Автоматика и телемеханика, № 6, 2023

Обзоры

© 2023 г. **М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)**
(Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева)

ОБЗОР НОВЕЙШИХ ДОСТИЖЕНИЙ В ТЕОРИИ ИГР ОЛИГОПОЛИИ

Рассматривается одна из важнейших проблем теории игр — игра фирм на рынке олигополии. Обзор охватывает классические и современные формулировки теоретико-игровой проблемы выбора оптимальных стратегий игроков, а также новейшие достижения в области методологии решения этой проблемы и ее приложений, включая публикации за последние пять лет.

Ключевые слова: олигополия, агрегативная игра, рефлексия, предположительная вариация.

DOI: 10.31857/S0005231023060016, **EDN:** CRVESO

1. Введение

Теория игр еще не сформировалась как обособленная наука, когда в 1838 г. игровая модель была использована для анализа олигополии [1]. А в середине XX века становление теории игр базировалось на олигополии как одном из первых объектов исследования [2, 3], чему могло быть несколько причин. Во-первых, олигополия — это одна из реально наблюдаемых игр в отличие от многих эфемерных объектов с психологической подоплекой, таких как «дилемма заключенных», в которых выигрыши не измеримы, а оцениваются субъективно. Во-вторых, причиной продуктивности олигополии для развития теории игр является то, что это рынок, на котором обращаются крупные капиталы, и, как следствие, через акционерный капитал затрагиваются интересы множества лиц, что делает выбор оптимальной стратегии в такой игре практически актуальной задачей для общества в целом. В-третьих, это один из немногих игровых сюжетов, предопределенных объективными законами экономики, что является основанием для математического моделирования и анализа.

Обобщение современного опыта решения теоретико-игровых задач олигополии сегодня представляется актуальным, поскольку последний обзор моделей олигополии, подготовленный отечественными учеными, был опубликован в 2009 г. [4], а зарубежными учеными — в 2020 г. [5]. Однако в зарубежных обзорах не упомянуты достижения российских ученых, которые в последние годы внесли весомый вклад в развитие теории олигополии. Стремясь к наибольшей актуализации, в дальнейшем обзор охватывает публикации последних пяти лет, за исключением базовых концепций, причем будут освещены наиболее выдающиеся, по мнению автора, исследования, результаты которых значимо продвигают вперед теорию и приложения игр олигополии.

Как реальный объект, олигополия представляет собой рынок, на котором относительно малое число фирм продают идентичный товар, конкурируя ценами или объемами предложения (что равнозначно вследствие их связи через убывающую функцию спроса) за выбор аудитории покупателей, число которых несоизмеримо больше числа продавцов. Олигополистическая конкуренция проявляется в том случае, если количество продавцов настолько мало, что изменение объема (цены) предложения каждой фирмы приводит к заметному смещению по общей кривой спроса, что сказывается на результатах (прибыли) всех фирм. Как теоретическая модель, олигополия является игрой, в которой игроки, т.е. фирмы-продавцы, дифференцированные по издержкам, стремятся максимизировать свои выигрыши (полезности), немонотонно зависящие от объемов предложения вследствие синхронного убывания общей для всех игроков цены (агрегата) при неубывающих издержках.

Если определяться в системе координат игровых моделей, то игра олигополии относится, во-первых, к некооперативным играм, во-вторых, к агрегативным играм, в которых выигрыш каждого игрока зависит от действий всех игроков. В-третьих, корпус исследований олигополии делится на две примерно равные части, в одной из которых игра формулируется как неиерархическая, т.е. игроки предполагаются равноправными, а во второй — как иерархическая, в которой есть игрок-лидер. В-четвертых, олигополия относится к играм с полной информацией, однако вследствие асимметрии информированности этот аспект необходимо обсудить более детально.

Как правило, в игре олигополии функции полезности игроков считаются общим знанием. Однако имеет место априорная неосведомленность каждого игрока о том, какое действие он совершит по мнению окружения в ответ на действия последнего. Разумеется, из функции полезности всегда можно вычислить наилучший ответ (функцию реакции), но если игрок считает, что все остальные также дают наилучший ответ, то он вычисляет наилучший ответ на наилучший ответ, и т.д. Следовательно, в функциях реакций игроков всегда есть компонент, характеризующий реагирование окружения, априори неизвестный самому игроку, что приводит к асимметрии информированности. Формально эта асимметрия выражается в бесконечной последовательности предположительных вариаций, т.е. предполагаемых игроком изменений действий других игроков в ответ на его единичное изменение действия.

Классические пути разрешения проблемы асимметрии информированности игроков базируются на выдвижении некоторой гипотезы о поведении окружения. Нередко в современных исследованиях используются следующие гипотезы: 1) гипотеза А. Курно [1] об игнорировании влияния действий окружения на выбор данного игрока; 2) гипотеза Г. Штакельберга [6] об информированности одного из игроков (лидера) о том, что окружение (ведомые) игнорирует его действия в соответствии с гипотезой Курно[1]. На основе этих гипотез предположительные вариации вычисляются однозначно и в процессе исследований полагаются заданными. Тем самым исследователи постулируют, что фактические действия игроков совпадают с предположениями об этих действиях. В результате вектор действий игроков, являющийся решением игры по Нэшу, расценивается как реальное результирующее равновесие, что, безусловно, требует верификации, и эта задача есть неизбежное следствие использования подхода классиков.

Другой путь разрешения проблемы асимметрии информированности базируется на анализе ментальных типов игроков или рефлексивном анализе. Теория рефлексивных игр основана на идеях основоположников этого подхода Д.А. Новикова и А.Г. Чхартишвили [7], а также на теоретических основах рефлексии, определенных В.А. Лефевром [8, 9]. Кратко, главная и наиболее плодотворная идея рефлексивного анализа выражается следующим образом: игроки выдвигают разнообразные предположения о действиях окружения, т.е. играют не с реальными, а с представляемыми (фантомными) соперниками. Поэтому если описать множество всевозможных представлений всех игроков, то можно вычислить полное множество равновесий, которые в этом случае называются информационными равновесиями, т.е. равновесиями при некотором сочетании ментальных типов игроков. Поэтому верификация предположений и, как следствие, оценка реальных ментальных типов игроков, сводится к выбору такого равновесия, которое наиболее близко к реальному состоянию рынка. Следовательно, анализ информационных равновесий является базой для разработки алгоритмов информационного управления, которое, в конечном счете, является глобальной целью создания многообразия теоретико-игровых моделей олигополии.

Завершая описание классификационных признаков игры олигополии, отметим, что статические и динамические модели, относя данную игру к различным классам, скорее являются методами моделирования. Динамические модели описывают процесс конкуренции олигополистов как их многопериодное реагирование на базе наилучших ответов, а в статике моделируется результат этого процесса, основанный на тех же наилучших ответах; в том и в другом случаях наилучший ответ в неявном виде содержит предположительные вариации. Поэтому в дальнейшем описывается базовая модель игры олигополии, для которой анализируются варианты учета реалий рынка как игровой обстановки и рассматриваются динамический и статический методы решения.

[1] В зарубежной литературе игра по Штакельбергу является синонимом иерархической игры. Однако в игре с несколькими лидерами иерархия неоднозначна.

2. Базовая модель

Концепция игровой обстановки недифференцированной олигополии при объемной конкуренции основывается на следующих базовых предположениях.

1. Конкуренция: в игре участвует относительно малое число игроков, не превышающее такого, при котором действия (т.е. объемы выпуска) каждого перестают влиять на полезность всех остальных (т.е. окружения). Игроки предлагают идентичный товар, спрос на который создается потребностью бесконечного количества покупателей, причем функция спроса монотонно убывает.

2. Рациональность: индивидуальные полезности зависят от действий игроков как вогнутые функции (т.е. функции издержек неубывающие), причем каждый выбирает действия, максимизирующие его функцию полезности исходя из доступной ему информации о действиях окружения.

3. Информированность: в момент выбора действий игроки располагают информацией о функциях полезности окружения (т.е. функциях спроса и издержек), о количестве игроков, а также о том, что окружение имеет равный с ними уровень информированности.

4. Время действий: а) в статической игре все выбирают действия одновременно, однократно и независимо; б) в динамической игре каждый выбирает действие многократно и в зависимости от манифестированных ранее действий окружения.

С учетом предположений 1–3 можно записать модель выбора действия игрока следующего вида:

$$\max_{Q_i \geqslant 0} \Pi_i(Q, Q_i) = P(Q)Q_i - C_i(Q_i), \quad i \in N = \{1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

$$Q = \sum_{i \in N} Q_i, \tag{2}$$

где Q_i, Π_i — действие и функция полезности i-го игрока; Q — агрегат действий; N — множество игроков; n — количество игроков; $P(Q)$ — обратная функция спроса, $P'_Q < 0$; $C_i(Q_i)$ — функция издержек i-го игрока, $C'_{Q_i} \geqslant 0$.

Формально игра олигополии Γ есть кортеж множества игроков, множества их действий и множества их функций полезности:

$$\Gamma = \langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\} \rangle. \tag{3}$$

Необходимое условие существования решения игры (3) как равновесия Нэша обеспечивается вогнутостью функция полезности игроков [10], но доказано [11] и менее жесткое условие, налагаемое только на функции спроса: предельная выручка каждого игрока убывает с ростом действия любого из окружения, т.е.

$$P'_Q + P''_{QQ} Q < 0. \tag{4}$$

При этом равновесие Нэша определяется путем решения системы уравнений реакций следующего типа (при некотором известном векторе предположительных вариаций):

$$\frac{\partial \Pi_i(Q_i^*, \rho_{ij})}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N, \tag{5}$$

где $\rho_{ij} = Q'_{jQ_i}$ — предположительная вариация[2] i-го игрока, т.е. предполагаемое им изменение выпуска j-го игрока в ответ на единичный прирост выпуска i-го игрока; Q_i^* — равновесное значение. В теории олигополии принято рассматривать оптимальную (в зарубежной литературе consistent — совместимая) предположительную вариацию, которая вычислена из уравнения (5) j-го игрока, т.е. соответствует его наилучшему ответу.

Таким образом, вычисление равновесия в игре напрямую зависит от возможности найти предположительные вариации, что, в свою очередь, предопределено особенностями функций $P(Q)$ и $C_i(Q_i)$, которые приводят к разновидностям базовой модели. В дальнейшем, если индекс игрока не имеет значения, опустим его и будем обозначать действие игрока символом $q = Q_i \ \forall i \in N$, а его полезность символом $\pi = \Pi_i \forall i \in N$.

3. Варианты базовой модели

Монотонно убывающая обратная функция спроса моделируется с помощью функций, приведенных в табл. 1, а для описания неубывающих функций издержек используются модели, представленные в табл. 2. Условие (4) выполняется для линейной, комбинированной и экспоненциальной функций спроса, а при степенной функции спроса существование равновесия также может быть обеспечено выбором неубывающих функций издержек. Степенная функция издержек при различных значениях показателей степени может быть как выпуклой, так и вогнутой; вогнутая функция издержек соответствует положительному эффекту расширения масштаба, тогда как выпуклая — отрицательному. Для моделирования выпукло-вогнутой функции также может использоваться комбинация логарифмической и квадратичной функций.

Очевидно, что в подавляющем большинстве публикаций исследователи базируются на линейных моделях спроса и издержек, поскольку в этом случае легко вычислить предположительные вариации из функций наилучших ответов (функций реакций), которые представимы в явном виде. Однако при этом уместен вопрос о точности представления нелинейных процессов в форме линейных моделей, который рассматривался в ряде классических исследований [12, 13], из которых следует вывод не в пользу адекватности линейных моделей. В частности, А. Уолтерс обобщил более 30 публикаций, подтверждающих

[2] В некоторых исследованиях рассматривается ценовая предположительная вариация как предполагаемое изменение цены в ответ на единичный прирост выпуска i-го игрока, поэтому при анализе такого подхода вариация ρ будет именоваться объемной.

Таблица 1. Виды обратной функции спроса[3]

Вид функции	Формула и параметры функции	Публикации
Линейная	$P(Q) = a - bQ$, $a > 0$, $b > 0$, $a >> b$	[14–40]
Линейная ФНП	$p_i(Q) = a - \sum_{i \in N} b_i Q_i$, $a > 0$, $b_i > 0$, $a >> b_i$	[33, 34, 36, 52]
Степенная	$P(Q) = AQ^{\alpha}$, $A > 0$, $\alpha < 0$, $\lvert\alpha\rvert < 1$	[27, 41–47]
Комбинированная	$P(Q) = A - Q^{\alpha}$, $A > 0$, $\alpha > 0$	[48]
Экспоненциальная	$P(Q) = Ae^{\alpha Q}$, $A > 0$, $\alpha < 0$	[49]

Таблица 2. Виды функции издержек агента

Вид функции	Формула и параметры функции	Публикации
Линейная	$C(q) = B_0 + B_1 q$, $B_0 \geqslant 0$, $B_1 > 0$	[15–19, 23, 29–32, 34, 36–39, 41, 42, 44–46]
Степенная	$C(q) = B_0 + B_1 q^{\beta}$, $B_0 \geqslant 0$, $B_1 > 0$, $\beta \in (0, 2)$	[24, 25, 43]
Квадратичная	$C(q) = B_0 + B_1 q + \frac{B_2}{2} q^2$, $B_0 \geqslant 0$, $B_1, B_2 > 0$	[14, 21, 22, 26–28, 34, 35, 40, 50–52]
Логарифмическая	$C(q) = \ln(B_0 + B_1 q)$, $B_0 \geqslant 1$, $B_1 > 0$	[27]

выпукло-вогнутый характер функций издержек, П. Гхемават проанализировал 97 исследований, в которых доказано наличие эффекта обучения, т.е. вогнутости кривых издержек.

Также разновидностью базовой модели является дифференцированная олигополия, в которой игроки предполагаются неидентичными по продуктам, но продукты являются субститутами. В этом случае для различных игроков используют линейные функции спроса с различными коэффициентами замещения b_i, вследствие чего цена спроса i-го игрока является функцией нескольких переменных (ФНП), т.е. $p_i(Q_1, \ldots, Q_n)$. Однако с точки зрения экономической теории такая модель относится не к олигополии, а к монополистической конкуренции, поэтому в дальнейшем будут рассмотрены некоторые исследования таких моделей в контексте присущих играм олигополии методов решения.

4. Рефлексивные игры олигополии

В современной теории игр олигополии определились два мейнстрима: 1) анализ процесса установления равновесия на основе взаимодействия игроков (динамическая игра); 2) исследование состояния равновесия (статическая игра). Публикации российских ученых последних лет активно развивают оба

[3] Поскольку в большинстве исследований объемной олигополии рассматривается обратная функция спроса, в дальнейшем будем назвать ее кратко «функция спроса». Если речь будет идти о функции $Q(P)$, то будем назвать ее «прямая функция спроса».

эти направления, что свидетельствует о лидирующем положении российской научной школы в разработке этой актуальной проблемы теории игр.

4.1. Динамические рефлексивные игры

Фундаментальная постановка рефлексивной игры является динамической, поскольку описывает итерационный процесс приближения игроков к равновесию, и в исследованиях рассматривается в двух направлениях.

Первое направление формулирует динамическую игру на основе **конечно-разностных уравнений** реакции. При этом наилучший ответ игрока на действия окружения задается рекуррентной функцией с фрактальным параметром[4], корректирующим шаг моделирования процесса установления равновесия. Рефлексия игрока в этом случае заложена в функции наилучшего ответа, который выводится из условий оптимума функций полезности игроков (5). Если выразить решение задачи (1) для каждого агента в виде функции реакции (или наилучшего ответа), которую обозначим символом $r_i(Q_{-i})$, то обобщенно динамика рефлексивной игры может быть представлена в виде [53]:

$$(6)\quad Q_i(t) = Q_i(t-1) + \gamma_i^t[r_i(Q_{-i}(t-1)) - Q_i(t-1)],\quad i \in N,\quad t = 1, 2, \ldots, \tau,$$

где $\gamma_i^t \in [0, 1]$ — размер шага рефлексии, символом «$-i$» обозначено окружение i-го игрока.

Содержательно процесс (6) при $\gamma_i^t = 1$ выражает логичный переход от стратегии в момент времени t к стратегии в момент $t+1$ по наилучшему ответу.

Исследования в рамках этого направления, главным образом, нацелены на установление условий сходимости итерационного процесса (6) к игровому равновесию, которое оценивается по величине невязки ε на смежных шагах $\varepsilon_i^t = |Q_i(t) - Q_i(t-1)|$ или на последнем шаге $\varepsilon_i^\tau = |Q_i(\tau) - Q_i^*|$, где τ — количество итераций процесса.

В частности, в моделях олигополии с линейными функциями спроса и издержек с учетом лидерства по Штакельбергу одного или нескольких игроков доказана сходимость процесса (6) при соответствующем выборе шага рефлексии [15, 17]. Кроме того, Г.И. Алгазин и Д.Г. Алгазина [16] в качестве признака сходимости процесса $\boldsymbol{\varepsilon}^{t+1} = \mathbf{B}^t\boldsymbol{\varepsilon}^t$ установили ограниченность единицей нормы матрицы динамики невязок $\|\mathbf{B}^t\| < 1$, составленной из комбинации шагов рефлексии игроков, где $\mathbf{B}^t = \{b_{ij} = 1 - \gamma_i^{t-1}, b_{ij} = -\frac{\gamma_j^{t-1}}{2} \forall i \neq j \in N\}$. Аналогия этой матрицы с матричным уравнением вычисления предположительных вариаций $\mathbf{B}^r\boldsymbol{\rho}^r = \mathbf{I}$, где $\boldsymbol{\rho}^r = \{\rho_{ij} \forall i, j \in N\}$ — матрица вариаций на ранге рефлексии r, $\mathbf{B}^r = \{b_{ij} = -2 - S_i^{r-1}, b_{ij} = -1 \forall i \neq j \in N\}$, $S_i^r = \sum\limits_{j \in N \setminus i} \rho_{ij}^r$,

[4] Параметр корректировки шага динамического процесса является дробным в диапазоне $[0, 1]$ или фрактальным (от англ. fractal), в чем проявляется аналогия конечно-разностного подхода с фрактальными дифференциальными уравнениями, рассмотренными ниже.

в рассматриваемой далее статической рефлексии [54] подтверждает сродство динамического и статического процессов.

Рассматривая процесс (6) в случае идентичных по функциям полезности игроков при $\gamma^t = 1$, т.е. при итерациях по наилучшему ответу $Q_i(t) = r_i(Q_{-i}(t-1))$, Р. Корнес и др. [42] установили следующее условие сходимости процесса: $\left|\frac{\pi''_{qq}+\pi''_{Qq}}{\pi''_{qQ}+\pi''_{QQ}}\right|$, где $q = \frac{Q}{n}$.

В случае триполии Ю. Джабарова и Б. Златанов [21] исследовали процесс (6) также при $\gamma_i^t = 1$ и рассмотрели функции реакции, являющиеся сжимающими отображениями (т.е. при выполнении неравенства треугольника $\sum\limits_{i=1,2,3} \varepsilon_i^t \leqslant \sum\limits_{i=1,2,3} k_i \varepsilon_i^t$, $\sum\limits_{i=1,2,3} k_{ij} < 1$), доказав ограничение на невязку $\max\limits_{i=1,2,3} \varepsilon_i^\tau \leqslant \frac{k}{1-k} \sum\limits_{i=1,2,3} |Q_i(\tau) - Q_i(\tau-1)|$, где $k = \max\limits_{j=1,2,3} \sum\limits_{i=1,2,3} k_{ij}$.

Очевидно, что главная проблема динамического моделирования с помощью конечно-разностных уравнений реакции состоит в необходимости явного выражения функции наилучшего ответа, что возможно только для линейных функций спроса и издержек. Для анализа игры, в которой хотя бы одна из этих функций нелинейная, исследователи [33, 34, 45] применяли процесс с использованием градиента функции полезности (1)

$$Q_i(t) = Q_i(t-1) + \gamma_i^t Q_i(t-1) \Pi'_{iQ_i}(t-1), \tag{6a}$$

не столь логичный, как наилучший ответ в процессе (6), но позволяющий вычислить равновесия в аналитической форме. Применение процесса (6a) базируется на том, что с приближением к равновесию $\lim_{Q_i \to Q_i^*} \Pi'_{iQ_i} = 0$, следовательно $\lim_{Q_i \to Q_i^*} \varepsilon_i^t = 0$.

В частности, в игре дуополии Ю. Пенг, Ю. Ксяо и др. [33, 34, 45] варьировали вид процесса (6a) с не зависящим от времени шагом γ_i. Рассматривая процесс $Q_i(t) = Q_i(t-1) + \gamma_i \Pi'_{iQ_i}(t-1)$, авторы в случае линейной функции спроса показали в явном виде *два* равновесия [33], одно из которых имеет нулевой компонент, а в случае степенной функции спроса [45] доказали условие существования одного равновесия, при нарушении которого процесс приобретает хаотический характер. Анализ дифференцированной олигополии для процесса $Q_i(t) = Q_i(t-1) + \gamma_i Q_i(t-1) \Pi'_{iQ_i}(t-1)$ привел к *четырем* равновесиям [34], три из которых имеют нулевые компоненты. Во всех случаях численные эксперименты показали интервалы изменения шага γ_i, в которых этот процесс стабилен, а за пределами этих интервалов появляются бифуркации, которые выражаются в бесконечном множестве равновесий.

Второе направление рассматривает динамическую игру на основе **дифференциальных уравнений**. В этом случае функция полезности (1) интегрирует выигрыши игроков за интервал T, определяющий длительность игры, с учетом ставки дисконтирования δ, т.е.

$$J_i = \int\limits_0^T e^{-\delta t} \Pi_i(Q, Q_i, u_i, t) dt, \tag{7}$$

а процесс изменения функций полезности $\Pi_i(t)$ задается дифференциальными уравнениями динамики либо действий [39], либо равновесной цены [52]:

$$\dot{Q}_i = f(P(t), Q_i(t), u_i(t)), \tag{8}$$

$$\dot{P} = f(P(t), u_i(t)). \tag{9}$$

Введение в модель (7) параметров управления u_i является важным преимуществом дифференциального подхода, поскольку позволяет находить оптимальное управление процессами (8) или (9).

Используя уравнение типа (8), Н.И. Айзенберг и др. [14] в олигополии с линейной функцией спроса и квадратичными функциями издержек моделировали процесс стабилизации равновесия, которое по результатам численных экспериментов устанавливалось начиная с $t = 5$, при двух вариантах регулирования. Во-первых, в качестве параметров управления рассматривалось отклонение предельных издержек игроков от цены $u_i = P(t) - C'_{iQ_i}(t)$, т.е. процесс задавался линейным дифференциальным уравнением $\dot{Q}_i = Q_i(t)\times$ $\times(P(t) - C'_{iQ_i}(t))$. Во-вторых, исследовалось управление отклонением предельных издержек от предельной выручки, т.е. $u_i = (P(t)Q_i(t))'_{Q_i} - C'_{iQ_i}(t)$, когда процесс был формализован уравнением $\dot{Q}_i = Q_i(t)((P(t)Q_i(t))'_{Q_i} -$ $- C'_{iQ_i}(t))$.

Также на базе модели (8) Г.А. Угольницкий и А.Б. Усов [39] рассматривали в качестве параметров управления предельные издержки $u_i = B_{1i}$ линейных функций издержек игроков и использовали линейные дифференциальные уравнения (8) в виде $\dot{Q}_i = a_i u_i(t) - m_i Q_i(t)$, где a_i, m_i — константы. В результате аналитически найдено кусочно-постоянное оптимальное управление процессом (8), и для различных вариантов числа переключения управления получены формулы равновесий Нэша в явном виде, а равновесия Штакельберга моделировались в рамках численного эксперимента.

С другой стороны, М. Рауфиния и др. [52] анализировали такие параметры управления, как рекламные действия игроков, для квадратичных функций издержек вида $C(Q_i) = B_0 + B_1 Q_i + \frac{B_2}{2} Q_i^2 + \frac{B_3}{2} u_i^2$, а для описания динамики применили линейное дифференциальное уравнение (9) в виде $\dot{P} = a -$ $- \sum\limits_{i \in N} b_i Q_i(t) + \sum\limits_{i \in N} u_i(t) - P(t)$. Благодаря выбранной форме дифференциальных уравнений авторы установили, что оптимальное управление является константой, и существует единственное равновесие Нэша.

Нетривиальная разновидность динамической игры сформулирована с помощью фрактальных дифференциальных уравнений, на базе которых А. Аль-Хедхаири [18] скомбинировал процесс (6) по градиенту функции полезности (1) и процесс (8) в следующей форме:

$$\frac{d^{\varphi} Q_i}{dt^{\varphi}} = \gamma_i Q_i(t) \Pi'_{iQ_i}(t), \tag{10}$$

где φ — порядок фрактальной (дробной) производной, $\varphi \in (0, 1]$. В результате даже для простейшей игры дуополии с линейными функциями спроса и издержек установлено *четыре* равновесия (как и в конечно-разностной модели [34]), а численное моделирование продемонстрировало бифуркации.

Несмотря на то что динамическая модель (7)–(9) не является в полном смысле рефлексивной, но по существу процессы (8), (9) являются непрерывным аналогом процесса (6). Тем не менее необходимо учитывать важные отличия этих подходов. Сравнивая конечно-разностный и дифференциальный подходы к моделированию динамики игры олигополии, можно констатировать, что в первом из них процесс установления равновесия базируется на эндогенной, т.е. выведенной из функций полезности игроков, функции реакции. В рамках второго подхода характеристики динамики задаются экзогенно, т.е. не могут быть выведены из базовой модели (1), а требуют дополнительных условий типа (8), (9). Поэтому главная трудность дифференциального подхода заключается в адекватном реальности подборе коэффициентов дифференциальных уравнений динамики, обеспечивающем соответствие рефлексивному процессу. Кроме того, если сфера применимости конечно-разностного подхода ограничена случаем линейных функций спроса и издержек, то применение дифференциального подхода лимитировано использованием линейных дифференциальных уравнений динамического процесса.

4.2. Статические рефлексивные игры

В отличие от динамической игры, в статической постановке предполагается, что игроки совершают действия одновременно и независимо, вследствие чего непосредственно переходят к равновесию, так сказать, за один шаг, минуя итерационный процесс. Однако при этом игроки также базируются на предположениях о действиях окружения, поэтому статические игры олигополии на современном этапе развиваются преимущественно в русле рефлексивных игр, т.е. динамика процесса действий переносится в мыслительный процесс игроков. Формализация этого процесса осуществляется через итерации предположений, приводящих к следующим характеристикам игроков: 1) ведомый, не выдвигающий предположений о стратегиях окружения, вследствие чего его предположительная вариация равна нулю; 2) лидер по Штакельбергу (первого уровня), предполагающий, что его окружают ведомые; 3) лидер по Штакельбергу второго уровня (или более высоких уровней), предполагающий, что его окружают лидеры первого уровня (или иных низших уровней). Поэтому *рефлексией* [7] будем называть выполняемую η_r-м игроком, находящемся на r-м шаге мыслительного процесса, операцию вычисления вариации $\rho^r_{\eta_r j}$ из системы (5) в предположении о том, что все остальные игроки пребывают на $(r-1)$-м шаге мыслительного процесса, их вариации равны $\rho^{r-1}_{ij} \forall i \in N \backslash \eta_r$, $j \in N \backslash i$; соответственно, индекс r игрока, выполнившего эту операцию, есть *ранг рефлексии*. Следовательно, в структуру игры (3) вводится вектор рангов игроков $\{r_i, i \in N\}$, т.е. она трансформируется в игру с представляемыми (*фантомными*) игроками окружения: $\Gamma = \langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\}, \{r_i, i \in N\}\rangle$. Поэтому решением статической рефлексивной игры является не реальное, а *информационное равновесие* —

вектор действий реального и фантомных (существующих во мнении реального) игроков, при котором игрок максимизирует полезность исходя из своей информированности об окружении, т.е. *если бы* окружение выбирало те действия, которые представляет этот игрок. Решения всех возможных игр с фантомами образуют набор информационных равновесий, используемый для последующего сравнения с параметрами реальных рынков с целью оценки рангов рефлексии реальных игроков.

В исследованиях [22, 24, 25, 27, 38, 40, 43] статических рефлексивных игр система (5) обычно представляется в следующем виде:

$$(11) \qquad P(Q) + (1 + S_i^r) Q_i P'_Q - C_{iQ_i} = 0, \quad i \in N, \quad S_i^r = \sum_{j \in N \setminus i} \rho_{ij}^r,$$

где S_i^r — сумма предположительных вариаций i-го игрока на r-м ранге рефлексии.

Главный вектор современных исследований статических игр направлен на сравнительный анализ равновесий в игре с ведомыми и лидерами по Штакельбергу при тех или иных видах функций спроса и издержек.

Начиная со второго аспекта, анализ вариантов функций спроса и издержек дал на сегодня следующие результаты. Модели с линейной функцией спроса и выпуклой, в частности полиномиальной (квадратичной) функцией издержек [22, 27, 40], продемонстрировали продуктивность, поскольку приводят к вогнутой унимодальной функции полезности игрока, гарантируя единственность равновесия; для этих моделей доказана монотонность равновесия по предположениям игроков [22]. Модели с линейной функцией спроса и выпукло-вогнутой (степенной) функцией издержек [24, 25, 43] более сложны для анализа, поскольку в случае вогнутой функции издержек возможна множественность равновесий. Такие ситуации на сегодня изучены достаточно детально: установлены необходимые и достаточные условия равновесия Нэша при наличии лидеров первого и второго уровней [43], выведены формулы приближенного вычисления предположительных вариаций на произвольном ранге рефлексии и для произвольного числа игроков [24], намечены пути подхода к приближенному вычислению равновесий в явном виде [25]. Наиболее сложными представляются модели, в которых нелинейными являются как функция спроса, так и функции издержек; в этом случае определены только необходимые условия равновесия Нэша для нескольких лидеров первого уровня [43].

Характеризуя аспект анализа лидерства, отметим исследования углубления рефлексии и увеличения числа рефлексирующих игроков, приводящих к появлению в игре множества лидеров по Штакельбергу, а также лидеров более высоких уровней.

Рассматривая взаимодействие множества ведомых игроков и множества лидеров по Штакельбергу первого уровня, Л. Жюльен [27] решил внутри каждого из множеств две одновременных неиерархических игры Курно, встроенных в иерархическую игру Штакельберга. Ограничив тренды издержек игроков отрицательным эффектом масштаба, т.е. при выпуклых функциях издержек, Л. Жюльен установил диапазон возможных значений суммы предположительных вариаций на первом ранге $S_i^1 \in (-1, 0]$, а также доказал, что если существует активное (т.е. при $Q_i > 0 \ \ \forall i \in N$) равновесие по Штакельбергу, то оно единственное. Интересный анализ игры в случае двух ведомых (обозначены символом «F») и двух лидеров («L») при конкретных функциях спроса и издержек показал, что для функций $P(Q) = 1 - Q$, $C_F(q) = 0{,}5q^2$, $C_L(q) = \ln(1 + 0{,}5q)$, т.е. при положительном эффекте масштаба лидеров, равновесие существует и единственно, как и для функций $P(Q) = (Q+1)^\alpha, \alpha < -2$, $C_F(q) = C_L(q) = 0$; для функций $P(Q) = 1 - Q$, $C_L(q) = 0$, $C_F(q) = 1 + B_1 q - 0{,}5q^2$, когда издержки убывают при $q > B_1$, равновесие не существует; для функций $P(Q) = 1 - Q$, $C_F(q) = 0{,}5q^2$, $C_L(q) = \frac{1}{16}\ln(\frac{1}{8} + 0{,}5q)$ также при положительном эффекте масштаба лидеров, но когда предельные издержки лидеров убывают быстрее, чем снижается цена, имеется два равновесия.

В рамках рефлексивного анализа проблема вычисления предположительных вариаций становится ключевой, поскольку их необходимо определять не для одного-двух видов предположений, как в классическом подходе, а для бесконечного множества разнообразных ментальных типов. При этом сложности возникают в наиболее приближенном к реальности случае нелинейных (выпуклых или вогнутых) функций издержек, когда для нахождения этих вариаций необходимо решать систему нелинейных уравнений. В последнее время достигнуты некоторые успехи в разработке приближенных методов вычисления предположительных вариаций [24], но полностью эта задача не решена, поскольку для этого требуется представление в явном виде функций наилучших ответов игроков, что при нелинейных функциях издержек принципиально невозможно.

В исследованиях углубленной рефлексии, приводящей к многоуровневому лидерству, М.И. Гераськин [25], анализируя модель с линейной функцией спроса и выпукло-вогнутыми функциями издержек, вывел следующую рекуррентную формулу вычисления суммы предположительных вариаций на произвольном ранге рефлексии:

$$S_i^r = \left(\frac{1}{\sum\limits_{j \in N \setminus i} \frac{1}{u_j - S_j^{(r-1)} + 1}} - 1 \right)^{-1}, \tag{12}$$

$$u_i = -1 + \frac{P'_{Q_i} + (1 + S_i^{r-1}) Q_i P''_{QQ_i} - C''_{iQ_iQ_i}}{|P'_Q|}.$$ [5]

[5] В [25] эта формула имеет вид $u_i = -2 - \frac{C''_{iQ_iQ_i}}{b}$, т.к. выведена при линейной функции спроса, для которой $P'_Q = P'_{Q_i} = -b, P''_{QQ_i} = 0$. Кроме того, формула (12) представлена для независящих от действий игроков предположительных вариаций, т.е. при $\rho'_{ijQ_i} = 0$, а в [25] описан более общий случай $\rho'_{ijQ_i} \neq 0$.

Анализ (12) показал, что при отрицательном эффекте масштаба величина S_i^r отрицательна и ограничена по модулю единицей (что совпадает с выводами Л. Жюльена [27]), т.е. игрок предполагает уменьшение действий окружения в ответ на рост его действия. При положительном эффекте эта величина может быть положительной и неограниченной, подразумевая, что оптимальным для окружения может оказаться увеличивать действия в ответ на рост действия игрока.

Неординарную трактовку предположительной *ценовой вариации* P'_{Q_i} как предполагаемого изменения цены в ответ на единичный прирост выпуска i-го игрока[6] предложили В.А. Булавский и В.В. Калашников [50, 51]. Поскольку они рассматривали отрицательный эффект масштаба, когда эта вариация отрицательна, то определили вариацию по модулю как $\upsilon_i = -P'_{Q_i}$. При этом уравнения (11) упрощаются:

$$P(Q) + Q_i P'_{Q_i} - C'_{iQ_i} = 0, \quad i \in N. \tag{13}$$

В результате для случая прямой функции спроса вида $Q(P) = G(P) + D$, $G'_p \leqslant 0$, $D = \text{const} > 0$ (в [51] проанализирована функция спроса с разрывом первого рода) и при выпуклых функциях издержек игроков, т.е. при $C'_{iQ_i} > 0$, $C''_{iQ_iQ_i} > 0$ (в [50] рассмотрены квадратичные функции издержек), авторы для не зависящих от действий игроков предположительных вариаций доказали существование и единственность равновесия, а также следующее условие для ценовых вариаций:

$$\upsilon_i = \frac{1}{\sum\limits_{j \in N \setminus i} \frac{1}{\Theta'_{jQ_j}} - G'_p}, \quad i \in N, \tag{14}$$

где $\Theta_i = -Q_i P'_{Q_i} + C'_{iQ_i}$ является правой частью преобразованного уравнения (13), т.е. $P(Q) = \Theta_i$. Следовательно, в (14) $\Theta'_{jQ_j} = P'_{Q_j} = -\upsilon_j$, т.е. (14) (в отличие от (12)) является не формулой вычисления ценовых вариаций, а системой уравнений, из которой они могут быть найдены, а поскольку эта система аналитически не разрешима, то проблема вычисления предположительных вариаций остается.

Очевидно, существует взаимосвязь между объемной вариацией ρ_{ij} в (11) и ценовой вариацией υ_i в (13). Поскольку $Q_j = Q - \sum\limits_{k \neq j} Q_k$, то $\rho_{ij} = Q'_{jQ_i} =$ $= Q'_{Q_i} - \sum\limits_{k \neq i,j} \rho_{ik} - 1$, значит, $-\upsilon_i = P'_{Q_i} = P'_Q Q'_{Q_i} = P'_Q \left(\rho_{ij} + \sum\limits_{k \neq i,j} \rho_{ik} + 1 \right) =$ $= P'_Q (S_i + 1)$, поэтому $\upsilon_i = -P'_Q (S_i + 1)$.

[6] Этот подход близок к концепции инклюзивного наилучшего ответа в агрегативных играх [5], который представляет собой оптимальную реакцию игрока на суммарное действие всех игроков (включая данного), т.е. $\widetilde{r}_i(Q)$, в отличие от наилучшего ответа на действия окружения $r_i(Q_{-i})$.

Преимущество применения ценовых вариаций в игре олигополии состоит в том, что анализ базируется на агрегированной рефлексии всех игроков окружения, поэтому упрощается процедура верификации этих вариаций: цена является общим знанием в реальной игре, чего нельзя утверждать относительно действий игроков. С другой стороны, это преимущество порождает проблему анализа дифференцированной рефлексии, так как ценовая вариация нивелирует различия предположений i-го игрока о стратегиях j-го и k-го игроков.

Нередко в зарубежной прессе встречались статьи, в которых проводилось сравнение моделей Курно и лидерства по Штакельбергу (Stackelberg versus Cournot или SvsC). В одной из последних Я. Зухар и М. Зухарова [38] сравнили эти равновесия с точки зрения общественного блага и суммарной прибыли и указали диапазоны соотношения предельных издержек игроков, в которых одно из них является предпочтительным. Однако сопоставление этих равновесий не имеет практического значения, поскольку игроки не могут выбрать одну из этих моделей, так как обстановка игры задана априори.

С другой стороны, схема SvsC может быть продуктивна, поскольку анализируя различие моделей Курно и Штакельберга, Э. Кумбул [20] рассмотрел в случае олигополии при произвольном n интересный вариант информационной рефлексии относительно неизвестного игрокам случайного параметра θ линейной функции спроса $P(Q) = a + \theta - bQ$. При этом каждый игрок учитывает в своей функции полезности параметр θ в виде сигнала s_i (через выбор которого формализована рефлексия), определенного как сумма θ и белого шума, причем дисперсии распределения θ и белого шума введены экзогенно. В результате Э. Кумбул показал, что суммарное действие игроков ниже, а равновесная цена и суммарная прибыль выше в равновесии Штакельберга, чем в равновесии Курно, что противоположно классическим решениям этих игр при полной информированности [55].

Вместе с тем неординарное сравнение некооперативной игры в рамках моделей Курно и лидерства по Штакельбергу с кооперативным решением на основе вектора Шепли при различных характеристических функциях, проведенное А.В. Королевым и Г.А. Угольницким [56] для случая трех игроков при линейных функциях спроса и издержек, привело к соответствующему классическому [55] упорядочению игровых ситуаций: наибольший суммарный выигрыш обеспечивает кооперация, меньший — некооперативная модель Курно, а наименьший — иерархия с лидерством по Штакельбергу.

В целом камнем преткновения в анализе статических рефлексивных игр является та же проблема, что и в динамических играх: стремление к более реалистичным выпукло-вогнутым моделям издержек ограничивается возможностью вычисления наилучших ответов игроков в явном виде из системы нелинейных уравнений.

5. Приложения игровых моделей олигополии

5.1. Приложения к реальным рынкам

Теоретико-игровая проблема олигополии исторически связана с проблемой анализа специфики рынков, на которых прибыль каждой фирмы зависит от действий всех фирм, т.е. рынков, на которых действует относительно небольшое число крупных фирм.

Телекоммуникационный рынок стал актуальной платформой апробации теоретико-игровых моделей олигополии, поскольку, во-первых, продемонстрировал самый быстрый рост среди всех рынков за последние два десятилетия [57]; во-вторых, является типичной олигополией, так как в большинстве стран на этом рынке представлены не более трех доминирующих фирм [58]; в-третьих, привлекает внимание исследователей своей социальной значимостью, поскольку затрагивает интересы всего общества. Анализ олигополии российского рынка телекоммуникаций [43] продемонстрировал адекватность линейной функции спроса и выпукло-вогнутых функций издержек игроков, а также подтвердил распространенность ведомого ментального типа при статической рефлексии.

Исследуя рынок электроэнергии, Т. Йо и др. [35] в случае квадратичных функций издержек сравнили три игровых сценария, причем в каждом последующем равновесная цена формируется ниже, чем в предыдущем: 1) игра поставщиков энергии как ведомых с экзогенной линейной функцией спроса; 2) две игры, в одной из которых потребители энергии формируют эндогенную линейную функцию спроса, после чего разыгрывается игра поставщиков, в результате чего образуется игра Штакельберга; 3) также две игры, как во втором случае, но в функцию полезности потребителей введена потоварная субсидия, приводящая к еще большему сдвигу кривой спроса вниз.

Анализируя рынок древесины, Б. Каниески да Силва и др. [44] в случае степенной функции спроса и издержек, не зависящих от действий игроков, сопоставили равновесия дуополии в случаях картеля, конкуренции Курно и игры с лидерством по Штакельбергу при ограничениях на мощность. Игра моделирует специфику рынка древесины: объем предложения лесозаготовителя характеризуется вырубкой и ограничен объемом насаждений, а издержки обусловлены необходимостью восстановления угодий.

Рассматривая банковский рынок, объем спроса которого по мнению Кс. Жу и др. [47] зависит не только от цены (процентной ставки), но и от ВВП (GDP), авторы использовали степенную функцию спроса (заданную в нетривиальной форме $\log Q = e_0 + e \log P + e_{GDP} \log GDP$, где e_0, e, e_{GDP} — константы, e — коэффициент эластичности спроса по цене) и линейные функции издержек. Авторы вычислили фактические оценки предположительных вариаций, аппроксимировав их линейными регрессиями $\rho_{ij}\frac{Q_i}{Q_j} = \beta_j + \gamma_j \frac{Q_i}{Q}$, в которых β_j, γ_j — коэффициенты регрессий, определяемые по трендам реальных действий игроков за 2007–2016 гг., которые предполагаются равными равновесиям в игре. Проанализировав два типа игроков — лидеров, к которым отнесены пять крупнейших банков КНР, и ведомых, которым соответствуют мелкие банки — авторы эмпирически показали, что предположительные вариации лидеров относительно других лидеров положительны, а вариации лидеров относительно ведомых отрицательны, тогда как ведомые продемонстрировали нулевые вариации.

5.2. Приложения к оригинальным проблемам

Модель олигополии настолько плодотворна, что нередко исследователи использовали ее как базовую схему, известное решение которой позволяет решать смежные проблемы анализа экономического поведения, как правило, относящиеся к сфере микроэкономики.

Проблема анализа слияния фирм, первоначально конкурирующих как ведомые игроки, приводящего к появлению лидера по Штакельбергу, рассмотрена У. Феррарезе [23] применительно к ситуации с линейными функциями спроса и издержек. Автор доказал, что слияние фирм в одну максимизирует прибыль лидера независимо от числа участников коалиции, тогда как образование нескольких лидирующих коалиций рационально, если число их участников не превышает некоторого предела.

С другой стороны, Р. Фаули-Оллер [48] исследовал проблему дивизионализации, т.е. разделения асимметричных по издержкам фирм дуополии на филиалы, конкурирующие как ведомые игроки, в случае линейных функций издержек. Сравнив одновременный выбор игроками числа дивизионов в случае комбинированной функции спроса с последовательным выбором при иерархии Штакельберга в случае линейной функции спроса, автор пришел к выводу, что цена равновесия выше, когда дивизионализация протекает последовательно.

Нередко в зарубежных исследованиях анализируется смешанная (частно-государственная) олигополия, которую рассматривали М. Лин и Т. Мацумура [28] в контексте оптимальности приватизации, а также Дж. Харагучи и Т. Мацумура [26] в рамках проблемы оптимальности входа. Оптимизируя по критерию общественного благосостояния, равного $W = \int\limits_0^Q P(Q)dQ - P(Q)Q + \sum\limits_{i \in N} \Pi_i$, степень приватизации [28], т.е. долю частных фирм в олигополии, авторы доказали, что если государственная фирма является ведомым, а частная — лидером по Штакельбергу, то в случае линейных функций издержек оптимальна нулевая степень приватизации при любой функции спроса, соответствующей $P'_Q < 0 \wedge P''_{QQ} \leqslant 0$, а при квадратичных функциях издержек и линейной функции спроса оптимальная степень приватизации растет с увеличением числа игроков. Исследуя появление новой частной фирмы в смешанной олигополии, Дж. Харагучи и Т. Мацумура [26] в случае линейной функции спроса и квадратичных функций издержек показали, что при экзогенно заданной степени приватизации прибыль частной фирмы уменьшается с ростом числа фирм. С другой стороны, если степень приватизации вычисляется эндогенно из условия нулевой прибыли при входе новой фирмы $\Pi_i(n) = F$, (где F — инвестиции входного барьера), то может существовать от одного до трех равновесий, при которых это условие выполняется.

А. Мукерджи и Ч. Цзэн [30] также анализировали проблему входа новой фирмы, но в игре билатеральной олигополии, в которой олигополисты-ритейлеры (обозначены символом «d») взаимодействуют с олигополистами-поставщиками (символ «u»[7]), причем новый ритейлер может нести невозвратные инвестиции. В случае линейных функций спроса и издержек авторы доказали, что условие свободного входа, т.е. неподвижной точки $\Pi_i(\theta F) = \theta F$ (где θ — доля невозвратных инвестиций) соответствует нулевой прибыли новой фирмы при $\theta = 0$, но обеспечивает положительную прибыль при $\theta > 0$. Кроме того, решая проблему торга продавцов и поставщиков на базе арбитража Нэша, т.е. по критерию $\max\limits_{\theta\in[0,1]}\{\Pi_{ui}^{\alpha}(\Pi_{di} + \theta F)^{1-\alpha}\}$, авторы установили, что вход нового ритейлера повышает общественное благосостояние при $\theta = 1$, если торговая сила поставщиков α больше эластичности выпуска фирмы по количеству фирм, а при $\theta = 0$ снижает благосостояние.

К проблеме входа примыкает проблема внедрения новой технологии, анализируя которую Я. Чжанг [36] для дифференцированной олигополии с линейной ФНП и линейными функциями издержек сравнивал две технологии, одна из которых обеспечивает детерминированное снижение предельных издержек Δ, а в результате внедрения другой это снижение является случайной величиной, математическое ожидание которой равно Δ и дисперсия постоянна. Если первую технологию выбирают консервативные игроки, а вторую — склонные к риску, то, по выводам автора, равновесное число склонных к риску игроков растет с увеличением коэффициентов замещения b_i в функции спроса, и таких игроков больше (в дуополии — два), чем консервативных.

В контексте так называемой «зеленой» экономики максимизация общественного благосостояния трактуется более широко с учетом отрицательных экстерналий, в частности, анализируется экологическое воздействие фирм на окружающую среду [59–61]. Сформулировав ограничение экологической нагрузки, пропорциональной суммарному действию игроков, Г.А. Угольницкий и др. показали как для статической игры, так и для дифференциальной динамической игры, что наименьший экологический ущерб приносит кооперация, а наибольший — лидерство по Штакельбергу, что обусловлено соответствующим соотношением агрегатов действий в этих играх [55].

Неординарную проблему олигополии в случае продажи товарных наборов исследовал Дж. Чжоу [37], предполагая известной функцию совместной вероятности полезностей U_i двух товаров, которые продаются в наборе с дисконтом по сравнению с суммой цен по отдельности, в результате чего определил равновесное соотношение цен товаров и доказал, что отрицательная

[7] В англоязычной литературе при т.н. вертикальном взаимодействии ритейлера называют «downstream firm», а поставщика «upstream firm».

корреляция полезностей товаров способствует их комплектации. Развивая эту проблему также при линейной прямой функции спроса $Q_i = U_i + a - P_i$ (в [37] $a = 0$) и нулевых издержках в случае двухпродуктовой олигополии асимметричных игроков, состоящей из одной доминирующей по качеству товаров фирмы и множества симметричных фирм (для них $a = 0$), Дж. Шуай и др. [32] показали, что с увеличением уровня доминирования a растет склонность доминирующей фирмы к комплектованию.

Ряд исследователей использовали теоретико-игровую модель олигополии для решения проблем макроэкономического анализа. Например, анализируя неоклассическую модель экономического роста Р. Солоу [62], У.-Б. Чжанг [46] сформулировал модель дуополии при степенной функции спроса в случае неразрешенных относительно издержек игроков их производственных функций Кобба-Дугласа $Q_i = \prod\limits_{j=1,2} x_{ij}^{\alpha_j}$, $\alpha_j > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Поэтому, в отличие от модели (1), действиями игроков выступают затраты ресурсов x_{ij}, и функция полезности i-го игрока рассматривалась в виде $\Pi_i = P(Q)Q_i - \sum\limits_{j=1,2} p_{ij}x_{ij}$, где p_{ij} — цена j-го ресурса; как известно [55], такая модель приводит к степенным функциям издержек. В результате численных экспериментов автор доказал нетривиальный вывод: дуополия Штакельберга обеспечивает больший ВВП, чем совершенная конкуренция.

Другая макроэкономическая проблема налоговой политики затронута Д. Колли [19], который модернизировал модель (1) в дивидендную доходность акционеров от чистой прибыли путем введения в нее налоговых ставок $\Pi_i = d(P)\left[(1-t_1)\left(\frac{P(Q)}{1+t_2} - t_3 - C_i\right)Q_i - t_4\right]$, где t_1 — ставка налога на прибыль, t_2 — адвалорная ставка НДС, t_3 — специфическая ставка НДС, t_4 — ставка аккордного налога, $d(P)$ — функция дивидендов. В случае убывающей функции спроса общего вида и линейных функций издержек игроков автор вывел равновесные по Курно действия как функции налоговых ставок, и, анализируя чувствительность этих функций, показал, что аккордный налог ведет к росту цены и снижению общественного благосостояния, в то время как налог на прибыль вызывает снижение цены и рост благосостояния; кроме того, адвалорный НДС всегда выше специфического при одной и той же равновесной цене.

В целом приложения теории олигополии демонстрируют, с одной стороны, возможности этой игры для интерпретации многообразия экономических процессов, а с другой стороны, тенденцию исследователей к редуцированию этого многообразия в относительно узкий спектр игрового поведения, как правило, ограничиваясь игрой ведомых агентов. Тем самым конкуренция по Курно, обобщающая монополистическую и совершенную формы конкуренции, имплицитно предполагается детерминантой общего равновесия.

6. Заключение. Концепции развития игр олигополии

В игре олигополии имеет место фундаментальная проблема асимметрии информированности игроков, что обусловливает неоднозначность определения ментальных типов игроков. Рефлексивный анализ позволяет сформировать исчерпывающий набор возможных оптимальных действий игроков («информационных равновесий»), сопоставить их с параметрами реального равновесия и вывести отсюда заключение о глубине рефлексии реальных игроков. В результате агрегируется информация о векторе ментальных типов игроков, и ответные действия игроков могут быть предсказуемы, что обусловливает возможность управления игроками.

Информационное управление нацелено на имплементацию вектора ментальных типов игроков в процесс разработки государственных управленческих решений по совершенствованию рыночных механизмов. Поскольку при экзогенных ментальных типах игроков их равновесные действия выражаются как однозначные функции от параметров рыночной системы, то можно количественно оценить влияние изменения налогов, бюджетных трансфертов и процентных ставок на величину суммарного рыночного предложения, и, в конечном итоге, на цену равновесия.

Наряду с этим, перед информационным управлением стоит более масштабная задача целенаправленного индуцирования заданного образа мышления игроков в интересах общества. В самом деле, при заданной функции равновесного действия игрока от параметра его ментального типа можно вычислить для целевого значения агрегата равновесных действий соответствующий (оптимальный) набор значений параметров ментальных типов. Далее, на основе специально подобранных механизмов информационного обмена можно обеспечить переход реального ментального профиля игроков к оптимальному. Механизмы информационного обмена формируются в рамках научной школы Д.А. Новикова и А.Г. Чхартишвили, которая ведет интенсивную работу в русле перехода от рефлексивного анализа к рефлексивному управлению. Идея информационного управления [63] базируется на формировании целенаправленной последовательности мнений в социальной группе в зависимости от мнений так называемых агентов влияния. В результате разработана система конечно-разностных уравнений динамики мнений с учетом их поляризации [64].

Как показал обзор, в настоящее время доминирует неиерархическая формулировка игры олигополии, предопределяющая главный вектор исследований как совершенствование методов вычисления равновесий, необходимых для формирования законов или программ управления, оптимальных по критериям индивидуальных полезностей игроков. Закономерное развитие этой парадигмы видится в переходе к трактовке олигополии как иерархической игры с центром, имеющим собственные интересы, которые предопределяют целенаправленное воздействие на механизмы выбора игроками собственных действий. Поэтому в перспективе будет формироваться модель олигополии с экзогенным управлением, оптимизирующим общественное благосостояние.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cournot A.A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. Original 1838.
2. *Neumann J. von, Morgenstern O.* Theory of Games and Economic Behavior. Princeton. NJ.: Princeton University Press, 1944.
3. *Shubik M.* Strategy and Market Structure. New York: Wiley, 1959.
4. *Филатов А.Ю.* Модели олигополии: современное состояние / Теория и методы согласования решений. РАН, Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН. Новосибирск, 2009. С. 29–60.
5. *Anderson S.P., Erkal N., Piccinin D.* Aggregative games and oligopoly theory: short-run and long-run analysis // RAND J. Econom. 2020. V. 51. No. 2. P. 470–495.
6. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011. (Original 1934).
7. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.
8. *Лефевр В.А.* О самоорганизующихся и саморефлексивных системах и их исследовании / Проблемы исследования систем и структур. Матер. конф. М.: Изд-во АН СССР, 1965. С. 61–68.
9. *Lefebvre V.* Lectures on the Reflexive Games Theory. N.Y.: Leaf & Oaks Publishers, 2010.
10. *Nash J.F.Jr.* Noncooperative Games // Annal. Mathem., Second Ser. 1951. V. 54. No. 2. P. 286–295.
11. *Novshek W.* On the Existence of Cournot Equilibrium // Rev. Econom. Stud. 1985. V. 52. P. 85–98.
12. *Уолтерс А.А.* Производственные функции и функции затрат: эконометрический обзор // Теория фирмы. Т. 2. СПб: Экономическая школа. 2000. С. 160–204.
13. *Ghemawat P.* Building Strategy on the Experience Curve // Harward Business Rev. 1985. V. 63. No. 2. P. 143–149.
14. *Айзенберг Н.И., Зоркальцев В.И., Мокрый И.В.* Исследование нестационарных олигопольных рынков // Сиб. журн. индустр. мат. 2017. Т. 20. № 1 (69). С. 11–20.
15. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // АиТ. 2020. № 7. С. 113–128.

    Algazin, G.I., Algazina, D.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 7. P. 1258–1270.
16. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* К аналитическому исследованию условий сходимости процессов рефлексивного коллективного поведения в моделях олигополии // АиТ. 2022. № 3. С. 84–109.

    Algazin G.I., Algazina Y.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 367–388.
17. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Моделирование динамики коллективного поведения в рефлексивной игре с произвольным числом лидеров // Информатика и автоматизация. 2022. Т. 21. № 2. С. 339–375.
18. *Al-Khedhairi A.* Dynamical Study of Competition Cournot-like Duopoly Games Incorporating Fractional Order Derivatives and Seasonal Influences // Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2020. V. 21. No. 3–4. P. 339–359.

19. *Collie D.R.* Taxation under oligopoly in a general equilibrium setting // J. Public Economic Theory. 2019. V. 21. No. 4. P. 738–753.

20. *Cumbul E.* Stackelberg versus Cournot oligopoly with private information // Int. J. Indust. Organ. 2021. V. 74. P. 102674.

21. *Dzhabarova Y., Zlatanov B.* A note on the market equilibrium in oligopoly with three industrial players // AIP. Conf. Proc. 2022. 2449, 070013.

22. *Fedyanin D.N.* Monotonicity of equilibriums in Cournot competition with mixed interactions of agents and epistemic models of uncertain market // Procedia Comput. Sci. 2021. V. 186. P. 411–417.

23. *Ferrarese W.* When Multiple Merged Entities Lead in Stackelberg Oligopolies // Rev. Industr. Organ. 2020. V. 56. No. 1. P. 131–142.

24. *Гераськин М.И.* Анализ равновесий в нелинейной модели олигополии // АиТ. 2022. № 8. С. 140–158.

   Geraskin M.I. Analysis of Equilibria in a Nonlinear Oligopoly Model // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 8. P. 1261–1277.

25. *Гераськин М.И.* Свойства предположительных вариаций в нелинейной модели олигополии Штакельберга. АиТ. 2020. № 6. С. 105–130.

   Geraskin M.I. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 6. P. 1051–1072.

26. *Haraguchi J., Matsumura T.* Profit-enhancing entries in mixed oligopolies // Southern Econom. J. 2021. V. 88. No. 1. P. 33–55.

27. *Julien L.A.* On noncooperative oligopoly equilibrium in the multiple leader-follower game // Eur. J. Oper. Res. 2017. V. 256. No. 2. P. 650–662.

28. *Lin M.H., Matsumura T.* Optimal Privatisation Policy under Private Leadership in Mixed Oligopolies. Arthaniti // J. Econom. Theory and Practice. 2018. V. 17. No. 1. P. 1–14.

29. *Lo C.F., Yeung C.F.* Quantum Stackelberg oligopoly // Quant. Inform. Proc. 2022. V. 21. No. 3. 85 p.

30. *Mukherjee A., Zeng C.* Social desirability of entry in a bilateral oligopoly-The implications of (non) sunk costs // Mat. Soc. Sci. 2022. V. 118. P. 12–19.

31. *Ougolnitsky G., Gorbaneva O.* Sustainability of Intertwined Supply Networks: A Game-Theoretic Approach // Games. 2022. V. 13. No. 3. 35 p.

32. *Shuai J., Yang H., Zhang L.* Dominant firm and competitive bundling in oligopoly markets // Games Econom. Behavior. 2022. V. 132. P. 421–447.

33. *Xiao Y., Peng Y., Lu Q., Wu X.* Chaotic dynamics in nonlinear duopoly Stackelberg game with heterogeneous players // Physica: Statist. Mechan. Appl. 2018. V. 492. P. 1980–1987.

34. *Xiao Y., Zhang S., Peng Y.* Dynamic investigations in a Stackelberg model with differentiated products and bounded rationality // J. Comput. Appl. Math. 2022. V. 414. 114409 p.

35. *Yoo T.-H., Ko W., Rhee C.-H., Park J.-K.* The incentive announcement effect of demand response on market power mitigation in the electricity market // Renewabl. Sustain. Energy Rev. 2017. V. 76. P. 545–554.

36. *Zhang Y.* When should firms choose a risky new technology? An oligopolistic analysis // Econom. Model. 2020. V. 91. P. 687–693.

37. *Zhou J.* Mixed bundling in oligopoly markets // J. Econom. Theory. 2021. V. 194. 105257 p.
38. *Zouhar J., Zouharova M.* Stackelberg versus Cournot duopoly with asymmetric costs: primary markups, entry deterrence, and a comparison of social welfare and industry profits // Econom. Theory Bullet. 2020. No. 8. P. 89–96.
39. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в моделях дуополии Курно с учётом экологических условий // АиТ (в печати).
40. *Филатов А.Ю.* Неоднородность поведения фирм на олигопольном рынке: стратегические фирмы и ценополучатели // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2015. Т. 13. С. 72–83.
41. *Askar S.S., El-Wakeel M.F., Alrodaini M.A.* Exploration of Complex Dynamics for Cournot Oligopoly Game with Differentiated Products. Complexity. 2018, 6526794.
42. *Cornes R., Fiorini L.C., Maldonado W.L.* Expectational stability in aggregative games // J. Evolut. Econom. 2021. V. 31. No. 1. P. 235–249.
43. *Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G.* Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 2. P. 332–348.
44. *Kanieski da Silva B., Tanger S., Marufuzzaman M., Cubbage F.* Perfect assumptions in an imperfect world: Managing timberland in an oligopoly market // Forest Polic. Econom. 2022. V. 137. 102691 p.
45. *Peng Y., Xiao Y., Lu Q., Wu X., Zhao Y.* Chaotic dynamics in Cournot duopoly model with bounded rationality based on relative profit delegation maximization // Physica A: Statist. Mech. Appl. 2020. V. 560. 125174 p.
46. *Zhang W.-B.* Stackelberg-Nash Equilibrium and Perfect Competition in the Solow-Uzawa Growth Model. Lecturas de Economia. 2022. (96). pp. 315–343.
47. *Zhou X., Pei Z., Qin B.* Assessing Market Competition in the Chinese Banking Industry Based on a Conjectural Variation Model // China World Econom. 2021. V. 29. No. 2. P. 73–98.
48. *Fauli-Oller R.* Divisionalization with asymmetric production costs // Math. Social Sci. 2022. V. 118. P. 22–29.
49. *Kaicker N., Dutta G., Mishra A.* Time-of-use pricing in the electricity markets: mathematical modelling using non-linear market demand // OPSEARCH. 2022. V. 59. No. 3. P. 1178–1213.
50. *Kalashnikov V.V., Bulavsky V.A., Kalashnykova N.I.* Existence of the nash-optimal strategies in the meta-game // Stud. Syst., Decision Control. 2018. V. 100. P. 95–100.
51. *Kalashnykova N., Kalashnikov V., Watada J., Anwar T. Lin, P.* Consistent Conjectural Variations Equilibrium in a Mixed Oligopoly Model with a Labor-Managed Company and a Discontinuous Demand Function // IEEE Access. 2022. pp. 1–1.
52. *Raoufinia M., Baradaran V., Shahrjerdi R.* A dynamic differential oligopoly game with sticky price and advertising: Open-loop and closed-loop solutions // Kybernetes. 2019. V. 48. No. 3. P. 586–611.
53. *Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A.* Reflexion in mathematical models of decision-making // Int. J. Parallel, Emergent Distributed Syst. 2018. V. 33. No. 3. P. 319–335.

54. *Герасъкин М.И.* Рефлексивный анализ равновесий в игре триополии при линейных функциях издержек агентов. // АиТ. 2022. № 3. С. 110–131.

    Geraskin M.I. Reflexive Analysis of Equilibria in a Triopoly Game with Linear Cost Functions of the Agents // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 389–406.

55. *Intriligator M.D.* Mathematical Optimization and Economic Theory. New Jersey. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, 1971.

56. *Korolev A.V., Ougolnitsky G.A.* Cooperative game-theoretic models of the Cournot oligopoly // Int. Game Theory Rev. 2022. 2350004 p.

57. *Синица С.А.* Анализ тенденций развития глобального рынка телекоммуникационных услуг // Вестник Евразийской науки. 2019. № 1.

58. *Matheson T., Petit P.* Taxing telecommunications in developing countries // Int. Tax Public Finance. 2021. V. 28. No. 1. P. 248–280.

59. *Горбанёва О.И., Угольницкий Г.А.* Теоретико-игровой анализ эффективности взаимодействия экономических агентов в олигополии Курно с учётом линейной структуры, “зелёного” эффекта и заботы о справедливости // Математическая теория игр и её приложения, 2023. (В печати.)

60. *Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* Differential Game-Theoretic Models of Cournot Oligopoly with Consideration of Green Effect // Games, 2023. (В печати.)

61. *Королёв А.В., Котова М.А., Угольницкий Г.А.* Сравнительный анализ эффективности в динамических моделях олигополии Курно // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. (В печати.)

62. *Solow R.M.* A contribution to the theory of economic growth // Quar. J. Econom. 1956. V. 70. P. 65–94.

63. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях // Проблемы управления. 2009. № 5. С. 28–35.

64. *Gubanov D.A., Petrov I.V., Chkhartishvili A.G.* Multidimensional Model of Opinion Dynamics in Social Networks: Polarization Indices // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 10. P. 1802–1811.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 30.12.2022

После доработки 17.01.2023

Принята к публикации 26.01.2023