и соотношением спектров внешних воздействий и нулей передачи последней.

Очень часто функциональные матрицы управляемости или наблюдаемости КЛМ объекта управления оказываются неособыми лишь в ограниченной

окрестности его положения равновесия. В этом случае положение равновесия синтезированной нелинейной системы является асимптотически устойчивым в большом [22, 23]. Если же условия полноты выполняются во всем пространстве состояний ОУ и обратные связи выбраны так, что функциональная матрица разрешающей СЛАУ является неособой также во всем пространстве состояний ОУ, то положение равновесия замкнутой системы может быть асимптотически устойчивым в целом. Последнее может быть установлено на основе теоремы, доказанной в [20]. Матрицы и векторы квазилинейных моделей являются функциями переменных состояния [20–23], но, как оказалось, это не является препятствием для аналитического решения задачи синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления.

2. Постановка задачи

Система управления называется селективно-инвариантной, если в ее составе имеется модель внешнего воздействия (ВВ), а отклонение системы, вызванное этим воздействием, равно нулю в установившемся режиме [9–11]. Такая модель называется экзогенной [8, с. 168] или внутренней [10, 22]. Математические модели ВВ — это однородные дифференциальные уравнения (ДУ). Они могут быть представлены или операторами этих уравнений, или соответствующими ДУ в форме Коши (в переменных состояния) [7–13]. Некоторые особенности и примеры моделей воздействий приведены в Приложении. Если в устойчивой системе есть модель воздействия, то, как только воздействие начинает влиять на систему, модель генерирует сигнал, полностью парирующий его влияние в установившемся режиме. При этом соответствующие начальные условия этой модели устанавливаются автоматически в течение переходного процесса, возникающего в момент приложения этого ВВ к системе.

Рассматривая задачу синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления, для определенности будем предполагать, что ОУ в своем составе не имеет внутренних моделей ВВ или их отдельных составляющих. Предположим также, что нелинейности ОУ являются дифференцируемыми, а переменные состояния измеряемыми, что позволяет применить метод синтеза нелинейных систем управления на основе КЛМ [20–22].

Пусть КЛМ нелинейного ОУ в отклонениях от некоторого установившегося режима имеет вид

$$(1) \quad \dot{x} = A(x)x + b(x)u + b_f(x)f, \quad y = c^T(x)x,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния ОУ; u , y и f — скалярные управление, управляемая переменная и внешнее неизмеряемое возмущение; $A(x)$ и $b(x)$, $b_f(x)$, $c(x)$ — известные функциональные $n \times n$ -матрица и n -векторы. В [22, 24] приведен метод построения квазилинейных моделей типа (1) нелинейных объектов, заданных уравнениями $\dot{x} = \varphi(x, u)$, $y = \psi(x)$, если $\varphi(0, 0) = 0$, $\psi(0) = 0$ и $\partial\varphi(x, u)/\partial u = \varphi'_u(x)$, т.е. при условиях, что $\varphi(x, u)$ и $\psi(x)$ дифференцируемые

по всем аргументам функции; $x = \mathbf{0}$ — положение равновесия объекта (1); частная производная по u от вектор-функции $\varphi(x, u)$ не зависит от u . Здесь $\mathbf{0}$ — нулевой n -вектор.

Далее рассматриваются полные объекты, т.е. объекты, КЛМ (1) которых удовлетворяет условиям управляемости и наблюдаемости:

$$(2) \quad \left| \det [b(x) \quad A(x)b(x) \quad \dots \quad A^{n-1}(x)b(x)] \right| \geq \varepsilon_y > 0, \\ \left| \det [c(x) \quad A^T(x)c(x) \quad \dots \quad (A^T(x))^{n-1}c(x)] \right| \geq \varepsilon_n > 0, \quad \forall x \in \Omega_{yH} \in \mathbb{R}^n,$$

где $\varepsilon_y, \varepsilon_n$ — некоторые постоянные; Ω_{yH} — некоторая окрестность точки $x = \mathbf{0}$ [22].

В синтезируемой селективно-инвариантной системе применяется нелинейное устройство управления (НУУ), предложенное в [20, 21]. В данном случае его уравнения имеют вид:

$$(3) \quad \dot{z} = R(x)z + q(x)g - l(x)y - \sum_{i=1}^q l_i(x)\tilde{x}_i, \quad u = k^T(x)z,$$

где $z \in \mathbb{R}^r$ — вектор состояния НУУ, g — скалярное задающее воздействие; $R(x)$ и $q(x)$, $l(x)$, $l_i(x)$, $i = 1, \dots, q$ — функциональные $r \times r$ -матрица и r -векторы; q — число переменных состояния $\tilde{x}_i \in x$, используемых в НУУ (3) и перенумерованных в порядке возрастания $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_q$, $q \leq n$. Значение r , переменные $\tilde{x}_i$ и число q определяются при формировании матрицы G_y (22) разрешающей СЛАУ (см. ниже). Уравнения (3) отличаются от приведенных в [20] только тем, что здесь учитываются связи по задающему воздействию и управляемой переменной, а обратные связи могут вводиться не по всем переменным состояниям.

Имея в виду синтез нелинейных селективно-инвариантных систем управления (1)–(3), будем предполагать, что известны спектральные модели в виде K_p -изображений задающего воздействия $g = g(t)$ и возмущения $f = f(t)$, т.е. известны операторы-полиномы $G(p)$ и $F(p)$ степеней $\nu_g = \deg G(p)$ и $\nu_f = \deg F(p)$, где p — оператор d/dt , такие, что $G(p)g(t) \equiv 0$ и $F(p)f(t) \equiv 0$. Пусть полином $\Phi(p) = \text{НОК}\{G(p)F(p)\}$, где НОК — наименьшее общее кратное [10, 11]. Операторное уравнение «вход-выход» замкнутой системы (1), (3) относительно отклонения $\varepsilon = g - y$ можно записать следующим образом:

$$(4) \quad H(p, x)\varepsilon = H_{\varepsilon g}(p, x)g - H_f(p, x)f, \\ H_{\varepsilon g}(p, x) = H(p, x) - H_g(p, x),$$

где $H(p, x)$, $H_g(p, x)$, $H_f(p, x)$ — некоторые полиномы от p , коэффициенты которых являются функциями переменных состояния x_i , $i = \overline{1, n}$ [20, 22]. Вывод этих полиномов на основе уравнений (1) и (3) дан в Приложении. На основе уравнения (4) условия селективной инвариантности системы (1), (3)

по отношению к воздействиям $g = g(t)$ и $f = f(t)$ имеют вид:

$$(5) \quad \begin{aligned} H_{\varepsilon g}(p, x) &= \tilde{H}_{\varepsilon g}(p, x)G(p), \\ H_f(p, x) &= \tilde{H}_f(p, x)F(p), \quad \forall x \subset \Omega_{\text{УН}} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

где $\tilde{H}_{\varepsilon g}(p, x)$, $\tilde{H}_f(p, x)$ — полиномы того же типа, что и в (4), но более низких степеней. При этом задача синтеза имеет решение при выполнении условий (2) и

$$(6) \quad \begin{aligned} \text{НОД}\{B(p, x), \Phi(p)\} &= \text{const}, \\ \text{НОД}\{H(p, x), \Phi(p)\} &= \text{const}, \quad \forall x \subset \Omega_{\text{УН}} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Условия (2) и первое условие (6) являются необходимыми условиями разрешимости рассматриваемой задачи синтеза, так как они включают характеристики заданных ОУ и ВВ. Физический смысл первого условия (6) заключается в непересекаемости спектров воздействий $g(t)$ и $f(t)$ с нулями передаточной функции по каналу $u \rightarrow y$, что позволяет воспроизвести на выходе системы задающее воздействие и парировать влияние возмущения [10]. Второе условие (6) — это условие непересекаемости спектров воздействий $g(t)$ и $f(t)$ с корнями характеристического полинома замкнутой системы. Это условие является конструктивным и всегда может быть выполнено, если выполнены указанные выше необходимые условия разрешимости.

Таким образом, для решения задачи синтеза необходимо выбрать параметры функциональных матриц и векторов в (3) так, чтобы выполнялись условия селективной инвариантности (5), условия устойчивости, заданной длительности переходных процессов и условия физической реализуемости с учетом $\mu_{\text{НУУ}}$ — относительного порядка НУУ [22, 25].

3. Решение задачи

Исключив из уравнений (1), (3) управление u и записав полученные уравнения в векторно-матричной форме, получим КЛМ замкнутой системы в переменных состояния:

$$(7) \quad \dot{w} = H(x)w + h(x)g + h_f(x)f, \quad y = [c^T(x) \quad \bar{\mathbf{0}}^T]w,$$

где $w = [x^T \quad z^T]^T \in \mathbb{R}^\ell$, $\ell = n + r$, $\bar{\mathbf{0}}$ — нулевой r -вектор,

$$(8) \quad \begin{aligned} H(x) &= \begin{bmatrix} A(x) & b(x)k^T(x) \\ -\Pi(x) & R(x) \end{bmatrix}, \\ h(x) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ q(x) \end{bmatrix}, \quad h_f(x) = \begin{bmatrix} b_f(x) \\ \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\Pi(x) = l(x)c^T(x) + \sum_{i=1}^q l_i(x)e_i$; e_i — i -я строка единичной матрицы E , соответствующей размерности.

В Приложении показано, что из уравнений (7) с учетом (8) следует уравнение «вход-выход» замкнутой системы

$$(9) \quad H(p, x)y = H_g(p, x)g + H_f(p, x)f,$$

где

$$(10) \quad H(p, x) = A(p, x)R(p, x) + B(p, x)L(p, x) + \sum_{i=1}^q L_i(p, x)V_i(p, x),$$

$$(11) \quad H_g(p, x) = B(p, x)Q(p, x),$$

$$(12) \quad H_f(p, x) = B_f(p, x)R(p, x) + \sum_{i=1}^q L_i(p, x)\tilde{N}_i(p, x),$$

$$(13) \quad \tilde{N}_i(p, x) = \left(B_f(p, x)V_i(p, x) - B(p, x)W_i(p, x) \right) A^{-1}(p, x).$$

В выражениях (9)–(13):

$$(14) \quad \begin{aligned} A(p, x) &= \det [pE - A(x)], \\ B(p, x) &= c^T(x) \operatorname{adj} [pE - A(x)] b(x), \\ B_f(p, x) &= c^T(x) \operatorname{adj} [pE - A(x)] b_f(x); \end{aligned}$$

$$(15) \quad \begin{aligned} R(p, x) &= \det [pE - R(x)], \\ L(p, x) &= k^T(x) \operatorname{adj} [pE - R(x)] l(x), \\ Q(p, x) &= k^T(x) \operatorname{adj} [pE - R(x)] q(x); \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} V_i(p, x) &= e_i \operatorname{adj} [pE - A(x)] b(x), \\ L_i(p, x) &= k^T(x) \operatorname{adj} [pE - R(x)] l_i(x), \\ W_i(p, x) &= e_i \operatorname{adj} [pE - A(x)] b_f(x), \quad i = \overline{1, q}. \end{aligned}$$

Отметим, что в (13) деление на полином $A(p, x)$ происходит нацело. Перейдем к решению указанных выше задач по выбору параметров уравнения (3).

Обеспечение селективной инвариантности. В соответствии с определением система имеет это свойство, если она содержит внутренние модели ВВ. По условиям задачи ОУ их не содержит, поэтому их необходимо ввести в УУ. С этой целью его характеристический полином берется в виде $R(p, x) = \tilde{R}(p, x)\Phi(p)$. Согласно (4) воздействие $f(t)$ умножается на полином (12), равный сумме двух слагаемых; причем в $R(p, x)$ спектральная

модель $F(p)$ имеется, поэтому полагаем $L_i(p, x) = \tilde{L}_i(p, x)\Phi(p)$. При этом в уравнении (4) возмущение $f(t)$ будет умножено на $F(p)$; тем самым будет выполнено второе условие (5) и парировано влияние $f(t)$ на ошибку системы, так как $F(p)f(t) \equiv 0$. Аналогично, задающее воздействие $g(t)$ согласно (4) умножается на полином $H_{\varepsilon g}(p, x) = H(p, x) - H_g(p, x)$, поэтому при $R(p, x) = \tilde{R}(p, x)\Phi(p)$ и $L_i(p, x) = \tilde{L}_i(p, x)\Phi(p)$ для выполнения первого условия (5) необходимо, чтобы $L(p, x) - Q(p, x) = \tilde{Q}(p, x)G(p)$. Здесь $\tilde{R}(p, x)$, $\tilde{Q}(p, x)$ и $\tilde{L}_i(p, x)$ — некоторые полиномы более низких степеней по сравнению со степенями полиномов $R(p, x)$, $Q(p, x)$ и $L_i(p, x)$, $i = \overline{1, q}$ соответственно.

Обеспечение устойчивости. С этой целью в соответствии с методом синтеза на основе КЛМ функциональный характеристический полином $H(p, x)$ степени $\ell = n + r$ заменяется в (10) гурвицевым полиномом $H^*(p)$ той же степени, корни которого являются постоянными, вещественными и различными числами [20, 22, 23]. В результате с учетом выбранных выше полиномов $R(p, x)$ и $\tilde{L}_i(p, x)$ равенство (10) принимает вид:

$$(17) \quad H^*(p) = \bar{A}(p, x)\tilde{R}(p, x) + B(p, x)L(p, x) + \sum_{i=1}^q \bar{V}_i(p, x)\tilde{L}_i(p, x),$$

где $\bar{A}(p, x) = A(p, x)\Phi(p)$; $\bar{V}_i(p, x) = V_i(p, x)\Phi(p)$ — полиномы с известными коэффициентами.

Корни p_i^* полинома $H^*(p)$ можно выбирать, используя, в частности, условия:

$$(18) \quad |\operatorname{Re}(p_j^*)| \geq (5 \div 7)/t_p^*, \quad p_j^* = -\sigma_j^*, \quad \sigma_j^* > \varepsilon_\sigma > 0, \\ |\sigma_j^* - \sigma_\varsigma^*| \geq \Delta_\sigma > 0, \quad j \neq \varsigma, \quad j, \varsigma = \overline{1, \ell},$$

здесь t_p^* — требуемая длительность переходных процессов [25]; ε_σ , Δ_σ — некоторые числа.

Обеспечение разрешимости задачи синтеза. Выражение (17) фактически является полиномиальным уравнением относительно неизвестных полиномов

$$\begin{aligned} \tilde{R}(p, x) &= \rho_0(x) + \rho_1(x)p + \dots + \rho_{\tilde{r}}(x)p^{\tilde{r}}, \\ L(p, x) &= \lambda_0(x) + \lambda_1(x)p + \dots + \lambda_l(x)p^l \quad \text{и} \\ \tilde{L}_i(p, x) &= \tilde{\lambda}_{i,0}(x) + \tilde{\lambda}_{i,1}(x)p + \dots + \tilde{\lambda}_{i,\tilde{l}_i}(x)p^{\tilde{l}_i}. \end{aligned}$$

По [20, 22, 26] уравнение (17) решается путем перехода к эквивалентной ему СЛАУ:

$$(19) \quad G_y d = h_\Gamma,$$

где векторы d , h_Γ определяются выражениями

$$(20) \quad d = [\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_l \quad \tilde{\lambda}_{1,0} \tilde{\lambda}_{1,1} \dots \tilde{\lambda}_{1,\tilde{l}_1} \quad \dots \quad \tilde{\lambda}_{q,0} \tilde{\lambda}_{q,1} \dots \tilde{\lambda}_{q,\tilde{l}_q} \quad \rho_0 \rho_1 \dots \rho_{\tilde{r}}]^T,$$

$$(21) \quad h_\Gamma = [\delta_0^* \quad \delta_1^* \quad \dots \quad \delta_\ell^*]^T,$$

δ_j^* — коэффициенты гурвицевого полинома $H^*(p)$, а матрица имеет вид

$$(22) \quad G_y = \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc} \beta_0 & & & 0 & v_{10} & & & 0 & & & \\ \beta_1 & \beta_0 & & & v_{1,1} & v_{10} & & & & & \\ \vdots & \beta_1 & \ddots & & \vdots & v_{1,1} & \ddots & & & & \dots \\ \beta_m & \vdots & \ddots & \beta_0 & v_{1,\varsigma_1} & \vdots & \ddots & v_{10} & & & \dots \\ 0 & \beta_m & \ddots & \beta_1 & & v_{1,\varsigma_1} & \ddots & v_{1,1} & & & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots & & & \dots \\ & \vdots & \ddots & \beta_m & & & & v_{1,\varsigma_1} & & & \\ 0 & & & & 0 & & & & & & \end{array} \right] \\ \begin{array}{c} l+1 \text{ — столбцов} \end{array} \quad \begin{array}{c} \tilde{l}_1+1 \text{ — столбцов} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} v_{q0} & & & 0 & \alpha_0 & & & 0 \\ v_{q1} & v_{q0} & & & \alpha_1 & \alpha_0 & & \\ \vdots & v_{q1} & \ddots & & \vdots & \alpha_1 & \ddots & \\ v_{q,\varsigma_q} & \vdots & \ddots & v_{q0} & \vdots & \vdots & \ddots & \alpha_0 \\ & v_{q,\varsigma_q} & \ddots & v_{q1} & \alpha_{\tilde{n}} & \vdots & \ddots & \alpha_1 \\ & & \ddots & \vdots & & \alpha_{\tilde{n}} & \ddots & \vdots \\ & & & v_{q,\varsigma_q} & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & & & \alpha_{\tilde{n}} \end{array} \right] \\ \begin{array}{c} \tilde{l}_q+1 \text{ — столбцов} \end{array} \quad \begin{array}{c} \tilde{r}+1 \text{ — столбцов} \end{array}.$$

В выражениях (19), (20) $G_y = G_y(x)$, $d = d(x)$, а в (22) $\beta_j = \beta_j(x)$, $v_{ij} = v_{ij}(x)$ и $\alpha_j = \alpha_j(x)$ — функциональные коэффициенты полиномов $B(p, x)$, $\bar{V}_i(p, x)$ и $\bar{A}(p, x)$ при p^j ; для краткости записи аргумент x в (19), (20) и (22) опущен.

Для обеспечения разрешимости системы (22) в уравнении (17) учитываются только те полиномы $\bar{V}_i(p, x)$, при которых степень ℓ полинома $H^*(p)$ будет минимальной, матрица G_y — квадратной и $\det G_y \neq 0$ [22, 26]. В [26] приведен метод определения необходимых степеней полиномов $\tilde{R}(p)$, $L(p)$ и $\tilde{L}_i(p)$ в линейном случае с учетом $\mu_{\text{нуу}}$. Однако этот метод может применяться и в случае квазилинейных моделей ОУ (1). Поэтому здесь он не рассматривается, но будет проиллюстрирован ниже при решении численного примера.

Решение системы (22) определяет полиномы $\tilde{R}(p)$, $L(p)$ и q полиномов $\tilde{L}_i(p, x)$, при которых характеристический полином матрицы $H(x)$ (8) равен полиному $H^*(p)$.

Реализация НУУ. С этой целью путем перехода в (3) к операторной форме записывается соответствующее уравнение «вход-выход» НУУ:

$$(23) \quad R(p, x)u = Q(p, x)g - L(p, x)y - \sum_{i=1}^q L_i(p, x)\tilde{x}_i.$$

Полиномы $R(p, x)$ и $L_i(p, x)$ находятся по формулам $R(p, x) = \tilde{R}(p, x)\Phi(p)$, $L_i(p, x) = \tilde{L}_i(p, x)\Phi(p)$, а полином $L(p, x)$ определяется решением системы (22). Полином $Q(p, x)$ степени $\kappa = \nu_g - 1$, где $\nu_g = \deg G(p)$, находится из принятого выше выражения $L(p, x) - Q(p, x) = \tilde{Q}(p, x)G(p)$ следующим образом. Если полином $G(p) \neq p^{\nu_g}$, то записывается полиномиальное уравнение

$$(24) \quad \tilde{Q}(p, x)G(p) + Q(p, x) = L(p, x),$$

где полиномы $\tilde{Q}(p, x)$ и $Q(p, x)$ — его минимальное решение, которое находится путем перехода к эквивалентной СЛАУ [11, 22]. Если же $G(p) \equiv p^{\nu_g}$, то берется полином

$$(25) \quad Q(p, x) = \lambda_0(x) + \lambda_1(x)p + \dots + \lambda_{\nu_g-1}(x)p^{\nu_g-1}.$$

Таким образом, все полиномы уравнения «вход-выход» НУУ определены. Чтобы убедиться в физической реализуемости НУУ при принятом $\mu_{\text{нуу}}$, достаточно перейти от уравнения (25) к эквивалентным ему уравнениям в переменных состояния, например, воспользовавшись соотношениями, приведенными в [22, стр. 346]. При этом для обеспечения параметрической грубости свойства селективной инвариантности необходимо обеспечить формирование спектральных моделей в явной форме. Подробнее этот момент показан ниже на примере.

Матрица $H(x)$ (8) системы (7) в общем случае является функциональной, корни ее характеристического полинома являются вещественными, отрицательными и различными в области $x \subset \Omega_{\text{УН}} \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| < \infty$. Если область $\Omega_{\text{УН}} = \mathbb{R}^n$, $\|x\| < \infty$, то для устойчивости положения равновесия системы (7) в целом достаточно, чтобы существовал ℓ -вектор $b_1(w)$ с дифференцируемыми компонентами или константами, при котором выполняются условия:

$$(26) \quad |\det U_c(w)| \geq \varepsilon_c > 0,$$

$$U_c(w) = \begin{bmatrix} b_1(w) & H(x)b_1(w) & \dots & H^{\ell-1}(x)b_1(w) \end{bmatrix},$$

$$(27) \quad \sup_w \frac{\text{Sp} P_1(w)}{(\det P_1(w))^{1/\ell}} \leq K < \infty, \quad \forall w \in \mathbb{R}^l, \quad \|w\| < \infty,$$

где $\text{Sp}(\cdot)$ — след матрицы $(\cdot)$; $P_1(w) = (U_A(w)M_s)(U_A(w)M_s)^T$; ε_c , K — положительные числа;

$$(28) \quad M_s = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_{\ell-1} & 1 \\ \delta_2 & \cdot & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \delta_{\ell-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

δ_i — коэффициенты полинома $H(p, x) = \det(pE - H(x)) = p^\ell + \delta_{\ell-1}p^{\ell-1} + \dots + \delta_1p + \delta_0$ [20].

Условия на корни характеристического полинома $H(p, x)$ функциональной матрицы $H(x)$ являются конструктивными и выполняются выбором полинома $H^*(p)$. Если условия (2) и первое условие (6) выполняются в области $\Omega_{\text{УН}} = \mathbb{R}^n$, $\|x\| < \infty$, то положение равновесия системы будет асимптотически устойчиво в целом при выполнении условий (26) и (27) [20]. Если же при этом матрица $H(x)$ (8) оказывается постоянной, то положение равновесия $x = \mathbf{0}$ системы (7) будет асимптотически устойчивым в целом [22] независимо от условий (26), (27). Если же область $\Omega_{\text{УН}} \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| < \infty$ является ограниченной, то положение равновесия $x = \mathbf{0}$ системы (7) будет асимптотически устойчивым в большом [22], также независимо от условий (26), (27).

Покажем эффективность разработанного метода синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления на численном примере.

4. Пример

Предположим, нелинейный объект управления описывается уравнениями:

$$(29) \quad \dot{x}_1 = 2x_1 + 3 \sin x_2 + 1,5u + f, \quad \dot{x}_2 = 4 \sin x_2 + 2u + 3f, \quad y = 3x_1 - 2,25x_2,$$

где x_1 , x_2 и y — измеряемые переменные состояния и выходная переменная; возмущение $f(t) = f_0 + f_m \sin(0,5t + \varphi_0)$, $t \geq 0$ не измеряется; задающее воздействие $g(t) = g_0 1(t)$ измеряется; f_0 , f_m , φ_0 , g_0 — неизвестные ограниченные постоянные. Синтезировать нелинейную селективно-инвариантную к $g(t)$ и $f(t)$ систему так, чтобы время регулирования $t_p \leq t_p^* = 1,5$ с; относительный порядок искомого НУУ $\mu_{\text{НУУ}} = 0$ [22, 25].

Решение. Прежде всего, построим КЛМ объекта. С этой целью, следуя [22], найдем производную $d \sin x_2 / dx_2 = \cos x_2$ и проинтегрируем ее по вспомогательной переменной:

$$a_c(x_2) = \int_0^1 \cos(x_2 \theta) d\theta = x_2^{-1} \sin(x_2 \theta) \Big|_0^1 = x_2^{-1} \sin x_2 = \omega(x_2).$$

Заменив в (29) функцию $\sin x_2$ ее КЛМ моделью $a_c(x_2)x_2$, получим КЛМ объекта:

$$(30) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3\omega(x_2) \\ 0 & 4\omega(x_2) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} f, \quad y = [3 \quad -2,25]x,$$

где $x = [x_1 \quad x_2]^T$. Сравнив системы (30) и (1), заключаем, что в данном случае

$$(31) \quad A(x) = \begin{bmatrix} 2 & 3\omega(x_2) \\ 0 & 4\omega(x_2) \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c(x) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2,25 \end{bmatrix}.$$

По (31) находятся определители матриц из условия (2) при $n = 2$:

$$\det \begin{bmatrix} 1,5 & 3 + 6\omega(x_2) \\ 2 & 8\omega(x_2) \end{bmatrix} = -6, \quad \det \begin{bmatrix} 3 & -2,25 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = 13,5;$$

т.е. условия (2) выполняются и КЛМ (30) является полной в области $\Omega_{\text{УН}} = \mathbb{R}^2$, $\|x\| < \infty$.

В рассматриваемом случае K_p -изображения внешних воздействий имеют вид: $G(p) = p$, $F(p) = p(p^2 + 0,25)$, т.е. $\Phi(p) = p(p^2 + 0,25)$. По формулам (14)–(16) находятся полиномы:

$$\begin{aligned} B(p, x) &= 9, \quad A(p, x) = (p - 2)(p - 4\omega(x_2)), \\ B_f(p, x) &= -3,75p + 15\omega(x_2) + 13,5, \\ V_1(p, x) &= 1,5p, \quad V_2(p, x) = 2(p - 2), \\ W_1(p, x) &= p + 5\omega(x_2), \quad W_2(p, x) = 3(p - 2). \end{aligned}$$

Первое условие (6) выполняется.

В данном случае, следуя [26], устанавливаем, что для получения квадратной матрицы G_y при минимальном ℓ достаточно обратной связи лишь по одной переменной состояния, т.е. $q = 1$, а $\tilde{x}_1 = x_1$. При этом полиномиальное уравнение (17) принимает вид:

$$(32) \quad H^*(p) = \bar{A}(p, x)\tilde{R}(p, x) + B(p, x)L(p, x) + \bar{V}_1(p, x)\tilde{L}_1(p, x),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}(p, x) &= [p^2 - (4\omega(x_2) + 2)p + 8\omega(x_2)](p^3 + 0,25p), \\ \bar{V}_1(p, x) &= 1,5p(p^3 + 0,25p). \end{aligned}$$

Из принятого выше вида полиномов $R(p, x)$, $L(p, x)$, $Q(p, x)$, $L_i(p, x)$ с учетом $q = 1$ и $\mu_{\text{нуу}} = \min\{r - l, r - \kappa, r - \tilde{l}_1, 0\} = 0$ следуют равенства:

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \deg \tilde{R}(p, x) = r - 3, \quad l = \deg L(p, x) = r, \\ \tilde{l}_1 &= \deg \tilde{L}_1(p, x) = r - 3, \quad \ell = \deg H^*(p) = 2 + r. \end{aligned}$$

При этом в алгебраической системе (19), эквивалентной полиномиальному уравнению (32), число уравнений есть $N_y = \ell + 1 = 2 + r + 1$, а число неизвестных коэффициентов $N_k = \tilde{r} + 1 + l + 1 + \tilde{l}_1 + 1 = 3r - 3$. Тогда из условия $N_k = N_y$ следует $r = 3$, и поэтому $\ell = 5$, $\tilde{r} = 0$, $\tilde{l}_1 = 0$, $l = 3$. При этом

$$\begin{aligned} \tilde{R}(p, x) &= \rho_0(x), \quad \tilde{L}_1(p, x) = \tilde{\lambda}_{10}(x), \\ L(p, x) &= \lambda_0(x) + \lambda_1(x)p + \lambda_2(x)p^2 + \lambda_3(x)p^3 \quad \text{и} \quad \det G_y(x) \neq 0. \end{aligned}$$

В данном случае $t_p^* = 1,5$ с, $\ell = 5$, поэтому первое неравенство (18) принимает вид $\left| \text{Re}(p_j^*) \right| \geq 3,33 \div 4,67$, $j = \overline{1, 5}$. С учетом этого неравенства и остальных условий (18) полагаем: $p_1^* = -4$, $p_2^* = -6$, $p_3^* = -9$, $p_4^* = -12$, $p_5^* = -15$, что приводит к полиному

$$H^*(p) = p^5 + 46p^4 + 807p^3 + 6714p^2 + 26\,352p + 38\,880.$$

В результате подстановки полученных значений в выражения (19)–(22) с учетом приведенных выше полиномов $B(p, x) = 9$, $\bar{A}(p, x)$ и $\bar{V}_1(p, x)$ получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$(33) \quad \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0,375 & -\omega - 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 8\omega + 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & -4\omega - 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \tilde{\lambda}_{10} \\ \rho_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38\,880 \\ 26\,352 \\ 6714 \\ 807 \\ 46 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решение системы (33) дает значения коэффициентов полиномов $L(p, x)$, $\tilde{L}_1(p, x)$ и $\tilde{R}(p, x)$, что позволяет записать:

$$L(p, x) = [(806,75 - 8\omega(x_2))p^3 + 6702,5p^2 + (26\,352 - 2\omega(x_2))p + 38\,880]/9, \\ R(p, x) = p(p^2 + 0,25), \quad L_1(p, x) = [48 + 4\omega(x_2)](p^3 + 0,25p)/1,5.$$

В данном случае $G(p) \equiv p$, т.е. $\nu_g = 1$, поэтому из выражения (25) получаем $\kappa = 0$ и $Q(p, x) = 4320$. Полученные данные приводят к уравнению «вход-выход» (23) искомого НУУ:

$$(34) \quad p(p^2 + 0,25)u = 4320g - (\lambda_0 + \lambda_1 p + \lambda_2 p^2 + \lambda_3 p^3)y - \\ - 2[48 + 4\omega(x_2)]p(p^2 + 0,25)x_1/3.$$

С целью формирования в НУУ внутренних спектральных моделей ВВ в явном виде, что необходимо для обеспечения параметрической грубости свойства селективной инвариантности [22], уравнение (34) приводится к виду:

$$u = \left(\frac{17\,280}{p} - \frac{17\,280p}{p^2 + 0,25} \right) g - \\ - \left(\frac{806,75 - 8\omega(x_2)}{9} + \frac{17\,280}{p} - \frac{148\,817,5p - 26\,150,3125}{9(p^2 + 0,25)} \right) y - \\ - \frac{2}{3}[48 + 4\omega(x_2)]x_1.$$

Применив к этому выражению соотношения (П.2.6) и (П.2.7) из [22, с. 347], придем к квазилинейной модели искомого НУУ:

$$(35) \quad \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,25 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 17\,280 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 17\,280 \end{bmatrix} g - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 \\ 26\,150,3125 \\ -148\,817,5 \end{bmatrix} y,$$

$$(36) \quad u = z_1 + z_3 - \{[806,75 - 8\omega(x_2)]y + 6[48 + 4\omega(x_2)]x_1\}/9.$$

Как видно, полученное НУУ содержит внутренние спектральные модели как постоянных составляющих ВВ, так и гармонической составляющей с частотой $\omega = 0,5$ рад/с.

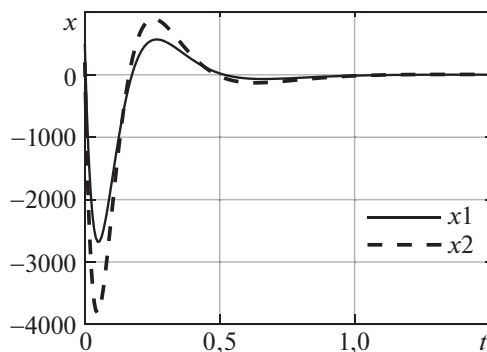


Рис. 1.

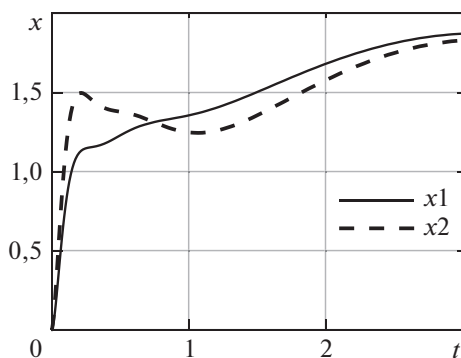


Рис. 2.

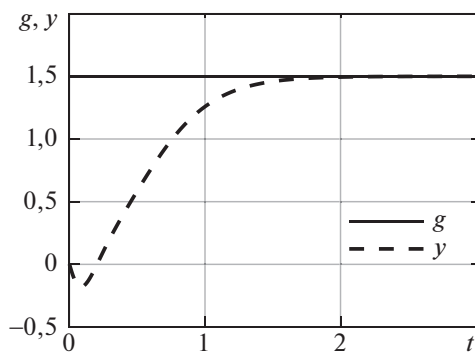


Рис. 3.

Объединив уравнения (30), (35) и (36) в одну систему, найдем, что параметры этой системы — постоянные числа, а корни ее характеристического полинома строго меньше нуля, следовательно, полученная нелинейная система является асимптотически устойчивой в целом.

Результаты моделирования системы (29), (35), (36) в MATLAB приведены на рис. 1–6. На рис. 1 показаны графики изменения переменных состояния $x_1(t)$ и $x_2(t)$ объекта управления (29) при отсутствии внешних воздействий и

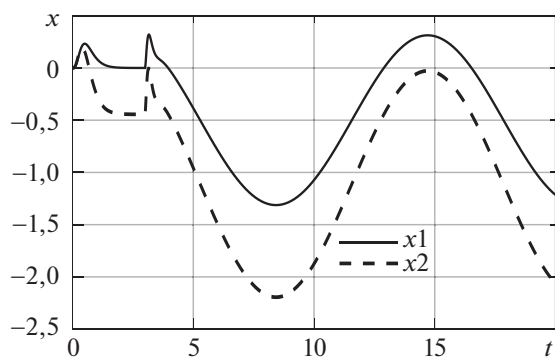


Рис. 4.

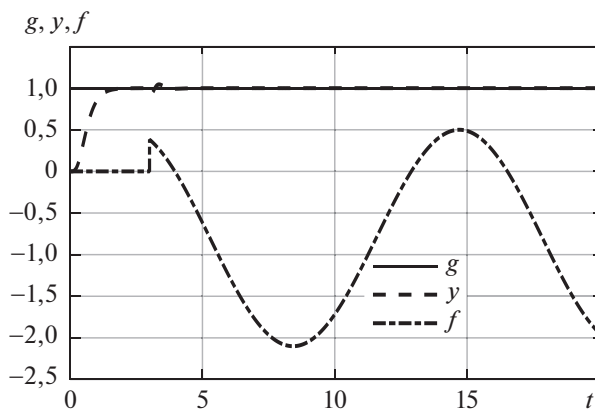


Рис. 5.

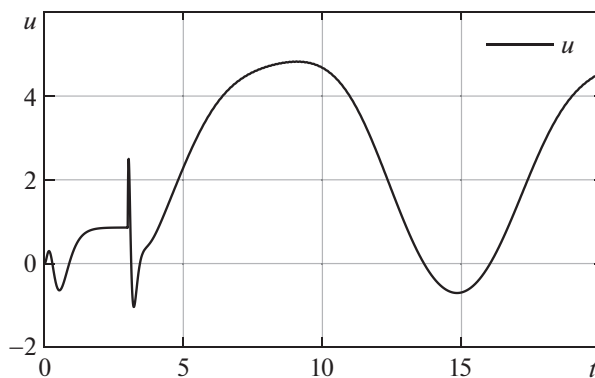


Рис. 6.

при «больших» начальных условиях, т.е. при $x_0 = [500 \ 200]^T$, $z_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ и $g(t) = f(t) = 0$. Эти графики свидетельствуют об асимптотической устойчивости синтезированной нелинейной системы.

На рис. 2 и 3 показаны переходные процессы системы при одновременном возникновении задающего воздействия $g(t) = 1,5 \cdot 1(t)$ и смещенного гар-

монического возмущения $f(t) = 1(t) + 2\sin(0,5t)$ при $t \geq 0$ и нулевых начальных условиях. Несмотря на наличие возмущения, отклонение системы $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$ в установившемся режиме равно нулю (рис. 3).

С целью более полного представления характера процессов в синтезированной селективно-инвариантной системе, на рис. 4–6 приведены графики изменения переменных состояния, задающего воздействия, выходной величины объекта и возмущения, а также управления в интервале времени от нуля до 20 с.

В этом случае возмущение $f(t) = -0,8 + 1,3\sin(0,5(t - 3) + 2)$, $3 \leq t$ (рис. 5) возникает на 3 с позже задающего воздействия $g(t) = 1(t)$, поэтому после окончания переходного процесса ($0 \leq t < 3$), вызванного задающим воздействием, и переменные состояния объекта (рис. 4), и выходная переменная $y(t)$ (рис. 5), и управление $u(t)$ (рис. 6) принимают постоянные значения, что соответствует постоянному задающему воздействию.

При возникновении возмущения $f(t)$ ($t = 3$ с) в системе начинается переходный процесс, особенно заметный на графиках рис. 4 и 6. После его окончания выходной сигнал устройства управления по форме становится аналогичным внешнему возмущению, причем его постоянная и гармоническая составляющие оказываются в противофазе с аналогичными составляющими внешнего возмущения.

5. Заключение

Предложенный в работе метод синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления является аналитическим и позволяет синтезировать системы управления с нулевыми ошибками как по задающим, так и по возмущающим внешним воздействиям известной формы. Решение задачи синтеза получено на основе принципа внутренних моделей с применением оригинального метода синтеза нелинейных систем управления. В этом методе используются квазилинейные модели, которые являются точным представлением нелинейных дифференциальных уравнений в форме Коши с дифференцируемыми правыми частями. Разработанный метод применим для синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления объектами с дифференцируемыми нелинейностями. Свойство селективной инвариантности замкнутой системы является грубым ко всем ее параметрам, кроме спектро-задающих параметров внутренних моделей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Математические модели ВВ — это однородные дифференциальные уравнения (ДУ) некоторого порядка, возможно в совокупности с алгебраическими [7–13, 27]. Например, модель воздействия $f(t) = f_0 1(t)$ являются уравнения $\dot{x}_f(t) = 0$, $x_f(0) = f_0$, $f(t) = x_f(t)$, где $x_f(0)$ — начальное условие. Моделью гармонического воздействия $f(t) = f_m \sin(\omega_f t + \phi_f)$ с частотой ω_f , произвольными амплитудой f_m и фазой ϕ_f являются уравнения $\dot{x}_{f1} = -\omega_f^2 x_{f2}$,

$\dot{x}_{f2} = x_{f1}$, $\dot{f} = r_1 x_{f1} + r_2 x_{f2}$ с начальными условиями x_{f10} и x_{f20} . Здесь r_1, r_2 — некоторые константы.

Для парирования влияния внешнего воздействия на ошибку системы достаточно наличия в ней лишь спектральной модели воздействия, которая однозначно описывает его форму, путем учета только его спектра. В общем случае спектральная модель ВВ $g(t)$ может быть представлена либо уравнением в переменных состояния $\dot{x}_g = Gx_g$, где G и x_g — числовая матрица и вектор, либо K_p -изображением, т.е. полиномом $G(p) = \det(pE - G)$, где $p = d/dt$. Подчеркнем, что полином $G(p)$ при $p = D$ является $K(D)$ -изображением по Кулебакину этого ВВ [7], т.е. представления спектральной модели K_p -изображением или уравнениями в форме Коши являются эквивалентными [27].

Важным свойством K_p -изображения ВВ является равенство нулю при всех $t \geq 0$ произведения K_p -изображения на это воздействие как функцию времени [7]. Например, если ВВ $\varphi_1(t) = \varphi_0 \exp(\lambda_\varphi t)$, то его K_p -изображение $\Phi_1(p) = p - \lambda_\varphi$; тогда $\Phi_1(p)\varphi(t) = (p - \lambda_\varphi)\varphi_0 \exp(\lambda_\varphi t) = \varphi_0[(d \exp(\lambda_\varphi t)/dt) - \lambda_\varphi \exp(\lambda_\varphi t)] \equiv 0$ при ограниченном φ_0 , так как $d \exp(\lambda_\varphi t)/dt = \lambda_\varphi \exp(\lambda_\varphi t)$.

Уравнение $\dot{x}_{\tilde{f}} = \tilde{F}x_{\tilde{f}}$, где матрица $\tilde{F} = \text{diag}\{0 \lambda_{\tilde{f}}\}$ — это спектральная модель ВВ, равного $\tilde{f}(t) = \tilde{f}_0 1(t) + \tilde{f}_e \exp(\lambda_{\tilde{f}} t)$, $0 \leq t < \infty$, где $\tilde{f}_0$ и $\tilde{f}_e$ — ограниченные постоянные. K_p -изображением этого ВВ является полином $\tilde{F}(p) = p^2 - \lambda_{\tilde{f}} p$. Нетрудно убедиться, что $(p^2 - \lambda_{\tilde{f}} p)\tilde{f}(t) \equiv 0$. Из приведенных примеров следует, что K_p -изображение суммы ВВ равно произведению K_p -изображений каждого из них. Отметим также, что K_p -изображение ВВ $f(t)$ легко находится по таблице изображений по Лапласу [25, с. 29]: оно равно знаменателю его изображения $f(s)$ при $s = p$. Корни K_p -изображений или, что то же самое, собственные числа матриц уравнений ВВ в форме Коши являются спектро-задающими параметрами их моделей.

Вывод уравнения «вход-выход» замкнутой системы. ДУ (7) в операторной форме можно записать в виде $[pE - H(x)]w = h(x)g + h_f(x)f$. Отсюда $w = [pE - H(x)]^{-1}\{h(x)g + h_f(x)f\}$. Подставляя это выражение с учетом равенства $[pE - H(x)]^{-1} = \text{adj}[pE - H(x)]/\det[pE - H(x)]$ во второе уравнение (7), получим уравнение (9), где

$$(II.1) \quad H(p, x) = \det[pE - H(x)],$$

$$(II.2) \quad H_g(p, x) = [c^T(x) \quad \bar{0}^T] \text{adj}[pE - H(x)]h(x),$$

$$(II.3) \quad H_f(p, x) = [c^T(x) \quad \bar{0}^T] \text{adj}[pE - H(x)]h_f(x).$$

Здесь матрица $pE - H(x)$ определяется выражением

$$(II.4) \quad pE - H(x) = \begin{bmatrix} pE - A(x) & -b(x)k^T(x) \\ \Pi(x) & pE - R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix}.$$

Покажем, что операторы уравнения (9) непосредственно связаны выражениями (10)–(13) с операторами (14)–(16) уравнений «вход-выход» квазилинейных моделей (1) и (3). Выражения (14)–(16) выводятся из указанных уравнений (1) и (3) совершенно аналогично приведенному выше выводу уравнения (9). В общем случае уравнение выхода НУУ (3) может иметь вид $u = k^T(x)z + \lambda_r(x)y + \sum_{i=1}^q \tilde{\lambda}_{ir}(x)\tilde{x}_i$. При этом приведенные ниже выкладки существенно усложнятся, но их смысл не изменится [22, с. 349–353]. Поэтому для большей наглядности, далее предполагается, что $\lambda_r(x) \equiv 0$ и $\tilde{\lambda}_{ir}(x) \equiv 0$, $i = \overline{1, q}$.

Вывод оператора $H(p, x)$ (10). В соответствии с формулой (П.8), приведенной в [28, с. 223], из (П.4) следует выражение: $H(p, x) = \det[pE - H(x)] = \det \tilde{A} \det(\tilde{D} - \tilde{C} \tilde{A}^{-1} \tilde{B})$. Отсюда с учетом обозначений (П.4) выводим равенство:

$$H(p, x) = \det[pE - A(x)] \det \left\{ pE - R(x) + \Pi(x) [pE - A(x)]^{-1} b(x) k^T(x) \right\}.$$

Так как $[pE - A(x)]^{-1} = \text{adj}[pE - A(x)] / \det[pE - A(x)]$, то с учетом (14), (16) и обозначения $\Pi(x)$ имеем

$$\begin{aligned} (\text{П.5}) \quad H(p, x) &= \\ &= A(p, x) \det \left[pE - R(x) + \psi_l(p, x) l(x) k^T(x) + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) l_i(x) k^T(x) \right]. \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$(\text{П.6}) \quad \psi_l(p, x) = B(p, x)/A(p, x), \quad \psi_i(p, x) = V_i(p, x)/A(p, x).$$

Применяя тождество (П.25) из [28, с. 233] ко второму множителю в (П.5) с учетом (15), получим:

$$H(p, x) = A(p, x) \left[\begin{aligned} &R(p, x) + \psi_l(p, x) k^T(x) \text{adj}[pE - R(x)] l(x) + \\ &+ \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) k^T(x) \text{adj}[pE - R(x)] l_i(x) \end{aligned} \right].$$

Отсюда с учетом обозначений (П.6), (15) следует оператор (10).

Вывод оператора $H_g(p, x)$ (11). С этой целью воспользуемся формулой (П.12) из [28, с. 223], которая для блочной матрицы (П.4) позволяет записать равенство:

$$\begin{aligned} (\text{П.7}) \quad \text{adj}[pE - H(x)] &= \\ &= \begin{bmatrix} \det M \text{adj} \tilde{A} + \alpha^{-1} (\text{adj} A) \tilde{B} (\text{adj} M) \tilde{C} (\text{adj} \tilde{A}) & -(\text{adj} \tilde{A}) \tilde{B} (\text{adj} M) \\ -(\text{adj} M) \tilde{C} (\text{adj} \tilde{A}) & \alpha \cdot \text{adj} M \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\alpha = \det \tilde{A} \neq 0$, $M = \tilde{D} - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B}$. Подставив в (П.2) выражения (П.7) и $h(x)$ из (8), получим с учетом обозначений (14) следующее равенство:

$$(П.8) \quad \begin{aligned} H_g(p, x) &= c^T(x) \operatorname{adj} [pE - A(x)] b(x) \cdot k^T(x) \operatorname{adj} M q(x) = \\ &= B(p, x) k^T(x) \operatorname{adj} M q(x). \end{aligned}$$

Так как матрица $M = \tilde{D} - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B}$, то с учетом обозначений (П.4) выводим

$$\begin{aligned} M &= pE - R(x) + \\ &+ A^{-1}(p, x) \left\{ l(x) c^T(x) + \sum_{i=1}^q l_i(x) e_i \operatorname{adj} [pE - R(x)] \right\} b(x) k^T(x). \end{aligned}$$

Раскрывая здесь фигурные скобки, с учетом обозначений (П.6) получаем

$$(П.9) \quad M = pE - R(x) + \psi_l(p, x) l(x) k^T(x) + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) l_i(x) k^T(x).$$

Следовательно, произведение $k^T(x) \operatorname{adj} M q(x)$ в равенстве (П.8) имеет вид

$$\begin{aligned} k^T(x) \operatorname{adj} M q(x) &= k^T(x) \operatorname{adj} \left[pE - R(x) + \psi_l(p, x) l(x) k^T(x) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) l_i(x) k^T(x) \right] q(x). \end{aligned}$$

Отсюда по формуле (П.27) из [28, с. 233] с учетом третьего обозначения (15) имеем

$$(П.10) \quad k^T(x) \operatorname{adj} M q(x) = k^T(x) \operatorname{adj} [pE - R(x)] q(x) = Q(p, x).$$

Подставив это равенство в выражение (П.8), получим оператор (11).

Вывод оператора $H_f(p, x)$ (12). Из выражения (П.3) с учетом (П.7) выводим

$$(П.11) \quad H_f(p, x) = c^T(x) \left\{ (\det M) \operatorname{adj} \tilde{A} + \alpha^{-1} (\operatorname{adj} \tilde{A}) \tilde{B} (\operatorname{adj} M) \tilde{C} \operatorname{adj} \tilde{A} \right\} b_f(x).$$

Раскрывая здесь скобки и подставляя значение $\tilde{B}$ из (П.4), получим

$$(П.12) \quad H_f(p, x) = c^T(x) \operatorname{adj} \tilde{A} b_f(x) \det M - \alpha^{-1} c^T(x) \operatorname{adj} \tilde{A} b(x) \Lambda,$$

где обозначено

$$(П.13) \quad \Lambda = k^T(x) (\operatorname{adj} M) \tilde{C} (\operatorname{adj} \tilde{A}) b_f(x).$$

С учетом равенств $\tilde{A} = pE - A(x)$ и (14) находим

$$(П.14) \quad c^T(x) \operatorname{adj} \tilde{A} b_f(x) = B_f(p, x), \quad c^T(x) \operatorname{adj} \tilde{A} b(x) = B(p, x).$$

Применяя формулу (П.25) из [28, с. 233)] к (П.9) с учетом (15), (16) и (П.6), имеем

$$\begin{aligned} (П.15) \quad \det M &= \\ &= \det \left\{ pE - R(x) + \psi_l(p, x) l(x) k^T(x) + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) l_i(x) k^T(x) \right\} = \\ &= \det [pE - R(x)] + \psi_l(p, x) k^T(x) \operatorname{adj} [pE - R(x)] l(x) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) [k^T(x) \operatorname{adj} [pE - R(x)] l_i(x)] = \\ &= R(p, x) + \psi_l(p, x) L(p, x) + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) L_i(p, x). \end{aligned}$$

Подставляя $\tilde{C}$, $\tilde{A}$ из (П.4) в (П.13) и раскрывая скобки с учетом (П.9), получим:

$$\begin{aligned} (П.16) \quad \Lambda &= [k^T(x) \operatorname{adj} M l(x)] B_f(p, x) + \\ &+ \sum_{i=1}^q [k^T(x) \operatorname{adj} M l_i(x)] e_i \operatorname{adj} [pE - A(x)] b_f(x). \end{aligned}$$

В соответствии с третьим выражением (16) $e_i \operatorname{adj} [pE - A(x)] b_f(x) = W_i(p, x)$; по аналогии с (П.10) и с учетом (15) находим $k^T(x) \operatorname{adj} M l(x) = L(p, x)$, $k^T(x) \operatorname{adj} M l_i(x) = L_i(p, x)$. Тогда из (П.16) следует равенство

$$(П.17) \quad \Lambda = L(p, x) B_f(p, x) + \sum_{i=1}^q L_i(p, x) W_i(p, x).$$

Подставляя выражения (П.14), (П.15) и (П.17) в (П.12), будем иметь

$$\begin{aligned} H_f(p, x) &= B_f(p, x) R(p, x) + \psi_l(p, x) L(p, x) B_f(p, x) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) L_i(p, x) B_f(p, x) - \\ &\quad - \psi_l(p, x) L(p, x) B_f(p, x) - \psi_l(p, x) \sum_{i=1}^q L_i(p, x) W_i(p, x). \end{aligned}$$

Учитывая здесь (П.6), группируя суммы и вынося множитель $A^{-1}(p, x)$ за скобку, получим

$$H_f(p, x) = B_f(p, x)R(p, x) + \\ + \sum_{i=1}^q L_i(p, x) \{V_i(p, x)B_f(p, x) - B(p, x)W_i(p, x)\} A^{-1}(p, x).$$

Наконец, учитывая здесь обозначение (13), получим оператор (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аполонский В.В., Копылова Л.Г., Тарарыкин С.В.* Разработка и исследование селективно-инвариантных электромеханических систем с адаптацией регуляторов к изменениям уровня скорости // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. № 5. С. 28–43.
2. *Тихомирова И.А., Копылова Л.Г., Тарарыкин С.В.* Адаптивное селективно-инвариантное управление следящими электроприводами с упругими кинематическими передачами / Вестник ИГЭУ. 2021. Вып. 4. С. 57–64.
3. *Обухова Е.Н.* Применение метода интегральной адаптации для синтеза адаптивных законов управления пневмоприводом в условиях гармонического возмущения // Известия ЮФУ. Технические науки. 2020. № 4(214). С. 200–211.
4. *Синицын А.С.* Нелинейный синтез астатической системы управления гидравлической подвеской автомобиля. Сборник научных трудов IX Всероссийской научной конференции «Системный анализ и прикладная синергетика» / Южный федеральный университет. 2019. № 9. С. 155–165.
5. *Пишхопов В.Х., Медведев М.Ю., Гуренко Б.В.* Алгоритмы терминального управления подвижными объектами мультикоптерного типа // Мехатроника, автоматизация и управление. 2019. Т. 20. № 1. С. 44–51.
<https://doi.org/10.17587/mau.20.44-51>
6. *Neydorf R.A., Gaiduk A.R., Kudinov N.V., Dolgov V.V.* Application of Quasilinear and CGA Models for Design Significantly Nonlinear Control Systems // Journal of Physics: Conference Series (JPC), E3S Web of Conferences, 2020, 224, 01015, <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004121894>
7. *Кулебакин В.С.* Операторное К(D)-изображение функций и его практическое применение // Труды ВВИА им. Жуковского. 1958. Вып. 695.
8. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука, 1980. 376 с.
9. *Надеждин П.В.* Получение фильтров Колмогорова–Винера на основе принципа селективной инвариантности / Теория инвариантности, теория чувствительности и их применения. VI Всесоюзное совещание. (Тезисы докладов). М.: ИПУ, 1982. С. 37–38.
10. *Гайдук А.Р.* Условия достижимости инвариантности систем управления энергетическими объектами // АиТ. 2006. № 5. С. 93–101.
Gaiduk A.R. Invariance Attainability Conditions for Power Plant Control Systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 5. P. 759–766.

11. *Гайдук А.Р.* Синтез селективно инвариантных систем управления // Вестник ИГЭУ. Иваново: Изд-во ИГЭУ. 2017. № 1. С. 46–55.
12. *Ушаков А.В.* Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах при внешних конечномерных воздействиях // АиТ. 1992. № 11. С. 72–82.
Ushakov A.V. Modal Estimation of Process Quality in Multidimensional Systems with External Finite-Dimensional Excitation // Autom. Remote Control. 1993. V. 53. No. 11. P. 1712–1721.
13. *Бобцов А.А., Никифоров В.О., Пыржин А.А., Слута О.В., Ушаков А.В.* Методы адаптивного и робастного управления нелинейными объектами в приборостроении: учебное пособие для высших учебных заведений. СПб: НИУ ИТМО, 2013. 277 с. ISBN 978-5-7577-0428-9
14. *Isidori A.* Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems. Advanced Textbook in Control and Signal Processing. London, Springer, 2016. 414 p.
15. *Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V.* Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: Wiley, 1995. 564 p. ISBN 0-471-12732-9
16. *Yang Y., Zhang H.H., Voyles R.M.* Rotary Inverted Pendulum System Tracking and Stability Control Based on Input-output Feedback Linearization and PSO-optimization Fractional Order PID Controller // Automatic Control, Mechatronics and Industrial Engineering, London, Taylor & Francis Group. 2019, pp. 79–84. ISBN 978-1-138-60427-813
17. *Gerasimov D.N., Liu L., Nikiforov V.O.* Adaptive Backstepping Control with Fast Parametric Convergence for a Class of Nonlinear Systems // 18th European Control Conference (ECC), 2019, pp. 3432–3437.
<https://doi.org/10.23919/ECC.2019.8795898>
18. *Furtat I.B., Tupichin E.A.* Modified Backstepping Algorithm for Nonlinear Systems // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 9. P. 1567–1578.
19. *Madeira D. de S., Adamy J.* Feedback Control of Nonlinear Systems Using Passivity Indices // Proc. IEEE Conference on Control Applications, Sydney, Australia. 2015, pp. 263–268.
20. *Gaiduk A.R.* Analytic Synthesis of Controls for Nonlinear Objects in One Class // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 2. P. 227–237.
21. *Gaiduk A.R.* A Polynomial Design for Nonlinear Control Systems // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 10. P. 1638–1642.
22. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012. 360 с.
23. *Gaiduk A.R., Stojković N.M.* Analytical Design of Quasilinear Control Systems // FACTA UNIVERSITATIS. Series: Automatic Control and Robotics. 2014. V. 13. No. 2. P. 73–84.
24. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
25. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. М.: Физматлит, 2007. 312 с. 26.
26. *Гайдук А.Р.* Выбор обратных связей в системе управления минимальной сложности // АиТ. 1990. № 5. С. 29–37.
Gaiduk A.R. Feedback Selection in Control System of Minimum Complexity // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 5. P. 593–600.

27. *Гайдук А.Р.* Оценивание воздействий и инвариантность // *АиТ.* 1984. № 3. С. 20–29.
28. *Гайдук А.Р.* Непрерывные и дискретные динамические системы. М.: УМ и ИЦ «Учебная литература», 2004. 252 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 19.01.2022

После доработки 12.09.2022

Принята к публикации 29.09.2022