Линейные системы

© 2023 г. Р.П. АГАЕВ, д-р физ.-мат. наук (agaraf3@gmail.com),
Д.К. ХОМУТОВ (homutov_dk@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

О СВОЙСТВАХ МЕТОДА ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ В ЗАДАЧЕ О КОНСЕНСУСЕ

В статье изучается асимптотическое поведение многоагентной системы с информационными связями. Доказано, что для произвольного орграфа связей многоагентной системы метод ортогональной проекции, предложенный для регуляризации протокола консенсуса, характеризуется псевдообратной матрицей для введенной вспомогательной матрицы. Также исследован собственный проектор лапласовской матрицы, соответствующей орграфу связей, в котором влияния на фиксированного агента меняются пропорционально. Получен ряд результатов, которые имеют самостоятельное значение и могут быть использованы в моделях многоагентных систем с различными протоколами.

Ключевые слова: многоагентная система, консенсус, собственный проектор, лапласовская матрица, орграф связей, сбалансированный орграф.

DOI: 10.31857/S000523102305001X, **EDN:** AFGUFJ

1. Введение

Многоагентные системы (МАС) с информационными связями (см., например, [1–5]), как обычно, представляются взвешенным орграфом связей, а сам протокол согласования характеристик для непрерывного случая задается с помощью лапласовской матрицы. Протоколы – модели МАС для дискретного случая, описываются стохастическими матрицами. Условия достижения консенсуса в таких моделях определяются алгебраическими свойствами орграфа связей или же инвариантами (спектром, собственным проектором и т.п.) соответствующих матриц. В таких моделях существование остовного дерева является обязательным условием консенсуса или согласования характеристик. Асимптотическое поведение системы, как это было установлено в [6–8], определяется собственным проектором лапласовской матрицы, построенной для орграфа связей. Для дискретной модели консенсус также зависит от предела последовательности степеней стохастической матрицы. Для всех протоколов если консенсус достигается при любом векторе начальных значений, то собственный проектор должен иметь ранг, равный 1. По определению регулярности [9], стохастическая матрица регулярна, если ранг предела последовательности ее степеней равен 1. Если собственный проектор имеет ранг больше 1, то не для каждого вектора начальных значений консенсус достигается. В этом случае любой метод, приводящий к консенсусу, называем методом регуляризации. Слово "регуляризация" связано с тем, что асимптотическое поведение системы после принятой меры задается стохастической матрицей ранга 1. А ранг предела последовательности степеней стохастической матрицы равен единице, если она регулярная.

В первой части работы приведена графовая интерпретация одного из методов регуляризации протокола консенсуса – метод ортогональной проекции. Исследованы свойства метода проекции с помощью псевдообратной матрицы. Согласно этому методу, пространство всевозможных начальных мнений ортогональным проектором, т.е. симметричной идемпотентной матрицей, отображается на подпространство области сходимости процедуры ДеГроота.

В [10] были рассмотрены некоторые элементы графовой интерпретации метода ортогональной проекции. Однако это касалось только соотношения весов множеств исходящих деревьев на множестве вершин базовых бикомпонент (определение приведено в следующем разделе) в результирующей матрице, и не вносило вклад в обоснования применения самого метода. В [11] для системы с отдельными базовыми бикомпонентами (без небазовых вершин) была приведена связь между методом ортогональной проекции и псевдообратной по Муру–Пенроузу для вспомогательной матрицы, построенной по лапласовской матрице. В настоящей работе мы полностью решаем поставленную в [11] задачу. Показано, что метод ортогональной проекции является естественным обобщением процесса согласования характеристик для системы с кратными нулевыми собственными значениями.

Во второй части статьи изучен собственный проектор лапласовской матрицы орграфа связей, полученного путем пропорционального изменения весов входящих дуг (в общем, всех вершин) в исходном орграфе связей. Выведено простое выражение для проектора модифицированной матрицы.

2. Необходимые понятия и вспомогательные результаты

Пусть $\Gamma = (V, E)$ – орграф с множеством вершин V и множеством дуг E.

Определение 1. *Непустое подмножество вершин K орграфа $\Gamma = (V, E)$ называют базовой бикомпонентой, если все вершины, принадлежащие K, взаимно достижимы, и нет дуг (i, j), где $j \in K$, $i \in V \setminus K$. Множество вершин всех базовых бикомпонент обозначим через $\mathcal{K}$. Множество вершин, не принадлежащих базовым бикомпонентам, обозначим через $\bar{\mathcal{K}} = V \setminus \mathcal{K}$, и назовем их небазовыми.*

Для орграфа из рис. 1,*a* множества $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$ и $\{6, 7\}$ являются базовыми бикомпонентами.

Рассмотрим многоагентную систему (МАС) с множеством агентов $\{1, \ldots, n\}$. Для МАС пусть A – матрица связей (влияний), $A = (a_{ij})$, где a_{ij} – вес влияния j-го агента на i-го. Также для системы построим орграф связей с множеством вершин $V = \{1, \ldots, n\}$, в котором каждому элементу $a_{ij} > 0$ матрицы A соответствует дуга (j, i) с весом a_{ij}.

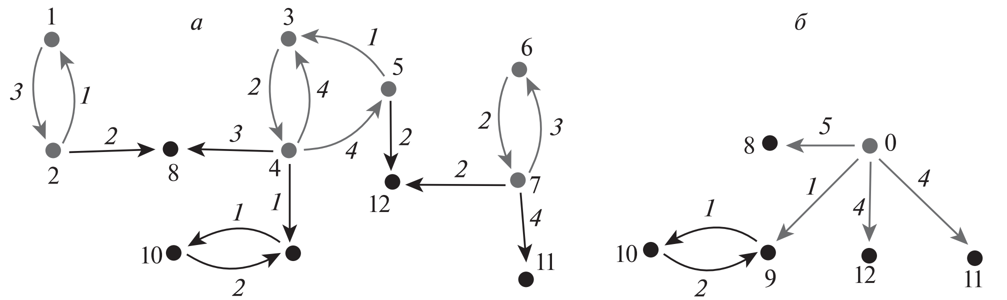

Рис. 1. *а* — Система с тремя базовыми бикомпонентами $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{6, 7\}$.
б — "Склеивание" базовых бикомпонент в одну вершину 0.

Определение 2. 1) *Вес орграфа G равен произведению весов всех его дуг:* $\varepsilon(G) = \prod_{(i,j)\in E} a_{ji}$. 2) *Вес множества орграфов $\mathcal{G} = \{G_i\}$ равен сумме весов всех орграфов, входящих в данное множество, т.е.* $\varepsilon(\mathcal{G}) = \sum_i \varepsilon(G_i)$.

Предположим, что орграф связей, помимо базовых бикомпонент, также содержит небазовые вершины.

Ключевую роль в теории многоагентных систем с информационными связями играет лапласовская матрица орграфа связей, определяемая следующим образом: $L = \Delta(A) - A$, где $\Delta(A)$ – диагональная матрица с i-м диагональным элементом, равным сумме весов входящих дуг в вершину i. Если $\mathbf{0}_n = (0, \ldots, 0)^T$ и $\mathbf{1}_n = (1, \ldots, 1)^T$ – векторы порядка n из нулей и единиц, соответственно, то $L\mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$, т.е. L – вырожденная матрица, и сумма ее строчных элементов равна нулю. Если орграф связей неориентированный, то L – симметричная, положительно полуопределенная.

Определение 3. Собственным проектором (см., например, [12]*) квадратной матрицы A называют такой проектор – идемпотентную матрицу $A^{\vdash}$, что $\mathcal{R}(A^{\vdash}) = \mathcal{N}(A^{\nu})$ и $\mathcal{N}(A^{\vdash}) = \mathcal{R}(A^{\nu})$, где ν – индекс матрицы, т.е. такое наименьшее число, для которого имеет место* $\operatorname{rank}(A^{\nu}) = \operatorname{rank}(A^{\nu+1})$.

Отметим, что собственный проектор $L^{\vdash}$ для лапласовской матрицы L является неотрицательной стохастической матрицей. В общем случае $L^{\vdash}$ для произвольной лапласовской матрицы – не обязательно симметричная, т.е. такой проектор не всегда является ортогональной для несимметричной матрицы.

Замечание 1. Для любой лапласовской матрицы L $\operatorname{ind} L = 1$, и

$$LL^{\vdash} = L^{\vdash}L = \mathbf{0}_{n\times n}. \tag{1}$$

Для любой прямоугольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существует единственная матрица $A^{+} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, для которой выполняются следующие четыре условия: 1) $A^{+}AA^{+} = A^{+}$; 2) $AA^{+}A = A$; 3) $(AA^{+})^{*} = AA^{+}$; 4) $(A^{+}A)^{*} = A^{+}A$. Матрицу A^{+} называют *псевдообратной по Муру–Пенроузу*.

Определение 4. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – однотипные, если нулевые элементы этих матриц находятся в одинаковых позициях, т.е. $a_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда $b_{ij} = 0$.

В матричных обозначениях следуем книге [13]. Для A обозначим через A_{ij} подматрицу, получаемую удалением i-й строки и j-го столбца A. Также для подматрицы, образуемой строками с номерами из множества $\alpha \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и столбцами с номерами из множества $\beta \subseteq \{1, \ldots, n\}$, примем обозначение $A\binom{\alpha}{\beta}$.[1]

Теорема 1. 1) *Собственный проектор $L^{\vdash}$ лапласовской матрицы L совпадает с* нормированной матрицей максимальных исходящих лесов $Q = (q_{ij})$ *взвешенного орграфа* Γ:

$$l^{\vdash}_{ij} = q_{ij} = \frac{\varepsilon(\mathcal{F}^{j \to i})}{\varepsilon(\mathcal{F})}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

где $\varepsilon(\mathcal{F})$ — вес множества всех остовных максимальных исходящих лесов орграфа Γ, $\varepsilon(\mathcal{F}^{j \to i})$ — вес множества тех остовных максимальных исходящих лесов, где вершина j является корнем одного из исходящих деревьев, а i достижима из j.

2) *Если i и j принадлежат одной базовой бикомпоненте, то соответствующие столбцы собственного проектора пропорциональны.*

Теорема 2 (Матричная теорема о деревьях). *Алгебраическое дополнение любого элемента i-й строки лапласовской матрицы равно суммарному весу остовных исходящих из i-й вершины деревьев.*

Заметим, что если в лапласовской матрице орграфа какой-либо столбец заменить на столбец из единиц, то определитель полученной матрицы будет равным весу множества всех остовных исходящих деревьев.

3. Интерпретация метода ортогональной проекции с помощью псевдообратной матрицы

Рассмотрим базовую дифференциальную модель

$$\dot{x}(t) = -Lx(t), \tag{2}$$

где $x_i(t)$ – характеристика i-го агента.

Отметим, что протокол (2) изучен многими авторами (см., например, [3–5]). Известно, что если 0 — простое собственное значение лапласовской матрицы L, то при любом векторе начальных характеристик $x(0)$ асимптотический консенсус существует и равен пределу [6]

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = L^{\vdash} x(0).$$

[1] При перечислении номеров строк или столбцов, как обычно, между индексами не ставится запятая. В некоторых работах через $A\binom{\alpha}{\beta}$ обозначают минор подматрицы.

А если 0 — кратное собственное значение лапласовской матрицы L, то для произвольного вектора начальных значений консенсус может не достигаться. Тогда возникает вопрос: как изменить протокол, чтобы получить консенсус при любом векторе начальных значений? Такая проблема регуляризации возникает не только в многоагентных системах, но и также в задачах кластеризации на несвязном орграфе. В этом случае после некоторых изменений исходной стохастической матрицы вектор стационарного распределения, используемый для взвешивания кластеров в задаче спектральной кластеризации, определяется однозначно с точностью до множителя.

К немногочисленным работам по многоагентным системам с несвязным орграфом связей относятся [7, 10]. В [7] исследовано несколько протоколов латентного консенсуса. В основе этих протоколов лежит добавление дополнительных дуг, приводящих к консенсусу при любом векторе начальных характеристик агентов. Эти методы аналогичны методу, применяемому в PageRank для ранжирования страниц в Интернете. Например, при методе фоновых связей к орграфу добавляется полный граф с малыми весами. Такой протокол имеет следующее представление:

$$\dot{x}(t) = -(L + \delta D)x(t), \tag{3}$$

где $\delta > 0$, $D = I - \mathbf{1}v^T$, $v_i > 0$, $\sum_{i=1}^n v_i = 1$.

В [7] в частности доказано, что если $x(t)$ – решение системы (3), то

$$\lim_{\delta\to+0}\lim_{t\to\infty} x(t) = \mathbf{1}v^T L^{\vdash} x(0).$$

Если $v = \frac{1}{n}\mathbf{1}$, то имеем

$$\lim_{\delta\to+0}\lim_{t\to\infty} x(t) = EL^{\vdash} x(0),$$

где E — матрица с элементами n^{-1}.

Регуляризация "в духе" PageRank приводит к усреднению строк собственного проектора.

Другой метод регуляризации — метод ортогональной проекции, был предложен в [10]. Его также можно применить как для модели ДеГроота — $x_k = Px_{k-1}$, так и для непрерывного протокола. Согласно этому методу, пространство всевозможных начальных мнений ортогональным проектором, т.е. симметричной идемпотентной матрицей S, отображается на подпространство Q_L — область сходимости процедуры ДеГроота. Образ $\mathcal{R}(S)$ матрицы S совпадает с линейной оболочкой векторов, состоящих из линейно независимых столбцов матрицы $I - P$ и вектора из единиц. Если x_0 — вектор начальных мнений, а x_0' – преобразованный вектор, тогда $|x_0' - x_0|$ будет минимальной, поскольку матрица S – ортогональный проектор. Некоторые координаты преобразованного вектора могут иметь отрицательные знаки, если даже исходный вектор начальных характеристик был положительным. Однако

$P^\infty S$ является не только стохастической матрицей, но и матрицей единичного ранга. Поэтому, если вектор начальных значений x_0 имеет только положительные координаты, то результирующий вектор $P^\infty S x_0$ также будет положительным.

Ортогональный проектор S на подпространство $Q_L = \mathcal{R}(L) \oplus \mathrm{Span}(\mathbf{1})$ представляется в виде

$$S = UU^+ = U(U^T U)^{-1} U^T, \tag{4}$$

где U — матрица полного столбцового ранга r, полученная из L отбрасыванием по одному столбцу, соответствующему какой-либо вершине из каждой базовой бикомпоненты орграфа, и добавлением столбца $\mathbf{1}_n$ в качестве первого.

3.1. Связь между обобщенно обратной матрицей для U и методом ортогональной проекции

Графовая интерпретация метода ортогональной проекции частично была дана в [10] с помощью матриц X и Z (см. п. 3. теоремы 3 в [10]). В [11] была приведена связь между обобщенно обратной матрицей для U и методом ортогональной проекции для класса орграфов без небазовых вершин. В настоящем разделе мы рассмотрим более общий случай, предположим, что орграф связей, помимо отдельных базовых бикомпонент, также содержит вершины, не принадлежащие множеству $\mathcal{K}$. Покажем, что метод ортогональной проекции является естественным обобщением протокола достижения консенсуса.

Пусть E_{10} — квадратная матрица порядка n, первый столбец которой состоит из единиц, а все остальные элементы равны нулю.

Вначале предположим, что $\mathrm{rank}(L) = n - 1$. В этом случае нет необходимости в регуляризации, и для любого вектора начальных значений консенсус достигается, и $L^\vdash = E_{10} U^{-1}$.

Если $\mathrm{rank}(L) < n - 1$, то

$$L^\vdash S = L^\vdash UU^+ = E_{10} U^+, \tag{5}$$

т.е. в обоих случаях консенсус однозначно определяется первой строкой обобщенно обратной матрицы для U: в первом случае U^{-1}, а во втором — U^+. Таким образом имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1.

1) *Если* $\mathrm{rank}(L) = n - 1$, *то* $L^\vdash S = L^\vdash I = E_{10} U^{-1}$.

2) *Если* $\mathrm{rank}(L) < n - 1$, *то* $L^\vdash S = E_{10} U^+$.

Из утверждения 1 следует, что если в системе достигается консенсус, то он однозначно определяется нормированными весами множества остовных исходящих деревьев орграфа коммуникаций. В свою очередь, эти веса, согласно матричной теореме о деревьях 2, однозначно определяются первой строкой матрицы U^{-1}. В силу утверждения 1, метод ортогональной проекции является естественным обобщением согласования характеристик и определяется в общем случае первой строкой псевдообратной по Муру–Пенроузу матрицы U. Известно, что (см., например, Приложение А в [14]) элементы псевдообратной матрицы, так же как для невырожденной матрицы, можно представить с помощью миноров исходной матрицы следующим образом:

$$u^+_{1i_1} = \frac{\displaystyle\sum_{i_2<\ldots<i_r} \det U\begin{pmatrix} i_2\ldots i_r \\ 2\ldots r\end{pmatrix} \det U\begin{pmatrix} i_1\ldots i_r \\ 1\ldots r\end{pmatrix}}{\displaystyle\sum_{k_1<\ldots<k_r}\left(\det U\begin{pmatrix} k_1\ldots k_r \\ 1\ldots r\end{pmatrix}\right)^2}. \tag{6}$$

Используя (6), далее мы охарактеризуем метод ортогональной проекции и элементы матрицы U^+ с помощью лесной структуры орграфа связей. Для этого нам понадобятся следующие утверждения, в предположении, что матрица L имеет представление (7).

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_v & 0 \\ * & * & \cdots & * & L_R \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где v — число базовых бикомпонент в соответствующем орграфе, $*$ — блоки, которые в общем случае — ненулевые, L_R — подматрица L, строки и столбцы которой соответствуют всем небазовым вершинам. Важно отметить, что $\det L_R$ равен весу множества остовных исходящих деревьев орграфа Γ_ξ, полученного из Γ “склеиванием” всех вершин из $\mathcal{K}$ в одну вершину ξ (см. [15]). На рис. 1,*б* приведен орграф “склеиванием” базовых вершин орграфа из рис. 1,*а*.

Утверждение 2. 1) *Миноры* $\det U\binom{i_1\ldots i_r}{1\ldots r}$ *и* $\det U\binom{i_2\ldots i_r}{2\ldots r}$ *равны нулю, если они получаются путем вычеркивания хотя бы одной строки, соответствующей вершине из* $\bar{\mathcal{K}}$.

2) *Минор* $\det U\binom{i_2\ldots i_r}{2\ldots r}$ *равен нулю, если множество* $\{i_2,\ldots,i_r\}$ *содержит все вершины одной базовой бикомпоненты.*

3) *Абсолютное значение ненулевого минора* $\det U\binom{i_2\ldots i_r}{2\ldots r}$ *равно произведению* $\det L_R$ *на вес множества всех исходящих лесов на* $\mathcal{K}$ *с корнями из вершин* $\{1,\ldots,n\}\setminus\{i_2,\ldots,i_r\}$.

Утверждение 3. *Пусть* $\{j_1,\ldots,j_{m_s}\}$ *— множество всех вершин некоторой базовой бикомпоненты* s, *содержащееся в* $\{i_1,\ldots,i_r\}$, *и пусть в нем нет вершин других базовых бикомпонент. Тогда:*

1)

$$\left|\det U\begin{pmatrix} i_1\ldots i_r \\ 1\ldots r\end{pmatrix}\right| = \sum_{p=1}^{m_s}\left|\det U\begin{pmatrix} K_p \\ 2\ldots r\end{pmatrix}\right|, \tag{8}$$

где $K_p = (i_1\ldots i_r)\setminus j_p$, $p=1,\ldots,m_s$;

2) $\det U\binom{j_p\, K_p}{1\ldots r} \neq 0$ *и* $\det U\binom{K_p}{2\ldots r} \neq 0$, $p = 1, \ldots, m_s$, *имеют один и тот же знак.*

Отметим, что $(i_1 \ldots i_r)\backslash j_p$ означает, что из упорядоченного набора $(i_1 \ldots i_r)$ удален элемент j_p. А запись $j_p\, K_p$ указывает на то, что к упорядоченному набору K_p слева добавлен элемент j_p.

Используя утверждения 2 и 3, можно доказать следующую теорему, которая впервые была доказана в [10] для системы без небазовых агентов.

Теорема 3. Для системы с произвольным орграфом связей сумма элементов первой строки матрицы U^+ равна 1:

$$\sum_{i=1}^{n} u_{1i}^{+} = 1.$$

Итак, метод ортогональной проекции в МАС с любым орграфом связей и вектором начальных значений $x(0)$ приводит к консенсусу, и консенсус определяется произведением

$$(u_{11}^{+}, \ldots, u_{1n}^{+})(x_1(0), \ldots, x_n(0))^T.$$

В частности, если орграф связей содержит остовное дерево, то в этом случае матрица U будет квадратной, невырожденной, и, согласно (6), выполняется

$$u^{+}{}_{1i} = u_{1i}^{-1} = \frac{\left|\det U\binom{(1\ldots n)\backslash i}{2\ldots n}\right| \det U}{(\det U)^2} = \frac{\left|\det U\binom{(1\ldots n)\backslash i}{2\ldots n}\right|}{\det U} = l_{1i}^{\vdash}.$$

Последнее равенство следует из теоремы 1, согласно которой, $|\det U\binom{(1\ldots n)\backslash i}{2\ldots n}|$ совпадает с алгебраическим дополнением любого элемента i-й строки лапласовской матрицы орграфа связей.

Утверждение 4. Если i_1 и j_1 принадлежат одной базовой компоненте, то $\dfrac{u_{1i_1}^{+}}{u_{1j_1}^{+}} = \dfrac{l_{1i_1}^{\vdash}}{l_{1j_1}^{\vdash}}$.

Используя утверждение 3, числитель выражения (6) можно представить как

$$\Sigma = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2<\ldots<i_r} \det U\begin{pmatrix} i_2 \ldots i_r \\ 2 \ldots r \end{pmatrix} \det U\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_r \\ 1 \ldots r \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_r} \left(\det U\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_r \\ 1 \ldots r \end{pmatrix}\right)^2 = \sum_{s=1}^{v} \sum_{i=1}^{q_s} \varrho_{si}^2,$$

где $q_s = (m_1 m_2 \cdots m_v)/m_s$, $s = 1, \ldots, v$. Для каждой базовой бикомпоненты s с множеством вершин N_s число ϱ_{si} равно произведению веса множества всех деревьев в бикомпоненте s на вес максимальных исходящих лесов с фиксированными вершинами.

Пусть $P_1 = \{1, \dots, m_1\}$ — множество вершин первой базовой бикомпоненты. Согласно выражению (6),

$$W_1 = \sum_{i=1}^{m_1} u_{1i}^{+} = D^{-1} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{K_i} \det U \begin{pmatrix} K_i \\ 2 \dots r \end{pmatrix} \det U \begin{pmatrix} i\, K_i \\ 1 \dots r \end{pmatrix} =$$

$$= D^{-1} \sum_{m_1+1<\dots<i_r} \left(\det U \begin{pmatrix} P_1\, i_{m_1+1} \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \right)^2 = D^{-1} \sum_{i=1}^{q_1} \varrho_{1i}^2, \tag{9}$$

где $K_t = (1 \dots m_1 i_{m_1+1} \dots i_r) \setminus t$, $t = 1, \dots, m_1$. Напомним, что в (9) для каждой базовой бикомпоненты s число ϱ_{si} равно произведению веса множества всех деревьев базовой бикомпоненты s на произведение весов всех деревьев с фиксированными корнями из остальных базовых бикомпонент, и определителя блока L_R. С помощью (9) можно определить отношение сумм весов в разных бикомпонентах.

Если орграф состоит из одной базовой бикомпоненты с множеством вершин $m_1 = n$, то из (9) в силу $\sum_{i=1}^{n} \det U \binom{N \setminus i}{2 \dots n} = \det U \binom{1 \dots n}{1 \dots n} = \det U$ непосредственно следует:

$$W_1 = D^{-1} \sum_{i=1}^{n} \det U \begin{pmatrix} N \setminus i \\ 2 \dots n \end{pmatrix} \det U = \frac{\det U \det U}{\left(\det U \right)^2} = 1.$$

4. Явное выражение для собственного проектора произведения положительной диагональной матрицы на лапласовскую

Как было отмечено во введении, асимптотическое поведение многих моделей МАС определяется свойствами собственного проектора лапласовской матрицы орграфа связей. При этом k-й столбец характеризует "важность" k-го агента в итоговом консенсусе. Для сильно связного орграфа связей чем больше значения $\ell_{1k}^{\vdash}$, тем сильнее влияния k-го агента на итоговое значение. Рассмотрим следующую задачу: если влияния других агентов на k-го агента меняются пропорционально, то как изменится собственный проектор и можно ли собственный проектор полученной матрицы выразить через собственный проектор исходной матрицы? При этом если влияния на k-го агента меняются в τ_k раз, то лапласовская матрица M орграфа с новыми весами будет равна TL, где L — матрица орграфа до изменения его весов, $T = \mathrm{diag}(\tau_1, \dots, \tau_n)$.

В данном разделе докажем, что собственный проектор $M^{\vdash}$ можно представить как $L^{\vdash} D$, где D — некоторая диагональная матрица. Согласно теореме 1 матрицы $L^{\vdash}$ и $M^{\vdash}$ — однотипны.

Если $\mathrm{rank} L^{\vdash} = 1$, то очевидно, что всегда существует положительная диагональная матрица D, такая, что $M^{\vdash} = L^{\vdash} D$. Однако, если $\mathrm{rank} L^{\vdash} > 1$, то существование диагональной матрицы не очевидно. Кроме того, в первом случае если не известна $M^{\vdash}$, то нахождение D не является тривиальной задачей.

Теорема 4. Если $M = TL$, где $T = \mathrm{diag}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ — положительная диагональная матрица, а L — произвольная лапласовская матрица, то существует неотрицательная диагональная матрица D, для которой имеет место:

$$M^{\vdash} = L^{\vdash} D. \tag{10}$$

Следствие 1 (из теоремы 4). *Если орграф связей сильно связный, и $T = \mathrm{diag}(l^{\vdash}_{11}, \ldots, l^{\vdash}_{1n})$, то:*

1) *для собственного проектора матрицы $M = TL$ имеет место $M^{\vdash} = \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathbf{T}}$;*

2) *матрица TL — сбалансированная.*

Пример 1. Рассмотрим многоагентную систему с орграфом связей, приведенным на рис. 1. Также рассмотрим матрицы L^0_R и U, первая из которых соответствует орграфу со “склеенными” в вершину $\mathbf{0}$ базовыми бикомпонентами:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$L^0_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выясним, из каких величин складывается элемент u^+_{16} матрицы U^+. Сумма в числителе выражения (6) для u^+_{16} содержит шесть ненулевых слагаемых,

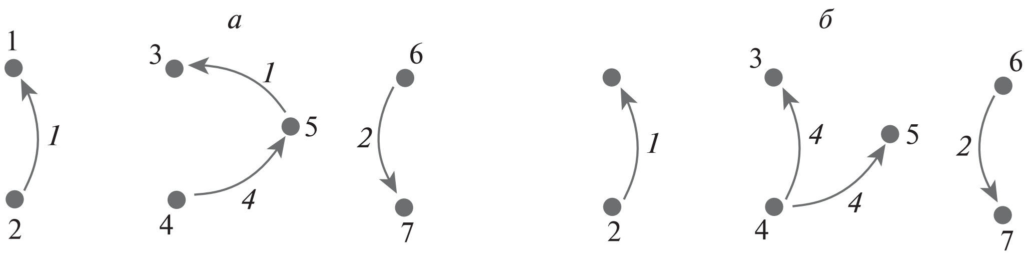

Рис. 2. Два леса — *а* и *б*, состоящие из трех исходящих деревьев с корнями 2, 4 и 6.

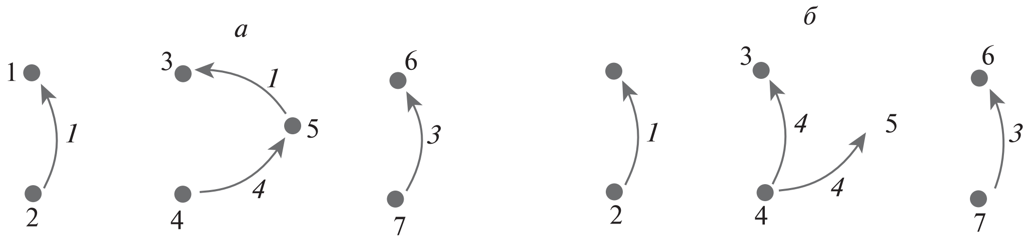

Рис. 3. Два леса — *а* и *б*, состоящие из трех исходящих деревьев с корнями 2, 4 и 7.

каждое из которых представляет собой произведение двух миноров. Одно из слагаемых равно

$$\det U\begin{pmatrix}1\,3\,5\,7\,\dots\,12\\ 2\,3\,\dots\,10\end{pmatrix}\det U\begin{pmatrix}6\,1\,3\,5\,7\,8\,\dots\,12\\ 1\,2\,\dots\,10\end{pmatrix}.$$

Согласно п. 3 утверждения 2 абсолютное значение ненулевого минора $\det U\binom{1\,3\,5\,7\,8\,\dots\,12}{2\,3\,\dots\,10}$ равно произведению веса множества всех исходящих лесов на $\mathcal{K}$ с корнями $\{2,4,6\}=\{1,\dots,12\}\backslash\{1,3,5,7,8,\dots,12\}$ на $\det L_R=80$.

На рис. 2,*а* и 2,*б* приведены оба леса на множестве вершин $\mathcal{K}=\{1,\dots,7\}$, исходящие из корней $\{2,4,6\}$. Вес первого леса равен 8, второго — 32, т.е. сумма весов этих лесов равна 40. Если это число умножим на вес дерева, показанного на рис. 1,*б*, т.е. на 80, то получится $\det U\binom{1\,3\,5\,7\,8\,\dots\,12}{2\,3\,\dots\,10}=40\cdot 80=$ $=3200$.

Аналогичную графовую интерпретацию имеет минор $\det U\binom{1\,3\,5\,6\,8\,\dots\,12}{2\,3\,\dots\,10}=$ $=-60\cdot 80=-4800$, абсолютное значение которого равно произведению веса множества всех исходящих лесов на $\mathcal{K}$ с корнями $\{1\,\dots\,12\}\backslash\{1\,3\,5\,6\,8\,\dots\,12\}=$ $=\{2\,4\,7\}$ на $\det L_R=80$.

На рис. 3 приведены оба леса, исходящие из корней $\{2,4,7\}$: вес первого леса равен 12, а второго равен 48, т.е. сумма весов двух лесов равна 60. Итак, $\det U\binom{1\,3\,5\,7\,8\,\dots\,12}{2\,3\,\dots\,10}=-60\cdot 80=-4800$.

С другой стороны, если применить утверждение 3 для базовой бикомпоненты $\{6, 7\}$, то получим:

$$\left|\det U\begin{pmatrix} 6\,1\,3\,5\,7\,8\,\ldots\,12 \\ 1\,2\,\ldots\,10 \end{pmatrix}\right| = \left|\det U\begin{pmatrix} 7\,1\,3\,5\,6\,8\,\ldots\,12 \\ 1\,2\,\ldots\,10 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \left|\det U\begin{pmatrix} 1\,3\,5\,7\,8\,\ldots\,12 \\ 2\,3\,\ldots\,10 \end{pmatrix}\right| + \left|\det U\begin{pmatrix} 1\,3\,5\,6\,8\,\ldots\,12 \\ 2\,3\,\ldots\,10 \end{pmatrix}\right| = 3200 + 4800 = 8000.$$

5. Заключение

В работе получено новое представление метода ортогональной проекции с использованием матрицы U^+, ранее приведенного только для узкого класса орграфов связей. Показано, что метод проекции является естественным обобщением протокола консенсуса и представляется элементами псевдообратной матрицы U^+. Установлено, что собственный проектор матрицы TL, где T — положительная диагональная матрица, можно представить как $(TL)^{\vdash} = L^{\vdash} D$, где D — положительная диагональная матрица. Доказано, что если орграф сильно связный, то у диагональной матрицы D все диагональные элементы равны между собой. Из основных результатов как следствие получен простой способ регуляризации произвольного орграфа.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 2. 1) Матрица U имеет следующий вид:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & \cdots & l_{1k'} & \mathbf{0}_{1,n-k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & l_{k2} & \cdots & l_{kk'} & \mathbf{0}_{1,n-k} \\ \mathbf{1}_{n-k,1} & * & * & * & L_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & U_1 & & \\ 1 & \ddots & & \\ \vdots & & U_v & \\ \mathbf{1}_{n-k,1} & * & * & L_R \end{pmatrix},$$

где $k' = k - v + 1$, $k = \sum_{i=1}^{v} m_i$ (v — число базовых бикомпонент), а матрица L_R – квадратная и невырожденная. Предположим, что упомянутый минор был получен путем вычеркивания строк, среди которых есть хотя бы одна строка с номером из множества $\{k+1, \ldots, n\}$. Тогда подматрица $U\binom{i_1 \ldots i_r}{1 \ldots r}$ будет иметь блочно-треугольный вид, правый нижний квадратный блок $L_{R'}$ которой содержит нулевую строку. Поэтому $\det L_{R'} = 0$, и $\det U\binom{i_1 \ldots i_r}{1 \ldots r} = 0$.

2) Пусть множество $\{i_2, \ldots, i_r\}$ содержит все вершины $\{j_1, \ldots, j_{m_s}\}$ одной — s-й базовой бикомпоненты. Тогда подматрица со строками $\{j_1, \ldots, j_{m_s}\}$ содержит всего $m_s - 1$ ненулевых столбцов. Минор $\det U\binom{i_2 \ldots i_r}{2 \ldots r}$ состоит из членов, каждый из которых есть произведение $r-1$ элементов подматрицы, взятых из различных строк и столбцов. Поэтому каждый такой член содержит нулевой множитель, и минор $\det U\binom{i_2 \ldots i_r}{2 \ldots r}$ равен нулю.

3) Если минор $\det U\binom{i_2 \ldots i_r}{2 \ldots r}$ отличен от нуля, то согласно пункту 2), множество $\{i_2, \ldots, i_r\}$ состоит из $m_s - 1$ строк ($s = 1, \ldots, v$) из каждой базовой

бикомпоненты и строк, соответствующих вершинам из $\bar{\mathcal{K}}$. Очевидно, что минор равен определителю блочно-диагональной матрицы, т.е.

$$\det U\binom{i_2 \dots i_r}{2 \dots r} = \det \begin{pmatrix} U_1' & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & U_v' & \\ & * & & L_R \end{pmatrix},$$

где матрица U_i' получена из U_i вычеркиванием одной, например, i_k-й строки. Согласно матричной теореме о деревьях, определитель матрицы U_i' равен минору любого элемента i_k-й строки U_i и его абсолютное значение равно сумме весов всех исходящих деревьев из i_k-й вершины i-й базовой бикомпоненты. Это рассуждение верно для любого блока U_t'.

Таким образом, абсолютное значение ненулевого минора $\det U\binom{i_2 \dots i_r}{2 \dots r}$ равно произведению $\det L_R$ на вес множества всех исходящих лесов на $\mathcal{K}$ с корнями $\{1, \dots, n\} \backslash \{i_2, \dots, i_r\}$.

Доказательство утверждения 3. 1) Не уменьшая общности, предположим, что вершины пронумерованы так, что $j_p = p, p = 1, \dots, m_s$. Пусть в множестве вершин $\{i_1, \dots, i_r\}$ подмножество $\{i_1, \dots, i_{r'}\}$, где $r' = r - |\bar{\mathcal{K}}|$, является подмножеством множества базовых вершин. Рассмотрим определитель $\det U\binom{1 \dots m_s \dots i_r}{1 \dots r}$ и представим его в блочном виде как

$$\det \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & \dots & l_{1m_s} & 0_{1,r'-m_s} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & l_{m_s 2} & \cdots & l_{m_s m_s} & 0_{1,r'-m_s} & 0 \\ \mathbf{1}_{r'-p,1} & 0_{r'-p,1} & \cdots & 0_{r'-p,1} & Q_{r'-m_s} & 0 \\ * & * & * & * & * & L_R \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} Q_{m_s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & Q_{r'-m_s} & \mathbf{0} \\ * & * & L_R \end{pmatrix}.$$

Согласно матричной теореме о деревьях 2, алгебраическое дополнение первого элемента любой k-й строки блока Q_{m_s} равно сумме весов деревьев, исходящих из вершины k. Поэтому определитель матрицы Q_{m_s} равен сумме весов всех исходящих деревьев базовой бикомпоненты с множеством вершин $\{1, \dots, m_s\}$, а $\left|\det U\binom{1 \dots m_s \dots i_r}{1 \dots r}\right|$ — произведению суммы весов всех исходящих деревьев базовой бикомпоненты с вершинами $\{1, \dots, m_s\}$ на $|\det Q_{r'-m_s}|$, который равен сумме весов максимальных исходящих лесов на $\mathcal{K} \setminus \{1 \dots m_s\}$ с вершинами: $\mathcal{K} \backslash \{i_1, \dots, i_{r'}\}$, и на $\det L_R$. Таким образом, выполняется равенство (8).

2) Покажем, что знаки миноров $\det U\binom{j_p\, K_p}{1 \dots r} \neq 0$ и $\det U\binom{K_p}{2 \dots r} \neq 0$, $p = 1, \dots, m_s$, совпадают.

Заметим, что $\det U\binom{i_1 \dots i_r}{1 \dots r} = \sum_{k=1}^{m_s} (-1)^{1+k+l} \det U_{k1}^s \xi = (-1)^l \zeta\xi$, где l — число строк в $U\binom{i_1 \dots i_r}{1 \dots r}$ до s-й базовой бикомпоненты, $U^s = (\mathbf{1}_{m_s} U_s)$, $\zeta > 0$ —

вес множества всех исходящих деревьев в s-й базовой бикомпоненте, ξ — произведение определителей других блоков. Поскольку $U\binom{j_p\, K_p}{1\ldots r}$ отличается от $U\binom{i_1\ldots i_r}{1\ldots r}$ перестановкой одной строки, их определители могут отличаться только знаком и имеет место

$$\det U\begin{pmatrix} j_p\, K_p \\ 1\ldots r \end{pmatrix} = \det U\begin{pmatrix} i_1\ldots i_r \\ 1\ldots r \end{pmatrix}(-1)^{l+p-1} = (-1)^{2l+p-1}\zeta\xi,$$

где p — номер строки в s-м блоке.

Итак, знак $\det U\binom{j_p\, K_p}{1\ldots r}$ равен $(-1)^{p-1}\xi$. Легко можно установить, что $\det U\binom{K_p}{2\ldots r}$ имеет знак $(-1)^{p+1}\xi$.

Доказательство теоремы 3. В силу (6) сумму элементов первой строки U^+ можно записать как

$$\text{(П.1)} \qquad \sum_{i_1\in N} u^+_{1i_1} = \frac{\Sigma_{\mathcal{K}} + \Sigma_{\bar{\mathcal{K}}}}{D},$$

где $\Sigma_{\mathcal{K}}$ соответствует элементам из $\mathcal{K}$, член $\Sigma_{\bar{\mathcal{K}}}$ — вершинам из $\bar{\mathcal{K}} = N\setminus\mathcal{K}$, а

$$D = \sum_{i_1<\ldots<i_r}\left(\det U\begin{pmatrix} i_1\ldots i_r \\ 1\ldots r \end{pmatrix}\right)^2.$$

Согласно п. 1 утверждения 2, если множество $\{i_1,\ldots,i_r\}$ содержит не все вершины из $\bar{\mathcal{K}}$, то соответствующий член $\det U\binom{i_1\ldots i_r}{1\ldots r}$ в представлении D равен нулю. Также, в силу п. 1 утверждения 2 имеет место

$$\Sigma_{\bar{\mathcal{K}}} = \sum_{i_1\in\bar{\mathcal{K}}}\sum_{i_2<\ldots<i_r}\det U\begin{pmatrix} i_2\ldots i_r \\ 2\ldots r \end{pmatrix}\det U\begin{pmatrix} i_1\ldots i_r \\ 1\ldots r \end{pmatrix} = 0.$$

Отметим, что в $\Sigma_{\mathcal{K}}$ и D входит множитель $\det L_R$. Доказательство равенства единице соотношения $\frac{\Sigma_{\mathcal{K}}}{D}$ приведено в [11].

Доказательство утверждения 4. Справедливость данного утверждения следует из представления $u^+_{1k_1}$. Действительно, все соответствующие множители $\det U\binom{i_1\ldots i_r}{1\ldots r}$, $\det U\binom{j_1\ldots j_r}{1\ldots r}$ в выражении (6) для $u^+_{1i_1}$ и $u^+_{1j_1}$ отличаются только знаком, а $\det U\binom{i_2\ldots i_r}{2\ldots r}$ и $\det U\binom{j_2\ldots j_r}{2\ldots r}$ — весами исходящих деревьев из i_1 и j_1.

Доказательство теоремы 4. Теорему докажем конструктивно, т.е. построим такую диагональную матрицу D. Не уменьшая общности, предположим, что лапласовская матрица L имеет блочно-треугольный вид, а для L также построим вспомогательную матрицу B^L (П.2), которая получена из L заменой первого столбца в каждом блоке L_s, соответствующем базовой бикомпоненте s, на столбец из единиц:

$$(\text{П.2})\qquad B^L = \begin{pmatrix} B_1^L & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_2^L & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_v^L & 0 \\ * & * & \cdots & * & L_R \end{pmatrix},$$

диагональные блоки $B_s^L, s = 1, \ldots, v$, для матрицы B^L определены как

$$(\text{П.3})\qquad B_s^L = \begin{pmatrix} 1 & l_{12}^s & \ldots & l_{1m_s}^s \\ 1 & l_{22}^s & \ldots & l_{2m_s}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & l_{m_s2}^s & \ldots & l_{m_sm_s}^s \end{pmatrix}.$$

Аналогично B^L и B_s^L, определим матрицы B^M и B_s^M для M.

Заметим, что i-я строка M получается путем умножения аналогичной строки L на τ_i. Определим собственный проектор $M^{\vdash}$ согласно п. 1 теоремы 1:

$$(\text{П.4})\qquad m_{ij}^{\vdash} = \frac{\varepsilon(\mathcal{F}^{j\to i})}{\varepsilon(\mathcal{F})}.$$

Согласно теореме 2 для каждой s-й базовой бикомпоненты сумма весов всех исходящих деревьев (на множестве всех вершин из данной базовой бикомпоненты) равна $\det(B_s)$. Поэтому $\varepsilon(\mathcal{F}) = \det(B^M)$.

Пусть ни в одном максимальном исходящем лесе вершина i не достижима из j. Так как графы, соответствующие лапласовским матрицам L и $M = TL$, имеют одинаковую структуру, то $m_{ij}^{\vdash} = l_{ij}^{\vdash} = 0$.

Рассмотрим случай, когда хотя бы в одном максимальном исходящем лесе i достижима из j, причем j является вершиной из s-й базовой бикомпоненты. Обозначим через $\{\Gamma_k(V, E_k)\}$ множество всех остовных подграфов, которое получилось из множества всех максимальных исходящих остовных орграфов, в которых i достижима из корневой вершины j, с добавлением к ним всех недостающих дуг из базовых бикомпонент. Пусть B^{L^k} и B^{M^k} — соответствующие матрицы полученных орграфов, построенные по аналогии с B^L и B^M. Диагональные блоки B^{L^k} и B^{M^k}, которые соответствуют базовым бикомпонентам, совпадают с аналогичными блоками матриц B^L и B^M соответственно. Очевидно, что число $\varepsilon(\mathcal{F}^{j\to i})$ для орграфа, соответствующего матрице M, равно сумме алгебраических дополнений элементов (j, i') матриц B^{M^k} т.е. $\varepsilon(\mathcal{F}^{j\to i}) = \sum_k B_{ji'}^{M^k}$, где $i' \in \{1, \ldots, n\}$ — номер столбца B^{M^k}, который соответствует номеру столбца из единиц в подматрице, соответствующей базовой бикомпоненте s.

Пусть $j' \in \{1, \ldots, m_s\}$ — номер строки блока с номером s, который соответствует строке j.

Важно подчеркнуть, что в отличие от i', номер j' указывает на строку блока s. Тогда в силу $B_q^M = B_q^{M_k}$ для всех q и k получим

$$m_{ij}^{\vdash} = \frac{\varepsilon(\mathcal{F}^{j \to i})}{\varepsilon(\mathcal{F})} = \frac{\sum\limits_k \det B_{ji'}^{M^k}}{\det B^M} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{q=1, q \neq s}^{v} \det B_q^M \left| \det B_s^M \begin{pmatrix} (1 \ldots m_s) \setminus j' \\ 2 \ldots m_s \end{pmatrix} \right| \sum\limits_k \det M_R^k}{\det M_R \prod\limits_{q=1}^{v} \det B_q^M} =$$

$$= \frac{\left| \det B_s^M \binom{(1 \ldots m_s) \setminus j'}{2 \ldots m_s} \right| \sum\limits_k \det M_R^k}{\det M_R \det B_s^M}.$$

Отметим, что L_R^k и M_R^k — блоки, соответствующие небазовым вершинам в матрицах B^{L^k} и B^{M^k} соответственно. Далее полученное выражение представляем через матрицу L:

$$m_{ij}^{\vdash} = \frac{\prod\limits_{i=1, i \neq j'}^{m_s} \tau_i \left| \det L_s^M \begin{pmatrix} (1 \ldots m_s) \setminus j' \\ 2 \ldots m_s \end{pmatrix} \right| \sum\limits_k \det L_R^k}{\prod\limits_{i=1}^{m_s} \tau_i \sum\limits_{p=1}^{m_s} \dfrac{1}{\tau_p} \det B_s^L \begin{pmatrix} (1 \ldots . m_s) \setminus p \\ 2 \ldots m_s \end{pmatrix} \det L_R} =$$

$$= \frac{\left| \det L_s^M \binom{(1 \ldots m_s) \setminus j'}{2 \ldots m_s} \right| \sum\limits_k \det L_R^k}{\tau_j \sum\limits_{p=1}^{m_s} \dfrac{1}{\tau_p} \det B_s^L \begin{pmatrix} (1 \ldots m_s) \setminus p \\ 2 \ldots m_s \end{pmatrix} \det L_R}.$$

Знаменатель и числитель домножим на $\prod_{i=1}^{v} \det(B_i^L)$. Заметим, что данное число отлично от нуля, так как, согласно матричной теореме о деревьях, оно равно весу множества всех остовных исходящих лесов в орграфе, который состоит только из базовых бикомпонент. Тогда:

$$m_{ij}^{\vdash} = \frac{\left| \det L_s^M \binom{(1 \ldots m_s) \setminus j'}{2 \ldots m_s} \right| \sum\limits_k \det L_R^k \quad \det B_s^L \prod\limits_{q \neq s} \det B_q^L}{\tau_j \sum\limits_{p=1}^{m_s} \dfrac{1}{\tau_p} \det B_s^L \begin{pmatrix} (1 \ldots . m_s) \setminus p \\ 2 \ldots m_s \end{pmatrix} \det L_R \prod\limits_{q=1}^{v} \det B_q^L}.$$

Заметим, что в последней дроби

$$l_{ij}^{\vdash} = \frac{\left|\det L_s^M \left(\begin{smallmatrix} (1\ldots m_s)\backslash j' \\ 2\ldots m_s \end{smallmatrix}\right)\right| \sum\limits_k \det L_R^k \prod\limits_{q \neq s} \det B_q^L}{\det L_R \prod\limits_{q=1}^{v} \det B_q^L}.$$

Тогда

$$m_{ij}^{\vdash} = l_{ij}^{\vdash} \frac{\det B_s^L}{\tau_j \det C_s}, \tag{П.5}$$

где матрицы C_s, $s = 1, \ldots, v$, определены следующим образом:

$$C_s = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\tau_1^s} & l_{12}^s & \ldots & l_{1m_s}^s \\ \dfrac{1}{\tau_2^s} & l_{22}^s & \ldots & l_{2m_s}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{\tau_{m_s}^s} & l_{m_s 2}^s & \ldots & l_{m_s m_s}^s \end{pmatrix}. \tag{П.6}$$

Построим две диагональные матрицы $F = \mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_n)$ и $H = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n)$ следующим образом: $f_t = \det B_s^L$ и $h_t = \det C_s$, если вершина t принадлежит s-й базовой бикомпоненте. Для всех остальных диагональных элементов матриц F и H положим $f_t = h_t = 1$.

Тогда

$$M^{\vdash} = L^{\vdash} T^{-1} F H^{-1} = L^{\vdash} D. \tag{П.7}$$

Отметим, что в (П.5) на вершину i не накладывается никаких требований. В частности, она может принадлежать некоторой базовой бикомпоненте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Olfati-Saber R., Fax J.A., Murray R.M.* Consensus and cooperation in networked multi-agent systems // Proceedings of the IEEE. 2007. V. 95. No. 1. P. 215–233.
2. *Jadbabaie A., Lin J., Morse A.S.* Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules // IEEE Transactions on automatic control. 2003. V. 48. No. 6. P. 988–1001.
3. *Olfati-Saber R.M., Murray R.M.* Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. V. 49. No. 9. P. 1520–1533.
4. *Ren W., Beard R.W., Atkins E.M.* Information consensus in multivehicle cooperative control // IEEE Control systems magazine. 2007. V. 27. No. 2. P. 71–82.
5. *Mesbahi M., Egerstedt M.* Graph theoretic methods in multiagent networks / Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks. Princeton University Press, 2010.

6. *Chebotarev P., Agaev R.* The Forest Consensus Theorem // IEEE Trans. Automat. Control. 2014. V. 59. No. 9. P. 2475–2479.
7. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Модели латентного консенсуса // АиТ. 2017. № 1. С. 106–120.
8. *Agaev R.P.* On the role of the eigenprojector of the Laplacian matrix for reaching consensus in multiagent second-order systems // Autom. Remote Control. 2019. T. 80. No. 11. P. 2033–2042.
9. *Гантмахер Ф.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
10. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы // АиТ. 2011. № 12. С. 38–59.
11. *Agaev R., Khomutov D.* Graph Interpretation of the Method of Orthogonal Projection for Regularization in Multiagent Systems // 14th International Conference “Management of Large-scale System Development” (MLSD). IEEE. 2021. P. 1–4.
12. *Rothblum G.* Computation of the eigenprojection of a nonnegative matrix at its spectral radius / Stochastic Systems: Modeling, Identification and Optimization, II. Springer, Berlin, Heidelberg. 1976. P. 188–201.
13. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
14. *Ben-Israel A., Greville T.N.E.* Generalized Inverses: theory and applications (Second Edition). Springer, 2003.
15. *Fiedler M., Sedláček J.O.* W-basich orientovanych grafu // Časopis pro pěstování́ matematiky. 1958. V. 83. No. 2. P. 214–225.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 16.06.2022

После доработки 25.12.2022

Принята к публикации 29.12.2022