

ISSN 0005-2310

# А ВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА



11  
2024

  
НАУКА  
— 1727 —

11

2024



# **А ВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА**

**Журнал основан в 1936 году**

**Выходит 12 раз в год**



**ноябрь**

**Москва**

**2024**

**Учредители журнала:**

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

**Главный редактор:**

Галяев А.А.

**Заместители главного редактора:**

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

**Ответственный секретарь:**

Родионов И.В.

**Редакционный совет:**

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,  
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,  
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

**Редакционная коллегия:**

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,  
Воронцов К.В., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И.,  
Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г.,  
Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США),  
Миллер Б.М., Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В.,  
Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В.,  
Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В.,  
Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Цыбаков А.Б. (Франция),  
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2024 г. Д.Н. ИБРАГИМОВ, канд. физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.com),  
К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)  
(Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет);  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КРОТОВА<sup>1</sup>

Разработан метод исследования задачи быстрогодействия для линейной дискретной системы, позволяющий в общем случае улучшать известные верхние оценки времени быстрогодействия и находить гарантирующие процессы управления. Получены достаточные условия, при которых имеет место сходимость к оптимальному решению в задаче. Метод реализован в виде эффективного численного алгоритма.

*Ключевые слова:* задача быстрогодействия, линейные дискретные системы, последовательные глобальные улучшения.

**DOI:** 10.31857/S0005231024110013, **EDN:** YMLONE

### 1. Введение

Задача быстрогодействия известна достаточно давно как задача оптимального управления, в которой роль функционала качества играет время, затрачиваемое системой на достижение некоторого заданного терминального состояния [1–3]. При рассмотрении систем с непрерывным временем данная задача естественным образом вкладывается в общую проблематику классической теории оптимального управления. Так, в случае линейных непрерывных систем применение принципа максимума Понтрягина [1] гарантирует получение решения задачи в виде релейной функции управления.

Системы с дискретным временем имеют в этом смысле ряд фундаментальных отличий [4–6]. Если большую часть задач теории оптимального управления дискретными системами удастся решить посредством дискретного принципа максимума [6, 7] и/или метода динамического программирования [8], то для решения задачи быстрогодействия эти подходы оказываются неприменимы даже при наличии ограничений на линейную структуру рассматриваемой

---

<sup>1</sup> Теорема 1 доказана Д.Н. Ибрагимовым за счет средств проекта Российского научного фонда № 25-21-00018 <https://rscf.ru/project/25-21-00018> в МАИ (НИУ). Теоремы 2 и 3 доказаны К.А. Царьковым за счет средств проекта Российского научного фонда № 22-11-00042 <https://rscf.ru/project/22-11-00042> в ИПУ РАН.

системы. Основными причинами здесь являются нерегулярность экстремума для почти всех начальных состояний, неединственность оптимальной траектории и дискретный характер функционала качества [9, 10]. Использование многих современных результатов теории оптимального управления дискретными системами [11, 12] по отношению к указанной задаче также оказывается некорректным, а известные работы, касающиеся непосредственно задачи быстрогодействия для систем с дискретным временем, охватывают только ряд частных случаев [13, 14]. С практической точки зрения актуальным является получение результатов, которые могут быть использованы в случае линейной системы произвольной размерности с выпуклым множеством геометрических ограничений на управление. При рассмотрении таких систем результаты упомянутых выше работ либо труднореализуемы в вычислительном плане, либо вовсе применимы лишь при существенных дополнительных предположениях.

В настоящей статье разрабатывается эффективный численный алгоритм поиска оптимального по быстродействию управления для линейных дискретных систем. Одной из наиболее известных и хорошо зарекомендовавших себя численных схем решения различных линейных задач оптимального управления является метод Кротова [15, 16]. В его основе лежат разработанные В.Ф. Кротовым, В.И. Гурманом и М.М. Хрустальевым достаточные условия глобальной оптимальности [17] и принцип расширения экстремальных задач [18]. Ряд работ также посвящен реализации этого метода в случае дискретных и дискретно-непрерывных управляемых систем, см. [19, 20]. Метод Кротова представляет собой итерационный процесс построения последовательных улучшений некоторого выбранного заранее управления заданной динамической системой. Важнейшей особенностью метода является его нелокальность. Последнее означает, что в процессе применения итераций новые управления не обязаны быть близки к найденным на предыдущих шагах ни в смысле какого-либо расстояния в пространстве допустимых управлений, ни в смысле значений оптимизируемого функционала качества. В случае линейных систем эта особенность проявляется наиболее явно, поскольку зачастую оптимальное управление удастся определить уже за одну первую итерацию применения метода Кротова, исходя из любого начального приближения [19, 21].

В данной работе метод Кротова применяется для поиска оптимального по быстродействию управления при известных оценках на время быстрогодействия. Для построения оценок предлагается использовать несколько альтернативных подходов. В общем случае в этих целях могут быть использованы результаты работ [9, 10, 22], хотя во многих ситуациях их вычислительная сложность оказывается значительной. Поэтому в разделе 3 предлагается новый подход к построению оценок времени быстрогодействия для случая, когда матрица рассматриваемой линейной системы является диагонализированной. После того как указанные оценки построены, возможно осуществить переход к задаче с фиксированным временем функционирования системы. Этот переход подробно описан в разделе 4. Затем к полученной задаче применяется

метод Кротова (раздел 5). В разделе 6 сформулирован общий численный алгоритм исследования задачи быстродействия. Раздел 7 содержит ряд примеров, иллюстрирующих эффективность и особенности применения алгоритма при решении конкретных задач.

В сравнении с предыдущими работами одного из авторов [9, 10, 22] не предполагается получение аналитических условий оптимальности процесса управления в задаче быстродействия. Вместо этого предлагается конструкция численной процедуры, позволяющей в ряде случаев приближенно находить оптимальные по быстродействию процессы. В сравнении с [22], где предлагалось построение двусторонних оценок времени быстродействия на основе геометрических методов, оценки в этой статье строятся аналитически, но для более узкого класса систем. Полностью новой является идея использования метода глобальных улучшений Кротова при исследовании задачи быстродействия в дискретном времени. До этого метод Кротова применялся одним из авторов при исследовании некоторых задач оптимального управления непрерывными системами [23].

В рамках настоящей работы ограничимся рассмотрением стационарных линейных дискретных систем с невырожденной матрицей и выпуклым компактным множеством геометрических ограничений на управление. Условие невырожденности используется для обоснования сходимости предлагаемой итерационной процедуры. Условие стационарности несущественно и принято для простоты.

## 2. Постановка задачи и общая идея решения

Рассмотрим линейную стационарную систему с дискретным временем

$$(1) \quad x(k+1) = Ax(k) + u(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\},$$

где  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  – состояние системы,  $u(k) \in U$  – управление,  $U$  – выпуклое компактное множество в  $\mathbb{R}^n$  такое, что  $0 \in \text{int}U$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – заданная невырожденная матрица ( $\det A \neq 0$ ). Начальное условие для системы (1) фиксировано:

$$(2) \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Требуется вычислить минимальное число шагов  $N_{\min}$ , за которое возможно перевести систему (1) из заданного начального состояния  $x_0$  в начало координат и построить оптимальный процесс  $\{x^*(k), u^*(k-1)\}_{k=1}^{N_{\min}}$ , удовлетворяющий условию  $x^*(N_{\min}) = 0$ . Число  $N_{\min}$  будем далее называть временем быстродействия системы (1) с начальным условием (2) и будем предполагать, что поставленная задача разрешима, т.е.  $N_{\min} < \infty$ .

Исследование задачи будем проводить в два обособленных этапа. Дадим сперва их краткое описание.

На первом этапе производится оценка времени быстрогодействия  $N_{\min}$ . В некоторых ситуациях  $N_{\min}$  возможно вычислить точно, но в общем случае предполагается построение двусторонней оценки

$$(3) \quad \overline{N_{\min}} \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}},$$

где равенство  $\overline{N_{\min}} = \underline{N_{\min}}$  не исключается. Для этой цели могут быть использованы теоретические результаты из [9, 10] и алгоритмические подходы из [22]. В следующем разделе предлагается новый подход к построению оценки (3) в том случае, когда матрица  $A$  в системе (1) имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов.

На втором этапе решается задача оптимального управления при фиксированном времени  $N$  функционирования системы (1)–(2) относительно функционала  $\|x(N)\|^2$  квадрата евклидовой нормы вектора  $x(N)$ , где  $N$  принимает значения  $\overline{N_{\min}}, \dots, \underline{N_{\min}}$ . Наименьшее  $N$ , при котором минимальное значение  $\|x^*(N)\|^2$  равно нулю, дает время быстрогодействия  $N_{\min} = N$ , а соответствующее  $\{x^*(k), u^*(k-1)\}_{k=1}^N$  представляет собой искомый оптимальный процесс. Метод поиска оптимального процесса сформулирован и обоснован в разделах 4 и 5. Раздел 6 посвящен совместной алгоритмической реализации описанных этапов.

### 3. Оценка времени быстрогодействия

Как продемонстрировано в [9, 10, 22], вычисление величины  $N_{\min}$  может быть сведено к построению класса множеств 0-управляемости  $\{\Xi(N)\}_{N=0}^{\infty}$ . Здесь  $\Xi(N) \subset \mathbb{R}^n$  – множество тех начальных состояний, из которых системе (1) возможно перевести в начало координат за  $N$  шагов, т.е.

$$(4) \quad \Xi(N) := \begin{cases} \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \exists u(0), \dots, u(N-1) \in U: x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0, \end{cases}$$

где через  $x(N)$  обозначено решение системы (1) при  $x(0) = \xi$ .

Поскольку задача быстрогодействия для заданного начального состояния (2) предполагается разрешимой, то верно включение

$$x_0 \in \bigcup_{N=0}^{\infty} \Xi(N).$$

Поэтому с учетом (4) имеет место

$$(5) \quad N_{\min} = \min\{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \Xi(N)\}.$$

Процесс построения  $\{\Xi(N)\}_{N=0}^{\infty}$  является весьма трудоемкой процедурой, что обусловлено следующим представлением множеств 0-управляемости.

*Лемма 1* [9, лемма 1]. Пусть последовательность  $\{\Xi(N)\}_{N=0}^{\infty}$  определяется согласно (4) и  $\det A \neq 0$ . Тогда для всех  $N \in \mathbb{N}$  верно соотношение

$$\Xi(N) = - \sum_{k=1}^N \left( A^{-k} U \right),$$

где символ суммы означает сложение множеств по Минковскому.

Операция сложения множеств, как правило, труднореализуема с вычислительной точки зрения. Пусть, к примеру,  $U$  представляет собой многогранник в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда каждое множество  $\Xi(N)$  также является многогранником [24, следствие 19.3.2] и описательная сложность многогранников  $\Xi(N)$  (т.е. число их вершин) растет экспоненциально по  $N$  [25, теорема 4.1.2].

Однако при некоторых дополнительных предположениях относительно матрицы  $A$  и множества  $U$  возможно вычислить двустороннюю априорную оценку  $N_{\min}$  без необходимости построения последовательности  $\{\Xi(N)\}_{N=0}^{\infty}$  явным образом. Ниже рассматривается один из таких случаев.

Введем вспомогательные обозначения. Пусть  $u_{\max} > 0$  и  $\lambda \neq 0$  – некоторые действительные числа. Рассмотрим отображение  $F(\cdot; u_{\max}, \lambda): \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$ , заданное в виде

$$(6) \quad F(\alpha; u_{\max}, \lambda) = \begin{cases} \frac{|\alpha|}{u_{\max}}, & |\lambda| = 1, \\ - \frac{\ln \left( 1 - \frac{|\alpha|}{u_{\max}} (|\lambda| - 1) \right)}{\ln |\lambda|}, & |\lambda| \neq 1. \end{cases}$$

Для произвольного  $\varphi \in \mathbb{R}$  через  $A_{\varphi} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  обозначим матрицу поворота

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

а через  $\mathcal{B}_R$  – замкнутый шар радиуса  $R$  с центром в нуле в  $\mathbb{R}^2$ . Также введем обозначение для  $m$ -арного декартова произведения произвольных множеств  $V_1, \dots, V_m$ :

$$\bigotimes_{i=1}^m V_i := V_1 \times \dots \times V_m.$$

*Лемма 2.* Пусть в системе (1) выполнено условие  $N_{\min} < \infty$ , найдутся числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1} \neq 0$ ,  $r_1, \dots, r_{n_2} > 0$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_2} \in \mathbb{R}$  такие, что

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_{n_1} & & \\ \vdots & & & r_1 A_{\varphi_1} & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & r_{n_2} A_{\varphi_{n_2}} \end{pmatrix},$$



и числа  $u_{1,\max}, \dots, u_{n_1,\max}, R_{1,\max}, \dots, R_{n_2,\max} > 0$  такие, что

$$U = \bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u_{i,\max}; u_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R_{j,\max}},$$

где  $n_1, n_2 \geq 0$  и  $n_1 + 2n_2 = n$ .

Тогда включение  $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})^T \in \Xi(N)$  справедливо в том и только том случае, когда верно неравенство

$$N \geq \max \left\{ \max_{i=1, n_1} F(x_{0,i}; u_{i,\max}, \lambda_i); \max_{j=1, n_2} F\left(\sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2}; R_{j,\max}, r_j\right) \right\}.$$

Для удобства читателя доказательства утверждений из этого и последующих разделов отнесены в Приложение.

Отметим, что в рамках леммы 2 допустимы значения  $n_2 = 0$  или  $n_1 = 0$ . В этом случае в матрице  $A$  соответствующие блоки отсутствуют, а все ее собственные значения являются либо действительными, либо существенно комплексными.

*Следствие 1.* При выполнении предположений леммы 2 в силу (5) имеет место точное равенство

$$N_{\min} = \left\lceil \max \left\{ \max_{i=1, n_1} F(x_{0,i}; u_{i,\max}, \lambda_i); \max_{j=1, n_2} F\left(\sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2}; R_{j,\max}, r_j\right) \right\} \right\rceil,$$

где  $\lceil \alpha \rceil$  означает минимальное целое число не меньшее, чем  $\alpha$ :

$$\lceil \alpha \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z}: \alpha \leq k\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Результат следствия 1 применим только к узкому классу систем  $(A, U)$ , описываемых условиями леммы 2. Но его можно использовать для получения двусторонних оценок времени быстрогодействия в случае произвольной диагонализруемой матрицы  $A$  и выпуклого множества  $U$ . В этих целях предлагается рассмотреть вспомогательные системы вида (1), удовлетворяющие условиям леммы 2, и воспользоваться следующим утверждением.

*Лемма 3.* Пусть справедливо включение  $\underline{U} \subset U \subset \overline{U}$ , где  $\underline{U}, U, \overline{U} \subset \mathbb{R}^n$  – выпуклые и компактные множества, содержащие 0, задача быстрогодействия для  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  разрешима для систем  $(A, \underline{U})$ ,  $(A, U)$ ,  $(A, \overline{U})$ , а величины  $\underline{N}_{\min}$ ,  $N_{\min}$ ,  $\overline{N}_{\min}$  – оптимальные значения критерия в задаче быстрогодействия для данных систем соответственно. Тогда

$$\overline{N}_{\min} \leq N_{\min} \leq \underline{N}_{\min}.$$

Известно, что любая матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , обладающая  $n$  линейно независимыми собственными векторами, может быть приведена к виду, представленному в лемме 2, при помощи преобразования подобия [26, теорема 3.4.5]. Столбцы матрицы данного преобразования  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  представляют собой либо собственные векторы для действительных собственных значений, либо их мнимые и действительные части для комплексных собственных значений. Аналогичное линейное преобразование можно применить ко всей системе  $(A, U)$  в целом, перейдя к эквивалентной системе  $(S^{-1}AS, S^{-1}U)$  так, как это продемонстрировано в [27]. А именно, справедлив следующий результат.

*Лемма 4* [27, лемма 2]. Пусть  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\det S \neq 0$ ,  $(A, U)$  – система вида (1), через  $\{\tilde{\Xi}(N)\}_{N=0}^{\infty}$  обозначен класс множеств 0-управляемости системы  $(S^{-1}AS, S^{-1}U)$ . Тогда

$$\Xi(N) = S\tilde{\Xi}(N), \quad N \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

В рамках рассматриваемой задачи множество  $S^{-1}U$  может быть оценено сверху и снизу множествами  $\underline{U}, \overline{U} \subset \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющими условиям леммы 2. В сочетании с леммой 3 это приводит к искомым оценкам величины  $N_{\min}$  в исходной задаче быстрогодействия. Более точно, имеет место следующее.

*Теорема 1.* Пусть в системе (1) для заданного начального состояния  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  верно, что  $N_{\min} < \infty$ , матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов,  $\det A \neq 0$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – матрица перехода в вещественный жорданов базис матрицы  $A$ :

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_{n_1} & & \\ \vdots & & & r_1 A_{\varphi_1} & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & r_{n_2} A_{\varphi_{n_2}} \end{pmatrix}.$$

Тогда справедлива следующая оценка  $N_{\min}$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \max \left\{ \max_{i=1, n_1} F(y_{0,i}; u''_{i,\max}, \lambda_i); \right. \right. \\ & \quad \left. \max_{j=1, n_2} F \left( \sqrt{y_{0, n_1+2j-1}^2 + y_{0, n_1+2j}^2}; R''_{j,\max}, r_j \right) \right\} \right] \leq N_{\min} \leq \\ & \leq \left[ \max \left\{ \max_{i=1, n_1} F(y_{0,i}; u'_{i,\max}, \lambda_i); \right. \right. \\ & \quad \left. \max_{j=1, n_2} F \left( \sqrt{y_{0, n_1+2j-1}^2 + y_{0, n_1+2j}^2}; R'_{j,\max}, r_j \right) \right\} \right], \end{aligned}$$

где  $y_0 = S^{-1}x_0$ , а числа  $u'_{i,\max}, u''_{i,\max}, R'_{j,\max}, R''_{j,\max} > 0$ ,  $i = \overline{1, n_1}$ ,  $j = \overline{1, n_2}$ , определяются из условия

$$\bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u'_{i,\max}; u'_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R'_{j,\max}} \subset S^{-1}U \subset \bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u''_{i,\max}; u''_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R''_{j,\max}}.$$

Теорема 1 позволяет получить априорные оценки величины  $N_{\min}$  для начального состояния  $x_0$  только в случае, когда у матрицы системы  $A$  существует  $n$  линейно независимых собственных векторов. Данный факт существенен, так как результатов, аналогичных лемме 2, получить не удастся, если вещественная жорданова форма матрицы  $A$  содержит жордановы клетки, соответствующие кратным собственным значениям. Это связано со сложностью построения множеств, инвариантных относительно такого рода линейного преобразования.

*Замечание 1.* В утверждении теоремы 1 фигурируют величины  $u'_{i,\max}, u''_{i,\max}, R'_{j,\max}, R''_{j,\max}$ , определяющие значения двусторонней оценки времени быстрогодействия  $N_{\min}$ . Согласно лемме 3, наибольшая точность нижней оценки будет достигаться при минимальных допустимых значениях  $u''_{i,\max}, R''_{j,\max}$ , которые могут быть вычислены в ходе решения следующих задач выпуклого программирования:

$$(7) \quad u''_{i,\max} = \max_{u \in S^{-1}U} |u_i|, \quad i = \overline{1, n_1},$$

$$(8) \quad R''_{j,\max} = \max_{u \in S^{-1}U} \sqrt{u_{n_1+2j-1}^2 + u_{n_1+2j}^2}, \quad j = \overline{1, n_2}.$$

Определение наилучших с точки зрения верхней оценки значений параметров  $u'_{1,\max}, \dots, u'_{n_1,\max}, R'_{1,\max}, \dots, R'_{n_2,\max}$  представляет собой существенно более сложную проблему. Это связано с необходимостью решения минимаксной задачи, зависящей от начального состояния  $x_0$ . Однако, если известен некий набор допустимых значений этих параметров, при котором выполняется

$$\underline{U} = \bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u'_{i,\max}; u'_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R'_{j,\max}} \subset S^{-1}U,$$

то можно зафиксировать все параметры, кроме одного, а последний выбрать в результате решения одной из двух следующих оптимизационных задач:

$$(9) \quad u'_{i_0,\max} = \max \left\{ u > 0: \bigotimes_{i=1}^{i_0-1} [-u'_{i,\max}; u'_{i,\max}] \times [-u; u] \times \right. \\ \left. \times \bigotimes_{i=i_0+1}^{n_1} [-u'_{i,\max}; u'_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R'_{j,\max}} \subset S^{-1}U \right\}, \quad i_0 = \overline{1, n_1},$$

$$(10) \quad R'_{j_0, \max} = \max \left\{ R > 0: \bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u'_{i, \max}; u'_{i, \max}] \times \bigotimes_{j=1}^{j_0-1} \mathcal{B}_{R'_{j, \max}} \times \mathcal{B}_R \times \right. \\ \left. \times \bigotimes_{j=j_0+1}^{n_2} \mathcal{B}_{R'_{j, \max}} \subset S^{-1}U \right\}, \quad j_0 = \overline{1, n_2}.$$

#### 4. Задача с фиксированным временем

Пусть для некоторого целого  $N$  выполняется двусторонняя оценка  $\overline{N_{\min}} \leq N \leq \underline{N_{\min}}$ , где значения  $\overline{N_{\min}} \leq \underline{N_{\min}}$  получены на основе результатов из [9, 10, 22] или предыдущего раздела. Отметим, что метод построения оценок здесь несущественен, так как в дальнейших рассуждениях будут использованы только их числовые значения.

Введем обозначения  $\mathcal{U} := \{k \mapsto u(k) : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow U\}$ ,  $\mathcal{X} := \{k \mapsto x(k) : \{0, 1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid x(0) = x_0\}$  и рассмотрим задачу

$$(11) \quad J(x(N)) = \|x(N)\|^2 \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}.$$

Если  $N_{\min}$  – время быстрогодействия для (1)–(2), то минимум в задаче (11) при  $N \geq N_{\min}$  достигается и равен нулю. Если же  $N = N_{\min}$ , то все решения задачи (11) являются решениями (оптимальными управлениями, порождающими оптимальные процессы) в исходной задаче быстрогодействия для системы (1) с начальным условием (2).

Известно [9, 28, 29], что оптимальные управления в задаче (11) в случае  $N \geq N_{\min}$  являются особыми в том смысле, что необходимые условия оптимальности в виде дискретного принципа максимума оказываются бессодержательны в вопросе их поиска. Различные методы регуляризации, предложенные в [9, 10, 15, 18, 28, 29], позволяют решить эту проблему, но приводят, как правило, к существенным трудностям вычислительного характера. Поэтому будем подходить к решению задачи (11) с позиции построения глобально минимизирующей последовательности. Поступим следующим образом.

Пусть некоторое (не оптимальное) управление  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  уже задано, этому управлению соответствует траектория  $\hat{x} \in \mathcal{X}$  – решение системы рекуррентных соотношений (1) при  $u = \hat{u}$  с начальным условием (2) – и качество данного управления  $\hat{u}$  численно характеризуется значением  $J(\hat{x}(N))$ . Построим при этих предположениях новое управление  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ , которому соответствует новая траектория  $\tilde{x} \in \mathcal{X}$  и для которого качество управления  $J(\tilde{x}(N))$  удовлетворяет неравенству

$$(12) \quad J(\tilde{x}(N)) < J(\hat{x}(N)).$$

Если это сделать удалось и  $J(\tilde{x}(N)) > 0$ , то переобозначим  $\tilde{u}$  через  $\hat{u}$  и повторим процедуру. Для построения улучшения  $\tilde{u}$  по заданному управлению  $\hat{u}$  будем использовать метод, предложенный В.Ф. Кротовым и развитый затем в разных направлениях в многочисленных работах его учеников и последователей (см., к примеру, [16, 18–21, 23, 30]).

В [16, 19, 21] было отмечено, что в случае линейных по состоянию систем и линейного терминального функционала качества метод Кротова демонстрирует наибольшую скорость улучшения. Более того, в этом случае существенно упрощается и сам процесс построения улучшений, так как оказывается возможным применить наиболее простую, линейную, реализацию метода. С целью использования этих преимуществ рассмотрим сперва преобразование регуляризации, позволяющее свести задачу (11) относительно системы (1) и начального условия (2) к эквивалентной задаче с линейным по состоянию функционалом.

Для  $x \in \mathbb{R}^n$  положим  $X := xx^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Тогда для любого  $k$  имеем

$$(13) \quad \begin{aligned} X(k+1) &:= x(k+1)x(k+1)^T = (Ax(k) + u(k))(Ax(k) + u(k))^T = \\ &= AX(k)A^T + Ax(k)u(k)^T + u(k)x(k)^T A(k)^T + u(k)u(k)^T \end{aligned}$$

и  $X(0) = x_0x_0^T$ . Рассмотрим задачу

$$(14) \quad \mathcal{J}(X(N)) = \text{tr}[X(N)] \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}.$$

Ясно, что  $\mathcal{J}(X(N)) = \mathcal{J}(x(N)x(N)^T) = J(x(N))$ , а задача (14) эквивалентна задаче (11).

Напомним конструкцию классических необходимых условий оптимальности в задаче (14) (см., к примеру, [31]). Составим функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H(x, X, \psi, \Psi, u) = \langle \psi, Ax + u \rangle + \text{tr} [\Psi (AXA^T + Axu^T + ux^T A^T + uu^T)]$$

и систему двойственных уравнений

$$\begin{aligned} \psi(k) &= A^T \psi(k+1) + 2A^T \Psi(k+1)u(k), \quad \psi(N) = 0, \\ \Psi(k) &= A^T \Psi(k+1)A, \quad \Psi(N) = -I, \end{aligned}$$

где  $\psi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $I$  – единичная матрица размеров  $n \times n$ . Если управление  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  оптимально в задаче (14), то выполнены следующие соотношения дискретного векторно-матричного принципа максимума:

$$(15) \quad \begin{aligned} H(\hat{x}(k), \hat{X}(k), \hat{\psi}(k+1), \hat{\Psi}(k+1), \hat{u}(k)) &= \\ &= \max_{v \in U} H(\hat{x}(k), \hat{X}(k), \hat{\psi}(k+1), \hat{\Psi}(k+1), v), \end{aligned}$$

$$(16) \quad \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + \hat{u}(k), \quad \hat{x}(0) = x_0,$$

$$(17) \quad \begin{aligned} \hat{X}(k+1) &= A\hat{X}(k)A^T + A\hat{x}(k)\hat{u}(k)^T + \hat{u}(k)\hat{x}(k)^T A^T + \hat{u}(k)\hat{u}(k)^T, \\ \hat{X}(0) &= x_0x_0^T, \end{aligned}$$

$$(18) \quad \hat{\psi}(k) = A^T \hat{\psi}(k+1) + 2A^T \hat{\Psi}(k+1)\hat{u}(k), \quad \hat{\psi}(N) = 0,$$

$$(19) \quad \hat{\Psi}(k) = A^T \hat{\Psi}(k+1)A, \quad \hat{\Psi}(N) = -I,$$

где  $k$  принимает все возможные значения из множества  $\{0, 1, \dots, N-1\}$ .

В соотношениях (15)–(19)  $\hat{X}(k)$  и  $\hat{\Psi}(k)$  выполняют роль вспомогательных переменных регуляризации и в дальнейшем их можно убрать из рассмотрения. Действительно, в силу (19) имеет место

$$\hat{\Psi}(k) = -(A^T)^{N-k} A^{N-k} = -(A^{N-k})^T A^{N-k},$$

а для любого  $k$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} H(\hat{x}(k), \hat{X}(k), \hat{\psi}(k+1), \hat{\Psi}(k+1), v) = \\ = \langle \hat{\psi}(k+1), A\hat{x}(k) + v \rangle + \\ + \text{tr} \left[ \hat{\Psi}(k+1) \left( A\hat{X}(k)A^T + A\hat{x}(k)v^T + v\hat{x}(k)^T A^T + vv^T \right) \right] = \\ = \langle \hat{\psi}(k+1) + 2\hat{\Psi}(k+1)A\hat{x}(k), v \rangle + \langle v, \hat{\Psi}(k+1)v \rangle + \hat{H}_0(k) = \\ = \langle \hat{\psi}(k+1) - 2(A^{N-k-1})^T A^{N-k}\hat{x}(k), v \rangle - \langle v, (A^{N-k-1})^T A^{N-k-1}v \rangle + \hat{H}_0(k), \end{aligned}$$

где

$$\hat{H}_0(k) = \langle \hat{\psi}(k+1), A\hat{x}(k) \rangle + \text{tr}[\hat{\Psi}(k+1)A\hat{X}(k)A^T]$$

не зависит от  $v$ .

Поэтому система соотношений дискретного принципа максимума (15)–(19) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} (20) \quad & \langle \hat{\psi}(k+1) - 2(A^{N-k-1})^T A^{N-k}\hat{x}(k), \hat{u}(k) \rangle - \langle \hat{u}(k), (A^{N-k-1})^T A^{N-k-1}\hat{u}(k) \rangle = \\ & = \max_{v \in U} \left( \langle \hat{\psi}(k+1) - 2(A^{N-k-1})^T A^{N-k}\hat{x}(k), v \rangle - \langle v, (A^{N-k-1})^T A^{N-k-1}v \rangle \right), \end{aligned}$$

$$(21) \quad \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + \hat{u}(k), \quad \hat{x}(0) = x_0,$$

$$(22) \quad \hat{\psi}(k) = A^T \hat{\psi}(k+1) - 2(A^{N-k})^T A^{N-k-1}\hat{u}(k), \quad \hat{\psi}(N) = 0.$$

Важно отметить, что эта регуляризованная система не эквивалентна в вычислительном плане вырожденной системе соотношений дискретного принципа максимума для задачи (11) и теоретически позволяет находить оптимальные по быстродействию управления в исходной задаче. Однако, как уже было сказано, определение оптимального управления непосредственно из условий (20)–(22) сопряжено с серьезными вычислительными трудностями. Поэтому в соответствии с указанным выше подходом будем искать улучшения  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$  заданного (неоптимального) управления  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  в смысле неравенства (12), используя полученные регулярные конструкции.

## 5. Метод Кротова

Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  – некоторое произвольное управление,  $\hat{x} \in \mathcal{X}$  удовлетворяет уравнению (21), а  $\hat{\psi} \in \mathcal{X}'$  удовлетворяет двойственному уравнению (22).

Здесь  $\mathcal{X}' := \{k \mapsto \psi(k) : \{0, 1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \psi(N) = 0\}$ . Рассмотрим функцию  $\hat{\varphi} : \{0, \dots, N\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  вида

$$\hat{\varphi}(k, x) = \langle \hat{\psi}(k), x \rangle - \|A^{N-k}x\|^2.$$

Для  $k \in \{0, \dots, N-1\}$  и  $x, u \in \mathbb{R}^n$  введем следующие обозначения, согласованные с [15, 16]:

$$\begin{aligned}\hat{R}(k, x, u) &= \hat{\varphi}(k+1, Ax + u) - \hat{\varphi}(k, x), \\ \hat{G}(x) &= \hat{\varphi}(N, x) - \hat{\varphi}(0, x_0) + J(x).\end{aligned}$$

Здесь выбор обозначений  $\hat{\varphi}$ ,  $\hat{R}$ ,  $\hat{G}$  связан с тем, что эти функции определяются элементом  $\hat{\psi} \in \mathcal{X}'$ , т.е., в конечном счете, выбранным произвольно управлением  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ . Ясно, что по построению для любых значений  $k, x$  и  $u$  имеет место

$$\begin{aligned}\hat{R}(k, x, u) &= H\left(x, xx^T, \hat{\psi}(k+1), -(A^{N-k-1})^T A^{N-k-1}, u\right) - \hat{\varphi}(k, x), \\ \hat{G}(x) &\equiv -\langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle + \|A^N x_0\|^2.\end{aligned}$$

Следующий результат представляет собой основное утверждение об улучшении. Теоремы об улучшении были впервые сформулированы В.Ф. Кротовым (см., к примеру, [16, теорема 1]).

*Теорема 2.* Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ ,  $\hat{x} \in \mathcal{X}$ ,  $\hat{\psi} \in \mathcal{X}'$  удовлетворяют соотношениям (21) и (22). Пусть  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$  удовлетворяет условию

$$(23) \quad \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) = \max_{v \in U} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), v) \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\},$$

где  $\tilde{x}(0) = x_0$  и для  $k = 0, \dots, N-1$

$$(24) \quad \tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) + \tilde{u}(k).$$

Тогда имеет место нестрогое улучшение в задаче (12), т.е.

$$J(\tilde{x}(N)) \leq J(\hat{x}(N)).$$

*Замечание 2.* Пусть  $\hat{u}$  и  $\hat{x}$  взяты из теоремы 2. Тогда пара  $(\hat{x}, \hat{u})$  удовлетворяет соотношениям дискретного принципа максимума (20)–(22) в том и только том случае, когда для  $\tilde{u} = \hat{u}$  выполняется условие (23) при  $\tilde{x} = \hat{x}$ , т.е. имеет место

$$\hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) = \max_{v \in U} \hat{R}(k, \hat{x}(k), v), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

*Замечание 3.* Условие (23) эквивалентно условию

$$\tilde{u}(k) \in \operatorname{Argmax}_{v \in U} \left( \langle \hat{\psi}(k+1), -2(A^{N-k-1})^T A^{N-k} \tilde{x}(k), v \rangle - \|A^{N-k-1}v\|^2 \right).$$

В качестве элементарного следствия отметим, каким образом результат теоремы 2 связан с решениями экстремальных задач (11) и (14).

*Следствие 2.* Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  – оптимальное управление в задачах (11) и (14), а  $\hat{x} \in \mathcal{X}$  и  $\hat{\psi} \in \mathcal{X}'$  удовлетворяют соотношениям (21), (22). Тогда для любого  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ , удовлетворяющего условию (23), выполняется равенство  $J(\tilde{x}(N)) = J(\hat{x}(N))$ .

Утверждение теоремы 2 о наличии нестрогого неравенства  $J(\tilde{x}(N)) \leq J(\hat{x}(N))$  останется справедливым и в том случае, если условие  $\det A \neq 0$  в исходной задаче не выполняется. Но для систем вида (1) с невырожденной матрицей  $A$  возможно установить более тесную связь между неувлучшаемостью в смысле неравенства (12) в теореме 2 и экстремальными в задаче (14).

*Теорема 3.* Пусть в системе (1) матрица  $A$  невырождена,  $\hat{u}$  и  $\hat{x}$  взяты из теоремы 2. Тогда существует единственная пара  $(\tilde{x}, \tilde{u})$ , удовлетворяющая условиям (23) и (24), а равенство  $J(\tilde{x}(N)) = J(\hat{x}(N))$  имеет место в том и только том случае, когда пара  $(\hat{x}, \hat{u})$  удовлетворяет соотношениям дискретного принципа максимума (20)–(22).

Итак, в рамках рассматриваемой задачи можно гарантировать наличие строгого неравенства (12) при выборе нового управления  $\tilde{u}$  из условия (23), если и только если данное управление  $\hat{u}$  не является экстремальным в задаче (14). Непосредственно из этого вытекает возможность построения итерационного алгоритма приближенного поиска оптимального управления в исходной задаче быстрогодействия.

Пусть задано управление  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ . Построим последовательность управлений  $u^{(l)} \in \mathcal{U}$  следующим способом. Положим  $u^{(0)} = \hat{u}$ . Пусть для некоторого  $l \geq 0$  управление  $u^{(l)}$  уже построено. Тогда для каждого  $k \in \{0, \dots, N-1\}$  в качестве  $u^{(l+1)}(k)$  возьмем решение экстремальной задачи

$$\langle \psi^{(l)}(k+1) - 2(A^{N-k-1})^T A^{N-k} x^{(l+1)}(k), v \rangle - \|A^{N-k-1} v\|^2 \rightarrow \max_{v \in U},$$

где

$$\psi^{(l)}(N) = 0, \quad x^{(l+1)}(0) = x_0$$

и для  $k = 0, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} \psi^{(l)}(k) &= A^T \psi^{(l)}(k+1) - 2(A^{N-k})^T A^{N-k-1} u^{(l)}(k), \\ x^{(l+1)}(k+1) &= A x^{(l+1)}(k) + u^{(l+1)}(k). \end{aligned}$$

Из теоремы 3 и замечания 3 с учетом компактности множества  $U$  и однозначной разрешимости последнего уравнения получаем

*Следствие 3.* Пусть матрица  $A$  невырождена. Тогда для любого начального приближения  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  построенная выше последовательность процессов управления  $(x^{(l)}, u^{(l)})$  имеет сходящуюся в  $\mathbb{R}^{2nN+n}$  подпоследовательность, а всякий процесс  $(\tilde{x}, \tilde{u})$ , являющийся частичным пределом последовательности  $\{(x^{(l)}, u^{(l)})\}$ , удовлетворяет соотношениям дискретного принципа максимума (20)–(22).



## 6. Алгоритмическая реализация

В соответствии с полученными результатами имеем следующий алгоритм приближенного решения задачи быстрогодействия для системы (1)–(2).

0. Вычислить двустороннюю оценку времени быстрогодействия  $\overline{N_{\min}} \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}$ . В том случае, когда матрица  $A$  имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов, искомая оценка может быть найдена по теореме 1 с учетом замечания 1. Положить  $N = \overline{N_{\min}}$ . Задать величины допустимых погрешностей вычислений  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ .
1. Положить  $u^{(0)} = 0$ ,  $l = 0$ ,  $\mathcal{A}(k) = A^{N-k}$ ,  $k = 0, \dots, N$ .
2. Найти решение  $x^{(l)}$  системы уравнений

$$x(k+1) = Ax(k) + u^{(l)}(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad x(0) = x_0.$$

3. Найти решение  $\psi^{(l)}$  системы уравнений

$$\psi(k) = A^T \psi(k+1) - 2\mathcal{A}(k)^T \mathcal{A}(k+1)u^{(l)}(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad \psi(N) = 0.$$

4. Последовательно найти для каждого  $k \in \{0, \dots, N-1\}$  решение  $u^{(l+1)}(k)$  экстремальной задачи

$$\langle \psi^{(l)}(k+1) - 2\mathcal{A}(k+1)^T \mathcal{A}(k)x^{(l+1)}(k), v \rangle - \|\mathcal{A}(k+1)v\|^2 \rightarrow \max_{v \in U},$$

где значения  $x^{(l+1)}(k)$  вычисляются по формулам

$$x^{(l+1)}(k+1) = Ax^{(l+1)}(k) + u^{(l+1)}(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad x^{(l+1)}(0) = x_0.$$

5. Проверить условие внутренней остановки

$$\|x^{(l+1)}(N)\| - \|x^{(l)}(N)\| < \varepsilon_1,$$

в случае выполнения положить  $\tilde{u} = u^{(l+1)}$  и перейти к шагу 7.

6. Увеличить  $l$  на единицу и перейти к шагу 3.
7. Проверить условие внешней остановки

$$\|\tilde{x}(N)\| = \|x^{(l+1)}(N)\| < \varepsilon_2,$$

при выполнении положить  $N_{\min} = N$  и закончить расчеты, иначе, при выполнении неравенства  $N < \underline{N_{\min}}$ , увеличить  $N$  на единицу и перейти к шагу 1. Если  $N = \underline{N_{\min}}$ , то закончить расчеты, положив  $N_{\min} = \underline{N_{\min}}$ .

Поскольку матрица  $A$  в системе (1) невырождена, то алгоритм позволяет при каждом  $N = \overline{N_{\min}}, \dots, \underline{N_{\min}}$  приближенно найти управление, порождающее процесс, для которого выполнены соотношения дискретного принципа максимума (20)–(22).

Найденное по окончании работы алгоритма значение  $N_{\min}$  имеет смысл верхней оценки времени быстроедействия для системы (1)–(2), а управление  $\tilde{u}$ , вообще говоря, следует считать только гарантирующим. Однако если в задаче (14) дискретный принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности, то тогда с точностью до  $\varepsilon_2$ -погрешности расчетов  $N_{\min}$  совпадает со временем быстроедействия (т.е. при достаточно малом  $\varepsilon_2$  не может отличаться от времени быстроедействия более чем на единицу), а  $\tilde{u}$  порождает оптимальный по быстроедействию процесс в системе (1)–(2). В случае  $N_{\min} = \overline{N_{\min}}$  значение  $N_{\min}$  заведомо является временем быстроедействия, при этом  $\tilde{u}$  – оптимальное по быстроедействию управление.

Шаги 1–6 алгоритма заменяют собой численный метод решения задачи минимизации функционала  $J$  по совокупности переменных  $u(0), \dots, u(N-1)$  при заданном значении  $N$ . Вместо решения одной задачи с квадратичным функционалом вида (11) размерности  $nN$  на множестве  $U^N$  предлагается несколько раз последовательно решить  $N$  задач размерности  $n$  на множестве  $U$  с квадратичным функционалом, записанным на шаге 4. Вычислительная практика показывает, что второй подход оказывается эффективнее в тех случаях, когда значение  $N$  достаточно велико. Сложность решения задачи на шаге 4 зависит от структуры множества  $U$ . Например, если  $U$  является многогранником, то соответствующая оптимизационная задача может быть решена методом эллипсоидов с полиномиальной временной сложностью [32]. Отметим также, что характерные значения  $N$  достаточно велики в том случае, если исследуемая задача была получена путем высокоточной дискретизации некоторой задачи в непрерывном времени.

## 7. Примеры

Для иллюстрации результатов использования предложенного подхода к решению конкретных задач в этом разделе ограничимся случаем  $n = 2$  как наиболее удобным для изображения траекторий управляемого процесса в фазовом пространстве и в то же время достаточно содержательным с точки зрения разнообразия постановок задач и особенностей их решения. Начнем с одного академического примера, допускающего во многом аналитическое исследование.

*Пример 1.* Рассмотрим систему вида (1)–(2)

$$x(k+1) = Ax(k) + u(k), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} + r \\ \gamma^{-1} \end{pmatrix}, \quad \gamma \in (0; r), \quad r > 0.$$

Множество  $U \subset \mathbb{R}^2$ , определяющее геометрические ограничения, имеет вид

$$U = \{(u_1, u_2) \mid u_1^2 + u_2^2 \leq r^2\}.$$

Требуется решить для этой системы задачу быстродействия.

Ясно, что  $N_{\min} \geq 2$ , поскольку точка

$$Ax_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} + r \\ 1 \end{pmatrix}$$

находится от нуля на расстоянии большем, чем  $r$ , а значит, за один шаг перевести систему в начало координат невозможно.

В то же время при любом  $\gamma$  можно положить  $u^*(0) = (-r, 0)^T$  и получить

$$x^*(1) = Ax_0 + u^*(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Ax^*(1) = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} \\ \gamma \end{pmatrix},$$

причем точка  $Ax^*(1)$  находится на расстоянии  $r$  от нуля, так что найдется  $u^*(1)$ , для которого  $x^*(2) = Ax^*(1) + u^*(1) = 0$ . Следовательно, в этой задаче  $N_{\min} = 2$  и процесс  $\{x^*(k), u^*(k-1)\}_{k=0}^2$  является оптимальным.

Опробуем на этом примере алгоритм из раздела 6. На нулевом шаге определим двустороннюю оценку  $\overline{N_{\min}} \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}$ . Поскольку матрица  $A$  является диагональной и невырожденной, то для построения искомой оценки по теореме 1 достаточно вычислить значения четырех параметров  $u'_{1,\max}, u'_{2,\max}, u''_{1,\max}, u''_{2,\max}$  так, чтобы выполнялось двойное включение

$$[-u'_{1,\max}; u'_{1,\max}] \times [-u'_{2,\max}; u'_{2,\max}] \subset U \subset [-u''_{1,\max}; u''_{1,\max}] \times [-u''_{2,\max}; u''_{2,\max}].$$

Для выполнения первого из них положим

$$u'_{1,\max} = u'_{2,\max} = r/\sqrt{2},$$

а наилучшие значения  $u''_{i,\max}$  с учетом замечания 1 определим из решения задачи (7):

$$u''_{1,\max} = u''_{2,\max} = r.$$

При этом в силу теоремы 1 имеет место

$$\left[ \max_{i=1,2} F(x_{0,i}; r, \lambda_i) \right] \leq N_{\min} \leq \left[ \max_{i=1,2} F(x_{0,i}; r/\sqrt{2}, \lambda_i) \right],$$

где  $x_{0,1} = \sqrt{r^2 - \gamma^2} + r$ ,  $x_{0,2} = \gamma^{-1}$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \gamma$ , а функция  $F$  определяется формулой (6). В частности, для любых значений  $r > 0$  и  $\gamma \in (0; r)$

$$N_{\min} \geq \lceil F(x_{0,1}; r, \lambda_1) \rceil = \left\lceil \frac{\sqrt{r^2 - \gamma^2} + r}{r} \right\rceil = 2.$$

Если, для определенности,  $r = 0,5$ ,  $\gamma = 0,1$ , то из верхней оценки находим

$$N_{\min} \leq \lceil 2,8 \rceil = 3.$$

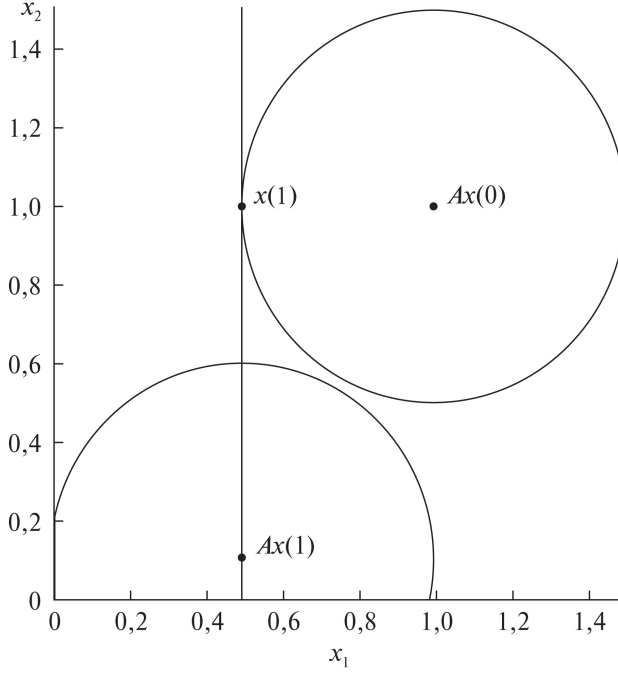


Рис. 1. Первая итерация алгоритма в примере 1.

Положим  $N = 2$ ,  $u^{(0)}(k) \equiv 0$ . На шаге 2 алгоритма убеждаемся, что нулевое управление не является оптимальным:

$$x^{(0)}(1) = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} + r \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^{(0)}(2) = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} + r \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \|x^{(0)}(2)\| > 0.$$

На шаге 3 фиксируем  $\psi^{(0)}(k) \equiv 0$  и переходим к шагу 4.

На шаге 4 необходимо последовательно решить две экстремальные задачи при  $k = 0$  и при  $k = 1$ . В частности, при  $k = 0$  имеем задачу

$$u_1^2 + \gamma^2 u_2^2 + 2\sqrt{r^2 - \gamma^2}u_1 + 2\gamma^2 u_2 \rightarrow \min_{u_1^2 + u_2^2 \leq r^2}.$$

Для  $r = 0,5$ ,  $\gamma = 0,1$  из ее решения получаем (см. рис. 1)

$$u^{(1)}(0) \approx (-0,4999, -0,01)^T \Rightarrow x^{(1)}(1) \approx (0,49, 0,99)^T.$$

При тех же значениях  $r$  и  $\gamma$  для  $k = 1$  находим

$$u^{(1)}(1) \approx (-0,49, -0,1)^T \Rightarrow x^{(1)}(2) \approx 0.$$

Таким образом, уже на первой итерации применения алгоритма приближенно построено гарантирующее управление в задаче быстрогодействия для

заданной системы. Поскольку  $N = 2$  совпадает с нижней оценкой времени быстрогодействия, можно заключить, что это гарантирующее управление является оптимальным и  $N_{\min} = 2$ .

Убедимся, что вторая итерация не приводит к ухудшению результата. На второй итерации в качестве исходного управления имеем построенное только что управление  $u^{(1)}$ . На шаге 3 находим ( $r = 0,5$ ,  $\gamma = 0,1$ )

$$\psi^{(1)}(2) = 0, \quad \psi^{(1)}(1) \approx (1, 0, 02)^T.$$

На шаге 4 соответственно получаем

$$\begin{aligned} u^{(2)}(0) &\approx (-0,4992, -0,028)^T \Rightarrow x^{(2)}(1) \approx (0,491, 0,972)^T, \\ u^{(2)}(1) &\approx (-0,4905, -0,97)^T \Rightarrow x^{(2)}(2) \approx 0. \end{aligned}$$

Интересно отметить особенности геометрического содержания проведенных построений.

Для этого предположим сперва, что управление в системе строится так, чтобы на каждом шаге получать ближайшую к нулю точку из множества достижимости. Поскольку

$$x(1) = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2 - \gamma^2} + r \\ 1 \end{pmatrix} + u(0),$$

то соответствующее управление  $u^*(0)$  является решением задачи

$$\|x(1)\|^2 = (\sqrt{r^2 - \gamma^2} + r + u_1)^2 + (1 + u_2)^2 \rightarrow \min_{u_1^2 + u_2^2 \leq r^2},$$

в частности, при  $r = 0,6$ ,  $\gamma = 0,1$  имеем

$$u^*(0) \approx (-0,352, -0,355)^T \Rightarrow x^*(1) \approx (0,639, 0,645)^T.$$

Но тогда (см. рис. 2)

$$Ax(1) \approx \begin{pmatrix} 0,639 \\ 0,064 \end{pmatrix},$$

а эта точка находится на расстоянии большем, чем  $0,6 > r$  от нуля. Поэтому никакое управление  $u^*(1)$  не позволит перевести систему в ноль на втором шаге.

Заметим теперь, что первая итерация алгоритма из раздела 6 также реализует поиск ближайших точек из множеств достижимости, но не в смысле евклидовой метрики (ср. рис. 1 и 2), а в смысле расстояний, порождаемых нормами

$$\|x\|_{A,N,k}^2 = \|A^{N-k-1}x\|^2.$$

В частности, при  $k = N - 1$  норма  $\|\cdot\|_{A,N,k}$  совпадает с евклидовой при любых  $N$  и  $A$ ,  $\det A \neq 0$ . В свою очередь вторая итерация минимизирует указанное расстояние уже не до нуля, а до некоторой другой точки, определяемой

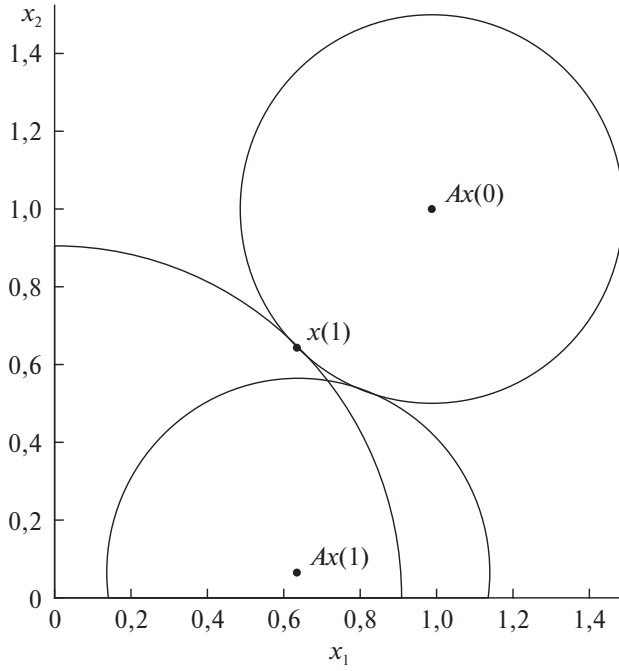


Рис. 2. Поиск ближайших к нулю точек в примере 1.

вектором двойственных переменных  $\psi(k)$ . Последнее позволяет скорректировать структуру оптимального управления в том случае, когда на первой итерации не удалось подсчитать ответ достаточно точно. Как будет видно из дальнейшего, такая ситуация может возникнуть, если множество  $U$  имеет достаточно сложную структуру, а точка  $x_0$  лежит на границе множества 0-управляемости  $\Xi(N_{\min})$ .

*Пример 2.* Рассмотрим систему вида (1)–(2), где

$$A = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} \cos(1) + \sin(1) & -2\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) - \sin(1) \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} -37,8 \\ -26,1 \end{pmatrix}.$$

Геометрические ограничения заданы множеством

$$U = \{u \mid \langle u, Hu \rangle \leq 1\}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется решить задачу быстрогодействия.

Построим оценку  $\overline{N_{\min}} \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}$ . Матрица  $A$  обладает парой комплексно-сопряженных собственных значений, равных по модулю величине  $r_1 = 4/5$ . Матрица перехода в вещественный жорданов базис имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

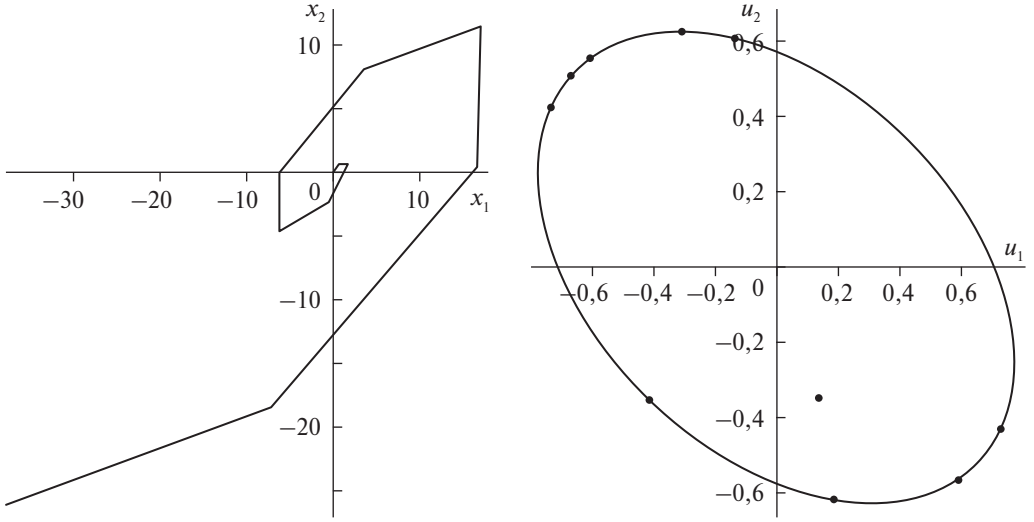


Рис. 3. Гарантирующий (оптимальный) процесс в примере 2.

Таким образом, рассматриваемая система удовлетворяет условиям теоремы 1 для случая  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 1$ . Радиусы вписанного  $\underline{U}$  и описанного  $\overline{U}$  шаров для эллипса  $S^{-1}U$  определяются однозначно и могут быть найдены численно:

$$\underline{U} = \mathcal{B}_{R'_{1,\max}}, \quad R'_{1,\max} = 0,3449, \quad \overline{U} = \mathcal{B}_{R''_{1,\max}}, \quad R''_{1,\max} = 1,2965.$$

Используя найденные значения  $R'_{1,\max}$ ,  $R''_{1,\max}$  в теореме 1, получаем, что

$$8 \leq N_{\min} \leq 13.$$

Применим алгоритм из раздела 6, проведя соответствующие расчеты численно. Зафиксируем найденную двустороннюю оценку  $8 \leq N_{\min} \leq 13$  и положим  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-16}$ . При этих значениях погрешностей для  $N = 8$  и  $N = 9$  условие внутренней остановки выполняется на 33-й и 9-й итерациях соответственно, однако условие внешней остановки выполняется только для  $N = 10$ . При  $N = 10$  условие внутренней остановки выполняется уже на первой итерации. При этом оказывается найден процесс управления  $\{x^{(1)}(k), u^{(1)}(k-1)\}_{k=0}^{10}$ , представленный на рис. 3 (на этом и последующих рис. 4, 6–8 и 10 слева приведена траектория процесса в фазовом пространстве, а справа – значения управлений на фоне множества геометрических ограничений  $U$ ). Для этого процесса имеет место  $\|x^{(1)}(N)\| < \varepsilon_2$ . Для сравнения, при  $N = 8$  было найдено  $\|x^{(33)}(N)\| \approx 0,5$ , а при  $N = 9$  было найдено  $\|x^{(9)}(N)\| \approx 0,2$ . Отметим, что вычисления до внутренней остановки при  $N = 11, 12, 13$  за одну итерацию приводят к определению процесса, для которого выполняется условие внешней остановки  $\|x^{(1)}(N)\| < \varepsilon_2$ , и при этом имеет место  $u^{(1)}(10) \approx \dots \approx u^{(1)}(N) \approx 0$ .

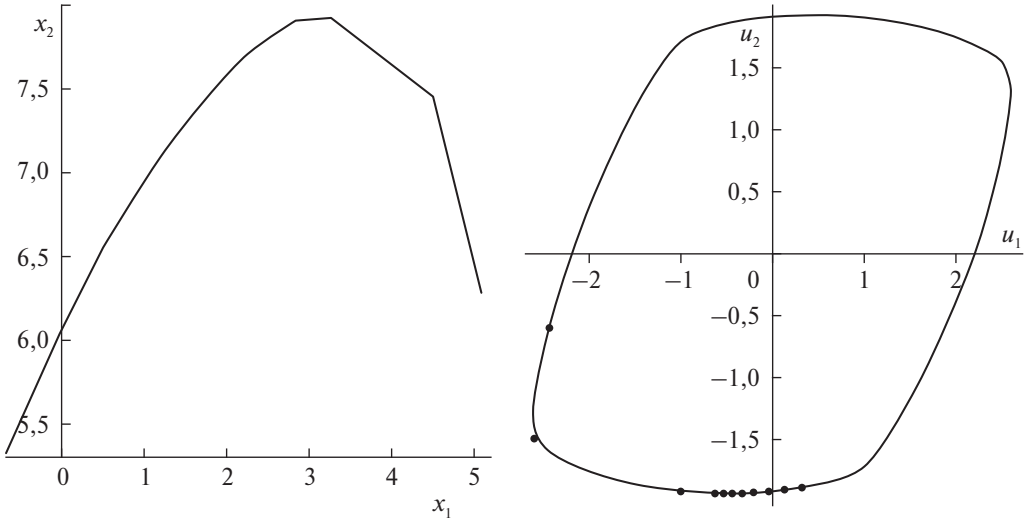


Рис. 4. Процесс  $(x^{(1)}, u^{(1)})$  в примере 3 при  $N = 11$ .

Формальный итог применения алгоритма из раздела 6 оказывается следующим: с точностью до  $\varepsilon_2$ -погрешности вычислений верхняя оценка времени быстроедействия  $N_{\min}$  может быть уменьшена с  $\underline{N}_{\min} = 13$  до  $\underline{N}_{\min} = 10$ , при этом гарантирующее управление и соответствующая ему траектория имеют вид, представленный на рис. 3.

Чтобы оценить качество полученных результатов, можно использовать численные процедуры условной минимизации для непосредственного решения гладких конечномерных задач  $\|x(9)\|^2 \rightarrow \min$  и  $\|x(10)\|^2 \rightarrow \min$  при наличии конечного числа гладких ограничений типа неравенств на переменные  $u(k)$ . Поскольку размерности соответствующих задач не слишком велики, их удастся решить достаточно точно. В первом случае минимальное значение примерно равно  $0,041 \approx 0,2^2$ , во втором случае оно равняется нулю. Следовательно,  $N_{\min} = 10$  и представленный на рис. 3 гарантирующий процесс в действительности является оптимальным.

*Пример 3.* Рассмотрим систему вида (1)–(2), где

$$A = \begin{pmatrix} 31/20 & -3/20 \\ 1/10 & 6/5 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 5,08 \\ 6,28 \end{pmatrix}.$$

Геометрические ограничения заданы множеством

$$U = \left\{ (u_1, u_2) \left| \frac{4^{2/3}|u_1 - \sqrt{3}u_2|^{4/3}}{16} + \frac{6^{2/3}|\sqrt{3}u_1 + u_2|^{4/3}}{36} \leq 1 \right. \right\}.$$

Как и ранее, требуется решить задачу быстроедействия.



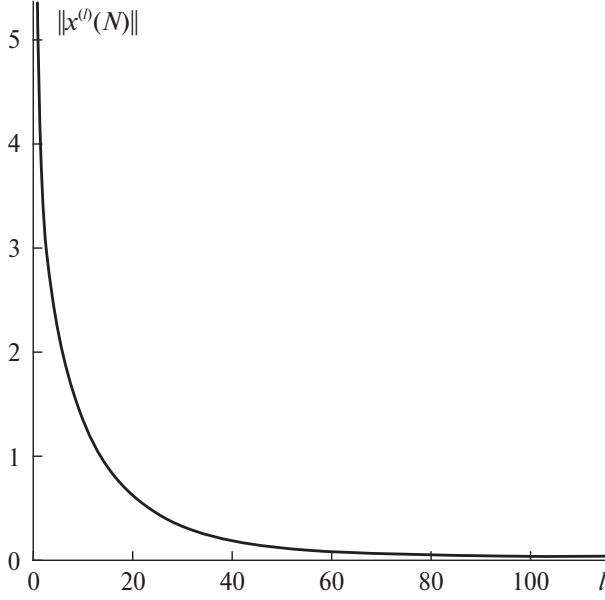


Рис. 5. Сходимость внутренних итераций в примере 3 при  $N = 11$ .

Построим оценку  $\overline{N_{\min}} \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}$ . Матрица  $A$  обладает парой вещественных собственных значений  $\lambda_1 = 3/2$ ,  $\lambda_2 = 5/4$ . Матрица перехода в вещественный жорданов базис имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система удовлетворяет условиям теоремы 1 для случая  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 0$ . Параметры вписанного  $\underline{U}$  и описанного  $\overline{U}$  прямоугольников для множества  $S^{-1}U$  определим численно:

$$\underline{U} = [-u'_{1,\max}; u'_{1,\max}] \times [-u'_{2,\max}; u'_{2,\max}], \quad u'_{1,\max} = 0,3883, \quad u'_{2,\max} = 1,4057,$$

$$\overline{U} = [-u''_{1,\max}; u''_{1,\max}] \times [-u''_{2,\max}; u''_{2,\max}], \quad u''_{1,\max} = 0,8834, \quad u''_{2,\max} = 2,4839.$$

Используя теорему 1, получаем оценку

$$3 \leq N_{\min} \leq 17.$$

Применим численно алгоритм из раздела 6 при  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$  и  $\varepsilon_2 = 0,001$ . Впервые условие внешней остановки оказывается выполнено при  $N = 11$ . Распишем процесс выполнения внутренних итераций при  $N = 11$  более подробно. На первой внутренней итерации находим процесс управления  $\{x^{(1)}(k), u^{(1)}(k-1)\}_{k=0}^{11}$ , представленный на рис. 4. Для этого процесса  $\|x^{(1)}(N)\| \approx 5,37$ . Применение повторных итераций ( $l = 1, 2, \dots$ ) приводит к уменьшению значения  $\|x^{(l+1)}(N)\|$ . График зависимости  $\|x^{(l)}(N)\|$  от  $l$  приведен на рис. 5. Процесс управления  $(x^{(116)}, u^{(116)})$  изображен на рис. 6.

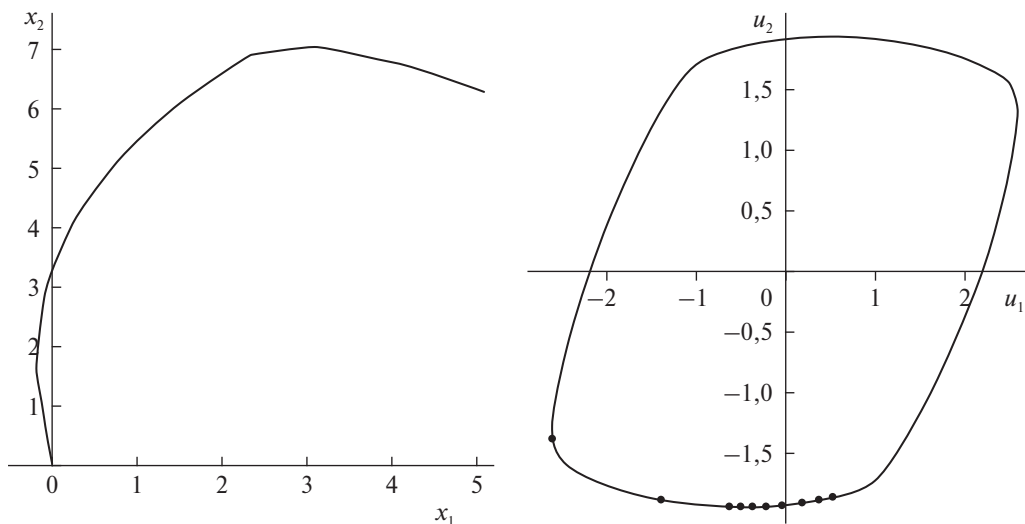


Рис. 6. Гарантирующий процесс в примере 3.

Низкая точность двусторонней оценки и медленная сходимость алгоритма в этом примере обусловлены тем, что рассматриваемая система не является устойчивой, а начальное условие лежит вблизи границы множества достижимости. Тем не менее по результатам работы алгоритма с точностью до  $\varepsilon_2$ -погрешности получена новая верхняя оценка времени быстрого действия  $\underline{N}_{\min} = 11$  и построено соответствующее этому значению гарантирующее управление. Однако эта оценка не совпадает со временем быстрого действия, поскольку минимальное значение функционала в конечномерной задаче  $\|x(10)\|^2 \rightarrow \min$  равно нулю, и в действительности  $N_{\min} = 10$ .

*Пример 4.* Рассмотрим систему вида (1)–(2), где

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 9,33 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

В этом примере рассмотрим геометрические ограничения смешанного типа, заданные множеством

$$U = \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right]^2 \cap \mathcal{B}_1,$$

где  $\mathcal{B}_1$  – круг единичного радиуса с центром в нуле. Решим при этих условиях задачу быстрого действия.

Построим оценку  $\overline{N}_{\min} \leq N_{\min} \leq \underline{N}_{\min}$ . Матрица  $A$  обладает парой комплексно-сопряженных собственных значений, равных по модулю величине  $r_1 = 1$ . При этом она уже находится в своей вещественной жордановой форме, в связи с чем  $S = I$ . Таким образом, рассматриваемая система удовлетворяет условиям теоремы 1 для случая  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 1$ . Радиусы вписанного  $\underline{U}$  и

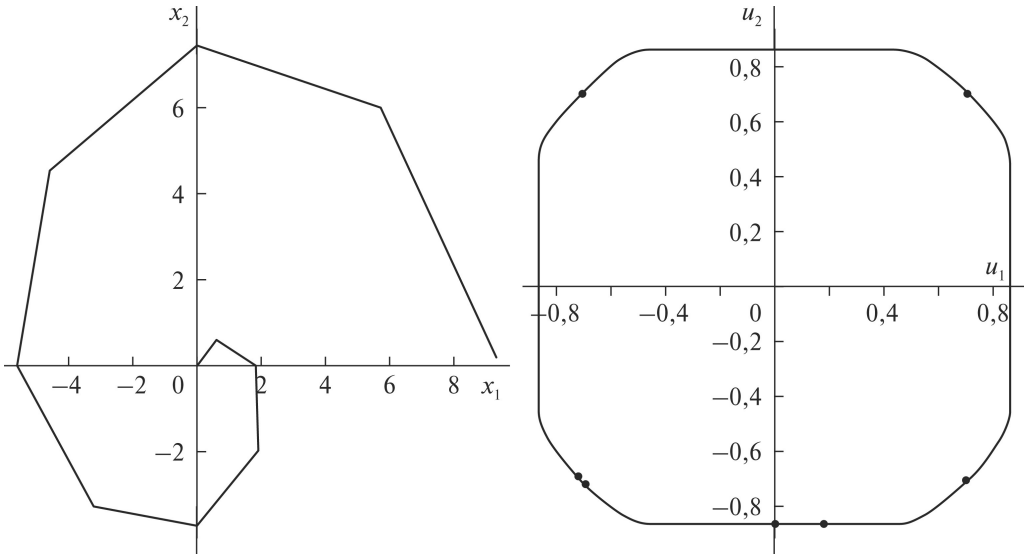


Рис. 7. Оптимальный процесс в примере 4.

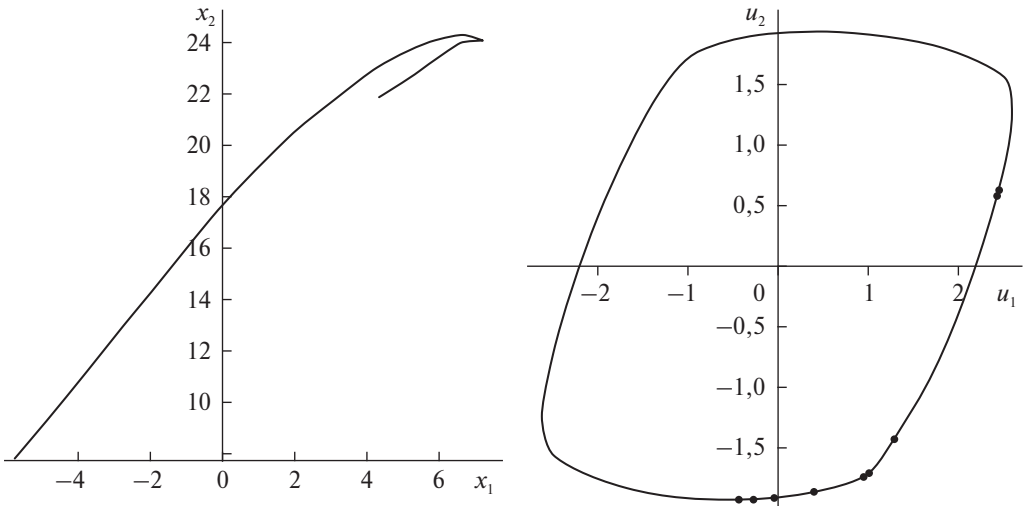


Рис. 8. Процесс  $(x^{(1)}, u^{(1)})$  в примере 5.

описанного  $\overline{U}$  шаров для множества  $S^{-1}U$  определяются однозначно и могут быть найдены численно:

$$\underline{U} = \mathcal{B}_{R'_{1,\max}}, \quad R'_{1,\max} = \sqrt{3}/2, \quad \overline{U} = \mathcal{B}_{R''_{1,\max}}, \quad R''_{1,\max} = 1.$$

Используя теорему 1, получаем оценку

$$10 \leq N_{\min} \leq 11.$$

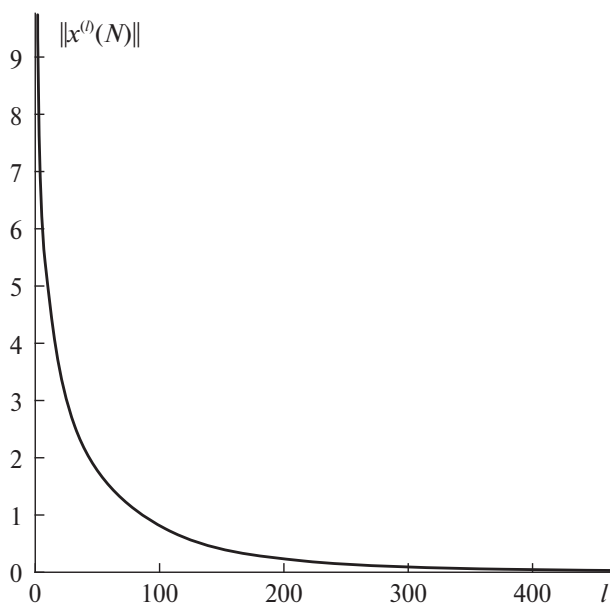


Рис. 9. Сходимость итераций к оптимальному решению в примере 5.

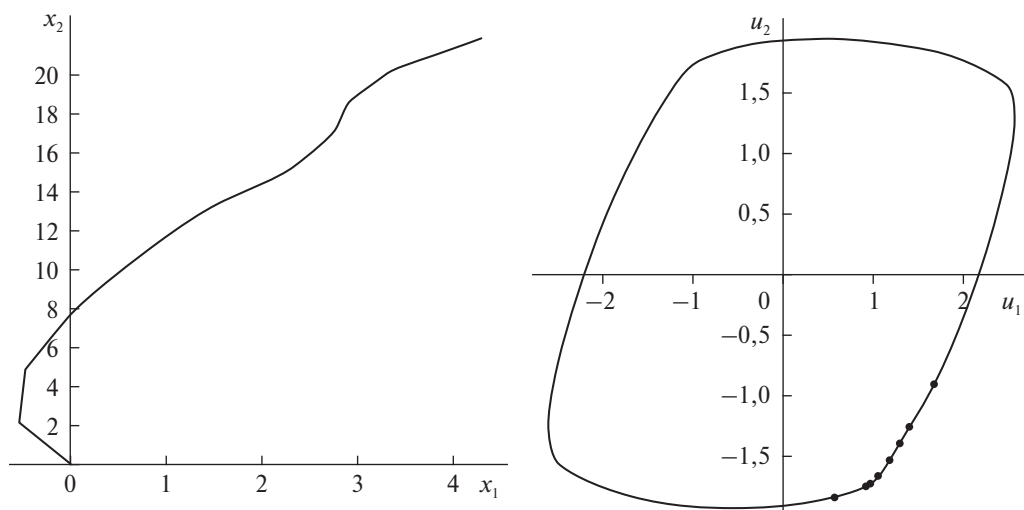


Рис. 10. Приближение к оптимальному процессу в примере 5.

Применим алгоритм из раздела 6 при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$ . При  $N = 10$  на первой внутренней итерации находим процесс управления  $\{x^{(1)}(k), u^{(1)}(k-1)\}_{k=0}^{10}$ , представленный на рис. 7, для которого имеет место  $\|x^{(1)}(N)\| < \varepsilon_2$ .

Поскольку  $N = 10$  является нижней оценкой времени быстродействия, то процесс, представленный на рис. 7, оптимален с точностью до  $\varepsilon_2$ -погрешности вычислений.

Пример 5. Рассмотрим систему вида (1)–(2), где

$$A = \begin{pmatrix} 33/20 & -1/5 \\ 4/5 & 17/20 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 4,31 \\ 21,85 \end{pmatrix}.$$

Геометрические ограничения заданы тем же множеством, что и в примере 3. Рассмотрим для этого примера задачу быстрогодействия.

Особенность данной постановки состоит в том, что матрица  $A$  не имеет двух линейно независимых собственных векторов. Поэтому здесь для построения оценок времени быстрогодействия нельзя применить теорему 1. Тем не менее имеется возможность использовать средства определения времени быстрогодействия, разработанные в [22]. В силу [22] имеет место точное равенство  $N_{\min} = 10$ .

Применим алгоритм из раздела 6, считая двустороннюю оценку времени быстрогодействия  $N_{\min}$  заданной в виде  $10 \leq N_{\min} \leq 10$  и полагая  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_2 = 0,01$ . На первой внутренней итерации находим процесс управления  $\{x^{(1)}(k), u^{(1)}(k-1)\}_{k=0}^{10}$ , представленный на рис. 8. Как и в примере 3, этот процесс далек от оптимального – для него  $\|x^{(1)}(N)\| \approx 9,73$ . Поэтому актуально применение повторных итераций, которое приводит к результатам, изображенным на рис. 9 и 10.

Поскольку время быстрогодействия известно точно, полученный результат является  $\varepsilon_2$ -приближением к оптимальному решению поставленной задачи.

## 8. Заключение

В статье построен алгоритм исследования задачи быстрогодействия для линейных дискретных систем с невырожденной матрицей. Алгоритм позволяет уточнять известные верхние оценки на время быстрогодействия и находить соответствующие этим оценкам гарантирующие процессы управления. При выполнении некоторых дополнительных предположений результатом работы алгоритма является построение оптимального решения в задаче быстрогодействия.

Предложенный алгоритм относится к классу методов решения конечно-мерных экстремальных задач с ограничениями на основе процедуры понижения размерности. Поскольку средний коэффициент снижения размерности в рассматриваемой задаче определяется временем быстрогодействия, эффективность алгоритма возрастает с его увеличением.

В дальнейшем планируется распространить полученные результаты на случай систем с вырожденной матрицей, а также использовать предложенный подход для непосредственного вычисления времени быстрогодействия, а не только его верхней оценки. Актуальным также является получение новых содержательных утверждений о сходимости и определение скорости сходимости алгоритма в общем случае.

Лемма 5. Пусть  $V_1, V'_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $V_2, V'_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ . Тогда

$$V_1 \times V_2 + V'_1 \times V'_2 = (V_1 + V'_1) \times (V_2 + V'_2).$$

*Доказательство.* Включение  $y \in V_1 \times V_2 + V'_1 \times V'_2$  по определению суммы Минковского и декартова произведения справедливо в том и только том случае, когда найдутся  $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2$ ,  $v'_1 \in V'_1$ ,  $v'_2 \in V'_2$  такие, что

$$y = (v_1, v_2) + (v'_1, v'_2) = (v_1 + v'_1, v_2 + v'_2).$$

Но последнее эквивалентно включению  $y \in (V_1 + V'_1) \times (V_2 + V'_2)$ . Лемма 5 доказана.

*Доказательство леммы 2.* Согласно предположениям  $\det A \neq 0$  и для любого  $k \in \mathbb{N}$  верны соотношения

$$A^{-k} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-k} & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_{n_1}^{-k} & & \\ \vdots & & & r_1^{-k} A_{-k\varphi_1} & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & r_{n_2}^{-k} A_{-k\varphi_{n_2}} \end{pmatrix},$$

$$A^{-k}U = \bigotimes_{i=1}^{n_1} \left[ -|\lambda_i|^{-k} u_{i,\max}; |\lambda_i|^{-k} u_{i,\max} \right] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} r_j^{-k} \mathcal{B}_{R_{j,\max}}.$$

Поэтому из определения (4) и лемм 1, 5 для произвольного  $N \in \mathbb{N}$  вытекает представление

$$(II.1) \quad \Xi(N) = \bigotimes_{i=1}^{n_1} \left[ -\sum_{k=1}^N |\lambda_i|^{-k} u_{i,\max}; \sum_{k=1}^N |\lambda_i|^{-k} u_{i,\max} \right] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^N r_j^{-k} \mathcal{B}_{R_{j,\max}}.$$

Отсюда следует, что включение  $x_0 \in \Xi(N)$  равносильно тому, что для всех  $i = \overline{1, n_1}$  и  $j = \overline{1, n_2}$  выполнены соотношения

$$(II.2) \quad |x_{0,i}| \leq \sum_{k=1}^N |\lambda_i|^{-k} u_{i,\max} = \begin{cases} Nu_{i,\max}, & |\lambda_i| = 1, \\ u_{i,\max} \frac{1 - |\lambda_i|^{-N}}{|\lambda_i| - 1}, & |\lambda_i| \neq 1, \end{cases}$$

$$(II.3) \quad \sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2} \leq \sum_{k=1}^N r_j^{-k} R_{j,\max} = \begin{cases} NR_{j,\max}, & r_j = 1, \\ R_{j,\max} \frac{1 - r_j^{-N}}{r_j - 1}, & r_j \neq 1. \end{cases}$$

Условие (П.2) эквивалентно неравенству

$$N \geq \begin{cases} \frac{|x_{0,i}|}{u_{i,\max}}, & |\lambda_i| = 1, \\ -\frac{\ln\left(1 - \frac{|x_{0,i}|}{u_{i,\max}}(|\lambda_i| - 1)\right)}{\ln|\lambda_i|}, & |\lambda_i| \neq 1, \end{cases} = F(x_{0,i}; u_{i,\max}, \lambda_i).$$

Условие (П.3) эквивалентно неравенству

$$N \geq \begin{cases} \frac{\sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2}}{R_{j,\max}}, & r_j = 1, \\ -\frac{\ln\left(1 - \frac{\sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2}}{R_{j,\max}}(r_j - 1)\right)}{\ln r_j}, & r_j \neq 1, \end{cases} = \\ = F\left(\sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2}; R_{j,\max}, r_j\right).$$

Полученные выражения корректны, поскольку имеет место

$$\left(1 - \frac{|x_{0,i}|}{u_{i,\max}}(|\lambda_i| - 1)\right) > 0, \quad i = \overline{1, n_1}, \\ \left(1 - \frac{\sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2}}{R_{j,\max}}(r_j - 1)\right) > 0, \quad j = \overline{1, n_2}.$$

Действительно, при  $|\lambda_i| \leq 1$  и  $r_j \leq 1$  эти соотношения выполняются автоматически. Если же  $|\lambda_i| > 1$  или  $r_j > 1$ , то их можно получить, перейдя в (П.1) к пределу по  $N \rightarrow \infty$  и использовав предположение  $N_{\min} < \infty$ , в силу которого верно, что  $x_0 \in \bigcup_{N=0}^{\infty} \Xi(N)$  (см. детальное обоснование в [27]).

Таким образом, условия (П.2) и (П.3) выполняются в точности тогда, когда

$$N \geq \max \left\{ \max_{i=\overline{1, n_1}} F(x_{0,i}; u_{i,\max}, \lambda_i); \right. \\ \left. \max_{j=\overline{1, n_2}} F\left(\sqrt{x_{0,n_1+2j-1}^2 + x_{0,n_1+2j}^2}; R_{j,\max}, r_j\right) \right\},$$

и тем самым лемма 2 доказана.

**Доказательство леммы 3.** Из (4) следует, что для любого  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  выполняется включение

$$\Xi(N) \subset \Xi(N) \subset \overline{\Xi}(N),$$

где  $\Xi(N)$ ,  $\Xi(N)$ ,  $\Xi(N)$  – множества 0-управляемости за  $N$  шагов систем  $(A, U)$ ,  $(A, U)$ ,  $(A, \bar{U})$  соответственно. Поэтому неравенство  $\overline{N_{\min}} \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}$  вытекает непосредственно из (5). Лемма 3 доказана.

*Доказательство теоремы 1.* Обозначим через  $\{\tilde{\Xi}(N)\}_{N=0}^{\infty}$  класс множеств 0-управляемости системы  $(\Lambda, S^{-1}U)$ . Согласно лемме 4 верно представление

$$\Xi(N) = S\tilde{\Xi}(N).$$

Отсюда следует, что включение  $x_0 \in \Xi(N)$  верно тогда и только тогда, когда справедливо  $y_0 = S^{-1}x_0 \in \tilde{\Xi}(N)$ . Таким образом, с учетом (5) значение времени быстрогодействия для систем  $(A, U)$  и  $(\Lambda, S^{-1}U)$  совпадает при начальных состояниях  $x_0$  и  $y_0$  соответственно.

Положим

$$\underline{U} = \bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u'_{i,\max}; u'_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R'_{j,\max}}, \quad \bar{U} = \bigotimes_{i=1}^{n_1} [-u''_{i,\max}; u''_{i,\max}] \times \bigotimes_{j=1}^{n_2} \mathcal{B}_{R''_{j,\max}}.$$

Поскольку  $0 \in \text{int}U$ , а само множество  $U$  ограничено, то это же верно для множества  $S^{-1}U$ . Следовательно, найдутся такие значения  $u'_{i,\max}, u''_{i,\max}, R'_{j,\max}, R''_{j,\max} > 0$ , для которых имеет место  $\underline{U} \subset S^{-1}U \subset \bar{U}$ .

Далее, в силу следствия 1 значение времени быстрогодействия  $\underline{N_{\min}}$  для системы  $(\Lambda, \underline{U})$  и начального состояния  $y_0$  имеет вид

$$\underline{N_{\min}} = \left\lceil \max \left\{ \max_{i=1, n_1} F(y_{0,i}; u'_{i,\max}, \lambda_i); \max_{j=1, n_2} F \left( \sqrt{y_{0,n_1+2j-1}^2 + y_{0,n_1+2j}^2}; R'_{j,\max}, r_j \right) \right\} \right\rceil.$$

Аналогично, значение времени быстрогодействия  $\overline{N_{\min}}$  для системы  $(\Lambda, \bar{U})$  и начального состояния  $y_0$  имеет вид

$$\overline{N_{\min}} = \left\lceil \max \left\{ \max_{i=1, n_1} F(y_{0,i}; u''_{i,\max}, \lambda_i); \max_{j=1, n_2} F \left( \sqrt{y_{0,n_1+2j-1}^2 + y_{0,n_1+2j}^2}; R''_{j,\max}, r_j \right) \right\} \right\rceil.$$

Для завершения доказательства остается применить лемму 3.

*Лемма 6.* Пусть  $\hat{u} \in \mathcal{U}$ ,  $\hat{x} \in \mathcal{X}$  – решение (21),  $\hat{\psi} \in \mathcal{X}'$  – решение (22). Тогда

$$(II.4) \quad \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \hat{R}(k, x, \hat{u}(k)) \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\},$$

$$(II.5) \quad \hat{G}(\hat{x}(N)) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \hat{G}(x).$$



*Доказательство.* Равенство (П.5) очевидно выполняется, поскольку

$$\hat{G}(x) \equiv -\langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle + \|A^N x_0\|^2.$$

В силу (22) при всех  $k \in \{0, \dots, N-1\}$  имеем

$$\begin{aligned} \hat{R}(k, x, \hat{u}(k)) &= \langle \hat{\psi}(k+1), Ax + \hat{u}(k) \rangle - \|A^{N-k-1}(Ax + \hat{u}(k))\|^2 - \\ &- \langle \hat{\psi}(k), x \rangle + \|A^{N-k}x\|^2 = \langle \hat{\psi}(k+1), \hat{u}(k) \rangle - \|A^{N-k-1}\hat{u}(k)\|^2, \end{aligned}$$

поэтому (П.4) также выполняются. Лемма 6 доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Пусть выполнены все перечисленные в теореме 2 условия. Исходя из введенных в разделе 5 обозначений, в силу леммы 6 имеем

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}(N)) &= \hat{G}(\tilde{x}(N)) - \hat{\varphi}(N, \tilde{x}(N)) + \hat{\varphi}(0, x_0) = \\ &= \hat{G}(\tilde{x}(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} \left( \hat{\varphi}(k+1, \tilde{x}(k+1)) - \hat{\varphi}(k, \tilde{x}(k)) \right) = \\ &= \hat{G}(\tilde{x}(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) \stackrel{(23)}{\leq} \\ &\stackrel{(23)}{\leq} \hat{G}(\tilde{x}(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \hat{u}(k)) \stackrel{(П.4)}{\leq} \\ &\stackrel{(П.4)}{\leq} \hat{G}(\tilde{x}(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) \stackrel{(П.5)}{\leq} \\ &\stackrel{(П.5)}{\leq} \hat{G}(\hat{x}(N)) - \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) = J(\hat{x}(N)). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

*Доказательство теоремы 3.* Покажем, что в случае невырожденной матрицы  $A$  существует единственная пара  $(\tilde{x}, \tilde{u})$ , удовлетворяющая (23), (24). Поскольку  $\tilde{x}$  в силу (24) определяются по  $\tilde{u}$  однозначно, то достаточно показать, что при любых значениях  $\tilde{x}(k)$  существует единственное  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ , удовлетворяющее условию (23). Действительно, если это так, то при  $k=0$  однозначно определено  $\tilde{u}(0) \in U$ , по которому однозначно определяется  $\tilde{x}(1)$ , затем  $\tilde{u}(1)$  и т.д. Но  $\tilde{u}$  из условия (23) находится при каждом  $k = 0, \dots, N$  путем решения экстремальной задачи

$$\hat{R}(k, \tilde{x}(k), v) \rightarrow \max_{v \in U},$$

которая в силу замечания 3 эквивалентна задаче

$$f(v) := \langle \hat{\psi}(k+1) - 2(A^{N-k-1})^T A^{N-k} \tilde{x}(k), v \rangle - \|A^{N-k-1}v\|^2 \rightarrow \max_{v \in U}.$$

Покажем, что решение этой задачи существует и единственно при любом  $\tilde{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ . Поскольку матрица квадратичной формы  $(A^{N-k-1})^T A^{N-k-1}$  положительно определена при  $\det A \neq 0$ , то строгий глобальный максимум функции  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  при отсутствии ограничения  $v \in U$  достигается в точке

$$v^* = \frac{1}{2} A^{k+1-N} (A^{k+1-N})^T \hat{\psi}(k+1) - A \tilde{x}(k).$$

Возможны два случая:  $v^* \in U$  или  $v^* \notin U$ . В первом случае  $v^*$  – единственное решение рассматриваемой экстремальной задачи с ограничениями. Во втором случае условный максимум достигается в некоторой другой точке  $v' \in U$ , поскольку функция  $f$  непрерывна, а множество  $U$  компактно. Положим  $\alpha = f(v') = \max_{v \in U} f(v)$ . Тогда множество уровня  $V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) \geq \alpha\}$  представляет собой непустой строго выпуклый компакт. При этом  $V \cap U = \{v'\}$ . Действительно, по определению  $v' \in V \cap U$ , и если бы существовала точка  $v'' \in V \cap U$ ,  $v'' \neq v'$ , то и отрезок  $[v', v'']$  целиком содержался бы в множестве  $V \cap U$ , так как множества  $V$  и  $U$  выпуклы. Но множество  $V$  строго выпукло, поэтому  $\frac{1}{2}(v' + v'') \in \text{int} V$ , т.е.  $f(v'/2 + v''/2) > \alpha$ ,  $v'/2 + v''/2 \in U$ , что противоречит определению числа  $\alpha$ . Таким образом, во втором случае  $v'$  – единственное решение задачи  $f(v) \rightarrow \max_{v \in U}$ .

Далее, предположим, что пара  $(\hat{x}, \hat{u})$  не удовлетворяет соотношениям дискретного принципа максимума (20)–(22). В силу замечания 2 это означает, что найдется  $r \in \{0, \dots, N-1\}$  такое, что

$$\hat{R}(r, \hat{x}(r), \hat{u}(r)) < \max_{v \in U} \hat{R}(r, \hat{x}(r), v).$$

Возьмем наименьшее такое  $r$ . Тогда в силу однозначной определенности  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$  имеет место

$$\tilde{u}(k) = \hat{u}(k), \quad k = 0, 1, \dots, r-1,$$

и, следовательно,  $\tilde{x}(r) = \hat{x}(r)$ . Поэтому

$$\hat{R}(r, \hat{x}(r), \hat{u}(r)) < \max_{v \in U} \hat{R}(r, \hat{x}(r), v) = \max_{v \in U} \hat{R}(r, \tilde{x}(r), v) = \hat{R}(r, \tilde{x}(r), \tilde{u}(r)).$$

Отсюда, возвращаясь к доказательству теоремы 2, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) &= \sum_{k=0}^{r-1} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) + \hat{R}(r, \tilde{x}(r), \tilde{u}(r)) + \\ &+ \sum_{k=r+1}^{N-1} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) > \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$J(\tilde{x}(N)) < J(\hat{x}(N)).$$

Если же пара  $(\hat{x}, \hat{u})$  удовлетворяет соотношениям дискретного принципа максимума, то в силу однозначной разрешимости условий (23), (24) имеет место  $\tilde{x} = \hat{x}$  и  $\tilde{u} = \hat{u}$ . Поэтому  $J(\tilde{x}(N)) = J(\hat{x}(N))$ . Теорема 3 полностью доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
3. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
4. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
5. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их приложения в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
6. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
7. *Holtzman J.M., Halkin H.* Directional convexity and the maximum principle for discrete systems // J. SIAM Control. 1966. V. 4. No. 2. P. 263–275.
8. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
9. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // АиТ. 2017. № 10. С. 3–32.
10. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // АиТ. 2019. № 3. С. 3–25.
11. *Lin X. Zhang W.* A maximum principle for optimal control of discrete-time stochastic Systems with multiplicative noise // IEEE Trans. Automatic Control. 2015. V. 60. No. 4. P. 1121–1126.
12. *Kurzanskiy A., Varaiya P.* Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems // IEEE Trans. Automatic Control. 2007. V. 52. No. 1. P. 26–38.
13. *Краснощеченко В.И.* Симплекс-метод для решения задачи быстрогодействия при наличии ограничения на скалярное управление и фазовых ограничений // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 6. Доступ в журн. <http://engjournal.ru/catalog/it/asu/1252.html>
14. *Сазанова Л.А.* Устойчивость оптимального синтеза в задаче быстрогодействия // Известия вузов. Математика. 2002. № 2. С. 46–57.
15. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
16. *Коннов А.И., Кротов В.Ф.* О глобальных методах последовательного улучшения управляемых процессов // АиТ. 1999. № 10. С. 77–88.
17. *Хрусталеv М.М.* Необходимые и достаточные условия для задачи оптимального управления // ДАН. 1973. Т. 211. № 1. С. 59–62.
18. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука. Физматлит, 1997.

19. *Трушкова Е.А.* Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // *АиТ.* 2011. № 6. С. 151–159.
20. *Расина И.В.* Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов // *АиТ.* 2012. № 10. С. 3–17.
21. *Кротов В.Ф., Булатов А.В., Батурина О.В.* Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // *АиТ.* 2011. № 6. С. 64–78.
22. *Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М., Порцева Е.Ю.* О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстрогодействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ.* 2021. № 12. С. 48–72.
23. *Хрусталева М.М., Царьков К.А.* Метод последовательного улучшения в задачах оптимизации вероятностных критериев для линейных по состоянию диффузионно-скачкообразных систем // *АиТ.* 2023. № 6. С. 100–121.
24. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
25. *Weibel C.* Minkowski sums of polytopes: combinatorics and computation. Suisse: EPFL, 2007.
26. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
27. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ.* 2023. № 2. С. 3–34.
28. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1981.
29. *Гурман В.И.* Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука. Физматлит, 1977.
30. *Дыхта В.А.* Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // *АиТ.* 2014. № 11. С. 19–37.
31. *Athans M.* The Matrix Minimum Principle // *Inform. Control.* 1967. V. 11. P. 592–606.
32. *Козлов М.К., Тарасов С.П., Хачиян Л.Г.* Полиномиальная разрешимость выпуклого квадратичного программирования // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1980. Т. 20. № 5. С. 1319–1323.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 30.01.2024

После доработки 13.09.2024

Принята к публикации 20.09.2024

© 2024 г. А.А. МАРГУН, канд. техн. наук (alexeimargun@gmail.com)

(Университет ИТМО, Санкт-Петербург;

ИПМаш РАН, Санкт-Петербург)

В.Х. БУЙ, (buinguyenkhanh201095@gmail.com)

(Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

А.А. БОБЦОВ, д-р техн. наук (bobtsov@mail.ru)

(Университет Ханчжоу Дяньцзы, Ханчжоу, Китай;

Университет ИТМО, Санкт-Петербург;

ИПМаш РАН, Санкт-Петербург)

## ДИАГНОСТИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ПРИ НЕИЗМЕРЯЕМОМ ВХОДЕ<sup>1</sup>

Рассматривается проблема обнаружения дефектов датчиков и приводов для класса многоканальных систем с произвольной относительной степенью. Разработанное решение основано на синтезе наблюдателей, инвариантных по отношению к входному сигналу. Предложена модификация, обеспечивающая задаваемое разработчиком время сходимости, основанная на методе динамического расширения регрессора и схеме Крессельмейера. Полученное решение развито на класс систем с параметрическими неопределенностями. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность предложенного подхода.

*Ключевые слова:* диагностирование систем, обнаружение дефектов, наблюдатели вектора состояния, неизмеряемый вход.

**DOI:** 10.31857/S0005231024110025, **EDN:** YMKVEJ

### 1. Введение

В статье рассматривается задача обнаружения дефектов датчиков и приводов нелинейных систем с произвольной относительной степенью и параметрическими неопределенностями в условиях неизмеряемости входного сигнала. Для решения задачи диагностирования технического состояния применяются два основных подхода: физическая и аналитическая избыточность.

Первый подход заключается во внедрении в систему дублирующих датчиков и приводов. Несмотря на свою эффективность, этот метод может приводить к значительным финансовым издержкам и сталкиваться с технологическими ограничениями. Второй подход основан на создании специализированных наблюдателей [1]. Этот метод использует математические модели и измеримые данные системы для обнаружения неисправностей без необходи-

---

<sup>1</sup> Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-19-00454).

мости в дополнительном оборудовании, тем самым минимизируя ограничения, связанные с физической избыточностью.

Подходы, основанные на наблюдателях, демонстрируют высокую эффективность в обнаружении неисправностей как на входах (приводах), так и на выходах (датчиках) системы [2–4]. Основная идея заключается в анализе различий между измеренными выходами и их оценками (рассогласованиями). Применение структурированных наборов наблюдателей, направленных генераторов рассогласований или специализированных фильтров помогает решить проблему обнаружения элементов системы с дефектами. Структурированные наборы наблюдателей создаются путем разработки специфических генераторов, каждый из которых настроен на чувствительность только к определенному типу неисправностей. Направленные генераторы вырабатывают векторы сигналов рассогласования таким образом, чтобы они изменялись только в одном направлении, соответствующем определенной неисправности в пространстве рассогласований, что позволяет точно определить природу неисправности. Специальные фильтры, основанные на наблюдателях, настраиваются для чувствительности к конкретным типам отказов, что увеличивает точность диагностирования. Тем не менее значительным недостатком этих методов является их зависимость от неточностей математической модели системы, что может ограничивать их применение в случаях параметрических и сигнальных неопределенностей.

Среди наблюдателей выделяется особая категория, известная как инвариантные по входу наблюдатели (unknown input observer, UIO) [5–8], которые предназначены для оценки вектора состояния при отсутствии возможности измерения входного сигнала. Этот тип наблюдателей особенно эффективен в условиях наличия различных помех и возмущений в канале управления. Основная идея этого подхода заключается в создании наблюдателей вектора состояния, которые нечувствительны к входным сигналам.

В исследованиях [9–15] многочисленные примеры демонстрируют использование этого класса наблюдателей для решения практических задач по обнаружению неисправностей, диагностике датчиков и исполнительных механизмов, а также децентрализованной оценке вектора состояния в таких задачах, как управление формациями беспилотных автономных транспортных средств. Эти приложения показывают эффективность инвариантных по входу наблюдателей в различных сложных условиях использования.

Однако, как правило, синтез данных наблюдателей возможен только для систем, в которых относительная степень (разность между степенями знаменателя и числителя передаточной функции) равна единице. Для систем с более высокой относительной степенью вводятся строгие ограничения. Например, исследования [16, 17] требуют измеримости производных выходного сигнала системы. В [18, 19] авторы предлагают разделить исходное уравнение динамики системы, чтобы выделить компоненты вектора состояния, наблюдение которых возможно только на основе выхода.

В настоящей статье представлен метод диагностики датчиков и приводов динамических многоканальных систем с произвольной относительной степенью. Новизна полученных результатов заключается в следующем:

- разработан метод обнаружения дефектов датчиков и приводов для многоканальных систем с произвольной относительной степенью при неизмеряемом входном сигнале;
- разработана модификация метода, обеспечивающая конечное, задаваемое разработчиком, время сходимости;
- метод расширен на класс нелинейных систем с параметрическими неопределенностями и мультigarмоническим возмущением.

Решение основано на использовании предложенного авторами ранее метода синтеза наблюдателей по выходу [7]. Разработаны модификации, обеспечивающие применимость данного подхода к системам с параметрическими неопределенностями, а также конечное, задаваемое пользователем, время сходимости.

Статья построена следующим образом: в разделе 2 приведена постановка задачи; раздел 3 посвящен синтезу инвариантного по входу наблюдателя; в разделе 4 описан метод обнаружения дефектов датчиков и приводов; в разделе 5 представлена модификация наблюдателя, обеспечивающая конечное время сходимости; в разделе 6 описано применение разработанного метода к нелинейным системам с параметрическими неопределенностями; результаты компьютерного моделирования представлены в разделе 7.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим многоканальную линейную стационарную систему

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + f_a(t)), \\ y(t) = Cx(t) + f_s(t), \end{cases}$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  – вектор входных сигналов,  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  – вектор измеряемых выходных сигналов,  $A, B, C$  – известные постоянные матрицы соответствующих размерностей,  $f_s(t)$  – сигнал отказов, воздействующий на измерения датчиков,  $f_a(t)$  – сигнал отказов, воздействующий на вход системы. Система имеет вектор относительных степеней между входами и выходами  $r = [r_1, \dots, r_l]$ .

Сигнал отказов датчиков  $f_s(t)$  представляет собой некоторую неизвестную векторную функцию, искажающую измерения датчиков при их выходе из строя. Сигнал отказов  $f_a(t)$ , воздействующий на вход системы, принимает неизвестное ненулевое значение при выходе из строя приводов.

Введем следующие допущения.

- Пары матриц  $A, B$  и  $A, C$  управляемы и наблюдаемы соответственно.
- Матрицы  $B$  и  $C$  имеют полный столбцовый и строчный ранги соответственно [2].

Требуется разработать метод, обеспечивающий обнаружение дефектов датчиков и приводов в системе (1). Под решением будем понимать бинарную функцию следующего вида:

$$J_{fault}^i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если произошел отказ,} \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $i$  – индекс диагностируемого привода или датчика. Для решения поставленной задачи используем наблюдатели вектора состояния, нечувствительные по отношению к входному сигналу. Также расширим полученные результаты на класс нелинейных систем с параметрическими неопределенностями и мультигармоническими возмущениями.

### 3. Синтез инвариантного по входу наблюдателя

В данном разделе приведем алгоритм построения наблюдателя, нечувствительного к входному сигналу при условии отсутствия отказов. Представим матрицы  $B$  и  $C$  следующим образом:

$$B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_m], \quad C = [C_1^T \ C_2^T \ \dots \ C_l^T]^T,$$

где  $B_i$  и  $C_i$  – столбцы и строки соответствующих матриц, и введем в рассмотрение

$$P = [C_1 A^{r_1} \ C_2 A^{r_2} \ \dots \ C_l A^{r_l}]^T,$$

$$N = \begin{bmatrix} C_1 A^{r_1-1} B_1 & C_1 A^{r_1-1} B_2 & \dots & C_1 A^{r_1-1} B_m \\ C_2 A^{r_2-1} B_1 & C_2 A^{r_2-1} B_2 & \dots & C_2 A^{r_2-1} B_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_l A^{r_l-1} B_1 & C_l A^{r_l-1} B_2 & \dots & C_l A^{r_l-1} B_m \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим инвариантный по входу наблюдатель [7]:

$$(2) \quad \dot{\hat{x}}(t) = M\hat{x}(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) + G y^{(r)}(t),$$

где  $y^{(r)}(t) = [y_1^{(r_1)} \ y_2^{(r_2)} \ \dots \ y_l^{(r_l)}]$ ,  $y_i^{(j)}$  – производная  $j$ -го порядка от  $i$ -го выхода системы (1), матрицы  $M$ ,  $L$ ,  $G$  – решения системы уравнений

$$(3) \quad \begin{cases} B - GN = 0, \\ M = A - GP, \\ F = M - LC, \end{cases}$$

где  $G = B(N^T N)^{-1} N^T$ . Для пояснения процедуры выбора матрицы  $G$  рассмотрим простейший академический пример

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица  $N$  примет значение 1, а  $G^T = [0 \ 1]$ .



Рассмотрим ошибку наблюдения  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . Продифференцируем ее с учетом (3) и получим динамическую модель:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - M\hat{x}(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) - Gy^{(r)} = \\
 (4) \quad &= Ax(t) + Bu(t) - M\hat{x}(t) + LC\hat{x}(t) - GPx(t) - GNu(t) - Ly(t) = \\
 &= (A - GP)x(t) - M\hat{x}(t) - LC\tilde{x}(t) = \\
 &= (M - LC)\tilde{x}(t) = F\tilde{x}(t).
 \end{aligned}$$

Матрица  $F$  определяет динамику замкнутой системы и выбирается разработчиком,  $L$  рассчитывается для обеспечения требуемых собственных чисел матрицы  $F$ . Очевидно, что если  $F$  гурвицева, то ошибка наблюдения сходится к нулю. Данное условие может быть выполнено, если пара матриц  $(M, C)$  наблюдаема, т.е. существует такая матрица  $L$ , что  $M - LC$  устойчива.

Определим необходимые и достаточные условия для существования решения системы уравнений (3).

*Теорема 1. Пусть объект управления описывается системой уравнений (1), а наблюдатель (2) удовлетворяет следующим условиям:*

- а)  $\text{rank}(N) = \text{rank}(B)$ ;
- б) пара матриц  $(M, C)$  наблюдаема.

*Тогда система уравнений (3) имеет единственное решение*

$$G = B(N^T N)^{-1} N^T.$$

*Доказательство.* Система уравнений (3) имеет решение тогда и только тогда, когда  $GN = B$ . Перепишем его следующим образом:

$$N^T G^T = B^T.$$

Матрица  $B^T$  является элементом спектрального пространства  $N^T$ . Следовательно,

$$\text{rank}(B^T) \leq \text{rank}(N^T) \Rightarrow \text{rank}(B) \leq \text{rank}(N).$$

С другой стороны [20],

$$\text{rank}(N) = \text{rank}(PB) \leq \min\{\text{rank}(P), \text{rank}(B)\} \leq \text{rank}(B).$$

Следовательно, решение системы уравнений (3) существует тогда и только тогда, когда  $\text{rank}(N) = \text{rank}(B)$ . Получим решение для  $G$  следующим образом:

$$GN = B \Rightarrow GNN^T = BN^T \Rightarrow G = B(N^T N)^{-1} N^T.$$

Таким образом, динамика наблюдателя зависит от матрицы  $F$ , определенной в последнем уравнении системы (3). Несложно заметить, что для обеспечения устойчивости матрицы  $F$  пара матриц  $(M, C)$  должна быть наблюдаемой. Теорема доказана.

Наблюдатель вектора состояния (2) требует измеримости недоступных производных выходного сигнала. Без потери общности предположим, что  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_l$ . Для обеспечения возможности построения наблюдателя

для объекта с относительными степенями  $r_i = 1$ ,  $i = \overline{1, l}$  введем  $r_l$  опорных переменных следующим образом:

$$\begin{aligned}
z_1(t) &= \hat{x}(t) - Gy^{(r-1)}(t), \\
\dot{z}_1(t) &= F(z_1(t) + Gy^{(r-1)}(t)) + Ly(t), \\
z_2(t) &= z_1(t) - FGy^{(r-2)}(t), \\
\dot{z}_2(t) &= F(z_2(t) + FGy^{(r-2)}(t)) + Ly(t), \\
z_3(t) &= z_2(t) - F^2Gy^{(r-3)}(t), \\
&\dots \\
\dot{z}_{r_1}(t) &= Fz_{r_1}(t) + F^{r_1}G \begin{bmatrix} y_1(t) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} + F^{r_1}G \begin{bmatrix} 0 \\ y_2^{(r_2-r_1)} \\ \dots \\ y_l^{(r_l-r_2)} \end{bmatrix} + Ly(t), \\
&\dots \\
\dot{z}_{r_l}(t) &= Fz_{r_l}(t) + F^{r_1}G \begin{bmatrix} y_1(t) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} + F^{r_2}G \begin{bmatrix} 0 \\ y_2(t) \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + F^{r_l}G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ y_l(t) \end{bmatrix} + Ly(t).
\end{aligned}$$

С использованием опорных переменных оценка вектора состояния может быть получена следующим образом:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\hat{x}(t) = z_1(t) + Gy^{(r-1)}(t) = z_{r_l}(t) + F^{r_l-1}G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ y_l(t) \end{bmatrix} + \dots \\ &\dots + F^{r_1}G \begin{bmatrix} 0 \\ y_2^{(r_2-r_1-1)}(t) \\ \dots \\ y_l^{(r_l-r_1-1)}(t) \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} y_1^{(r_1-1)}(t) \\ y_2^{(r_2-1)}(t) \\ \dots \\ y_l^{(r_l-1)}(t) \end{bmatrix}, \\ &\dot{z}_{r_l}(t) = Fz_{r_l}(t) + F^{r_1}G \begin{bmatrix} y_1(t) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} + F^{r_2}G \begin{bmatrix} 0 \\ y_2(t) \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots \\ &\dots + F^{r_l}G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ y_l(t) \end{bmatrix} + Ly(t). \end{aligned} \right.$$

Для краткости перепишем (5) следующим образом:

$$(6) \quad \begin{cases} \hat{x}(t) = W_1(z_{r_l}(t), y^{(r_l-1)}(t)), \\ \dot{z}_{r_l} = W_2(z_{r_l}(t), y(t)). \end{cases}$$

Наблюдатель вектора состояния (5) может быть построен для оценки вектора состояния систем с единичными относительными степенями. Однако он может использоваться для решения задачи обнаружения дефектов систем с произвольной относительной степенью за счет применения фильтров. Данный подход представлен в следующем разделе.

#### 4. Метод обнаружение дефектов

Несмотря на ограничения для синтеза наблюдателя (5), он может быть эффективно использован для диагностирования систем с произвольными относительными степенями, в частности для обнаружения отказов датчиков и приводов.

##### 4.1. Обнаружение дефекта в системе

Для решения задачи обнаружения дефектов будем оценивать разность между измеренным выходом и его оценкой, полученной с использованием наблюдателя

$$(7) \quad J(t) = y(t) - C\hat{x}(t).$$

Для устранения неизмеряемых производных выходного сигнала применим к (7) линейный фильтр  $\frac{\lambda^{r_l-1}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}$ , где  $s = d/dt$ ,  $\lambda$  – положительная константа:

$$(8) \quad \begin{aligned} J_f(t) &= \frac{\lambda^{r_l-1}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}[J(t)] = \frac{\lambda^{r_l-1}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}[y(t)] - \\ &- C \frac{\lambda^{r_l-1}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}[W_1(z_{r_l}(t), y^{(r_l-1)}(t))], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda^{r_l-1}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}[W_1(z_{r_l}(t), y^{(r_l-1)}(t))] = \\ &= \frac{\lambda^{r_l-1}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}z_{r_l}(t) + F^{r_l-1}G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{\lambda^{r_l-1}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}y_l(t) \end{bmatrix} + \dots + \\ &+ F^{r_1}G \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\lambda^{r_l-1}s^{(r_2-r_1-1)}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}y_2(t) \\ \vdots \\ \frac{\lambda^{r_l-1}s^{(r_l-r_1-1)}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}y_l(t) \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\lambda^{r_l-1}s^{(r_1-1)}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}y_1(t) \\ \frac{\lambda^{r_l-1}s^{(r_2-1)}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}y_2(t) \\ \vdots \\ \frac{\lambda^{r_l-1}s^{(r_l-1)}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}y_l(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Все сигналы в уравнении (8) являются доступными для измерения. Например, вместо неизмеримой производной  $y_l^{(r_l-1)}(t)$  в (7) в уравнении (8) используется фильтрованный выход  $\frac{(\lambda s)^{r_l-1}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}y_l(t)$ . Если сигнал отказа не является высокочастотным колебанием, то при  $\|J(t)\| \neq 0$  имеем  $\|J_f(t)\| \neq 0$ . Требуемая чувствительность к частотам сигнала отказа обеспечивается выбором коэффициента  $\lambda$ . Сформулируем правило обнаружения дефектов в виде выражения

$$J_{fault}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|J_f(t)\| > \sigma, \\ 0, & \text{если } \|J_f(t)\| \leq \sigma, \end{cases}$$

где  $J_{fault}(t)$  – индикатор отказа,  $\sigma > 0$  – пороговое значение, задаваемое разработчиком или адаптивно настраиваемое в процессе эксплуатации системы для обеспечения робастности по отношению к шумам измерений.

#### 4.2. Обнаружение отказов датчиков

Для локализации отказов датчиков представим систему (1) в виде [2]

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + f_a(t)), \\ y^j(t) = C^j x(t) + f_s^j(t), \\ y_j(t) = c_j x(t) + f_{sj}(t), \end{cases}$$

где  $c_j \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  –  $j$ -я строка матрицы  $C$ , матрица  $C^j \in \mathbb{R}^{(l-1) \times n}$  получена путем удаления  $j$ -й строки из матрицы  $C$ ,  $y^j(t)$  – вектор  $y(t)$  без  $j$ -го элемента. Для диагностирования  $j$ -го датчика построим наблюдатель вида (6) для системы, описываемой первыми двумя уравнениями (9):

$$(10) \quad \begin{cases} \hat{x}^j(t) = W_1(z_{r_l}^j(t), y^j(t)), \\ \dot{z}_{r_l}^j = W_2(z_{r_l}^j(t), y^j(t)), \end{cases}$$

где  $z_{r_l}^j(t)$  –  $r_l$ -я опорная переменная для системы (9), и введем функцию

$$J_f^{s,j}(t) = \frac{\lambda^{r_l-1}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}y^j(t) - C^j \frac{\lambda^{r_l-1}}{(s+\lambda)^{r_l-1}}W_1(z_{r_l}^j(t), y^j(t)).$$

Вектор  $J_f^{s,j}(t)$  чувствителен к отказам всех датчиков, кроме  $j$ -го. Таким образом, можем сформулировать следующее правило для обнаружения отказов датчиков:

$$J_{fault}^{s,j}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|J_f^{s,j}(t)\| < \sigma_{s,j}, \\ 0, & \text{если } \|J_f^{s,j}(t)\| \geq \sigma_{s,k}, \quad k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, l, \end{cases}$$

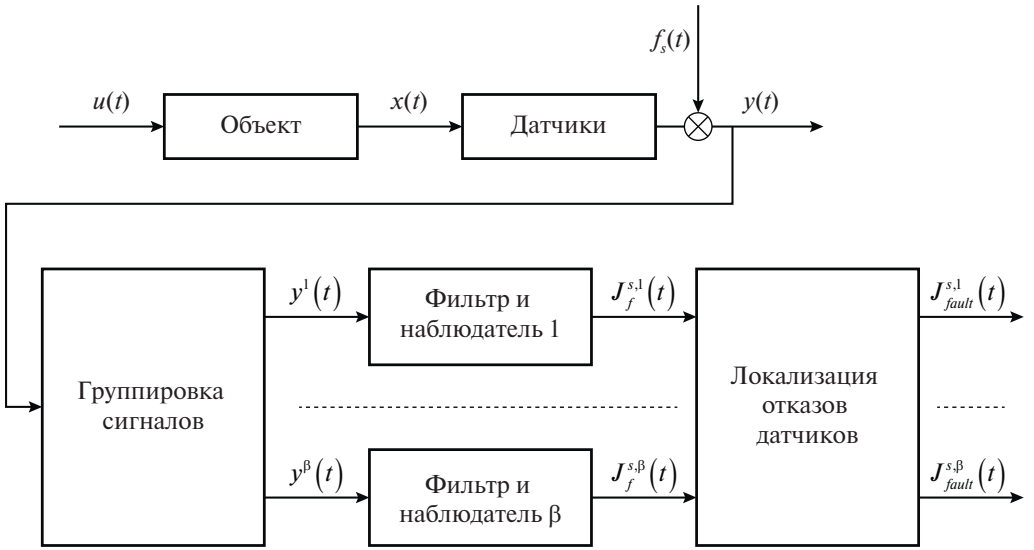


Рис. 1. Схема обнаружения отказов датчиков.

где  $\sigma_{s,j}$  – пороговое значение для обеспечения робастности по отношению к шумам. Схематично система обнаружения отказов датчиков приведен на рис. 1.

#### 4.3. Обнаружение отказов приводов

Приведенный выше подход не может быть применен для обнаружения отказов приводов, так как наблюдатель нечувствителен к входному сигналу. В связи с этим для решения данной задачи используем другой подход.

На основании теоремы 1 перепишем первое уравнение системы (1), подставив вместо  $x(t)$  его оценку, полученную с помощью (2). С учетом (4)  $x(t) = \hat{x}(t) + e^{Ft}\tilde{x}(0)$ , тогда уравнение динамики примет вид

$$(11) \quad \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B(u(t) + f_a(t)) + \epsilon(t),$$

где  $\epsilon(t)$  – экспоненциально затухающая функция, влиянием которой можно пренебречь.

Применим к (11) устойчивый линейный фильтр первого порядка и выразим слагаемое, содержащее сигнал отказа:

$$J^a(t) = \frac{\lambda}{s + \lambda}[Bf_a(t)] = \frac{\lambda s}{s + \lambda}[\hat{x}(t)] - \frac{\lambda}{s + \lambda}[A\hat{x}(t) + Bu(t)].$$

Для устранения неизмеряемых производных выходного сигнала, содержащихся в наблюдателе (6), применим также фильтр  $\frac{\lambda r_l - 1}{(s + \lambda)^{r_l - 1}}$  и получим векторную функцию, на основании которой проведем диагностирование отказов

приводов:

$$(12) \quad \begin{aligned} J_f^a(t) = & \frac{s\lambda^{r_l}}{(s+\lambda)^{r_l}} W_1 \left( z_{r_l}(t), y^{(r_l-1)} \right) - \\ & - \frac{\lambda^{r_l}}{(s+\lambda)^{r_l}} \left( A W_1(z_{r_l}(t), y^{(r_l-1)}) + B u(t) \right). \end{aligned}$$

В соответствии с постановкой задачи все столбцы матрицы  $B$  линейно независимы. Следовательно, при отказе  $j$ -го привода вектор  $J_f^a(t)$  будет сонаправлен  $B_j$ . Для обеспечения робастности и нормализации значений отказов различных приводов будем использовать косинус угла между векторами  $J_f^a(t)$  и  $B_j$ . Большее значение косинуса соответствует меньшему углу между рассматриваемыми векторами и, следовательно, большей вероятности отказа  $j$ -го привода. Тогда правило обнаружения отказа для  $j$ -го привода примет вид

$$J_{fault}^{a,j}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{\|J_f^{aT} B_j\|}{\|J_{a,f}\| \|B_j\|} < \sigma_{a,j}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $J_{fault}^{a,j}(t)$  принимает единичное значение при отказе  $j$ -го привода и нулевое в противном случае.

## 5. Обеспечение конечного времени сходимости

Время сходимости  $\hat{x}(t)$  к истинному значению зависит от собственных чисел матрицы  $F$ . В ряде практических приложений требуется конечное время сходимости, регулируемое разработчиком. Для обеспечения данной возможности проведем модификацию наблюдателя (5).

С учетом (4) представим вектор состояния через его оценку

$$(13) \quad x(t) = \hat{x}(t) + e^{Ft} \tilde{x}(0).$$

Очевидно, что для восстановления точного значения вектора состояния требуется начальная ошибка наблюдения. Подставим (6) в (13)

$$x(t) - W_1(z_{r_l}(t), y^{(r_l-1)}(t)) = e^{Ft} \tilde{x}(0),$$

умножим на матрицу  $C$  и для устранения неизмеряемых производных выхода применим линейный фильтр  $\frac{\lambda^{r_l-1}}{s+\lambda^{r_l-1}}$ :

$$y - C W_1(z_{r_l}(t), y^{(r_l-1)}(t)) = C e^{Ft} \tilde{x}(0).$$

Данное уравнение может быть представлено в виде линейной регрессии

$$(14) \quad q(t) = m^T(t) \tilde{x}(0),$$

где

$$q(t) = \frac{\lambda^{r_l-1}}{s + \lambda^{r_l-1}} \left( y(t) - CW_1(z_{r_l}(t), y^{(r_l-1)}(t)) \right),$$

$$m^T(t) = \frac{\lambda^{r_l-1}}{s + \lambda^{r_l-1}} C e^{Ft}.$$

Определим начальную ошибку наблюдения с использованием (14), метода динамического расширения регрессора и схемы Крессельмейера [21, 22]. Умножим (14) на  $m(t)$

$$m(t)q(t) = m(t)m^T(t)\tilde{x}(0)$$

и применим устойчивый линейный фильтр  $H(s) = \lambda_f/(s + \lambda_f)$ , где  $\lambda_f > 0$ , для получения расширенной линейной регрессии

$$(15) \quad \begin{aligned} Y(t) &= \Phi(t)\tilde{x}(0), \\ Y(t) &= H(s)m(t)q(t), \\ \Phi(t) &= H(s)m(t)m^T(t). \end{aligned}$$

При реализации в пространстве состояний (15) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= -\lambda_f \Phi(t) + m(t)m^T(t), \quad \Phi(0) = 0, \\ \dot{Y}(t) &= -\lambda_f Y(t) + m(t)q(t), \quad Y(0) = 0. \end{aligned}$$

Приведенная выше схема Крессельмейера позволяет обеспечить незатухающее возбуждение регрессора на время, необходимое для оценки начальной ошибки наблюдения.

В соответствии с [21] применим к (15)  $n - 1$  различных устойчивых линейных фильтров  $H_i(s) = \lambda_i/(s + \lambda_i)$  и умножим на присоединенную матрицу  $\Phi(t)$ . Проведенные преобразования позволяют получить  $n$  скалярных регрессионных уравнений

$$\Upsilon_i(t) = \Delta(t)\tilde{x}_i(0), \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\Delta(t) = \det(\Phi(t))$ ,  $\Upsilon_i(t) = \text{Adj}(\Phi(t))Y_i(t)$ ,  $\tilde{x}_i(0)$  —  $i$ -й элемент  $\tilde{x}(0)$ .

Оценка начальной ошибки при отсутствии шумов может быть получена тривиальным решением

$$(16) \quad \hat{\tilde{x}}_i(0) = \frac{\Upsilon_i(t)}{\max(\Delta(t), \varepsilon)},$$

где  $\varepsilon$  — маленькое число для предотвращения деления на ноль при инициализации алгоритма.

Влияние шумов может быть снижено путем выбора соответствующего фильтра для (15), использованием низкочастотных фильтров или фильтров со скользящим средним. Сформулируем следующую теорему.

*Теорема 2. Если матрица  $F$  имеет мнимые собственные числа, что обеспечивает условие незатухающего возбуждения сигнала  $m^T(t)$ , то уравнения (13) и (14)–(16) обеспечивают оценку  $\tilde{x}(0)$  за конечное время.*

Доказательство теоремы следует из результатов, представленных в [22], и приведенных выше вычислений. Время сходимости задается разработчиком путем выбора момента времени для вычисления (16).

Данная теорема и уравнение (13) обеспечивают оценку вектора состояния за конечное время, что позволяет обеспечить требуемое время диагностирования датчиков и приводов.

## 6. Применение к нелинейным системам с параметрическими неопределенностями

Рассмотрим нелинейную стационарную систему с параметрическими неопределенностями

$$(17) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[\Theta_u(u(t) + f_a(t)) + \Theta_x x(t) + \Theta_y \Phi_y(y, t) + \delta(t)], \\ y(t) = Cx(t) + f_s(t), \end{cases}$$

где

$$\Theta_u = \begin{bmatrix} \theta_{11u} & \theta_{12u} & \dots & \theta_{1mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{m1u} & \theta_{m2u} & \dots & \theta_{mmu} \end{bmatrix}, \quad \Theta_x = \begin{bmatrix} \theta_{11x} & \theta_{12x} & \dots & \theta_{1nx} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{m1x} & \theta_{m2x} & \dots & \theta_{mnx} \end{bmatrix},$$

$$\Theta_y = \begin{bmatrix} \theta_{11y} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{mmy} \end{bmatrix}, \quad \Phi_y(y, t) = \begin{bmatrix} \varphi_{1y}(y, t) \\ \vdots \\ \varphi_{my}(y, t) \end{bmatrix},$$

$\theta_{iju}, \theta_{ijx}, \theta_{iiy}$  – неизвестные параметры,  $\varphi_{iy}$  – известные функции,  $\delta(t)$  – внешнее возмущение.

Введем допущение, что внешнее возмущение  $\delta(t)$  имеет вид

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}} R_i \sin(\omega_i t + \phi_i),$$

где  $R_i$ ,  $\omega_i$ ,  $\phi_i$  – являются амплитудами, частотами и фазами соответственно,  $\bar{n}$  – известное число гармоник.

Поскольку наблюдатель (6) робастен по отношению ко входным сигналам, то схема обнаружения отказов датчиков, приведенная на рис. 1, сохраняет свою работоспособность. Однако неопределенности в канале управления не позволяют применить метод для обнаружения отказов приводов. Для решения данной проблемы требуется произвести оценку неизвестных параметров. Проведем параметризацию (17).



Согласно теореме 2 предложенный наблюдатель обеспечивает оценку вектора состояния за конечное время. Подставим данную оценку в (17):

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B\bar{u}(t), \\
 \dot{\bar{z}}_{r_l}(t) + F^{r_l-1}Gy_l^{(1)}(t) + \dots + Gy^{(r)}(t) &= \\
 (18) \quad &= A(\bar{z}_{r_l}(t) + F^{r_l-1}Gy_l(t) + \dots + Gy^{(r-1)}(t)) + \\
 &+ B \left[ \Theta_u u(t) + \Theta_x(\bar{z}_{r_l}(t) + F^{r_l-1}Gy_l(t) + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + Gy^{(r-1)}(t)) + \Theta_y \Phi_y(y, t) + \delta(t) \right] + Bf_a^*(t),
 \end{aligned}$$

где новый неизвестный вход имеет вид

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(t) &= \Theta_u u(t) + \Theta_x \hat{x}(t) + \Theta_y \Phi_y(y, t) + \delta(t) + f_a^*(t), \\
 f_a^*(t) &= \Theta_u f_a(t), \\
 \bar{z}_{r_l}(t) &= z_{r_l}(t) + e^{Ft} \hat{\bar{x}}(0).
 \end{aligned}$$

Предположим, что в начале функционирования системы отказы приводов отсутствуют, т.е.  $Bf_a^*(t) = 0$ . Применим фильтр  $r_l$ -ого порядка  $\frac{\lambda_r^{r_l}}{(s + \lambda_r)^{r_l}}$ ,  $\lambda_r > 0$  к уравнению (18) и преобразуем его к форме линейной регрессии

$$(19) \quad q_r(t) = B[m_r^T(t)\Xi_r + \bar{\delta}(t)],$$

где

$$\begin{aligned}
 q_r(t) &= \frac{\lambda_r^{r_l}}{(s + \lambda_r)^{r_l}} \left[ \dot{\bar{z}}_{r_l}(t) + F^{r_l-1}Gy_l^{(1)}(t) + \dots + Gy^{(r)}(t) \right] - \\
 &- A \left( \bar{z}_{r_l}(t) + F^{r_l-1}Gy_l(t) + \dots + Gy^{(r-1)}(t) \right),
 \end{aligned}$$

регрессор с известными сигналами

$$\begin{aligned}
 m_r(t) &= [ U_r(t) \quad S_r(t) \quad \Phi_r(t) ]^T, \\
 U_r(t) &= \frac{\lambda_r^{r_l}}{(s + \lambda_r)^{r_l}} [u(t)], \\
 S_r(t) &= \frac{\lambda_r^{r_l}}{(s + \lambda_r)^{r_l}} \left[ \bar{z}_{r_l}(t) + F^{r_l-1}Gy_l(t) + \dots + Gy^{(r-1)}(t) \right], \\
 \Phi_r(t) &= \frac{\lambda_r^{r_l}}{(s + \lambda_r)^{r_l}} [\Phi_y(y, t)],
 \end{aligned}$$

вектор неизвестных постоянных параметров

$$\Xi_r = [ \Theta_u \quad \Theta_x \quad \Theta_y ]^T \in \mathbb{R}^{\bar{m}},$$

фильтрованное внешнее возмущение

$$\bar{\delta}(t) = \frac{\lambda_r^{r_l}}{(s + \lambda_r)^{r_l}} [\delta(t)].$$

Для простоты изложения без потери общности предположим, что возмущающий сигнал включает в себя одну гармонику. Далее, опираясь на свойство синусоидального сигнала ( $s^2[\sin \omega t] = -\omega^2 \sin \omega t$ ), перепишем (19) в виде

$$(20) \quad s^2 [q_r(t) - Bm_r^T(t)\Xi_r] = -\omega^2 [q_r(t) - Bm_r^T(t)\Xi_r],$$

где  $\omega$  – частота синусоидального сигнала.

Для идентификации неизвестных параметров уравнения (20) требуется только его первая строка. Умножим обе стороны уравнения (20) на матрицу  $\bar{B}$  такую, что  $\bar{B}B = 1$ , и, применяя линейный устойчивый фильтр второго порядка  $\frac{\lambda_\delta^2}{(s + \lambda_\delta)^2}$ , получим

$$(21) \quad q_\delta(t) = m_\delta^T(t)\Xi_\delta,$$

где

$$\begin{aligned} m_\delta^T(t) &= \left[ \frac{s^2 \lambda_\delta^2}{(s + \lambda_\delta)^2} [m_r^T(t)], \frac{\lambda_\delta^2}{(s + \lambda_\delta)^2} [-\bar{B}q_r(t)], \frac{\lambda_\delta^2}{(s + \lambda_\delta)^2} [m_r^T(t)] \right], \\ \Xi_\delta &= [\Xi_r \quad \omega^2 \quad \omega^2 \Xi_r]^T, \\ q_\delta(t) &= \frac{s^2 \lambda_\delta^2}{(s + \lambda_\delta)^2} [\bar{B}q_r(t)]. \end{aligned}$$

Отметим, что если сигнал  $\bar{\delta}(t)$  содержит несколько гармоник, то система (19) также может быть приведена к виду линейной регрессии [23].

Для оценивания неизвестных параметров в линейном регрессионном уравнении (21) применим метод идентификации FT DREM, описанный в (14)–(16) [19, 20]. Далее, фильтрованное внешнее возмущение может быть легко вычислено следующим образом:

$$(22) \quad \bar{\delta}_r(t) = \bar{B}q_r(t) - m_r^T(t)\hat{\Xi}_r = \theta_{\sin} \sin(\hat{\omega}t) + \theta_{\cos} \cos(\hat{\omega}t) = m_\delta^T(t)\theta_\delta,$$

где  $m_\delta^T(t) = [\sin(\hat{\omega}t) \quad \cos(\hat{\omega}t)]$ ,  $\theta_\delta = \begin{bmatrix} \theta_{\sin} \\ \theta_{\cos} \end{bmatrix}$ ,  $\theta_{\sin}$ ,  $\theta_{\cos}$  – амплитуды фильтрованного внешнего возмущения.

Очевидно, что уравнение (22) имеет форму линейного регрессионного уравнения, к которому можно применить любой метод идентификации для оценки амплитуды внешнего возмущения.

В итоге все неизвестные параметры исходной системы идентифицированы, что позволяет применить метод обнаружения отказов приводов, описанный в (11) и (12).

Таким образом, обобщенный алгоритм для системы с параметрическими неопределенностями может быть описан следующими шагами:

- 1) Построить инвариантные по входу наблюдатели (5).
- 2) Использовать инвариантные по входу наблюдатели и метод, описанный в (7)–(10) для обнаружения отказов датчиков.
- 3) Основываясь на функционирующих без отказов датчиках, построить инвариантные по входу наблюдатели, параметризовать исходную систему в форме (17).
- 4) Оценить неизвестные параметры исходной системы с помощью метода, описанного в (18)–(22).
- 5) Произвести оценку отказов приводов.

*Замечание 1.* Следует обратить внимание, что вектор состояния оценивается на основе выходов исходной системы. Это означает, что хотя бы один выход должен иметь достоверное значение. То есть необходимо построить как минимум два инвариантных по входу наблюдателя для обнаружения отказов датчиков. С другой стороны, для обнаружения отказов приводов предложенное решение требует построения только одного инвариантного по выходу наблюдателя, что позволяет решить поставленную задачу даже при наличии единственного входного сигнала.

## 7. Компьютерное моделирование

Для демонстрации эффективности предложенного метода проведем компьютерное моделирование. Рассмотрим следующую нелинейную параметрически неопределенную систему:

$$(23) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) + k_3 x_3(t) + k_4 x_3(t) + k_5(u(t) + f_a(t)) + k_6 \sin(y_1), \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = x_1(t) - 2x_3(t), \\ y_1(t) = x_1(t) + v_1(t), \\ y_2(t) = x_3(t) + f_s(t) + v_2(t), \\ y_3(t) = x_4(t) + v_3(t), \end{cases}$$

где  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$  – неизвестные параметры,  $f_s(t)$  – сигнал отказа датчика,  $f_a(t)$  – сигнал отказа приводов,  $v_1(t), v_2(t), v_3(t)$  – шумы измерений с гауссовским распределением, математическое ожидание которого 0,005, дисперсия 0,005.

Перепишем (23) в форме пространства состояний, соответствующей постановке задачи (17):

$$(24) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]x(t) + \theta_5(u(t) + f_a(t)) + \theta_6 \sin(y_1), \\ y(t) = Cx(t) + C_s f_s(t) + v(t), \end{cases}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$u(t) = 1 + 2 \sin(t), \quad v(t) = [v_1(t) \ v_2(t) \ v_3(t)]^T.$$

Уравнения (24) содержат неизвестные параметры, связанные с параметрами системы  $\theta_1 = k_1 + 4 = -1$ ,  $\theta_2 = k_2 + 3 = 3$ ,  $\theta_3 = k_3 - 2 = -3$ ,  $\theta_4 = k_4 = 1$ ,  $\theta_5 = k_5 = 2$ ,  $\theta_6 = k_6 = -2$ . Отметим, что при построении системы диагностирования коэффициенты  $\theta_i$  считаются неизвестными и определяются в процессе оценки.

Зададим сигналы отказов следующим образом. Сигнал отказа второго датчика  $f_s(t)$  равен нулю до момента времени  $t = 5$  секунд, после чего принимает ненулевое значение  $3 + \cos(t)$ . Отказ привода происходит в 15-ю секунду, и его сигнал принимает значение  $f_a(t) = 5$ .

Видно, что система (24) имеет относительные степени  $r_1(y_1) = 2$ ,  $r_2(y_2) = 4$ ,  $r_3(y_3) = 3$ . Построим три наблюдателя с использованием опорных переменных (5) для  $\hat{x}^i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Матрицы  $L^i$  выбираются таким образом, чтобы матрицы  $F^i = M^i - L^i C^i$  были гурвицевыми или, при применении алгоритма с конечным времени сходимости, имели собственные числа, лежащие на мнимой оси. Матрицы  $C^i \in \mathbb{R}^{(l-1) \times n}$  получены путем удаления  $i$ -й строки из матрицы  $C$ .

Для сравнения наблюдателей с асимптотической и с конечной сходимостью первый наблюдатель был синтезирован с гурвицевой матрицей  $F^1$ , а матрицы  $F^2$  и  $F^3$  имеют мнимые собственные числа:

$$L^1 = \text{place}((M^1)^T, (C^1)^T, [-4 \ -5 \ -6 \ -7]^T), \quad F^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -76 \\ 2 & 0 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix},$$

$$L^2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L^3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad F^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметры алгоритмов оценки зададим следующим образом  $\frac{\lambda_0}{s+\lambda_0} = \frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} = \dots = \frac{\lambda_\delta}{s+\lambda_\delta} = \frac{5}{s+5}$ ,  $a_0 = a_1 = \dots = a_\delta = 0,5$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_\delta = 10^{-7}$ , пороговое значение  $\sigma = 5$ .

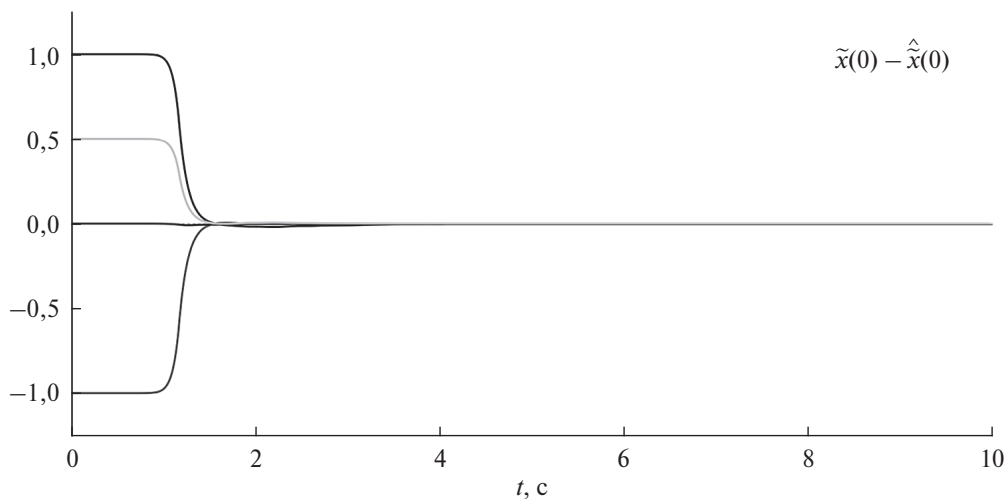


Рис. 2. Ошибки оценивания вектора начальных условий.

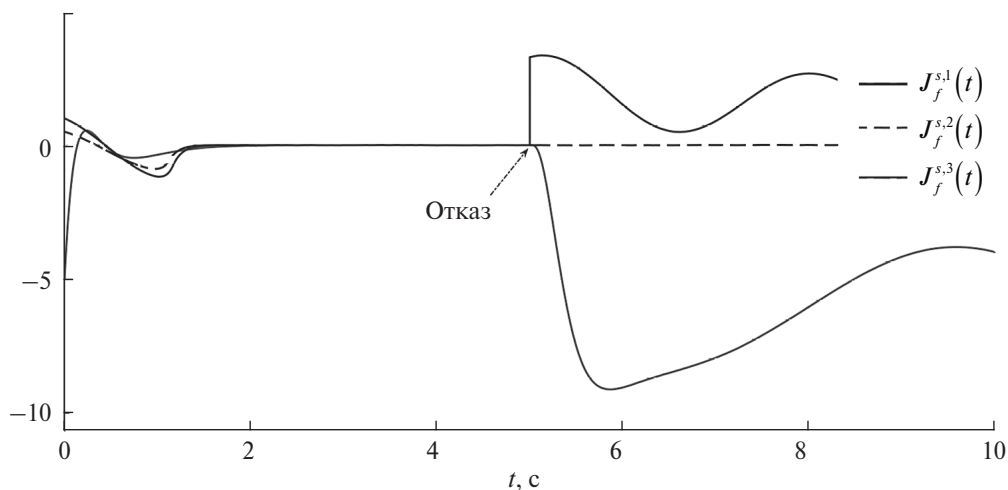


Рис. 3. Сигналы рассогласования при отказе второго датчика.

На рис. 2–5 показаны результаты моделирования. Переходные процессы ошибок оценивания начальных условий представлены на рис. 2. Видно, что данные сигналы сходятся к нулю. На рис. 3 представлены сигналы рассогласования при отказе второго датчика. Данные сигналы сходятся к нулю после оценки начальных условий. При наступлении отказа датчика  $J_f^{s,2}(t)$  продолжает сохранять нулевое значение, а  $J_f^{s,1}(t)$  и  $J_f^{s,3}(t)$  отклоняются, что свидетельствует о корректной локализации отказа второго датчика. Сравнивая результаты наблюдателей  $J_f^{s,1}(t)$  и  $J_f^{s,3}(t)$  необходимо отметить, что использование наблюдателя с конечным временем сходимости позволяет быстрее произвести обнаружение дефектов. На основе датчиков, не подверженных

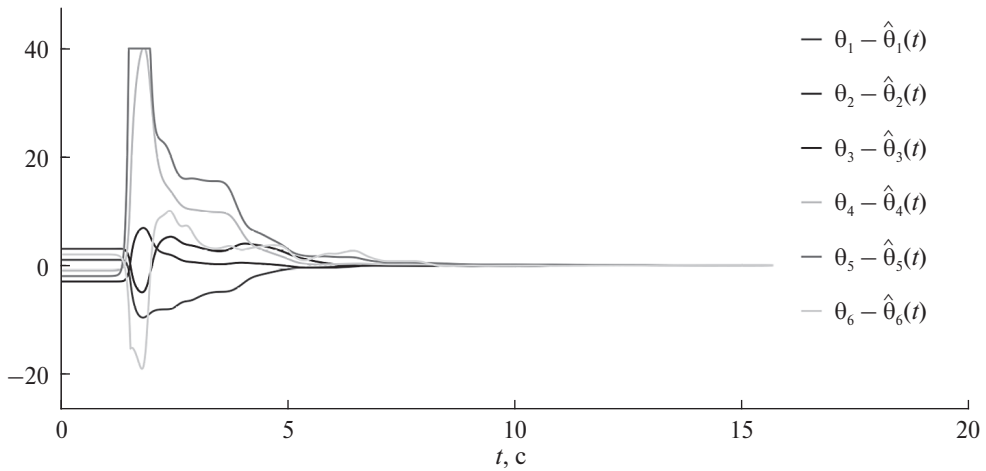


Рис. 4. Ошибки оценивания неизвестных параметров.

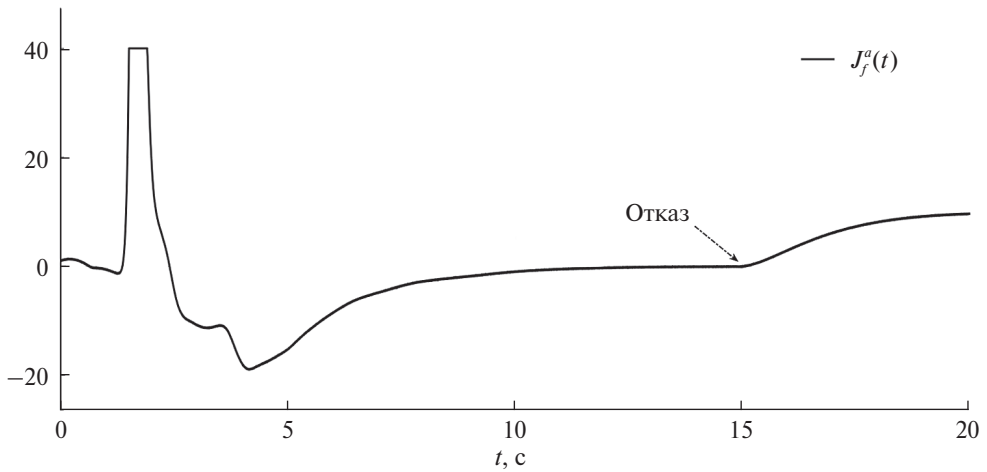


Рис. 5. Сигнал рассогласования при отказе привода.

влиянию отказов, формируется инвариантный по входу наблюдатель для диагностирования привода.

На рис. 4 представлены графики оценивания неизвестных параметров. Сигнал оценки отказа привода приведен на рис. 5. Данный сигнал сходится к нулю в результате идентификации параметров и принимает ненулевое значение после 15 секунд, что свидетельствует о корректном обнаружении дефекта.

Для обеспечения робастности по отношению к шумам, в правило выдачи сигнала обнаружения отказа вводится пороговое значение  $\sigma$ . Использование фильтров также позволяет снизить воздействие шумов измерений на метод диагностирования, однако фильтрация неизбежно вносит запаздывание в диагностические сигналы.

## 8. Заключение

В статье представлен метод диагностирования датчиков и приводов для многоканальных линейных систем с произвольной относительной степенью. Данный подход основан на наблюдателях, инвариантных по отношению ко входному сигналу. Для разработанного наблюдателя предложены модификации, обеспечивающие конечное время сходимости, задаваемое пользователем, и применимость к системам с параметрическими неопределенностями и мультигармоническими возмущениями. Проведено компьютерное моделирование, подтверждающее эффективность и работоспособность предложенного подхода. Полученный результат также может быть расширен на класс нестационарных систем, параметры которых являются выходами линейных генераторов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулик А.С., Рубанов В.Г., Соколов Ю.Н. Синтез систем, приспособляющихся к изменениям параметров элементов и их отказам // *АиТ*. 1978. № 1. С. 96–107.
2. Patton R.J., Chen J. Observer-based fault detection and isolation: Robustness and applications // *Control Engineering Practice*. 1997. V. 5. No. 5. P. 671–682.
3. Isermann R. Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods, An introduction // *Control Engineering Practice*. 1997. V. 5. No. 5. P. 639–652.
4. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Сергиенко О.Ю., Шумский А.Е. Идентификация дефектов в нелинейных динамических системах и их датчиках на основе скользящих наблюдателей // *АиТ*. 2022. № 2. С. 63–89.
5. Hou M., Muller P.C. Design of Observers for Linear Systems with Unknown Inputs // *IEEE. Trans. Autom. Control*. 1992. V. 36. No. 6. P. 871–875.
6. Warrad B., Boubaker O. Design of Unknown Input Observers for Linear Systems with State and Input Delays // *15th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD)*. 2018. P. 1–5.
7. Буй В., Маргун А.А., Бобцов А.А. Синтез наблюдателя переменных состояния и синусоидального возмущения для линейной нестационарной системы с неизвестными параметрами // *Изв. ВУЗов. Приборостроение*. 2024. Т. 67. № 3. С. 209–219.
8. Буй В., Маргун А.А., Бобцов А.А. Синтез наблюдателя, обеспечивающего финитную оценку состояния по выходу // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2024. Т. 25. № 2. С. 65–71.
9. Chen W., Saif M. Fault detection and isolation based on novel unknown input observer design // *2006 American Control Conference*. 2006. P. 6.
10. Duan G.-R., Patton R.J. Robust fault detection using Luenberger-type unknown input observers – a parametric approach // *Int. J. Syst. Sci*. 2001. V. 32. No. 4. P. 533–540.
11. Xu F., Tan J., Wang X., Puig V., Liang B., Yuan B. A novel design of unknown input observers using set-theoretic methods for robust fault detection // *2016 American Control Conference (ACC)*. 2016. P. 5957–5961.

12. Zarei J., Poshtan J. Design of Nonlinear Unknown Input Observer for Process Fault Detection // *Indust. Engineer. Chemistr. Res.* 2010. V. 49. No. 22. P. 11443–11452.
13. Duan G.R., Howe D., Patton R.J. Robust fault detection in descriptor linear systems via generalized unknown input observers // *Int. J. Syst. Sci.* 2002. V. 33. No. 5. P. 369–377.
14. Zhou M., Wang Z., Shen Y. Fault Detection and Isolation Method Based on  $H_\infty$  Unknown Input Observer Design in Finite Frequency Domain // *Asian J. Control.* 2017. V. 19. P. 1777–1790.
15. Bui V.H., Margun A.A., Kremlev A.S. Detection and isolation of sensor faults under external disturbances // 8th International Conference on Control, Decision, and Information Technologies (CoDIT). 2022. P. 1255–1260.
16. Ichalal D., Mammar S. On Unknown Input Observers for LPV Systems // *IEEE Transact. Indust. Electron.* 2015. V. 69. No. 9. P. 5870–5880.
17. Floquet T., Edwards C., Spurgeon S.K. On sliding mode observers for systems with unknown inputs // *Int. J. Adaptiv. Control Signal Proc.* 2007. V. 21. No. 8. P. 638–656.
18. Wang X., Tan C., Liu L., Qi Q. A novel unknown input interval observer for systems not satisfying relative degree condition // *Int. J. Robust Nonlin.* 2021. V. 31. P. 2762–2782.
19. Coutinho P., Bessa I., Xie W., Nguyen A., Palhares R. A sufficient condition to design unknown input observers for nonlinear systems with arbitrary relative degree // *Int. J. Robust Nonlin.* 2022. V. 52. No. 15. P. 8331–8348.
20. Margun A.A., Bui V.H., Bobtsov A.A., Efimov D.V. State estimation for a class of nonlinear time-varying uncertain system under multiharmonic disturbance // *arXiv:2407.18987*, 2024.
21. Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A., Astolfi A., Bobtsov A. New results on parameter estimation via dynamic regressor extension and mixing: Continuous and discrete-time cases // *IEEE. Transact. Autom.* 2020. V. 66. No. 5. P. 2265–2272.
22. Korotina M., Aranovskiy S., Ushirobira R., Efimov D., Wang J. A note on fixed-and discrete-time estimation via the DREM method // *hal-03746920*. 2022.
23. Khac T.N., Vlasov S., Pyrkin A. Parameters estimation of multi-sinusoidal signal in finite-time // *Cybernet. Phys.* 2022. V. 11. No. 2. P. 74–81.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.*

Поступила в редакцию 11.06.2024

После доработки 02.09.2024

Принята к публикации 04.09.2024



## Стохастические системы

© 2024 г. М. ВАЙЧЮЛИС, д-р мат. наук (marijus.vaiciulis@mif.vu.lt)  
(Институт науки данных и цифровых технологий

Вильнюсского университета, Литва),

Н.М. МАРКОВИЧ, д-р физ.-мат. наук (nat.markovich@gmail.com)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

### ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛИЧЕСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ГРАФАХ, ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩИХ КЛАСТЕРНЫМ ПРИСОЕДИНЕНИЕМ<sup>1</sup>

Модель кластерного присоединения (КП), предложенная Багроу и Брокманном (2013 г.), может быть использована как инструмент эволюции ненаправленных случайных сетей. В статье вводится обобщенное определение модели КП. Теоретические результаты получены для новой модели КП, которую можно рассматривать как предел прежней, когда параметр модели  $\alpha$  стремится к нулю, а параметр  $\epsilon = 0$ . Предметом исследования является количество треугольников связанных узлов в графе на шаге эволюции  $n$  – важная характеристика кластеризации сети. Доказано, что количество треугольников стремится к бесконечности с вероятностью единица для предложенной модели эволюции при  $n \rightarrow \infty$ , а скорость роста среднего количества треугольников  $E\Delta_n$  на шаге эволюции  $n \geq 2$  выше логарифмической. Компьютерное моделирование использовано для моделирования последовательностей количества треугольников. Данное моделирование основано на обобщенной модели урн Пойа–Эггенбергера, что предложено впервые.

*Ключевые слова:* кластерное присоединение, коэффициент кластеризации, вес узла, случайный граф, эволюция, модель урн.

**DOI:** 10.31857/S0005231024110034, **EDN:** YMDKBI

#### 1. Введение

Случайные графы используются для моделирования реальных сетей (real-world networks) [1]. Это графы, в которых структура соединения узлов случайна ввиду динамики (эволюции) сетей во времени. Случайные графы могут быть описаны вероятностным распределением или случайным процессом, которые их генерируют [1–3]. Примером случайного графа служит граф Эрдеша–Реньи, где ребро между любыми двумя различными вершинами графа появляется с некоторой фиксированной вероятностью  $p$ , независимо от других пар вершин.

---

<sup>1</sup> Исследование Маркович Н.М. выполнено за счет Российского научного фонда (грант № 24-21-00183). Авторы выражают благодарность М.С. Рыжову за проведенное компьютерное моделирование, а также анонимным рецензентам за ценные замечания, позволившие существенно улучшить статью.

Статья посвящена кластерному присоединению (КП), предложенному в [4], которое может быть использовано в качестве модели эволюции ненаправленных локальных случайных сетей, когда узлы принадлежат какому-то сообществу. Идея КП в том, что вновь присоединенный новый узел выбирает существующие узлы не с большим числом связей, а по принципу их принадлежности к сильно связанным группам узлов (что характерно, в частности, для социального поведения людей) и присоединяется к этим узлам новыми ребрами. КП предназначен для моделирования локальных сетей и не ведет к появлению узлов с большим числом связей, в отличие от предпочтительного присоединения (ПП), которое реализует так называемый принцип «*богатый-становится-богаче*» («rich-get-richer»). Новый узел, согласно КП, присоединяется к  $m \geq 2$  существующим узлам. Например, в социальных сетях индивиды могут иметь друзей не среди популярных людей, а в своем окружении, формируя тесные сообщества. КП может соответствовать модели управления развитием региона с отсутствием больших мегаполисов или модели общества с примерно равным распределением благ, при котором обогащение отдельных узлов невозможно. КП может быть использовано в медицине при моделировании эволюции нейронных сетей мозга, в биологии при описании коммуникаций в стаях животных [4].

В [4] предлагается модель присоединения нового узла к существующему узлу  $i$  с вероятностью, пропорциональной его коэффициенту кластеризации  $c_{i,n}$  на шаге эволюции  $n$ :

$$(1) \quad P_{CA}(i, n) \propto c_{i,n}^\alpha + \epsilon,$$

где коэффициент кластеризации узла  $i \in V_n$  определяется как

$$c_{i,n} = \begin{cases} 0, & D_{i,n} = 0 \text{ или } D_{i,n} = 1, \\ 2\Delta_{i,n} / (D_{i,n}(D_{i,n} - 1)), & D_{i,n} \geq 2, \end{cases}$$

$D_{i,n}$  – степень узла  $i$  (число его связей с другими узлами),  $\Delta_{i,n}$  – количество треугольников, к которым он принадлежит,  $0 \leq \epsilon \leq 1$ ,  $\alpha \geq 0$  – параметры модели.<sup>2</sup> КП нового узла к существующим узлам, как правило, снижает коэффициент кластеризации узла [4]. Несмотря на то, что КП ведет к многочисленным новым феноменам таким, как формирование сообщества вокруг новых узлов, всплески модулярности и распределения с легкими хвостами для количества связей узлов, см. [4], КП не получил дальнейшего развития. Многие утверждения в [4] не были строго доказаны, как, например, подтверждение легких хвостов распределения количества связей узлов, исследование кластерной структуры модулярности, что имеет большее значение для анализа связности узлов в сети.

Цель статьи – теоретическое исследование более общей, чем в [4], модели КП для случая, когда один из ее параметров  $\alpha \rightarrow 0$ , а другой параметр  $\epsilon = 0$ .

---

<sup>2</sup>  $x \propto y$  означает, что существует ненулевая константа  $C$  такая, что  $x = Cy$ .

Эта модель сводится к последовательному выбору  $m \geq 2$  существующих узлов, входящих в треугольники, вновь присоединенным новым узлом на каждом шаге эволюции. При этом количество узлов и ребер в графе неслучайны, а случайность привносится выбором существующего узла с вероятностью, пропорциональной его весу.

Треугольник соединенных узлов – наиболее изучаемый подграф, который может быть рассмотрен как базовое сообщество. Возможно, впервые он был предложен к изучению в [5]. Количество треугольников также задействовано в вычислении коэффициента кластеризации. Этот коэффициент является важной характеристикой кластерной структуры случайных графов, так как он выражает долю соседних узлов узла, соединенных ребрами. Предельное поведение количества треугольников узлов привлекает внимание многих ученых, см., например, [6–8]. Цель работы – исследовать асимптотическое поведение общего количества треугольников в графе  $\Delta_n$  при  $n \rightarrow \infty$  и получить оценку снизу для математического ожидания  $E\Delta_n$  для предлагаемой модели КП, что является новым результатом.

Структура статьи следующая. Описание модели приводится в разделе 2. В разделе 3 обсуждается последовательный выбор существующих узлов новым узлом. Основные результаты содержатся в разделе 4. В разделе 5 приводятся результаты компьютерного моделирования. Раздел 6 содержит выводы. Доказательства приведены в Приложениях.

## 2. Описание предельной модели

Пусть  $G_n = (V_n, E_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – последовательность случайных графов, где  $V_n$  – множество узлов,  $E_n$  – множество ребер, а множество номеров графов может быть интерпретировано как дискретное время, поскольку графы генерируются в ходе эволюции. Эволюция начинается с исходного графа  $G_1$ , в котором число узлов и ребер фиксировано. Применим обозначения из [1]. Обозначим через  $\#A$  мощность (число элементов) произвольного конечного множества  $A$ . Для графа  $G_n$  имеем

$$(2) \quad \#V_n = \#V_1 + n - 1, \quad \#E_n = \#E_1 + m(n - 1), \forall n \in \mathbb{N},$$

где натуральное число  $m \geq 2$  – параметр модели КП.

Приведем более общее, чем в [4], определение модели КП.

*Определение 1. Граф  $G_{n+1}$  образуется из  $G_n$  по правилу из двух частей:*

а) *детерминированная часть: новый узел  $\#V_1 + n \in V_{n+1} \setminus V_n$  добавляется к  $G_n$ ;*

б) *стохастическая часть: каждый узел  $i \in V_n$  снабжается весом*

$$(3) \quad p_{i,n} = \frac{f(c_{i,n}) + \epsilon}{\sum_{j \in V_n} (f(c_{j,n}) + \epsilon)},$$

где  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  – детерминированная и неубывающая функция присоединения, удовлетворяющая условию

$$(4) \quad f(0) = 0,$$

$\epsilon \geq 0$  – параметр модели КП. Существующие узлы  $i_1, \dots, i_m \in V_n$  выбираются последовательным выбором<sup>3</sup> с вероятностями, пропорциональными их весам, и каждый из них присоединяется только одним ребром к новому добавленному узлу  $\#V_1 + n$  на каждом шаге эволюции.

По определению 1 параметр  $\epsilon$  не обязательно ограничен сверху единицей в силу нормализации в формуле (3) и этим отличается от модели КП в [4]. Чтобы исключить случай отсутствия эволюции  $G_n = G_1$ ,  $n \geq 2$  из рассмотрения, предположим, что начальный граф  $G_1$  удовлетворяет условию:

$$(5) \quad \#V_1 \geq m$$

при  $\epsilon > 0$ , и

$$(6) \quad \#\tilde{V}_1 \geq m$$

при  $\epsilon = 0$ . Здесь  $\tilde{V}_n = \{i \in V_n : c_{i,n} > 0\}$ ,  $n \geq 1$ . Из (2) и (5) следует  $V_n \geq m$ , а при  $\epsilon = 0$  из (6) следует  $\#\tilde{V}_n \geq m$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ . Отсюда для  $\epsilon \geq 0$  и  $\forall n \in \mathbb{N}$  существует хотя бы один набор узлов  $i_1, \dots, i_m \in V_n$ , который может быть выбран с положительной вероятностью методом последовательного выбора.

Заменив в (3)  $c_{i,n}$  на  $D_{i,n}$  и область определения функции  $f(x)$  на  $\{0\} \cup \mathbb{N}$ , получим определение модели ПП, см. стр. 5 в [9]. Подставив

$$(7) \quad f(x) = x^\alpha, \quad \alpha > 0$$

в (3), получим веса (1) для введенной в [4] модели КП.

Учитывая (4), веса (3) могут быть переписаны как

$$(8) \quad p_{i,n}(\epsilon) = \frac{1}{\#V_n \epsilon + \sum_{j \in \tilde{V}_n} f(c_{j,n})} \begin{cases} \epsilon, & i \in V_n \setminus \tilde{V}_n \\ f(c_{i,n}) + \epsilon, & i \in \tilde{V}_n. \end{cases}$$

Величина  $\epsilon$  определяет, из какого множества узлов выбираются узлы  $i_1, \dots, i_m$  последовательным выбором: это множество  $\tilde{V}_n$  при  $\epsilon = 0$  и множество  $V_n$  при  $\epsilon > 0$ . При  $\epsilon > 0$ , используя неравенства

$$(9) \quad \#V_n \geq \#\tilde{V}_n, \quad n \geq 1,$$

из (8) получим неравенства для весов

$$(10) \quad \frac{1}{C_{f,\epsilon} \#V_n} \leq p_{i,n}(\epsilon) \leq \frac{C_{f,\epsilon}}{\#V_n}, \quad n \geq 1, \quad i \in V_n,$$

---

<sup>3</sup> Описание последовательного выбора узлов при  $m = 2$  дано в разделе 3.

где  $C_{f,\epsilon} = (f(1) + \epsilon)/\epsilon$ . Из (10) следует, что  $p_{i,n} \rightarrow 0$  почти наверное при  $n \rightarrow \infty$ . В случае  $\epsilon = 0$  поведение весов  $p_{i,n}$ ,  $i \in \tilde{V}_n$  менее очевидно. Заметим, что  $p_{i,n}$ ,  $i \in \tilde{V}_n$  сильно зависят от положительной случайной величины  $\#\tilde{V}_n$ , а последовательность  $\#\tilde{V}_1, \#\tilde{V}_2, \dots$  формируется случайным образом:  $\#\tilde{V}_{n+1} = \#\tilde{V}_n + 1$  верно лишь в случае, когда между последовательно выбранными узлами  $i_1, \dots, i_m \in \tilde{V}_n$  найдется хотя бы одна пара узлов, связанная ребром из множества  $E_n$ .

Поэтому при  $\epsilon = 0$  рассмотрим модель КП с функцией присоединения

$$(11) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Если функция присоединения имеет вид (7) или (11), то  $C_{f,\epsilon} = (1 + \epsilon)/\epsilon$ . Подставив (11) в (12), получим

$$(12) \quad p_{i,n}(\epsilon) = \begin{cases} \epsilon / (\#V_n \epsilon + \#\tilde{V}_n), & i \in V_n \setminus \tilde{V}_n, \quad V_n \setminus \tilde{V}_n \neq \emptyset, \\ (1 + \epsilon) / (\#V_n \epsilon + \#\tilde{V}_n), & i \in \tilde{V}_n. \end{cases}$$

Ограничимся случаем  $\epsilon = 0$ , при котором выбор узла из  $V_n \setminus \tilde{V}_n$  исключен с вероятностью 1, а веса узлов, принадлежащих множеству  $\tilde{V}_n$ , равномерно распределены:

$$(13) \quad p_{i,n}(0) = \begin{cases} 0, & i \in V_n \setminus \tilde{V}_n, \quad V_n \setminus \tilde{V}_n \neq \emptyset, \\ 1/\#\tilde{V}_n, & i \in \tilde{V}_n. \end{cases}$$

Последовательность функций  $f_n(x) = x^{1/n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  сходится к  $f(x)$  в (11) поточечно. Поэтому модель КП с функцией присоединения (11) и  $\epsilon = 0$  может быть рассмотрена как предельная (при  $\alpha \downarrow 0$ ) для семейства моделей КП с функцией присоединения (7) и параметром  $\epsilon = 0$ .

### 3. Последовательный равномерный выбор узлов

Пусть  $G_n$  – наблюдаемый граф. Цель данного раздела показать, что для эволюции моделью КП достаточно знать множества  $\tilde{E}_n$  и  $\tilde{E}_n \cap E_n$ . Из (13) следует, что добавленный узел  $\#V_1 + n$  с положительной вероятностью может быть присоединен только к существующим узлам  $\{i \in V_n : \Delta_{i,n} > 0\}$ , т.е. принадлежащим хотя бы одному треугольнику.

Пусть последовательность множеств  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$  такова, что для любого  $n \geq 1$  пара  $(V_n, \mathcal{E}_n)$  представляет собой полный граф. Обозначим через  $W_n$  пару узлов  $\{i_1, i_2\}$  из  $V_n$ , выбранных методом последовательного выбора (т.е. случайного выбора без возвращения). Последовательный выбор начинается с выбора узла  $i_1$  из  $V_n$  с вероятностью (13). Вероятности оставшихся  $\#V_n - 1$  узлов затем нормируются как  $p_{i,n}/(1 - p_{i_1,n})$ . Процесс повторяется, выбирается узел  $i_2$ . Для эволюции по модели КП не имеет значения, какой узел будет выбран первым в паре. Поэтому далее будем предполагать, что  $W_n$  – двумерный случайный вектор со значениями в  $\mathcal{E}_n$ .

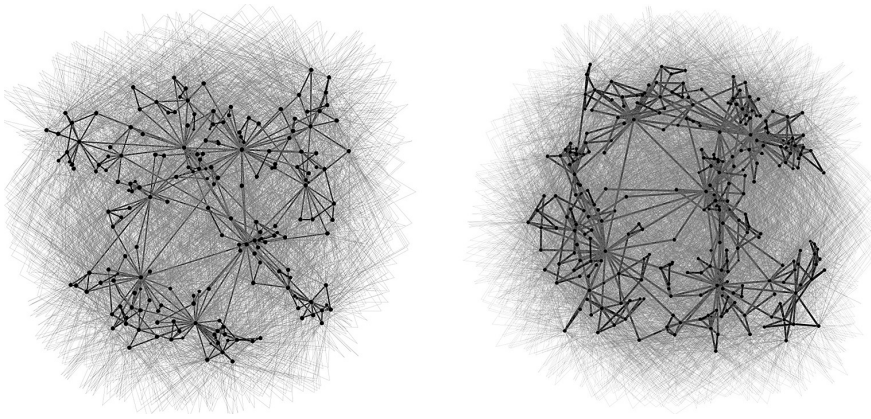


Рис. 1. Реализация случайного графа  $(V_n, E_n)$ , сгенерированного моделью КП при  $n = 5000$  (слева) и  $n = 10\,000$  (справа): узлы из  $\tilde{V}_n$  показаны черным цветом, ребра из  $\tilde{E}_n \cap E_n$  темно-серым цветом, остальная часть графа светло-серая.

*Предложение 1. Случайный вектор  $W_n$  равномерно распределен на множестве  $\tilde{E}_n$ .*

Из предложения 1 следует, что правило присоединения б) из определения 1 с функцией присоединения (11) и параметрами  $\epsilon = 0$ ,  $m = 2$  не отдает предпочтения паре узлов с относительно большими коэффициентами кластеризации. Это означает отсутствие эффекта «богатый-становится-богаче» в рассматриваемой модели КП.

Равенство  $P(W_n = \{i, j\}) = 0$ ,  $i, j \in V_n \setminus \tilde{V}_n$  означает, что узлы из множества  $V_n \setminus \tilde{V}_n$  не принимают участия в формировании графа  $G_{n+1}$ , поскольку вновь добавляемые узлы не присоединяются к таким узлам. Разбиение множества  $V_n$  на подмножества активных узлов  $\tilde{V}_n$  и неактивных узлов  $V_n \setminus \tilde{V}_n$  позволяет использовать модель КП для моделирования различных сообществ из двух классов.

*Пример 1.* На рис. 1 показаны упомянутые выше классы для одной реализации модели КП  $(V_n, E_n)$  при  $n \in \{5000, 10\,000\}$ , где начальный граф  $G_1$  – четырехугольник со всеми диагоналями, кроме одной:

$$V_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}.$$

#### 4. Основной результат

Количество треугольников в графе  $G_n$  выражается через количество треугольников узлов:

$$\Delta_n = \frac{1}{3} \sum_{i \in \tilde{V}_n} \Delta_{i,n}.$$

Рассмотрим модель КП с параметром  $\epsilon = 0$  и функцией присоединения (11). В [4] отмечено, что эмпирическое исследование модели КП с параметром

$m > 2$  требует громоздких вычислений из-за сложной комбинаторики. Поэтому ограничимся случаем  $m = 2$ .

*Теорема 1.* Пусть  $G_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – последовательность графов, порожденная моделью КП с параметрами  $\epsilon = 0$ ,  $m = 2$  и функцией присоединения (11). Пусть начальный граф  $(V_1, E_1)$  конечен и удовлетворяет условию (6). Тогда

$$(14) \quad \Delta_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

с вероятностью 1.

Пусть последовательность множеств  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots$  такая, что для любого  $n \geq 1$   $(\tilde{V}_n, \tilde{E}_n)$  – полный граф, т.е.  $\tilde{E}_n$  – множество всех возможных ребер между узлами из  $\tilde{V}_n$ . Некоторые ребра из  $\tilde{E}_n$  могут не существовать в графе  $G_n$ . Ниже в следствии 1 дается оценка снизу математического ожидания  $E\Delta_n$ .

*Следствие 1.* Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$(15) \quad E\Delta_n - \Delta_1 > \frac{\#(\tilde{E}_1 \cap E_1)}{3\#\tilde{E}_1} \ln(n-1), \quad n \geq 2.$$

## 5. Компьютерное моделирование

Рассмотрим моделирование последовательности  $\Delta_n$ ,  $n \geq 1$ . Чтобы исследовать рост выборочного среднего  $\Delta_n$  моделирование последовательности графов  $G_n$ ,  $n \geq 1$  не требуется. Достаточно смоделировать последовательность множеств  $\tilde{E}_n$ ,  $n \geq 1$ .

Будем рассматривать неупорядоченные пары узлов из множества  $\tilde{E}_n$ , как обобщенную модель урны Пойа–Эггенбергера. Для каждого  $n \geq 1$  множество  $\tilde{E}_n$  разделим на два подмножества:  $\tilde{E}_n \cap E_n$  и  $\tilde{E}_n \setminus (\tilde{E}_n \cap E_n)$ . Каждая неупорядоченная пара узлов из  $\tilde{E}_n \cap E_n$  интерпретируется как белый шар, а пара узлов, принадлежащих множеству  $\tilde{E}_n \setminus (\tilde{E}_n \cap E_n)$ , – как черный шар. Следовательно, урна (или множество  $\tilde{E}_n$ ) содержит  $\#(\tilde{E}_n \cap E_n)$  белых и  $\#(\tilde{E}_n \setminus (\tilde{E}_n \cap E_n))$  черных шаров.

На каждом шаге  $n \geq 1$  из урны извлекается (с возвращением) равновероятно один шар (см. предложение 1). Исходя из цвета шара, урна пополняется по следующему правилу. Если извлечен белый шар, то в урну добавляется два белых и  $\left((1/2) \left(1 + \sqrt{1 + 8\#\tilde{E}_n}\right) - 2\right)$  черных шара. Мощности  $\#\tilde{V}_n$  и  $\#\tilde{E}_n$  связаны соотношением  $\#\tilde{V}_n (\#\tilde{V}_n - 1) = 2\#\tilde{E}_n$  (см. (П.1.1)), и поэтому в урну добавлен  $\#\tilde{V}_n + 1$  шар. Если извлечен черный шар, то содержимое урны не меняется.



Отметим, что количество добавленных черных и/или белых шаров фиксировано в классической модели урны Пойа–Эггенбергера (см., например, [10, с. 437]), а количество добавленных черных шаров в рассматриваемом здесь случае зависит от  $\#\tilde{E}_n$ . Другие обобщения модели урны Пойа–Эггенбергера можно найти в [12].

Имея в виду, что пары узлов из  $\tilde{E}_n$  распределены равномерно (см. предложение 1), приведем простой алгоритм для моделирования последовательности  $\Delta_n$ ,  $n \geq 1$ .

*Алгоритм 1.*

1. Начальный шаг. По начальному графу  $G_1$  вычислить  $\Delta_1$ ,  $\#\tilde{V}_1$ ,  $\#(\tilde{E}_1 \cap E_1)$  и  $\#(\tilde{E}_1 \setminus (\tilde{E}_1 \cap E_1))$ .

2. Эволюционный шаг. Для любого  $n \geq 1$  сгенерировать значение дискретной случайной величины  $\xi_n$ , равномерно распределенной на множестве  $\{1, \dots, \#\tilde{E}_n\}$ . Если  $\xi_n > \#(\tilde{E}_n \cap E_n)$ , то

$$\begin{aligned}\#(\tilde{E}_{n+1} \cap E_{n+1}) &= \#(\tilde{E}_n \cap E_n), \\ \#(\tilde{E}_{n+1} \setminus (\tilde{E}_{n+1} \cap E_{n+1})) &= \#(\tilde{E}_n \setminus (\tilde{E}_n \cap E_n)).\end{aligned}$$

Если  $\xi_n \leq \#(\tilde{E}_n \cap E_n)$ , то

$$\begin{aligned}\#(\tilde{E}_{n+1} \cap E_{n+1}) &= \#(\tilde{E}_n \cap E_n) + 2, \\ \#(\tilde{E}_{n+1} \setminus (\tilde{E}_{n+1} \cap E_{n+1})) &= \#\tilde{E}_{n+1} - \#(\tilde{E}_{n+1} \cap E_{n+1}),\end{aligned}$$

где

$$\#\tilde{E}_{n+1} := \#(\tilde{E}_n \cap E_n) + \#(\tilde{E}_n \setminus (\tilde{E}_n \cap E_n)) + (1/2) \left(1 + \sqrt{1 + 8\#\tilde{E}_{n+1}}\right).$$

В обоих случаях

$$\Delta_{n+1} = \Delta_1 - \#\tilde{V}_1 + (1/2) \left(1 + \sqrt{1 + 8\#\tilde{E}_{n+1}}\right).$$

Заметим, что при реализации алгоритма на каждом шаге необходимо хранить четыре величины:  $\Delta_1$ ,  $\#\tilde{V}_1$ ,  $\#(\tilde{E}_n \cap E_n)$  и  $\#(\tilde{E}_n \setminus (\tilde{E}_n \cap E_n))$ .

Для каждого начального графа  $G_1$  сгенерировано 100 независимых последовательностей  $\Delta_1^{(j)}, \dots, \Delta_N^{(j)}$  длины  $N = 10^6$ , где индекс  $(j)$  обозначает номер последовательности. Следующие полные графы выбраны в качестве начальных: 1) треугольник  $G_{1,1}$ ; 2) полный граф  $G_{1,2}$  с числом вершин 17; 3) полный граф  $G_{1,3}$  с числом вершин 51. С использованием формулы

$$\bar{\Delta}_n(G_{1,\ell}) = \frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} \Delta_n^{(j)}$$



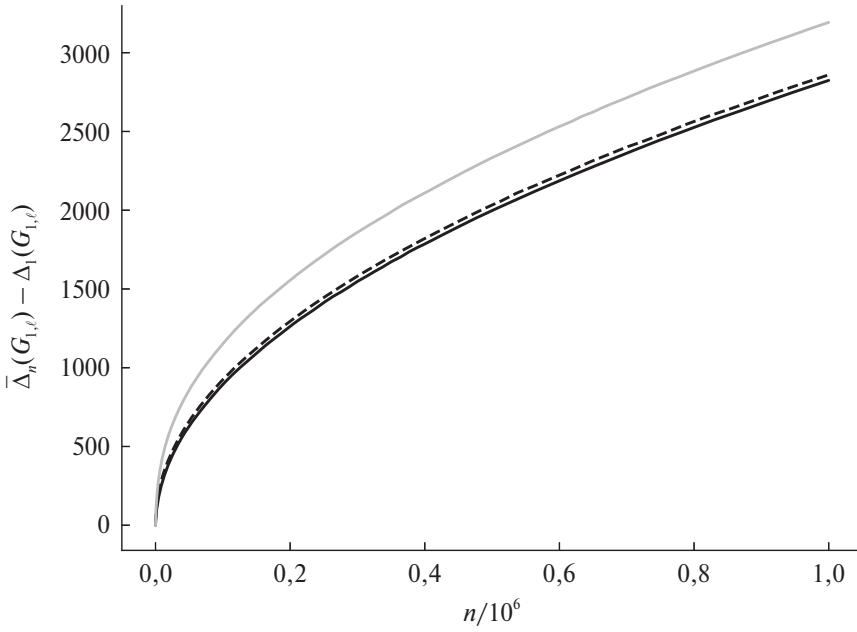


Рис. 2. Графики  $\{(n, \bar{\Delta}_n(G_{1,\ell}) - \Delta_1(G_{1,\ell})), 0 \leq n \leq 10^6\}$ , где кривые с  $\ell \in \{1, 2, 3\}$  представлены соответственно черным, пунктирным черным и светло-серым цветом.

составлена последовательность выборочных средних  $\bar{\Delta}_n(G_{1,\ell})$ ,  $1 \leq n \leq N$  для каждого начального графа  $G_{1,\ell}$ . Графики  $\{(n, \bar{\Delta}_n(G_{1,\ell}) - \Delta_1(G_{1,\ell})), 1 \leq n \leq N\}$ , где  $\ell \in \{1, 2, 3\}$  и  $N = 10^6$ , представлены на рис. 2. Время выполнения расчетов составило 152,88 секунды.

Метод наименьших квадратов применяется для аппроксимации дискретных данных

$$\begin{aligned} &\{(n, \bar{\Delta}_n(G_{1,\ell}) - \Delta_1(G_{1,\ell})), 2 \times 10^5 \leq n \leq N\}, \\ &\{(n, \bar{\Delta}_n(G_{1,\ell}) - \Delta_1(G_{1,\ell})), 5 \times 10^5 \leq n \leq N\} \end{aligned}$$

функцией  $\varphi(n) = c_1 + c_2 n^{c_3}$ . Оценки  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  представлены в таблице.

Оценки параметров  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$

| $2 \times 10^5 \leq n \leq 10^6$ |             |             |             |
|----------------------------------|-------------|-------------|-------------|
| Начальный граф                   | $\hat{c}_1$ | $\hat{c}_2$ | $\hat{c}_3$ |
| $G_{0,1}$                        | 1           | 2,827       | 0,499       |
| $G_{0,2}$                        | 680         | 3,179       | 0,492       |
| $G_{0,3}$                        | 20 825      | 6,564       | 0,447       |
| $5 \times 10^5 \leq n \leq 10^6$ |             |             |             |
| Начальный граф                   | $\hat{c}_1$ | $\hat{c}_2$ | $\hat{c}_3$ |
| $G_{0,1}$                        | 1           | 2,831       | 0,499       |
| $G_{0,2}$                        | 680         | 3,234       | 0,491       |
| $G_{0,3}$                        | 20 825      | 6,133       | 0,452       |

Из моделирования получены следующие выводы.

1. Результаты моделирования, представленные на рис. 2, достаточно близки к теоретическим. Действительно,  $E\Delta_n$  и эмпирическое среднее  $\bar{\Delta}_n$  возрастают с увеличением  $n$ , см. следствие 1 и рис. 2.
2.  $\bar{\Delta}_n$  растет, как  $C\sqrt{n}$ , где  $2 \times 10^5 \leq n \leq 10^6$ , см. таблицу. Этот результат моделирования не противоречит следствию 1. Отметим, что из этого результата не следует, что  $\bar{\Delta}_n$  имеет ту же (или близкую) скорость роста при  $n > 10^6$ .
3. При моделировании количества треугольников  $\Delta_n$  при  $n > 10^6$  возникли сложности, связанные с ограниченностью оперативной памяти компьютера.
4. Графики  $(n, \bar{\Delta}_n(G_{1,1}) - \Delta_1(G_{1,1}))$  и  $(n, \bar{\Delta}_n(G_{1,2}) - \Delta_1(G_{1,2}))$  близки, в то время как график  $(n, \bar{\Delta}_n(G_{1,3}) - \Delta_1(G_{1,3}))$  имеет смещение по вертикальной оси относительно двух других графиков при  $0 \leq n \leq 10^6$ , что вероятно связано с размером графа  $G_{1,3}$ . Можно предположить, что влияние относительно большого начального графа должно быть устранено при большом  $n$ .

## 6. Заключение

Аналогично [9], где предложено общее определение моделей эволюции ПП, в настоящей работе введено новое обобщенное определение модели КП. Класс функций присоединения, представленный в определении 1, достаточно широк, чтобы с помощью модели КП можно было моделировать эволюцию во многих случайных системах и сетях, где вновь присоединяемые узлы более вероятно присоединяются к тесно связанным группам узлов, а не к узлам с большим количеством связей.

Исследованы теоретические свойства предельной модели КП, в которой новые узлы присоединяются методом последовательного выбора (случайного выбора без возвращения) к существующим двум узлам с вероятностями, обратно пропорциональными числу узлов, входящих в треугольники. Данная модель может быть представлена, как предел модели КП, предложенной в [4], при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\epsilon = 0$  и функции присоединения (11). В силу специфики весов (3) случаи  $\epsilon > 0$  и  $\epsilon = 0$  должны быть исследованы отдельно.

Основные результаты статьи относятся к случаю  $\epsilon = 0$ . В теореме 1 доказано, что количество треугольников  $\Delta_n$  стремится к бесконечности почти наверное при стремлении шага эволюции  $n$  к бесконечности. При этом начальный граф должен содержать не менее  $t$  узлов, входящих в треугольники, чтобы начать эволюцию. Следствие 1 показывает, что скорость роста среднего количества треугольников  $E\Delta_n$  выше логарифмической для шага эволюции  $n \geq 2$ . Результаты моделирования не противоречат теоретическим результатам. Уточнение верхней и нижней границ для  $E\Delta_n$  – цель дальнейшего исследования.

*Доказательство предложения 1.* Пусть  $\{i, j\} \in \tilde{E}_n$ . Для каждого узла  $i \in \tilde{V}_n$  рассмотрим случайное событие  $A_{n,i} \equiv \{\text{выбран узел } i\}$ . По закону полной вероятности

$$(П.1.1) \quad \begin{aligned} P(W_n = \{i, j\}) &= P(A_{n,j}|A_{n,i})P(A_{n,i}) + P(A_{n,i}|A_{n,j})P(A_{n,j}) = \\ &= \frac{2}{\#\tilde{V}_n(\#\tilde{V}_n - 1)} = \frac{1}{\#\tilde{E}_n}. \end{aligned}$$

Используя (П.1.1), получаем

$$P(W_n \in \tilde{E}_n) = \sum_{\{i_1, i_2\} \in \tilde{E}_n} P(W_n = \{i_1, i_2\}) = 1.$$

Отсюда следует  $P(W_n \in \mathcal{E}_n \setminus \tilde{E}_n) = 0$  и, соответственно,  $P(W_n = \{i, j\}) = 0$  для любой пары узлов  $\{i, j\} \in \mathcal{E}_n \setminus \tilde{E}_n$ .

Представим множество ребер  $E_n$ ,  $n \geq 1$  как множество неупорядоченных пар узлов. Для любого  $n \geq 1$  разделим множество  $\tilde{E}_n$  на подмножества:  $\tilde{E}_n \cap E_n$  и  $\tilde{E}_n \setminus (\tilde{E}_n \cap E_n)$ .  $\tilde{E}_n \cap E_n$  состоит из неупорядоченных пар узлов, соединенных ребрами в графе  $G_n$ . Пусть  $B_n = \{W_n \in \tilde{E}_n \cap E_n\}$ ,  $n \geq 1$  – случайное событие, такое что неупорядоченная пара узлов  $W_n$ , выбранных последовательным выбором, связана ребром из  $E_n$ .

Обозначим через  $B^c$  событие, противоположное к  $B$ . Пусть  $n, k \in \mathbb{N}$  и  $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  такие, что  $n \geq 2$ ,  $1 \leq k < n$ ,  $0 \leq \ell \leq n - k$ . Событие  $(B_k \cap \dots \cap B_{n-1})_\ell$  обозначает объединение  $(n - k)!/(\ell!(n - k - \ell)!)$  непересекающихся случайных событий таких, что  $\ell$  событий  $B_j$  заменены на их противоположные в пересечении  $B_k \cap \dots \cap B_{n-1}$ . Если происходит случайное событие  $(B_k \cap \dots \cap B_{n-1})_\ell$ , то  $\ell$  пар узлов среди  $W_k, \dots, W_{n-1}$  не соединены, а оставшиеся  $n - k - \ell$  пар соединены. Например, при  $k = 1$ ,  $n = 4$  имеем

$$\begin{aligned} \ell = 0 : (B_1 \cap B_2 \cap B_3)_0 &= B_1 \cap B_2 \cap B_3, \\ \ell = 1 : (B_1 \cap B_2 \cap B_3)_1 &= (B_1 \cap B_2 \cap B_3^c) \cup (B_1 \cap B_2^c \cap B_3) \cup (B_1^c \cap B_2 \cap B_3), \\ \ell = 2 : (B_1 \cap B_2 \cap B_3)_2 &= (B_1 \cap B_2^c \cap B_3^c) \cup (B_1^c \cap B_2 \cap B_3^c) \cup (B_1^c \cap B_2^c \cap B_3), \\ \ell = 3 : (B_1 \cap B_2 \cap B_3)_3 &= B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c. \end{aligned}$$

Согласно предложению 1

$$(П.2.1) \quad P(B_n) = \sum_{\{i_1, i_2\} \in \tilde{E}_n \cap E_n} \frac{1}{\#\tilde{E}_n} = \frac{\#(\tilde{E}_n \cap E_n)}{\#\tilde{E}_n}.$$

Пусть  $n \geq k - 1$  и  $k \geq 1$ . Если произошло случайное событие  $(B_k \cap \dots \cap B_{n-1})_\ell$ , то

$$\begin{aligned} \# \left( \tilde{E}_n \cap E_n \right) &= \# \left( \tilde{E}_k \cap E_k \right) + 2(n - \ell - k), \\ \# \tilde{E}_n &= \# \tilde{E}_k + (n - \ell - k) \# \tilde{V}_k + (1/2)(n - \ell - k)(n - \ell - k - 1). \end{aligned}$$

Тогда из (П.2.1) получим

$$P(B_k | (B_k \cap \dots \cap B_{n-1})_\ell) = p_{n-\ell}(G_k),$$

где

$$(П.2.2) \quad p_n(G_k) = \frac{\# \left( \tilde{E}_k \cap E_k \right) + 2(n - k)}{\# \tilde{E}_k + (n - k) \# \tilde{V}_k + (1/2)(n - k)(n - k - 1)}.$$

Докажем неравенства, которые будут использованы при доказательстве теоремы 1.

*Лемма 1. Пусть предположения теоремы 1 выполнены. Для любых натуральных чисел  $k \leq n$*

$$(П.2.3) \quad p_n(G_k) > 0,$$

$$(П.2.4) \quad p_n(G_k) > p_{n+1}(G_k).$$

*Доказательство леммы 1.* Из предположения (6) следует, что  $\tilde{E}_k \neq \emptyset$  и  $\tilde{E}_k \cap E_k \neq \emptyset$  для любого натурального  $k$ . В связи с этим (П.2.3) следует из (П.2.2).

Далее, с использованием (П.2.2) неравенство (П.2.4) сводится к следующему:

$$\# \tilde{V}_k \left\{ \# \left( \tilde{E}_k \cap E_k \right) - \# \tilde{V}_k + 1 \right\} + (n - k) \# \left( \tilde{E}_k \cap E_k \right) + (n - k)(n - k + 1) > 0.$$

Достаточно показать, что для любого начального графа, удовлетворяющего (6), выполняется неравенство

$$(П.2.5) \quad \# \left( \tilde{E}_k \cap E_k \right) > \# \tilde{V}_k - 1.$$

Используем метод математической индукции для доказательства (П.2.5). Рассмотрим граф  $(\tilde{V}_1, \tilde{E}_1 \cap E_1)$ . Минимальное число ребер в  $\tilde{E}_1 \cap E_1$  зависит от  $\# \tilde{V}_1$ . Если  $\# \tilde{V}_1 = 3$ , то граф с минимальным числом ребер – это треугольник, для которого  $\# \left( \tilde{E}_1 \cap E_1 \right) = 3$ . Поэтому (П.2.5) выполнено для  $k = 1$  в случае  $\# \tilde{V}_1 = 3$ . Если  $\# \tilde{V}_1 > 3$ , то граф с минимальным числом ребер состоит из  $\# \tilde{V}_1 - 2$  треугольников с одной общей стороной (см. пример 1 для  $\# \tilde{V}_1 = 4$ ). Для таких графов выполнено  $\# \left( \tilde{E}_1 \cap E_1 \right) = \# \tilde{V}_1 + 1$ . Это означает, что (П.2.5) с  $k = 1$  и  $\# \tilde{V}_1 > 3$  снова выполнено.

Выдвинем гипотезу индукции, что (П.2.5) выполнено. Покажем, что (П.2.5) выполнено, когда  $k$  заменено на  $k+1$ . Если случайное событие  $B_k$  произошло, то имеем  $\#(\tilde{E}_{k+1} \cap E_{k+1}) = \#(\tilde{E}_k \cap E_k) + 2$  и  $\#\tilde{V}_{k+1} = \#\tilde{V}_k + 1$ . Используя (П.2.5), получим

$$\#(\tilde{E}_{k+1} \cap E_{k+1}) - \#\tilde{V}_{k+1} + 1 = \left\{ \#(\tilde{E}_k \cap E_k) - \#\tilde{V}_k + 1 \right\} + 1 > 0.$$

Случай, когда событие  $B_k$  не происходит, может быть рассмотрен аналогично.

*Лемма 2. При условиях теоремы 1*

$$(П.2.6) \quad P(B_n) > P(B_n | B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots$$

*Доказательство леммы 2.* По закону полной вероятности

$$P(B_n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} P(B_n | (B_1 \cap \dots \cap B_{n-1})_\ell) P((B_1 \cap \dots \cap B_{n-1})_\ell).$$

Из леммы 1 следует, что для любого  $1 \leq \ell \leq n-1$

$$P(B_n | B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}) < P(B_n | (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1})_\ell).$$

Используя последнее неравенство, получаем

$$P(B_n) > P(B_n | B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}) \sum_{\ell=0}^{n-1} P((B_1 \cap \dots \cap B_{n-1})_\ell).$$

Отсюда следует утверждение (П.2.6), так как последняя сумма равна 1.

Доказательство теоремы 1 – это проверка условий нижеприведенной леммы Борелля–Кантелли.

*Лемма 3* [10, с. 79]. Пусть на одном вероятностном пространстве определены случайные события  $C_1, C_2, \dots$ , удовлетворяющие условию коррелированности: при любых натуральных  $u$  и  $v$  таких, что  $u \neq v$ , случайные события  $C_u$  и  $C_v$  являются отрицательно коррелированными или некоррелированными. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \infty$ , то  $P\{C_n \text{ б.ч.}\} = 1$ .<sup>4</sup>

*Лемма 4.* Пусть условия теоремы 1 выполнены. Тогда случайные события  $B_1, B_2, \dots$  удовлетворяют условию коррелированности, т.е.,

$$(П.2.7) \quad P(B_u \cap B_v) \leq P(B_u) P(B_v).$$

*Доказательство леммы 4.* Если  $\min\{u, v\} = 1$ , то предположение (6) влечет  $0 < \#(\tilde{E}_1 \cap E_1) \leq \#(\tilde{E}_1)$ , см. доказательство леммы 1. Тогда из (П.2.1) следует, что  $P(B_1) > 0$ . Если  $\min\{u, v\} > 1$ , то комбинируя

---

<sup>4</sup> Через  $\{C_n \text{ б.ч.}\}$  обозначается событие, состоящее в том, что произойдет бесконечно много событий из  $C_1, C_2, \dots$  [11].

(П.2.3) и (П.2.6), получаем  $P(B_{\min\{u,v\}}) > p_{\min\{u,v\}}(G_1) > 0$ . Доказано, что  $P(B_{\min\{u,v\}}) > 0$  для любых натуральных  $u$  и  $v$ . Применяв определение условной вероятности, перепишем условие коррелированности (П.2.7) следующим образом:

$$(П.2.8) \quad P(B_{\max\{u,v\}}) - P(B_{\max\{u,v\}}|B_{\min\{u,v\}}) \geq 0.$$

Достаточно доказать, что неравенство (П.2.8) выполняется при  $\max\{u, v\} = n + k$  и  $\min\{u, v\} = n$ , где  $n$  и  $k$  – любые натуральные числа.

Если  $k = 1$ , то применив формулу полной вероятности вместе с (П.2.4), получим

$$P(B_{n+1}) - P(B_{n+1}|B_n) = (1 - p_1(G_n))(p_1(G_n) - p_2(G_n)) \geq 0.$$

Здесь равенство верно при  $\#(\tilde{E}_n \cap E_n) = \#(\tilde{E}_n)$ .

Пусть теперь  $k \geq 2$ . Утверждаем, что

$$(П.2.9) \quad P(B_{n+k}) = J + \sum_{\ell=0}^{k-1} p_{n+k-\ell-1}(G_n) P(B_n^c \cap (B_{n+1} \cap \dots \cap B_{n+k-1})_\ell),$$

$$(П.2.10) \quad P(B_{n+k}|B_n) = J + \sum_{\ell=0}^{k-1} p_{n+k-\ell}(G_n) P(B_n^c \cap (B_{n+1} \cap \dots \cap B_{n+k-1})_\ell),$$

где

$$J = \sum_{\ell=0}^{k-1} p_{n+k-\ell}(G_n) P(B_n \cap (B_{n+1} \cap \dots \cap B_{n+k-1})_\ell).$$

Из (П.2.9), (П.2.10) немедленно следует, что разность  $P(B_{n+k}) - P(B_{n+k}|B_n)$  равна

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=0}^{k-1} \{p_{n+k-\ell-1}(G_n) - p_{n+k-\ell}(G_n)\} P(B_n^c \cap (B_{n+1} \cap \dots \cap B_{n+k-1})_\ell) = \\ & = \sum_{\ell=0}^{k-1} \{p_{n+k-\ell-1}(G_n) - p_{n+k-\ell}(G_n)\} \{1 - p_{n-\ell}(G_n)\} P((B_{n+1} \cap \dots \cap B_{n+k-1})_\ell). \end{aligned}$$

Из (П.2.3), (П.2.4) следует, что последняя сумма положительная.

Докажем (П.2.9). Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\begin{aligned} P(B_{n+k}) &= P(B_{n+k}|(B_n \cap \dots \cap B_{n+k-1})_0) P((B_n \cap \dots \cap B_{n+k-1})_0) + \\ &+ \sum_{\ell=1}^{k-1} P(B_{n+k}|(B_n \cap \dots \cap B_{n+k-1})_\ell) P((B_n \cap \dots \cap B_{n+k-1})_\ell) + \\ &+ P(B_{n+k}|(B_n \cap \dots \cap B_{n+k-1})_k) P((B_n \cap \dots \cap B_{n+k-1})_k). \end{aligned}$$

Используя тождество

$$(B_n \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_\ell = \{B_n \cap (B_{n+1} \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_\ell\} \cup \\ \cup \{B_n^c \cap (B_{n+1} \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_{\ell-1}\},$$

получим

$$P(B_{n+k}) = \left\{ P(B_{n+k} | B_n \cap \cdots \cap B_{n+k-1}) P(B_n \cap \cdots \cap B_{n+k-1}) + \right. \\ \left. + \sum_{\ell=1}^{k-1} P(B_{n+k} | (B_n \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_\ell) P(B_n \cap (B_{n+1} \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_\ell) \right\} + \\ + \sum_{\ell=1}^{k-1} P(B_{n+k} | (B_n \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_\ell) P(B_n^c \cap (B_{n+1} \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_{\ell-1}) + \\ + P(B_{n+k} | B_n^c \cap \cdots \cap B_{n+k-1}^c) P(B_n^c \cap \cdots \cap B_{n+k-1}^c).$$

Применив (П.2.2), получим, что сумма в фигурных скобках равна  $J$ . Заменяв переменную суммирования на  $s = \ell - 1$ , получим

$$\sum_{\ell=1}^{k-1} P(B_{n+k} | (B_n \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_\ell) P(B_n^c \cap (B_{n+1} \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_{\ell-1}) = \\ = \sum_{s=0}^{k-2} P(B_{n+k} | (B_n \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_{s+1}) P(B_n^c \cap (B_{n+1} \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_s) = \\ = \sum_{s=0}^{k-1} P(B_{n+k} | (B_n \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_{s+1}) P(B_n^c \cap (B_{n+1} \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_s) - \\ - P(B_{n+k} | (B_n \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_k) P(B_n^c \cap (B_{n+1} \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_{k-1}).$$

Применяя (П.2.2) еще раз, получим доказательство (П.2.9).

Тождество (П.2.10) может быть проверено похожим образом. Для этого достаточно применить формулу полной вероятности и тождество

$$(B_{n+1} \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_\ell = \{B_n \cap (B_{n+1} \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_\ell\} \cup \\ \cup \{B_n^c \cap (B_{n+1} \cap \cdots \cap B_{n+k-1})_\ell\}.$$

*Доказательство теоремы 1.* Разность количества треугольников в графах  $G_n$  и  $G_1$ , так же как и разность числа узлов, входящих в треугольники, могут быть выражены через индикаторы случайных событий  $B_j$  следующим образом:

$$(П.2.11) \quad \Delta_n - \Delta_1 = \sum_{j=1}^{n-1} I\{B_j\},$$

$$(П.2.12) \quad \#\tilde{V}_n - \#\tilde{V}_1 = \sum_{j=1}^{n-1} I\{B_j\}, \quad n \geq 2,$$

где  $I\{\cdot\}$  обозначает индикатор события. Из (П.2.11), (П.2.12) следует, что количество треугольников  $\Delta_n$  линейно связано с мощностью множества  $\tilde{V}_n$ :

$$(П.2.13) \quad \Delta_n = \#\tilde{V}_n + \left(\Delta_1 - \#\tilde{V}_1\right), \quad n \geq 2.$$

В виду (П.2.11) утверждение (14) следует из

$$\sum_{j=1}^{n-1} I\{B_j\} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

с вероятностью единица, что эквивалентно,

$$P(B_n \text{ б.ч.}) = 1.$$

Докажем, что последовательность  $B_1, B_2, \dots$  удовлетворяет условиям леммы Борелля–Кантелли (см. лемму 3). Одно из них проверено в лемме 4. Достаточно доказать, что

$$(П.2.14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty.$$

В силу лемм 1, 2,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) > \sum_{n=3}^{\infty} p_n(G_1).$$

Заметим, что из (П.2.2) следует

$$(П.2.15) \quad p_n(G_1) > \frac{\#(\tilde{E}_1 \cap E_1) + 2(n-1)}{n\#\tilde{E}_1 + (1/2)(n-1)(n-2)}.$$

Используя неравенство  $\#(\tilde{E}_1 \cap E_1) \leq \#\tilde{E}_1$ , можно доказать, что правая часть (П.2.15) превышает  $\#(\tilde{E}_1 \cap E_1) / \left((3\#\tilde{E}_1)(n-2)\right)$  при  $n \geq 3$ . Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) > \frac{\#(\tilde{E}_1 \cap E_1)}{3\#\tilde{E}_1} \lim_{N \rightarrow \infty} H_N,$$

где  $H_N = \sum_{n=1}^N 1/n$ . Соотношение (П.2.14) вытекает путем применения неравенства  $H_N > \ln(N)$  и соотношения  $\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(N) = \infty$ .

Для доказательства следствия 1 заметим, что из (П.2.11) следует неравенство

$$E(\Delta_n) - \Delta_1 = \sum_{j=1}^{n-1} P(B_j) > \sum_{j=3}^{n+1} p_j(G_1), \quad n \geq 2.$$

Из доказательства (П.2.14) следует, что последняя сумма больше, чем  $\left(\#(\tilde{E}_1 \cap E_1) / (3\#\tilde{E}_1)\right) \ln(n-1)$ . Этим завершается доказательство неравенства (15).



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Van der Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. V. 1.
2. *Bollobas B.* Random Graphs. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 2nd ed.
3. *Newman M.E.J.* Networks. Oxford University Press: Oxford, New York, 2018.
4. *Bagrow J.P., Brockmann D.* Natural Emergence of Clusters and Bursts in Network Evolution // Phys. Rev. X. 2013. No. 3. P. 021016.
5. *Newman M.E.J.* Random Graphs with Clustering // Phys. Rev. Lett. 2009. No. 103. I. 5. P. 058701.
6. *Qun Liu, Zhishan Dong.* Limit laws for the number of triangles in the generalized random graphs with random node weights // Stat. Probab. Lett. 2020. No. 161. P. 108733.
7. *Bobkov S.G., Danshina M.A., Ulyanov V.V.* Rate of Convergence to the Poisson Law of the Numbers of Cycles in the Generalized Random Graphs / In Operator Theory and Harmonic Analysis. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, V. 358. Eds. Karapetyants, A.N., Pavlov, I.V., Shiryayev, A.N. Springer: Cham, 2021. P. 109–133.
8. *Garavaglia A., Stegehuis C.* Subgraphs in preferential attachment models // Advances in Applied Probability. 2019. No. 51. P. 898–926.
9. *Wang T., Resnick S.I.* Consistency of Hill estimators in a linear preferential attachment model // Extremes. 2019. No. 22. P. 1–28.
10. *Fristedt B., Gray L.* A Modern Approach to Probability Theory. Boston: Birkhäuser, 1997.
11. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
12. *Chen M.-R., Kuba M.* On generalized Pólya urn models // J. Appl. Probab. 2013. No. 50. P. 1169–1186.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.*

Поступила в редакцию 18.01.2024

После доработки 26.08.2024

Принята к публикации 20.09.2024

# Управление в технических системах

© 2024 г. В.С. ВЕРБА, чл.-корр. РАН (vvs.msk@gmail.com),  
В.И. МЕРКУЛОВ, д-р техн. наук (mvipost41@gmail.com)  
(АО “Концерн “Вега”, Москва)

## ПОДХОДЫ К ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОВ НАВЕДЕНИЯ НА ВЫСОКОСКОРОСТНЫЕ ИНТЕНСИВНО МАНЕВРИРУЮЩИЕ ЦЕЛИ. ЧАСТЬ 1. ОБОСНОВАНИЕ ТРЕБОВАНИЙ К СПОСОБАМ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОВ НАВЕДЕНИЯ

В воздушно-космическом противоборстве все большее применение находят высокоскоростные летательные аппараты, способные выполнять сложные пространственные маневры, обладающие рядом технико-экономических и тактических преимуществ. В связи с этим весьма актуальной задачей является оптимизация систем перехвата этих целей. На основе анализа траекторных особенностей полета высокоскоростных летательных аппаратов рассмотрены особенности функционирования систем их перехвата. Сформулированы требования к способам оптимизации методов наведения.

*Ключевые слова:* высокоскоростной летательный аппарат, сложный маневр, система перехвата, метод наведения, способ оптимизации, статистическая теория оптимального управления, обратные задачи динамики, градиентный способ, интеллектуальное управление.

DOI: 10.31857/S0005231024110041, EDN: YMDCII

### 1. Введение

Анализ особенностей военно-технического противоборства в воздушно-космической сфере [1] позволяет констатировать усиление роли и значимости высокоскоростных летательных аппаратов (ВСЛА) [2], способных совершать сложные пространственные маневры. Использование таких ЛА в качестве средств поражения позволяет получить в противоборстве целый ряд технико-экономических и тактических преимуществ [3].

Технико-экономические преимущества обусловлены очень высокой затратностью людских, материальных, финансовых и временных ресурсов, направленных на разработку и эксплуатацию систем противодействия, по сравнению с затратами на изготовление и применение ВСЛА как средств поражения.

Тактические преимущества ВСЛА обусловлены [3]:

- значительным сокращением подлетного времени к цели, а соответственно и уменьшением времени на подготовку противодействия, предопределяющим необходимость увеличения дальности действия систем перехвата;

- качественным сокращением арсенала возможных средств перехвата;
- практической невозможностью обеспечения всеракурсного перехвата;
- качественным ухудшением условий их обнаружения и сопровождения;
- неспособностью традиционных методов самонаведения обеспечивать эффективный перехват;
- способностью одновременно реализовать высокие показатели эффективности поражения целей, собственной живучести и динамичности.

В связи с этим все более востребованной является разработка более совершенных систем перехвата ВСЛА, способных нивелировать эти преимущества. Следует подчеркнуть, что в основе функционирования таких систем прежде всего должны лежать более совершенные методы наведения и процедуры их информационного обеспечения, что предопределяет необходимость проведения анализа возможностей различных способов оптимизации по разработке более совершенных методов наведения, обеспечивающих перехват ВСЛА.

Целью статьи является анализ особенностей гипотетических систем перехвата ВСЛА, обоснование на его основе требований к способам оптимизации методов наведения и качественный анализ их возможностей.

## 2. Особенности систем перехвата ВСЛА

Системы перехвата ВСЛА должны обеспечивать:

- устойчивое управление перехватчиком на больших расстояниях при совершении целью сложных маневров в условиях допустимых ограничений на величину сигналов управления;
- управление, предотвращающее при совершении маневров выход за пределы границ потери устойчивости;
- устойчивое наведение при воздействии на перехватчик различного рода возмущений;
- наведение на цель в составе группы;
- реализуемость управления.

Высокая скорость полета ВСЛА предопределяет, в первую очередь, необходимость учета ее влияния на эффективность систем перехвата. Прежде всего это связано с увеличением различного рода запаздываний в реагировании перехватчика на маневр цели, обусловленных его инерционностью. Кроме того, это предопределяет необходимость увеличения дальности действия систем перехвата, компенсирующего уменьшение времени на подготовку противодействия. В свою очередь, увеличение дальности действия систем перехвата приводит к качественному уменьшению угловой скорости линии визирования цели, основного информационного параметра большинства существующих методов самонаведения [4–7]. Эта особенность предопределяет необходимость использования нестационарных методов наведения [8], при реализации которых вначале устраняются угловые ошибки по направлению полета, а затем линейные промахи, основанные на минимизации угловой скорости линии визирования (УСЛВ).

Сложный характер пространственных перемещений высокоскоростных целей со сменой знака производных параметров относительного и абсолютного движения [9] обуславливает ряд особенностей функционирования систем их перехвата:

- неэффективность использования методов наведения в наивыгоднейшую упрежденную точку встречи [4] из-за периодического ее смещения в пространстве при маневре цели;
- принятие специальных мер по уводу носителя от границ потери устойчивости при выполнении им маневра по перехвату цели [10];
- использование в законе наведения высоких производных угловых координат, компенсирующих инерционность перехватчика [11];
- случайный характер времени наведения [4].

Следует подчеркнуть, что наиболее эффективным является использование ВСЛА в составе группы. В связи с этим весьма востребованной становится задача индивидуального наведения перехватчика на цель в составе группы [10–14]. В свою очередь это предопределяет необходимость использования траекторного управления наблюдением [10, 15–17], в рамках которого траектория наведения перехватчика на первом этапе должна обеспечить разрешение участников группы с выделением интересующей цели, а затем наведение на нее с минимизацией промаха.

Реализуемость при заданных ограничениях обеспечивается как минимум тремя условиями:

- соответствующими динамическими свойствами носителя, характеризующими его маневренность;
- возможностью устойчивого формирования оценок всех координат относительного и абсолютного движения цели, используемых в методе наведения;
- выполнением ограничений на рабочий диапазон координат состояния, управляющие перегрузки носителя и ошибки автоматического сопровождения по угловым и линейным координатам.

Высокая степень неопределенности условий применения, широкий спектр возможных маневров и их непредсказуемость предопределяют несовершенство моделей состояния, используемых при синтезе методов наведения и их информационного обеспечения. Эта особенность обуславливает в ряде случаев использование в качестве требуемых координат в законе управления непосредственно результатов измерений с точностью до ошибок измерений, отражающих действительное состояние системы “ВСЛА–перехватчик”.

Использование в качестве основного источника информации бортовой радиолокационной системы (РЛС) предопределяет необходимость учета двух ее особенностей:

- использование открытого радиоканала, по которому могут поступать различного рода радиопомехи;
- зависимость точности и достоверности формируемых измерений от геометрии взаимного расположения носителя РЛС и сопровождаемой цели.

Это требует формирования сигналов управления носителем, которые обеспечивают не только решение конечной задачи, но и наилучшие условия для наблюдений цели [10, 11]. Возможность решения перечисленных выше задач во многом зависит от используемого при проектировании метода оптимизации.

### 3. Особенности систем перехвата ВСЛА

Адаптация динамических свойств носителя к требованиям используемого метода наведения является очень сложной и дорогостоящей задачей. В связи с этим целесообразно оптимизировать метод наведения под готовый носитель, компенсируя его недостаточную динамичность дополнительными корректирующими сигналами на основе высоких производных угловых координат. Необходимо отметить, что формирование оптимальных оценок высоких производных угловых координат при измерении только бортовых пеленгов тоже является достаточно сложной задачей [9].

Противодействие высокоскоростным средствам поражения предопределяет необходимость решения целого ряда теоретических и прикладных задач управленческого и информационного планов, которые должны быть решены в процессе разработки конкретных систем перехвата. При этом основу решения теоретических задач составляет разработка (выбор и обоснование) математического аппарата оптимизации. Суть решения прикладных задач сводится к получению конкретных методов наведения и автоматического сопровождения цели на основе выбранного аппарата оптимизации.

В связи с этим представляет интерес оценка (хотя бы на качественном уровне) потенциальных возможностей различных способов оптимизации при решении задач синтеза методов наведения перехватчиков ВСЛА.

В рамках любого способа оптимизации [10–14, 18–22] необходимо определить:

- критерии (правила), определяющие соответствие оптимизируемой системы своему назначению;
- показатели совершенства, по которым можно качественно определить предпочтительность того или иного варианта разрабатываемой системы перехвата;
- набор ограничений на координаты состояний и величину сигналов управления;
- класс исходных моделей состояния, в рамках которого обеспечивается реализация поставленных задач;
- вид управляющего сигнала, обеспечивающего инвариантность к условиям применения;
- сложность (скорость) формирования сигнала управления (в рамках выбранных критериев), показателей и исходных моделей;
- набор оптимальных оценок координат состояния, необходимый для реализации метода наведения.

С точки зрения размера рабочей области применения, в рамках которой реализуется приемлемая адекватность условиям применения и универсальность формируемых управлений, наиболее целесообразным является использование линеаризованных нестационарных моделей [10], объединяющих достоинства линейных и нелинейных представлений.

При этом используемые модели состояния должны обеспечивать учет различных видов возмущений без расширения вектора состояния.

Несомненное достоинство нестационарных моделей состояния – возможность формирования нестационарных методов наведения, позволяющих изменять управляющие приоритеты в процессе функционирования [5, 8]. При этом для устранения зависимости эффективности управления от высоты, характерной для аэродинамических рулей, в качестве сигналов управления целесообразно выбирать поперечные ускорения.

Следует подчеркнуть, что даже в рамках одного способа оптимизации в зависимости от вида исходной модели и выбранного функционала качества можно получить различные варианты законов управления. Особенности математических моделей в пространстве состояния, их классификация и взаимосвязь с методами оптимизации подробно рассмотрены в [10].

В качестве показателей совершенства сформированных методов наведения систем перехвата ВСЛА, как правило, используются результаты выполнения целевого назначения: текущие и конечный промахи, ошибки наведения по угловым координатам, перегрузки, время наведения и т.д.

В общем случае набор ограничений определяется диапазоном обслуживаемых координат (дальность, скорость, ракурсы перехвата, допустимые промахи и т.д.) и величиной допустимых перегрузок, в рамках которых система реализует свое назначение.

Обобщая изложенное выше, можно прийти к заключению, что в приложении к задаче перехвата ВСЛА математический аппарат оптимизации должен обеспечивать:

- возможность формирования нестационарных методов самонаведения, способных перераспределять управленческие приоритеты в процессе перехвата;
- реализуемость, основанную на возможности использования носителей с реализуемой на практике маневренностью и способности устойчивого формирования всех оценок координат состояния, используемых в методе наведения, в рамках ограничений, накладываемых на диапазон обслуживаемых координат и величину управляющих сигналов;
- эффективный уход носителя и систем информационного обеспечения от границ потери устойчивости, что предопределяет необходимость формирования законов наведения с нелинейной (кубической) зависимостью от ошибок управления [14, 22];
- учет измеряемых возмущений без расширения вектора состояния;

- возможность формирования метода наведения при неизвестном времени перехвата;
- универсальность, характеризующую способность системы перехвата функционировать в широком поле условий применения, в том числе и в условиях их несоответствия моделям, положенным в основу синтеза;
- относительную простоту формирования закона управления в рамках реализуемых требований к вычислительной производительности бортовых вычислителей;
- возможность информационного обеспечения синтезированных методов наведения.

#### 4. Заключение

Далее в серии статей будут рассмотрены возможности различных подходов к оптимизации методов наведения на ВСЛА на основе:

- математического аппарата статистической теории оптимального управления (СТОУ) при минимизации квадратичных и квадратично-биквадратных функционалов качества;
- концепции обратных задач динамики;
- градиентного поиска;
- интеллектуального управления.

При этом в рамках СТОУ будут рассмотрены подходы к синтезу метода наведения на ВСЛА:

- на основе классического варианта [10, 15, 19–21] синтеза управления, оптимального в постановке Летова–Калмана;
- на основе варианта локальной оптимизации с использованием трансформации входных сигналов, воздействующих на заданный тип носителя;
- на основе формирования закона наведения по результатам прогноза положения цели на интервал времени, определяемый инерционностью перехватчика;
- на основе учета несоответствия динамических свойств цели и перехватчика непосредственно в законе наведения;
- на основе минимизации локальных квадратично-биквадратных функционалов качества [14, 22].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Верба В.С., Меркулов В.И.* Проблемы выбора методов оптимизации перспективных авиационных систем радиоуправления // Тр. СПИИРАН. 2019. Т. 18. № 13. С. 535–557.
2. *Анцев Г.В., Сарычев В.А.* Системы самонаведения высокоточного оружия. Тезаурус. Справочное издание. М.: Радиотехника, 2020.
3. *Верба В.С., Меркулов В.И., Закомолдин Д.В.* Проблемы перехвата высокоскоростных летательных аппаратов, маневрирующих по сложным законам. Часть 1 // Успехи современной радиоэлектроники. 2024. Т. 78. № 2. С. 5–12.

4. Авиационные системы радиоперехвата. Учебник для военных и гражданских ВУЗов / Под ред. В.И. Меркулова. М.: Изд-во ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2008.
5. Girard Anouck R. Proportional Navigation: Optimal Homing and Optimal Evasion / Anouck R. Girard, Pierre T. Kabamba // SIAM Review. 2015. V. 57. No. 4. P. 611–624.
6. Palumbo, Neil F. Modern Homing Missile Guidance Theory and Techniques / Neil F. Palumbo, Ross A. Blauwkamp, Justin M. Lloyd // Johns Hopkins Apl Technical Digest. 2010. V. 29. No. 1. P. 42–59.
7. B. Zhu, J. Xu, A. Hanif Bin Zaini, L. Xie. A Three-Dimensional Integrated Guidance Law for Rotary UAV Interception / 12th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA 2016), Kathmandu, Nepal. 2016. P. 726–731.
8. Меркулов В.И. Нестационарные методы самонаведения // Вестник ВКО. 2020. № 1. С. 25–39.
9. Верба В.С., Меркулов В.И., Закомолдин Д.В., Лихачев В.Л. Проблемы перехвата высокоскоростных летательных аппаратов, маневрирующих по сложным законам. Часть 2 // Успехи современной радиоэлектроники. 2024. Т. 78. № 4. С. 5–14.
10. Меркулов В.И., Верба В.С. Синтез и анализ авиационных радиоэлектронных систем управления. Книга 1. М.: Радиотехника, 2023.
11. Меркулов В.И., Верба В.С. Синтез и анализ авиационных радиоэлектронных систем управления. Книга 2. М.: Радиотехника, 2023.
12. Sensor selection for tracking multiple groups of targets / Farzaneh R. Armaghani, Iqbal Gondal, Joarder Kamruzzaman, David G. Green // J. Network Comput. Appl. 2014. V. 46. P. 36–47.
13. Group target tracking via jointly optimizing group partition and association / Xuqi Zhang, Haiqi Liu, Fanqin Meng, Xiaojing Shen // Automatica. 2023. V. 153.
14. Donglei Cao, Beihong Jin, Sajal K. Das, Jiannong Cao. On collaborative tracking of a target group using binary proximity sensors // J. Parallel Distributed Comput. 2010. V. 70. No. 8. P. 825–838.
15. Григорьев Ф.Н. Управление наблюдениями в автоматических системах / Ф.Н. Григорьев, Н.А. Кузнецов, А.П. Серебровский. М.: Наука, 1986. С. 215.
16. Емельянов Д.Д. Траекторное управление наблюдениями в 3D с борта БПЛА по угломерной информации / Д.Д. Емельянов, Е.Я. Рубинович // Труды института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 112–130.
17. Хуторцев В.В. Траекторное управление процессом наблюдения подвижного пеленгатора в топологии дорожной сети / В.В. Хуторцев // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 1. С. 165–176.
18. Верба В.С., Меркулов В.И., Капустян С.Г., Харьков В.П. Оптимизация радиоэлектронных систем управления. Методы и алгоритмы синтеза оптимального управления. Части 1–3 // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2012 (№ 2); 2013 (№ 3); 2013 (№ 11).
19. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1992.
20. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С., III. Оптимальное управление системами. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1982.



21. Черноусько Ф.А., Калмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.
22. Верба В.С., Меркулов В.И., Руденко Е.А. Линейно-кубическое локально-оптимальное управление линейными системами и его применение для наведения летательных аппаратов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. № 5. С. 129–141.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.*

Поступила в редакцию 19.03.2024

После доработки 08.07.2024

Принята к публикации 02.09.2024

# Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2024 г. О.В. ДРУЖИНИНА, д-р физ.-мат. наук (ovdruzh@mail.ru),  
(Федеральный исследовательский центр  
«Информатика и управление» РАН, Москва;  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
А.А. ПЕТРОВ, канд. техн. наук (xeal91@yandex.ru),  
О.Н. МАСИНА, д-р физ.-мат. наук (olga121@inbox.ru)  
(Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ КОНВЕЙЕРНОГО ТРАНСПОРТА С ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Изучается обобщенная математическая модель управляемого ленточного конвейера с переменным углом между горизонтальной плоскостью и плоскостью ленты. Модель задается с помощью нелинейной системы четырех дифференциальных уравнений с переключениями. Учитываются линейное перемещение ленты конвейера, изменение импульса системы, осевое и линейное трение, демпфирование горизонтального положения конвейера, а также факторы плавной погрузки и мгновенной разгрузки грузов. Рассмотрены условия стабилизации описанной модели с учетом имитационных компонентов, связанных с характером режимов погрузки и разгрузки конвейерной ленты. Для управления угловым положением конвейера выполнен синтез ПИД-регулятора, нейро-ПИД регулятора и нейросетевых регуляторов рекуррентного и нерекуррентного типов. Управление линейной скоростью реализовано на основе введения скользящего режима. Представлена интерпретация вычислительных экспериментов, проведен сравнительный анализ эффективности управления для различных видов регуляторов.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, дифференциальные уравнения с переключениями, конвейерные системы, интеллектуальное управление, стабилизация, нейросетевой регулятор, ПИД-регулятор, нейро-ПИД регулятор, машинное обучение.

DOI: 10.31857/S0005231024110053, EDN: YLZAWV

### 1. Введение

Проектирование, автоматизация и мониторинг систем конвейерного транспорта являются актуальными направлениями исследований [1–11]. В круг важных задач входят, например, задачи стабилизации тягового фактора конвейера, мониторинг динамической нагрузки конвейерных лент, оптимизация параметров управления конвейером, проектирование интеллектуальных

конвейерных систем, создание многофункциональных систем непрерывного транспорта. Решение указанных задач связано с необходимостью использования методов теории управления, теории оптимизации, а также инструментов искусственного интеллекта.

В математическом моделировании управляемых технических систем, в том числе систем конвейерного транспорта, используются такие инструменты искусственного интеллекта, как нечеткое управление, искусственные нейронные сети и машинное обучение [4, 12–20]. Например, в [16] рассматриваются вопросы построения нечеткой трекинговой системы для отслеживания состояния конвейера. В [17] изучены аспекты оптимизации управления конвейера с применением искусственных нейронных сетей. В [18] рассмотрены вопросы применения моделей машинного обучения для высокоточной классификации типов нагрузок на резиновую конвейерную ленту.

Как известно, конвейерные системы характеризуются переключательным режимом функционирования. При описании и изучении динамических моделей конвейерного транспорта целесообразно использовать понятия и методы теории систем с переключениями [21–23], методы синтеза различных типов регуляторов, включая ПИД-регулятор [24, 25]. Изучение поведения систем с переключениями в ряде важных случаев связано с введением скользящих режимов [26]. Разработка компьютерных моделей переключаемых систем рассмотрена, например, в [23]. Важной задачей является анализ устойчивости переключаемых систем [27–29]. При исследовании систем с переключениями могут использоваться алгоритмы численной оптимизации, связанные с методами, инспирированными природой, среди которых популярен метод дифференциальной эволюции [30, 31]. Машинное обучение с подкреплением [32] может находить применение при построении управляемых систем с переключениями. Компьютерное моделирование систем с переключениями осуществляется при поддержке языков высокого уровня, среди которых можно отметить Python и Julia [33, 34] с привлечением соответствующих математических библиотек.

Управление динамическими системами на основе ПИД-регулятора широко известно и рассмотрено в ряде работ, в частности в [35]. Известны различные алгоритмы нахождения оптимальных значений ПИД-регулятора [25, 36, 37]. В [25] предлагается новый подход к задаче настройки и оптимизации параметров ПИД-регулятора, основанный на сведении проблемы к задаче оптимизации. В соответствии с этим подходом качество регулятора оценивается по квадратичному критерию от выхода системы. ПИД-регулятор настраивается против неопределенности в начальных условиях так, чтобы выход системы был равномерно малым, при этом дополнительно гарантируется заданная степень устойчивости замкнутой системы. В [38] представлен анализ функционирования ПИ-регуляторов и ПИД-регуляторов в режиме интегрального насыщения, возникающего при наличии ограничений на выходе регулятора. В [24] приводится обзор используемых форм ПИД-регуляторов, а также алгоритмов их автоматической настройки и адаптивного управления. Вопросы ре-

гулирования параметров ПИД-регулятора ленточного конвейера для транспортировки угля изучены в [39] с применением нейронной сети, а именно, построена нейросетевая модель управления крутящим моментом.

Интерес представляет сравнительный анализ функционирования ПИД-регулятора и нейросетевого регулятора в одинаковых условиях [40]. Для настройки коэффициентов ПИД-регулятора достаточно эффективные результаты показало использование метода дифференциальной эволюции из состава математической библиотеки Scipy. В [40] предложены методы исследования модели ленточного конвейера на основе построения ПИД-регуляторов и нейросетевых регуляторов. В указанной работе рассматривалась упрощенная модель ленточного конвейера без учета осевого сопротивления и демпфирования, а также без учета плавности погрузки и разгрузки грузов.

В [41] разработана такая модифицированная математическая модель ленточного конвейера, которая учитывает осевое сопротивление и динамическое изменение угла между горизонтальной плоскостью и плоскостью ленты конвейера. Осуществлен синтез нейросетевого регулятора и ПИД-регулятора для управления изучаемой моделью. Предложено решение задач оптимального управления с применением построенных регуляторов. Представлены результаты компьютерных экспериментов по изучению траекторной динамики. Синтез законов управления для стабилизации угла подъема конвейерной ленты осуществлен с учетом переменной массы грузов, а также с учетом изменения центра масс конвейера. Рассмотрены вопросы адаптивности нейросетевого управления и ПИД-управления по отношению к линейному увеличению осевого сопротивления.

В [42] решается задача синтеза нейросетевого регулятора для такой модели ленточного конвейера с динамическим изменением угла между горизонтальной плоскостью и плоскостью ленты конвейера, которая учитывает факторы плавной погрузки и мгновенной разгрузки грузов, без учета осевого сопротивления. Проведен сравнительный анализ результатов компьютерного исследования этой модели с результатами для модели, рассмотренной в [41].

Уточнение моделей, рассмотренных в [40–42], может проводиться в направлении, связанном с анализом влияния различных факторов, среди которых следует отметить воздействие переходных процессов на динамику системы при изменении режимов и характера нагрузки конвейера, а также с анализом влияния различных диссипативных эффектов и с регулированием положения конвейера на основе демпфирующих подсистем.

Статья состоит из семи разделов. В разделе 2 приведено описание и анализ обобщенной модели управляемого ленточного конвейера. Сформулирована задача оптимального управления перемещением ленты и угловым положением конвейера. Предложены условия стабилизации описанной модели. В разделе 3 осуществлен синтез ПИД-регулятора, нейро-ПИД регулятора и нейросетевых регуляторов рекуррентного и нерекуррентного типов. Управление линейной скоростью реализовано на основе введения скользящего режи-

ма. В разделе 4 приведены результаты вычислительных экспериментов, дана интерпретация траекторной динамики с применением управления на основе различных типов регуляторов. В разделе 5 приведен сравнительный анализ эффективности синтезированных регуляторов, представлены результаты измерения быстродействия. В разделе 6 приведено обсуждение результатов настоящей работы, отмечены качественные эффекты применения интеллектуального управления.

## 2. Описание и анализ обобщенной модели управляемого ленточного конвейера

Рассматривается задача синтеза системы управления ленточным конвейером с динамически изменяемым углом подъема ленты. Фазовое пространство модели системы образуется следующими координатами: линейное перемещение ленты, импульс системы и угол подъема над плоскостью. На движущийся конвейер в случайные моменты времени производится погрузка и выгрузка объектов с разной массой, которая способна повлиять на характеристики его движения. Пренебрегаем растяжением ленты, а также считаем пренебрежительно малым влияние момента импульса на изменение угловой скорости. Требуется обеспечить выход на стационарный режим с сохранением линейной скорости и постоянного угла подъема в процессе функционирования конвейера. С учетом указанных условий математическую модель системы управления ленточным конвейером можно представить в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{p}{m}, \\
 \dot{p} &= u_p(t) - k \frac{p}{m} - (m - m_0)g \sin(\alpha), \\
 \dot{\alpha} &= \omega, \\
 \dot{\omega} &= \frac{u_\alpha(t) - l\omega}{mc\varepsilon^2} - \frac{g \cos(\alpha)}{\varepsilon} + \frac{1}{\left(\alpha + \left(\frac{\varepsilon_0}{g}\right)^{\frac{1}{\tau}}\right)^\tau}, \\
 u_p, \quad u_\alpha &\in U, \quad \varepsilon \in E, \quad m \in M,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $x$  – перемещение ленты конвейера,  $p$  – импульс системы,  $\alpha$  – угол подъема конвейера относительно нулевого положения,  $\omega$  – угловая скорость конвейера,  $g$  – ускорение свободного падения,  $m_0$  – масса ленты конвейера,  $m$  – общая масса системы,  $u_p(t)$  – функция управления тягой конвейера,  $u_\alpha(t)$  – функция управления углом подъема ленты,  $\varepsilon$  – положение центра масс конвейера относительно нижнего ролика,  $c$  – коэффициент, определяющий момент инерции конвейера,  $k$  – коэффициент трения качения,  $l$  – коэффициент осевого сопротивления,  $\varepsilon_0$  – усредненное положение центра тяжести,  $\tau$  – коэффициент жесткости демпфирования. Множества  $M$ ,  $E$ ,  $U$  включают в себя значения

массы грузов, центра масс и управлений соответственно. Изменения режимов функционирования в модели (1) совершаются в моменты выбора соответствующих значений  $m_1 = m - m_0$  и  $\varepsilon$  согласно определенному правилу, задающему схему переключений.

Для реализации выбора значений  $\varepsilon$  и  $m_1$  разработана схема переключений, реализующая имитационное моделирование погрузки и разгрузки грузов в произвольные моменты времени. Авторы предлагают реализацию расчета конкретных значений векторов  $(\varepsilon, m_1)$  на основе имитационного алгоритма. Изменение массы грузов на ленте определяется алгоритмами переключений масс двух типов: 1) с мгновенной погрузкой и мгновенной разгрузкой, 2) с плавной погрузкой и мгновенной разгрузкой. Физический смысл плавной погрузки заключается в постепенной передаче кинетической энергии от ленты к грузу. В случае мгновенной погрузки данный эффект не учитывается. Описание режимов погрузки и разгрузки предложено в [42].

*Определение 1. Управляемую систему (1), моделирующую движение конвейерной ленты с учетом переключений, будем называть стабилизируемой в локальном смысле, если справедливо следующее свойство: любая траектория системы (1) для  $t \in (t_1, \infty)$  находится внутри некоторой трубки в многомерном фазовом пространстве.*

*Определение 2. Под состоянием системы понимается вектор  $\theta = (\dot{x}, \alpha, \omega)$  фазовых параметров системы (1).*

*Определение 3. Под целевым состоянием  $\lambda$  системы (1) будем понимать состояние равновесия  $\lambda = (\bar{s}, \bar{\alpha}, 0)$ , которое система (1) должна достигать в процессе управления.*

Здесь рассматривается такая задача стабилизации системы (1), для решения которой необходимо: а) обеспечить переход из начального состояния  $\lambda_0$  в целевое состояние  $\lambda$  за наименьшее время; б) поддерживать состояние системы в малой окрестности  $\varepsilon$  целевого состояния  $\lambda$  для  $t \rightarrow \infty$ .

В качестве меры стабилизируемости можно выбрать норму разности между вектором целевого состояния  $\lambda$  и частичным фазовым вектором системы (1). При указанном выборе меры стабилизируемости с учетом выполнения некоторого условия, которое можно интерпретировать как ограниченность ошибки на бесконечном интервале времени, нетрудно сформулировать достаточное условие стабилизируемости системы (1) в локальном смысле. В обосновании этого достаточного условия используем определение стабилизации в локальном смысле, определение целевого состояния, а также свойства фазовых переменных системы (1), значимых для динамики рассматриваемой модели конвейера с переменным углом подъема (а именно переменных  $\dot{x}$ ,  $\alpha$ ,  $\omega$ ).

Далее, пусть ошибка в системе (1) равна  $\sigma = \lambda - \theta$ . С учетом указанной ошибки примем, что существуют такие функционалы управления  $u_1, u_2, \zeta_1, \zeta_2$ , задающие обратную связь, для которых справедливы равенства

$$(2) \quad u_p(t) = u_1(\zeta_1(\sigma(t))), \quad u_\alpha(t) = u_2(\zeta_2(\sigma(t))).$$

*Теорема 1. Пусть  $t \in [t_1, \infty)$ . Если с учетом (2) выполняется условие*

$$(3) \quad \forall \theta(t) : t \in [t_1, \infty) \exists \delta : \|\sigma\| \in [0, \delta),$$

*то система (1) стабилизируема в локальном смысле.*

Действительно, выполнение условия (3) для любого  $t$  задает некоторую  $\delta$ -окрестность целевого состояния, в которой может находиться изображающая точка траектории. Множество таких окрестностей геометрически образуют трубку. Таким образом, система (1) является стабилизируемой в локальном смысле.

Понятие стабилизации в локальном смысле отвечает случаям «частичной» стабилизации конвейерной системы, когда существуют траектории с неугасающими колебаниями или траектории, «параллельные»  $\lambda$ . В этих случаях задача управления имеет лишь частичные решения.

В случаях полной стабилизации система (1) всегда дает адекватный ответ на возмущения, при этом скорость стабилизации системы с учетом возникающих возмущений пропорциональна отклонению от центра «трубки». С формальной точки зрения производная ошибки пропорциональна величине самой ошибки по выбранной метрике. Указанное условие стабилизации является более строгим, что позволяет охарактеризовать понятие стабилизируемости системы в общем.

*Определение 4. Система (1) называется стабилизируемой в общем, если на некотором временном интервале  $t \in (t_0, t_k)$  при постоянстве возмущений (т.е.  $m_1 = \text{const}$ ) ошибка стремится к нулю.*

С учетом имитационной составляющей рассматриваемой модели стабилизируемой в общем может считаться система, в которой перечисленные условия выполняются в отсутствие возмущений, изолированных по времени. Имеет место следующая

*Теорема 2. Пусть для системы (1) с учетом (2) выполнено условие (3). Если при  $\frac{dm_1}{dt} = 0$  дополнительно выполнено условие*

$$(4) \quad \forall \theta(t) : t \in [t_1, \infty) \exists \delta_1(t) \leq \delta : \|\sigma\| \in (0, \delta_1(t)), \quad \dot{\delta}_1(t) < 0,$$

*то система (1) стабилизируема в общем.*

Действительно, если при постоянной массе грузов выполнены условия (3) и (4), то траектория изолирована в постоянно сужающейся трубке до тех пор, пока не выполняется  $\sigma = \vec{0}$ , что означает отсутствие ошибки. Для обеспечения оптимального управления системой (1) к условиям теорем 1 и 2 требуется добавление критериев оптимальности.

Далее будем рассматривать два критерия оптимальности применительно к стабилизации углового положения: комплексный критерий и упрощенный критерий. Комплексный критерий оптимальности (относительно использова-

ния двух фазовых переменных  $\alpha, \omega$ ) имеет вид

$$(5) \quad C_1 = \int_{t_1}^{t_2} \|S - (\alpha, \omega)\| dt, \quad S = (\bar{\alpha}, 0).$$

Во-первых, рассмотрим задачу минимизации критерия (5) с учетом ошибки по отклонению углового положения и угловой скорости. Для системы, стабилизируемой в общем, критерий (5) можно редуцировать к виду

$$(6) \quad C_2 = \int_{t_1}^{t_2} |\bar{\alpha} - \alpha| dt.$$

Во-вторых, рассмотрим задачу минимизации критерия (6) с учетом ошибки по отклонению углового положения. Редуцирование критерия (5) связано с пропорциональной зависимостью ошибки по отклонению углового положения и угловой скорости при выполнении условий теоремы 2.

### 3. Синтез регуляторов

Управление движением конвейера осуществляется с помощью регуляторов для управления линейной скоростью и углом подъема. Для управления линейной скоростью используется регулятор на основе скользящего режима

$$\text{если } \dot{x} \geq \bar{s} \text{ то } u_p = -\bar{u} \text{ иначе } u_p = \bar{u},$$

где  $s$  – заданная линейная скорость движения,  $\bar{u}$  – фиксированное значение управления.

Предварительные вычислительные эксперименты показали, что реализация управления угловым положением с помощью введения в скользящий режим не приводит к стабилизации системы (1). В связи с этим выполним построение и проведем сравнительный анализ следующих типов регуляторов для управления угловым положением системы (1): регулятора на основе ПИД-управления, нейросетевого регулятора, рекуррентного нейросетевого регулятора и рекуррентного нейро-ПИД регулятора. Используется стандартная структура ПИД-регулятора и нейросетевого регулятора [40–42]. Структура рекуррентных регуляторов представлена на рис. 1, 2.

На рис. 1 представлена схема нейросетевого регулятора рекуррентного типа с топологией 3-4-1 и тангенциальными функциями активации в скрытом и выходном слоях. На вход подается значение ошибки, значение угловой скорости движения конвейера и значение выхода нейросети, полученное с учетом единичной задержки. На рис. 2 представлена схема рекуррентного нейро-ПИД регулятора, в котором нейросеть с топологией 3-4-3 используется для подстройки коэффициентов ПИД-регулятора.



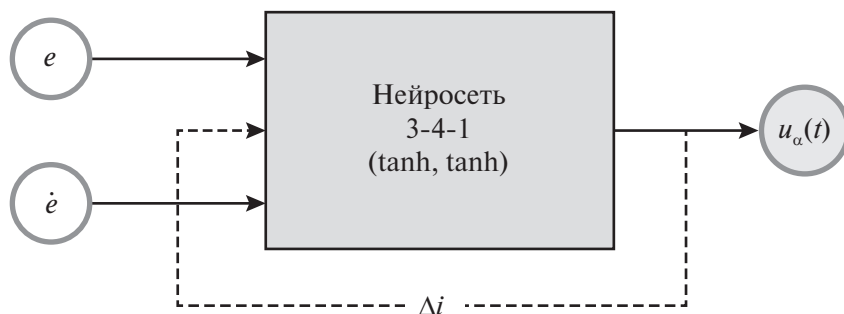


Рис. 1. Схема рекуррентного нейросетевого регулятора.

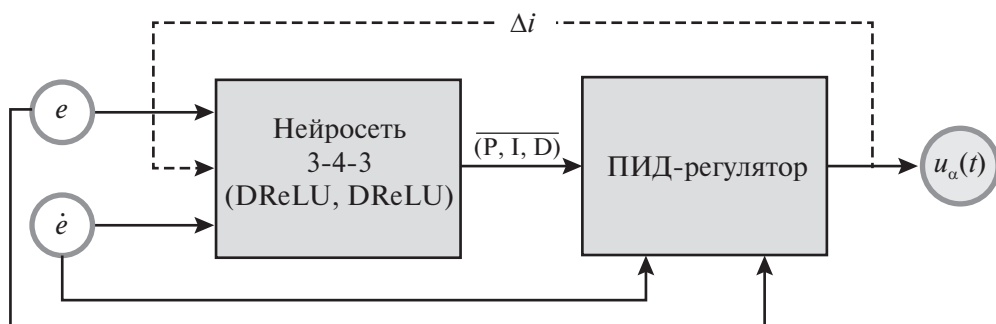


Рис. 2. Схема рекуррентного нейро-ПИД регулятора.

На рис. 1 и 2 используются следующие обозначения:  $e$  – значение ошибки углового положения,  $\dot{e}$  – производная по времени от ошибки углового положения,  $u_{\alpha}(t)$  – значение управления,  $\Delta i$  – оператор единичной задержки. С учетом различия диапазонов выходных значений  $u$  (для нейросетевого регулятора с тангенциальной функцией активации  $u \in (-1, 1)$ , а для нейро-ПИД-регулятора  $u \in (0, \infty)$ ) применяется контур усиления и фильтрации для получения значения  $u_{\alpha}(t)$ . Для рекуррентного нейросетевого регулятора применяется симметричная относительно начала координат тангенциальная функция активации. Рекуррентный нейро-ПИД регулятор в скрытом слое реализует функцию активации DReLU, а в выходном слое используется функция активации ReLU. Указанные функции активации являются стандартными и используются при нейросетевом моделировании [17, 18].

В каждом алгоритме управления угловым положением, реализующем тот или иной синтезированный регулятор, задан параметр  $\Delta t$  периода управления. В зависимости от заданного  $\Delta t$  меняется характер траекторной динамики системы (1). Для периода управления  $\Delta t \geq 0,05$  характерно снижение равномерности траекторий углового положения ленты, а также наблюдается «зубчатая» форма графика линейной скорости.

Следует отметить, что регуляторы угла и линейной скорости могут работать с разными периодами. Функционирование регуляторов с разными пе-

риодами связано с необходимостью минимизации количества переключений и сбережения ресурса оборудования, а также с реализуемостью управления на практике. Различающиеся периоды управления связаны с ограничением на инерционность. Представляет интерес изучение такой модели конвейерной системы, для которой учитывается допустимая инерционность привода конвейера.

При уменьшении периода управления и при соответствующем уменьшении максимального шага дифференцирования решателя ОДУ наблюдается более ровный характер траектории линейной скорости конвейерной ленты за счет увеличения количества переключений в скользящем режиме. Следует отметить, что увеличение периода управления приводит к снижению робастности управления по отношению к возмущениям в системе (1). Под робастностью понимается сохранение диапазона значений и структуры управления по отношению к возмущениям в системе.

Для расчета параметров всех разработанных регуляторов углового положения используется процедура обучения с подкреплением на основе эволюционного алгоритма оптимизации (дифференциальная эволюция). Расчет функции потерь для модели (1) состоит из следующих шагов: 1) установка параметров регулятора; 2) расчет  $n$  траекторий (в рассматриваемом примере  $n = 3$ ) с учетом применения регулятора; 3) расчет усредненного значения (6) для  $n$  траекторий. Предложенные топологии для нейросети прямого распространения и рекуррентной нейросети подобраны путем вычислительных экспериментов при ограниченном времени обучения. Для нейросетевых регуляторов (прямого распространения и рекуррентного) наилучшие результаты показывает тангенциальная функция активации в скрытом слое с учетом наименьшего среднего значения (6). Усиление и фильтрация сигнала управления для регуляторов осуществляется следующим образом: для нейросетевых регуляторов применяется коэффициент усиления  $\nu = 100$ , для ПИД-регулятора отсекаются все значения  $u_\alpha \notin (-100, 100)$ .

С учетом структуры синтезированных регуляторов разработана компьютерная программа для численного моделирования динамики управляемой модели (1). Далее приведены результаты проведенных вычислительных экспериментов.

#### 4. Результаты вычислительных экспериментов

Параметрическая оптимизация разработанных регуляторов выполнена с помощью алгоритмов, основанных на обучении с подкреплением. Результаты моделирования приведены на рис. 4–8. Вначале рассмотрим результаты вычислительных экспериментов с использованием управления на основе ПИД-регулятора. Начальные условия и начальные параметры имеют вид  $(x; p; \alpha; \omega) = (0; 0; 0,5; 0)$ ,  $(m_0; m; k; g; c; \varepsilon; \tau) = (0,1; 1,5; 0,5; 9,8; 0,5; 1; 10)$  соответственно. При проведении вычислительных экспериментов учитывается случай плавной погрузки и мгновенной разгрузки ленты.

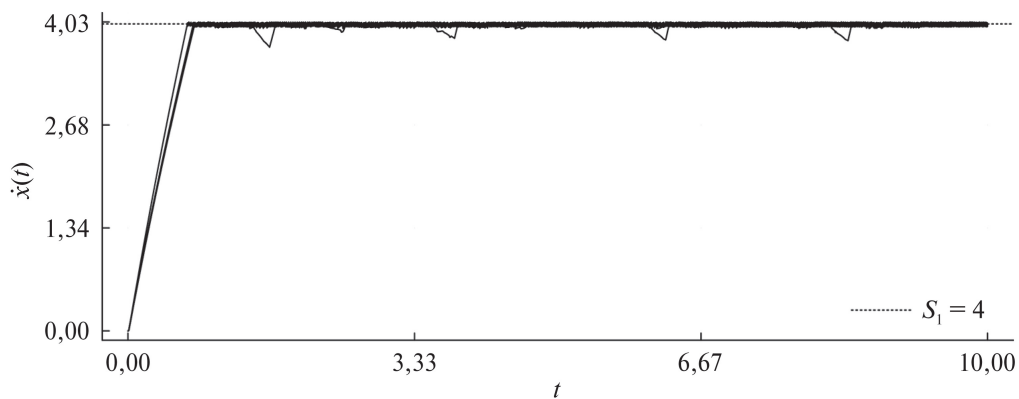


Рис. 3. Графики линейной скорости ленты для модели (1) с применением регулятора на основе скользящего режима и ПИД-регулятора.

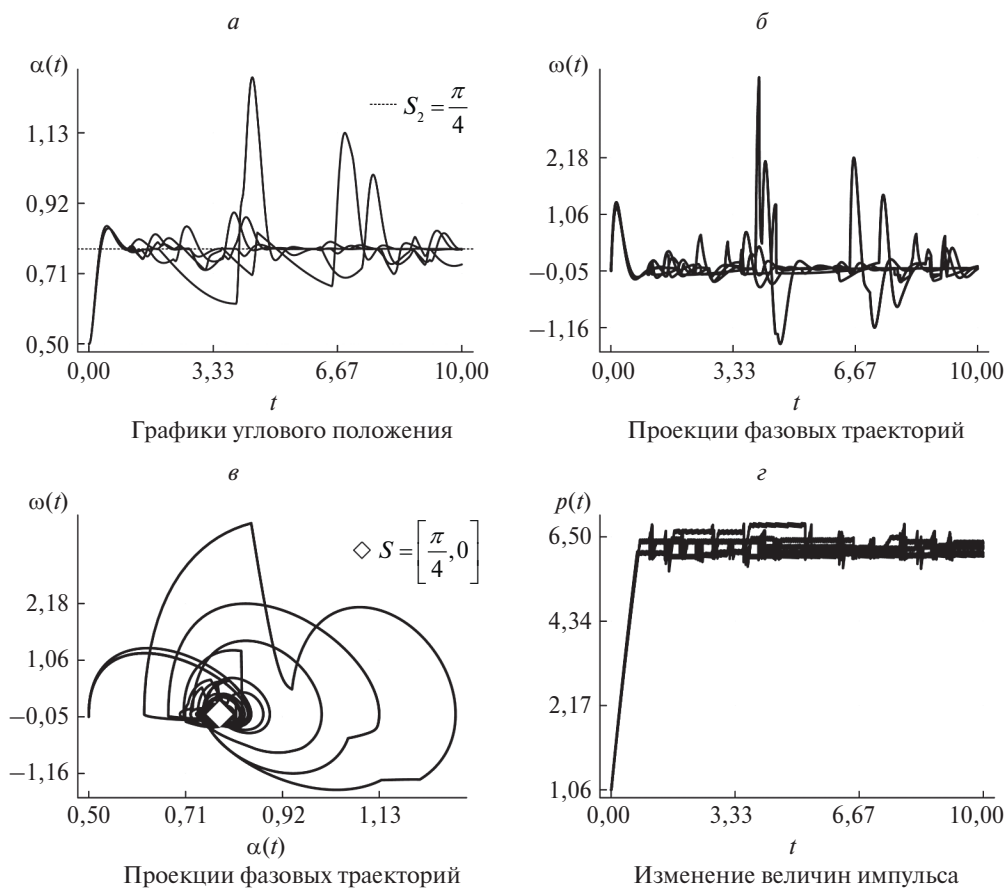


Рис. 4. Совокупность траекторий системы (1) с учетом управления на основе ПИД-регулятора.

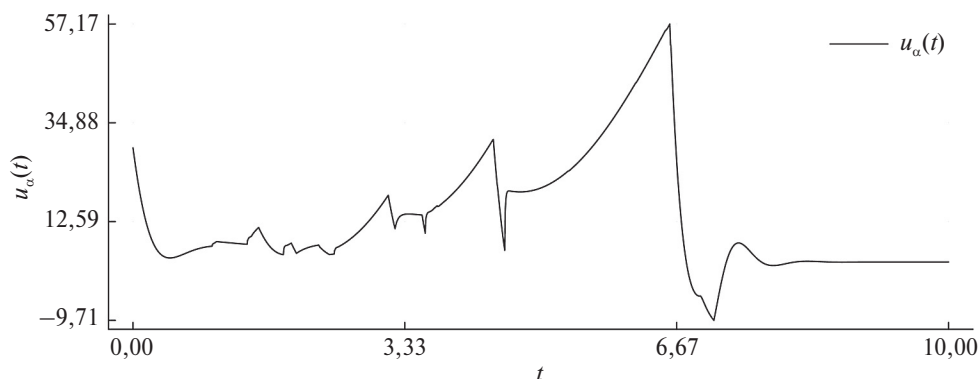


Рис. 5. График управления для ПИД-регулятора.

На рис. 3, 4 представлены траектории, соответствующие пяти «прогонам» системы (1) с одинаковыми параметрами, но при различных событиях переключений.

На рис. 3 проиллюстрирована стабилизация линейной скорости с одинаковыми отклонениями, связанными с погрузкой и разгрузкой грузов. На рис. 4,а представлена совокупность траекторий колебательного характера со средними значениями, стремящимися к  $\lambda$ . Рисунок 4,б демонстрирует графики угловой скорости конвейера, на которых также можно отметить отклонения, связанные с погрузкой и разгрузкой грузов. Рисунок 4,в показывает вариативность полученных траекторий по отношению к наступлению событий переключения режимов. На рис. 4,г можно наблюдать скачкообразные изменения, связанные с одномоментным изменением импульса системы (1) при разгрузке.

Следует отметить, что для ПИД-регулятора при выбранных факторах вычислительного эксперимента условия теоремы 1 выполняются, однако имеет место дефицит управления с невозможностью получения устойчивой отрицательной обратной связи в контуре управления.

На рис. 5 изображен график  $u_\alpha(t)$  для ПИД-регулятора. Согласно рис. 5, график управления расположен выше оси абсцисс, при этом отслеживаются точки устранимых разрывов.

Далее рассмотрим результаты моделирования динамики системы (1) на основе использования нейросетевого регулятора с нейросетью прямого распространения. На рис. 6 представлены результаты пяти «прогонов» системы (1), а также график управления.

Результаты показали, что нейросетевой регулятор демонстрирует значительно большую по сравнению с ПИД-регулятором эффективность при реализации управления моделью (1). Рисунки 6,а,б демонстрируют значительно меньшие отклонения от  $\lambda$  при погрузке и разгрузке грузов, однако рис. 6,в демонстрирует повторяемую картину переходного процесса независимо от

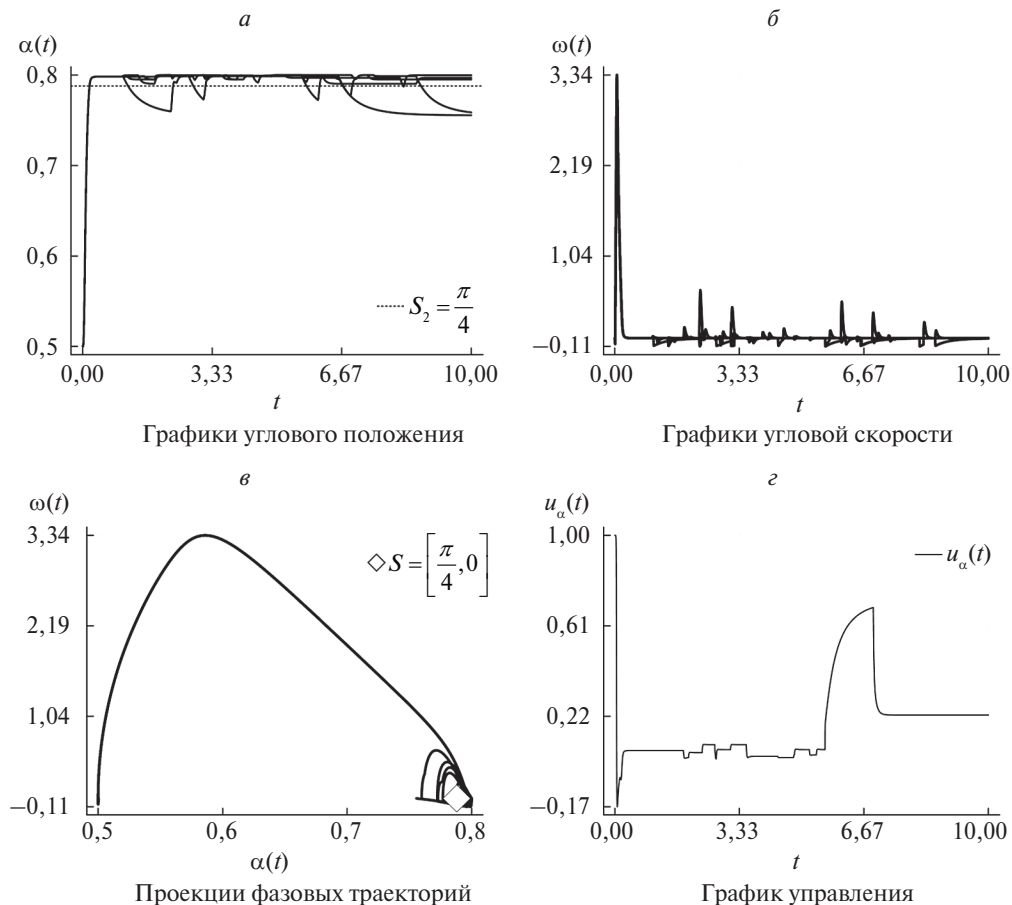


Рис. 6. Совокупность траекторий и управление для системы (1) с учетом реализации нейросетевого регулятора.

внешних условий для рекуррентного нейросетевого регулятора. Графики линейной скорости и импульса при реализации нейросетевого регулятора по своему характеру аналогичны графикам, представленным на рис. 3 и рис. 4, соответственно. Следует отметить, что при малых отрицательных значениях ошибки возникает недостаток обратной связи, при этом для нейросетевого регулятора также выполняются условия теоремы 1.

График управления для нейросетевого регулятора отличается от графика управления на основе ПИД-регулятора наличием отрицательных значений и сегментами постоянных положительных значений управления, что свидетельствует о более выраженной обратной связи.

Результаты моделирования с применением управления на основе рекуррентного нейросетевого регулятора представлены на рис. 7.

Согласно рис. 7, а, б рекуррентный нейросетевой регулятор демонстрирует наиболее высокую по сравнению с рассмотренными ранее регуляторами эф-

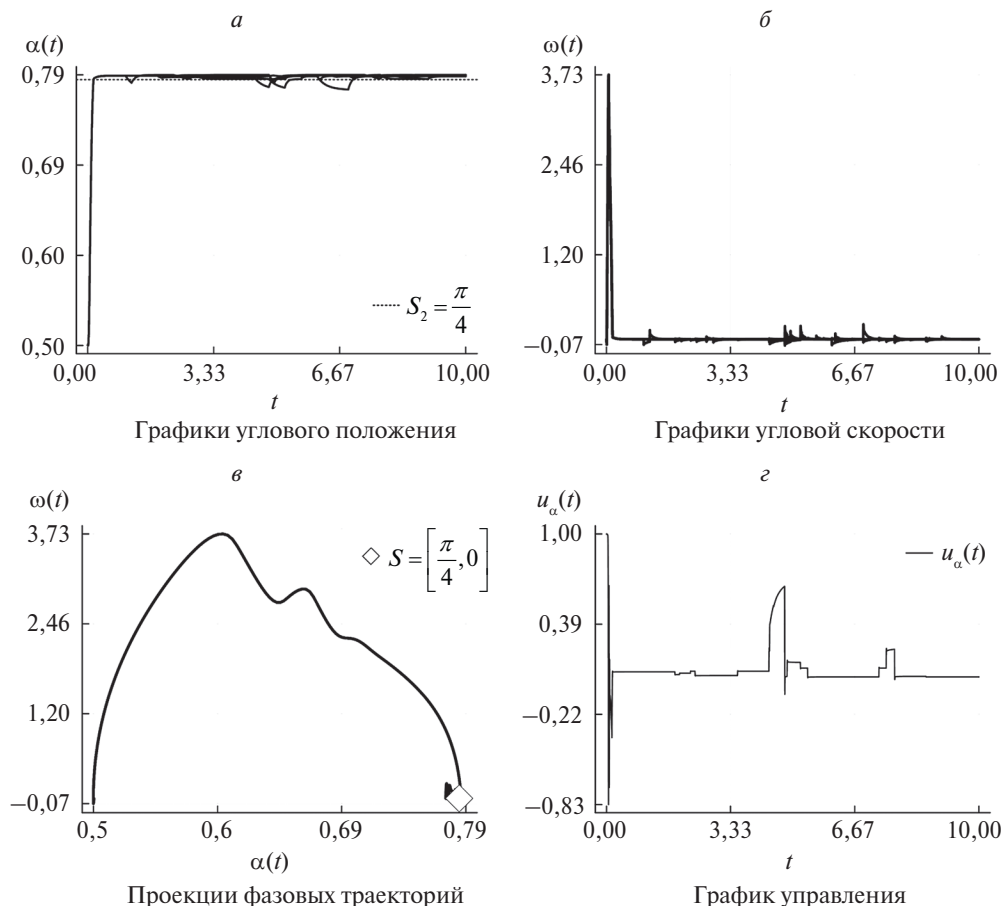


Рис. 7. Совокупность траекторий и управление для системы (1) с учетом реализации рекуррентного нейросетевого регулятора.

фektivность управления угловым положением конвейерной системы. Согласно графику углового положения динамика системы близка к стационарной вблизи ожидаемого состояния равновесия. Незначительный разброс траекторий связан с погрузкой и с разгрузкой грузов. Графики линейной скорости и импульса при реализации рекуррентного нейросетевого регулятора по своему характеру аналогичны графикам линейной скорости и импульса, полученным при реализации ПИД-регулятора и нейросетевого регулятора нерекуррентного типа. Рисунок 7,б демонстрирует незначительную вариативность, которая связана с погрузкой и разгрузкой грузов. На рис. 7,г представлен график управления для нейросетевого рекуррентного регулятора. В переходном процессе отмечаются высокочастотные осцилляции, на смену которым приходят стационарные режимы с преимущественно постоянными небольшими значениями управления.

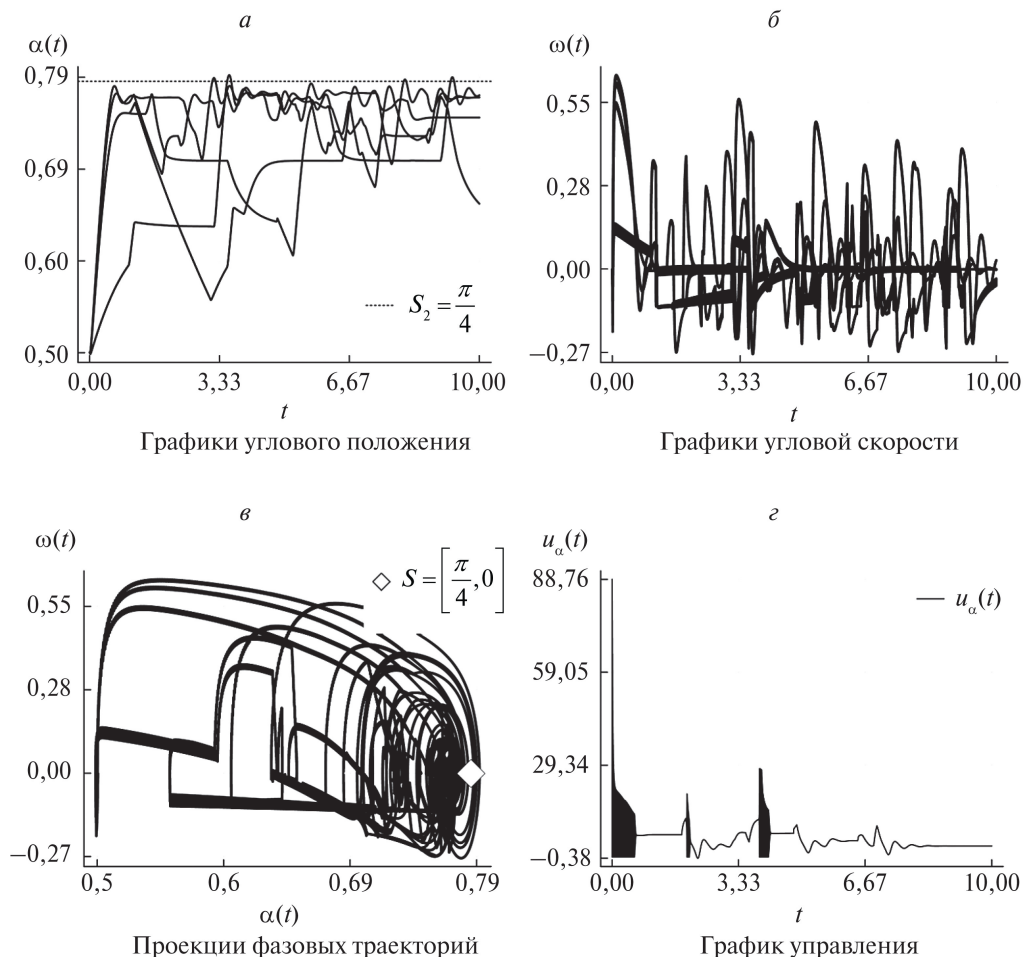


Рис. 8. Совокупность траекторий и управление для системы (1) с учетом реализации рекуррентного нейро-ПИД регулятора.

На рис. 8 приведены результаты моделирования для рекуррентного нейро-ПИД регулятора.

Согласно рис. 8, *a, б*, рекуррентный нейро-ПИД регулятор демонстрирует относительно невысокую эффективность управления (по сравнению с ПИД-регулятором, нейросетевым регулятором и рекуррентным нейросетевым регулятором). Наблюдается значительный дефицит обратной связи, при этом траектории системы существенно отдаляются от  $\lambda$  при погрузке и разгрузке грузов. Рисунок 8, *в* демонстрирует вариативность траекторий конвейерной системы при погрузке и разгрузке грузов. Графики линейной скорости и импульса при реализации рекуррентного нейро-ПИД регулятора по своему характеру аналогичны графикам линейной скорости и импульса, полученным при реализации ПИД-регулятора.

На рис. 8,2 можно отметить продолжительные высокочастотные колебания на графике управления, что свидетельствует о самовозбуждении в контуре обратной связи и низком уровне робастности управления. Тем не менее условия теоремы 1 с учетом применения указанного регулятора выполняются.

### 5. Сравнительный анализ эффективности синтезированных регуляторов

Средние значения критериев оптимальности и средневзвешенные значения ошибки приведены в таблице. Следует отметить, что критерий  $C_2$  может быть найден для каждого из рассматриваемых регуляторов, однако его информативность снижается в случае отсутствия данных о стабилизируемости системы в общем.

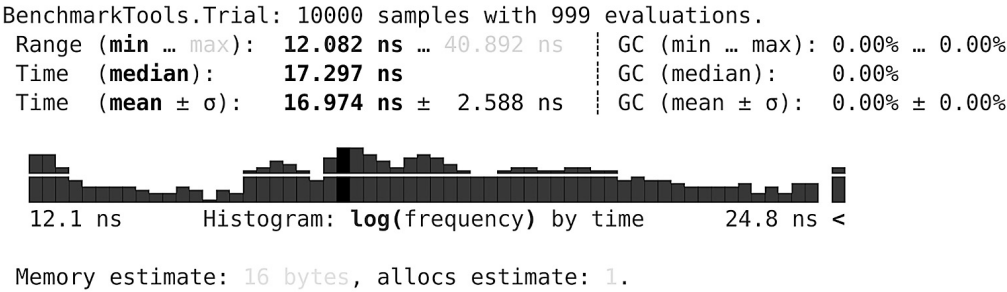


Рис. 9. Замеры быстродействия для ПИД-регулятора.

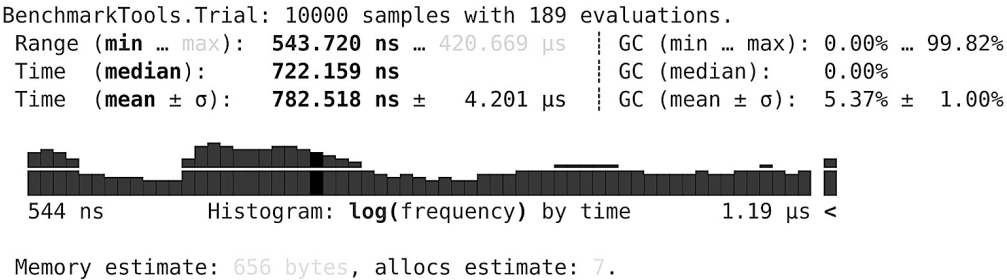


Рис. 10. Замеры быстродействия для нейросетевого регулятора.

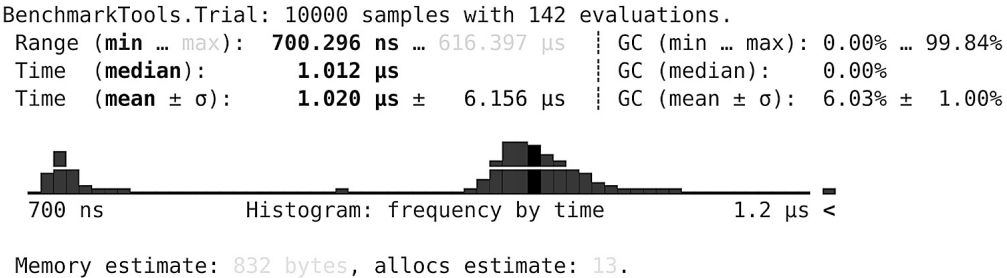


Рис. 11. Замеры быстродействия для нейро-ПИД регулятора.



Средние значения критериев оптимальности и средняя ошибка для различных типов регуляторов

| Тип регулятора                      | $C_1$  | $C_2$  | Среднее<br>( $\text{mean}(e(t))$ ) |
|-------------------------------------|--------|--------|------------------------------------|
| ПИД-регулятор                       | 1,7412 | 0,3654 | 0,0022                             |
| Нейросетевой регулятор              | 0,4906 | 0,1333 | −0,0033                            |
| Рекуррентный нейросетевой регулятор | 0,3632 | 0,0597 | −0,0012                            |
| Нейро-ПИД регулятор                 | 1,2762 | 0,6517 | 0,0648                             |

Согласно таблице, наибольшую эффективность демонстрирует рекуррентный нейросетевой регулятор, так как имеет наименьшие значения всех трех показателей. Также следует отметить различное максимальное быстродействие регуляторов при реализации в виде компьютерных программ. Замеры производительности с помощью библиотеки BenchmarkTools представлены на рис. 9–11 (конфигурация ЭВМ: CPU AMD Ryzen 5 5600X, RAM 16GB).

На рис. 9–11 через (min ... max) обозначен диапазон времени выполнения, через (median) обозначено медианное время выполнения, ( $\text{mean} \pm \sigma$ ) показывает среднее время со среднеквадратическим отклонением, GC показывает процентное влияние на время при выполнении сборки мусора. Можно отметить, что ПИД-регулятор демонстрирует значительно большее максимальное быстродействие, чем нейросетевой и нейро-ПИД регуляторы. Однако следует отметить, что все виды регуляторов имеют максимальное быстродействие не менее одного миллиона подсчетов в секунду для рассматриваемой конфигурации ЭВМ.

Быстродействие разработанных регуляторов имеет существенное значение при решении таких задач, как задачи эффективной реализации указанных регуляторов в виде встраиваемых устройств и задачи увеличения эффективности алгоритмов обучения с подкреплением.

### 6. Обсуждение результатов

В рамках настоящей работы выполнена оценка влияния шага интегрирования и периода управления на точность расчетов и эффективность синтезированных регуляторов. Осуществлен выбор подходящего шага интегрирования и периода управления с учетом результатов предварительных экспериментов. Подобранный шаг интегрирования позволил выявить эффекты, связанные с точностью моделирования управляемой конвейерной системы. Структуру управления для нейросетевого регулятора можно визуализировать в виде тепловой карты, поскольку в указанном типе регулятора отсутствует интегральный компонент. Тепловая карта приведена на рис. 12.

Согласно рис. 12, значения управления для нейросетевого регулятора образуют такие две области со значениями −1 и 1, которые разделены криволинейной границей с нечетким переходом. Указанная граница образует допусти-

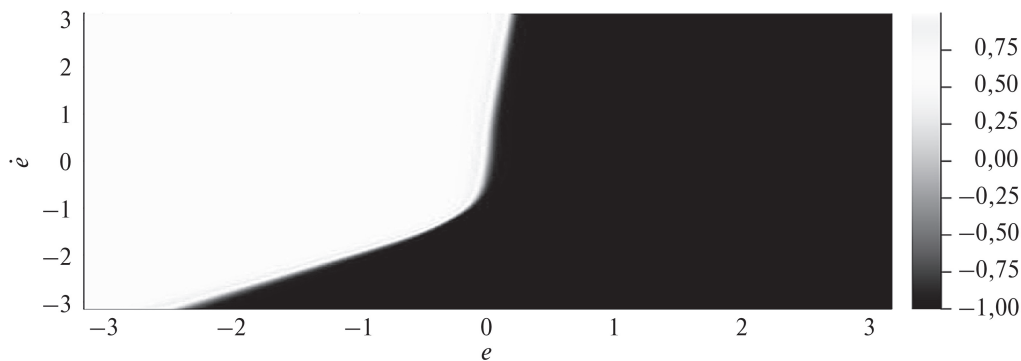


Рис. 12. Тепловая карта значений нейросетевого регулятора.

мые значения переменной управления (согласно рис. 6,з), что свидетельствует о принадлежности значений  $e$  и  $\dot{e}$  этой границе при наличии эффективного управления.

Результаты вычислительных экспериментов, представленные на рис. 3–8, показывают, что среди синтезированных регуляторов наиболее эффективным является рекуррентный нейросетевой регулятор, что подтверждается наименьшими значениями  $C_1$ ,  $C_2$  (см. таблицу). Нейросетевой регулятор прямого распространения также показывает достаточно высокую эффективность по сравнению с ПИД-регулятором и нейро-ПИД регулятором, однако характеризуется более высокими значениями  $C_1$ ,  $C_2$ , чем рекуррентный нейросетевой регулятор. ПИД-регулятор демонстрирует ограниченные возможности по стабилизации системы (1), поскольку быстрые события погрузки и разгрузки приводят к возникновению продолжительного переходного процесса, что дестабилизирует динамику системы. Нейро-ПИД регулятор показал недостаточную эффективность при стабилизации системы (1), средняя ошибка имеет большое положительное значение ( $\text{mean}(e(t)) = 0,05$ ), что свидетельствует о дефиците регулирования даже в отсутствие дестабилизирующих событий. Однако следует отметить, что среднее значение  $C_1$  для нейро-ПИД регулятора ниже аналогичного значения для ПИД-регулятора.

Условия стабилизации, предложенные в теоремах 1 и 2, использованы при интерпретации результатов функционирования ПИД-регулятора и нейросетевых регуляторов различных типов для системы (1). Указанные условия могут служить в качестве методического обеспечения при проведении дальнейших исследований в области разработки новых алгоритмов и синтеза новых интеллектуальных регуляторов.

Для выполнения вычислительных экспериментов использовано программное обеспечение на языке Julia. Разработка указанного программного обеспечения осуществлена с привлечением библиотек DifferentialEquations, Plots, BlackBoxOptim, а также оригинальной библиотеки нейросетевых вычислений.

## 7. Заключение

В настоящей работе представлено развитие подхода к моделированию и стабилизации систем конвейерного транспорта с интеллектуальным управлением. Дано формализованное описание математической модели управляемого ленточного конвейера с переменным углом подъема. Сформулирована и решена в практически важных частных случаях задача оптимального управления перемещением ленты и угловым положением конвейера. Условия стабилизации описанной модели разработаны с учетом имитационных компонентов, отвечающих за логику погрузки и разгрузки конвейерной ленты. Синтез алгоритмических и интеллектуальных регуляторов, а также выбор условий проведения вычислительных экспериментов позволили выполнить интерпретацию результатов и описать новые качественные эффекты для технических систем конвейерного транспорта.

Проведенные исследования показали, что нейросетевые регуляторы различных типов для модели конвейерного транспорта с переключениями обладают значительными возможностями по адаптивности управления. В частности, указанные типы регуляторов «подстраиваются» под изменение коэффициента усиления в контуре управления и под изменение периода управления  $\Delta t$ , стабилизируя систему (1). Кроме того, важным аспектом является то, что наиболее высокая эффективность обучения нейросети достигается при недостаточно большом значении коэффициента усиления, повышение которого после обучения улучшает качество управления. При этом нейросеть рекуррентного типа не содержит интегральных компонентов ошибки (в отличие от ПИД-регулятора), однако успешно справляется с задачей управления системой (1).

Результаты сравнения эффективности предложенных в работе интеллектуальных и алгоритмических регуляторов могут найти применение в задачах проектирования и оптимизации новых систем конвейерного транспорта, а также при проектировании других типов управляемых технических систем. К перспективным направлениям работы относятся построение и анализ моделей более сложных управляемых конвейерных систем с динамическим позиционированием (например, моделей многозвенных конвейерных систем или конвейерных систем с подвижным основанием). Кроме того, к перспективам развития работы можно отнести обобщение модели с целью расширения имитационной части и усовершенствование логики переключений, а также построение новых типов гибридных интеллектуальных регуляторов для достижения более высокой эффективности и быстродействия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зюзичева Ю.Е.* Модель ленточного конвейера, расположенного под углом к горизонту. Определение оптимального для переходного процесса угла наклона // Горн. информ.-анал. бюлл. 2006. №. 7. С. 212–216.
2. *Дмитриев В.Г., Вержанский А.П.* Основы теории ленточных конвейеров. М.: Изд-во «Горная книга», 2017.

3. *Subba Rao D.V.* The belt conveyor: a concise basic course. London, New York: CRC Press, 2020. <https://doi.org/10.1201/9781003089315>
4. *Zhao L., Lyn Y.* Typical failure analysis and processing of belt conveyor // *Procedia Engineering*. 2011. V. 26. P. 942–946.
5. *Andrejiova M., Grincova A., Marasova D.* Monitoring dynamic loading of conveyer belts by measuring local peak impact forces // *Measurement*. 2020. V. 158. P. 107690. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2020.107690>
6. *Andrejiova M., Grincova A., Marasova D.* Measurement and simulation of impact wear damage to industrial conveyor belts // *Wear*. 2016. V. 12. P. 368–369. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2016.10.010>
7. *Дмитриева В.В., Сизин П.Е.* Непрерывное регулирование скорости ленточного конвейера в случае усеченной спектральной плотности грузопотока // *Горн. информ.-анал. бюлл.* 2020. № 2. С. 130–138.
8. *Дмитриева В.В., Авхадиев И.Ф., Сизин П.Е.* Использование современных программно-технических комплексов для автоматизации конвейерных линий // *Горн. информ.-анал. бюлл.* 2021. № 2. С. 150–163. <https://doi.org/10.25018/0236-1493-2021-2-0-150-163>.
9. *Дмитриева В.В.* Современные задачи автоматизации ленточного конвейерного транспорта // *Горн. информ.-анал. бюлл.* 2013. № 1. С. 281–286.
10. *Listova M.A., Dmitrieva V.V., Sizin P.E.* Reliability of the belt conveyor bed when restoring failed roller supports // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2021. V. 942. P. 012002.
11. *Bebic M., Ristic L.* Speed Controlled belt conveyors: drives and mechanical considerations // *Advanc. Electr. Comput. Engin.* 2018. V. 18. No. 1. P. 51–60. <https://doi.org/10.4316/AECE.2018.0>
12. *Kozhubaev Y.N., Semenov I.M.* Belt conveyor control systems // *Sci. Tech. Bull. St. Petersburg State Polytech. Univ.* 2014. V. 2. No. 195. P. 181–186.
13. *Ma M.X., Gao X.X.* Coal belt conveyor PID controller parameter regulation with neural network // *Appl. Mech. Mater.* 2013. V. 319. P. 583–589.
14. *Farouq O., Selamat H., Noor S.* Intelligent modeling and control of a conveyor belt grain dryer using a simplified type 2 neuro-fuzzy controller drying // *Technology*. 2015. V. 33. No. 10. P. 1210–1222.
15. *Lu Y., Liu B., Liu N., Zhao M.* Design of automatic speed control system of belt conveyor based on image recognition // *IEEE 2020 3rd International Conference on Artificial Intelligence and Big Data (ICAIBD)*, Chengdu, China, 2020. P. 227–230. <https://doi.org/10.1109/icaibd49809.2020.9137440>
16. *Aliworom C., Uzoechi L., Olubiwe M.* Design of Fuzzy Logic Tracking Controller for Industrial Conveyor System // *Int. J. Engin. Trend Technol.* 2018. V. 61. P. 64–71. <https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V61P211>.
17. *Khalid H.* Implementation of artificial neural network to achieve speed control and power saving of a belt conveyor system // *East.-Eur. J. Enterp. Technol.* 2021. V. 2. P. 44–53.
18. *Zvirblis T., Petkevicius L., Bzinkowski D., Vaitkus D., Vaitkus P., Rucki M., Kilikevicius A.* Investigation of deep learning models on identification of minimum signal length for precise classification of conveyor rubber belt loads // *Advanc. Mech. Engin.* 2022. V. 14. P. 168781322211027. <https://doi.org/10.1177/16878132221102776>.

19. Фуртат И.Б., Жуков Ю.А., Коротков Е.Б., Пряничников Р.А. Адаптивное нейросетевое управление универсальным мехатронным модулем космического назначения // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. 2023. № 3. С. 41–50.
20. Трофимов В.Б., Кулаков С.М. Интеллектуальные автоматизированные системы управления технологическими объектами. Издание 2-е, испр. М.: Инфра-Инженерия, 2020.
21. Liberzon D. Switching in Systems and Control. Cham: Springer Science & Business Media, 2012.
22. Li Z., Soh Y., Wen C. Switched and impulsive systems: Analysis, design and applications. Berlin: Springer, 2005.
23. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Компьютерная технология синтеза оптимальных линейных переключаемых систем // Вест. комп. информ.технол. 2019. №11. С. 13–22.
24. Александров А.Г., Паленов М.В. Состояние и перспективы развития адаптивных ПИД-регуляторов // АиТ. 2014. № 2. С. 16–30.
25. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // АиТ. 2022. № 11. С. 62–82.
26. Емельянов С.В. Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970.
27. Geromel J.C., Colaneri P. Stability and stabilization of discrete time switched systems // Int. J. Control. 2006. V. 79. No. 7. P. 719–728.  
<https://doi.org/10.1080/00207170600645974>
28. Каменецкий В.А. Частотные условия устойчивости дискретных систем с переключениями // АиТ. 2018. № 8. С. 3–26.
29. Васильев С.Н., Маликов А.И. О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. Казань: Фолиант, 2011. Т. 1. С. 23–81.
30. Саймон Д. Алгоритмы эволюционной оптимизации. М.: ДМК Пресс, 2020.
31. Ahmad M.F., Mat Isa N.A., Lim W.H., Ang K.M. Differential evolution: A recent review based on state-of-the-art works // Alexandria Engin. J. 2022. V. 61. P. 3831–3872. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.09.013>.
32. Lee D., Seo H., Jung M.W. Neural basis of reinforcement learning and decision making // Ann. Rev. Neurosci. 2012. V. 35. No. 1. P. 287–308.
33. Mckinney W. Python for Data Analysis, 2e: Data Wrangling with Pandas, Numpy, and Ipython. Boston: OReilly, 2017.
34. Bezanson J., Edelman A., Karpinski S., Shah V.B. Julia: A fresh approach to numerical computing // SIAM Rev. 2017. V. 59. No. 1. P. 65–98.
35. Kiam H.A., Chong G., Yun L. PID control system analysis, design, and technology // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2005. V. 13. No. 4. P. 559–576. <https://doi.org/10.1109/TCST.2005.847331>. S2CID 921620
36. Bansal H., Sharma R., Ponpathirkoottam S. PID Controller Tuning Techniques: A Review // J. Control Engin. Techn. 2012. V. 2. P. 168–176.
37. Демин И.О., Саблина Г.В. Исследование методов настройки параметров пид-регулятора // Автоматика и программная инженерия. 2020. № 1 (31). С. 174–181.
38. Шубладзе А.М., Гуляев С.В., Кузнецов С.И., Малахов В.А., Ольшванг В.Р. Обзор работы ПИ- и ПИД- регуляторов в режимах интегрального насыщения // Автоматизация в промышленности. 2008. № 8. С. 6–9.

39. *Xianmin M., Xiongxiang G.* Coal belt conveyor PID controller parameter regulation with neural network // *Applied Mechanics and Materials*. 2013. V. 315. P. 583–589.
40. *Druzhinina O.V., Masina O.N., Petrov A.A.* Modeling of the belt conveyor control system using artificial intelligence methods // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. V. 2001. P. 012011. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2001/1/012011>
41. *Masina O.N., Druzhinina O.V., Petrov A.A.* Controllers synthesis for computer research of dynamic conveyor belt model using intelligent algorithms // *Lecture Notes in Networks and Systems (LNNS)*, Springer. 2022. V. 502. P. 462–473. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-09076-9\\_41](https://doi.org/10.1007/978-3-031-09076-9_41)
42. *Petrov A.A., Druzhinina O.V., Masina O.N.* Neural network control of a belt conveyor model with a dynamic angle of elevation // *Lecture Notes in Networks and Systems (LNNS)*, Springer. 2023. V. 724. P. 733–746. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-35314-7\\_61](https://doi.org/10.1007/978-3-031-35314-7_61)

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.*

Поступила в редакцию 16.05.2024

После доработки 19.08.2024

Принята к публикации 20.09.2024

## Заметки, хроника, информация



### 90 ЛЕТ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ВЛАДИМИРА ИОСИФОВИЧА ГУРМАНА

26 сентября 2024 г. исполнилось 90 лет со дня рождения доктора технических наук, профессора Владимира Иосифовича Гурмана (26 сентября 1934 г. – 8 июня 2016 г.), известного советского и российского ученого, крупного специалиста по математической теории оптимального управления и ее приложениям, автора и соавтора ряда статей, опубликованных в журнале “Автоматика и телемеханика” в течение многих десятилетий. Владимир Иосифович был членом редколлегии этого журнала. В.И. Гурман внес большой вклад в математическую теорию оптимального управления и ее приложения, работал в ВУЗах и научных учреждениях разных городов (Москва, Иркутск, Переславль-Залесский, Улан-Удэ), подготовил ряд кандидатов и докторов наук. Научно-исследовательской и педагогической деятельности Владимира Иосифовича посвящены статьи [1–5], причем в статьях [2, 5] приведены списки публикаций, где Владимир Иосифович является автором или соавтором.

Более 50 лет назад вышли книги [6, 7], где Владимир Иосифович является соавтором. Эти книги дают как фундаментальные результаты по теории оптимального управления, так и соответствующие результаты по математи-



ческим моделям управления динамикой полета (о Вадиме Федоровиче Кротове, являющемся первым автором, см. в [8]). В последующие годы вышли монографии [9] (1977 г.), [10] (1985 г.), [11] (1997 г.) Владимира Иосифовича, а также книги [12–17] в соавторстве. В работах Владимира Иосифовича и соавторов гармонично сочетаются разные направления: по преобразованию задач оптимального управления, условиям оптимальности, методам оптимизации, аналитическому исследованию задач, математическому моделированию (в частности, эколого-экономические задачи в [10, § 5.5] применительно к Байкальскому региону, задачи квантового управления [10, § 5.4], [18]).

Еще недавно Владимир Иосифович был активным организатором научных симпозиумов “Обобщенные постановки и решения задач управления” [19, 20]. Последними были статьи [21, 22], посвященные важным вопросам теории оптимального управления. Владимир Иосифович останется в памяти научного сообщества как один из основных создателей теории вырожденных задач оптимального управления и в прикладном аспекте как один из ведущих специалистов по математическим моделям управления в динамике полета и региональными социо-эколого-экономическими системами. Светлая память об юбиляре будет и дальше в сердцах его учеников, коллег, последователей. Молодым ученым, которые специализируются по теории оптимального управления и ее приложениям и еще не читали работы В.И. Гурмана, В.Ф. Кротова, рекомендуем начать с книги [7].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимир Иосифович Гурман (к 80-летию со дня рождения) // *АиТ*. 2014. № 9. С. 156–157. <https://www.mathnet.ru/rus/at14127>
2. Памяти профессора Владимира Иосифовича Гурмана // *Программные системы: теория и приложения*. 2016. Т. 7, № 3. С. 109–131. <https://www.mathnet.ru/rus/ps227>
3. Гурман Владимир Иосифович (26.09.1934 – 08.06.2016) // *Вест. Бурят. гос. ун-та. Математика, информатика*. 2016. Вып. 3. С. 100–102. <https://vestnikmi.bsu.ru/content/articles/554.pdf>
4. Памяти профессора Владимира Иосифовича Гурмана (1934–2016) / Аргучинцев А.В., Бычков И.В., Батулин В.А. и др. // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия “Математика”*. 2017. Т. 19. С. 1–5. <https://www.mathnet.ru/rus/iigum283>
5. *Дыхта В.А.* Научное творчество В.И. Гурмана // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия “Математика”*. 2017. Т. 19. С. 6–21. <https://www.mathnet.ru/rus/iigum284>
6. *Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.: Машиностроение, 1969. <https://search.rsl.ru/ru/record/01007419460>  
*Krotov V.F., Bukreev V.Z., Gurman V.I.* New Variational Methods in Flight Dynamics / Transl. from Russian. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1971.
7. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. <https://search.rsl.ru/ru/record/01007419459>
8. *Хрусталева М.М.* 90 лет со дня рождения Вадима Федоровича Кротова // *АиТ*. 2022. № 5. С. 164–168. <https://www.mathnet.ru/rus/at15961>



9. *Гурман В.И.* Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1977. <https://search.rsl.ru/ru/record/01007669258>
10. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001263307>
11. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, Физматлит, 1997. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001794491>
12. *Гурман В.И., Батулин В.А., Расина И.В.* Приближенные методы оптимального управления. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001196660>
13. Новые методы улучшения управляемых процессов / В.И. Гурман, В.А. Батулин, Е.В. Данилина и др.; отв. ред. А.И. Москаленко. Новосибирск: Наука: Сиб. отд-ние, 1987.
14. Методы улучшения в вычислительном эксперименте / В.И. Гурман, В.А. Батулин, А.И. Москаленко и др.; отв. ред. В.А. Дыхта, А.И. Тятюшкин. Новосибирск: Наука: Сиб. отд-ние, 1988. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001415425>
15. Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения / В.А. Батулин, В.А. Дыхта, А.И. Москаленко и др.; отв. ред. В.И. Гурман, Г.Н. Константинов. Новосибирск: Наука, 1990. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001574445>
16. Моделирование социо-эколого-экономической системы региона / О.Ф. Балацкий, Д.В. Бelyшев, В.И. Гурман и др.; под ред. В.И. Гурмана, Е.В. Рюминой. М.: Наука, 2003. <https://search.rsl.ru/ru/record/01002400276>
17. *Гурман В.И., Трушкова Е.А.* Практические методы оптимизации: Учебно-методическое пособие. Переславль-Залесский: Ун-т г. Переславля, 2009. <https://search.rsl.ru/ru/record/01004650750>
18. *Гурман В.И., Расина И.В.* Оптимизация процессов в спиновой цепочке // *АиТ*. 2014. № 12. С. 153–159. <https://www.mathnet.ru/rus/at14168>  
*Gurman V.I., Rasina I.V.* Optimization of processes in a spin chain // *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. No. 12. P. 2212–2216. <https://doi.org/10.1134/S0005117914120108>
19. *Булдаев А.С., Гурман В.И.* Обобщенные постановки и решения задач управления // *АиТ*. 2011. № 6. С. 3–4. <https://www.mathnet.ru/rus/at2219>  
*Buldaev A.S., Gurman V.I.* Generalized statements and solutions of control problems // *Autom. Remote Control*. 2011. V. 72. No. 6. P. 1141–1142. <https://doi.org/10.1134/S0005117911060014>
20. *Рубинович Е.Я., Моржсин О.В.* VI Международный научный семинар “Обобщенные постановки и решения задач управления” (GSSCP-2012) // *АиТ*. 2013. № 12. С. 3–4. <https://www.mathnet.ru/rus/at6167>
21. *Гурман В.И.* Некоторые проблемы теории оптимального управления // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия “Математика”*. 2017. Т. 19. С. 26–43. <https://www.mathnet.ru/rus/iigum285>
22. *Гурман В.И., Хрусталева М.М.* Анормальность в теории необходимых условий оптимальности // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия “Математика”*. 2017. Т. 19. С. 44–61. <https://www.mathnet.ru/rus/iigum286>

*Редколлегия*

*Расина И.В., д-р физ.-мат. наук*  
*Моржсин О.В., канд. физ.-мат. наук*

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### Линейные системы

|                                                                                                                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Ибрагимов Д.Н., Царьков К.А.</b> Об одном подходе к решению задачи быстрого действия для линейных систем с дискретным временем на основе метода Кротова.....    | 3  |
| <b>Маргун А.А., Буй В.Х., Бобцов А.А.</b> Диагностирование параметрически неопределенных систем с произвольной относительной степенью при неизмеряемом входе ..... | 36 |

### Стохастические системы

|                                                                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Вайцюлис М., Маркович Н.М.</b> Исследование количества треугольников в графах, эволюционирующих кластерным присоединением ..... | 56 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

### Управление в технических системах

|                                                                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Верба В.С., Меркулов В.И.</b> Подходы к оптимизации методов наведения на высокоскоростные интенсивно маневрирующие цели. Ч. 1 ..... | 73 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

### Интеллектуальные системы управления, анализ данных

|                                                                                                                                                  |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Дружинина О.В., Петров А.А., Масина О.Н.</b> Моделирование и стабилизация систем конвейерного транспорта с интеллектуальным управлением ..... | 81 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

### Заметки, хроника, информация

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| 90 лет со дня рождения Владимира Иосифовича Гурмана ..... | 102 |
|-----------------------------------------------------------|-----|

## **C O N T E N T S**

### **Linear Systems**

- Ibragimov D.N., Tsarkov K.A.** On an Approach to Solving the Time-Optimization Problem for Linear Discrete-Time Systems Based on Krotov Method.....3
- Margun A.A., Van Huan Bui, Bobtsov A.A.** Diagnosis of Uncertain Systems with Arbitrary Relative Degree and Unknown Input ..... 36

### **Stochastic Systems**

- Vaičiulis M., Markovich N.M.** Investigation of Triangle Counts in Graphs Evolved by Clustering Attachment ..... 56

### **Control in Technical Systems**

- Verba V.S., Merkulov V.I.** Approaches to Optimization of Guidance Methods for High-Speed Intensely Maneuvering Targets. Part 1. Justification of Requirements for Ways of Optimization of Guidance Methods.....73

### **Intellectual Control Systems, Data Analysis**

- Druzhinina O.V., Petrov A.A., Masina O.N.** Modeling and Stabilization of Conveyor Transport Systems with Intelligent Control ..... 81

### **Notes, Meetings, Information**

- 90th Anniversary of the Birth of Vladimir Iosifovich Gurman ..... 102