

ISSN 0005-2310

А Т ВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА



8

2023



АТ АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

8

АВГУСТ

Москва

2023

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»

© 2023 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
“Московский физико-технический институт”)

СИНТЕЗ ПИ-РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ¹

Предлагается новый подход к задаче подавления ограниченных внешних возмущений в линейных системах управления при помощи ПИ-регулятора. Подход основан на сведении проблемы к задаче невыпуклой матричной оптимизации. Выписан градиентный метод для отыскания параметров ПИ-регулятора и дано его обоснование. Предлагаемая рекуррентная процедура является весьма эффективной и приводящей к вполне удовлетворительным по инженерным критериям качества регулятором. Статья продолжает серию работ автора, посвященную синтезу обратной связи в задачах управления с позиций оптимизации.

Ключевые слова: линейная система, внешние возмущения, ПИ-регулятор, оптимизация, уравнение Ляпунова, градиентный метод, метод Ньютона, сходимость.

DOI: 10.31857/S0005231023080019, EDN: HAEJXC

1. Введение

В недавней статье [1] был предложен новый — оптимизационный — подход к классической задаче подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений, которая ставится следующим образом. Рассмотрим линейную систему управления

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Dw, & x(0) &= x_0, \\ y &= C_1x, \\ z &= C_2x + B_1u\end{aligned}$$

с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, измеряемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}^l$, регулируемым выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$, управлением $u(t) \in \mathbb{R}^p$ и измеримым по t внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:

$$(1) \quad |w(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

¹ Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30005), <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>.

Задача заключается в выборе стабилизирующего управления в форме обратной связи по состоянию $u = Kx$ или по выходу $u = Ky$ (если оно существует) так, чтобы уменьшить “пик” выхода $z(t)$, т.е. величину $\max_t |z(t)|$.

В рамках предложенного в [1] подхода исходная задача была сведена к задаче невыпуклой матричной оптимизации, выписан градиентный метод для отыскания статической обратной связи по состоянию или выходу системы и дано его обоснование.

С другой стороны, в работе [2] оптимизационный подход, восходящий к [3], был применен к задаче синтеза ПИД-регуляторов: был предложен регулярный подход к отысканию его параметров, предполагающий решение задачи невыпуклой матричной оптимизации. При этом качество регулятора оценивалось по квадратичному критерию от выхода системы: регулятор настраивался против неопределенности в начальных условиях так, чтобы выход системы был равномерно малым. Предложенная рекуррентная процедура оказалась весьма эффективной и приводящей к регуляторам, вполне удовлетворительным по инженерным критериям качества.

Настоящая статья продолжает обе эти линии исследований: в ней решается задача синтеза ПИ-регулятора для подавления ограниченных внешних возмущений в линейных системах управления как задача оптимизации.

Всюду далее $|\cdot|$ — евклидова норма вектора, $\|\cdot\|$ — спектральная норма матрицы, $\|\cdot\|_F$ — фробениусова норма матрицы, T — символ транспонирования, tr — след матрицы, I — единичная матрица соответствующей размерности, $\lambda_i(A)$ — собственные значения матрицы A .

2. Постановка задачи и метод инвариантных эллипсоидов

Рассмотрим линейную непрерывную систему управления

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu + Dw, & x(0) &= x_0, \\ y &= c^T x, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}$, регулируемым выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$, внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению (1), и управлением $u(t) \in \mathbb{R}$ в виде ПИ-регулятора

$$(3) \quad u(t) = -k_P y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

Целью является нахождение числовых параметров k_P и k_I регулятора (3), который стабилизирует замкнутую систему и подавляет воздействие внешних возмущений w , минимизируя размер ограничивающего эллипсоида для выхода z .

Напомним концепцию метода инвариантных эллипсоидов (подробнее см. [4, 5]). Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ z &= Cx \end{aligned}$$

с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$ и внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^l$, удовлетворяющим ограничению (1). Система (4) предполагается устойчивой (т.е. матрица A гурвицева), пара (A, D) управляема.

Эллипсоид с центром в начале координат будем называть *инвариантным* для системы (4), если любая ее траектория, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде, в любой момент времени остается в этом эллипсоиде при всех допустимых внешних возмущениях, действующих на систему.

Оценивая влияние внешних возмущений на вектор выхода системы, естественно интересоваться минимальными (в том или ином смысле) эллипсоидами, содержащими выход системы. Нетрудно видеть, что если эллипсоид

$$(5) \quad \mathcal{E}_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^n: \quad x^T P^{-1} x \leq 1 \right\}, \quad P \succ 0,$$

инвариантный, то выход системы (4) при $x_0 \in \mathcal{E}_x$ принадлежит так называемому *ограничивающему* эллипсоиду

$$(6) \quad \mathcal{E}_z = \left\{ z \in \mathbb{R}^p: \quad z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1 \right\}.$$

В литературе в качестве критерия его минимальности часто рассматривается линейная функция $f(P) = \text{tr} CPC^T$, равная сумме квадратов полуосей ограничивающего эллипсоида.

В [6] был установлен критерий инвариантности эллипсоида в терминах линейных матричных неравенств; приведем его в следующей формулировке (см. [4]).

Теорема 1. Пусть матрица A гурвицева, пара (A, D) управляема, а матрица $P(\alpha) \succ 0$ удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$\left(A + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left(A + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{1}{\alpha} DD^T = 0$$

на интервале $0 < \alpha < 2\sigma(A)$.

Тогда задача о минимальном ограничивающем эллипсоиде сводится к минимизации одномерной функции $f(\alpha) = \text{tr} CP(\alpha)C^T$ на интервале $0 < \alpha < 2\sigma(A)$ и, если α^ — точка минимума и x_0 удовлетворяет условию $x_0^T P^{-1}(\alpha^*) x_0 \leq 1$, то гарантируется равномерная оценка*

$$|z(t)| \leq \sqrt{f(\alpha^*)}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

3. Подход к решению

Введем в рассмотрение вспомогательную скалярную переменную ξ следующим образом:

$$\dot{\xi} = y, \quad \xi(0) = 0.$$

Тогда, вводя расширенный вектор состояния

$$g = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

систему (2) можно записать в виде

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{g} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix} g + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} w, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ y &= (c^T \ 0) g. \end{aligned}$$

При этом согласно (2), (3) имеем

$$(8) \quad \begin{aligned} u &= -k_P y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau = -k_P c^T x - k_I \xi = \\ &= -k_P c^T x - k_I \xi = -k_P (c^T \ 0) g - k_I (0 \ 1) g. \end{aligned}$$

Для удобства переобозначим $k_1 = k_P$, $k_2 = k_I$, тогда (8) примет вид

$$(9) \quad u = - (k_1 c^T \ k_2) g.$$

Итак, замыкая систему (7) обратной связью (9), приходим к замкнутой системе

$$\dot{g} = \begin{pmatrix} A - k_1 b c^T & -k_2 b \\ c^T & 0 \end{pmatrix} g + \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} w, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которой можно придать вид

$$\dot{g} = (\mathcal{A}_0 + k_1 \mathcal{A}_1 + k_2 \mathcal{A}_2) g + \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} w, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} -b c^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следуя методу инвариантных эллипсоидов, заключим состояние g системы (7) в инвариантный эллипсоид (5), порожденный матрицей $P \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, и будем минимизировать размер соответствующего ограничивающего эллипсоида (6) по выходу

$$z = Cx = (C \ 0) g.$$

В соответствии с теоремой 1 приходим к задаче минимизации $\text{tr}(C \ 0)P(C \ 0)^T$ при ограничении

$$(10) \quad \left(\mathcal{A}_0 + k_1 \mathcal{A}_1 + k_2 \mathcal{A}_2 + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left(\mathcal{A}_0 + k_1 \mathcal{A}_1 + k_2 \mathcal{A}_2 + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0$$

относительно матричных переменных $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, скалярных переменных k_1, k_2 и скалярного параметра $\alpha > 0$. Поскольку при заданных k_1, k_2 и α матрица P находится из уравнения (10), то независимыми переменными являются k_1, k_2 и α .

Введем в рассмотрение вектор

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

и в качестве критерия качества примем величину

$$\text{tr} (C \ 0) P (C \ 0)^T + \rho |k|^2, \quad \rho \ll 1.$$

Его вторая компонента представляет собой штраф за величину управления (коэффициент $\rho > 0$ регулирует его важность) и обеспечивает коэрцитивность минимизируемой функции по k (см. раздел 5).

Окончательно, исходная задача о синтезе ПИ-регулятора, подавляющего внешние возмущения, свелась к матричной оптимизационной задаче

$$(11) \quad \min f(k, \alpha), \quad f(k, \alpha) = \text{tr} P (C \ 0)^T (C \ 0) + \rho |k|^2$$

при ограничении (10).

4. Оптимизация функции $f(\alpha)$

Рассмотрим задачу

$$\min f(\alpha), \quad f(\alpha) = \text{tr} P C^T C,$$

при ограничении

$$\left(A + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left(A + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{1}{\alpha} D D^T = 0$$

относительно матричной переменной $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$; матрица A предполагается устойчивой (гурвицевой).

Как было показано в [1], минимизацию по α можно эффективно осуществлять при помощи метода Ньютона. А именно, зададимся начальным приближением $0 < \alpha_0 < 2\sigma(A)$ и применим итерационный процесс

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)},$$

где

$$f'(\alpha) = \operatorname{tr} Y \left(P - \frac{1}{\alpha^2} D D^T \right),$$

$$f''(\alpha) = 2 \operatorname{tr} Y \left(X + \frac{1}{\alpha^3} D D^T \right),$$

а Y и X — решения уравнений Ляпунова

$$\left(A + \frac{\alpha}{2} I \right)^T Y + Y \left(A + \frac{\alpha}{2} I \right) + C^T C = 0$$

и

$$\left(A + \frac{\alpha}{2} I \right) X + X \left(A + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + P - \frac{1}{\alpha^2} D D^T = 0.$$

Согласно [1], метод будет сходиться глобально (быстрее, чем геометрическая прогрессия с коэффициентом $1/2$), причем в окрестности решения сходимость квадратичная. При этом реально требуется не более 3–4 итераций для получения решения с большой точностью, если только начальная точка не слишком близка к границам интервала $(0, 2\sigma(A))$.

Таким образом, имеем эффективный алгоритм для осуществления минимизации по α в задаче (11), (10): достаточно матрицу A заменить на $\mathcal{A}_0 + k_1 \mathcal{A}_1 + k_2 \mathcal{A}_2$, матрицу C на $\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}$, а матрицу D — на $\begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Оптимизация функции $f(k)$

Введя для удобства обозначение

$$\{\mathcal{A}, k\} = k_1 \mathcal{A}_1 + k_2 \mathcal{A}_2,$$

сделаем следующее предположение.

Предположение. Пусть известен некоторый стабилизирующий регулятор $k_0 = \begin{pmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \end{pmatrix}$, т.е. такой, что матрица $\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_0\}$ гурвицева.

Итак, исследуем свойства функции

$$f(k) = \min_{\alpha} f(k, \alpha).$$

Лемма 1. Функция $f(k)$ определена и положительна на множестве $\mathcal{S}$ стабилизирующих регуляторов.

Доказательства этого и последующих результатов приведены в Приложении 2.

Заметим, что множество $\mathcal{S}$ может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими.

Лемма 2. Функция $f(k, \alpha)$ определена на множестве стабилизирующих обратных связей k и для $0 < \alpha < 2\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\})$. На этом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

$$(12) \quad \frac{1}{2} \nabla_k f(k, \alpha) = \begin{pmatrix} \text{tr } PY \mathcal{A}_1 \\ \text{tr } PY \mathcal{A}_2 \end{pmatrix} + \rho k,$$

$$(13) \quad \nabla_\alpha f(k, \alpha) = \text{tr } Y \left[P - \frac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T \right],$$

где матрицы P и Y являются решениями уравнений Ляпунова

$$\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0$$

и

$$(14) \quad \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T Y + Y \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) + (C \ 0)^T (C \ 0) = 0.$$

Минимум $f(k, \alpha)$ достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется условиями

$$\nabla_k f(k, \alpha) = 0, \quad \nabla_\alpha f(k, \alpha) = 0.$$

При этом $f(k, \alpha)$ как функция от α строго выпукла на $0 < \alpha < 2\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\})$ и достигает минимума во внутренней точке этого интервала.

Свойства гессиана функции $f(k)$ представлены следующим утверждением.

Лемма 3. Функция $f(k)$ дважды дифференцируема, причем действие гессиана функции на произвольный вектор² $e \in \mathbb{R}^2$ дается выражением

$$(15) \quad \frac{1}{2} (\nabla_{kk}^2 f(k) e, e) = \rho(e, e) + 2 \text{tr } P' Y \{\mathcal{A}, e\},$$

где P' — решение уравнения Ляпунова

$$(16) \quad \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) P' + P' \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \{\mathcal{A}, e\} P + P \{\mathcal{A}, e\}^T = 0.$$

Замечание 1. Далее в этом разделе — для получения простых количественных оценок в леммах 4 и 5 — в оптимизационную задачу (11), (10) вводятся регуляризующие добавки ε_1 и ε_2 следующим образом:

$$\min f(k, \alpha), \quad f(k, \alpha) = \text{tr } P \left((C \ 0)^T (C \ 0) + \varepsilon_1 I \right) + \rho |k|^2, \quad \varepsilon_1 \ll 1,$$

² Понимаемое в смысле второй производной по направлению.

при ограничении

$$(17) \quad \begin{aligned} & \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \\ & + \frac{1}{\alpha} \left[\begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I \right] = 0, \quad \varepsilon_2 \ll 1. \end{aligned}$$

Требование необходимости их введения можно существенно ослабить, но цель автора сейчас состоит в получении наиболее простых и наглядных результатов.

Лемма 4. Функция $f(k)$ коэрцитивна на множестве $\mathcal{S}$ (т.е. стремится к бесконечности на его границе), причем

$$(18) \quad \begin{aligned} f(k) & \geq \frac{\varepsilon_1}{4\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}) (\|\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}\| + \sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}))} \|D\|_F^2, \\ f(k) & \geq \rho |k|^2. \end{aligned}$$

Следствие 1. Множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{k \in \mathcal{S}: f(k) \leq f(k_0)\}$$

ограничено для любого регулятора $k_0 \in \mathcal{S}$.

Следствие 2. Существует точка минимума k_ на множестве $\mathcal{S}$, причем $\nabla f(k_*) = 0$.*

Градиент функции $f(k)$ не является липшицевым на всем множестве $\mathcal{S}$, однако он обладает этим свойством на его подмножестве $\mathcal{S}_0$. Соответствующий результат представлен следующей леммой.

Лемма 5. На множестве $\mathcal{S}_0$ градиент функции $f(k)$ липшицев с константой

$$(19) \quad \begin{aligned} L = \rho + \frac{8\sqrt{2n}f^2(k_0)}{\varepsilon_1\varepsilon_2^2} & \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{2}{\rho}f(k_0)} \right)^2 \times \\ & \times \left(\frac{f^2(k_0)}{\varepsilon_1^2} + 2 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right) \max \|\mathcal{A}_i\|_F. \end{aligned}$$

Полученные свойства функции $f(k)$ и ее производных позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость.

6. Алгоритм оптимизации

Предлагается итеративный подход к решению задачи (11), в основе которого лежит применение градиентного метода по переменной k и метода Ньютона по переменной α . Приведем принципиальную схему алгоритма.

Алгоритм 1 для минимизации $f(k, \alpha)$:

1. Задаемся параметрами $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \tau < 1$ и начальным стабилизирующим приближением k_0 . Вычисляем величину $\alpha_0 = \sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_0\})$.
2. На j -й итерации заданы величины k_j , α_j .

Вычисляем матрицу $\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}$, решаем уравнения Ляпунова

$$\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)P + P\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha_j} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0,$$

$$\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^T Y + Y \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right) + \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

и находим матрицы P и Y .

Вычисляем градиент

$$H_j = \nabla_k f(k_j, \alpha_j)$$

из соотношения

$$\frac{1}{2} \nabla_k f(k, \alpha) = \begin{pmatrix} \text{tr } PY \mathcal{A}_1 \\ \text{tr } PY \mathcal{A}_2 \end{pmatrix} + \rho k.$$

Если $|H_j| \leq \varepsilon$, то k_j принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода

$$k_{j+1} = k_j - \gamma_j H_j.$$

Длину шага $\gamma_j > 0$ подбираем дроблением γ до выполнения условий:

- а. k_{j+1} — стабилизирующий регулятор;
 - б. $f(k_{j+1}) \leq f(k_j) - \tau \gamma_j |H_j|^2$.
4. Для полученного k_{j+1} решаем задачу минимизации $f(k_{j+1}, \alpha)$ по α (см. раздел 4), и находим α_{j+1} . Переходим к п. 2.

Предлагаемый метод сходится в следующем смысле.

Теорема 2. В алгоритме 1 на каждой итерации реализуется лишь конечное число дроблений γ_j , функция $f(k_j)$ монотонно убывает и ее градиент стремится к нулю

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |H_j| = 0$$

со скоростью геометрической прогрессии.

В самом деле, алгоритм 1 определен корректно в начальной точке, так как k_0 является стабилизирующим регулятором в силу предположения. При этом при достаточно малых γ_j происходит монотонное уменьшение $f(k)$ (движение по антиградиенту); такой способ подбора шага гарантирует, что величины k_j остаются в области $\mathcal{S}_0$, для которой лемма 5 обеспечивает липшицевость градиента. Таким образом, применимы результаты о сходимости градиентного метода для безусловной минимизации [7]. В частности, условие б)

на третьем шаге алгоритма 1 будет выполнено после конечного числа дроблений, а в градиентном методе будет иметь место сходимость по градиенту с линейной скоростью.

Естественно, что при этом трудно рассчитывать на сходимость к глобальному минимуму, поскольку область определения $f(k)$ может быть даже несвязной.

7. Пример

Рассматриваемый пример взят из статьи [8]. Рассмотрим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+\alpha s)(1+\alpha^2 s)(1+\alpha^3 s)}, \quad \alpha = 0,5.$$

МАТЛАВ-процедура `tf2ss` доставляет матрицы системы (4) в пространстве состояний:

$$A = \begin{pmatrix} -15 & -70 & -120 & -64 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 64 \end{pmatrix}.$$

В качестве матрицы D возьмем

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а в качестве матрицы регулируемого выхода — матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $\rho = 0,001$ и выберем в качестве начального некоторый стабилизирующий регулятор

$$k_0 = \begin{pmatrix} 1,7366 \\ 0,7734 \end{pmatrix}.$$

Динамика изменения критерия $f(k)$ показана на рис. 1. Процесс завершился нахождением ПИ-регулятора с коэффициентами

$$k_* = \begin{pmatrix} 0,2956 \\ 0,3514 \end{pmatrix}$$

и соответствующего ограничивающего эллипса с матрицей

$$P_* = \begin{pmatrix} 5,1763 & -0,7885 \\ -0,7885 & 0,5635 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } P_* = 5,7398.$$

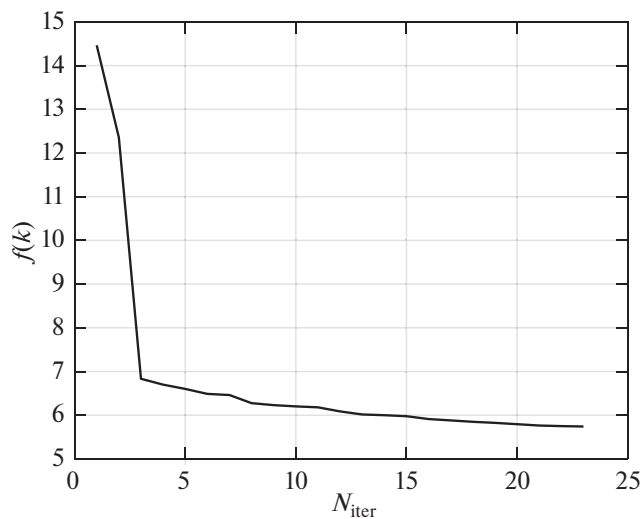


Рис. 1. Оптимизационная процедура.

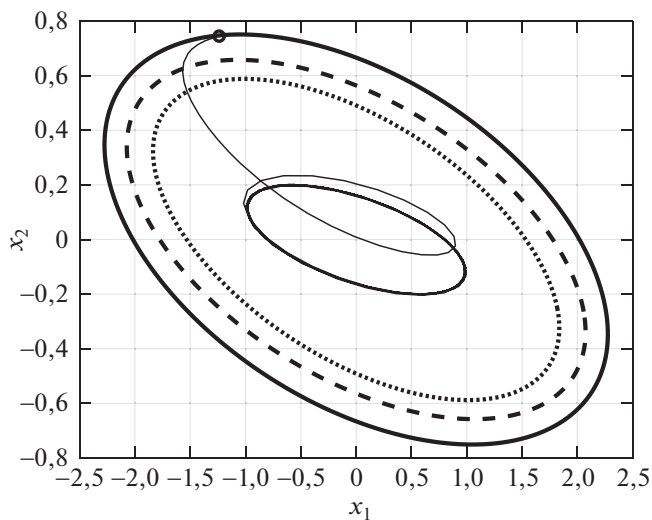


Рис. 2. Ограничивающие эллипсы.

На рис. 2 сплошной линией показаны найденный ограничивающий эллипс и траектория системы, замкнутой ПИ-регулятором k_* , при некотором допустимом внешнем возмущении. На этом же рисунке пунктиром показан ограничивающий эллипс для системы, замкнутой обратной связью с помощью динамического регулятора (см. [4])

$$u = K\hat{x},$$

где $\hat{x}$ — наблюдатель

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + L(y - c^T\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0,$$

с матрицами

$$K = \begin{pmatrix} -0,5154 & -2,6143 & -4,3786 & -2,4252 \end{pmatrix} \cdot 10^6,$$

$$L = \begin{pmatrix} 0,0075 \\ -0,0225 \\ -0,0002 \\ 0,0189 \end{pmatrix}.$$

Наконец, точечной линией на рис. 2 показан ограничивающий эллипс для системы, замкнутой линейным динамическим регулятором (см. [4])

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y, & x_r(0) &= 0, \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned}$$

с матрицами

$$A_r = \begin{pmatrix} -0,1373 & -0,6748 & -1,0932 & -0,1035 \\ 0,0140 & 0,0688 & 0,1114 & -1,7096 \\ 0,0004 & 0,0019 & 0,0031 & -0,0509 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0001 & -0,0007 \end{pmatrix} \cdot 10^5,$$

$$B_r = \begin{pmatrix} -0,7528 \\ 2,7644 \\ 0,0821 \\ 0,0011 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

$$C_r = \begin{pmatrix} -0,1135 & -0,5579 & -0,9037 & -2,9271 \end{pmatrix} \cdot 10^5, \quad D_r = 3,8176 \cdot 10^3.$$

Как видно, ПИ-регулятор приводит к вполне сопоставимым результатам, обладая преимуществами в простоте и удобстве практической реализации. При этом синтезированный ПИ-регулятор обладает вполне удовлетворительными характеристиками.

Передаточная функция ПИ-регулятора с коэффициентами k_* имеет вид

$$G_{\text{PID}}(s) = 0,2956 + \frac{0,3514}{s}.$$

Замкнутая система с ПИ-регулятором k_* является устойчивой по критерию Найквиста; ее минимальный запас устойчивости по модулю составляет 20,6 дБ, а по фазе 70,3°, см. рис. 3.

Для сравнения, взяв в качестве начального стабилизирующий регулятор

$$\tilde{k}_0 = \begin{pmatrix} 0,8882 \\ 0,6153 \end{pmatrix},$$

получаем ПИ-регулятор с коэффициентами

$$\tilde{k}_* = \begin{pmatrix} 0,3277 \\ 0,3662 \end{pmatrix}$$

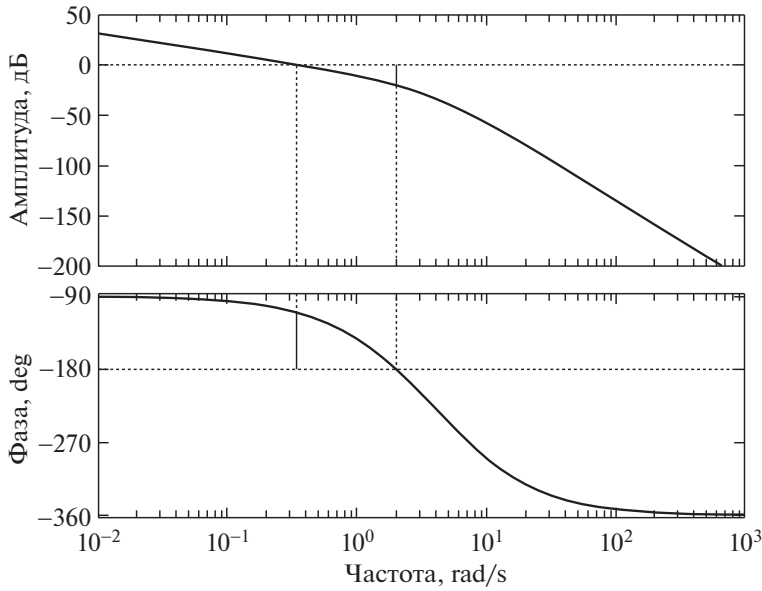


Рис. 3. ЛАФЧХ замкнутой системы.

и соответствующий ограничивающий эллипс с матрицей

$$\tilde{P}_* = \begin{pmatrix} 5,0890 & -0,7854 \\ -0,7854 & 0,5721 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } \tilde{P}_* = 5,6611.$$

При этом нормы получившихся регуляторов отличаются лишь на 6,5%, а ограничивающие эллипсы (по критерию следа) — менее, чем на 1,5%.

Вычисления проводились в среде МАТЛАВ с помощью свободно распространяемого программного пакета `svx` [9].

8. Обсуждение

В статье предложен новый подход к задаче синтеза ПИ-регулятора, оптимально подавляющего ограниченные внешние возмущения в линейной системе управления. Подход основан на сведении проблемы к невыпуклой задаче матричной оптимизации, которая далее решается градиентным методом; дано его обоснование.

Заметим, что теорема 2 устанавливает сходимость метода лишь по норме градиента целевой функции, однако, как показывает численное моделирование, метод приводит к вполне удовлетворительным с инженерной точки зрения ПИ-регуляторам. Вместе с тем представляется важным поиск содержательных частных постановок рассматриваемой задачи, при которых бы функция $f(k)$ на множестве уровня $\mathcal{S}_0$ удовлетворяла условию Поляка–Лоясевича [7]:

$$\frac{1}{2} |\nabla f(k)|^2 \geq \mu (f(k) - f(k_*))$$

с константой $\mu > 0$, зависящей только от k_0 и параметров системы (2). В этом случае можно было бы говорить и о сильной поточечной сходимости — подобно тому, как это было показано в [3] для линейно-квадратичной задачи при управлении по состоянию.

Наконец, предлагаемый подход было бы интересно распространить на синтез ПИД-регуляторов, что автор и предполагает сделать в последующих публикациях.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Следующие леммы содержат известные результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

Лемма П.1 [1]. Пусть X и Y — решения двойственных уравнений Ляпунова с гурвицевой матрицей A :

$$A^T X + X A + W = 0 \quad \text{и} \quad A Y + Y A^T + V = 0.$$

Тогда

$$\text{tr}(XV) = \text{tr}(YW).$$

Лемма П.2 [10].

1. Для матриц A и B соответствующих размерностей справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|AB\|_F &\leq \|A\|_F \|B\|, \\ |\text{tr} AB| &\leq \|A\|_F \|B\|_F, \\ \|A\| &\leq \|A\|_F, \\ AB + B^T A^T &\leq \varepsilon A A^T + \frac{1}{\varepsilon} B^T B \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

2. Для неотрицательно определенных матриц A и B справедливы соотношения

$$0 \leq \lambda_{\min}(A) \lambda_{\max}(B) \leq \lambda_{\min}(A) \text{tr} B \leq \text{tr} AB \leq \lambda_{\max}(A) \text{tr} B \leq \text{tr} A \text{tr} B.$$

Лемма П.3 [1]. Для решения P уравнения Ляпунова

$$AP + P A^T + Q = 0$$

с гурвицевой матрицей A и $Q \succ 0$ справедливы оценки:

$$\lambda_{\max}(P) \geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\sigma}, \quad \lambda_{\min}(P) \geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\|A\|},$$

где $\sigma = -\max_i \text{Re } \lambda_i(A)$.

Если же $Q = DD^T$ и пара (A, D) управляема, то

$$\lambda_{\max}(P) \geq \frac{\|u^* D\|^2}{2\sigma} > 0,$$

где

$$u^* A = \lambda u^*, \quad \operatorname{Re} \lambda = -\sigma, \quad \|u\| = 1,$$

т.е. u — левый собственный вектор матрицы A , отвечающий собственному значению λ матрицы A с наибольшей вещественной частью. Вектор u и число λ могут быть комплексными; здесь u^* означает комплексное сопряжение и транспонирование.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство леммы 1. Действительно, если матрица $A_0 + \{A, k\}$ гурвицева, то $\sigma(A_0 + \{A, k\}) > 0$ и для $0 < \alpha < 2\sigma(A_0 + \{A, k\})$ существует решение $P \succ 0$ уравнения Ляпунова (10). Тем самым определена функция $f(k, \alpha) > 0$; при этом $f(k) > 0$ в силу теоремы 1. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Имеем задачу

$$\min f(k, \alpha), \quad f(k, \alpha) = \operatorname{tr} P \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} + \rho |k|^2$$

при ограничении в виде уравнения Ляпунова

$$\left(A_0 + \{A, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left(A_0 + \{A, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0.$$

Для дифференцирования по k дадим ему приращение Δk и обозначим соответствующее приращение P через ΔP :

$$\begin{aligned} & \left(A_0 + \{A, k + \Delta k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) (P + \Delta P) + \\ & + (P + \Delta P) \left(A_0 + \{A, k + \Delta k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0. \end{aligned}$$

После линеаризации и вычитания этого и предыдущего уравнений, имеем

$$\begin{aligned} (II.2.1) \quad & \left(A_0 + \{A, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) \Delta P + \Delta P \left(A_0 + \{A, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \\ & + \{A, \Delta k\} P + P \{A, \Delta k\}^T = 0. \end{aligned}$$

Вычислим приращение $f(k)$, линеаризуя соответствующие величины:

$$\begin{aligned} \Delta f(k) &= \operatorname{tr} (P + \Delta P) \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} + \rho |k + \Delta k|^2 - \\ &- \left(\operatorname{tr} P \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} + \rho |k|^2 \right) = \\ &= \operatorname{tr} \Delta P \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} + 2\rho k^T \Delta k. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение Ляпунова (14), двойственное к (П.2.1). По лемме П.1 из уравнений (П.2.1) и (14) имеем

$$\Delta f(k) = 2 \operatorname{tr} Y \{ \mathcal{A}, \Delta k \} P + 2 \rho k^T \Delta k.$$

Таким образом,

$$df(k) = 2 \operatorname{tr} PY \sum_{i=1}^2 \mathcal{A}_i dk_i + 2 \rho \sum_{i=1}^2 k_i dk_i,$$

откуда и следует (12).

Справедливость соотношения (13) устанавливается полностью аналогично [1, лемма 1]. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Вычислим величину $(\nabla_{kk}^2 f(k)e, e)$, взяв производную по направлению $e \in \mathbb{R}^2$ от $\nabla_k f(k)$. Для этого, линейаризуя соответствующие величины и введя для удобства обозначение

$$[\operatorname{tr} PY \mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \operatorname{tr} PY \mathcal{A}_1 \\ \operatorname{tr} PY \mathcal{A}_2 \end{pmatrix},$$

вычислим приращение $\nabla_k f(k)$ по направлению e :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \nabla_k f(k)e &= \rho(k + \delta e) + [\operatorname{tr} (P + \Delta P)(Y + \Delta Y) \mathcal{A}] - (\rho k + [\operatorname{tr} PY \mathcal{A}]) = \\ &= \rho(k + \delta e) + [\operatorname{tr} (P + \delta P'(k)e) (Y + \delta Y'(k)e) \mathcal{A}] - (\rho k + [\operatorname{tr} PY \mathcal{A}]) = \\ &= \delta (\rho e + [\operatorname{tr} (PY'(k)e + P'(k)eY) \mathcal{A}]), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(k + \delta e) - P(k) = \delta P'(k)e, \\ \Delta Y &= Y(k + \delta e) - Y(k) = \delta Y'(k)e. \end{aligned}$$

Таким образом, обозначая $P' = P'(k)e$ и $Y' = Y'(k)e$, имеем

$$\frac{1}{2} (\nabla_{kk}^2 f(k)e, e) = (\rho e + [\operatorname{tr} (PY' + P'Y) \mathcal{A}], e).$$

Далее, $P = P(k)$ есть решение уравнения (17); запишем его в приращениях по направлению e

$$\begin{aligned} &\left(\mathcal{A}_0 + \{ \mathcal{A}, k + \delta e \} + \frac{\alpha}{2} I \right) (P + \delta P') + \\ &+ (P + \delta P') \left(\mathcal{A}_0 + \{ \mathcal{A}, k + \delta e \} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I \right) (P + \delta P') + (P + \delta P') \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I \right)^T + \\ & + \delta \left(\{\mathcal{A}, e\}P + P\{\mathcal{A}, e\}^T \right) + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0. \end{aligned}$$

Вычитая из полученного соотношения уравнение (17), приходим к уравнению (16).

Аналогично, $Y = Y(k)$ есть решение уравнения Ляпунова (14); запишем его в приращениях по направлению e

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \delta e\} + \frac{\alpha}{2}I \right)^T (Y + \delta Y') + \\ & + (Y + \delta Y') \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \delta e\} + \frac{\alpha}{2}I \right) + (C \ 0)^T (C \ 0) = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I \right)^T (Y + \delta Y') + (Y + \delta Y') \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \delta e\} + \frac{\alpha}{2}I \right) + \\ & + \delta \left(\{\mathcal{A}, e\}^T Y + Y\{\mathcal{A}, e\} \right) + (C \ 0)^T (C \ 0) = 0. \end{aligned}$$

Вычитая из полученного соотношения уравнение (14), имеем

$$\begin{aligned} \text{(П.2.2)} \quad & \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I \right)^T Y' + Y' \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2}I \right) + \\ & + \{\mathcal{A}, e\}^T Y + Y\{\mathcal{A}, e\} = 0. \end{aligned}$$

Из (16) и (П.2.2) имеем соотношение

$$\text{tr } P'Y\{\mathcal{A}, e\} = \text{tr } PY'\{\mathcal{A}, e\},$$

так что

$$\frac{1}{2} (\nabla_{kk}^2 f(k)e, e) = \rho(e, e) + ([\text{tr } (PY' + P'Y)\mathcal{A}], e) = \rho(e, e) + 2 \text{tr } P'Y\{\mathcal{A}, e\}.$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Рассмотрим последовательность стабилизирующих регуляторов $\{k_j\} \in \mathcal{S}$ такую, что $k_j \rightarrow k \in \partial\mathcal{S}$, т.е. $\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}) = 0$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon)$ такое, что неравенство

$$|\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}) - \sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\})| = \sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}) < \varepsilon$$

справедливо для всех $j \geq N(\varepsilon)$.

Пусть P_j — решение уравнения Ляпунова (10), ассоциированного с регулятором k_j

$$\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)P_j + P_j\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha_j}\left[\begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I\right] = 0,$$

а Y_j — решение двойственного к нему уравнения Ляпунова

$$\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^T Y_j + Y_j \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I\right) + (C \ 0)^T (C \ 0) + \varepsilon_1 I = 0.$$

Тогда, пользуясь леммой П.3, имеем

$$\begin{aligned} f(k_j) &= \text{tr } P_j \left((C \ 0)^T (C \ 0) + \varepsilon_1 I \right) + \rho |k_j|^2 \geq \\ &\geq \text{tr } P_j \left((C \ 0)^T (C \ 0) + \varepsilon_1 I \right) = \\ &= \text{tr } Y_j \frac{1}{\alpha_j} \left[\begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I \right] \geq \frac{1}{\alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \text{tr} \left[\begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{\alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \left\| \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_F^2 \geq \frac{1}{\alpha_j} \frac{\lambda_{\min} \left((C \ 0)^T (C \ 0) + \varepsilon_1 I \right)}{2 \left\| \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I \right\|} \|D\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{\varepsilon_1}{4\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}) \left\| \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I \right\|} \|D\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{\varepsilon_1}{4\epsilon(\|\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}\| + \epsilon)} \|D\|_F^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} +\infty, \end{aligned}$$

поскольку

$$0 < \alpha_j < 2\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\})$$

и

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} + \frac{\alpha_j}{2}I \right\| &\leq \left\| \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} \right\| + \frac{\alpha_j}{2} < \\ &< \left\| \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\} \right\| + \sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k_j\}). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$f(k_j) = \text{tr } P_j \left((C \ 0)^T (C \ 0) + \varepsilon_1 I \right) + \rho |k_j|^2 \geq \rho |k_j|^2 \xrightarrow{|k_j| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство следствия 2. У функции $f(k)$ на множестве $\mathcal{S}_0$ существует точка минимума (как у непрерывной функции на компактном множестве), но множество $\mathcal{S}_0$ не имеет общих точек с границей $\mathcal{S}$ в силу (18). Наконец, функция $f(k)$ дифференцируема на $\mathcal{S}_0$ по лемме 2, что и завершает доказательство следствия 2.

Доказательство леммы 5. Применяя к (15) лемму П.2, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|\nabla_{kk}^2 f(k)\| &= \frac{1}{2} \sup_{|e|=1} |(\nabla_{kk}^2 f(k)e, e)| \leq \sup_{|e|=1} \rho(e, e) + 2 \sup_{|e|=1} |\operatorname{tr} P'Y\{\mathcal{A}, e\}| = \\
&= \rho + 2 \sup_{|e|=1} \|P'\|_F \|Y\{\mathcal{A}, e\}\|_F \leq \rho + 2\|P'\|_F \sup_{|e|=1} \|Y\| \|\{\mathcal{A}, e\}\|_F \leq \\
&\leq \rho + 2\sqrt{2}\|P'\|_F \|Y\| \max_i \|\mathcal{A}_i\|_F,
\end{aligned}$$

поскольку

$$\|\{\mathcal{A}, e\}\|_F = \left\| \sum_i \mathcal{A}_i e_i \right\|_F \leq \sum_i \|\mathcal{A}_i\|_F |e_i| \leq \max_i \|\mathcal{A}_i\|_F |e|_1 \leq \sqrt{2} \max_i \|\mathcal{A}_i\|_F |e|.$$

Таким образом, необходимо оценить сверху величину

$$\rho + 2\sqrt{2} \max_i \|\mathcal{A}_i\|_F \|P'\|_F \|Y\|.$$

Имеем оценку для $\|Y\|$:

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_2}{\alpha} \|Y\| &\leq \frac{1}{\alpha} \lambda_{\min} \left[\begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I \right] \operatorname{tr} Y \leq \operatorname{tr} Y \frac{1}{\alpha} \left[\begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I \right] = \\
&= \operatorname{tr} P \left(\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 I \right) = f(k) - \rho |k|^2 \leq f(k) \leq f(k_0),
\end{aligned}$$

откуда

$$(\text{П.2.3}) \quad \|Y\| \leq \frac{\alpha}{\varepsilon_2} f(k_0).$$

Оценка для α устанавливается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\alpha &< 2\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}) \leq 2\|\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}\| \leq \\
&\leq 2 \left(\|\mathcal{A}_0\| + \sum_i \|\mathcal{A}_i\| |k_i| \right) \leq 2 \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| |k|_1 \right) \leq \\
&\leq 2 \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{2} |k| \right) \leq 2 \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{2}{\rho} f(k)} \right) \leq \\
&\leq 2 \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{2}{\rho} f(k_0)} \right),
\end{aligned}$$

так что

$$\|Y\| \leq \frac{2}{\varepsilon_2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{2}{\rho} f(k_0)} \right) f(k_0).$$

Теперь оценим сверху $\|P\|$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 \|P\| &\leq \lambda_{\min} \left(\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 I \right) \|P\| \leq \\
&\leq \operatorname{tr} P \left(\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 I \right) = f(k) - \rho |k|^2 \leq f(k) \leq f(k_0),
\end{aligned}$$

откуда

$$\|P\| \leq \frac{f(k_0)}{\varepsilon_1}.$$

Наконец, оценим сверху $\|P'\|_F$. С учетом леммы П.2 заметим, что

$$\begin{aligned} & \lambda_{\max} \left(\{\mathcal{A}, e\}P + P\{\mathcal{A}, e\}^T \right) = \\ & = \left\| \{\mathcal{A}, e\}P + P\{\mathcal{A}, e\}^T \right\| \leq \left\| P^2 + \{\mathcal{A}, e\}\{\mathcal{A}, e\}^T \right\| \leq \\ & \leq \|P\|^2 + \|\{\mathcal{A}, e\}\|^2 \leq \frac{f^2(k_0)}{\varepsilon_1^2} + 2 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \leq \\ & \leq \xi \frac{\varepsilon_2}{\alpha} \leq \xi \frac{1}{\alpha} \lambda_{\min} \left[\begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \varepsilon_2 I \right] \end{aligned}$$

при

$$\xi = \frac{\alpha}{\varepsilon_2} \left(\frac{f^2(k_0)}{\varepsilon_1^2} + 2 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right).$$

Поэтому для решения P' уравнения Ляпунова (16) справедлива оценка

$$\begin{aligned} P' & \preceq \xi P \preceq \frac{\alpha}{\varepsilon_2} \left(\frac{f^2(k_0)}{\varepsilon_1^2} + 2 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right) \frac{f(k_0)}{\varepsilon_1} I \preceq \\ & \preceq \frac{2f(k_0)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{2}{\rho} f(k_0)} \right) \left(\frac{f^2(k_0)}{\varepsilon_1^2} + 2 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right) I, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} (П.2.4) \quad \|P'\|_F & \leq \frac{2\sqrt{n}f(k_0)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{2}{\rho} f(k_0)} \right) \times \\ & \times \left(\frac{f^2(k_0)}{\varepsilon_1^2} + 2 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right). \end{aligned}$$

С учетом оценок (П.2.3) и (П.2.4) приходим к соотношению (19). Лемма 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // АиТ. 2021. № 9. С. 86–115.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
2. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // АиТ. 2022. № 11. С. 62–82.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. New Criteria for Tuning PID Controllers // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 11. P. 1724–1741.

3. *Fatkhullin I., Polyak B.* Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // SIAM J. Control Optim. 2021. V. 59. No. 5. P. 3887–3911.
4. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
5. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // АиТ. 2021. № 1. С. 3–54.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.
6. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
7. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. 2-е изд. М.: УРСС, 2014.
8. *Åström K.J., Häggglund T.* Benchmark Systems for PID Control // IFAC Proceedings Volumes. 2000. V. 33. Iss. 4. P. 165–166.
9. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1. URL <http://cvxr.com/cvx>
10. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 11.04.2023

После доработки 06.06.2023

Принята к публикации 09.06.2023

© 2023 г. М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@mngasu.ru),
А.В. СТЕПАНОВ (andrey8st@yahoo.com)
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНЫХ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ АПРИОРНЫХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ¹

Развивается новый подход, позволяющий в едином формате синтезировать субоптимальные робастные законы управления неопределенными объектами при различных критериях на основе априорной информации и экспериментальных данных. Показано, что гарантированные оценки γ_0 -, обобщенной H_2 - и H_∞ -норм замкнутой системы и соответствующие субоптимальные робастные законы управления выражаются в терминах решений линейных матричных неравенств, формируемых с учетом априорного знания и данных, полученных при моделировании объекта. Численный пример демонстрирует улучшение качества систем управления при совместном использовании априорных и экспериментальных данных.

Ключевые слова: робастное управление, априорные данные, экспериментальные данные, γ_0 -норма, обобщенная H_2 -норма, H_∞ -норма, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231023080020, EDN: HAQKRE

1. Введение

Среди разнообразных подходов к синтезу управления объектами при неполной математической модели выделяются два основных, в одном из которых параметры регулятора находятся исходя из априорной информации об области возможных значений неопределенных параметров объекта, а в другом параметры регулятора настраиваются рекуррентно по текущей информации или вычисляются на основе полученных экспериментальных данных. Традиционно первый подход связывают с робастным управлением (см. [1] и обзор [2]), второй — с адаптивным управлением (см. обзоры [3, 4]).

В последнее время активно разрабатывается синтез систем управления, не использующий математическую модель объекта явно, а основанный исключительно на экспериментальных данных [5–9]. Пионерской в этом направлении была работа [10], где установлено, что для полной характеристики линейной стационарной динамической системы при выполнении так называемого

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2023-945).

условия неисчезающего возбуждения может быть использована единственная траектория. В [5] показано, что при выполнении этого условия линейно-квадратичное управление объектами без возмущений и без помех в измерениях может быть реализовано без знания математической модели объекта непосредственно по данным измерений входа и выхода. В [6] установлено, что для построения законов управления по экспериментальным данным достаточно выполнения менее ограничительного условия информативности данных для изучаемого свойства (например, для стабилизируемости линейной обратной связью по состоянию или для линейно-квадратичного управления при заданном функционале). В [7] параметры обратной связи по состоянию находятся на основе полученных в открытом контуре измерений входа и выхода неопределенного объекта, на который действует неизмеряемое возмущение из определенного класса. В [8] построение H_2 - и H_∞ -оптимальных законов управления полностью неопределенным объектом по измерениям входа и выхода осуществляется на основе матричного варианта S -леммы [11], а в [9] — на основе леммы Питерсена [12].

В настоящей работе разрабатывается новый подход, позволяющий синтезировать робастные законы управления неопределенными динамическими объектами на основе совместного использования априорной информации о структуре неопределенной матрицы параметров объекта и верхней границе ее нормы, а также экспериментальных данных, полученных в результате наблюдения за объектом на некотором интервале времени. Качество робастного управления оценивается верхними оценками одного из трех показателей: γ_0 -нормы, характеризующей уровень гашения стохастических возмущений в замкнутой неопределенной системе или максимальное значение квадратичного функционала целевого выхода при импульсном возмущении; обобщенной H_2 -нормы, характеризующей максимальное по времени отклонение евклидовой нормы целевого выхода системы при всех ограниченных в l_2 -норме детерминированных возмущениях; H_∞ -нормы, характеризующей максимальное значение отношения l_2 -норм целевого выхода и внешнего возмущения.

Синтез включает в себя несколько основных шагов. Сначала множество неизвестных матриц, согласованных с априорной информацией, характеризуется квадратичным неравенством. Затем проводится эксперимент, в котором измеряется траектория системы при задаваемых начальных условиях и управлениях и неизвестном внешнем возмущении, компоненты которого имеют известные границы. Это позволяет определить еще одно квадратичное неравенство, которому удовлетворяют все неизвестные матрицы, согласованные с результатами эксперимента. Далее определяется расширенная полностью определенная система с дополнительными искусственными входом и выходом, удовлетворяющими двум квадратичным неравенствам, в которую “погружена” исходная неопределенная система. И, наконец, верхние оценки уровней гашения возмущений исходной неопределенной системы находятся как уровни гашения возмущений этой расширенной системы при всех допол-

нительных входах, удовлетворяющих двум указанным квадратичным неравенствам.

Статья структурирована следующим образом. После введения в разделе 2 дается общая постановка задачи и показывается, как на основе априорной информации и экспериментальных данных выводятся два квадратичных неравенства, которым удовлетворяет неизвестная матрица параметров объекта. В разделе 3 приводятся необходимые сведения о γ_0 -, обобщенной H_2 - и H_∞ -нормах и о связях между ними для прямой и двойственной систем. В разделе 4 описывается процедура синтеза робастных законов управления и доказывается основная теорема. В разделе 5 приводятся результаты ряда экспериментов с неопределенной системой третьего порядка, показывающие преимущества робастного управления, построенного на основе априорной информации и экспериментальных данных, над робастными управлениями, синтезируемыми только по априорной информации или только по экспериментальным данным. В разделе 6 подводятся итоги и делаются выводы.

2. Постановка задачи робастного управления на основе априорных и экспериментальных данных

Рассмотрим неопределенную систему

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (A + B_\Delta \Delta C_\Delta)x(t) + (B_u + B_\Delta \Delta D_\Delta)u(t) + Bw(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

в которой $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ – целевой выход, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ – возмущение, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – управление. Все матрицы, за исключением матрицы неизвестных параметров Δ , заданы. В общем плане требуется на основе информации о неизвестных параметрах системы синтезировать линейные обратные связи по состоянию, при которых уровни гашения внешних возмущений из разных классов в замкнутой системе не превышают заданных значений.

Информация относительно неизвестной матрицы Δ делится на априорную и получаемую в результате предварительного эксперимента. Предполагается, что матрица Δ имеет блочно-диагональную структуру и представима в виде

$$(2.2) \quad \Delta = \text{diag} (\Delta_1, \dots, \Delta_l) = \sum_{i=1}^l L_i \Delta_i R_i^T, \quad \Delta_i \Delta_i^T \leq \eta_i^2 I,$$

где $\Delta_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$ – полный матричный блок или диагональный квадратный матричный блок $\Delta_i = \delta_i I_{n_i}$, L_i и R_i – матрицы, столбцами которых являются единичные векторы, соответствующие расположению i -го матричного блока, и для которых $L_i^T L_j = 0$, $R_i^T R_j = 0$, $i \neq j$, η_i – заданные числа.

Представим матрицу B_Δ в соответствии со структурой матрицы Δ в виде $B_\Delta = (B_1 \dots B_l)$, где $B_i = B_\Delta L_i$, обозначим $\hat{\Delta} = B_\Delta \Delta$. Тогда

$$(2.3) \quad \hat{\Delta} = B_\Delta \sum_{i=1}^l L_i \Delta_i R_i^T = \sum_{i=1}^l B_i \Delta_i R_i^T.$$

Так как $\hat{\Delta} R_j = B_j \Delta_j$, $j = 1, \dots, l$, то $\hat{\Delta} = (\hat{\Delta}_1 \hat{\Delta}_2 \dots \hat{\Delta}_l)$, где $\hat{\Delta}_i = B_i \Delta_i$.

В частности, если матрицы состояния и управления в уравнении объекта полностью неизвестны, то в (2.1) положим

$$(2.4) \quad A = 0, \quad B_u = 0, \quad B_\Delta = I, \quad C_\Delta = (I \ 0)^T, \quad D_\Delta = (0 \ I)^T$$

и тогда $\hat{\Delta} = \Delta = (A^{(real)} \ B_u^{(real)})$, где $A^{(real)}$ и $B_u^{(real)}$ – неизвестные матрицы состояния и управления. Рассмотрению именно этого случая без использования априорной информации посвящены работы [5, 6, 8, 9]).

Далее, выразим априорную информацию о матрице Δ в терминах матрицы $\hat{\Delta}$. Применяя известный подход к синтезу робастного управления в случае структурированной неопределенности [13, 14], определим множество $\mathbf{\Lambda} = \text{diag} (\mathbf{\Lambda}_1, \dots, \mathbf{\Lambda}_l)$, состоящее из всех $\Lambda = \text{diag} (\Lambda_1, \dots, \Lambda_l)$, для которых $\Lambda_i = \lambda_i I_{n_i}$, $\lambda_i \geq 0$, если матричный блок Δ_i полный, и всех симметрических неотрицательно определенных матриц $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, если $\Delta_i = \delta_i I_{n_i}$. Так как согласно (2.2) для полного матричного блока $\Delta_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ при всех $\lambda_i \geq 0$ выполняется $\lambda_i \Delta_i \Delta_i^T \leq \lambda_i \eta_i^2 I$, а для блока $\Delta_i = \delta_i I_{n_i}$ для всех симметрических неотрицательно определенных матриц $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ выполняется $\Delta_i \Lambda_i \Delta_i^T \leq \eta_i^2 \Lambda_i$, то для всех матриц Δ , удовлетворяющих (2.2), как нетрудно проверить, выполняется

$$(2.5) \quad \Delta \Lambda \Delta^T - \eta \Lambda \eta^T \leq 0 \quad \forall \Lambda \in \mathbf{\Lambda},$$

где $\eta = \text{diag} (\eta_1 I_{n_1}, \dots, \eta_l I_{n_l})$. Умножая это неравенство слева на матрицу B_Δ и справа на матрицу B_Δ^T , получим неравенство

$$(2.6) \quad \hat{\Delta} \Lambda \hat{\Delta}^T - B_\Delta \eta \Lambda \eta^T B_\Delta^T \leq 0 \quad \forall \Lambda \in \mathbf{\Lambda},$$

которое запишем в виде

$$(2.7) \quad \begin{pmatrix} \hat{\Delta} & I \end{pmatrix} \Upsilon \begin{pmatrix} \hat{\Delta} & I \end{pmatrix}^T \leq 0 \quad \forall \Lambda \in \mathbf{\Lambda},$$

где $\Upsilon = \text{diag} (\Lambda, -B_\Delta \eta \Lambda \eta^T B_\Delta^T)$. Обозначим через $\mathbf{\Delta}$ множество матриц Δ заданной структуры, удовлетворяющих (2.5), а через $\hat{\mathbf{\Delta}}_{\mathbf{a}}$ – множество матриц $\hat{\Delta} = (\hat{\Delta}_1, \dots, \hat{\Delta}_l)$, которые удовлетворяют неравенству (2.6). Ясно, что для любой $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ имеется $\hat{\Delta} = B_\Delta \Delta \in \hat{\mathbf{\Delta}}_{\mathbf{a}}$. Покажем, что верно и обратное утверждение.

Лемма 2.1. Если матрицы $B_i = B_\Delta L_i$, $i = 1, \dots, l$ имеют полный столбцовый ранг, то для любой $\hat{\Delta} \in \hat{\mathbf{\Delta}}_{\mathbf{a}}$ найдется $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ такая, что $\hat{\Delta} = B_\Delta \Delta$.

Доказательство леммы. Пусть $\hat{\Delta} \in \hat{\Delta}_a$. Из (2.6) следует, что для любого вектора $a \neq 0$, для которого $B_{\Delta}^T a = 0$, выполняется $\hat{\Delta}^T a = 0$. Это означает, что столбцы матрицы $\hat{\Delta}$ принадлежат образу матрицы B_{Δ} . Следовательно, линейное матричное уравнение $B_{\Delta} \Delta = \hat{\Delta}$ имеет решение относительно матрицы Δ . Осталось показать, что для этого решения выполняется неравенство (2.5). Из (2.6) следует, что для каждого из блоков выполнено

$$B_i(\Delta_i \Lambda_i \Delta_i^T - \eta_i^2 \Lambda_i) B_i^T \leq 0.$$

Так как матрицы B_i имеют полный столбцовый ранг, то $\Delta_i \Lambda_i \Delta_i^T - \eta_i^2 \Lambda_i \leq 0$ для всех i , т.е. $\Delta \in \Delta$, что и требовалось доказать.

Эта лемма показывает, что при переходе от матрицы Δ , удовлетворяющей неравенству (2.5), к матрице $\hat{\Delta}$, удовлетворяющей неравенству (2.7), никакой потери информации не происходит. В связи с этим исходную неопределенную систему (2.1) представим в виде

$$(2.8) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (A + \hat{\Delta} C_{\Delta})x(t) + (B_u + \hat{\Delta} D_{\Delta})u(t) + Bw(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

где матрица неизвестных параметров соответствующей структуры $\hat{\Delta} = (\hat{\Delta}_1, \dots, \hat{\Delta}_l)$ удовлетворяет неравенству (2.7).

Дополнительная информация о неизвестных параметрах системы (2.8) извлекается из конечного набора измерений ее траектории. А именно, допустим, что имеется возможность измерять состояния системы $x_0, x_1, \dots, x_N$ при выбранных управлениях $u_0, \dots, u_{N-1}$ и некотором неизвестном возмущении $w(t)$, компоненты которого удовлетворяют ограничению

$$(2.9) \quad |w_i(t)| \leq d, \quad t = 0, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, n_w$$

для некоторого заданного d , которое будем называть уровнем возмущения, т.е. $\max_{0 \leq t \leq N-1} \|w(t)\|_{\infty} \leq d$. Следуя принятым обозначениям (см., например, [6]), составим матрицы

$$\begin{aligned} \Phi &= (x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{N-1}), \quad \Phi_+ = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_N), \\ W &= (w_0 \quad w_1 \quad \cdots \quad w_{N-1}), \quad U = (u_0 \quad u_1 \quad \cdots \quad u_{N-1}) \end{aligned}$$

и обозначим

$$C_{\Delta} \Phi + D_{\Delta} U = \hat{\Phi}.$$

В силу уравнения объекта имеет место равенство

$$(2.10) \quad \tilde{\Phi} = \hat{\Delta}^{(real)} \hat{\Phi} + BW,$$

где $\tilde{\Phi} = \Phi_+ - A\Phi - B_u U$, $\hat{\Delta}^{(real)}$ – истинная неизвестная матрица параметров объекта (2.8). Согласно (2.9) и (2.10) при $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}^{(real)}$ имеет место

$$(\tilde{\Phi} - \hat{\Delta} \hat{\Phi})(\tilde{\Phi} - \hat{\Delta} \hat{\Phi})^T = BWW^T B^T \leq d^2 n_w N B B^T.$$

Обозначим через $\hat{\Delta}_{\mathbf{p}}$ множество матриц $\hat{\Delta}$ заданной структуры, удовлетворяющих этому неравенству. Ясно, что $\hat{\Delta}^{(real)} \in \hat{\Delta}_{\mathbf{p}}$. Введем матрицу

$$(2.11) \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & * \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Phi}\hat{\Phi}^T & * \\ -\tilde{\Phi}\hat{\Phi}^T & \tilde{\Phi}\tilde{\Phi}^T - d^2 n_w N B B^T \end{pmatrix}$$

и запишем это неравенство в виде

$$(2.12) \quad \begin{pmatrix} \hat{\Delta} & I \end{pmatrix} \Psi \begin{pmatrix} \hat{\Delta} & I \end{pmatrix}^T \leq 0.$$

Обозначим через $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}_{\mathbf{a}} \cap \hat{\Delta}_{\mathbf{p}}$ множество матриц $\hat{\Delta}$, которые удовлетворяют ограничениям (2.7) и (2.12).

Качество неопределенной системы (2.8), замкнутой управлением вида линейной обратной связи по состоянию, будем оценивать по ее реакциям на стохастические и детерминированные возмущения при нулевом начальном состоянии, измеряемыми тремя показателями: гарантированными оценками γ_0 -, обобщенной H_2 - и H_∞ -норм. Гарантированная оценка γ_0 -нормы определяется как уровень гашения стохастического возмущения из класса $\mathcal{G}_{n_w}$ векторных гауссовских белых шумов размерности n_w , равный максимально-му значению квадратного корня отношения установившихся усредненных по времени дисперсий выхода z и входа w при всех ненулевых ковариационных матрицах входа K_w [15], т.е.

$$\gamma_0 = \sup_{\hat{\Delta} \in \hat{\Delta}} \gamma_0(\hat{\Delta}), \quad \gamma_0(\hat{\Delta}) = \text{ess} \sup_{w \in \mathcal{G}_{n_w}} \frac{\|z\|_{\mathcal{P}}}{\|w\|_{\mathcal{P}}},$$

где $\|s\|_{\mathcal{P}}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{t=0}^{N-1} |s(t)|^2$, а ess обозначает существенный супремум, т.е. наименьшую верхнюю границу с вероятностью единица. Гарантированные оценки обобщенной H_2 - и H_∞ -нормы характеризуют соответственно относительные максимальные значения максимального по времени отклонения и квадратичного функционала целевого выхода при детерминированных возмущениях из класса l_2 и определяются как

$$\gamma_{g2} = \sup_{\hat{\Delta} \in \hat{\Delta}} \gamma_{g2}(\hat{\Delta}), \quad \gamma_{g2}(\hat{\Delta}) = \sup_{w(t) \neq 0} \frac{\sup_{t \geq 0} |z(t)|}{\|w\|},$$

$$\gamma_\infty = \sup_{\hat{\Delta} \in \hat{\Delta}} \gamma_\infty(\hat{\Delta}), \quad \gamma_\infty(\hat{\Delta}) = \sup_{w(t) \neq 0} \frac{\|z\|}{\|w\|},$$

где $\|s\|^2 = \sum_{t=0}^{\infty} |s(t)|^2$. Задача заключается в том, чтобы получить верхние оценки этих норм и в конечном итоге синтезировать законы управления, обеспечивающие требуемые оценки качества системы.

3. Предварительные сведения о γ_0 -, обобщенной H_2 - и H_∞ -нормах

Прежде чем приступить к нахождению гарантированных оценок указанных норм, уточним, как вычисляются сами нормы $\gamma_0(\hat{\Delta})$, $\gamma_{g2}(\hat{\Delta})$ и $\gamma_\infty(\hat{\Delta})$ для замкнутой системы (2.8), $u(t) = \Theta x(t)$ при фиксированной матрице $\hat{\Delta}$, заданной уравнениями

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= [A + B_u \Theta + \hat{\Delta}(C_\Delta + D_\Delta \Theta)]x(t) + Bw(t), \\ z(t) &= (C + D\Theta)x(t). \end{aligned}$$

Обозначая

$$A_\Theta = A + B_u \Theta, \quad C_{\Delta\Theta} = C_\Delta + D_\Delta \Theta, \quad A_\Delta = A_\Theta + \hat{\Delta}C_{\Delta\Theta}, \quad C_\Theta = C + D\Theta,$$

запишем эти уравнения в виде

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A_\Delta x(t) + Bw(t), \\ z(t) &= C_\Theta x(t). \end{aligned}$$

Уровень гашения стохастических возмущений или γ_0 -норма этой системы находится как решение задачи полуопределенного программирования относительно ковариационных матриц возмущения $K_w = K_w^T \geq 0$ и состояния $K_x = K_x^T \geq 0$ [15]

$$(3.3) \quad \gamma_0^2(\hat{\Delta}) = \max \operatorname{tr} C_\Theta K_x C_\Theta^T : \quad A_\Delta K_x A_\Delta^T - K_x + B K_w B^T = 0, \quad \operatorname{tr} K_w \leq 1.$$

Здесь потребуется следующее вспомогательное утверждение, доказательство которого приведено в Приложении.

Лемма 3.1. Задача (3.3) двойственна по Лагранжу задаче

$$(3.4) \quad \gamma_0^2(\hat{\Delta}) = \min \gamma^2 : \quad A_\Delta^T P A_\Delta - P + C_\Theta^T C_\Theta \leq 0, \quad B^T P B \leq \gamma^2 I.$$

Задача (3.4) означает, что для приращения функции $V(x) = x^T P x$ в силу уравнения (3.2) при начальном возмущении $w(0) = w_0$, $w(t) \equiv 0$, $t > 0$ и нулевых начальных условиях выполняются неравенства

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \Delta V + |z|^2 &\leq 0, \quad t \geq 1, \\ V(x_1) &= w_0^T B^T P B w_0 \leq \gamma^2 |w_0|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x}, \forall w_0 \in \mathbb{R}^{n_w}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что уровень гашения стохастических возмущений совпадает с уровнем гашения детерминированного начального возмущения, понимаемого как максимальное значение отношения l_2 -нормы выхода при “импульсном” возмущении $w(0) = w_0$, $w(t) \equiv 0$, $t \geq 1$ и нулевых начальных условиях к евклидовой норме возмущения, т.е.

$$\gamma_0^2(\hat{\Delta}) = \max_{w_0 \neq 0} \frac{\|z\|^2}{|w_0|^2}.$$

Следующая характеристика — максимальное уклонение выхода или обобщенная H_2 -норма [16, 17] — находится как решение задачи

$$(3.6) \quad \gamma_{g2}^2(\hat{\Delta}) = \min \gamma^2 : \quad A_{\Delta} Q A_{\Delta}^T - Q + B B^T \leq 0, \quad C_{\Theta} Q C_{\Theta}^T \leq \gamma^2 I,$$

которую путем замены $P = Q^{-1}$ можно представить как

$$\gamma_{g2}^2(\hat{\Delta}) = \min \gamma^2 : \quad \begin{pmatrix} A_{\Delta}^T P A_{\Delta} - P & * \\ B^T P A_{\Delta} & B^T P B - I \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} P & * \\ C_{\Theta} & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0.$$

Это означает, что для приращения функции $V(x) = x^T P x$ в силу уравнения (3.2) при нулевых начальных условиях выполняется

$$(3.7) \quad \Delta V - |w|^2 \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad \forall w \in \mathbb{R}^{n_w}, \quad P \geq \gamma^{-2} C_{\Theta}^T C_{\Theta}.$$

Как хорошо известно, H_{∞} -норма системы меньше γ тогда и только тогда, когда разрешимо относительно матрицы $P = P^T > 0$ линейное матричное неравенство

$$(3.8) \quad \begin{pmatrix} A_{\Delta}^T P A_{\Delta} - P & * & * \\ B^T P A_{\Delta} & B^T P B - \gamma^2 I & * \\ C_{\Theta} & 0 & -I \end{pmatrix} < 0,$$

означающее, что для приращения положительно определенной функции $V(x) = x^T P x$ в силу уравнения (3.2) при всех x и w выполняется

$$(3.9) \quad \Delta V + |z|^2 - \gamma^2 |w|^2 < 0.$$

Сравнение задач (3.4) и (3.6) показывает, что γ_0 - и обобщенная H_2 -норма системы (3.1) совпадают соответственно с обобщенной H_2 - и γ_0 -нормой двойственной системы

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= (A_{\Theta} + \hat{\Delta} C_{\Delta\Theta})^T \hat{x}(t) + C_{\Theta}^T \hat{w}(t), \quad \hat{x}(0) = 0, \\ \hat{z}(t) &= B^T \hat{x}(t). \end{aligned}$$

Кроме того, очевидно, что H_{∞} -нормы двойственных систем (3.1) и (3.10) совпадают.

4. Робастные γ_0 -, обобщенные H_2 - и H_{∞} -субоптимальные законы управления

Опишем основные шаги получения гарантированных оценок γ_0 -, γ_{g2} - и γ_{∞} -норм неопределенной системы (3.1) и нахождения соответствующих им параметров субоптимальных робастных законов управления. Обозначим через $\hat{\gamma}_0$, $\hat{\gamma}_{g2}$ и $\hat{\gamma}_{\infty}$ соответствующие гарантированные оценки норм двойственной системы (3.10). Как следует из сказанного в предыдущем разделе,

$$\gamma_0 = \hat{\gamma}_{g2}, \quad \gamma_{g2} = \hat{\gamma}_0, \quad \gamma_{\infty} = \hat{\gamma}_{\infty}.$$

Рассмотрим систему, которую назовем расширенной, с дополнительными искусственными входом $w_\Delta(t)$ и выходом $z_\Delta(t)$, определяемую уравнениями

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x_a(t+1) &= A_\Theta^T x_a(t) + C_{\Delta\Theta}^T w_\Delta(t) + C_\Theta^T w_a(t), \quad x_a(0) = 0, \\ z_a(t) &= B^T x_a(t), \quad z_\Delta(t) = x_a(t), \end{aligned}$$

в которых $x_a(t)$ – состояние, $w_a(t)$ – возмущение, $z_a(t)$ – целевой выход. Допустим, что дополнительный входной сигнал $w_\Delta(t)$ в системе (4.1) при всех $t \geq 0$ удовлетворяет двум неравенствам

$$(4.2) \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Upsilon \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0,$$

где матрицы Ψ и Υ заданы в (2.11) и (2.7). Множество всех таких сигналов обозначим через $\mathbf{W}_\Delta$. Система (3.10) “погружена” в систему (4.1), (4.2), так как при $w_\Delta(t) = \hat{\Delta}^T z_\Delta(t)$ уравнения (4.1) превращаются в уравнения (3.10) и для всех $\hat{\Delta} \in \hat{\Delta}$, как следует из (2.12), (2.7), выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} &= z_\Delta^T(t) \begin{pmatrix} \hat{\Delta}^T \\ I \end{pmatrix}^T \Psi \begin{pmatrix} \hat{\Delta}^T \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leq 0, \\ \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Upsilon \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} &= z_\Delta^T(t) \begin{pmatrix} \hat{\Delta}^T \\ I \end{pmatrix}^T \Upsilon \begin{pmatrix} \hat{\Delta}^T \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leq 0, \end{aligned}$$

т.е. $w_\Delta(t) = \hat{\Delta}^T z_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta$.

Для расширенной системы (4.1), (4.2) определим γ_0 -, обобщенную H_2 - и H_∞ -нормы относительно входа w_a и выхода z_a при всех допустимых входах w_Δ как

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}_0 &= \sup_{w_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta} \text{ess} \sup_{w_a \in \mathcal{G}_{n_w}} \frac{\|z_a\|_{\mathcal{P}}}{\|w_a\|_{\mathcal{P}}}, \\ \tilde{\gamma}_{g2} &= \sup_{w_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta} \sup_{w_a(t) \neq 0} \frac{\sup_{t \geq 0} |z_a(t)|}{\|w_a\|}, \\ \tilde{\gamma}_\infty &= \sup_{w_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta} \sup_{w_a(t) \neq 0} \frac{\|z_a\|}{\|w_a\|}, \end{aligned}$$

которые очевидно ограничивают сверху гарантированные оценки норм системы (3.10). С учетом сказанного выше о связях норм двойственных систем получим, что для гарантированных оценок норм исходной неопределенной системы (3.1) верны неравенства

$$\gamma_0 \leq \tilde{\gamma}_{g2}, \quad \gamma_{g2} \leq \tilde{\gamma}_0, \quad \gamma_\infty \leq \tilde{\gamma}_\infty.$$

Определенные в (4.3) показатели будут меньше заданного числа γ , если найдется положительно определенная квадратичная функция $V(x_a) =$

$= x_a^T P x_a$, приращение которой в силу уравнения (4.1) удовлетворяет следующим условиям соответственно для каждой нормы (аналогично условиям (3.5), (3.7) и (3.9) для системы (3.2)):

$$(A_\Theta^T x_a + C_{\Delta\Theta}^T w_\Delta)^T P (A_\Theta^T x_a + C_{\Delta\Theta}^T w_\Delta) - x_a^T P x_a + |z_a|^2 \leq 0, \quad C_\Theta P C_\Theta^T < \gamma^2 I;$$

$$(A_\Theta^T x_a + C_{\Delta\Theta}^T w_\Delta + C_\Theta^T w_a)^T P (A_\Theta^T x_a + C_{\Delta\Theta}^T w_\Delta + C_\Theta^T w_a) - x_a^T P x_a - |w_a|^2 \leq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & * \\ B^T & \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0;$$

$$(A_\Theta^T x_a + C_{\Delta\Theta}^T w_\Delta + C_\Theta^T w_a)^T P (A_\Theta^T x_a + C_{\Delta\Theta}^T w_\Delta + C_\Theta^T w_a) - x_a^T P x_a + |z_a|^2 - \gamma^2 |w_a|^2 < 0$$

при всех x_a , w_a и всех $w_\Delta \in \mathbf{W}_\Delta$, т.е. удовлетворяющих ограничениям (4.2). Достаточным для этого условием является существование матрицы $P = P^T > 0$ и неотрицательных чисел $\mu \geq 0$ и $\nu \geq 0$, при которых для всех x_a , w_a и w_Δ выполняются соответствующие условия

$$\Delta V + |z_a|^2 - \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^T (\mu \Psi + \nu \Upsilon) \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} \leq 0, \quad C_\Theta P C_\Theta^T < \gamma^2 I;$$

$$\Delta V - |w_a|^2 - \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^T (\mu \Psi + \nu \Upsilon) \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} P & * \\ B^T & \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0;$$

$$\Delta V + |z_a|^2 - \gamma^2 |w_a|^2 - \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^T (\mu \Psi + \nu \Upsilon) \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0,$$

где приращение функции $V(x)$ в первом из этих неравенств берется по траектории системы (4.1) при $w_a(t) \equiv 0$. Записывая эти неравенства в виде матричных неравенств, вводя новую матричную переменную $Z = \Theta P$, заменяя матрицу $\nu \Lambda$ матрицей Λ без изменения обозначения и применяя лемму Шура, приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. *Гарантированные оценки γ_0 -, обобщенной H_2 - и H_∞ -норм неопределенной системы (2.1), (2.2) при законе управления $u(t) = \Theta x(t)$, где $\Theta = ZP^{-1}$, меньше γ , если следующие соответствующие линейные матричные неравенства разрешимы относительно $P > 0$, Z , $\Lambda \in \mathbf{\Lambda}$ и $\mu \geq 0$:*

$$(4.4) \quad \begin{pmatrix} -P & * & * & * & * \\ \mathcal{F}_A & -P - \mu \Psi_{22} & * & * & * \\ \mathcal{F}_{C_\Delta} & -\mu \Psi_{12} & -\mu \Psi_{11} - \Lambda & * & * \\ \mathcal{F}_C & 0 & 0 & -I & * \\ 0 & \Lambda \eta^T B_\Delta^T & 0 & 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \leq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & * \\ B^T & \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0;$$

$$(4.5) \quad \begin{pmatrix} -P & * & * & * & * \\ \mathcal{F}_A & -P - \mu\Psi_{22} & * & * & * \\ 0 & B^T & -I & * & \\ \mathcal{F}_{C_\Delta} & -\mu\Psi_{12} & 0 & -\mu\Psi_{11} - \Lambda & * \\ 0 & \Lambda\eta^T B_\Delta^T & 0 & 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \leq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & * \\ \mathcal{F}_C & \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0$$

и

$$(4.6) \quad \begin{pmatrix} -P & * & * & * & * & * \\ \mathcal{F}_A & -P - \mu\Psi_{22} & * & * & * & * \\ 0 & B^T & -I & * & * & * \\ \mathcal{F}_{C_\Delta} & -\mu\Psi_{12} & 0 & -\mu\Psi_{11} - \Lambda & * & * \\ \mathcal{F}_C & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & \Lambda\eta^T B_\Delta^T & 0 & 0 & 0 & -\Lambda \end{pmatrix} < 0,$$

где $\mathcal{F}_A = AP + B_u Z$, $\mathcal{F}_C = CP + DZ$, $\mathcal{F}_{C_\Delta} = C_\Delta P + D_\Delta Z$, элементы матриц Ψ определены в (2.11) и матрица $\eta = \text{diag}(\eta_1 I_{n_1}, \dots, \eta_l I_{n_l})$ определена в (2.2).

Обозначим минимальные значения γ^2 , получаемые согласно этой теореме, как $\gamma^2(\hat{\Delta}, \Theta)$, где аргументами являются матрица параметров системы ($\hat{\Delta}$ – для неопределенной системы, $\hat{\Delta}^{(real)}$ – для реальной системы) и матрица параметров применяемой обратной связи: $\Theta^{(ab)}$ – матрица параметров соответствующего робастного закона управления, использующего априорные и экспериментальные данные, $\Theta^{(a)}$ – если используются только априорные данные, $\Theta^{(b)}$ – если используются только экспериментальные данные. Если используются только априорные данные, то гарантированные оценки норм $\gamma^2(\hat{\Delta}, \Theta^{(a)})$ находятся при решении соответствующих неравенств с $\mu = 0$; если используются только экспериментальные данные, то $\gamma^2(\hat{\Delta}, \Theta^{(b)})$ находятся при решении этих неравенств с $\Lambda = 0$. При этом ясно, что $\gamma^2(\hat{\Delta}, \Theta^{(ab)}) \leq \min\{\gamma^2(\hat{\Delta}, \Theta^{(a)}), \gamma^2(\hat{\Delta}, \Theta^{(b)})\}$.

В случае полностью неизвестных матриц состояния и управления системы, для которого матрицы уравнения (2.1) определены в (2.4) и $\Delta\Delta^T \leq \eta^2 I$, теорема 4.1 дает гарантированные оценки норм при $\Lambda = \{\lambda I : \lambda \geq 0\}$.

Приведенные в теореме 4.1 неравенства позволяют при выборе соответствующих блоков $\mathcal{F}_A$, $\mathcal{F}_C$, $\mathcal{F}_{C_\Delta}$ и переменных Λ , μ вычислять параметры законов управления и нормы для разнообразных сценариев. В следующем разделе некоторые из этих сценариев будут реализованы для иллюстратив-

ного примера и там же будут приведены соответствующие им блоки $\mathcal{F}_A$, $\mathcal{F}_C$, $\mathcal{F}_{C_\Delta}$ и переменные Λ , μ в неравенствах (4.4)–(4.6).

5. Иллюстративный пример

Приведем результаты ряда экспериментов, выполненных с системой вида (2.1)

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 & -0,3 \\ -0,2 + \delta & 0,6 + \Delta_{11} & -0,1 + \Delta_{12} \\ 0,5 & -0,2 + \Delta_{21} & 0,9 + \Delta_{22} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 1 + \delta \\ 0,5 \end{pmatrix} u(t) + w(t),$$

$$z(t) = \begin{pmatrix} I_3 \\ 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0_{3 \times 1} \\ 0,2 \end{pmatrix} u(t),$$

в которой

$$B_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_\Delta = I_3, \quad D_\Delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = \delta, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix}, \quad |\delta| \leq 0,12; \quad \Delta_2 \Delta_2^T \leq 0,19.$$

1. Учитывая только априорную информацию, вычислим гарантированные оценки норм и матрицы параметров соответствующих субоптимальных робастных законов управления по формуле $\Theta^{(a)} = ZP^{-1}$, решая неравенства (4.4)–(4.6) при $\mathcal{F}_A = AP + B_u Z$, $\mathcal{F}_C = CP + DZ$, $\mathcal{F}_{C_\Delta} = C_\Delta P + D_\Delta Z$, $\eta = \text{diag } (0,12; 0,19I_2)$, $\mu = 0$ и $\Lambda \geq 0$ – неизвестная переменная:

$$\gamma_0^2(\widehat{\Delta}, \Theta_0^{(a)}) = 12,8095; \quad \Theta_0^{(a)} = (-0,4356; -0,6420; -0,3125),$$

$$\gamma_{g2}^2(\widehat{\Delta}, \Theta_{g2}^{(a)}) = 10,5935; \quad \Theta_{g2}^{(a)} = (-0,8498; -0,7996; -0,6503),$$

$$\gamma_\infty^2(\widehat{\Delta}, \Theta_\infty^{(a)}) = 49,2653; \quad \Theta_\infty^{(a)} = (-1,2373; -0,8204; -0,9710).$$

Допустим, что реальной системе соответствуют следующие значения неопределенных параметров: $\delta^{(real)} = -0,05$, $\Delta_{11}^{(real)} = 0,2$, $\Delta_{12}^{(real)} = \Delta_{21}^{(real)} = 0$, $\Delta_{22}^{(real)} = -0,1$, так что

$$(5.1) \quad \widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}^{(real)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,05 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1 \end{pmatrix},$$

а матрицы состояния и управления реального объекта равны

$$A^{(real)} = A + \widehat{\Delta}^{(real)} C_\Delta, \quad B_u^{(real)} = B_u + \widehat{\Delta}^{(real)} D_\Delta.$$

Вычислим три нормы замкнутой системы, состоящей из реального объекта и полученной робастной обратной связи с матрицей параметров $\Theta^{(a)}$, решая неравенства (4.4)–(4.6) с

$$\mathcal{F}_A = (A^{(real)} + B_u^{(real)}\Theta^{(a)})P, \quad \mathcal{F}_C = (C + D\Theta^{(a)})P, \quad \mathcal{F}_{C_\Delta} = 0$$

и при $\Lambda = 0, \mu = 0$:

$$\gamma_0^2(\hat{\Delta}^{(real)}, \Theta_0^{(a)}) = 4,8319;$$

$$\gamma_{g2}^2(\hat{\Delta}^{(real)}, \Theta_{g2}^{(a)}) = 5,1373;$$

$$\gamma_\infty^2(\hat{\Delta}^{(real)}, \Theta_\infty^{(a)}) = 23,5459.$$

Для сравнения приведем еще оптимальные значения рассматриваемых норм и матриц параметров оптимальных обратных связей для реальной системы (если бы ее знали), вычисляемых по формуле $\Theta^{(real)} = ZP^{-1}$ при решении неравенств (4.4)–(4.6) с $\mathcal{F}_A = A^{(real)}P + B_u^{(real)}Z$, $\mathcal{F}_C = CP + DZ$, $\mathcal{F}_{C_\Delta} = 0$, $\Lambda = 0, \mu = 0$:

$$\gamma_0^2(\hat{\Delta}^{(real)}, \Theta_0^{(real)}) = 3,9569; \quad \Theta_0^{(real)} = (-0,0765; -0,9379; 0,0064),$$

$$\gamma_{g2}^2(\hat{\Delta}^{(real)}, \Theta_{g2}^{(real)}) = 4,4024; \quad \Theta_{g2}^{(real)} = (-0,1369; -0,9249; -0,0741),$$

$$\gamma_\infty^2(\hat{\Delta}^{(real)}, \Theta_\infty^{(real)}) = 10,4651; \quad \Theta_\infty^{(real)} = (-1,2547; -1,3605; -0,3919).$$

- Рассмотрим ситуацию, когда априорная информация об области возможных значений неизвестных параметров объекта отсутствует и используются экспериментальные данные. Вычислим гарантированные оценки норм и найдем матрицы параметров субоптимальных робастных обратных связей по формуле $\Theta^{(b)} = ZP^{-1}$, решая неравенства (4.4)–(4.6) при $\mathcal{F}_A = AP + B_uZ$, $\mathcal{F}_C = CP + DZ$, $\mathcal{F}_{C_\Delta} = C_\Delta P + D_\Delta Z$, $\Lambda = 0$ и $\mu \geq 0$ – неизвестная переменная. Для получения экспериментальных данных будем моделировать уравнение (2.8) с начальными условиями $x_0 = (9; 5; -7)^T$ при неопределенностях $\delta^{(real)} = -0,05$, $\Delta_{11}^{(real)} = 0,2$, $\Delta_{12}^{(real)} = \Delta_{21}^{(real)} = 0$, $\Delta_{22}^{(real)} = -0,1$, так что $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}^{(real)}$. Компоненты векторов управления $u(t)$ и возмущения $w(t)$ в эксперименте будем выбирать как значения случайных величин, равномерно распределенных на интервалах $[-1, 1]$ и $[-d, d]$ соответственно и получаемых с помощью датчика случайных чисел. Для $d = 0,1$ и $N = 100$ получились следующие результаты:

$$\gamma_0^2(\hat{\Delta}, \Theta_0^{(b)}) = 9,2104; \quad \Theta_0^{(b)} = (-0,1087; -0,8626; -0,0074),$$

$$\gamma_{g2}^2(\hat{\Delta}, \Theta_{g2}^{(b)}) = 11,0614; \quad \Theta_{g2}^{(b)} = (-0,1745; -1,0321; -0,0257),$$

$$\gamma_\infty^2(\hat{\Delta}, \Theta_\infty^{(b)}) = 56,6811; \quad \Theta_\infty^{(b)} = (-0,6556; -1,3677; -0,0644).$$

Для реальной системы, замкнутой робастными обратными связями с соответствующими матрицами параметров $\Theta^{(b)}$, получились следующие значения норм при решении неравенств (4.4)–(4.6) с

$$\mathcal{F}_A = (A^{(real)} + B_u^{(real)}\Theta^{(b)})P, \quad \mathcal{F}_C = (C + D\Theta^{(b)})P, \quad \mathcal{F}_{C_\Delta} = 0$$

и при $\Lambda = 0$, $\mu = 0$:

$$\gamma_0^2(\hat{\Delta}^{(real)}, \Theta_0^{(b)}) = 3,9640;$$

$$\gamma_{g2}^2(\hat{\Delta}^{(real)}, \Theta_{g2}^{(b)}) = 4,4416;$$

$$\gamma_\infty^2(\hat{\Delta}^{(real)}, \Theta_\infty^{(b)}) = 12,2661.$$

3. Осуществим синтез субоптимального робастного управления на основе как априорной информации, так и тех же экспериментальных данных, полученных выше при моделировании реальной системы. Для этого вычислим гарантированные оценки норм и найдем матрицы параметров робастных обратных связей по формуле $\Theta^{(ab)} = ZP^{-1}$ при решении неравенств (4.4)–(4.6), в которых $\mathcal{F}_A = AP + B_uZ$, $\mathcal{F}_C = CP + DZ$, $\mathcal{F}_{C_\Delta} = C_\Delta P + D_\Delta Z$, $\Lambda \geq 0$ и $\mu \geq 0$ – неизвестные переменные:

$$\gamma_0^2(\hat{\Delta}, \Theta_0^{(ab)}) = 8,2265; \quad \Theta_0^{(ab)} = (-0,1613; -0,7716; -0,0661),$$

$$\gamma_{g2}^2(\hat{\Delta}, \Theta_{g2}^{(ab)}) = 8,9113; \quad \Theta_{g2}^{(ab)} = (-0,4617; -0,8835; -0,2449),$$

$$\gamma_\infty^2(\hat{\Delta}, \Theta_\infty^{(ab)}) = 35,2885; \quad \Theta_\infty^{(ab)} = (-0,9790; -1,0324; -0,5212).$$

Для реальной системы, замкнутой робастными обратными связями с матрицами параметров $\Theta^{(ab)}$, три нормы, найденные при решении неравенств (4.4)–(4.6) с

$$\mathcal{F}_A = (A^{(real)} + B_u^{(real)}\Theta^{(ab)})P, \quad \mathcal{F}_C = (C + D\Theta^{(ab)})P, \quad \mathcal{F}_{C_\Delta} = 0$$

и при $\Lambda = 0$, $\mu = 0$, принимают следующие значения:

$$\gamma_0^2(\hat{\Delta}^{(real)}, \Theta_0^{(ab)}) = 4,0280;$$

$$\gamma_{g2}^2(\hat{\Delta}^{(real)}, \Theta_{g2}^{(ab)}) = 4,5248;$$

$$\gamma_\infty^2(\hat{\Delta}^{(real)}, \Theta_\infty^{(ab)}) = 14,3512.$$

На рис. 1–3 приведены гарантированные оценки γ_0 -, обобщенной H_2 -, и H_∞ -норм соответственно, полученные только по априорной информации, только по экспериментальным данным и совместно по априорной информации и экспериментальным данным, в зависимости от уровня возмущения d в эксперименте; нижние горизонтальные линии отвечают значениям этих норм

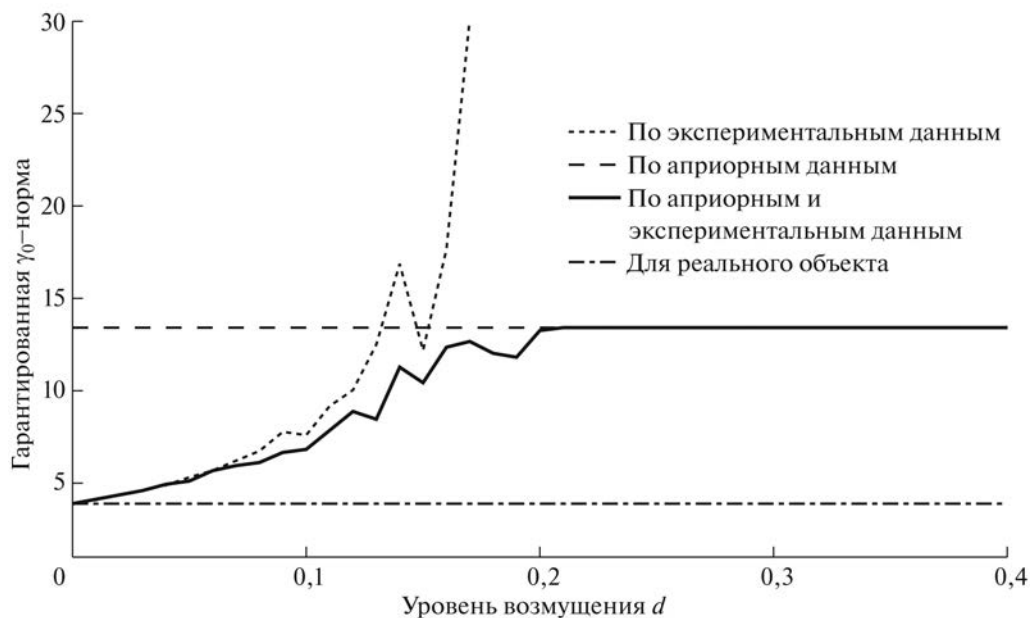


Рис. 1. Гарантированные оценки γ_0 -нормы как функции уровня возмущения в экспериментальных данных для различных видов используемой информации.

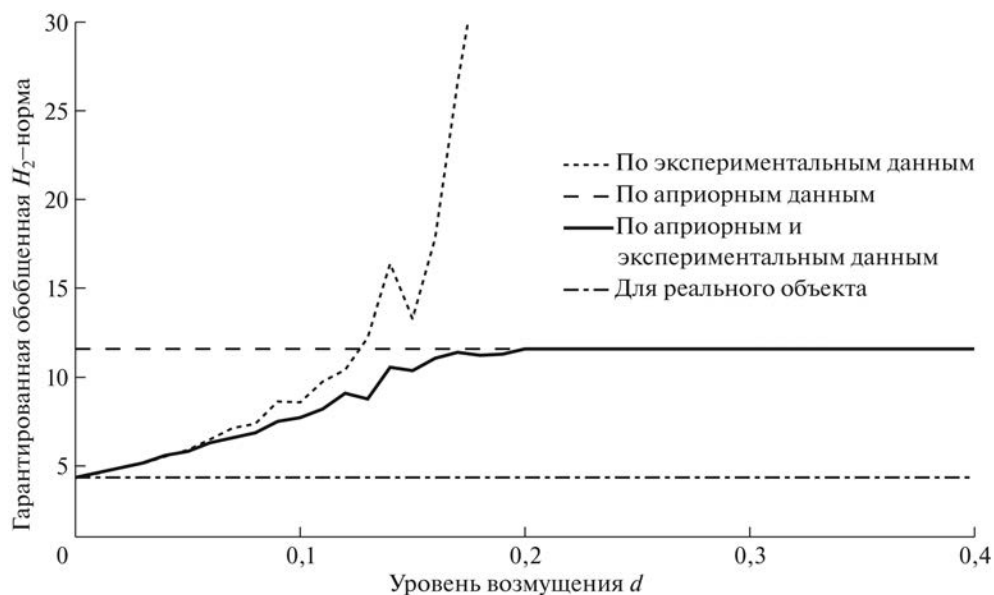


Рис. 2. Гарантированные оценки обобщенной H_2 -нормы как функции уровня возмущения в экспериментальных данных для различных видов используемой информации.

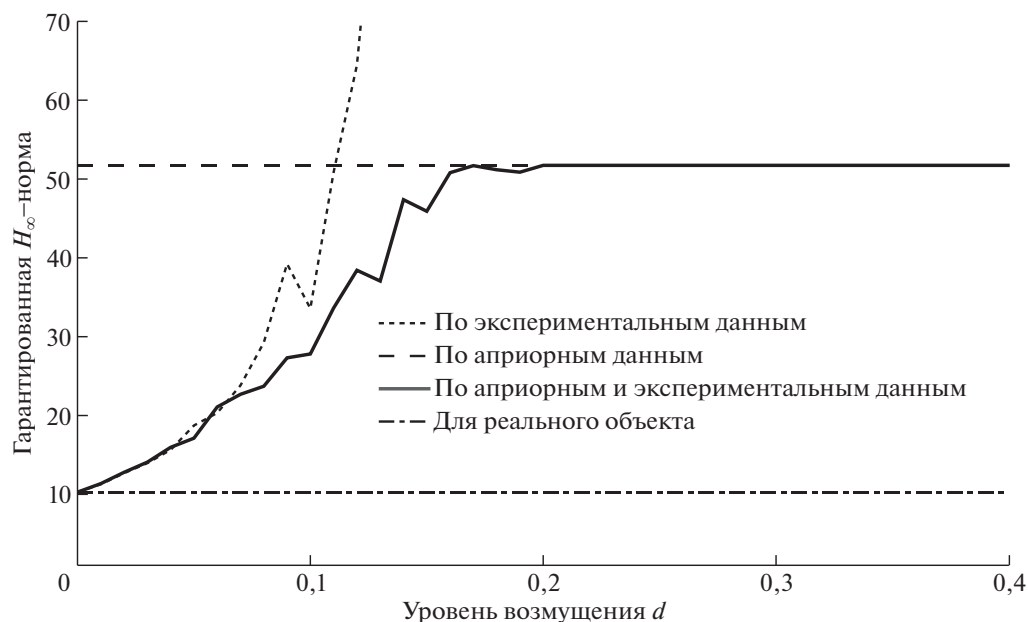


Рис. 3. Гарантированные оценки H_∞ -нормы как функции уровня возмущения в экспериментальных данных для различных видов используемой информации.

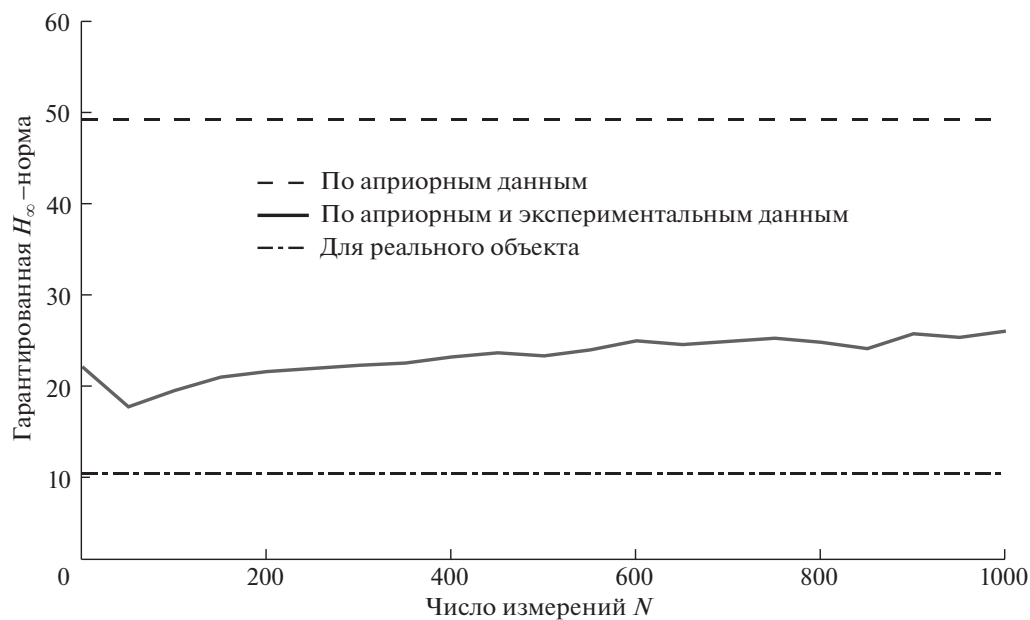


Рис. 4. Зависимость гарантированной оценки H_∞ -нормы при заданном уровне возмущения в экспериментальных данных от числа измерений.

для реального объекта, верхние линии соответствуют их значениям при робастных законах управления, синтезированных только по априорной информации. На рис. 4 приведен график гарантированной оценки H_∞ -нормы, полученной при совместном использовании априорной информации и экспериментальных данных с уровнем возмущения $d = 0,05$, как функции числа измерений N ; горизонтальные линии отвечают H_∞ -норме реального объекта и гарантированной оценке H_∞ -нормы, полученной при использовании только априорной информации.

Эти результаты говорят о том, что если уровень возмущений в эксперименте относительно не очень большой, то гарантированные оценки норм замкнутой неопределенной системы, синтезированной при использовании как априорных, так и экспериментальных данных, значительно меньше соответствующих оценок норм замкнутой системы при робастных управлениях, синтезированных только по априорным данным или только по экспериментальным данным. Например, гарантированные оценки H_∞ -норм замкнутой системы при законах управления, синтезируемых при использовании только априорных или только экспериментальных данных с уровнем возмущения $d = 0,1$, соответственно равны $\gamma_\infty^2(\hat{\Delta}, \Theta_\infty^{(a)}) = 49,2653$ и $\gamma_\infty^2(\hat{\Delta}, \Theta_\infty^{(b)}) = 56,6811$, а при совместном использовании этих априорных и экспериментальных данных гарантированная оценка H_∞ -нормы равна $\gamma_\infty^2(\hat{\Delta}, \Theta_\infty^{(ab)}) = 35,2885$. Что касается наблюдаемого эффекта увеличения гарантированных оценок норм, получаемых на основе только экспериментальных данных, то это происходит из-за того, что с увеличением уровня возмущения расширяется множество допустимых моделей объекта, согласующихся с экспериментальными данными, и соответственно растет максимальное значение нормы на этом множестве. Важно подчеркнуть, что диапазон уровней возмущения, в котором гарантированная оценка нормы при совместном использовании априорных и экспериментальных данных меньше, чем гарантированная оценка нормы при использовании только априорных данных, зависит от начальных условий и выбираемых управлений в эксперименте и, таким образом, может варьироваться и даже, по-видимому, планироваться. Кроме того, из рис. 4 видно, что для получения приемлемых результатов не требуется большого количества измерений.

6. Заключение

В работе предложен новый метод построения субоптимальных робастных законов управления, позволяющий учитывать не только априорную информацию о математической модели объекта, но и экспериментальные данные моделирования объекта на небольшом интервале времени. При получении экспериментальных данных не требуется ни выполнение условия неисчезающего возмущения, которое обеспечивает идентифицируемость неизвестных параметров, ни выполнение условия информативности данных для соответствующего закона управления. Использование в этом методе дополнительной

информации о неизвестных параметрах объекта, полученной из экспериментальных данных, существенно уменьшает гарантированные оценки γ_0 -, обобщенной H_2 - и H_∞ -норм замкнутой системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 3.1. Запишем функцию Лагранжа для этой задачи и выразим оптимальное значение двойственной ей функции как

$$\begin{aligned} & \min_{P_0 \geq 0, \gamma^2 \geq 0} \max_{K_x \geq 0, K_w \geq 0} \left[\text{tr } C_\Theta K_x C_\Theta^T + \text{tr } P_0 (A_\Delta K_x A_\Delta^T - K_x + B K_w B^T) + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \gamma^2 (1 - \text{tr } K_w) \right] = \\ & = \min_{P_0 \geq 0, \gamma^2 \geq 0} \max_{K_x \geq 0, K_w \geq 0} \left[\gamma^2 + \text{tr } K_x (A_\Delta^T P_0 A_\Delta - P_0 + C_\Theta^T C_\Theta) + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \text{tr } K_w (B^T P_0 B - \gamma^2 I) \right]. \end{aligned}$$

Для того чтобы эта величина была конечной, должны выполняться неравенства (3.4), и тогда максимум достигается при $K_x = 0$ и $K_w = 0$. При этом оптимальное значение двойственной задачи совпадает с $\lambda_{\max}(B^T P_0 B)$. Так как функция является выпуклой и имеется внутренняя точка, удовлетворяющая ограничению, то оптимальные значения прямой и двойственной задач совпадают [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. Petersen I.R., Tempo R. Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // Automatica. 2014. V. 50. No. 5. P. 1315–1335.
3. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Метод скоростного градиента и его приложения // АИТ. 2021. № 9. С. 3–72.
Andrievsky B.R., Fradkov A.L. Speed Gradient Method and Its Applications // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1463–1518.
4. Annaswamy A.A., Fradkov A.L. A Historical Perspective of Adaptive Control and Learning // Annual Reviews in Control. 2021. V. 52. P. 18–41.
5. De Persis C., Tesi P. Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality and Robustness // IEEE Trans. Automat. Control. 2020. V. 65. No. 3. P. 909–924.
6. Waarde H.J., Eising J., Trentelman H.L., Camlibel M.K. Data Informativity: a New Perspective on Data-Driven Analysis and Control // IEEE Trans. Automat. Control. 2020. V. 65. No. 11. P. 4753–4768.
7. Berberich J., Koch A., Scherer C.W., Allgower F. Robust data-driven state-feedback design // Proc. Amer. Control Conf. 2020. P. 1532–1538.
8. Waarde H.J., Camlibel M.K., Mesbahi M. From Noisy Data to Feedback Controllers: Nonconservative Design via a Matrix S-Lemma // IEEE Trans. Automat. Control. 2022. V. 67. No. 1. P. 162–175.

9. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Data-driven Control via Petersen's Lemma // Automatica. 2022. V. 145. Article 110537.
10. *Willems J.C., Rapisarda P., Markovsky I., De Moor B.* A note on persistency of excitation // Syst. Control Lett. 2005. V. 54. P. 325–329.
11. *Якубович В.А.* S-процедура в нелинейной теории управления // Вестник Ленинградского университета. Математика. 1977. Т. 4. С. 73–93.
12. *Petersen I.R.* A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.
13. *Doyle J.C.* Analysis of feedback systems with structured uncertainties // IEE Proc. 1982. V. 129. Part D(6). P. 242–250.
14. *Safonov M.G.* Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems // IEE Proc. 1982. V. 129. Part D(6). P. 251–256.
15. *Kogan M.M.* Optimal discrete-time H_∞/γ_0 filtering and control under unknown covariances // Int. J. Control. 2016. V. 89. No. 4. P. 691–700.
16. *Wilson D.A.* Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 1. P. 94–97.
17. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Минимаксное управление отклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // АиТ. 2019. № 12. С. 3–24.
Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Minimax Control of Deviations for the Outputs of a Linear Discrete Time-Varying System // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 12. P. 345–359.
18. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: University Press, 2004.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 21.03.2023

После доработки 02.05.2023

Принята к публикации 09.06.2023

Нелинейные системы

© 2023 г. В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук (vlkhats@mail.ru)
(Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»,
Воронеж)

НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОЦЕССЫ С НЕЧЕТКИМИ СОСТОЯНИЯМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Введены и изучены скалярные характеристики непрерывных процессов с нечеткими состояниями — средние и корреляционные функции. Установлены их алгебраические свойства, а также свойства, связанные с операциями дифференцирования и интегрирования нечетких функций вещественного аргумента. Показана зависимость между характеристиками нечеткого сигнала на входе и выходе динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением высокого порядка с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: непрерывные нечеткие процессы, средние корреляционные функции, «нечеткие» динамические системы.

DOI: 10.31857/S0005231023080032, EDN: HBBOUB

1. Введение

При исследовании динамических процессов в условиях ограниченной исходной информации один из возможных подходов заключается в трактовке их параметров как реализации некоторых случайных процессов [1]. Однако часто возникает ситуация, когда закон распределения случайных величин в рассматриваемые моменты времени слабоформализуем. В этом случае удобно рассматривать такие процессы, как процессы с нечеткими состояниями (нечеткие процессы). В частности, важный класс «нечетких» динамических процессов дают системы автоматического регулирования и оптимального управления.

Таким образом, непрерывные нечеткие процессы представляют собой альтернативный по отношению к непрерывным случайным процессам метод моделирования задач теории автоматического регулирования. При этом «нечеткий» процесс понимается как параметрическая система нечетких чисел, непрерывно зависящая от параметра (времени). В настоящее время теория нечетких множеств используется при решении разнообразных прикладных задач [2, 3]. В частности, исследованы различные нечеткие модели объектов управления [4].

В разделах 3–4 настоящей работы введены и изучены числовые характеристики непрерывных процессов с нечеткими состояниями и непрерывным временем, а именно средние и корреляционные функции. Установлены их свойства, аналогичные свойствам соответствующих характеристик непрерывных случайных процессов. В разделе 3 рассмотрены алгебраические свойства средних и корреляционных функций непрерывных нечетких процессов. В разделе 4 установлены свойства этих характеристик относительно интегралов и производных от нечетких процессов. При этом интегралы от нечетких функций понимаются как частный случай интегралов Аумана [5] от многозначных функций (как интегралы от α -срезов). Они рассмотрены в [6, 7 и др.]. Различные определения производных от нечетких функций рассмотрены в [6–8 и др.]. Здесь используем определение, связанное с разностью множеств по Хукухаре [9]. Результаты разделов 3 и 4 опираются на определение и свойства ковариации нечетких чисел, рассмотренные в работе автора [10] и изложенные в разделе 2.

В настоящее время активно исследуются «нечеткие» дифференциальные уравнения и их приложения, см. [3 (гл. 7, 8), 7, 8, 11–13 и др.]. Из последних работ отметим [14, 15]. В разделе 5 данной работы рассматриваются «нечеткие» динамические системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка с постоянными коэффициентами. Установлена зависимость между числовыми характеристиками нечеткого сигнала на выходе «нечеткой» динамической системы и соответствующими характеристиками входного нечеткого сигнала. В отличие от известных подходов [12–15] излагаемый здесь подход опирается на развитие метода функции Грина, широко распространенного в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [16, гл. II; 17, гл. 1], на случай нечетких дифференциальных уравнений.

2. Среднее, квазискалярное произведение и ковариация нечетких чисел

Под нечетким числом будем понимать нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел, имеющее компактный носитель и нормальную, выпуклую и полунепрерывную сверху функцию принадлежности (см., например, [2, гл. 5]). Множество таких нечетких чисел обозначим через J .

Ниже будем использовать интервальное представление нечетких чисел.

Как известно, интервалы α -уровня (α -уровни) нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяются соотношениями

$$z_{\alpha} = \{x | \mu_{\tilde{z}}(x) \geq \alpha\}, \quad (\alpha \in (0, 1]), \quad z_0 = cl\{x | \mu_{\tilde{z}}(x) > 0\},$$

где cl обозначает замыкание множества. Согласно принятым предположениям все α -уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси.

Обозначим левую границу α -интервала через $z^{-}(\alpha)$, а правую — $z^{+}(\alpha)$, таким образом, $z_{\alpha} = [z^{-}(\alpha), z^{+}(\alpha)]$. Выражения $z^{-}(\alpha)$ и $z^{+}(\alpha)$ называют со-

ответственно левым и правым α -индексами (индексами) нечеткого числа. Вещественное число $x \in R$ трактуется как нечеткое число с левым и правым α -индексами, равными x .

Ниже под суммой нечетких чисел с индексами $z^-(\alpha)$, $z^+(\alpha)$ и $u^-(\alpha)$, $u^+(\alpha)$ понимается нечеткое число с интервалами α -уровня $[z^-(\alpha) + u^-(\alpha), z^+(\alpha) + u^+(\alpha)]$. Умножение на положительное число c характеризуется интервалами α -уровня $[cz^-(\alpha), cz^+(\alpha)]$, а умножение на отрицательное число c — интервалами α -уровня $[cz^+(\alpha), cz^-(\alpha)]$. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α -индексов при $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Как известно [18], среднее значение нечеткого числа $\tilde{z}$, используя интервальное представление, можно определить следующим способом:

$$(1) \quad m(\tilde{z}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (z^-(\alpha) + z^+(\alpha)) d\alpha.$$

Отметим, что среднее (1) является линейным.

Пример 1. Рассмотрим нечеткое треугольное число $\tilde{z}$, характеризуемое тройкой вещественных чисел (a, b, c) при $a < b < c$, определяющей функцию принадлежности

$$\mu_{\tilde{z}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b]; \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b, c]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как известно, в этом случае нижняя и, соответственно, верхняя граница α -интервала имеют вид

$$z^-(\alpha) = (b-a)\alpha + a, \quad z^+(\alpha) = -(c-b)\alpha + c.$$

Нетрудно подсчитать, что среднее (1) для нечеткого треугольного числа (a, b, c) равно $m(\tilde{z}) = \frac{1}{4}(a + 2b + c)$.

На множестве нечетких чисел можно по-разному ввести определения расстояний между ними. При интервальном подходе часто используют расстояния Хаусдорфа между множествами α -уровня нечетких чисел. А именно, для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ с α -уровнями z_α и u_α задают метрику [19]

$$(2) \quad \rho(\tilde{z}, \tilde{u}) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} \max \left\{ \sup_{z \in z_\alpha} \inf_{u \in u_\alpha} |z - u|, \sup_{u \in u_\alpha} \inf_{z \in z_\alpha} |z - u| \right\}.$$

Определение (2) порождает равенство

$$(3) \quad \rho(\tilde{z}, \tilde{u}) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} \max \{ |z^-(\alpha) - u^-(\alpha)|, |z^+(\alpha) - u^+(\alpha)| \}.$$

Здесь $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ — интервалы α -уровней нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$.

Отметим, что условие $\rho(\tilde{z}, \tilde{u}) = 0$ в силу (3) соответствует определению равенства нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$, данному выше.

Пусть нечеткому числу $\tilde{z}$ отвечают α -уровни $z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Положим, как это принято в интервальном анализе,

$$\text{mid } z_\alpha = \frac{1}{2}(z^+(\alpha) + z^-(\alpha)), \quad \text{rad } z_\alpha = \frac{1}{2}(z^+(\alpha) - z^-(\alpha)).$$

Здесь $\text{mid } z_\alpha$ характеризует среднее при каждом $\alpha \in [0, 1]$, а $\text{rad } z_\alpha$ — размах. Для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ из J определим квазискалярное произведение [10]

$$(4) \quad \begin{aligned} \langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle &= \int_0^1 (\text{mid } z_\alpha \text{mid } u_\alpha + \text{rad } z_\alpha \text{rad } u_\alpha) d\alpha = \\ &= 0,5 \int_0^1 (z^+(\alpha)u^+(\alpha) + z^-(\alpha)u^-(\alpha)) d\alpha. \end{aligned}$$

При этом квазинорма равна $\|\tilde{z}\| = \langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle^{1/2}$.

Пример 2. Рассмотрим два треугольных числа $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$, характеризующиеся тройками вещественных чисел a_i, b_i, c_i при $a_i < b_i < c_i$ ($i = 1, 2$). По определению их правых и левых индексов (см. пример 1) и согласно (4) квазискалярное произведение $\langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \rangle$ подсчитывается по формуле

$$\langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \rangle = \frac{2}{3}b_1b_2 + \frac{1}{3}(a_1a_2 + c_1c_2) + \frac{1}{6}(a_1b_2 + b_1a_2 + b_1c_2 + b_2c_1).$$

Утверждение 1 [10]. *Справедливы следующие свойства квазискалярного произведения (4).*

- 1) $\langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle = \langle \tilde{u}, \tilde{z} \rangle \forall \tilde{u}, \tilde{z} \in J$;
- 2) $\langle c_1\tilde{z}, c_2\tilde{u} \rangle = c_1c_2\langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle$ при условии, что $c_1c_2 > 0$;
- 3) $\langle \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, \tilde{u} \rangle = \langle \tilde{z}_1, \tilde{u} \rangle + \langle \tilde{z}_2, \tilde{u} \rangle \forall \tilde{u}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in J$;
- 4) $\langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle \geq 0$, причем условие $\langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle = 0$ эквивалентно равенству нулю левого и правого индексов $\tilde{z}$;
- 5) Обобщенное неравенство Коши–Буняковского $|\langle \tilde{z}, \tilde{u} \rangle| \leq \langle \tilde{z}, \tilde{z} \rangle^{1/2} \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle^{1/2}$, $\forall \tilde{u}, \tilde{z} \in J$.

Для нечетких чисел $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ со средними значениями m_1 и m_2 определим их ковариацию формулой [10]

$$(5) \quad \begin{aligned} \text{cov}[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2] &= \langle \tilde{z}_1 - m_1, \tilde{z}_2 - m_2 \rangle = \\ &= 0,5 \int_0^1 ((z_1^+ - m_1)(z_2^+ - m_2) + (z_1^- - m_1)(z_2^- - m_2)) d\alpha. \end{aligned}$$

Обозначим дисперсию как $D(\tilde{z}) = \text{cov}[\tilde{z}, \tilde{z}]$.

Утверждение 2 [10]. Справедливы следующие свойства ковариации (5):

1) $cov[\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, \tilde{u}] = cov[\tilde{z}_1, \tilde{u}] + cov[\tilde{z}_2, \tilde{u}]$ ($\forall \tilde{u}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in J$);

2) $cov[c_1\tilde{z}, c_2\tilde{u}] = c_1c_2cov[\tilde{z}, \tilde{u}]$ ($\forall \tilde{u}, \tilde{z} \in J$) для любых вещественных c_1, c_2 , таких что $c_1c_2 > 0$;

3) специфическое свойство ковариации: $cov[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2] = \langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \rangle - m_1m_2$, ($\forall \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in J$), где m_1 и m_2 — средние значения нечетких чисел $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$.

Утверждение 3 [10]. Имеют место следующие свойства дисперсии:

1) $D(c\tilde{z}) = c^2D(\tilde{z})$ для любого вещественного числа c ,

2) $D(\tilde{z} + \tilde{u}) = D(\tilde{z}) + D(\tilde{u}) + 2cov[\tilde{z}, \tilde{u}]$ для $\forall \tilde{u}, \tilde{z} \in J$.

В ряде работ (см., например, [20]) в качестве ковариации нечетких чисел $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$ рассматривается выражение

$$cov_1[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2] = \frac{1}{4} \int_0^1 (z_1^+(\alpha) - z_1^-(\alpha))(z_2^+(\alpha) - z_2^-(\alpha))d\alpha.$$

При таком определении ковариация всегда неотрицательна, что не соответствует стандартным свойствам ковариации (для случайных величин).

3. Непрерывные нечеткие процессы

Фиксируем отрезок $[t_0, T]$ числовой оси при $t_0 \geq 0$. Отображение $\tilde{z}: [t_0, T] \rightarrow J$ будем называть процессом с нечеткими состояниями (или нечетким процессом) и непрерывным временем.

Пусть нечеткий процесс $\tilde{z}(t)$ при $t \in [t_0, T]$ характеризуется функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x, t)$. При фиксированном $\alpha \in (0, 1]$ рассмотрим α -интервал $z_\alpha(t) = \{x \in R : \mu_{\tilde{z}}(x, t) \geq \alpha\}$ и $z_0(\alpha) = cl\{x \in R : \mu_{\tilde{z}}(x, t) > 0\}$. Обозначим через $z_\alpha^-(t) = z^-(t, \alpha)$ и $z_\alpha^+(t) = z^+(t, \alpha)$ левую и соответственно правую границы α -интервала. Так что $z_\alpha(t) = [z^-(t, \alpha), z^+(t, \alpha)]$.

Ниже будем предполагать, что индексы $z^-(t, \alpha)$ и $z^+(t, \alpha)$ квадратично суммируемы по α при каждом $t \in [t_0, T]$ и непрерывны по t при любом $\alpha \in [0, 1]$.

Определим среднее значение $\tilde{z}(t)$ при каждом $t \in [t_0, T]$ равенством

$$(6) \quad m_{\tilde{z}}(t) = m(\tilde{z}(t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 (z^-(t, \alpha) + z^+(t, \alpha))d\alpha.$$

Теорема 1. Среднее значение непрерывного нечеткого процесса, определяемое формулой (6), обладает следующими свойствами.

1. Аддитивность. Если $\tilde{z}_1(t)$ и $\tilde{z}_2(t)$ — непрерывные нечеткие процессы, тогда $m(\tilde{z}_1(t) + \tilde{z}_2(t)) = m(\tilde{z}_1(t)) + m(\tilde{z}_2(t))$.

2. Однородность. Если $\tilde{z}(t)$ — непрерывный нечеткий процесс и $\varphi(t)$ — вещественная функция, тогда $m(\varphi(t)\tilde{z}(t)) = \varphi(t)m(\tilde{z}(t))$.

Действительно, свойство 1 следует из определения интервального сложения и свойства аддитивности интеграла Лебега.

Покажем свойство 2. Рассмотрим при фиксированном $t \in [t_0, T]$ нечеткое число $\tilde{w}(t) = \varphi(t)\tilde{z}(t)$. Заметим, что его левый и правый индексы $w^-(t, \alpha)$ и $w^+(t, \alpha)$ совпадают с выражениями $\varphi(t)z^-(t, \alpha)$ и $\varphi(t)z^+(t, \alpha)$ в случае $\varphi(t) \geq 0$ и с выражениями $\varphi(t)z^+(t, \alpha)$ и $\varphi(t)z^-(t, \alpha)$ в случае $\varphi(t) < 0$. Однако их сумма $w^-(t, \alpha) + w^+(t, \alpha)$ совпадает с выражением $\varphi(t)(z^-(t, \alpha) + z^+(t, \alpha))$ независимого от знака $\varphi(t)$. Отсюда в соответствии с (1) следует свойство 2.

Следствие 1. Если $f(t)$ — вещественная функция, то $m(\tilde{z}(t) + f(t)) = m(\tilde{z}(t)) + f(t)$.

При этом считаем, что при $\forall t \in [t_0, T]$ для вещественного числа $f(t)$ имеет место равенство $f^-(t) = f^+(t) = f(t)$.

Определим корреляционную функцию непрерывного нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$ равенством

$$(7) \quad K_{\tilde{z}}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \int_0^1 (z^+(t_1, \alpha) - m(\tilde{z}(t_1))) (z^+(t_2, \alpha) - m(\tilde{z}(t_2))) + \\ + (z^-(t_1, \alpha) - m(\tilde{z}(t_1))) (z^-(t_2, \alpha) - m(\tilde{z}(t_2))) d\alpha.$$

Дисперсией непрерывного нечеткого процесса назовем величину $D_{\tilde{z}}(t) = K_{\tilde{z}}(t, t)$. По определению $D_{\tilde{z}}(t) \geq 0$.

Теорема 2. Корреляционная функция непрерывного нечеткого процесса, определяемая формулой (7), обладает следующими свойствами.

1. *Симметричность. Для непрерывного нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$ при $\forall t_1, t_2 \in [t_0, T]$ имеет место равенство*

$$K_{\tilde{z}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{z}}(t_2, t_1).$$

2. *Если $\tilde{z}(t)$ — непрерывный нечеткий процесс и $\varphi(t)$ — числовая функция, тогда для непрерывного нечеткого процесса $\tilde{w}(t) = \varphi(t)\tilde{z}(t)$ корреляционная функция $K_{\tilde{w}}(t_1, t_2)$ имеет вид $K_{\tilde{w}}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_{\tilde{z}}(t_1, t_2)$ для $\forall t_1, t_2 \in [t_0, T]$, при которых выполнено условие $\varphi(t_1)\varphi(t_2) \geq 0$.*

3. *Если $\tilde{w}(t) = \tilde{z}(t) + \varphi(t)$, то $K_{\tilde{w}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{z}}(t_1, t_2)$.*

4. *Справедливо соотношение $|K_{\tilde{z}_1}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_{\tilde{z}}(t_1)D_{\tilde{z}}(t_2)}$.*

Теорема 2 основана на изложенных в разделе 2 свойствах ковариации (5) нечетких чисел.

Для непрерывных нечетких процессов $\tilde{z}_1(t)$ и $\tilde{z}_2(t)$ рассмотрим взаимную корреляционную функцию

$$K_{\tilde{z}_1\tilde{z}_2}(t, s) = \int_0^1 (z_1^+(t, \alpha) - m(\tilde{z}_1(t))) (z_2^+(s, \alpha) - m(\tilde{z}_2(s))) + \\ + (z_1^-(t, \alpha) - m(\tilde{z}_1(t))) (z_2^-(s, \alpha) - m(\tilde{z}_2(s))) d\alpha.$$

Теорема 3. Пусть $\tilde{z}_1(t)$ и $\tilde{z}_2(t)$ — непрерывные нечеткие процессы. Тогда корреляционная функция суммы $\tilde{w}(t) = \tilde{z}_1(t) + \tilde{z}_2(t)$ имеет вид

$$K_{\tilde{w}}(t, s) = K_{\tilde{z}_1}(t, s) + K_{\tilde{z}_2}(t, s) + K_{\tilde{z}_1, \tilde{z}_2}(t, s) + K_{\tilde{z}_1, \tilde{z}_2}(s, t).$$

Непрерывные нечеткие процессы $\tilde{z}_1(t)$ и $\tilde{z}_2(t)$ назовем некоррелированными на отрезке $[t_0, T]$, если выполнено равенство

$$K_{\tilde{z}_1 \tilde{z}_2}(t, s) = 0 \quad (\forall t, s \in [t_0, T]).$$

Следствие 2. Если непрерывные нечеткие процессы $\tilde{z}_1(t)$, $\tilde{z}_2(t)$ некоррелированы и $\tilde{w}(t) = \tilde{z}_1(t) + \tilde{z}_2(t)$, то

$$K_{\tilde{w}}(t, s) = K_{\tilde{z}_1}(t, s) + K_{\tilde{z}_2}(t, s) \quad (\forall t, s \in [t_0, T]).$$

4. Интегрирование и дифференцирование непрерывных нечетких процессов

Интегралом по промежутку $[t_0, T]$ от непрерывного нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$ называют [7] нечеткое число $\tilde{g}$, такое что его интервалы α -уровня при любом $\alpha \in [0, 1]$ имеют вид $g_\alpha = \int_{t_0}^T z_\alpha(t) dt$. Интеграл обозначают как $\int_{t_0}^T \tilde{z}(t) dt$.

По существу, это интеграл Аумана [5] от многозначного отображения $z_\alpha(t)$.

Если интеграл $\int_{t_0}^T \tilde{z}(t) dt$ существует, то процесс $\tilde{z}(t)$ называют интегрируемым на $[t_0, T]$.

Имеет место следующее свойство средних относительно интегралов.

Теорема 4. Пусть $\tilde{z}(t)$ — интегрируемый на $[t_0, T]$ нечеткий процесс. Тогда $m\left(\int_{t_0}^T \tilde{z}(\tau) d\tau\right) = \int_{t_0}^T m(\tilde{z}(\tau)) d\tau$.

Действительно, по определению интеграла для его индексов имеем

$$\left(\int_{t_0}^T \tilde{z}(\tau) d\tau\right)_\alpha^\pm = \int_{t_0}^T z^\pm(\tau, \alpha) d\tau.$$

Тогда

$$m\left(\int_{t_0}^T \tilde{z}(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^1 \left(\int_{t_0}^T (z^-(\tau, \alpha)) + (z^+(\tau, \alpha)) d\tau\right) d\alpha = \int_{t_0}^T m(\tilde{z}(\tau)) d\tau.$$

Для непрерывного нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$ при $\forall t \in [t_0, T]$ определим непрерывный нечеткий процесс $\tilde{g}(t) = \int_{t_0}^t \tilde{z}(\tau) d\tau$.

Теорема 5. Для корреляционной функции $K_{\tilde{g}}(t_1, t_2)$ интеграла $\tilde{g}(t)$ от непрерывного нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$ имеет место равенство $K_{\tilde{g}}(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} K_{\tilde{z}}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$.

Доказательство. По определению

$$\begin{aligned}
K_{\tilde{g}}(t_1, t_2) &= \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{t_0}^{t_1} z^+(\tau, \alpha) d\tau - \int_{t_0}^{t_1} m(\tilde{z}(\tau, \alpha)) d\tau \right) \left(\int_{t_0}^{t_2} z^+(\tau, \alpha) d\tau - \int_{t_0}^{t_2} m(\tilde{z}(\tau)) d\tau \right) + \\
&+ \left(\int_{t_0}^{t_1} z^-(\tau, \alpha) d\tau - \int_{t_0}^{t_1} m(\tilde{z}(\tau, \alpha)) d\tau \right) \left(\int_{t_0}^{t_2} z^-(\tau, \alpha) d\tau - \int_{t_0}^{t_2} m(\tilde{z}(\tau)) d\tau \right) d\alpha = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{t_0}^{t_1} (z^+(\tau, \alpha) - m(\tilde{z}(\tau))) d\tau \right) \left(\int_{t_0}^{t_2} (z^+(\tau, \alpha) - m(\tilde{z}(\tau))) d\tau \right) d\alpha + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{t_0}^{t_1} (z^-(\tau, \alpha) - m(\tilde{z}(\tau))) d\tau \right) \left(\int_{t_0}^{t_2} (z^-(\tau, \alpha) - m(\tilde{z}(\tau))) d\tau \right) d\alpha.
\end{aligned}$$

Рассмотрим первый интеграл в последнем выражении. Поскольку значение интеграла не зависит от переменной интегрирования, то его можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{t_0}^{t_1} (z^+(\tau_1, \alpha) - m(\tilde{z}(\tau_1))) d\tau_1 \right) \left(\int_{t_0}^{t_2} (z^+(\tau_2, \alpha) - m(\tilde{z}(\tau_2))) d\tau_2 \right) d\alpha = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} (z^+(\tau_1, \alpha) - m(\tilde{z}(\tau_1))) (z^+(\tau_2, \alpha) - m(\tilde{z}(\tau_2))) d\tau_1 d\tau_2 d\alpha.
\end{aligned}$$

Аналогично для индексов с минусом. Таким образом,

$$\begin{aligned}
K_{\tilde{g}}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} (z^+(\tau_1, \alpha) - m(\tilde{z}(\tau_1))) (z^+(\tau_2, \alpha) - m(\tilde{z}(\tau_2))) + \right. \\
&\quad \left. + (z^-(\tau_1, \alpha) - m(\tilde{z}(\tau_1))) (z^-(\tau_2, \alpha) - m(\tilde{z}(\tau_2))) d\tau_1 d\tau_2 \right) d\alpha.
\end{aligned}$$

Меняя здесь порядок интегрирования, получим утверждение теоремы 5.

Перейдем к рассмотрению производных от нечетких функций. В литературе используются различные определения. Одно из наиболее распространенных опирается на определение разности Хукухары [9]. А именно, для множеств A, B множество C называют разностью Хукухары, если $A = B + C$ и обозначают $A \overset{h}{-} B$.

Отображение $\tilde{z} : [t_0, T] \rightarrow J$ называют дифференцируемым в точке $t \in [t_0, T]$ [7], если для $\forall \alpha \in [0, 1]$ многозначное отображение $z_\alpha(t)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке t с производной $D_H z_\alpha(t)$ и семейство $\{D_H z_\alpha(t) : \alpha \in [0, 1]\}$ определяет некоторый элемент $\tilde{z}'(t)$, принадлежащий J . Элемент $\tilde{z}'(t)$ называют нечеткой производной от $\tilde{z}(t)$ в точке t .

По определению нечеткая производная $\tilde{z}'(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho \left(\frac{1}{\Delta t} \left(\tilde{z}(t + \Delta t) - \tilde{z}(t) \right), \tilde{z}'(t) \right) = 0,$$

где расстояние ρ определяется формулой (3).

Утверждение 4 [7]. Пусть отображение $\tilde{z} : [t_0, T] \rightarrow J$ дифференцируемо и нечеткая производная $\tilde{z}'(t)$ интегрируема по $[t_0, T]$. Тогда

$$(8) \quad \tilde{z}(t) = \tilde{z}(t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{z}'(s) ds.$$

Утверждение 5 [11]. Пусть нечеткий процесс $\tilde{z}(t)$ дифференцируем и $z_\alpha(t) = [z_\alpha^-(t), z_\alpha^+(t)]$ — его α -интервал при любом $\alpha \in [0, 1]$. Тогда функции $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ дифференцируемы по t и α -интервал производной $\tilde{z}'(t)$ имеет вид $[\tilde{z}'(t)]_\alpha = [(z_\alpha^-)'(t), (z_\alpha^+)'(t)]$.

Утверждение 5 показывает связь рассмотренной выше производной с производной Сеиккала [8].

Теорема 6. Среднее от производной дифференцируемого нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$, производная которого $\tilde{z}'(t)$ интегрируема, совпадает с производной от среднего: $m(\tilde{z}'(t)) = \frac{d}{dt} m(\tilde{z}(t))$.

Доказательство. Возьмем среднее от левой и правой части формулы (8). Тогда

$$m(\tilde{z}(t)) = m(\tilde{z}(t_0)) + \int_{t_0}^t m(\tilde{z}'(s)) ds.$$

Здесь воспользовались свойством аддитивности средних и теоремой 4. Продифференцируем обе части последнего равенства. Тогда, используя свойства интеграла с переменным верхним пределом, получим $\frac{d}{dt} m(\tilde{z}(t)) = m(\tilde{z}'(t))$, т.е. утверждение теоремы 6.

Теорема 7. Корреляционная функция производной $\tilde{z}'(t)$ дифференцируемого нечеткого процесса $\tilde{z}(t)$ вычисляется по формуле

$$K_{\tilde{z}'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 (K_{\tilde{z}}(t_1, t_2))}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Доказательство. Обозначим $\tilde{z}'(t) = \tilde{w}(t)$. Рассмотрим $\tilde{g}(t) = \int_{t_0}^t \tilde{w}(s) ds$. Согласно теореме 5 корреляционная функция $K_{\tilde{g}}(t_1, t_2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} K_{\tilde{g}}(t_1, t_2) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{t_0}^{t_1} w^+(\tau_1, \alpha) d\tau_1 - m(\tilde{w}(\tau_1)) \right) \left(\int_{t_0}^{t_2} w^+(\tau_2, \alpha) d\tau_2 - m(\tilde{w}(\tau_2)) \right) d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{t_0}^{t_1} w^-(\tau_1, \alpha) d\tau_1 - m(\tilde{w}(\tau_1)) \right) \left(\int_{t_0}^{t_2} w^-(\tau_2, \alpha) d\tau_2 - m(\tilde{w}(\tau_2)) \right) d\alpha. \end{aligned}$$

Дифференцируя это равенство сначала по t_1 , а затем по t_2 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_{\tilde{g}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &= \frac{1}{2} \int_0^1 (w^+(\tau_1, \alpha) - m(\tilde{w}(\tau_1))) (w^+(\tau_2, \alpha) - m(\tilde{w}(\tau_2))) d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 (w^-(\tau_1, \alpha) - m(\tilde{w}(\tau_1))) (w^-(\tau_2, \alpha) - m(\tilde{w}(\tau_2))) d\alpha. \end{aligned}$$

Так что справедлива формула

$$(9) \quad \frac{\partial^2 K_{\tilde{g}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = K_{\tilde{w}}(t_1, t_2).$$

Далее воспользуемся формулой (8). Обозначая $\tilde{z}(t_0) = \tilde{\xi}$, можем записать

$$\tilde{z}(t) = \tilde{\xi} + \int_{t_0}^t \tilde{w}(s) ds = \tilde{\xi} + \tilde{g}(t).$$

Полагая $\tilde{\eta}(t) = \tilde{\xi} + \tilde{g}(t)$ и используя формулу для подсчета корреляционной функции от суммы нечетких процессов, получим

$$K_{\tilde{z}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{\eta}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{\xi}}(t_1, t_2) + K_{\tilde{g}}(t_1, t_2) + K_{\xi g}(t_1, t_2) + K_{\xi g}(t_2, t_1).$$

Продифференцируем обе части этого равенства сначала по t_1 , а затем по t_2 . Тогда $\frac{\partial^2 K_{\tilde{z}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 K_{\tilde{g}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$. Остальные члены справа занулятся, поскольку $K_{\tilde{\xi}}$ не зависит от t_1, t_2 по определению, $K_{\xi g}(t_1, t_2)$ зависит только от t_2 , а $K_{\xi g}(t_2, t_1)$ — только от t_1 . Учитывая установленную выше формулу (9), получим равенство

$$\frac{\partial^2 K_{\tilde{z}}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = K_{\tilde{w}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{z}'}(t_1, t_2),$$

что и доказывает теорему 7.

5. Преобразование непрерывного нечеткого процесса линейной динамической системой

Рассмотрим ситуацию, когда на вход некоторого устройства A поступает непрерывный нечеткий сигнал $\tilde{y}(t)$, а на выходе наблюдается непрерывный нечеткий сигнал $\tilde{z}(t)$.

Устройство A называют линейной динамической системой, если связь между входом и выходом описывается дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами. Если на входе и выходе наблюдаются нечеткие сигналы $\tilde{y}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ соответственно, то линейная динамическая система описывается «нечетким» дифференциальным уравнением

$$(10) \quad \begin{aligned} & a_n \tilde{z}^{(n)}(t) + a_{n-1} \tilde{z}^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \tilde{z}'(t) + a_0 \tilde{z}(t) = \\ & = b_k \tilde{y}^{(k)}(t) + b_{k-1} \tilde{y}^{(k-1)}(t) + \dots + b_1 \tilde{y}'(t) + b_0 \tilde{y}(t) \equiv \tilde{f}(t). \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты a_i ($i = 0, \dots, n$) и b_i ($i = 0, \dots, k$) — постоянные числа, производные второго порядка от нечеткой функции понимаются как $\tilde{z}''(t) = (\tilde{z}'(t))'$ и т.д. для последующих производных.

Связь между средними значениями входного и выходного нечетких сигналов характеризует

Лемма 1. Среднее значение $z_{cp}(t) = m(\tilde{z}(t))$ нечеткого сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе динамической системы (10) удовлетворяет скалярному дифференциальному уравнению

$$(11) \quad a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = f(t),$$

где через f обозначено среднее от правой части (10) $f(t) = m\tilde{f}(t)$.

Действительно, рассмотрим среднее от левой и правой частей равенства (10). Используя свойства аддитивности и однородности средних, а также теорему 6, получим

$$\begin{aligned} & a_n (m\tilde{z}(t))^{(n)} + a_{n-1} (m\tilde{z}(t))^{(n-1)} + \dots + a_1 (m\tilde{z}(t))' + a_0 m\tilde{z}(t) = \\ & = b_k (m\tilde{y}(t))^{(k)} + b_{k-1} (m\tilde{y}(t))^{(k-1)} + \dots + b_1 (m\tilde{y}(t))' + b_0 (m\tilde{y}(t)) \equiv m\tilde{f}(t). \end{aligned}$$

Тогда для скалярной функции $z_{cp}(t) = m(\tilde{z}(t))$ выполнено уравнение (11).

Утверждение 6 [16, гл. II]. Пусть корни характеристического уравнения $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ не содержат точек мнимой оси. Тогда для любой непрерывной ограниченной на всей числовой оси функции $f(t)$ уравнение (11) имеет ограниченное на всей числовой оси решение, причем единственное. Оно дается формулой

$$(12) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f(s) ds,$$

где $G(t)$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (11).

Отметим, что общий вид функции Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (11) известен (см., например, [17, гл. 1, § 8]).

Замечание 1. Пусть в условиях утверждения 6 все корни характеристического уравнения лежат в левой полуполоскости ($\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$). Тогда ограниченное решение уравнения (11) асимптотически устойчиво по Ляпунову. При этом функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (11) имеет вид

$$G(t) = \begin{cases} k(t) & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

где $k(t)$ — функция Коши однородного уравнения, соответствующего (11).

Теорема 8. Пусть входной нечеткий процесс $\tilde{y}(t)$ ограничен на всей числовой оси, а корни характеристического уравнения $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ не содержат точек мнимой оси. Тогда среднее значение $m(\tilde{z}(t))$ на выходе динамической системы (10) представимо в виде

$$(13) \quad m(\tilde{z}(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)m(\tilde{f}(s))ds,$$

где G — функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (11).

Действительно, в условиях теоремы 8 правая часть уравнения (11) — ограниченная на всей оси функция. Тогда согласно лемме 1 функция $z_{cp}(t) = m(\tilde{z}(t))$ является ограниченным на всей оси решением уравнения (11). Поэтому теорема 8 вытекает из утверждения 6.

Отметим, что ограниченность нечеткого процесса $\tilde{y}(t)$ в теореме 8 и ниже понимается как ограниченность по t всех соответствующих α -индексов $y_{\alpha}^{\pm}(t)$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Следствие 3. Пусть в условиях теоремы 8 на вход поступает «квазистационарный» сигнал, т.е. $m(y(t)) = m_{\tilde{y}} = \text{const}$. Тогда на выходе также будет «квазистационарный» сигнал, причем его среднее значение равно $m(\tilde{z}(t)) = m_{\tilde{z}} = \frac{b_0}{a_0} m_{\tilde{y}}$.

Действительно, поскольку производная любого порядка от постоянной равна нулю, то в этом случае правая часть уравнения (11) равна $b_0 m_{\tilde{y}}$. Тогда $m_{\tilde{z}}$ — решение соответствующего уравнения (11), а именно $a_0 m_{\tilde{z}} = b_0 m_{\tilde{y}}$. Других ограниченных решений уравнение (11) в условиях теоремы 8 не имеет.

Такой же вывод можно сделать, когда среднее значение нечеткого входного сигнала стабилизируется с течением времени, т.е. $m(y(t)) \rightarrow m_{\tilde{y}}$ при $t \rightarrow \infty$.

В некоторых случаях удастся выписать индексы нечеткого сигнала на выходе динамической системы (10) в явном виде.

Теорема 9. Пусть выполнены условия теоремы 8 и дополнительно все коэффициенты динамической системы (10) положительны ($a_i > 0$,

$i = 0, \dots, n$). Тогда индексы нечеткого сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе динамической системы (10) имеют вид

$$(14) \quad z_{\alpha}^{-}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_{\alpha}^{-}(s) ds, \quad z_{\alpha}^{+}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_{\alpha}^{+}(s) ds,$$

где $f_{\alpha}^{\pm}(s)$ — индексы функции $\tilde{f}(s)$.

Действительно, поскольку равенство нечетких чисел означает равенство всех соответствующих α -интервалов, то согласно правилам интервальной арифметики с учетом положительности коэффициентов a_i и в силу теоремы 6 получим, что уравнение (10) влечет при $\forall \alpha \in [0, 1]$ выполнение равенства

$$(15) \quad a_n(z_{\alpha}^{-})^{(n)}(t) + a_{n-1}(z_{\alpha}^{-})^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(z_{\alpha}^{-})'(t) + a_0 z_{\alpha}^{-}(t) = f_{\alpha}^{-}(t)$$

и аналогично для индексов с плюсом

$$(16) \quad a_n(z_{\alpha}^{+})^{(n)}(t) + a_{n-1}(z_{\alpha}^{+})^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(z_{\alpha}^{+})'(t) + a_0 z_{\alpha}^{+}(t) = f_{\alpha}^{+}(t).$$

Согласно (15) и (16) в силу утверждения 6 выполнены равенства (14).

Утверждение 7. Пусть выполнены условия теоремы 9 и дополнительно функция Грина G задачи (10) неотрицательна. Тогда для нечеткого ограниченного сигнала на выходе динамической системы (10) справедливо представление

$$(17) \quad \tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) \tilde{f}(s) ds.$$

Действительно, согласно определению интеграла от нечеткой функции имеют место соотношения для индексов

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) \tilde{f}(s) ds \right)_{\alpha}^{-} &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_{\alpha}^{-}(s) ds, \\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) \tilde{f}(s) ds \right)_{\alpha}^{+} &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_{\alpha}^{+}(s) ds, \end{aligned}$$

которые в силу (14) влекут представление (17).

Теорема 10. Пусть выполнены условия теоремы 9 и дополнительно вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны ($\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$). Тогда корреляционная функция $K_{\tilde{z}}(t_1, t_2)$

нечеткого сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе динамической системы (10) определяется формулой

$$(18) \quad K_{\tilde{z}}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} G(t_1 - \tau_1) G(t_2 - \tau_2) K_{\tilde{f}}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

где $K_{\tilde{f}}(\tau_1, \tau_2)$ — корреляционная функция входного сигнала $\tilde{f} = \sum_{i=1}^n b_i \tilde{y}^{(i)}$, а G — функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (11).

Доказательство. По определению (7) и в силу (13), (14) с учетом замечания 1 имеем

$$\begin{aligned} K_{\tilde{z}}(t_1, t_2) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\int_{-\infty}^{t_1} G(t_1 - s) (f_{\alpha}^+(s) - m(\tilde{f}(s))) ds \right) \left(\int_{-\infty}^{t_2} G(t_2 - s) (f_{\alpha}^+(s) - m(\tilde{f}(s))) ds \right) + \right. \\ &+ \left. \left(\int_{-\infty}^{t_1} G(t_1 - s) (f_{\alpha}^-(s) - m(\tilde{f}(s))) ds \right) \left(\int_{-\infty}^{t_2} G(t_2 - s) (f_{\alpha}^-(s) - m(\tilde{f}(s))) ds \right) \right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} G(t_1 - \tau_1) G(t_2 - \tau_2) \left[(f_{\alpha}^+(\tau_1) - m(\tilde{f}(\tau_1))) (f_{\alpha}^+(\tau_2) - m(\tilde{f}(\tau_2))) + \right. \\ &\quad \left. + (f_{\alpha}^-(\tau_1) - m(\tilde{f}(\tau_1))) (f_{\alpha}^-(\tau_2) - m(\tilde{f}(\tau_2))) \right] d\tau_1 d\tau_2 d\alpha. \end{aligned}$$

Меняя здесь порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} K_{\tilde{z}}(t_1, t_2) &= \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} G(t_1 - \tau_1) G(t_2 - \tau_2) \left(\frac{1}{2} \int_0^1 (f_{\alpha}^-(\tau_1) - m(\tilde{f}(\tau_1))) (f_{\alpha}^-(\tau_2) - m(\tilde{f}(\tau_2))) + \right. \\ &\quad \left. + (f_{\alpha}^+(\tau_1) - m(\tilde{f}(\tau_1))) (f_{\alpha}^+(\tau_2) - m(\tilde{f}(\tau_2))) d\alpha \right) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует формула (18).

Отметим, что предположение $Re \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$ в теореме 10 служит лишь для наглядности в сравнении с теоремой 5. Без этого предположения формула (18) принимает вид

$$K_{\tilde{z}}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t_1 - \tau_1) G(t_2 - \tau_2) K_{\tilde{f}}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Пример 3. На вход линейной динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\tilde{z}'(t) + \beta \tilde{z}(t) = \tilde{y}'(t), \quad \beta > 0$$

поступает нечеткий ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}'(t)$.

Укажем характеристики выходного нечеткого сигнала. Заметим, что функция Грина задачи об ограниченных решениях скалярного уравнения $x' + \beta x = y(t)$ представима формулой

$$G_1(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Тогда согласно теореме 8 среднее значение на выходе имеет вид

$$m(\tilde{z}(t)) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} m(\tilde{y}'(s)) ds = e^{-\beta t} \int_{-\infty}^t e^{\beta s} m(\tilde{y}(s))' ds.$$

Взяв интеграл справа по частям, получим

$$m(\tilde{z}(t)) = m(\tilde{y}(t)) - \beta e^{-\beta t} \int_{-\infty}^t e^{\beta s} m(\tilde{y}(s)) ds.$$

Для корреляционной функции на выходе $K_{\tilde{z}}(t_1, t_2)$ согласно теореме 10 и свойству 2 из теоремы 2 можем записать

$$K_{\tilde{z}}(t_1, t_2) = e^{-\beta(t_1+t_2)} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} e^{\beta(\tau_1+\tau_2)} \frac{\partial^2 K_{\tilde{y}}(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} d\tau_1 d\tau_2,$$

где $K_{\tilde{y}}(\tau_1, \tau_2)$ — корреляционная функция входного сигнала.

Пример 4. На вход линейной динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\tilde{z}''(t) + a_1 \tilde{z}'(t) + a_0 \tilde{z}(t) = \tilde{y}(t),$$

поступает непрерывный нечеткий ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}(t)$. Укажем характеристики выходного нечеткого сигнала $\tilde{z}(t)$.

Пусть коэффициенты данного уравнения удовлетворяют условиям $a_1, a_0 > 0$ и $a_1^2 - 4a_0 > 0$. Тогда корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ вещественны и различны, причем $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. В этом случае функция Грина G_2 задачи об ограниченных решениях для уравнения $a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = f(t)$ имеет вид

$$G_2(t) = \begin{cases} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t})(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Тогда в соответствии с теоремами 8, 10 для нечеткого сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе справедливы соотношения

$$m(\tilde{z}(t)) = \int_{-\infty}^t G_2(t-s)m(\tilde{y}(s))ds,$$

$$K_{\tilde{z}}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} G_2(t_1 - \tau_1)G_2(t_2 - \tau_2)K_{\tilde{y}}(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Заметим, что функции Грина G_1 и G_2 примеров 3, 4 неотрицательны, так что в условиях примеров 3, 4 справедливо представление (17).

Пример 5. На вход линейной динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$\tilde{z}'''(t) + a_2\tilde{z}''(t) + a_1\tilde{z}'(t) + a_0\tilde{z}(t) = \tilde{y}(t),$$

поступает непрерывный нечеткий ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}(t)$. Укажем характеристики выходного нечеткого сигнала $\tilde{z}(t)$.

Предположим, что $a_2 > 0$, $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ и $a_2a_1 - a_0 > 0$. Тогда согласно критерию Гурвица для характеристических чисел уравнения $\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ выполнены условия $Re\lambda_i < 0$ ($i = 1, 2, 3$). Поэтому в соответствии с теоремами 8, 10 для выходного нечеткого сигнала $\tilde{z}(t)$ справедливы следующие соотношения

$$m(\tilde{z}(t)) = \int_{-\infty}^t G_3(t-s)m(\tilde{y}(s))ds,$$

$$K_{\tilde{z}}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} G_3(t_1 - \tau_1)G_3(t_2 - \tau_2)K_{\tilde{y}}(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Здесь $G_3(t)$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях для уравнения

$$x'''(t) + a_2x''(t) + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(t),$$

определяемая равенством $G_3(t) = \begin{cases} k(t) & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$ (см., например, [17, гл. 2, § 8], где $k(t)$ — функция Коши, определяемая как решение однородного уравнения

$$k'''(t) + a_2k''(t) + a_1k'(t) + a_0k(t) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$k(0) = k'(0) = 0, \quad k''(0) = 1.$$

Например, в случае различных корней характеристического уравнения функция Коши определяется формулой

$$k(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t},$$

где

$$C_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}, C_2 = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}, C_3 = \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}.$$

6. Заключение

Результаты разделов 3, 4 данной работы о свойствах числовых характеристик нечетких процессов аналогичны известным результатам для непрерывных случайных процессов. Однако, несмотря на их значимость, они ранее не отмечались.

Основные результаты данной работы относятся к «нечетким» динамическим системам, описываемым линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка в предположении ограниченности входного нечеткого сигнала (раздел 5). Они опираются на установленные свойства средних и корреляционных функций непрерывных нечетких процессов (разделы 3, 4), а также на развитие метода функции Грина на случай нечетких дифференциальных уравнений.

Изложенный здесь подход является альтернативой стандартному подходу к исследованию линейных динамических систем с постоянными коэффициентами, связанному с частотной характеристикой, прямым и обратным преобразованием Фурье. В отличие от известных подходов он не предполагает стационарности (в каком-либо смысле) рассматриваемых процессов. Отметим, что данный подход допускает развитие для непрерывных процессов с нечеткими случайными состояниями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и их инженерные приложения. М.: Кнорус, 2016. 439 с.
2. *Аверкин А.Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986.
3. *Buckley J.J., Eslami E., Feuring T.* Fuzzy mathematics in economic and engineering. Heidelberg, N.Y.: Physica-Verl., 2002.
4. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
5. *Aumann R.J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl. No. 12. 1965. P. 1–12.
6. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. Appl. 91. 1983. P. 552–558.
7. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy sets and systems. V. 24. No. 3. 1987. P. 301–317.

8. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. 24 (No. 3). 1987. P. 319–330.
9. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Func. Ekvacioj. No. 11. 1967. P. 205–223.
10. *Khatskevich V.L.* Means, quasi-scalar product and covariance of fuzzy numbers. Journal of Physics: Conference Series. 2021, 1902(1), 012136.
11. *Jong Yeoul Park, Han H.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 1996. P. 271–280.
12. *Ahmad L., Farooq M., Abdullah S.* Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform // Ind. J. Pure Appl. Math. 2014.
13. *Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть II. М.: Информационные технологии, т. 21, № 4. 2015.
14. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Часть 1. Позиционное управление. Информационные технологии. Т. 25, № 5. 2019.
15. *Esmi E., Sanchez D.E., Wasques V.F., de Barros L.C.* Solutions of higher order linear fuzzy differential equations with interactive fuzzy values // Fuzzy Sets and Systems. V. 419. 2021. P. 122–140.
16. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
17. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 351 с.
18. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number // Fuzzy sets and systems. 1987. P. 279–300.
19. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces // Fuzzy Sets and Systems. V. 12. 1984. P. 215–229.
20. *Fuller R., Majlender P.* On weighted possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers // Fuzzy sets and systems. V. 136. 2003. P. 363–374.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.В. Виноградовым.

Поступила в редакцию 25.02.2022

После доработки 03.04.2023

Принята к публикации 09.06.2023

© 2023 г. А.М. ЦИРЛИН, д-р техн. наук (tsirlin@sarc.botik.ru)
(Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН,
Переславль-Залесский)

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КАРАТЕОДОРИ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА В УСРЕДНЕННЫХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ¹

Рассмотрена связь между усреднением функций по времени и ее усреднением по множеству значений искомым переменных. Исследованы задачи оптимизации, критерий и ограничения которых содержат усреднение функций или функции от средних значений переменных. Показано, что условия оптимальности этих задач имеют форму принципа максимума, а их оптимальное решение во временной области — кусочно-постоянная функция. Доказано обобщение теоремы Каратеодори о выпуклых оболочках функции. Получены условия оптимальности для задач нелинейного программирования с усреднением по части переменных и функциями, зависящими от средних значений переменных.

Ключевые слова: усредненные ограничения, скользящие режимы, выпуклые оболочки функций, функция достижимости, принцип максимума в усредненных задачах.

DOI: 10.31857/S0005231023080044, EDN: HBDMDH

1. Введение

Для широкого класса задач критерий оптимальности и все или часть ограничений усредненно зависят от всех или от части переменных. Такие задачи возникают, когда в технологических процессах некоторые подлежащие выбору переменные должны быть неизменны (конструктивные параметры), а другие могут изменяться во времени, причем наличие устройств, сглаживающих колебания, например емкостей, приводит к усредненному влиянию этих изменений [1]. Такие задачи возникают при оптимальном управлении макросистемами (системами, состоящими из множества индивидуально не управляемых элементов), в которых можно управлять только средними по множеству этих элементов показателями. Все подобные задачи называют задачами усредненной оптимизации.

В системах, у которых множество допустимых управлений невыпукло, в частности в релейных системах, оптимальным решением часто оказывается

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-61-46013).

скользящий режим, в котором изменение состояния объекта усредненно зависит от сколь угодно часто переключающегося управления [2–5]. Усредненные задачи возникают также как вспомогательные оценочные при оптимизации циклических режимов, когда введение усреднения расширяет множество допустимых решений и упрощает решение, позволяя получить оценку эффективности циклического режима, не находя формы оптимальных циклов. Значение такой оценочной задачи заведомо «не хуже», чем значение исходной, а ее оптимальное решение содержит полезную информацию о характере оптимального решения исходной. Для определенности будем рассматривать задачи на максимум критерия оптимальности.

В первом разделе данной работы обсудим связь между усреднением функций, аргумент которых изменяется во времени, по множеству значений этого аргумента и по времени и определим, что является искомым решением усредненной задачи и как это решение может быть реализовано.

Во втором разделе сформулируем теорему об условиях оптимальности задачи нелинейного программирования с усреднением критерия оптимальности и ограничений и дадим ее доказательство, базирующееся на теореме Каратеодори о выпуклых оболочках функций.

В третьем разделе рассмотрим возможные обобщения доказанной теоремы.

2. О связи между усреднением по времени и усреднением по множеству

Среднее значение непрерывной скалярной функции $f(x(t))$, $t \in [0, \tau]$, $x \in V \subset R^n$ может быть вычислено по времени как

$$(1) \quad \overline{f_t(x)} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(x(t)) dt$$

либо по множеству как

$$(2) \quad \overline{f_p(x)} = \int_V f(x) p(x) dx.$$

Функцию $p(x)$ называют плотностью распределения. В том случае, когда $x(t)$ — случайная функция, $p(x)$ — плотность распределения случайной величины. Она неотрицательна, и ее интеграл на V равен единице. В частности, множество V может быть параллелепипедом в R^n . В нашем случае $x(t)$ — детерминированная функция, поэтому остановимся подробнее на свойствах $p(x)$ такой, чтобы результаты усреднения по формулам (1) и (2) были одинаковы.

Будем считать переменную x скалярной, множество V здесь и ниже ограниченным и замкнутым и введем функцию $\theta(x_0)$, $x_0 \in V$, равную суммарной продолжительности тех интервалов времени t , для которых $x(t) \leq x_0$.

Очевидно, что эта функция не превосходит τ . Через $P(x_0)$ обозначим отношение $\frac{\theta(x_0)}{\tau}$, т.е. долю интервала $[0, \tau]$, для которой $x(t) \leq x_0$. Эта функция монотонно растет с ростом x_0 , изменяясь от нуля до единицы. Она аналогична функции распределения случайной величины.

Плотность распределения равна

$$(3) \quad p(x_0) = \frac{dP(x_0)}{dx_0} = \frac{1}{\tau} \frac{d\theta(x_0)}{dx_0} = \frac{1}{\tau} \sum_{\nu} \left| \frac{dx_{\nu}}{dt} \right|_{x_{\nu}=x_0}.$$

Интервал θ увеличивается с ростом x_0 при любом знаке производной при тех значениях x_{ν} функции $x(t)$, в которых она равна x_0 .

Если при некотором значении x_0 функция $x(t)$ постоянна в течение доли γ от интервала $[0, \tau]$, то функция $P(x_0)$ испытывает в этой точке скачок величиной γ , а плотность распределения в ней равна $\gamma\delta(x - x_0)$.

Примеры

1. **Линейные функции.** Пусть $x(t) = \frac{ht}{\tau}$. Тогда по формуле (3) получим $p(x) = \frac{1}{h} = \text{const}$. Та же плотность распределения соответствует и всем треугольникам с основанием $[0, \tau]$ и высотой h .

2. **Кусочно-постоянные функции.** Эти функции принимают дискретные значения x_i , каждое в течение доли γ_i от интервала $[0, \tau]$. Любой такой функции по формуле (3) соответствует плотность распределения

$$(4) \quad p(x_0) = \sum_i \gamma_i \delta(x - x_i), \quad \gamma_i > 0, \quad \sum_i \gamma_i = 1.$$

Порядок, в котором кусочно-постоянная функция принимает то или иное из возможных значений, роли не играет.

Из этих примеров видно, что каждой функции $x(t)$ соответствует плотность распределения ее значений $p(x)$, определенная на V , а каждой плотности распределения соответствует сколь угодно много функций $x(t)$, для которых $\overline{f_p(x)} = \overline{f_t(x)}$. Исключением является плотность распределения вида $p(x) = \delta(x - x_1)$. В этом случае соответствующая ей функция равна $x(t) = x_1 = \text{const}$ на всем интервале $[0, \tau]$, и она единственна.

Рассмотрим случай, когда функция f зависит от нескольких, для простоты от двух, переменных $x_1(t)$ и $x_2(t)$. В этом случае функция $P(x^0)$ распределения значений вектора x представляет собой долю интервала $[0, \tau]$, для которой выполнено два неравенства: $x_1(t) \leq x_1^0$ и $x_2(t) \leq x_2^0$. Эта функция монотонно растет с ростом каждого из аргументов, когда первая из составляющих вектора x^0 максимальна ($p_1(x_1) = 1$), она равна $P(x_2^0)$, а ее производная равна плотности распределения $p(x_1^{\max}, x_2) = p_2(x_2)$, аналогично в случае, когда $x_2 = x_2^{\max}$, $p(x_2^{\max}, x_1) = p_1(x_1)$. Функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ не зависимы друг от друга, так что $p(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2)$.

Искомым решением задачи усредненной оптимизации является плотность распределения $p^*(x)$ вектора x на множестве V его допустимых значений. Для реализации этого решения во времени нужно найти одну из возможных функций $x(t)$, имеющих распределение $p^*(x)$. Решение этой последней задачи существенно облегчается особенностями оптимальных решений $p^*(x)$, доказанными в следующем разделе.

3. Об оптимальном решении задач усредненной оптимизации

Будем обозначать операцию усреднения чертой, проведенной над усредняемой функцией или вектором. Так,

$$\overline{x} = \int_V xp(x)dx, \quad \overline{f(x)} = \int_V f(x)p(x)dx.$$

Простейшей задачей усредненной оптимизации является задача о максимуме среднего значения скалярной функции $f(x)$ при заданном среднем значении ее аргумента:

$$(5) \quad \overline{f(x)} \rightarrow \max \bigg/ \overline{x} = x_0, \quad x \in V \subset R^n.$$

Или в более подробной записи

$$(6) \quad \int_V f(x)p(x)dx \rightarrow \max \bigg/ \int_V xp(x)dx = x_0, \quad p(x) \geq 0, \quad \int_V p(x)dx = 1.$$

Искомой в этой задаче является $p(x)$ (плотность распределения вектора искомых переменных). Эта функция неотрицательна, и интеграл от нее на множестве V равен единице.

4. Теорема Каратеодори о выпуклых оболочках функций

Теорема Каратеодори [3, 4, 6] о выпуклых оболочках множеств утверждает, что любой элемент выпуклой оболочки CoD компактного множества D в евклидовом пространстве размерности n может быть представлен как элемент симплекса, имеющего не более чем $n + 1$ вершину (базовые точки), каждая из которых принадлежит D .

В частности, множеством D может быть подграфик функции $f(x)$. Выпуклой оболочкой функции называют выпуклую оболочку подграфика. Функция, зависящая от n переменных, представляет собой границу множества в пространстве R^{n+1} , имеющую размерность n . Базовые точки заведомо лежат на этой границе, а значит, их число не превышает $n + 1$. Ниже будем называть теорему Каратеодори теоремой о выпуклых оболочках функций.

Ордината выпуклой оболочки функции $f_0(x)$ в точке x_0 , принадлежащей выпуклой оболочке множества определения функции, является значением за-

дачи

$$(7) \quad \overline{f_0(x)} \rightarrow \max_{p(x)} \left/ \begin{array}{l} \overline{x_i} = x_{i0}, \quad i = \overline{1, n}, \\ x \in V \subset R^n, \end{array} \right.$$

где V -компакт.

Согласно теореме Каратеодори оптимальное решение этой задачи имеет вид

$$p^*(x) = \sum_{j=0}^n \gamma_j \delta(x - x^j), \quad \gamma_j \geq 0, \quad \sum_{i=0}^n \gamma_j = 1.$$

То есть оптимальное распределение сосредоточено не более чем в $(n + 1)$ -й базовых точках.

Этот факт позволяет переписать задачу (7) как задачу нелинейного программирования (НП)

$$(8) \quad \sum_{j=0}^n \gamma_j f_0(x^j) \rightarrow \max \left/ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^n \gamma_j x^j = x_0, \\ x^j \in V \subset R^m, \quad \sum_{j=0}^n \gamma_j = 1, \quad \gamma_j \geq 0, \end{array} \right.$$

переменными в которой являются базовые векторы x^j и вектор весовых коэффициентов γ , и воспользоваться для ее решения теоремой Куна–Таккера [7]:

Если y^ является решением задачи нелинейного программирования*

$$(9) \quad f(y) \rightarrow \max \left/ \varphi_i(y) \leq 0, \quad y_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \right.$$

то найдется такой ненулевой вектор множителей

$$\lambda = \lambda_0, \dots, \lambda_m \quad (\lambda_0 \text{ равно нулю или единице, } \lambda_i \leq 0 \text{ при } i > 0),$$

что для функции Лагранжа

$$R = \lambda_0 f(y) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(y)$$

справедливы условия:

$$(10) \quad \left(\frac{\partial R}{\partial y_j} \right)_{y=y^*} = 0, \text{ если } y_j^* > 0; \quad \left(\frac{\partial R}{\partial y_j} \right)_{y=y^*} \leq 0, \text{ если } y_j^* = 0;$$

$$(11) \quad \lambda_i = 0, \text{ если } \varphi_i(y^*) < 0; \quad \lambda_i \leq 0, \text{ если } \varphi_i(y^*) = 0.$$

Для задачи (8) функция Лагранжа имеет вид

$$(12) \quad R = \sum_{j=0}^n \gamma_j \left[f_0(x^j) + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^j - \Lambda \right],$$

где Λ — множитель Лагранжа, соответствующий условию равенства суммы весовых коэффициентов единице.

Условия Куна–Таккера по весовым коэффициентам приводят к требованиям:

$$(13) \quad R^0(x_j, \lambda) = f_0(x^j) + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^j < \Lambda, \text{ если } \gamma_j = 0,$$

$$R^0(x_j, \lambda) = f_0(x^j) + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^j = \Lambda, \text{ если } \gamma_j > 0, \quad j = 0, \dots, n+1.$$

Здесь R^0 – функция Лагранжа задачи (8) при отсутствии в ней усреднения. Далее такую задачу будем называть *исходной*.

Таким образом: *Для всех базовых значений x , входящих в оптимальное решение задачи о выпуклой оболочке функции f_0 с ненулевым весом, функция Лагранжа исходной задачи максимальна. Число таких точек не превышает $n+1$.*

5. Задача с усреднением связей, обобщение теоремы Каратеодори

В задаче НП с усреднением функций, определяющих связи между переменными, требуется достичь максимума среднего значения функции $f_0(x)$ на множестве V допустимых значений x при условии, что среднее значение вектор-функции $f(x) = (f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_m(x))$ равно нулю. Формально

$$(14) \quad \overline{f_0(x)} \rightarrow \max \bigg/ \overline{f_i(x)} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in V \in R^n.$$

Теорема 1.

1. *Оптимальная плотность распределения в задаче (14) имеет вид*

$$(15) \quad p^*(x) = \sum_{j=0}^m \gamma_j \delta(x - x^j), \quad \gamma_j \geq 0, \quad \sum_{j=0}^m \gamma_j = 1.$$

2. *Найдется такой ненулевой вектор*

$$\lambda = \lambda_0, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_m, \quad \lambda_0 = (0; 1),$$

что в каждой базовой точке x^j функция Лагранжа исходной задачи

$$(16) \quad R = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x)$$

максимальна по $x \in V$.

Доказательство. Для доказательства этого утверждения введем понятие *функции достижимости* задачи (14):

$$(17) \quad f_0^*(C) = \max f_0(x) / f_k(x) = C_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad x \in V.$$

Эта функция задана алгоритмически на множестве

$$V_c = \{C \in R^m : f(x) = C, x \in V \subset R^n\}.$$

Она может быть негладкой и полунепрерывной сверху.

Справедливо

Утверждение. Для тех значений x , для которых $f(x) = C$, $p^*(x)$ заведомо равна нулю, если $f_0(x) \neq f_0^*(C)$.

Таким образом, в решение усредненной задачи могут входить с ненулевым весом только те значения $x = x^*(C)$, для которых величина $f_0(x)$ совпадает с ординатой функции достижимости. Если бы это утверждение было не верно, можно было бы изменить плотность распределения так, чтобы среднее значение $f_0(x)$ увеличилось.

Так как для каждого C величина f_0 совпадает с ординатой функции достижимости, задачу (14) можно переписать в форме

$$(18) \quad \overline{f_0^*(C)} \rightarrow \max \sqrt{\overline{C_k}} = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad C \in V_c \subset R^m.$$

Это задача об ординате выпуклой оболочки функции достижимости в нуле. В соответствии с теоремой Каратеодори ее оптимальное решение равно

$$(19) \quad p^*(C) = \sum_{j=0}^m \gamma_j \delta(C - C^j), \quad \gamma_j \geq 0, \quad \sum_{j=0}^m \gamma_j = 1.$$

Так как каждому базовому значению C^j соответствует значение $x^{j*}(C^j)$, то оптимальная плотность распределения в задаче (14) имеет вид (15). Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Доказательство второго утверждения полностью повторяет аналогичное доказательство для задачи об ординате выпуклой оболочки функции с той разницей, что функция Лагранжа неусредненной задачи имеет форму (16). Подчеркнем, что число базовых точек не зависит от размерности вектора x , а определяется размерностью m вектор-функции f .

Отметим, что здесь и ниже условия в форме принципа максимума не требуют от функций, определяющих усредненную задачу, гладкости по x , множество V может быть неоднозначным [8–10].

Пример 1. Рассмотрим систему, состоящую из электродвигателя, вращаемого им насоса и емкости, на рис. 1,а. Двигатель потребляет мощность n , от которой зависит производительность насоса g . Зависимость $g(n)$ показана на рис. 1,б. Требуется найти режим, для которого при заданной средней затрачиваемой мощности $\bar{n}$ средняя производительность $\bar{g}$ максимальна. Это задача об ординате выпуклой оболочки функции $g(n)$ в точке $\bar{n}$. Число базовых точек равно двум, одна из них — начало координат, а вторая, n^1 , определена условием, что функция Лагранжа $R = g(n) + \lambda n$ в ней достигает

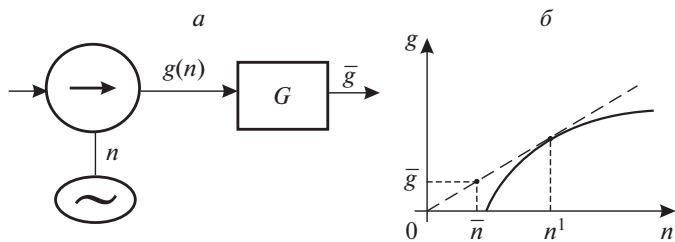


Рис. 1. Система, состоящая из насоса и сглаживающей емкости (а); зависимость расхода от затрачиваемой мощности (б).

максимума (такого же, как при $n = 0$). Исключая λ из условий максимума функции Лагранжа и требования, чтобы этот максимум был равен нулю, приходим к уравнению для n^1 :

$$\frac{g(n)}{n} = \frac{dg(n)}{dn}.$$

Оптимальных реализаций этого решения во времени сколь угодно много, для каждого из них мощность насоса принимает значение ноль и n^1 , причем доля от интервала τ , для которой $n = n^1$, равна $1 - \frac{\bar{n}}{n^1}$. Максимальное значение интервала τ определяется величиной емкости G , оно равно

$$\tau_{\max} = \frac{2G}{g(n^1)}.$$

Значение задачи равно

$$\bar{g}^* = g(n^1) \left(1 - \frac{\bar{n}}{n^1} \right).$$

Оно от G не зависит, и при стремлении емкости к нулю оптимальным решением становится скользящий режим.

6. Обобщения усредненной задачи НП

6.1. Усредненная задача с детерминированными переменными

Как указывалось во введении, в усредненных задачах может быть два типа переменных — рандомизированные и детерминированные. По переменным второго вида усреднение отсутствует. Рассмотрим задачу НП, в которой по части переменных усреднение отсутствует.

Задача с усреднением по части переменных примет форму:

$$(20) \quad \overline{f_0(x, y)} \rightarrow \max \bigg/ \overline{f_j(x, y)} = 0, \quad x \in V \subset R^n, \quad y \in V_y \subset R^K, \quad j = 1, \dots, m,$$

функции $f_0, \dots, f_m$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по совокупности аргументов, черта соответствует усреднению по $x \in V$, множества V и V_y замкнуты и ограничены.

Для любого y эта задача является усредненной задачей нелинейного программирования (14), а следовательно, в силу теоремы оптимальная плотность распределения x сосредоточена не более, чем в $(m+1)$ -й базовых точках, так что $p^*(x) = \sum_0^m \gamma_j \delta(x - x^j)$ и найдется такой ненулевой вектор λ , что в каждой из этих точек функция Лагранжа исходной задачи

$$(21) \quad R = \sum_{j=0}^m \lambda_j f_j(x, y), \quad x \in V \subset R^n, \quad y \in V_y \subset R^K$$

максимальна по x .

Функция Лагранжа задачи (20), в которой плотность распределения x равна $p^*(x)$, имеет вид

$$(22) \quad \overline{R^*} = \sum_{j=0}^m \lambda_j \sum_{i=0}^m \gamma_i f_j(x^i, y), \quad x^i \in V \subset R^n, \quad y \in V_y \subset R^K.$$

Для любой плотности распределения $p(x)$ рандомизированных переменных задача (20) представляет собой задачу нелинейного программирования и согласно теореме Куна–Таккера найдется такой ненулевой вектор λ с составляющими $\lambda_0 = (0; 1)$, λ_j , $j = 1, \dots, m$, что для функции (21) на оптимальном решении выполнены условия локальной неувлучшаемости по y

$$(23) \quad \frac{\partial \overline{R^*}}{\partial y_l} \delta y_l \leq 0, \quad l = 1, \dots, K.$$

Здесь δy_l – допустимая вариация y_l .

Задача нелинейного программирования с усреднением по части переменных имеет много общего с задачей оптимального управления со связями в форме дифференциальных уравнений. Там управляющие воздействия входят в задачу так, что их сколь угодно быстрые изменения усредняются в окрестности каждого момента времени, чего нельзя сказать о фазовых координатах. Именно поэтому условия в форме принципа максимума Понтрягина справедливы для управляющих воздействий.

6.2. Задача, содержащая функции от средних значений переменных

Эта задача имеет вид

$$(24) \quad \overline{f_0(x, \overline{x_l})} \rightarrow \max \Big/ \overline{f_j(x, \overline{x_l})} = 0, \quad x \in V \subset R^n, \quad l = 1, \dots, K \leq n.$$

Введем обозначение: $y_l = \overline{x_l}$. Переменная y_l принадлежит выпуклой оболочке CoV_{x_l} множества допустимых значений x_l . С учетом введенных обозначений задачу (24) можно переписать в форме

$$(25) \quad \overline{f_0(x, y)} \rightarrow \max \Big/ \overline{f_j(x, y)} = 0, \quad \overline{x_l} - y_l = 0, \quad x \in V \subset R^n, \quad y_l \in CoV_{x_l} \subset R^K.$$

При записи в такой форме задача (25) отличается от задачи (20) только дополнительными усредненными условиями $\bar{x}_l - y_l = 0$. Функция Лагранжа исходной задачи примет форму

$$(26) \quad R = \sum_{j=0}^m \lambda_j f_j(x, y) + \sum_{l=1}^K \lambda_l (x_l - y_l), \quad x \in V \subset R^n, \quad y_l \in CoV_{x_l}.$$

Из условий оптимальности (21), (23) следует, что максимальное число базовых значений x в задаче (24) равно $m + K + 1$ и что найдется такой ненулевой вектор λ , что в каждой из базовых точек функция R , фигурирующая в (26), достигает на оптимальном решении максимума по x , а по y функция (22) локально неувлучшаема.

При решении усредненных задач выражают множители Лагранжа через базовые значения x^j и y из условия максимума функции Лагранжа по x и равенства этих максимумов друг другу и записывают условия неувлучшаемости по y . После этого из усредненных условий находят весовые коэффициенты для каждой из базовых точек с учетом того, что сумма этих весовых коэффициентов равна единице.

Пример 2. В качестве иллюстративного примера рассмотрим задачу

$$(27) \quad \overline{(x - \bar{x})^2} \rightarrow \min / \left(\overline{\frac{1}{x + \bar{x}}} \right) = 1, \quad x = -1; 0; 1.$$

Функция Лагранжа для этой задачи равна

$$(28) \quad L = (x - y)^2 + \lambda \left(\frac{1}{x + y - 1} \right) + \mu(y - x).$$

Число усредненных условий равно двум, значит, все три допустимых значения x являются базовыми, и неопределенные множители надо выбрать так, чтобы максимум функции L^* был в этих точках одинаков, что приводит к условиям:

$$(29) \quad \begin{aligned} L^* &= (1 + y)^2 + \lambda \left(\frac{1}{y - 1} - 1 \right) - \mu(1 + y) = y^2 + \lambda \left(\frac{1}{y} - 1 \right) - \mu y = \\ &= (1 - y)^2 + \lambda \left(\frac{1}{y + 1} - 1 \right) + \mu(1 - y). \end{aligned}$$

Откуда

$$(30) \quad \lambda = \frac{2y}{2 + y}(1 - y - 2y^2), \quad \mu = \frac{y(2y - 1)}{2 + y}.$$

После подстановки этих выражений в L^* и дифференцирования получившегося выражения по y приходим к уравнению

$$(31) \quad 3y^3 + 17y^2 + 20y - 10 = 0.$$

С точностью до второго знака после запятой, $y = 0,37$. Весовые множители $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ для $x = -1, x = 0, x = 1$ соответственно можно теперь найти из условий

$$(32) \quad \sum_{i=1}^3 \gamma_i = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \gamma_i x_i = 0,37, \quad \sum_{i=1}^3 \gamma_i \frac{1}{x_i + 0,37} = 1.$$

Получим $\gamma_1 = 0,155, \gamma_2 = 0,320, \gamma_3 = 0,525$.

7. Заключение

Рассмотрены различные постановки задач НП с усреднением. Показано, что с введением понятия о функции достижимости задачи НП задачи, содержащие усреднение функций от вектора рандомизированных переменных x , могут быть сведены к экстремальным задачам о выпуклых оболочках множеств и функций. Оптимальное распределение во всех этих задачах сосредоточено в дискретных «базовых» точках компактного множества V допустимых значений x . Доказан принцип максимума для таких задач. Показано, что число базовых точек не превышает числа усредненных условий в задаче более чем на единицу. Критерий и ограничения усредненных задач нелинейного программирования могут зависеть от времени. Если эти зависимости непрерывны, то приведенные выше условия оптимальности справедливы для каждого момента времени и определяют изменение во времени координат базовых точек и их весов. Вектор неопределенных множителей Лагранжа, соответствующий оптимальному решению, доставляет минимум максимальному по искомым переменным значению максимизируемой функции, что служит основой для вычислительных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цирлин А.М. Оптимальные циклы и циклические режимы. М.: Энергоатомиздат, 1983.
2. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных процессов // АиТ. 1959. № 10–12.
3. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Советское радио, 1974.
4. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1977.
5. Цирлин А.М. Оптимизация в среднем и скользящие режимы в задачах оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1974. № 2. С. 143–151.
6. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. 416 с. ISBN 5-9221-0499-3
7. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир 1975.

8. *Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А.* Необходимое условие в оптимальном управлении. М.: Наука, 1990.
9. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Теория принципа максимума. Методы теории экстремальных задач в экономике. М.: Наука, 1981.
10. *Цирлин А.М.* Условия оптимальности скользящих режимов и принцип максимума для задачи со скалярным аргументом // *АиТ.* 2009. № 5. С. 106–121.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 09.06.2022

После доработки 07.03.2023

Принята к публикации 09.06.2023

Стохастические системы

© 2023 г. С.В. ИВАНОВ, д-р физ.-мат. наук (sergeyivanov89@mail.ru),
А.И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru),
В.Н. АКМАЕВА (akmaeva@mail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА ГАРАНТИРУЮЩЕГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КВАНТИЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ¹

Исследуется задача стохастического программирования с квантильным критерием для нормального распределения в случае кусочно-линейной по случайным параметрам и выпуклой по стратегии функции потерь. С помощью доверительного метода исходная задача аппроксимируется детерминированной минимаксной задачей, параметризованной радиусом шара, вписанного в доверительное многогранное множество. Аппроксимирующая задача сводится к задаче выпуклого программирования. Исследуются свойства меры доверительного множества при изменении радиуса шара. Предлагается алгоритм поиска радиуса шара, обеспечивающего гарантирующее решение задачи. Описан способ получения нижней оценки оптимального значения критериальной функции. Доказаны теоремы о сходимости алгоритма с любой наперед заданной вероятностью и о точности получаемого решения.

Ключевые слова: стохастическое программирование, квантильный критерий, доверительный метод, квантильная оптимизация, гарантирующее решение.

DOI: 10.31857/S0005231023080056, EDN: HBFTOO

1. Введение

Задачи стохастического программирования с квантильным критерием представляют собой задачи оптимизации, в которых ищется точка минимума квантили функции потерь, зависящей от стратегии оптимизации и случайных параметров. Подобные задачи возникают при моделировании технических и экономических систем, в которых большую роль играют требования к надежности принимаемого решения. Функция квантили описывает уровень потерь, который не может быть превышен с заданной фиксированной вероятностью, как правило, близкой к единице. Задачам данного класса посвящены монографии [1, 2].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00213, <https://rscf.ru/project/22-21-00213/>).

Эффективным способом решения задачи минимизации функции квантили является доверительный метод [1, 2]. Суть этого метода состоит в том, что исходная задача квантильной оптимизации аппроксимируется минимаксной задачей. В этой задаче сначала рассматривается максимум целевой функции на некотором множестве значений случайных параметров (доверительном множестве) как функция доверительного множества и стратегии оптимизации. Затем ищется минимум полученной функции максимума по стратегии оптимизации и доверительному множеству. Выбор оптимального доверительного множества представляет собой непростую задачу. Однако при правильно подобранном фиксированном доверительном множестве можно получить достаточно точную верхнюю оценку функции квантили. В частности, показано [2], что для гауссовского распределения случайных факторов выбор доверительного множества в форме шара при больших значениях уровня надежности обеспечивает высокую точность получаемой оценки. В данной статье рассматриваются функции потерь, которые представлены как максимум конечного числа линейных (по случайным параметрам) функций. Для этого класса функций потерь оптимальным доверительным множеством является многогранник. В связи с этим оценку на шаре можно улучшить, проведя дополнительную оптимизацию по классу доверительных множеств в форме многогранников, параметризованных радиусом вписанного шара. Эта идея была реализована для гауссовского распределения в [3]. В [4] данный алгоритм был распространен на случай произвольного распределения случайных факторов, а также предложен алгоритм дальнейшего улучшения гарантирующего решения за счет переноса граней доверительного выпуклого многогранного множества при сохранении его вероятностной меры. Следует отметить, что в [3, 4] функция потерь предполагалась линейной по стратегии оптимизации. Это позволило свести аппроксимирующую минимаксную задачу к задаче линейного программирования.

Особенностью получаемой при применении алгоритмов [3, 4] аппроксимирующей задачи является тот факт, что в случае гауссовского распределения с ее помощью можно получить не только верхнюю, но и нижнюю оценку оптимального значения функции квантили. Для этого нужно в аппроксимирующей задаче вместо доверительного множества взять ядро вероятностной меры [2], представляющее собой в случае стандартного гауссовского распределения шар радиуса, вычисляемого как квантиль стандартного нормального распределения такого же уровня, как и у функции квантили. Следует отметить, что ядро вероятностной меры не является доверительным множеством.

Отдельный интерес представляет случай линейной по случайным параметрам функции потерь. В [1] доказано, что в условиях регулярности ядра функция квантили может быть вычислена как максимум по случайным параметрам функции потерь на ядре. В дальнейшем условия регулярности ядра были ослаблены в [5]. Указанное свойство ядра использовалось в [6] для построения алгоритма решения задачи стохастического программирования с

квантильным критерием и билинейной функцией потерь, а также в [7] для аппроксимации вероятностных ограничений.

Задачи стохастического программирования с квантильным критерием являются частным случаем задач с вероятностными ограничениями [8, 9]. Обзор методов решения задач с вероятностными ограничениями можно найти в [10]. В частности, следует отметить подход, основанный на использовании p -эффективных точек [11, 12]. Однако задачи с квантильным критерием обладают рядом свойств, не свойственным задачам с произвольными вероятностными ограничениями, что позволяет использовать специальные методы анализа, в частности доверительный метод. Задачи с квантильным критерием и дополнительными вероятностными ограничениями подробно изучались в [1].

В данной статье рассматривается задача стохастического программирования с кусочно-линейной по случайным параметрам и выпуклой по стратегии оптимизации функцией потерь, что позволяет аппроксимировать изучаемую задачу задачей выпуклого программирования. Для этой задачи разрабатывается алгоритм, основанный на идеях построения алгоритмов в [3, 4] для кусочно-линейных задач. Даются оценки точности предлагаемого алгоритма.

2. Постановка задачи

Пусть X — случайный вектор (столбец) с реализациями $x \in \mathbb{R}^m$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Предполагается, что распределение X является стандартным нормальным. Будем считать, что функция потерь Φ является кусочно-линейной по случайным параметрам:

$$\Phi(u, x) \triangleq \max_{i=\overline{1, k_1}} \{B_{1i}(u)x + b_{1i}(u)\}.$$

Ограничения в задаче описываются функцией

$$Q(u, x) \triangleq \max_{j=\overline{1, k_2}} \{B_{2j}(u)x + b_{2j}(u)\},$$

где $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ — стратегия; $B_{1i}(u)$, $B_{2j}(u)$ — строки матриц $B_1(u)$, $B_2(u)$ соответственно, $b_{1j}(u)$, $i = \overline{1, k_1}$, и $b_{2j}(u)$, $j = \overline{1, k_2}$, — элементы векторов (столбцов) $b_1(u)$ и $b_2(u)$ соответственно. В данной статье предполагается, что функции $u \mapsto B_1(u)$, $u \mapsto B_2(u)$ являются линейными (т.е. $B_l(u) = D_l u + a_l$, где D_l — матрица, a_l — вектор, $l \in \{1, 2\}$), а функции $u \mapsto b_1(u)$, $u \mapsto b_2(u)$ — выпуклыми и непрерывными на выпуклом замкнутом множестве U . Отметим, что линейное преобразование случайного вектора X не изменяет структуры функций Φ и Q . Кроме того, любой нормальный вектор может быть получен за счет линейного преобразования вектора X подходящей размерности. По этим причинам случай произвольного нормального распределения вектора X сводится к рассматриваемому.

Определим функцию вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leq \varphi, \quad Q(u, X) \leq 0\},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — заданное значение функции потерь, и функцию квантили

$$\Phi_\alpha(u) \triangleq \min \{\varphi \mid P_\varphi(u) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, P^*),$$

где

$$P^* \triangleq \sup_{u \in U} \mathbf{P}\{Q(u, X) \leq 0\}.$$

В статье рассматривается задача квантильной оптимизации

$$(1) \quad U_\alpha \triangleq \text{Arg} \min_{u \in U} \Phi_\alpha(u).$$

Поскольку функции Φ и Q являются непрерывными и измеримыми, согласно результату [13, теорема 6], являющемуся обобщением аналогичного результата в [1], функция $u \mapsto \Phi_\alpha(u)$ является полунепрерывной снизу. Поэтому решение задачи (1) существует, если множество U компактное. Определим оптимальное значение критериальной функции

$$\varphi_\alpha \triangleq \Phi_\alpha(u_\alpha),$$

где $u_\alpha \in U_\alpha$. В дальнейшем будем предполагать, что решение задачи (1) существует. При этом ограниченность множества U , вообще говоря, не требуется.

3. Построение оценок решения

Согласно доверительному методу [1] задача (1) эквивалентна задаче

$$(2) \quad \varphi_\alpha = \min_{S \in \mathcal{E}_\alpha, u \in U} \left\{ \sup_{x \in S} \Phi(u, x) \mid \sup_{x \in S} Q(u, x) \leq 0 \right\},$$

где $\mathcal{E}_\alpha$ — семейство всех доверительных множеств $S \subset \mathbb{R}^m$ уровня α , т.е. борелевских множеств таких, что $\mathbf{P}\{X \in S\} \geq \alpha$.

Обозначим через B_r шар радиуса r :

$$B_r \triangleq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq r\},$$

где $\|x\| \triangleq \sqrt{x^\top x}$ — евклидова норма вектора x .

Рассмотрим задачу, аналогичную задаче (2), в которой зафиксировано множество $S = B_r$:

$$(3) \quad \psi(r) \triangleq \min_{u \in U} \left\{ \max_{x \in B_r} \Phi(u, x) \mid \max_{x \in B_r} Q(u, x) \leq 0 \right\}.$$

Будем предполагать, что минимум по u в задаче (3) достигается, что выполнено, например, в случае компактного множества U . В задаче (3) супремум заменен на максимум, поскольку

$$\begin{aligned} \max_{x \in B_r} \Phi(u, x) &= \max_{x \in B_r} \max_{i=\overline{1, k_1}} \{B_{1i}(u)x + b_{1i}(u)\} = \\ &= \max_{i=\overline{1, k_1}} \max_{x \in B_r} \{B_{1i}(u)x + b_{1i}(u)\} = \max_{i=\overline{1, k_1}} \{b_{1i}(u) + \|B_{1i}(u)\|r\}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом находится $\max_{x \in B_r} Q(u, x)$. Таким образом, задача (3) может быть переписана в виде

$$(4) \quad \psi(r) = \min_{u \in U} \left\{ \max_{i=\overline{1, k_1}} \{b_{1i}(u) + \|B_{1i}(u)\|r\} \mid \max_{j=\overline{1, k_2}} \{b_{2j}(u) + \|B_{2j}(u)\|r\} \leq 0 \right\}.$$

Если ограничения этой задачи несовместны, будем считать, что $\psi(r) = +\infty$. Из монотонного неубывания целевой функции и сужения множества допустимых стратегий при увеличении r следует, что функция ψ является неубывающей. Задача (4) эквивалентна задаче выпуклого программирования

$$(5) \quad \varphi \rightarrow \min_{u \in U, \varphi \in \mathbb{R}}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} b_{1i}(u) + \|B_{1i}(u)\|r &\leq \varphi, \quad i = \overline{1, k_1}, \\ b_{2j}(u) + \|B_{2j}(u)\|r &\leq 0, \quad j = \overline{1, k_2}. \end{aligned}$$

Эквивалентность здесь понимается в том смысле, что оптимальное значение переменной φ совпадает с $\psi(r)$, а множества допустимых значений u совпадают. Общее число ограничений этой задачи обозначим через $k = k_1 + k_2$. Задача (5) может быть решена с высокой точностью с помощью методов выпуклой оптимизации [14].

Пусть R_α — шар вероятностной меры α , т.е. решение уравнения

$$\mathbf{P}\{X \in B_{R_\alpha}\} = \alpha.$$

Зафиксируем в задаче (2) доверительное множество S в форме шара B_{R_α} . Тогда в силу (2) $\psi(R_\alpha) \geq \varphi_\alpha$. Таким образом, может быть найдена верхняя оценка функции квантили.

Для поиска нижней оценки может быть использовано ядро вероятностной меры, определяемое как пересечение всех замкнутых полупространств A таких, что $\mathbf{P}\{X \in A\} = \alpha$. Известно, что при $\alpha > \frac{1}{2}$ ядро распределения стандартного нормального гауссовского вектора является шаром радиуса ρ_α с центром в нуле, где ρ_α — квантиль стандартного нормального распределения уровня α . В [1, раздел 3.4.3, следствие 2] показано, что $\psi(\rho_\alpha) \leq \varphi_\alpha$, когда X распределен стандартно нормально.

Таким образом, получена оценка

$$(6) \quad \psi(\rho_\alpha) \leq \varphi_\alpha \leq \psi(R_\alpha).$$

Верхнюю оценку $\psi(R_\alpha)$ можно улучшить. Пусть $(u(r), \psi(r))$ — некоторое решение задачи (5). Определим множество

$$(7) \quad \begin{aligned} C_r &\triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid \Phi(u(r), x) \leq \psi(r), Q(u(r), x) \leq 0 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid B_{1i}(u(r))x + b_{1i}(u(r)) \leq \psi(r), \right. \\ &\quad \left. B_{2j}(u(r))x + b_{2j}(u(r)) \leq 0, i = \overline{1, k_1}, j = \overline{1, k_2} \right\}. \end{aligned}$$

Введем обозначение $h(r) \triangleq \mathbf{P}\{X \in C_r\}$ для вероятностной меры множества C_r . Отметим, что $h(r)$ и C_r зависят от выбора $u(r)$. Поэтому в дальнейшем выбор $u(r)$ считается зафиксированным.

Так как

$$(8) \quad \max_{x \in B_r} \Phi(u(r), x) = \psi(r), \quad \max_{x \in B_r} Q(u(r), x) \leq 0,$$

справедливо включение $B_r \subset C_r$. Кроме того,

$$(9) \quad \max_{x \in B_r} \Phi(u(r), x) = \max_{x \in C_r} \Phi(u(r), x), \quad \max_{x \in C_r} Q(u(r), x) \leq 0.$$

Из (8) и (9) следует, что если $h(r) \geq \alpha$, то множество C_r является доверительным и $\psi(r) \geq \varphi_\alpha$.

Из монотонности ψ следует, что верхнюю оценку функции квантили можно улучшить, найдя r , близкое к $r^* \triangleq \inf\{r \mid h(r) \geq \alpha\}$, такое что $h(r) \geq \alpha$. Если функция $r \mapsto h(r)$ является монотонной, то для поиска r^* может быть применен метод дихотомии. К сожалению, функция h может оказаться немонотонной, что демонстрирует следующий пример.

Пример 1. Пусть функция потерь имеет вид

$$\Phi(u, x) = \max\{u + 4x, -u + 2x + 2, -11u - 4x\},$$

$u \in \mathbb{R}$, x — реализация случайной величины $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = \frac{1}{9}$.

Как нетрудно проверить, задача (5) имеет решение

$$\begin{aligned} u(r) &= 1 - r, \quad \psi(r) = 1 + 3r \quad \text{при } r \in [0, 1]; \\ u(r) &= 0, \quad \psi(r) = 4r \quad \text{при } r \in [1, +\infty). \end{aligned}$$

Поэтому

$$C_r = \{x \mid \Phi(u(r), x) \leq \psi(r)\} = \begin{cases} [-3 + 2r, r], & \text{если } r \in [0, 1], \\ [-r, r], & \text{если } r \in [1, +\infty). \end{cases}$$

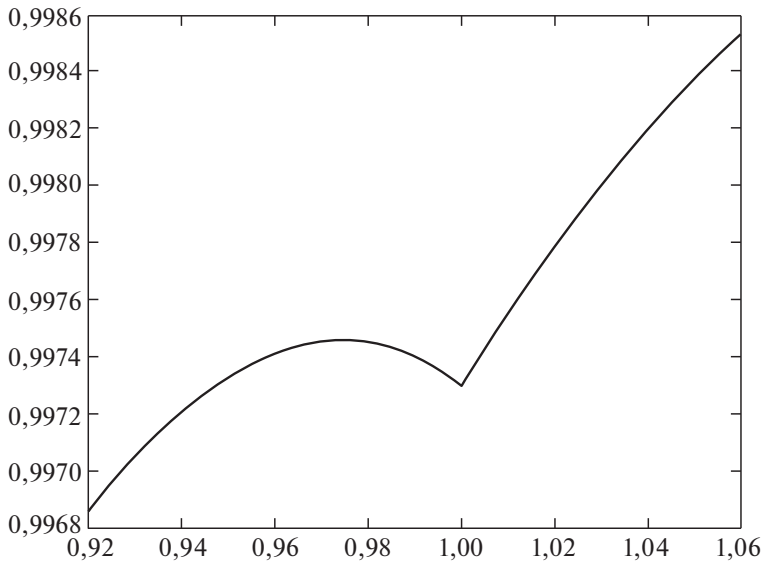


График зависимости $h(r) = \mathbf{P}\{X \in C_r\}$ от r .

Вычислим меру множества C_r при $r \in [0, 1]$:

$$h(r) = \mathbf{P}\{X \in C_r\} = \int_{-3+2r}^r \frac{3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3x^2}{2}} dx.$$

Вычислим производную полученной функции:

$$\frac{dh}{dr}(r) = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3r^2}{2}} - 2 \frac{3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3(2r-3)^2}{2}}.$$

Вычислим левосторонний предел

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \frac{dh}{dr}(r) = -\frac{3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3}{2}} < 0.$$

Это значит, что на некотором интервале $(1 - \varepsilon, 1)$, где $\varepsilon > 0$, функция h убывает. При этом $h(1) \approx 0,9973$. График зависимости $h(r)$ изображен на рисунке.

Как видно из приведенного примера, функция h может оказаться немонотонной. В связи с этим предложим достаточные условия, обеспечивающие монотонность функции h .

Теорема 1. Пусть $U = \mathbb{R}^n$ и выполнены условия:

- 1) $b_{1i}(u) = A_{1i}u + c_{1i}$, A_{1i} — строки матрицы A_1 , $b_{2j}(u) = A_{2j}u + c_{2j}$, A_{2j} — строки матрицы A_2 , матрицы $B_1(u)$ и $B_2(u)$ не зависят от u ;
- 2) строки блочной матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & e_{k_1} \\ A_2 & 0_{k_2} \end{pmatrix}$$

Таблица 1. Зависимость R_α от m

$\alpha \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50
0,95	1,96	2,45	2,80	3,08	3,32	3,55	3,75	3,94	4,11	4,28	8,22
0,99	2,58	3,03	3,37	3,64	3,88	4,10	4,30	4,48	4,65	4,82	8,73

Таблица 2. Зависимость ρ_β от k

$\alpha \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50
0,95	1,64	1,96	2,13	2,24	2,33	2,39	2,45	2,50	2,54	2,58	3,09
0,99	2,33	2,58	2,71	2,81	2,88	2,93	2,98	3,02	3,06	3,09	3,54

являются линейно независимыми, где e_{k_1} , 0_{k_2} — столбцы из единиц и нулей соответственно (если $Q(u, x) \equiv 0$, то в приведенной выше матрице строки, соответствующие A_2 , отсутствуют);

3) при некотором $r = R$ решение задачи (5) существует.

Тогда функция h является неубывающей на отрезке $[0, R]$.

Доказательство теоремы 1 и всех последующих теорем вынесены в Приложение.

Отметим, что в теореме 1 множество U не является компактным. К сожалению, более общие условия монотонности функции h предложить затруднительно, так как монотонность меры может быть гарантирована только в предположении расширения множества C_r при увеличении r . Однако гарантировать можно только удаление от начала координат граней, касающихся шара B_r . Остальные грани могут как удаляться, так и приближаться к началу координат.

В связи с немонотонностью функции h необходимо по возможности максимально точно указать интервал, в котором необходимо искать r^* . Для этого получим следующий результат.

Теорема 2. Пусть $k = k_1 + k_2$. Неравенство $h(r) \geq \alpha$ выполнено, если $r \geq \rho_\beta$ и множество C_r определено, где ρ_β — квантиль стандартного нормального распределения уровня $\beta = 1 - \frac{1-\alpha}{k}$.

Из теоремы 2 и неравенства (6) следует, что

$$(10) \quad \psi(\rho_\alpha) \leq \varphi_\alpha \leq \min\{\psi(R_\alpha), \psi(\rho_\beta)\} = \psi(\min\{R_\alpha, \rho_\beta\}).$$

Из определения доверительного шара следует, что $R_\alpha = \sqrt{\chi_\alpha^2(m)}$, где $\chi_\alpha^2(m)$ — квантиль распределения хи-квадрат с m степенями свободы. В отличие от R_α величина ρ_β не зависит от размерности случайного вектора, а зависит только от числа ограничений k . Известно [2], что $R_\alpha - \rho_\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 1$, но скорость сходимости зависит от размерности n . Нетрудно заметить, что $\rho_\beta \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow 1$. Однако оказывается, что при небольших значениях k может быть выполнено неравенство $\rho_\beta < R_\alpha$. Зависимость R_α от m приведена в табл. 1, а зависимость ρ_β от k — в табл. 2. Рассматриваются уровни $\alpha = 0,95$

и $\alpha = 0,99$. Пусть, например, $m = 8$, $\alpha = 0,95$. Тогда $R_\alpha = 3,94$, а $\rho_\beta < R_\alpha$ даже при $k = 50$.

Заметим, что при $k = 1$ выполнено равенство $\rho_\beta = \rho_\alpha$. Поэтому $\varphi_\alpha = \psi(\rho_\alpha)$, а оптимальная стратегия u_α может быть найдена из задачи (5) при $r = \rho_\alpha$, что согласуется с известным результатом [5].

4. Алгоритм поиска гарантирующего решения

Стратегию $u \in U$, удовлетворяющую соотношению $\varphi_\alpha(u) \leq \psi(\min\{R_\alpha, \rho_\beta\})$, будем называть гарантирующим решением. Таким образом, гарантирующее решение может быть найдено из задачи (5) при $r = \bar{R}_\alpha$, где $\bar{R}_\alpha \triangleq \min\{R_\alpha, \rho_\beta\}$. Обозначим данное гарантирующее решение через u^0 . В данном разделе предлагается алгоритм улучшения гарантирующего решения u^0 , т.е. обеспечивающего меньшее значение критериальной функции $\varphi_\alpha(u)$, чем $\varphi_\alpha(u^0)$.

Как было отмечено в предыдущем разделе, для поиска радиуса шара r^* , вписанного в доверительный многогранник C_r , можно использовать метод дихотомии. При этом возникают следующие трудности: во-первых, непрерывность и монотонность $h(r) = \mathbf{P}\{X \in C_r\}$ в общем случае не гарантируется, во-вторых, вычисление вероятности попадания X в многогранник C_r требует использования приближенных методов. Тем не менее будем для поиска улучшенного гарантирующего решения использовать метод дихотомии. В связи с тем, что $h(r)$ будем вычислять приближенно с помощью процедуры Монте-Карло, будем искать такое значение r , при котором $h(r) \geq \alpha + \varepsilon$, где ε — малая положительная константа ($\varepsilon < 1 - \alpha$). Приближенное вычисление меры может привести к тому, что будет найдено недопустимое решение задачи, поэтому необходимо задать вероятность p нахождения допустимого решения. Поскольку квантильная постановка подразумевает нахождение решения, гарантирующего заданный уровень значения целевой функции с вероятностью α , рекомендуется выбирать $p \geq \alpha$.

Алгоритм 1.

1. Установить параметры алгоритма $\varepsilon \in (0, 1 - \alpha)$ (параметр точности вычисления меры), $\delta > 0$ (параметр точности вычисления радиуса) и $p \in [\alpha, 1)$ (вероятность нахождения допустимого решения).

2. Вычислить ρ_α — квантиль уровня α стандартного нормального распределения и $\bar{R}_\alpha \triangleq \min\{R_\alpha, \rho_\beta\}$, где $R_\alpha = \sqrt{\chi_\alpha^2(m)}$, $\chi_\alpha^2(m)$ — квантиль распределения хи-квадрат с m степенями свободы, $\beta = 1 - \frac{1-\alpha}{k}$.

3. Вычислить объем выборки

$$N = \left\lceil \frac{\ln(1/(1 - \frac{K}{\sqrt{p}}))}{2\varepsilon^2} \right\rceil,$$

где $K = \left\lceil \log_2 \frac{|\bar{R}_\alpha - \rho_\alpha|}{\delta} \right\rceil$, $[a]$ — округление a до ближайшего целого в большую сторону.

4. Задать $r_1 := \rho_\alpha$, $r_2 := \bar{R}_\alpha$.

5. Найти нижнюю оценку решения $\psi(r_1)$ и верхнюю оценку $\psi(r_2)$ оптимального значения критериальной функции, а также начальное гарантирующее решение $u(r_2)$, решив задачу (5) при $r = r_1$ и $r = r_2$.

6. Пока $|r_1 - r_2| > \delta$ повторять следующие шаги:

6.1. Присвоить $r := \frac{r_1 + r_2}{2}$.

6.2. Вычислить $u(r)$ и $\psi(r)$, решив задачу (5).

6.3. Смоделировать N независимых реализаций случайного вектора X .

6.4. Вычислить $\mu(r) \triangleq \mathbf{P}\{X \in B_r\} = F_{\chi^2(m)}(r^2)$, где $F_{\chi^2(m)}(r^2)$ — значение функции распределения закона хи-квадрат с m степенями свободы в точке r^2 .

6.5. Найти $\hat{h}(r)$ — оценку меры множества C_r , определенного формулой (7):

$$\hat{h}(r) = \mu(r) + \frac{s(r)}{N},$$

где $s(r)$ — количество элементов выборки, попавших во множество $C_r \setminus B_r$.

6.6. Если $\hat{h}(r) \geq \alpha + \varepsilon$, то $r_2 := r$. Иначе $r_1 := r$.

7. В качестве гарантирующего решения принять $u(r_2)$.

Отметим, что для повышения точности алгоритма можно использовать не метод дихотомии, а делить отрезок поиска решения на несколько равных частей. В этом случае на шаге 6.1 алгоритма нужно будет брать несколько значений r в отрезке $[r_1, r_2]$. Также следует заметить, что в случае немонотонной зависимости $r \mapsto h(r)$ алгоритм может не найти корень уравнения $h(r) = \alpha + \varepsilon$, но при этом будет найдено некоторое гарантирующее решение.

Сформулируем теорему о сходимости алгоритма.

Теорема 3. Пусть задача (5) имеет решение при $r \in [\rho_\alpha, \bar{R}_\alpha]$. Тогда применение алгоритма обеспечивает нахождение гарантирующего решения с вероятностью, не меньшей p .

Следующая теорема характеризует точность решения, найденного с помощью предложенного алгоритма 1. Этот результат является уточнением [2, теорема 3.13] для задач оптимизации рассматриваемого класса.

Теорема 4. Пусть функция ψ определена и принимает конечные значения на отрезке $[\rho, R]$, а функция потерь является липшицевой с константой L , т.е.

$$|\Phi(u, x) - \Phi(u, y)| \leq L\|x - y\|.$$

Также предположим, что

$$(11) \quad \max_{j=1, k_2} \{b_{2j}(u(\rho)) + \|B_{2j}(u(\rho))\|R\} \leq 0.$$

Тогда $0 \leq \psi(R) - \psi(\rho) \leq (R - \rho)L$.

Как было показано в (10), $\psi(\rho_\alpha) \leq \varphi_\alpha \leq \psi(\bar{R}_\alpha)$. Это неравенство говорит о близости найденной верхней оценки критериальной функции к ее оптимальному значению. Теорема 4 дает оценку границ в этих неравенствах, которая может быть получена еще до применения алгоритма 1. Согласно этой оценке

$$0 \leq \psi(\bar{R}_\alpha) - \psi(\rho_\alpha) \leq L|\bar{R}_\alpha - \rho_\alpha|,$$

если выполнены условия теоремы 4. Отметим, что эти условия выполнены для липшицевой функции потерь, например, при $Q(u, x) \equiv 0$.

5. Численный эксперимент

Пример 2. Найдём гарантирующее решение задачи (1) для

$$\begin{aligned} \Phi(u, x) = & \max \{ u_1 + 3u_3 + 2u_5 + x_1 + 2x_3 + 4, \\ & -u_1 + 2u_2 - u_3 + 3u_4 + 2u_5 + 2x_1 - x_2 + 2x_3, \\ & 2u_1 + u_2 + 2u_3 - 2u_4 - u_5 + 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2, \\ & 3u_1 - 2u_2 + u_3 + 3u_4 - 3u_5 - 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5, \\ & 0,1u_1^2 - 0,02u_1u_2 - 0,03u_1u_3 + 0,2u_2^2 + 0,05u_3^2 + 0,3u_4^2 + \\ & + 0,1u_5^2 - 0,2u_1 - 0,3u_2 - 0,1u_3 - 0,2u_5 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 6 \}, \\ Q(u, x) = & 3u_2 + u_1 + 4u_3 - 2u_5 - x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 10, \end{aligned}$$

$U = \{u \in \mathbb{R}^5 \mid u_i \in [0; 10], i = \overline{1, 5}\}$, $\alpha = 0,95$. Для данного уровня α , $\rho_\alpha = 1,645$, $R_\alpha = 2,796$, $\beta = 0,992$, $\rho_\beta = 2,394$, $\bar{R}_\alpha = 2,394$. Поэтому функцию h нужно рассматривать на отрезке $[1,645; 2,394]$. Решая задачу (5) при $r = \rho_\alpha$ и $r = \bar{R}_\alpha$, находим оценку

$$\varphi_\alpha \in [\psi(\rho_\alpha), \psi(\bar{R}_\alpha)] = [11,813; 14,754].$$

Начальное гарантирующее решение имеет вид

$$u(\bar{R}_\alpha) = (0,139; 0,602; 0,000; 0,004; 1,613)^\top.$$

Зададим параметры алгоритма: $\varepsilon = 0,001$, $\delta = 0,01$, $p = 0,99$. Для этих параметров требуется объем выборки $N = 3\,273\,389$. Применение алгоритма 1 отражено в табл. 3. Улучшенное гарантирующее решение соответствует

Таблица 3. Применение алгоритма 1

Итерация	r	$\hat{h}(r)$	$\psi(r)$
1	2,019	0,949	13,267
2	2,207	0,970	14,007
3	2,113	0,961	13,635
4	2,066	0,956	13,451
5	2,043	0,952	13,359
6	2,031	0,950	13,313
7	2,037	0,9507	13,336

$r = r^* \triangleq 2,043$ и имеет вид

$$u(r^*) = (0,536; 0,688; 0,000; 0,003; 1,356)^\top.$$

При этом

$$\varphi_\alpha \in [\psi(\rho_\alpha), \psi(r^*)] = [11,813; 13,359].$$

Таким образом, применение алгоритма 1 позволило сократить длину интервала неопределенности оптимального значения критериальной функции на $(1 - \frac{13,359-11,813}{14,754-11,813})100\% = 47\%$, что говорит об эффективности предложенного алгоритма.

Все вычисления проводились на ЭВМ с процессором Intel(R) Core(TM) i5-6300U CPU, 2,40 ГГц, ОЗУ 8 ГБ в системе Matlab с использованием программы для решения квадратичных задач оптимизации Gurobi. Время счета составило 1035 с. Основной объем счета составил вычисление меры многогранника C_r с помощью метода Монте-Карло.

6. Заключение

В статье предложен алгоритм решения задачи стохастического программирования с квантильным критерием в случае кусочно-линейной по случайным параметрам и выпуклой по стратегии функции потерь. Достоинством предлагаемого алгоритма является легкость построения аппроксимирующих задач, которые в дальнейшем могут быть решены с помощью методов выпуклой оптимизации. Основную вычислительную трудность при его применении составляет необходимость оценки меры с помощью метода Монте-Карло. Предложенный алгоритм выбора доверительного множества, параметризованного радиусом вписанного шара, как показал пример, может быть успешно применен для решения задач стохастической оптимизации с квантильным критерием в случае выпуклой кусочно квадратично-линейной функции потерь. Можно заметить, что данный алгоритм может быть применен и для случая дискретных стратегий оптимизации. Вид алгоритма 1 при этом не изменится, но в ходе применения алгоритма нужно будет решать не выпуклую задачу непрерывной оптимизации, а задачу дискретной оптимизации. Алгоритмы решения подобных задач могут являться предметом дальнейших исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Условия 2 и 3 гарантируют, что все ограничения в задаче (5) являются активными. Это значит, что все грани множества C_r касаются шара B_r . При увеличении r на отрезке $[0, R]$ грани множества C_r переносятся параллельно, касаясь шара B_r . Это значит, что множество C_r расширяется при увеличении r . Поэтому функция h , определенная как мера C_r , является неубывающей. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\gamma \in (0, 1)$. Множество C_{ρ_γ} определено как пересечение k полуплоскостей меры, не меньшей γ . Обозначим эти полуплоскости через L_i , $i = \overline{1, k}$. Тогда

$$\begin{aligned} h(\rho_\gamma) &= \mathbf{P} \left\{ X \in \bigcap_{i=1}^k L_i \right\} = 1 - \mathbf{P} \left\{ X \in \bigcup_{i=1}^k (\mathbb{R}^m \setminus L_i) \right\} \geq \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^k \mathbf{P}\{X \notin L_i\} = 1 - (1 - \gamma)k. \end{aligned}$$

Таким образом, $h(\rho_\gamma) \geq \alpha$ при $\alpha \leq 1 - (1 - \gamma)k$, что равносильно $\gamma \geq \beta = 1 - \frac{1-\alpha}{k}$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Поскольку на каждой итерации отрезок поиска решения сужается два раза, число итераций алгоритма K может быть найдено как минимальное натуральное число K , удовлетворяющее неравенству

$$\frac{|\bar{R}_\alpha - \rho_\alpha|}{2^K} \leq \delta.$$

Из данного неравенства следует, что $K = \left\lceil \log_2 \frac{|\bar{R}_\alpha - \rho_\alpha|}{\delta} \right\rceil$. Алгоритм может совершить ошибку при своей работе только в том случае, когда на некоторой итерации окажется, что $\hat{h}(r) \geq \alpha + \varepsilon$, хотя на самом деле $h(r) < \alpha$. Как нетрудно заметить, случайная величина $s(r)$ распределена по биномиальному закону с вероятностью успеха $h(r) - \mu(r)$. Известно неравенство [15, гл. 1, § 6]:

$$\mathbf{P}\{\hat{h}(r) - h(r) \geq \varepsilon\} = \mathbf{P} \left\{ \frac{s(r)}{N} - (h(r) - \mu(r)) \geq \varepsilon \right\} \leq e^{-2N\varepsilon^2}.$$

Поэтому, если предположить, что $h(r) < \alpha$, то $\mathbf{P}\{\hat{h}(r) \geq \alpha + \varepsilon\} \leq e^{-2N\varepsilon^2}$. Поскольку выборки, используемые для оценки меры, независимые, вероятность безошибочной работы алгоритма составляет не менее $(1 - e^{-2N\varepsilon^2})^K$. Отсюда следует, что для обеспечения вероятности успешной работы алгоритма p должно быть выполнено неравенство

$$p \leq (1 - e^{-2N\varepsilon^2})^K \iff N \geq \frac{\ln(1/(1 - \sqrt[k]{p}))}{2\varepsilon^2}.$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $\Psi(u, r) \triangleq \max_{x \in B_r} \Phi(u, x) = \Phi(u, x^0(r))$, где x^0 — точка на границе шара B_r , в которой достигается указанный максимум. Так как $B_\rho \subset B_R$, выполнено $\Psi(u, \rho) \leq \Psi(u, R)$. Поскольку точка $y = \frac{\rho}{R}x^0(R)$ лежит на границе шара B_ρ , $\Phi(u, y) \leq \Psi(u, \rho)$. Поэтому

$$0 \leq \Psi(u, R) - \Psi(u, \rho) \leq \Phi(u, x^0(R)) - \Phi(u, y) \leq L\|x^0(R) - y\| = (R - \rho)L.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$(П.1) \quad \Psi(u, \rho) \leq \Psi(u, R) \leq \Psi(u, \rho) + (R - \rho)L.$$

Минимизируя левые и правые части первого неравенства в (П.1) по $u \in U$ так, что $\max_{j=\overline{1, k_2}} \{b_{2j}(u) + \|B_{2j}(u)\|R\} \leq 0$ (ограничения задачи (4) при $r = R$), получаем первое доказываемое неравенство $\psi(\rho) \leq \psi(R)$ (здесь учтено, что $\psi(\rho)$ определен как минимум на более широком множестве). Из (11) и второго неравенства в (П.1) следует, что

$$\psi(R) \leq \Psi(u(\rho), R) \leq \Psi(u(\rho), \rho) + (R - \rho)L = \psi(\rho) + (R - \rho)L.$$

Из этой оценки следует второе доказываемое неравенство. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kibzun A.I., Kan Y.S. Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, 1996.
2. Кибзун А.И., Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
3. Кибзун А.И., Наумов А.В. Гарантирующий алгоритм решения задачи квантильной оптимизации // Космические исследования. 1995. Т. 33. № 2. С. 160–165.
4. Наумов А.В., Иванов С.В. Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // АиТ. 2011. № 2. С. 142–158.
Naumov A.V., Ivanov S.V. On stochastic linear programming problems with the quantile criterion // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 2. P. 353–369.
5. Кан Ю.С. Расширение задачи квантильной оптимизации с линейной по случайным параметрам функцией потерь // АиТ. 2020. № 12. С. 67–81.
Kan Yu.S. An extension of the quantile optimization problem with a loss function linear in random parameters // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 12. P. 2194–2205.
6. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // АиТ. 2015. № 9. С. 83–101.
Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. A method for solving quantile optimization problems with a bilinear loss function // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1582–1597.
7. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Аппроксимация вероятностных ограничений в задачах стохастического программирования с использованием ядра вероятностной меры // АиТ. 2019. № 11. С. 93–107.
Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. Approximation of Probabilistic Constraints in Stochastic Programming Problems with a Probability Measure Kernel // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 2005–2016.
8. Prékopa A. Stochastic Programming. Dordrecht–Boston: Kluwer, 1995.
9. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2014.

10. *Lejeune M.A., Prékopa A.* Relaxations for Probabilistically Constrained Stochastic Programming Problems: Review and Extensions // *Ann. Oper. Res.* 2018. <https://doi.org/10.1007/s10479-018-2934-8>
11. *Dentcheva D., Prékopa A., Ruszczyński A.* On Convex Probabilistic Programming with Discrete Distributions // *Nonlinear Anal.-Theor.* 2001. V. 47. No. 3. P. 1997–2009.
12. *Van Ackooij W., Berge V., de Oliveira W., Sagastizábal C.* Probabilistic Optimization via Approximate p -Efficient Points and Bundle Methods // *Comput. Oper. Res.* 2017. V. 77. P. 177–193.
13. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* Общие свойства двухэтапных задач стохастического программирования с вероятностными критериями // *АиТ.* 2019. № 6. С. 70–90.
Ivanov S.V., Kibzun A.I. General properties of two-stage stochastic programming problems with probabilistic criteria // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 6. P. 1041–1057.
14. *Boyd S., Vandenberghe L.* *Convex Optimization.* Cambridge: University Press, 2009.
15. *Ширяев А.Н.* *Вероятность.* М.: МЦНМО, 2017.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 30.01.2023

После доработки 16.05.2023

Принята к публикации 09.06.2023

Стохастические системы

© 2023 г. М.Е. ШАЙКИН, канд. техн. наук (shaikin@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО, МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПО ВЕКТОРУ СОСТОЯНИЯ

Получены интегральные представления решений линейных мультипликативно возмущенных дифференциальных уравнений, диффузионная часть которых билинейна по вектору состояния и вектору независимых винеровских процессов. Уравнения такого класса служат моделями стохастических систем с управлением, функционирующих в условиях параметрической неопределенности или нежелательного воздействия внешних возмущений. Для отыскания интегральных представлений и фундаментальных матриц уравнений применяются понятия и аналитический аппарат теории алгебр Ли.

Ключевые слова: мультипликативная стохастическая система, фундаментальная матрица, дифференциал Стратоновича—Фиска, теоретико-групповой метод, матричная алгебра Ли, теорема Вея—Нормана, стохастическая резольвента.

DOI: 10.31857/S0005231023080068, EDN: HBYPVP

1. Введение

В теории оптимизации динамических систем важное место отводится задачам управления объектами, функционирующим в условиях параметрической неопределенности или нежелательного воздействия внешних возмущений. В стохастическом разделе теории простейшими моделями таких систем являются линейные, называемые мультипликативными, уравнения Ито, диффузионные компоненты которых линейны по векторам состояния, управления и внешнего или параметрического возмущения. Мультипликативные уравнения — достаточно простые математические объекты, и можно надеяться получить в замкнутой аналитической форме их решения или интегральные для них представления.

Рассмотрим стохастическую систему Ито (1.1), (1.2), динамика которой задается мультипликативным уравнением марковского типа

$$(1.1) \quad dx_t = a(t, x_t)dt + b(t)(x_t; dw(t)), \quad x_t \in R^d, \quad w(t) \in R^r, \quad x_0 = \text{const}$$

(с коэффициентами, зависящими, вообще говоря, от t), а *вынуждающая сила* определяется случайной функцией f с дифференциалом

$$(1.2) \quad df(t) = (B_1(t)u_t + B_2(t)v_t)dt + B_{01}(t)u_t dw_1(t) + B_{02}(t)v_t dw_2(t),$$

где u_t и v_t — векторные сигналы управления и внешнего возмущения соответственно; $w(t)$, с индексами или без них, обозначает векторный винеровский процесс. Уравнение (1.1) предполагается линейным по вектору состояния x_t , так что $a(t, x) = A(t)x$, где $A(t) \in R^{d \times d}$ — матрица $d \times d$ при каждом t , а диффузионная компонента определена функцией $b(t)(\cdot; \cdot)$ двух переменных $(x, h) \in R^d \times R^r$, принимающей значения в R^d , при этом отображение $R^d \times R^r \rightarrow R^d$ является билинейным. Тем самым при фиксированном h оператор $B(t)h$, определенный соотношением $(B(t)h)x = b(t)(x; h)$, — линейный $R^d \rightarrow R^d$. Все матричные функции в (1.1), (1.2) предполагаются непрерывными на каждом конечном интервале значений параметра t . Система (1.1), (1.2) называется ниже (x, u, v) -*мультипликативной*; в частности, система (1.1) (x) -мультипликативна. Мультипликативные модели типа (1.1), (1.2) используются, в частности, в теории H_2/H_∞ — оптимизации стохастических систем [1].

Цель статьи — получение в интегральном виде решения линейного (x, u, v) -мультипликативного уравнения или стохастического аналога его фундаментальной матрицы. Поясним, о какой фундаментальной матрице и каком решении в интегральном виде идет речь. Как известно, в детерминированном случае решение линейного дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)x + B(t)$ имеет вид

$$(1.3) \quad x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, \tau)B(\tau)d\tau,$$

где $R(t, t_0)$ — *резольвента* (или фундаментальная матрица) однородного, при $B = 0$, уравнения; см., например, [2, стр. 144]. Функция $R(t, t_0)x_0$ есть общее решение однородного уравнения, принимающее значение x_0 при $t = t_0$, а интеграл в (1.3) — это решение возмущенного уравнения, обращающееся в нуль при $t = t_0$. В *стохастическом* случае фундаментальная матрица уравнения (1.1) является матричной *случайной* функцией $\Phi(t, \tau)$, а общее решение возмущенного уравнения, руководствуясь аналогией с (1.3), следует задавать формулой

$$(1.4) \quad x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \circ df(\tau),$$

в которой интеграл является стохастическим; через $\circ df$ обозначен дифференциал Стратоновича; см., например, [3, стр. 105–109]. Интеграл выбирается стохастическим в смысле Стратоновича по той причине, чтобы правило дифференцирования сложной функции $t \mapsto f(\xi^1(t), \dots, \xi^d(t))$ представлялось в том же виде, что и в классическом исчислении, а именно в виде

$df = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ d\xi^i$ [3]. Запись интеграла в форме Стратоновича делает возможным распространение некоторых теоретико-групповых методов на стохастический случай. Как известно [4], в детерминированном случае теоретико-групповые концепции позволяют преодолеть трудности исследования многомерных систем, вызванные *некоммутативностью* матричных коэффициентов, задающих динамику системы. Возможно, те же концепции могут оказаться полезными и в проблеме мультипликативности.

Некоторые примеры применения теоретико-групповых методов к статистическим исследованиям известны в литературе. Приведем небольшой список публикаций (см. [5–11]), тематически близких к задаче анализа мультипликативных систем. В [5] рассмотрена задача численной аппроксимации решения стохастического уравнения вида

$$dx_t = (Ax_t + f(x_t))dt + \sum_{i=1}^n (B_i x_t + g_i(x_t))dw_i, \quad x(0) = x_0 \in R^d$$

с нелинейными функциями $f, g_i : R^d \rightarrow R^d$ и матрицами $A, B_i \in R^{d \times d}$, удовлетворяющими следующим условиям: A, B_i принимают значения в матричной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с коммутаторными соотношениями $[A, B_i] = 0$, $[B_i, B_j] = 0$ для всех i, j . На фоне работ по теоретико-групповому анализу *детерминированных* уравнений, число которых в последнее время явно поубавилось, см. об этом обзор [6], анализ свойств решений и численные алгоритмы нахождения решений (так называемых экспоненциальных интеграторов) для *стохастических* уравнений остается активной областью исследования уравнений как мультипликативных, так и с аддитивными шумами; см., например, [7, 8]. В [9] исследован вопрос о среднеквадратической устойчивости численных методов вычисления экспоненциальных интеграторов. Как показано в [10], теоретико-групповые методы оказались эффективными и для численного интегрирования уравнений с частными производными. Среди работ отечественных авторов отметим исследование мультипликативного стохастического дифференциально-операторного уравнения с операторами A, B , действующими в сепарабельном гильбертовом пространстве [11]. В работе предполагается, что оператор A порождает полугруппу операторов $S(t)$, $t > 0$ класса C_0 ; это гарантирует корректность задачи Коши для невозмущенного уравнения $\dot{X}(t) = AX(t)$.

В задаче, решаемой в данной статье, рассматривается конечномерное мультипликативное уравнение, для вычисления резольвентного аналога которого применяется теоретико-групповой метод, являющийся обобщением на стохастический случай детерминированного метода Вея–Нормана [12] нахождения резольвент линейных дифференциальных уравнений. В общих чертах суть метода Вея–Нормана заключается в следующем. Если в матричном уравнении $\dot{\Phi}(t) = B(t)\Phi(t)$, $\Phi(0) = E$ (E – единичная матрица) неслучайная функция $B(t)$ принимает значения в матричной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то решение $\Phi(t)$ принадлежит соответствующей группе Ли $\mathcal{G}$. При этом один из способов по-

строения решения $\Phi(t)$ состоит в представлении его конечным произведением матричных экспонент

$$(1.5) \quad \Phi(t) = \exp(s_1(t)A_1) \dots \exp(s_m(t)A_m),$$

где $\{A_1, \dots, A_m\}$ — базис минимальной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденной матрицами $A(t)$ при всех t , а $s_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ — некоторые вещественные функции. Нахождение искоемых $s_i(t)$ сводится к решению некоторой системы нелинейных дифференциальных уравнений [12]. В основе предлагаемого здесь *обобщения* метода Вея–Нормана на случай мультипликативного уравнения Ито лежит запись последнего в форме уравнения Стратоновича–Фиска и поиск решения последнего в виде произведения матричных экспонент $\exp(A_i s_i(t))$ с искомыми *семимартингалами* (по терминологии, принятой в [3]) $s_i(t)$. Относительно матриц A_i , $i = 1, \dots, m$, предполагается, как и в детерминированном случае, что они образуют базис некоторой матричной алгебры Ли.

Применения теории групп к задачам анализа и отыскания решений детерминированных дифференциальных уравнений широко известны по монографической литературе; см., например, [4, 13, 14]. Приложения к теории стохастических дифференциальных уравнений значительно более скромные; из учебной литературы отметим [3, 15, 16]. Изложение теоретико-группового метода Вея–Нормана к задаче вычисления резольвент мультипликативных уравнений Ито в литературе, кажется, не встречалось.

2. Постановка задачи

При характеристизации в предыдущем разделе стохастической системы как заданной (x, u, v) -мультипликативным уравнением Ито было сделано разделение уравнения на динамическую его часть и вынуждающую силу, от вектора состояния системы не зависящую. Это продиктовано характером поставленной задачи — вычислить фундаментальную матрицу (резольвенту) стохастического уравнения Ито, которая определяется только его однородной, зависящей от x_t частью. Вычислив резольвенту, не трудно получить затем интегральное представление решения уравнения. Руководствуясь этим соображением, можно от общей (x, u, v) -мультипликативной системы перейти сначала к ее динамической части, т.е. к уравнению (1.1), которое является мультипликативным только по состоянию.

Перечислим решаемые в статье задачи. Первой задачей является определение двух видов диффузионной компоненты $b(t)(x_t; dw(t))$ уравнения (1.1) — винеровского и мартингального. Вторая задача, в разделах 3, 4, — это запись мультипликативного уравнения (1.1) в симметризованной форме Стратоновича–Фиска. Третья задача — получение *интегрального* представления решения мультипликативного уравнения (1.1). Здесь в несколько более общем случае диффузионного уравнения с матрицей $\sigma(t, x)$, зависящей *аффинно* (а не просто линейно) от x , см. раздел 5, возникает интересный феномен

появления дополнительной вынуждающей силы в интегральном представлении для решения уравнения. При решении в разделах 6 и 7 двух последующих задач возникают теоретико-групповые аспекты решения мультипликативного уравнения, записанного в симметризованной форме, с *разрешимой* (в разделе 6) алгеброй Ли и с произвольной в разделе 7 алгеброй Ли для матричных коэффициентов диффузионной компоненты уравнения. Уравнение в разделе 7 задано при этом в несимметризованной мартингальной форме вместо винеровских процессов. В отдельном разделе приведен *пример* нахождения резольвенты уравнения теоретико-групповым методом. Заключительные замечания и список цитированной литературы завершают работу.

3. Винеровское и мартингальное представления диффузионной компоненты

Оба представления дифференциального уравнения — по винеровскому процессу и по мартингалу для возмущающих сил — достаточно интересны в мультипликативной теории. Мартингальное уравнение рассматривается подробнее в разделе 7.

Предложение 1. Диффузионная компонента $b(t)(x_t; dw(t))$ однородного уравнения (1.1) допускает следующие равносильные представления:

(а) $b(t)(x_t; dw(t)) = (B_1(t)x_t, \dots, B_r(t)x_t)dw(t)$, где $B_j(t)$, $j = 1, \dots, r$ — матрица размера $d \times d$;

(б) $b(t)(x_t; dw(t)) = \sum_{i=1}^m A_i x_t d\zeta^i(t)$, где A_i , $i = 1, \dots, m$ — матрицы $d \times d$,

а $d\zeta^i(t) = \sum_{j=1}^r b_j^i(t)dw^j(t)$, $b_j^i(t) \in R$, где $\zeta^i(t)$ — мартингалы.

Доказательство. Как отмечалось в разделе 1, диффузионная часть $b(t)(x_t; dw(t))$ линейного уравнения при каждом t задается билинейным отображением $b(t)$ произведения $V \times H$, где $V = R^d$, $H = R^r$, векторных пространств в пространство V . При фиксированном $h \in H$ оператор $B(t)h$, определенный равенством $(B(t)h)x = b(t)(x; h)$, является элементом пространства $End V$ линейных операторов из V в V . Пусть $\{h_j, j = 1, \dots, r\}$ — базис в H такой, что в разложении $w(t) = \sum_j w^j(t)h_j$ винеровские процессы $w^j(t)$

взаимно независимы. Имеем

$$b(t)(x; dw(t)) = b(t) \left(x; \sum_{j=1}^r dw^j(t)(b(t)h_j) \right) = \sum_{j=1}^r dw^j(t)(B(t)h_j)x,$$

где $B(t)h_j \in End V$. Обозначив $B_j(t) := B(t)h_j$, получим утверждение (а) $b(t)(x_t; dw(t)) = (B_1(t)x_t, \dots, B_r(t)x_t)dw(t)$ предложения 1. Таким образом, зависимость $b(t)$ от x задается набором из r произвольных квадратных $d \times d$ матриц $B_j(t)$, не обязательно линейно независимых; см. [1, 17].

Далее, пусть $\{A_i, i = 1, \dots, m\}$ — базис линейного подпространства $L \subset \text{End } V$, порожденного операторами $B(t)h_j$. Полагая $B(t)h_j = \sum_{i=1}^m b_j^i(t)A_i$, $j = 1, \dots, m$, где $b_j^i(t) \in R$, и вводя обозначения $d\zeta^i(t) := \sum_{j=1}^r b_j^i(t)dw^j(t)$, $i = 1, \dots, m$, будем иметь $b(t)(x; dw(t)) = \sum_{i=1}^m d\zeta^i(t)A_i x$, что завершает доказательство предложения 1. Ниже без потери общности принимаем $\dim L = m = r$.

При доказательстве предложения 1 снос $a(t, x_t)dt$ в уравнении (1.1) не учитывался. Неявно он предполагался нулевым. Его действительно можно обратить в нуль известным преобразованием (разумеется, при этом (1.1) заменится уравнением с другим билинейным отображением $b(t)$). В самом деле, пусть $y_t = \Lambda_t^{-1}x_t$, где Λ_t — матричная экспонента, удовлетворяющая, как известно, интегральному уравнению $\Lambda_t = E + \int_0^t a(s)\Lambda_s ds$ с начальным условием $\Lambda_0 = E$. Так как $dy_t = (d\Lambda_t^{-1})x_t + \Lambda_t^{-1}dx_t$ и $d\Lambda_t^{-1} = -\Lambda_t^{-1}a(t)dt$, то

$$dy_t = \Lambda_t^{-1}a(t)x_t dt + \Lambda_t^{-1}b_t(x_t; dw(t)) - \Lambda_t^{-1}a(t)x_t dt$$

(заметим, что матрицы $a(t)$ и Λ_t коммутируют), тем самым получаем уравнение $dy_t = \Lambda_t^{-1}b_t(\Lambda_t y_t; dw(t))$ с нулевым сносом. Видим, что определенные выше в предложении 1 матрицы $B_j(t)$ заменяются матрицами $\tilde{\Lambda}_t = \Lambda_t^{-1}B_j(t)\Lambda_t$, $j = 1, \dots, r$.

Выясним теперь, как преобразовать мультипликативное уравнение (1.1) к симметризованной форме Стратоновича–Фиска. Выше уже отмечалось, что такое преобразование является необходимым требованием предлагаемой здесь методологии.

Предложение 2. В симметризованной форме Стратоновича–Фиска уравнение состояния (1.1), записанное в виде

$$(3.1) \quad dx_t = a(t)x_t dt + (B_1(t)x_t, \dots, B_r(t)x_t)dw(t)$$

(см. предложение 1, (а)) принимает вид

$$(3.2) \quad dx_t = a(t)x_t dt + B_0(t)x_t dt + \sum_{j=1}^r B_j(t)x_t \circ dw^j(t),$$

где $B_0(t) := -1/2 \sum_{j=1}^r B_j^2(t)$.

Доказательство. Отправляясь от теории уравнения марковского типа

$$(3.3) \quad dx_t = a(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dw(t),$$

в котором не предполагается даже линейности по x_t функций $a(t, x_t)$ и $\sigma(t, x_t)$ (см., например, [3]), запишем уравнение (3.3) в координатной форме

$$dx_t^i = a^i(t, x_t)dt + \sum_{j=1}^r b_j^i(t, x_t)dw^j(t), \quad i = 1, \dots, d.$$

Согласно общей теории, уравнение (3.3), с использованием дифференциала Стратоновича–Фиска, представляется в виде

$$(3.4) \quad dx_t = \bar{a}(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t) \circ dw(t),$$

где вектор $\bar{a}(t, x)$ имеет компоненты

$$(3.5) \quad \bar{a}^i(t, x) = a^i(t, x) - 1/2 \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^r \left(\frac{\partial}{\partial x^j} b_k^i(t, x) \right) b_k^j(t, x).$$

Напомним, что стохастический дифференциал Ито $dw^j(t)$ и дифференциал $\circ dw^j(t)$ связаны формулой

$$(3.6) \quad x_t dw^q(t) = x_t \circ dw^q(t) - 1/2 dx_t dw^q(t).$$

Рассмотрим уравнение (3.1) в форме

$$(3.7) \quad dx_t = a(t)x_t dt + \sum_{j=1}^r B_j(t)x_t dw^j(t)$$

и обратимся к формуле (3.6). Поскольку $x_t dw^j(t) = x_t \circ dw^j(t) - 1/2 dx_t dw^j(t)$, имеем, игнорируя пока снос в (3.7), уравнение $dx_t = \sum_j B_j(t)x_t \circ dw^j(t) - 1/2 \sum_j B_j(t)x_t dw^j(t)$. Замечая, что

$$dx_t dw^j(t) = \sum_k B_k(t)x_t dw^k(t) dw^j(t) = \sum_k B_k(t)x_t \delta_{jk} dt = B_j(t)x_t dt,$$

уравнение (3.1) в преобразованном виде можно записать как

$$(3.8) \quad dx_t = a(t)x_t dt + \sum_{j=1}^r B_j(t)x_t \circ dw^j(t) - 1/2 \sum_{j=1}^r B_j^2(t)x_t dt,$$

что и требовалось. Снос в этом уравнении определяется матрицей $A(t) := a(t) - 1/2 \sum_{j=1}^r B_j^2(t)$; его можно обратить в нуль, перейдя к вектору состояния $y_t = \Lambda_t^{-1}x_t$, где $\Lambda_t = E + \int_0^t A(s)\Lambda_s ds$.

В частности, если матрицы $B_j(t)$, $j = 1, \dots, r$, коммутируют, то решение последнего уравнения записывается в виде произведения

$$x_t = \prod_{q=1}^r \exp \left\{ \int_0^t B_q(s) dw^q(s) - 1/2 \int_0^t B_q^2(s) ds \right\} x_0.$$

Также ясно, что матрицы $B_q(t)$ и $B_q^2(t)$ коммутируют, вследствие чего множители в произведении можно представить в виде

$$\exp \left\{ \int_0^t B_q(s) dw^q(s) \right\} \exp \left\{ -1/2 \int_0^t B_q^2(s) ds \right\}, \quad q = 1, \dots, r.$$

Решением уравнения $dx_t = B_q(t)x_t \circ dw^q(t)$ с нулевым сносом, с начальным условием x_0 является функция $U_q(t)x_0 = \exp \left\{ \int_0^t B_q(s)dw^q(s) \right\} x_0$. Отображение $t \mapsto U_q(t)$ является стохастической резольвентой этого уравнения.

4. Стохастическая резольвента мультипликативного уравнения

В мультипликативном уравнении типа

$$(4.1) \quad dx_t = a(t)x_t dt + \sum_{j=1}^r B_j(t)x_t \circ dw^j(t)$$

неслучайную компоненту $a(t)x_t dt$ можно, как было отмечено в разделе 3, обратить в нуль и, следовательно, без потери общности считать уравнение заданным в виде $dx_t = \sum_{j=1}^r B_j(t)x_t \circ dw^j(t)$ с новыми матричными коэффициентами. Для этого положим $y_t = \Lambda_t^{-1}x_t$. Тогда $dy_t = \Lambda_t^{-1}b(t)(x_t; dw(t))$. Поскольку $b(t)(x_t; dw(t)) = \sum_{j=1}^r B_j(t)x_t dw^j(t)$, то

$$(4.2) \quad dy_t = \sum_{j=1}^r B_j(t)\Lambda_t y_t \circ dw^j(t).$$

В рамках теоретико-группового формализма именно матрицы $\tilde{B}_j(t) = \Lambda_t^{-1}B_j(t)\Lambda_t$, а не исходные матрицы B_j , $j = 1, \dots, r$, должны порождать алгебру Ли, основную в методе Вея–Нормана, где $\Lambda_t = \exp \int_0^t a(s)ds$ — экспонента матричной функции $t \mapsto \int_0^t a(s)ds$.

Дадим теперь определение (стохастической) резольвенты уравнения, линейного по x_t . Если Ψ_t — решение уравнения

$$(4.3) \quad d\Psi_t = \sum_{j=1}^r \Lambda_t^{-1}B_j(t)\Lambda_t \Psi_t \circ dw^j(t), \quad \Psi_t|_{t=0} = E$$

с нулевым сносом, то фундаментальную матрицу (резольвенту) $\Phi(t)$ исходного уравнения (4.1) определим формулой $\Phi(t) = \Lambda_t \Psi_t$. Но так как уравнение (4.1) равносильно уравнению Ито $dx_t = \sum_{j=1}^r dw^j(t)B_j(t)x_t$, то, следовательно, $\Phi(t)$ удовлетворяет уравнению Стратоновича

$$(4.4) \quad d\Phi_t = a(t)\Phi_t dt + \sum_{j=1}^r B_j(t)\Phi_t \circ dw^j(t), \quad \Phi_t|_{t=0} = E.$$

Если $f(t)$ — вынуждающая сила в неоднородном стохастическом уравнении, то решение последнего должно иметь интегральное представление (1.4).

5. Интегральное представление Коши решения мультипликативного уравнения с аффинными коэффициентами

Уравнения с аффинными коэффициентами необходимы в теории таких линейных управляемых систем, которые мультипликативны не только по вектору состояния, но и по векторам управления и внешнего возмущения. Теория стохастической резольвенты предыдущего раздела касалась мультипликативного уравнения с линейными, но не *аффинными* коэффициентами. Теперь рассмотрим векторное уравнение (с векторным винеровским процессом) вида

$$(5.1) \quad dx_t = a(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dw(t), \quad x_0 \in R^d,$$

где $a(t, x) = a(t)x + a_0(t)$, $\sigma(t, x) = B(t, x) + b_0(t)$, $a(t) \in R^{d \times d}$, $a_0(t) \in R^d$, $B(t, x)$, $b_0(t) \in R^{d \times r}$, $w(t) \in R^r$. Как установлено в разделе 4, см.(4.1), если (5.1) — мультипликативная система, то $B(t, x) = (B_1(t)x, \dots, B_r(t)x)$ — матрица со столбцами $B_j(t)x$, где $B_j(t) \in R^{d \times d}$, $j = 1, \dots, r$. Далее, $b_0(t)$ — матрица со столбцами $b_{0j}(t)$, $j = 1, \dots, r$. Частный случай одномерной ($x_t \in R$) системы с аффинными коэффициентами и скалярным $w(t)$ рассмотрен в [15]. В векторном случае $x_t \in R^d$ найдем фундаментальную матрицу уравнения (5.1).

Предложение 3. Решение мультипликативного уравнения с аффинными относительно x_t коэффициентами имеет следующее интегральное представление:

$$(5.2) \quad x_t = \Phi_t \left(x_0 + \int_0^t \Phi_s^{-1} \left(a_0(s) - \sum_{j=1}^r B_j(s)b_{0j}(s) \right) ds + \right. \\ \left. + \int_0^t \Phi_s^{-1} \sum_{j=1}^r b_{0j}(s)dw^j(s) \right).$$

Здесь Φ_t — определенная в предыдущем разделе резольвента (4.1), записанная для уравнения (5.1), в котором приняты условия $a_0(t) = 0$, $b_{0j}(t) = 0$, $j = 1, \dots, r$.

Заметим, что появление под интегралами в (5.2), помимо $a_0(s)ds + \sum_{j=1}^r b_{0j}(s)dw^j(s)$, дополнительной вынуждающей силы $B(s)b_0(s) := -\sum_{j=1}^r B_j(s)b_{0j}(s)ds$ (она вызвана “аффинной” добавкой $b_0(s)$) нельзя было предвидеть заранее, но непосредственная проверка показывает, что функция (5.2) действительно удовлетворяет уравнению (5.1).

Доказательство. Снова обратимся к уравнению (5.1). В стохастическом случае применим метод, аналогичный детерминированному методу вариации постоянной. Положим $x_t = \Phi_t \eta_t$ и рассмотрим η_t в качестве новой неизвестной вместо x_t . Дифференцируя $x_t = \Phi_t \eta_t$ стохастически, получаем

$$dx_t = (d\Phi_t)\eta_t + \Phi_t d\eta_t + d\Phi_t d\eta_t,$$

или в силу определения Φ_t как решения уравнения (4.4),

$$dx_t = \left(a(t)dt + \sum_{j=1}^r dw^j B_j(t) \right) x_t + \Phi_t d\eta_t + \left(a(t)dt + \sum_{j=1}^r dw^j B_j(t) \right) \Phi_t d\eta_t.$$

Приравняв правые части этого уравнения и исходного уравнения (см. (5.1))

$$dx_t = (a(t)x_t + a_0(t))dt + \sum_{j=1}^r dw^j (B_j(t)x_t + b_{0j}(t)),$$

после сокращений получим

$$(5.3) \quad \left(E + a(t)dt + \sum_{j=1}^r dw^j(t) B_j(t) \right) \Phi_t d\eta_t = a_0(t)dt + \sum_{j=1}^r b_{0j}(t)dw^j(t).$$

Поскольку, если действовать формально,

$$\begin{aligned} & \left(E + a(t)dt + \sum_{j=1}^r dw^j B_j(t) \right)^{-1} = \\ & = E - \left(a(t)dt + \sum_{j=1}^r dw^j B_j(t) \right) + \left(a(t)dt + \sum_{j=1}^r dw^j B_j(t) \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

и

$$\left(a(t)dt + \sum_{j=1}^r dw^j B_j(t) \right)^2 = \sum_{j=1}^r B_j^2 dt,$$

из (5.3) получаем

$$(5.4) \quad d\eta_t = \Phi_t^{-1} \left(a_0(t)dt - \sum_{j=1}^r B_j(t)b_{0j}(t)dt + \sum_{j=1}^r dw^j(t)b_{0j}(t) \right).$$

Это уравнение выражает тот факт, что η_t есть примитивная для правой части в (5.3), так что интегрирование (5.4) дает в точности формулу (5.2). Будучи выраженной через резольвенту $\mathcal{R}(t, s) = \Phi_t \Phi_s^{-1}$, эта же формула дает интегральное представление Коши решения мультипликативного уравнения (4.1) с аффинными коэффициентами. Что и требовалось доказать.

6. Мультипликативное уравнение с разрешимой алгеброй Ли

В этом разделе исчерпывающее решение задачи об интегральном представлении решения мультипликативного уравнения получается ценой сильного предположения о том, что алгебра Ли, ассоциированная с уравнением,

является разрешимой. Результат с разрешимой алгеброй Ли получен Х. Кунитой [18] и приведен в [3] в качестве одного из примеров¹. Уравнение состояния предполагается здесь априори заданным в симметризованной форме Стратоновича–Фиска, коэффициенты уравнения не зависят от t .

Итак, рассматривается уравнение (с постоянными коэффициентами)

$$(6.1) \quad dx_t = (B_0 x_t + b_0) dt + \sum_{p=1}^r (B_p x_t + b_p) \circ dw^p(t),$$

$$B_p \in R^{d \times d}, \quad b_p \in R^d, \quad p = 0, 1, \dots, r.$$

Алгебра Ли, порожденная векторными полями $L_p = \sum_{i=1}^d (B_p x + b_p)^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $p = 0, 1, \dots, r$, разрешима, что имеет место при $(B_p)_j^i = 0$ для $i > j$, $p = 0, 1, \dots, r$. Это условие означает, что в каждой из матриц B_p ее элементы под главной диагональю равны нулю. В частности, при $i = d$ единственным ненулевым элементом последней, d -й строки является лишь диагональный элемент $(B_p)_d^d$, $p = 0, 1, \dots, r$. Из уравнения (6.1) следует, что при $i = d$

$$(6.2) \quad dx_t^d = \left((B_0)_d^d x_t^d + b_0^d \right) dt + \sum_{p=1}^r \left((B_p)_d^d x_t^d + b_p^d \right) \circ dw^p(t).$$

Это (скалярное) стохастическое уравнение аналогично детерминированному в том смысле, что записано с использованием дифференциала Стратоновича–Фиска, поэтому его решение имеет вид

$$(6.3) \quad x_t^d = e^{c_d(t)} \left(x_0^d + \int_0^t e^{-c_d(s)} \circ df_d(s) \right),$$

где функция $c_d(t)$ под знаком экспоненты и вынуждающая сила $f_d(t)$ заданы соответственно формулами

$$c_d(t) = (B_0)_d^d t + \sum_{p=1}^r (B_p)_d^d w^p(t), \quad f_d(t) = b_0^d t + \sum_{p=1}^r b_p^d w^p(t).$$

Действуя аналогично, рассмотрим уравнение для x_t^{d-1} :

$$(6.4) \quad dx_t^{d-1} = \left((B_0)_{d-1}^{d-1} x_t^{d-1} + (B_0)_d^{d-1} x_t^d + b_0^{d-1} \right) dt +$$

$$+ \sum_{p=1}^r \left((B_p)_{d-1}^{d-1} x_t^{d-1} + (B_p)_d^{d-1} x_t^d + b_p^{d-1} \right) \circ dw^p(t).$$

¹ Простой пример разрешимой алгебры Ли порождается группой трансляций плоскости R^2 и вращений вокруг оси, к ней перпендикулярной. Алгебра Ли трехмерна, ее коммутационными соотношениями являются $[X_1, X_2] = 0$, $[X_1, X_3] = X_2$, $[X_3, X_2] = X_1$ [19].

От x_t^{d-1} в правой части уравнения (6.4) зависит сумма

$$(B_0)_{d-1}^{d-1} x_t^{d-1} dt + \sum_{p=1}^r (B_p)_{d-1}^{d-1} x_t^{d-1} \circ dw^p(t).$$

Интеграл от коэффициента при x_t^{d-1} в этой сумме обозначим через

$$c_{d-1}(t) := (B_0)_{d-1}^{d-1} t + \sum_{p=1}^r (B_p)_{d-1}^{d-1} w^p(t).$$

Не зависящие от x_t^{d-1} слагаемые в правой части уравнения (6.4) образуют сумму

$$(6.5) \quad df_{d-1}(t) := \left((B_0)_d^{d-1} x_t^d + b_0^{d-1} \right) dt + \sum_{p=1}^r \left((B_p)_d^{d-1} x_t^d + b_p^{d-1} \right) \circ dw^p(t),$$

в которой x_t^d уже известна как решение (6.3) уравнения (6.2). Решение уравнения (6.4) записывается, следовательно, в виде

$$(6.6) \quad x_t^{d-1} = e^{c_{d-1}(t)} \left(x_0^{d-1} + \int_0^t e^{-c_{d-1}(s)} \circ df_{d-1}(s) \right).$$

Процедура последовательного решения скалярных уравнений для компонент x_t^k , $k = n, n-1, \dots, 1$ вектора $x_t \in R^n$ вполне очевидна из вышеизложенного. Однако не очевидной остается равносильность такой формы решения и той, которая приведена в [3]. Чтобы равносильность установить, запишем исходное уравнение (6.1) покомпонентно:

$$(6.7) \quad dx_t^i = \sum_{j \geq i} \left((B_0)_j^i x_t^j + b_0^i \right) dt + \sum_{p=1}^r \sum_{j \geq i} \left((B_p)_j^i x_t^j + b_p^i \right) \circ dw^p(t).$$

При фиксированном i слагаемые в правой части, зависящие от x_t^j с $j \geq i$, играют особую роль. Во-первых, дифференциал dx_t^i связан с переменной x_t^j коэффициентом $(B_0)_j^i dt + \sum_{p=1}^r (B_p)_j^i dw^p(t)$, интеграл от которого обозначим через c_j^i :

$$c_j^i(t) := (B_0)_j^i t + \sum_{p=1}^r (B_p)_j^i w^p(t), \quad j = i, i+1, \dots, d.$$

Диагональный элемент $c_i^i(t)$ этой матрицы совпадает с функцией, которая выше обозначалась через $c_i(t)$. Во-вторых, сумма слагаемых справа в (6.7) с индексами $j > i$ получает представление $\sum_{j=i+1}^d x_t^j \circ dc_j^i(t)$. Наконец, члены, вообще не зависящие от каких-либо компонент вектора x_t , образуют сумму

$\sum_{p=1}^r b_p^i dw^p(t) + b_0^i dt$. Таким образом, решение системы уравнений (6.7) задается формулами

$$x_t^d = e^{c_d^d(t)} \left(x_0^d + \int_0^t e^{-c_d^d(s)} \circ df_d(s) \right), \quad f_d(t) = b_0^d t + \sum_{p=1}^r b_p^d dw^p(t),$$

если $i = d$, и формулами

$$x_t^i = e^{c_i^i(t)} \left(x_0^i + \int_0^t e^{-c_i^i(s)} \circ df_i(s) \right),$$

где

$$f_i(t) := \sum_{j=i+1}^d \int_0^t x^j(s) \circ dc_j^i(s) + b_0^i t + \sum_{p=1}^r b_p^i dw^p(t),$$

если $i = d-1, d-2, \dots, 1$ [3].

7. Алгебра Ли мультипликативного уравнения с непрерывными семимартингалами

Рассмотрим чуть более общий случай уравнения Ито

$$(7.1) \quad dx_t = \sum_{p=1}^m A_p x_t d\zeta^p(t), \quad \zeta(0) = 0$$

с непрерывными семимартингалами $\zeta^i(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^m b_j^i(t) dw^j(t)$ вместо винеровских процессов $w^j(t)$, $j = 1, \dots, m$. Матрицы A_p предполагаются некоммутирующими, порождающими произвольную конечномерную алгебру Ли. Следует отметить, что тема о взаимодействии *стохастической* структуры дифференциального уравнения с *алгебраической* теоретико-групповой структурой его коэффициентов остается к настоящему времени недостаточно исследованной.

Предположим, что уравнение имеет единственное решение x_t , $t > 0$, тогда x_t линейно зависит от x_0 . Пусть $x_t = U(t)x_0$. Решением уравнения $dx_t = A_p x_t d\zeta^p(t)$, $\zeta(0) = 0$ с единственной матрицей A_p и супермартингалом $\zeta^p(t)$ является экспоненциальный супермартингал (если $\sum_j (b_j^p)^2 < \infty$)

$$\sigma_p(t) = e^{A_p \zeta^p(t) - 1/2 A_p^2 \langle \zeta^p \rangle(t)} \sigma_p(0),$$

где $\langle \zeta^p \rangle(t) = \sum_j \int_0^t (b_j^p)^2(s) ds$; см. [20, раздел 2.7]. Для получения решения снова воспользуемся приемом, уже изложенным во введении, а именно: запишем исходное уравнение Ито (7.1) в симметризованной форме Стратоновича–Фиска и применим к полученному уравнению аналог детерминированного метода Вея–Нормана [12]. После этого не составит труда получить интегральное представление решения уравнения (7.1).

Теорема. Пусть

$$(7.2) \quad dx_t = \sum_{p=1}^m A_p x_t d\zeta^p(t), \quad \zeta(0) = 0$$

— стохастическая система с семимартингалами

$$\zeta^i(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^m b_j^i(t) dw^j(t).$$

Функции $b_j^p(t)$ известны. Рассмотрим функции

$$F_i = \prod_{k=1}^{i-1} e^{X_k s_k} X_i \prod_{k=i-1}^1 e^{-X_k s_k},$$

где $X_1, \dots, X_n$ — базис алгебры Ли, порожденной матричными коэффициентами $A_p(t)$, $p = 1, \dots, m$, а $s^i(t)$ — искомые функции. Тогда для дифференциалов $\circ ds^i(t)$ неизвестных функций $s^i(t)$ справедлива система уравнений $s^i(t)$:

$$(7.3) \quad \sum_{i=1}^n F_i(t) \circ ds^i(t) = \sum_{p=1}^n \tilde{A}_p(t) \circ d\zeta^p(t).$$

Через функции $s^i(t)$ выражается решение $x_t = U(t)x_0$ исходного уравнения (7.1).

Доказательство. Имея в виду сделанные замечания, запишем уравнение (7.1) в симметризованном виде. Имеем $x_t \cdot d\zeta^p(t) = x_t \circ d\zeta^p(t) - 1/2 dx_t \cdot d\zeta^p(t)$, где

$$dx_t \cdot d\zeta^p(t) = \sum_{q=1}^m A_q x_t d\zeta^q(t) \cdot d\zeta^p(t).$$

Так как $d\zeta^q(t) \cdot d\zeta^p(t) = \sum_{j=1}^r b_j^q(t) b_j^p(t) dt =: c^{qp}(t) dt$, где $c^{qp}(t)$ — элементы матрицы $c(t) = b^*(t)b(t)$ порядка $m \times m$, а матрицы $b(t) = (b_j^p(t))$ — порядка $r \times m$, то

$$x_t \cdot d\zeta^p(t) = x_t \circ d\zeta^p(t) - 1/2 \sum_{q=1}^m A_q x_t c^{qp}(t) dt,$$

и уравнение (7.1) записывается в виде

$$(7.4) \quad dx_t = a(t)x_t dt + \sum_{p=1}^m A_p x_t \circ d\zeta^p(t)$$

с коэффициентом сноса $a(t) = -1/2 \sum_{p,q=1}^m A_p A_q c^{qp}(t)$. Фундаментальную матрицу уравнения (7.3), как и выше в разделе 5, отыскиваем в виде произведения $\Phi_t = \Lambda_t \Psi_t$, где матрица $\Lambda_t = \exp\{\int_0^t a(s) ds\}$ удовлетворяет матричному уравнению $d\Lambda_t = a(t)\Lambda_t dt$. Учитывая, что $\Psi_t = \Lambda_t^{-1}\Phi_t$ и $d\Psi_t = (d\Lambda_t^{-1})\Phi + \Lambda_t^{-1}d\Phi_t$, а также $d\Lambda_t^{-1} = -\Lambda_t^{-1}(d\Lambda_t)\Lambda_t^{-1}$, для неизвестной функции Ψ_t получаем матричное дифференциальное уравнение

$$(7.5) \quad d\Psi_t = \sum_{p=1}^m (\Lambda_t^{-1} A_p \Lambda_t) \Psi_t \circ d\zeta_t^p.$$

Матричный коэффициент сноса обращается здесь в нуль, а матричные коэффициенты A_p исходного уравнения (7.1) переходят в коэффициенты $\tilde{A}_p(t) = \Lambda_t^{-1} A_p \Lambda_t$. В таком случае из теоремы Кемпбелла–Бейкера–Хаусдорфа [21], согласно которой $a, b \in L \Rightarrow e^a b e^{-a} \in L$, следует, что также и $\tilde{A}_p \in L$, $p = 1, \dots, m$. Здесь возникает ограничение для применения теоретико-групповых методов, вызванное необходимостью преобразования уравнения Ито к его симметризованной форме. Возможно, по этой причине в большинстве статистических приложений групповой анализ применяется к уравнениям, заданным сразу в форме Стратоновича–Фиска.

Чтобы продолжить тему теоретико-группового анализа уравнения (7.5), здесь тоже предположим, что матричные коэффициенты $\tilde{A}_p(t) = \Lambda_t^{-1} A_p \Lambda_t$ в уравнении (7.5) известные априори заданные и $\tilde{L}$ есть порожденная ими при всех t алгебра Ли с некоторым базисом $\{X_1, \dots, X_n\}$, тогда к алгебре $\tilde{L}$ можно применить метод Вея–Нормана. Ниже допущение о существовании алгебры Ли $\tilde{L}$ для уравнения (7.5) считаем выполненным.

Намереваясь искать фундаментальную матрицу Ψ_t в виде произведения $\prod_{i=1}^n e^{X_i s^i(t)}$ с неизвестными скалярными функциями $s^i(t)$, рассмотрим матричную функцию

$$u(s) = u(s_1, \dots, s_n) = e^{X_1 s_1} \dots e^{X_n s_n}, \quad s_i \in R, i = 1, \dots, n$$

(предостерегаем от смешения числовой переменной s_i с функцией $s^i(t)$). Частная производная $\frac{\partial}{\partial s_i} u(s)$ равна $u_{s_i} = \prod_{k=1}^{i-1} e^{X_k s_k} X_i \prod_{k=i}^n e^{X_k s_k}$, что можно записать в виде $u_{s_i} = F_i u(x)$, где обозначено $F_i = \prod_{k=1}^{i-1} e^{X_k s_k} X_i \prod_{k=i-1}^1 e^{-X_k s_k}$. Поэтому дифференциал Стратоновича–Фиска функции $t \mapsto \Psi_t = u(s^1(t), \dots, s^n(t))$ равен

$$d\Psi_t = \sum_{i=1}^n F_i(t) \Psi_t \circ ds^i(t),$$

где $F_i(t)$ получается из формулы для F_i подстановкой в нее $s^i(t)$ вместо s_i для всех $i = 1, \dots, n$. Сравнивая $d\Psi_t$ с дифференциалом для Ψ_t из уравнения (7.5), которое (заменив m на n) перепишем в виде $d\Psi_t = \sum_{p=1}^n \tilde{A}_p(t) \Psi_t \circ d\zeta^p(t)$, получим, после сокращения на неособенную мат-

рицу Ψ_t , основное уравнение для дифференциалов $\circ ds^i(t)$ искомых процессов $s^i(t)$:

$$(7.6) \quad \sum_{i=1}^n F_i(t) \circ ds^i(t) = \sum_{p=1}^n \tilde{A}_p(t) \circ d\zeta^p(t).$$

Напомним еще раз, что имеют место соотношения

$$d\zeta^p(t) = \sum_{j=1}^r b_j^p(t) dw^j(t), \quad p = 1, \dots, n, \quad d\zeta^q(t) = \sum_{j=1}^r g_j^q(t) dw^j(t), \quad q = 1, \dots, n,$$

где функции $b_j^p(t)$ известны, а функции $g_j^q(t)$ искомые, при этом $n = \dim \tilde{L}$. Если разложить обе части основного уравнения (7.6) по базису $\{X_1, \dots, X_n\}$ алгебры Ли $\tilde{L}$, то получим систему уравнений, связывающих неизвестные функции g_j^p с известными b_j^p . Уравнение (7.6) получено в предположении, что коэффициент сноса $a(t)$, см. уравнение (7.4), равен нулю. Последнее обеспечено преобразованием исходного уравнения (7.4) к уравнению (7.5). Доказательство завершено.

8. Пример

Рассмотрим пример решения уравнения Ито типа (7.1), в котором предположение $a(t) = 0$ нарушается, но по-прежнему $a(t) \in \tilde{L}$. Фундаментальная матрица уравнения состояния находится в виде произведения экспоненциальных семимартингалов. Это пример использования модификации метода Вея–Нормана (его стохастического варианта).

Найдем фундаментальную матрицу U_t стохастического уравнения $dx_t = \sum_{p=1}^3 X_p x_t d\zeta^p(t)$, $d\zeta^p(t) = \sum_{j=1}^3 b_j^p(t) dw^j(t)$, $\zeta_i(0) = 0$. Пусть $L = L_3$ — алгебра Ли размерности $\dim L = 3$ с базисом (X_i) и таблицей умножения $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_2, X_3] = [X_1, X_3] = 0$. Алгебра L_3 допускает представление (3×3) -матрицами $X_1 = E_{12}$, $X_2 = E_{23}$, $X_3 = E_{13}$ (E_{ij} — матричные канонические единицы), при этом $X_i^2 = 0$ для всех i . Матрицу U_t будем искать в виде произведения $U_t = \prod_{i=1}^3 \exp\{s^i(t)X_i\}$, где компоненты $Z_k(t) = s^k(t)X_k$ отсутствуют в силу $X_k^2 = 0$, а функции $s^i(t)$ — подходящим образом подобранные случайные процессы с дифференциалами $ds^k(t) = \sum_{j=1}^3 g_j^k(t) dw^j(t)$, $s^k(0) = 0$. Положим

$$F_1(t) = X_1, \quad F_2(t) = e^{Z_1(t)} X_2 e^{-Z_1(t)}, \quad F_3 = e^{Z_1(t)} e^{Z_2(t)} X_3 e^{-Z_2(t)} e^{-Z_1(t)}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$X_i^2 = 0 \quad \forall i, \quad F_1 = X_1, \quad F_2 = X_2 + s_1 X_3, \quad F_3 = X_3, \quad F_1 F_2 = X_3,$$

остальные $F_i F_j$ нулевые. Используя изложенную в разделе 3 модификацию метода Вея–Нормана составления уравнений для неизвестных функций

(в этом примере ими являются $s^i(t)$), получим уравнение

$$\sum_{i=1}^3 F_i ds^i = \sum_{i=1}^3 X_i d\zeta^i.$$

Учитывая формулы для F_i в разложении по базисным X_i , из этого уравнения получаем

$$(8.1) \quad ds^1 = d\zeta^1, \quad ds^2 = d\zeta^2, \quad ds^3 = d\zeta^3 - s^1 ds^2 - ds^1 ds^2.$$

Чтобы проверить правильность полученного решения, найдем стохастический дифференциал функции U_t , вычислив предварительно саму функцию.

$$\exp\{s^1 X_1\} = I + s^1 X_1, \quad \exp\{s^2 X_2\} = I + s^2 X_2, \quad \exp\{s^3 X_3\} = I + s^3 X_3,$$

то, перемножая, находим $U_t = I + s^1 X_1 + s^2 X_2 + (s^3 + s^1 s^2) X_3$, и, стало быть, $dU_t = X_1 ds^1 + X_2 ds^2 + X_3(ds^3 + d(s^1 s^2))$, где, разумеется, $d(s^1 s^2) = s^1 ds^2 + s^2 ds^1 + ds^1 ds^2$. Подставив сюда выражения для ds^i из (8.1), после сокращений получаем $X_1 d\zeta^1 + X_2 d\zeta^2 + X_3 d\zeta^3$, что совпадает с коэффициентом в правой части исходного уравнения Ито. Таким образом, решение стохастического уравнения Ито найдено в виде произведения стохастических семимартигалов (“стохастических экспонент”).

9. Заключение

В основе интегрального представления решения линейного стохастического уравнения лежит, как и в детерминированном случае, фундаментальная матрица решений, через которую выражается функция Грина для неоднородного уравнения. При отыскании фундаментальной матрицы многомерного уравнения основная трудность заключается в некоммутативности матричных коэффициентов сноса и диффузионной компоненты.

Некоммутативность матриц преодолевается известным способом, если они находятся в инволюции. Обращаясь к методологии теории групп, следует предположить, что коэффициенты уравнения принадлежат некоторой матричной алгебре Ли L , замкнутой относительно матричного коммутатора. Для линейной системы с диффузионными компонентами, зависящими только от винеровских процессов, но не зависящими от вектора состояния, ассоциированная с системой алгебра Ли устроена довольно просто: она порождается коэффициентами диффузии и сноса. В случае диффузии, зависящей линейно от вектора состояния, требуется предварительное преобразование исходного уравнения к форме, использующей дифференциал Стратоновича–Фиска. Коэффициент сноса становится при этом зависящим от квадратов коэффициентов диффузии, а диффузионные коэффициенты, в свою очередь, претерпевают преобразования, зависящие от коэффициента сдвига. И только в коммутативном случае (или в случае разрешимой алгебры), удастся избежать отмеченных трудностей. Таким образом, положение дел с приложением

стандартных теоретико-групповых концепций к стохастическому уравнению оказывается не вполне удовлетворительным. Возможно, какая-то иная, чем алгебра Ли, алгебраическая структура, окажется в этой задаче более подходящей, но выяснение этого вопроса требует дополнительного изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petersen I.R., Ugrinovskiy V.A., Savkin A.V.* Robust Control Design using H_∞ -methods. London. Springer. ISBN 1-85233-171-2. 2006.
2. *Карпан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.
3. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.
4. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
5. *Erdogan U., Lord G.J.* A New Class of Exponential Integrators for Stochastic Differential Equations with Multiplicative Noise // arXiv:1608.07096v2. 2016.
6. *Hochbruck M., Ostermann A.* Exponential Integrators // Acta Numerica. 2010. No. 19. P. 209–286.
7. *Mora C.M.* Weak Exponential Schemes for Stochastic Differential Equations with Additive Noise // IMA J. Numer. Anal. 2005. V. 25. No. 3. P. 486–506.
8. *Jimenez J.C., Carbonell F.* Convergence Rate of Weak Local Linearization Schemes for Stochastic Differential Equations with Additive Noise // J. Comput. Appl. Math. 2015. V. 279. P. 106–122.
9. *Komori Y., Burrage K.* A Stochastic Exponential Euler Scheme for Simulation of Stiff Biochemical Reaction Systems // BIT. 2014. V. 54. No. 4. P. 1067–1085.
10. *Lord G.J., Tambue A.* Stochastic Exponential Integrators for the Finite Element Discretization of SPDEs for Multiplicative and Additive Noise // IMECO J. Numer. Anal. 2012. drr059.
11. *Мельникова И.В., Альшанский М.А.* Стохастические уравнения с неограниченным операторным коэффициентом при мультипликативном шуме // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 6. С. 1354–1371.
12. *Wei J., Norman E.* On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. No. 2. P. 327–334.
13. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
14. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
15. *Каллиантур Г.* Стохастическая теория фильтрации. М.: Наука, 1987.
16. *Хида Т.* Броуновское движение. М.: Наука, 1987.
17. *Шайкин М.Е.* Мультипликативные стохастические системы с несколькими внешними возмущениями // АиТ. 2018. № 2. С. 122–134.
Shaikin M.E. Multiplicative Stochastic Systems with Multiple External Disturbances // Autom. Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 2. P. 299–309.

18. *Кунита Х.* On the representation of solutions of stochastic differential equations. Seminare de Prob. XIV, Lecture Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag, 1980. V. 784. P. 282–304.
19. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. Том 1. М.: Мир, 1980.
20. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972.
21. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Часть 1. М.: Мир, 1976.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 01.09.2022

После доработки 25.05.2023

Принята к публикации 09.06.2023

Управление в технических системах

© 2023 г. Н.В. ГРИГОРЬЕВ, канд. физ.-мат. наук (lab76@lii.ru)
(Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова, Жуковский)

СИНТЕЗ ТЕСТ-УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Предлагается новый подход к решению проблемы планирования летного эксперимента для идентификации аэродинамических характеристик автоматически управляемых летательных аппаратов — синтез закона управления для отслеживания заданной информативной траектории. Приведены математическая постановка и метод решения задачи синтеза. В численном эксперименте показана возможность значительного повышения точности идентификации на синтезированном управлении по сравнению с точностью идентификации на оптимальном программном тест-сигнале.

Ключевые слова: аэродинамические характеристики, планирование тестовых сигналов, параметрическая идентификация, автоматическое управление.

DOI: 10.31857/S000523102308007X, **EDN:** HCKKCA

1. Введение

Задача планирования тест-сигналов для идентификации аэродинамических характеристик (АДХ) летательного аппарата (ЛА) заключается в формировании специально возмущенного движения ЛА в целях повышения точности идентификации АДХ. Возмущенное движение ЛА (тест-маневр) формируется подачей на органы управления ЛА так называемых тестовых входных сигналов (тест-сигналов). В качестве критериев выбора тест-сигнала, как правило, используются критерии, принятые в теории оптимального планирования эксперимента, характеризующие в той или иной мере ожидаемую точность идентификации.

Для задач активной идентификации АДХ ЛА характерно большое разнообразие математических постановок. Постановки задач, для которых в натурных или численных экспериментах получены решения, отличаются: размерностью тест-сигнала (скаляр [1–9], вектор [1, 4, 9–16]), классом функций, в котором оптимизируется тест-сигнал (непрерывных функций [9], дискретных функций [1, 2, 4, 8, 17], полигармонических функций [2, 10, 12, 15, 16, 18], управлений типа «bang-zero-bang» и близких к ним

управлений [2, 6, 8, 12, 14, 15], параметризованных управлений [2, 4, 7, 11], функций простой формы [5]), по типу ограничений (только на тест-сигнал [2, 3, 5, 9] на компоненты вектора состояния ЛА в возмущенном движении [1–4, 6, 7, 11, 14, 17]), критерием (число Тьюринга [1], L -, D -критерии [1–7, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18], пик-фактор [10, 12, 15, 16]). Обычно предполагается, что выбор тест-сигнала производится до проведения эксперимента, однако рассматривается и возможность поэтапной оптимизации тест-сигнала в ходе его проведения [3]. Оптимизация тест-сигналов производится чаще во временной области [1, 12, 14, 16], но также и в частотной [18] и во временной и частотной области одновременно [13, 17]. Для дальнейшего изложения важно отметить, что в известных постановках задачи активной идентификации АДХ ЛА ограничения на компоненты вектора состояния ЛА в возмущенном движении не учитывают (за исключением [6]) возможные отличия неизвестных АДХ от их априорных оценок, а выбор тест-сигналов производится в классе программных управлений, т.е. адаптивное управление в целях активной идентификации АДХ ЛА практически не рассматривается [2, 19].

Условия безопасности летного эксперимента, различные физические и методические ограничения определяют ограничения на возмущения компонент вектора состояния ЛА в тест-маневре. В ряде важных приложений учет данных ограничений является необходимым условием выполнения тест-маневра [11]. При нарушении ограничений тест-маневр не выполняется (прерывается системой автоматического управления ЛА). Выполнение ограничений нужно обеспечить априори — когда АДХ и начальные условия тест-маневра при выборе тест-сигнала известны приближенно.

В [6] предложен метод оптимизации тест-сигнала с учетом указанных ограничений в классе «bang-zero-bang» управлений. В [7] предложен метод оптимизации тест-сигнала с учетом указанных ограничений в классе параметризованных управлений, в частности, получено решение в классе кусочно-постоянных функций с малым временем постоянства, которое существенно отличается от «bang-zero-bang» управления. Полученный в [7] программный тест-сигнал обеспечивает выполнение заданных ограничений при всех априори возможных значениях АДХ. Но следствием этого положительного свойства тест-сигнала является его оптимальность «в среднем» на множестве всех ограничений, определяемом совокупностью возможных значений АДХ. А это означает, что в каждом конкретном случае (в частности, при истинных значениях АДХ) такой тест-сигнал будет заведомо неоптимальным. Очевидно, что в классе программных тест-сигналов нельзя выбрать тест-сигнал, который будет оптимален при всех возможных значениях АДХ. Однако можно улучшить информативные свойства выбранного тест-сигнала непосредственно в ходе летного эксперимента за счет получаемой информации о векторе состояния ЛА. В [20] был предложен метод приближенного решения данной задачи. Ниже излагается метод нахождения ее оптимального решения.

2. Постановка задачи

Предлагаемая математическая постановка задачи синтеза управления для идентификации АДХ содержит модель динамики объекта на тестовом режиме длительностью T секунд, описываемую линейным (линеаризованным относительно опорного движения ЛА) дифференциальным уравнением

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = A(b)x + Gu, \quad t[0, T], \quad x(0) = x_0,$$

и модель дискретных измерений

$$(2) \quad z_i = z(x(t_i)) = Hx(t_i) + v_i, \quad i = \overline{1, N},$$

где: x — n -мерный вектор состояния ЛА; $u = u(t, x)$ — оптимизируемый вектор управления размерности m ; z_i — p -мерный вектор измерений; v_i — вектор «белых» гауссовых шумов измерений, $E(v_i) = 0$, $E(v_i v_j^T) = 0$, $i \neq j$, $E(v_i v_i^T) = R$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N}$ (E — символ математического ожидания); $A(b)$, G , H — матрицы соответствующих размерностей; t_i — моменты времени, в которые производятся измерения, $t_i = h(i - 1)$, $h = T/(N - 1)$; N — количество измерений. Матрица $A(b)$ зависит от подлежащего идентификации вектора неизвестных параметров b (искомых АДХ) размерности k . Истинные значения $b^{\text{ист}}$ параметров b не известны. Априорная оценка $b^{\text{апр}}$ вектора $b^{\text{ист}}$ содержит ошибку Δb , $b^{\text{апр}} = b^{\text{ист}} + \Delta b$, относительно которой известно, что компоненты Δb_i вектора Δb принадлежат интервалам $[-\Delta_i, \Delta_i]$: $\Delta b_i \in [-\Delta_i, \Delta_i]$, $i = \overline{1, k}$. Множество возможных значений b обозначим символом B .

Будем предполагать, что движение ЛА перед началом тест-маневра должно быть квазистационарным. Это означает, что компоненты вектора x_0 в (1) близки к нулю, но могут быть отличны от нуля. Будем считать, что $x_0^{\text{ист}}$ принадлежит замкнутому ограниченному множеству X^0 , содержащему нулевой вектор. Возможные значения компонент векторов x_0 и b будем считать независимыми друг от друга.

Требуется выбором на интервале $[0, T]$ вектор-функции $u = u(t, x)$ из некоторого класса функций U (определен ниже):

- 1) обеспечить выполнение скалярных линейных ограничений на вектор состояния ЛА при всех априори возможных значениях b и x_0

$$(3) \quad |x_s(t, b, x_0, u)| \leq q_s(t), \quad b \in B, \quad x_0 \in X^0, \quad s = \overline{1, r},$$

где: x_s — компоненты вектора x , на которые наложены ограничения; $q_s(t)$ — заданные функции; r — количество ограничений;

- 2) минимизировать по управлению u функционал

$$(4) \quad J = \text{tr} (WM^{-1}(b^{\text{апр}}, x_0, u)),$$

где tr — обозначение следа матрицы, W — неотрицательно определенная матрица весов (как правило, диагональная), M — информационная матрица:

$$(5) \quad M(b, x_0, u) = \sum_{i=1}^N (\partial x(t_i, b, x_0, u) / \partial b)^T Q (\partial x(t_i, b, x_0, u) / \partial b).$$

В (5) матрица $Q = H^T R^{-1} H$; $x_0 = 0$; производные $S_j = \frac{\partial x(t, b, x_0, u)}{\partial b_j}$, $j = \overline{1, k}$ определяются из системы дифференциальных уравнений для функций чувствительности:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dS_j}{dt} = A(b)S_j + \frac{\partial A(b)}{\partial b_j} x(t, b, x_0, u), \\ S_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, k}. \end{cases}$$

Уравнения (6) и (1) решаются совместно.

Математическая постановка задачи планирования тест-сигнала в классе программных управлений отличается от приведенной постановки задачи только тем, что искомое управление ищется в заданном классе функций времени, т.е. $u = u(t)$ (обычно в классе непрерывных или кусочно-непрерывных функций времени [1–18]).

Решение $u = u(t, x)$ задачи (1)–(4) предлагается искать среди управлений, обеспечивающих отслеживание некоторой траектории системы (1), обладающей хорошей информативностью об идентифицируемых параметрах и удовлетворяющей ограничениям (3), а именно в классе функций, представимых в виде

$$(7) \quad u(t, x) = \mu u^{\text{апп}}(t) + L(\mu x^{\text{апп}}(t) - x(t)),$$

где $x^{\text{апп}}(t) = x(t, b^{\text{апп}}, 0, u^{\text{апп}})$ — траектория системы (1) на оптимальном при $B = b^{\text{апп}}$, $X^0 = 0$ программном тест-сигнале $u^{\text{апп}}(t)$; коэффициент μ , $0 \leq \mu \leq 1$, и элементы L_{ij} матрицы L

$$(8) \quad |L_{i,j}| \leq C, \quad i = \overline{1, l}, \quad j = \overline{1, n}$$

подлежат определению из условия минимума критерия (4) при ограничениях (3). Константа C отражает ограничения на коэффициенты обратной связи системы автоматического управления (САУ). Для удобства дальнейших ссылок приведенную задачу будем называть задачей выбора тест-управления, а искомую функцию $u(t, x(t))$ — тест-управлением.

Система (1) при управлении (7) может быть записана в виде

$$(9) \quad \frac{dx}{dt} = (A(b) - GL)x + \mu G(u^{\text{апп}}(t) + Lx^{\text{апп}}(t)), \quad x(0) = x_0,$$

поэтому при достаточно малых значениях коэффициента μ ограничения (3) будут заведомо выполнены. Кроме того, из (4)–(6) и (9) следует, что для произвольной функции $u = u(t)$ справедливо равенство $J(\mu u) = J(u)/\mu^2$, поэтому для минимизации функционала (4) значение μ должно выбираться максимально возможным при условии выполнения ограничений (3).

Уравнения для функций чувствительности S_j , $j = \overline{1, k}$ записаны в виде (6), так как предполагается, что в процедуре слепого тестирования вектора b будет применен обычный в практике идентификации прием искусственного размыкания системы (9), когда на вход настраиваемой модели движения с исключенным контуром САУ подается сигнал $u_\Sigma(t) = \mu u^{\text{апр}}(t) + L(\mu x^{\text{апр}}(t) - x(t))$, известный из летного эксперимента. Если настраиваемая модель включает модель САУ, то матрицу A в (6) нужно заменить матрицей $A - GL$.

Достаточно полной характеристикой решения задачи (1)–(5) является плотность распределения значений функции $J(b, x_0) = \text{tr } M^{-1}(b, x_0, u)$. Функция $J(b, x_0)$ характеризует ожидаемую погрешность идентификации (нижнюю границу суммы дисперсий оценок параметров) на тест-управлении $u(t, x(t))$ (или на тест-сигнале $u(t)$) в случае, если $b^{\text{ист}} = b$, $x(0) = x_0$. Для построения оценки данной плотности распределения (полигона) достаточно вычислить значения функции $J(b, x_0)$ для достаточно большого числа N_P пар векторов b и x_0 , $b \in B$, $x_0 \in X^0$, выбираемых случайным образом. Если плотности распределения компонент векторов b и x_0 на интервалах их возможных значений неизвестны, то в силу рекомендаций [21] их следует принять равномерными. Число N_P выбирается так, чтобы при его увеличении положение и форма полигона не изменялись. При малых затратах расчетного времени полигон ожидаемых значений погрешности идентификации представляет собой удобную для анализа интегральную характеристику качества тест-управления, позволяющую оценить вероятности получения тех или иных значений ожидаемой погрешности идентификации параметров.

3. Метод решения

Оптимальный в случае $B = b^{\text{апр}}$, $X^0 = 0$ программный тест-сигнал $u^{\text{апр}}(t)$ и соответствующая траектория $x^{\text{апр}}(t) = x(t, b^{\text{апр}}, 0, u^{\text{апр}})$ могут быть найдены, например, одним из методов, изложенных в [2, 7]. Ниже излагается метод оптимизации коэффициента и матрицы L в (7).

Объединим элементы матрицы L и коэффициент μ в один вектор $v \in V$, где V — гиперкуб, определяемый неравенствами (8) и неравенством $0 \leq \mu \leq 1$. Размерность вектора v равна $N_v \leq nl + 1$ (некоторые элементы матрицы L могут быть положены равными нулю, чтобы исключить обратную связь по соответствующим компонентам и сократить количество настраиваемых коэффициентов). Для определенности $v_{N_v} = \mu$. Обозначим через $x(t, b, x_0, v)$ решение системы (1) на управлении (7) при заданном векторе v .

Пусть N_C — положительное целое число. Разобьем интервал оптимизации $[0, T]$ точками $t_i = \Delta_C(i - 1)$, $i = \overline{1, N_C}$ на подынтервалы одинаковой длины $\Delta_C = T/(N_C - 1)$. Выберем N_C настолько большим, что при выполнении ограничений

$$(10) \quad \begin{aligned} |x_s(t_i, b, x_0, u^v)| &\leq q_s(t_i), \quad t_i = \Delta_C(i - 1), \quad i = \overline{1, N_C}, \\ b &\in B, \quad x_0 \in X^0, \quad s = \overline{1, r} \end{aligned}$$

ограничения (3) можно считать выполненными при всех $t \in [0, T]$ с достаточной точностью. Таким образом, для решения поставленной задачи достаточно решить задачу минимизации критерия (4) на множестве S векторов v , удовлетворяющих множеству ограничений (10).

Определим следующую вспомогательную задачу. Минимизировать по $v \in V$ критерий

$$(11) \quad J = \text{tr} (WM^{-1}(b^{\text{анп}}, 0, u^v))$$

на некотором замкнутом, ограниченном множестве $\check{S}$ векторов v , определяемом конечным числом ограничений

$$(12) \quad \begin{aligned} |x_s(t_i, b^j, x_0^j, u^v)| &\leq q_s(t_i), \quad i = \overline{1, N_C}, \\ b^j &\in B, \quad x_0^j \in X^0, \quad s = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, K}, \quad v \in V. \end{aligned}$$

Решение этой типовой задачи нелинейного программирования может быть найдено различными методами, например методом линеаризации [22]. Градиенты ограничений (12) по компонентам вектора v равны

$$S_{v_j} = \frac{\partial x(t, b, x_0, u^v)}{\partial v_j}, \quad j = \overline{1, N_v}.$$

Градиент функционала (11) может быть вычислен, если известны функции

$$S_{v_j}^{b_i} = S_{v_j}^{b_i}(t, b, x_0, u^v) = \frac{\partial}{\partial v_j} S_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, N_v}.$$

Функции $S_{v_j}, S_{v_j}^{b_i}$ могут быть определены из решения следующих систем уравнений, которые должны решаться совместно с уравнениями (1) и (6):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS_{v_j}}{dt} &= (A(b) - GL)S_{v_j} - G \frac{\partial L}{\partial v_j} x(t, b, x_0, u) + \mu G \frac{\partial L}{\partial v_j} x^{\text{анп}}, \quad \text{при } j = \overline{1, N_v - 1}, \\ \frac{dS_{v_{N_v}}}{dt} &= (A(b) - GL)S_{v_{N_v}} + G(u^{\text{анп}} + Lx^{\text{анп}}), \\ S_{v_j}(0) &= 0, \quad j = \overline{1, N_v}; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS_{v_j}^{b_i}}{dt} &= A(b)S_{v_j}^{b_i} + \frac{\partial A(b)}{\partial b_i} S_{v_j}, \\ S_{v_j}^{b_i}(0) &= 0, \quad j = \overline{1, N_v}, \quad i = \overline{1, k}. \end{aligned} \right.$$

Решение исходной задачи минимизации по вектору v критерия (11) при ограничениях (8) и (10) может быть получено следующим итерационным алгоритмом:

Шаг 0. Установим счетчик числа итераций: $iter = 0$. Зададим произвольные $b^j \in B$, $x_0^j \in X^0$, $j = \overline{1, K}$ и определим множество S^{iter} как множество векторов v , удовлетворяющих неравенствам и условиям (12).

Шаг 1. Решим вспомогательную задачу, в которой $\check{S} = S^{iter}$. Обозначим решение через v^{iter} , соответствующее тест-управление (7) — через $u^{v^{iter}}$.

Шаг 2. Для проверки выполнения ограничений (10) на найденном управлении $u^{v^{iter}}$ для каждого $s = \overline{1, r}$ и $i = \overline{1, N_C}$ определим $\max_{b \in B, x_0 \in X^0} |x_s(t_i, b, x_0, u^{v^{iter}})|$.

Шаг 3. Если при всех $s = \overline{1, r}$, $i = \overline{1, N_C}$ окажется, что

$$\max_{b \in B, x_0 \in X^0} |x_s(t_i, b, x_0, u^{v^{iter}})| \leq q_s(t_i),$$

то задача (11)–(10) решена — найдено тест-управление, удовлетворяющее ограничениям (10) и минимизирующее функционал (11). Далее переход на шаг 5.

Шаг 4. Если при некоторых s^* , i^* окажется, что

$$\max_{b \in B, x_0 \in X^0} |x_{s^*}(t_{i^*}, b, x_0, u^{v^{iter}})| = |x_{s^*}(t_{i^*}, b^*, x_0^*, u^{v^{iter}})| > q_{s^*}(t_{i^*}),$$

т.е. ограничения (10) нарушаются, то множество S^{iter} дополним ограничениями $|x_{s^*}(t_{i^*}, b^*, x_0^*, u^{v^{iter}})| \leq q_{s^*}(t_{i^*})$. Полученное таким образом множество снова обозначим через S^{iter} , предварительно положив $iter = iter + 1$. Далее переход на шаг 1.

Шаг 5. Строится полигон значений функции $J(b, x^0) = \text{tr}(WM^{-1}(b, x_0, u^{opt}))$, где $u^{opt} = u^{v^{iter}}$. Способ построения полигона был описан в разделе 2.

Поясним: каждое последующее множество S^{i+1} векторов v уже содержится в предыдущем множестве S^i в силу того, что каждое добавляемое на шаге 4 ограничение сужает множество, на котором минимизируется критерий (11). Таким образом: $S^0 \supset S^1 \supset \dots \supset S^i \supset \dots \supset S$, где S — это множество векторов v , определяемое формулами (10). Следовательно, минимум критерия (11) на множестве S не меньше минимума на множестве S^i . Поэтому если на i -й итерации выполнены условия шага 3 алгоритма, то выполнены ограничения (10), а найденный на множестве S^i минимум есть минимум на множестве S .

Таким образом, решение задачи (4), (10) сведено к решению последовательности типовых задач нелинейного программирования, которые «аппроксимируют» исходную задачу в окрестности искомого минимума с возрастающей в ходе итераций точностью аппроксимации. Такой подход, разработанный ранее для оптимизации программных тест-сигналов [7], представляется

более предпочтительным по сравнению с оптимизацией тест-сигналов методом динамического программирования [6, 14] в связи с «проклятием размерности».

Изложенный метод решения задачи может быть обобщен на случай зависимости матриц G и H от идентифицируемых параметров b .

4. Численное моделирование

Рассмотрим задачу построения на временном интервале длиной восемь секунд ($T = 8$) двухкомпонентного ($m = 2$) тест-управления $u(t, x(t))$ в целях идентификации коэффициентов b_i , $i = \overline{1, 5}$ модели бокового движения самолета [9]

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{\beta} = b_1\beta + w_y + 0,0565\gamma + 0,0289\delta_N, \\ \dot{w}_x = b_2\beta - 0,935w_x - 0,124w_y + 1,4\delta_N + 2,88\delta_e, \\ \dot{w}_y = b_3\beta + 0,119w_x + b_4w_y + b_5\delta_N, \\ \dot{\gamma} = w_x, \end{cases}$$

дополненной простейшими моделями привода руля направления и элерона:

$$(14) \quad \begin{cases} \dot{\delta}_N = \omega_N, \\ \dot{\omega}_N = k(\delta_N^{\text{зад}} - \delta_N) - k_2\omega_N, \delta_N^{\text{зад}} = u_1(t, x(t)), \\ \dot{\delta}_e = \omega_e, \\ \dot{\omega}_e = k(\delta_e^{\text{зад}} - \delta_e) - k_2\omega_e, \delta_e^{\text{зад}} = u_2(t, x(t)), \\ k = \frac{0,456}{\tau^2}, k_2 = \frac{0,8}{\tau}, \tau = 0,02. \end{cases}$$

В (13) и (14): β — угол скольжения самолета, w_x, w_y — угловые скорости крена и рысканья, γ — угол крена, δ_N, δ_e — углы отклонения руля направления и элерона, ω_N, ω_e — угловые скорости отклонения руля направления и элерона, k, k_2, τ — параметры приводов руля направления и элерона, коэффициенты b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 — подлежащие идентификации производные боковой аэродинамической силы и аэродинамических моментов крена и рысканья по соответствующим компонентам вектора состояния ЛА: $\beta, w_x, w_y, \delta_N$. Размерность угловых скоростей — градус за секунду, углов — градус. Переменные $\beta, w_x, w_y, \gamma, \delta_N, \delta_e$ независимо измеряются с частотой 25 герц.

Таким образом, имеем вектор состояния ЛА $x = (\beta, w_x, w_y, \gamma, \delta_N, \delta_e, \omega_N, \omega_e)^T$, вектор идентифицируемых параметров $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)^T$, вектор измерений $z_i = z(t_i) = Hx(t_i) + v_i$, $t_i = h(i - 1)$, $i = \overline{1, N}$, где H — матрица с элементами $H_{ii} = 1$ при $i = \overline{1, 6}$, $H_{ij} = 0$ при $i = \overline{1, 6}$, $j = \overline{1, 8}$, $i \neq j$; v_i — вектор «белых» гауссовых шумов измерений, $E(v_i) = 0$, $E(v_i v_j^T) = 0$, $i \neq j$, $E(v_i v_i^T) = R$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N}$, $h = 0,04c$, $N = 201$. Среднеквадратичные погрешности измерений ($\sqrt{R_{ii}}$, $i = \overline{1, 6}$) составляют: для β — 1° , для w_x, w_y — $0,71^\circ/c$, для δ_N, δ_e — $0,5^\circ$.

Априорная оценка истинных значений $b^{\text{ист}}$ вектора b :

$$b^{\text{апр}} = (-0,119, -4,43, -2,99, 0,178, 1,55)^T.$$

Границы допусковых интервалов $[-\Delta_i, \Delta_i]$, таких что $\Delta b_i \in [-\Delta_i, \Delta_i]$, имеют вид: $\Delta_i = \pm 0,5 |b_i^{\text{апр}}|$, $i = \overline{1,4}$, $\Delta_5 = \pm 0,2 |b_5^{\text{апр}}|$. Таким образом, априорная неопределенность первых четырех компонент вектора b составляет $\pm 50\%$ от номинальных значений. Совокупность возможных значений вектора b определяет параллелепипед с центром в точке $b^{\text{апр}}$ — множество B . Тест-маневр должен начинаться из квазистационарного состояния:

$$(15) \quad \begin{aligned} |\omega_x(0)| &\leq 0,5^{0/c}, & |\beta(0)| &\leq 1^0, & |\omega_N(0)| &\leq 0,05^{0/c}, & |\delta_N(0)| &\leq 0,5^0, \\ |\omega_y(0)| &\leq 0,5^{0/c}, & |\gamma(0)| &\leq 0,5^0, & |\omega_e(0)| &\leq 0,05^{0/c}, & |\delta_e(0)| &\leq 0,5^0. \end{aligned}$$

Совокупность возможных значений начальных условий тест-маневра $x_0 = x(0)$ определяет многогранник — множество X^0 . Интервалы $I_6 = \pm 0,5^{0/c}$, $I_7 = \pm 1^0$, $I_8 = \pm 0,05^{0/c}$, $I_9 = \pm 0,5^0$, $I_{10} = \pm 0,5^{0/c}$, $I_{11} = \pm 0,5^0$, $I_{12} = \pm 0,05^{0/c}$, $I_{13} = \pm 0,5^0$, определяющие возможные значения x_0 , а также допусковые интервалы $I_i = [-\Delta_i, \Delta_i]$, $i = \overline{1,5}$ далее будем называть интервалами априорной неопределенности.

При построении полигонов значений $J(b, x_0)$ будем предполагать, что компоненты априорной оценки вектора b и компоненты вектора x_0 равномерно распределены на интервалах априорной неопределенности $I_i = [-\Delta_i, \Delta_i]$, $i = \overline{1,13}$ и независимы друг от друга. Матрица W в (4) принималась единичной.

На допустимые возмущения каждой из компонент вектора x в тест-маневре наложим ограничения:

$$(16) \quad \begin{aligned} |\omega_N(t, b, x_0, u)| &\leq 30^{0/c}, & |\omega_e(t, b, x_0, u)| &\leq 30^{0/c}, & |\beta(t, b, x_0, u)| &\leq 3^0, \\ |w_x(t, b, x_0, u)| &\leq 5^{0/c}, & |w_y(t, b, x_0, u)| &\leq 5^{0/c}, & |\gamma(t, b, x_0, u)| &\leq 5^0, \\ b &\in B, & x_0 &\in X^0, & t &\in [0, 8]. \end{aligned}$$

Первые два ограничения в (16) отражают физические ограничения скорости движения приводов, а остальные — ограничения для обеспечения безопасности тест-маневра. Дискретизация по времени (см. (10)) ограничений (16) производилась с параметром $\Delta_C = h$.

Задача состоит в определении такого тест-управления $u^A(t, x(t))$:

$$(17) \quad u_i^A(t, x(t)) = \mu u_i^{\text{апр}}(t) + \sum_{j=1}^4 L_{i,j} (\mu x_i^{\text{апр}}(t) - x_i(t)), \quad i = 1, 2,$$

на котором функционал (4) достигает минимального значения. Ограничение на элементы матрицы $L_{i,j}$ в тест-управлении (17) принимались в виде (8)

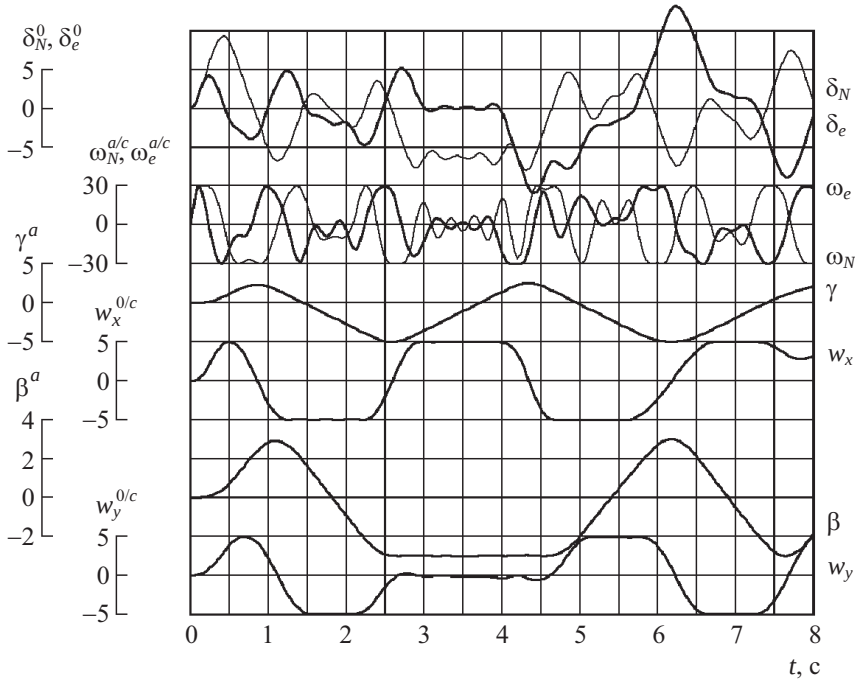


Рис. 1. Оптимальное решение задачи в классе программных управлений при $B = b^{\text{апр}}$, $X^0 = 0$.

при $C = 0,5, 1, 2$. Оптимальное тест-управление $u^A(t, x(t))$ определялось в соответствии с алгоритмом раздела 3. Оптимизация программного тест-сигнала $u^{\text{апр}}(t)$ при $B = b^{\text{апр}}$, $x_0 = 0$ и замене ограничений (16) на ограничения

$$|\omega_N(t, b^{\text{апр}}, 0, u)| \leq 30^{0/c}, \quad |\omega_e(t, b^{\text{апр}}, 0, u)| \leq 30^{0/c}, \quad |\beta(t, b^{\text{апр}}, 0, u)| \leq 3^0, \\ |w_x(t, b^{\text{апр}}, 0, u)| \leq 5^{0/c}, \quad |w_y(t, b^{\text{апр}}, 0, u)| \leq 5^{0/c}, \quad |\gamma(t, b^{\text{апр}}, 0, u)| \leq 5^0, \quad t \in [0, 8]$$

выполнялась методом, изложенным в [7], в классе параметризованных управлений, представимых в виде

$$u_j^{\text{апр}}(t) = \sum_{i=1}^{50} d_{i+50(j-1)} \sin(2\pi it/T), \quad j = 1, 2,$$

где d_i , $i = \overline{1, 100}$ — оптимизируемые параметры. На рис. 1 представлена траектория $x(t, b^{\text{апр}}, 0, u^{\text{апр}})$ системы (13)–(14), соответствующая оптимальному программному тест-сигналу $u^{\text{апр}}(t)$ для данной задачи. Компоненты оптимального программного тест-сигнала $u^{\text{апр}}(t)$ практически совпадают с приведенными на графике зависимостями $\delta_N(t)$, $\delta_e(t)$. Значение критерия на оптимальном тест-сигнале равно $\text{tr}(M^{-1}(b^{\text{апр}}, 0, u^{\text{апр}})) = 0,0036$.

Далее в соответствии с алгоритмом раздела 3 находились оптимальные значения μ и $L_{i,j}$, $i = 1, 2$, $j = \overline{1, 4}$ в (17). В качестве начальной выборки

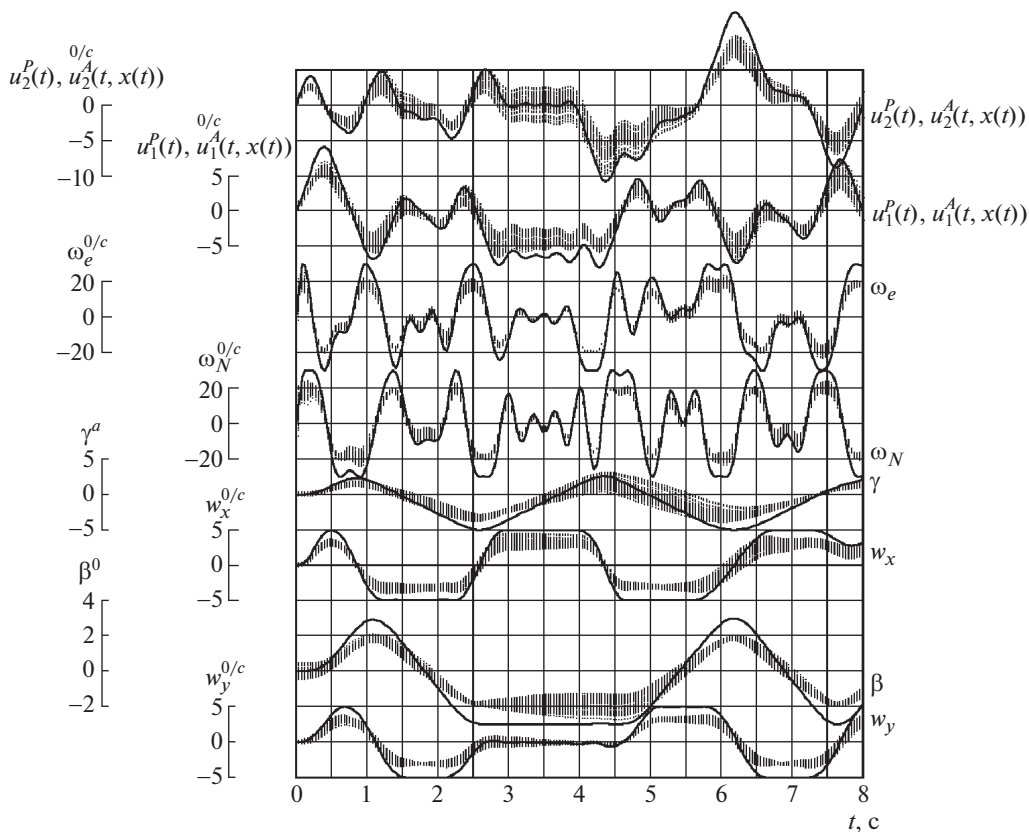


Рис. 2. Поля траекторий системы (1) на оптимальном тест-управлении при $C = 2$. Компоненты траектории $x^{\text{анп}}(t) = x(t, b^{\text{анп}}, 0, u^{\text{анп}})$ показаны жирными линиями.

значений $b^j \in B$, $x_0^j \in X^0$, $j = \overline{1, 32}$ принимались все угловые точки куба B при $x_0^j = 0$. Для нахождения тест-управлений при каждом $C = 0,5, 1, 2$ потребовалось от пяти до восьми итераций алгоритма. Значения критерия $\text{tr } M^{-1}(b^{\text{анп}}, 0, u^A(t, x(t)))$ на оптимальных тест-управлениях равны: 0,0089 при $C = 2$; 0,011 при $C = 1$ и 0,018 при $C = 0,5$.

На рис. 2 показаны поля значений компонент вектора x , вычисленных на тест-управлении $u^A(t, x(t))$ при $C = 2$ для 60 различных пар b^j , x_0^j из априори возможных (т.е. для 60 возможных решений системы (13)–(14)). При $C = 1$ и 0,5 поля компонент вектора x отличались в основном большей шириной «дорожек» значений. Из рисунка видно, что все заданные ограничения (16) удовлетворяются. Численная проверка выполнения ограничений (16) производилась для 20 000 различных пар b^j , x_0^j при каждом значении $C = 0,5, 1, 2$. Оптимальное значение μ при $C = 2$ равнялось $\mu = 0,75$. Отметим, что на программном тест-сигнале $u(t) = \mu u^{\text{анп}}(t)$ ограничения (15) нарушались бы уже при $\mu = 0,1$.

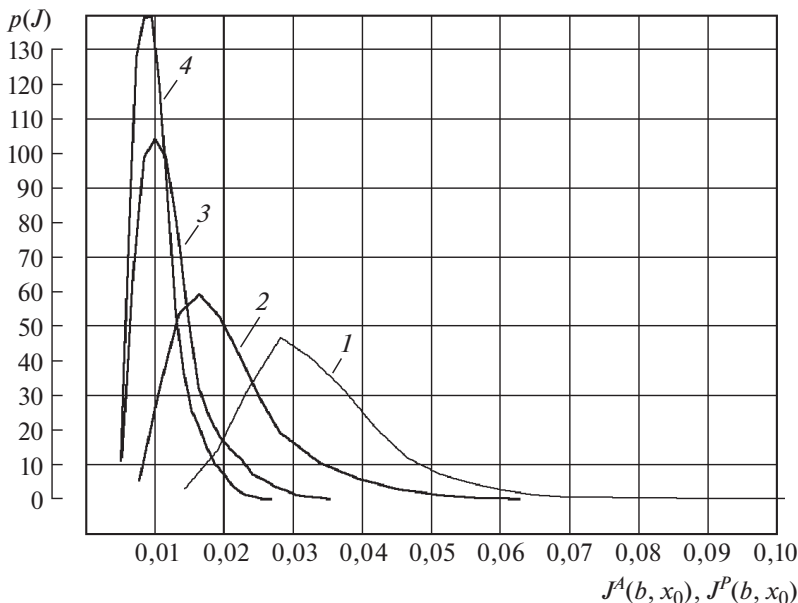


Рис. 3. Полигоны ожидаемой погрешности идентификации на оптимальном программном тест-сигнале (1) и на тест-управлениях при C , равных: 0,5 (2), 1 (3), 2 (4).

Одновременно с проверкой ограничений проверялась устойчивость системы (9). Во всех указанных случаях все собственные числа матриц $A(b^j) - GL$ имели отрицательные действительные части.

На рис. 3 приведены полигоны ожидаемых погрешностей идентификации $J^A(b, x_0) = \text{tr } M^{-1}(b, x_0, u^A(t, x(t)))$ на оптимальных тест-управлениях в сравнении с полигоном ожидаемых погрешностей идентификации $J^P(b, x_0) = \text{tr } M^{-1}(b, x_0, u^P(t))$ на оптимальном программном тест-сигнале $u^P(t)$. Программный тест-сигнал $u^P(t)$ для задачи (13)–(16) находился методом, изложенным в [7]. Значение критерия на оптимальном программном тест-сигнале есть $\text{tr } (M^{-1}(b^{\text{appr}}, 0, u^P(t))) = 0,031$.

Ожидаемые погрешности идентификации $J^P(b, x_0)$ и $J^A(b, x_0)$ вычислялись на решениях одних и тех же систем уравнений (13)–(14) и (6), отличающихся только входными сигналами $u = u(t) = u^P(t)$ и $u = u_{\Sigma}(t) = u^A(t, x(t))$ соответственно. Количество точек для построения полигона равнялось $N_P = 20\,000$.

Из рис. 3 очевидно, что тест-управление существенно лучше программного тест-сигнала. Полигоны ожидаемых погрешностей идентификации на тест-управлениях находятся левее полигона ожидаемой погрешности идентификации на программном тест-сигнале в области меньших значений ожидаемых погрешностей идентификации. Разброс возможных значений ожидаемой погрешности идентификации на тест-управлениях существенно меньше. Пра-

вые «хвосты» полигонов, соответствующие большим значениям ожидаемой погрешности, на тест-управлениях заметно короче, чем у полигона на программном тест-сигнале. При $C = 2$ среднее значение (среднеквадратичное отклонение) ожидаемой погрешности идентификации на тест-управлении более чем в 3,2 (3,2) раза меньше, чем у ожидаемой погрешности на программном тест-сигнале, при $C = 1$ — более чем в 2,7 (2,2) раза, при $C = 0,5$ — более чем в 1,6 (1,2) раза. Из 20000 реализаций значений b и x_0 , из априори возможных, доля реализаций, для которых соотношение ожидаемых погрешностей идентификации на тест-сигнале и тест-управлении составило более двух, равнялась: при $C = 2$ — 93%, при $C = 1$ — 78%, при $C = 0,5$ — 28%.

Отметим, что в рамках проведенного сравнения постановка задачи оптимизации программного тест-сигнала соответствовала благоприятным для идентификации условиям проведения тест-маневра: с разомкнутым контуром управления.

Оптимальные значения μ и $L_{i,j}$ в рассматриваемой задаче были таковы, что: $\max_{i,j} L_{i,j} = C$; $\mu = 0,75$ при $C = 2$, $\mu = 0,55$ при $C = 1$, $\mu = 0,45$ при $C = 0,5$. Можно предположить, что оптимальные (максимально достижимые) значения параметра μ в управлении (7) лимитируются значением параметра C в (8). Для подтверждения данного предположения критерий (4) в данной задаче был заменен на критерий $J = \mu$, который максимизировался по μ и L при тех же ограничениях (16), (8) и в том классе управлений (17). Полученные при $C = 0,5, 1, 2$ оптимальные для критерия $J = \mu$ значения μ и $L_{i,j}$ практически не отличались от соответствующих ранее полученных значений. Отметим, что задача максимизации μ существенно проще задачи минимизации нелинейного критерия (4).

Априорная неопределенность начальных условий тест-маневра заметно влияет на эффективность тест-управления. Влияние данной неопределенности можно ослабить, если обратную связь вводить в начале тест-маневра постепенно (см. [20]). В рассмотренном примере такой прием приводит к уменьшению средней ожидаемой погрешности идентификации на тест-управлении в 4,2 раза (при $C = 2$) по сравнению с погрешностью на программном тест-сигнале $u^P(t)$.

5. Заключение

Рассмотрена задача планирования эксперимента для параметрической идентификации модели движения объекта при ограничениях на допустимые возмущения вектора состояния объекта в эксперименте и априорной неопределенности относительно начальных условий эксперимента. Предложены методы решения данной задачи в классе управлений с обратной связью, обеспечивающих отслеживание такой траектории движения объекта, которая удовлетворяет заданным ограничениям и обладает хорошей информативностью об идентифицируемых параметрах. Тем самым задача планирования эксперимента сведена к хорошо изученной задаче слежения.

Область применения предложенных в статье методов ограничена задачами планирования экспериментов для уточнения характеристик автоматически управляемых объектов, в частности аэродинамических характеристик автоматически управляемых летательных аппаратов. Следует ожидать, что эффективность предложенных методов в таких задачах возрастает с ростом неопределенности априорных оценок идентифицируемых характеристик и ужесточением ограничений на допустимые возмущения вектора состояния объекта в эксперименте.

Управление, синтезированное для активной параметрической идентификации в классе управлений с обратной связью, предлагается назвать тест-управлением по аналогии с тест-сигналами, выбираемыми в классе программных управлений.

Результатами статистического моделирования, проведенного при пятидесятипроцентной априорной неопределенности относительно истинных значений идентифицируемых параметров, подтверждено, что выбором тест-управления погрешность идентификации может быть существенно уменьшена по сравнению с погрешностью идентификации на оптимальном программном тест-сигнале как в среднем, так и «по вероятности», — т.е. для большинства априори возможных траекторий движения объекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Касьянов В.А., Ударцев Е.П.* Определение характеристик воздушных судов методами идентификации. М.: Машиностроение, 1988.
2. *Овчаренко В.Н.* Аэродинамические характеристики летательных аппаратов: Идентификация по полетным данным. М.: ЛЕНАД, 2019.
3. *Hosseini B., Diepolder J., Holzapfel F.* Online Parameter Estimation and Optimal Input Design // MMSC. 2020. P. 128–139. CEUR-WS.org/vol-2783/paper-09.pdf.
4. *Licitra G., Burger A., Williams P., et al.* Optimal Input Design for Autonomous Aircraft // Control Engineering Practice. 2018. V. 77. P. 15–27.
5. *Овчаренко В.Н.* Планирование идентифицирующих входных сигналов в линейных динамических системах // АиТ. 2001. № 2. С. 75–87.
Ovcharenko V.N. Planning of Identifying Input Signals in Linear Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 2. P. 236–247.
6. *Hosseini B., Botkin N., Diepolder J., Holzapfel F.* Robust Optimal Input Design for Flight Vehicle System Identification // AIAA Scitech 2020 Forum, 2020.
<https://doi.org/10.2514/6.2020-0290>
7. *Григорьев Н.В.* Планирование тестовых сигналов для идентификации аэродинамических характеристик автоматически управляемых летательных аппаратов с учетом неопределенности априорных данных // АиТ. 2022. № 4. С. 125–139.
8. *Jayanti E.B., Atmasari N., Mardikasari H., et al.* Pengaruh Masukan Kendali Terhadap Hasil Identifikasi Parameter Pesawat Udara Konfigurasi Konvensional Matra Terbang Longitudinal // J. Techn. Sist. Comput. 2019. No. 7(1). P. 25–30.
<https://doi.org/10.14710/jtsiskom.7.1.2019.25-30>
9. *Gupta N.K., Hall W.E. Jr.* Input Design for Identification of Aircraft Stability and Control Derivatives. NASA CR-2493. 1975.

10. Белоконов С.А., Золотухин Ю.Н., Филиппов М.Н. Метод формирования тестовых сигналов для оценивания аэродинамических параметров летательного аппарата // Автометрия. 2017. Т. 53. № 4. С. 59–65.
11. Григорьев Н.В., Нестеров В.Е. Активная идентификация АДХ возвращаемого ракетного блока в летных условиях на масштабируемом демонстраторе // Авиакосмическая техника и технология. 2014. № 1. С. 47–56.
12. Lichota P. Multi-Axis Inputs for Identification of a Reconfigurable Fixed-Wing UAV // Aerospace, 2020. 7. <https://doi.org/10.3390/aerospace7080113>
13. Roeser M.S., Fezans N. Method for designing multi-input system identification signals using a compact time-frequency representation // J. CEAS Aeronaut. 2021. V. 12. P. 291–306. <https://doi.org/10.1007/s13272-021-00499-6>
14. Morelli E.A. Flight test of optimal inputs and comparison with conventional inputs // J. Aircr. 36(2), 389–397 (1999). <https://doi.org/10.2514/2.2469>
15. Morelli E.A. Optimal Input Design for Aircraft Stability and Control Flight Testing // J. Optim. Theory Appl. 2021. 191. P. 415–439. <https://doi.org/10.1007/s10957-021-01912-0>
16. Grauer J.A., Boucher M. Aircraft system identification from multisine inputs and frequency responses / AIAA Scitech 2020 Forum. Orlando. FL. USA (2020). <https://doi.org/10.2514/6.2020-0287>
17. Hosseini B., Holzapfel F. Optimal Input Design for Flight Vehicle System Identification in Frequency Domain // AIAA Scitech 2022 Forum, 2022. <https://doi.org/10.2514/6.2022-2297>
18. Берестов Л.М., Поплавский Б.К., Мирошниченко Л.Я. Частотные методы идентификации летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1985.
19. Талалай А.М. Активная идентификация при адаптивном управлении // АиТ. 1986. № 9. С. 70–74.
Talalay A.M. Active identification in the case of adaptive control // Autom. Remote Control, 1986. V. 47. No. 2. P. 1226–1230.
20. Григорьев Н.В. Активная идентификация аэродинамических характеристик: от тест-сигнала к тест-управлению // Полет. 2022. № 10. С. 3–11.
21. Кан Ю.С., Кибзун А.И. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
22. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1978.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 07.12.2022

После доработки 25.04.2023

Принята к публикации 28.04.2023

Управление в технических системах

© 2023 г. В.Ю. РУТКОВСКИЙ, д-р техн. наук (vglum@ipu.ru),
В.М. ГЛУМОВ, д-р техн. наук (vglum@ipu.ru),
А.С. ЕРМИЛОВ канд. техн. наук (44eas@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ БОЛЬШОЙ КОСМИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ¹

Решается задача угловой ориентации и стабилизации космической конструкции при ее сборке на орбите. Рассматривается вариант конструкции, в состав которой входят упругие элементы, устанавливаемые в процессе сборки. Упругие элементы конструкции не имеют датчиков для получения информации о параметрах их деформаций. Предлагаются алгоритмы управления, обеспечивающие устойчивость углового движения конструкции. Для получения необходимой информации используется нелинейный расширенный фильтр Калмана. Разработан алгоритм совместного оценивания координат углового движения рассматриваемой механической системы и координат тонов упругих колебаний, а также алгоритм идентификации их ненаблюдаемых параметров. Приведены результаты математического моделирования варианта механической системы космической конструкции, которые подтверждают работоспособность и эффективность разработанных алгоритмов оценки координат и параметров.

Ключевые слова: математическая модель, алгоритм управления, космическая конструкция, гироскопический привод, демпфирование колебаний, оценивание координат.

DOI: 10.31857/S0005231023080081, EDN: HCPDXK

1. Введение

Современные космические аппараты (КА) представляют собой динамические объекты управления, механические структуры которых содержат упругие элементы. В [1] отмечается, что по мере увеличения размеров и усложнения механической структуры таких аппаратов растет влияние упругих свойств конструкции на динамику режима ориентации. Кроме того, существует тенденция к усложнению самой конструкции современных КА, например использование протяженных упругих элементов. Возмущение в динамику КА привносит и трансформация элементов изменяемость конструкции в

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-08-00073).

процессе эксплуатации КА [2]. С развитием космических технологий появились крупногабаритные космические конструкции, получившие наименование «большие космические конструкции» (БКК), которые могут создаваться в космосе различными способами. БКК — многомерная многочастотная механическая система с изменяющимися параметрами [3, 4]. Одними из первых БКК рассматривались крупногабаритные зонтичные рефлекторы, создание конструкций которых предполагалось с помощью сборки в космосе [5]. Развитие космической робототехники позволяет решать задачи сборки БКК с использованием различных роботизированных устройств [6]. В [7] отмечается, что развитие космической робототехники характеризуется наличием двух тенденций. С одной стороны, предполагается совершенствование элементов перспективной космической инфраструктуры типа крупногабаритных многомодульных КК, например орбитальных станций, у которых неотъемлемой составляющей являются средства робототехники. С другой стороны, все больше обращается внимание на робототехническое сервисное обслуживание, трактуемое в широком смысле и подразумевающее также роботизированные монтажные операции применительно к весьма широкому классу объектов [8]. Из робототехнических средств предполагается активное использование космических манипуляционных роботов [9], в том числе свободно летающих роботов [10].

В настоящей работе рассматривается собираемая в космосе БКК зонтичного типа, которая представляет собой динамический объект управления с переменными параметрами, с большим и дискретно изменяющимся во времени числом степеней свободы. Как механическая система, такая БКК может рассматриваться в виде последовательности формируемых в процессе сборки промежуточных механических структур. Конструкция содержит упругие элементы, устанавливаемые в процессе сборки с помощью космического манипулятора или свободно летающего космического манипуляционного робота. Рассматривается вариант БКК, у которой упругие элементы не имеют датчиков информации о координатах и параметрах колебаний. Одними из основных задач управления БКК являются управление ориентацией и стабилизация осей корпуса конструкции. Решение этой задачи традиционно получается на основе релейных или дискретных алгоритмов [11]. Разрывной характер управляющих воздействий на корпус и ударные воздействия при установке новых элементов конструкции являются причинами возникновения упругих колебаний БКК. При управлении угловым движением БКК возникает противоречие между основной целью управления упругим динамическим объектом как жестким телом и необходимостью демпфирования возникающих упругих колебаний. Отсутствие сил атмосферного сопротивления приводит к накоплению энергии упругих колебаний в процессе управления «жестким» движением БКК. Превышение критической амплитуды упругих колебаний и близость их частот к частотам управления «жестким» движением приводят к неустойчивости системы [12]. Отсутствие точного определения переменных параметров математической модели (ММ) в наземных условиях приводит

к необходимости решать задачу устойчивого и точного управления угловым движением на всех этапах сборки БКК с использованием методов робастного или адаптивного управления динамическими объектами [13].

В [14] предлагается алгоритм управления ориентацией БКК при наличии низких частот упругих колебаний, существенно влияющих на качество переходных процессов вследствие близости собственных частот конструкции к частоте управления ее «жестким» движением. В [15] решается задача обеспечения робастной устойчивости упругих колебаний КА с нелинейной системой управления ориентацией, использующей двигателя-маховики. Решение основано на целенаправленном изменении границ областей устойчивости в пространстве параметров объекта и регулятора с целью максимизации числа робастно устойчивых упругих компонент конструкции КА. Следует отметить, что алгоритмы, обеспечивающие робастное управление, эффективны для окончательно собранной комической конструкции (КК). Предлагаемый в [14, 15] подход ограничен необходимостью получения текущей информации о состоянии системы и параметрах ее ММ. Алгоритмы адаптивного управления позволяют обеспечить устойчивость и гашение колебаний в достаточно широком диапазоне значений собственных частот упругих колебаний БКК при минимальном значении конструкционного демпфирования. В [16] были определены три типа стратегии адаптивного управления КК на последовательности этапов ее изменения при сборке в космосе. Первый тип: управление с использованием анализа и прогноза состояния упругих колебаний БКК. Второй тип: управление с оценкой фазы доминирующей колебательной составляющей в спектре частот упругих колебаний в момент переключения управления. Третий тип: управление на основе нечеткой логики [17]. В [18] предлагается алгоритм адаптивного управления с эталонной моделью угловым движением собираемой БКК. Его функционирование не зависит от интенсивности и спектрального состава входных воздействий и не требует оценивания упругих колебаний БКК. Однако алгоритм обеспечивает высокую точность управления при больших энергетических затратах. В настоящее время уделяется внимание реализации первого типа стратегии адаптивного управления БКК, при котором используются методы идентификации и оценивания состояния механической системы конструкции. В [11] предложено активное демпфирование упругих колебаний конструкции Международной космической станции двигателями ориентации с использованием алгоритмов идентификации. Для получения необходимой информации для управления угловым движением космической конструкции с упругой механической системой целесообразно использовать алгоритмы оценивания на основе теории фильтрации Калмана-Бьюси [19]. В [20] решена задача оценивания координат упругих колебаний КК с использованием нелинейного расширенного фильтра Калмана. В настоящей работе (в развитие [20]) разработан алгоритм совместного оценивания координат углового движения механической системы и неизмеряемых координат тонов упругих колебаний, а также алгоритм идентификации их ненаблюдаемых параметров. Решается задача формиро-

вания алгоритмов управления угловой стабилизацией КК на этапах сборки. Предполагается, что на каждом этапе сборки происходит подсоединение элемента конструкции, вызывающее упругие колебания, которые необходимо демпфировать в течение заданного промежутка времени с использованием силовых гироскопических исполнительных органов системы угловой стабилизации БКК.

2. Математическая модель углового движения БКК

Структуру механической системы БКК зонтичного типа будем рассматривать в виде совокупности твердых тел, одно из которых является несущим. Остальные (носимые) тела являются строительными элементами, присоединяемыми в том или ином порядке к несущему телу при использовании спиральной схемы сборки каркаса «зонтичного» типа. Такая механическая система содержит нежесткие элементы и характеризуется дискретно изменяющимся числом степеней свободы [21]. В точках присоединения элементов конструкции учитываются вращательная степень свободы в рассматриваемой плоскости движения и упругая связь, ограничивающая возможные смещения элементов областью малых отклонений относительно состояния равновесия [22]. При использовании в качестве исполнительного органа собираемой БКК гироскопического силового привода, содержащего три одинаковых гиродина (ГД), установленных по схеме трехлучевой звезды, возникают взаимосвязи каналов гиросtabilизации, которые обусловлены инерционными и гироскопическими влияниями [23]. Упрощенная ММ пространственного углового движения механической системы рассматриваемого типа БКК, полученная из полной ММ, подробно представлена в [23]. Для решения задачи аналитического синтеза структуры алгоритмов управления ГД модель движения БКК с гиросиловым приводом, пренебрегая перекрестными влияниями движений ГД, можно упростить до трех однотипных каналов управления и гиросtabilизации БКК вида

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & I_x \ddot{\chi} + \sum_{i=1}^{n_x} \tilde{I}_{i,x} \ddot{q}_{i,x} - H \dot{\beta} + a I_{\beta} \ddot{\beta}_s + F(\dot{\chi}) = M_x, \\
 & a_{i,x} \ddot{\chi} + \ddot{q}_{i,x} + b_{i,x} \dot{q}_{i,x} + c_{i,x} q_{i,x} = 0, \quad i = \overline{1, n_x}, \\
 & I_{\beta} \ddot{\beta} + k_d \dot{\beta} + H \dot{\chi} + a I_{\beta} \ddot{\beta}_s = M_u(u_x),
 \end{aligned}$$

где $\chi = (\psi, \varphi, \vartheta)^T$ — вектор углов ориентации корпуса, $\beta = (\beta_{\psi}, \beta_{\varphi}, \beta_{\vartheta})^T$ — вектор углов прецессии рамок ГД, $q = (q_k)^T$ — составной вектор координат, характеризующих упругие колебания элементов конструкции по каждому из трех каналов углов ориентации так, что $q_k = (q_{i,k})^T$, $i = \overline{1, n_x}$, где n_x — число учитываемых в канале χ_k упругих координат, $(k = \overline{1, 3})$; $\beta_s = [(\beta_{\varphi} + \beta_{\vartheta}), (\beta_{\psi} + \beta_{\vartheta}), (\beta_{\varphi} + \beta_{\psi})]^T$; $a = \cos(\pi/4 = 0,707$ (для установки ГД типа “звезда”), I_{β} — моменты инерции рамок ГД; $H = \text{diag}(h_1, h_2, h_3)$ — диа-

гональная матрица кинетических моментов ГД; k_d — коэффициент демпфирования по оси подвеса ГД; $a_{i,x}, b_{i,x}, c_{i,x}$ — параметры уравнений колебаний упругих элементов; $I_x = \bar{I}_x + \sum_{i=1}^{n_x} \tilde{I}_{i,x}$, где $\bar{I}_x$ — диагональная матрица осевых моментов инерции корпуса, $\tilde{I}_{i,x}$ — матрица инерционного влияния i -го упругого элемента на динамику конструкции; $F(\dot{\chi})$ — вектор нелинейных функций, содержащих произведения $\chi_i \chi_j$, $i, j = \overline{1, 3}$, $i \neq j$; M_x — вектор возмущающих моментов внешних сил, действующих на корпус; $M_u(u_x)$ — вектор управляющих моментов, прикладываемых относительно осей рамок ГД; u_x — вектор управляющих напряжений, компоненты которого подаются на входы соответствующих моментных приводов ГД.

В режиме угловой ориентации и стабилизации БКК на этапе сборки значения скоростей $\dot{\chi}_k$ достаточно малые, что позволяет пренебречь в $F(\dot{\chi})$ произведениями $\chi_i \chi_j$, $i, j = \overline{1, 3}$, $i \neq j$. При аналитическом исследовании гиросилового управления с тремя одинаковыми ГД целесообразно пренебречь межканальными перекрестными связями и считать в (1) $a I_\beta \ddot{\beta}_s = 0$ [22]. Тогда система (1) имеет вид

$$(2) \quad \begin{aligned} I_x \ddot{\chi} + \sum_{i=1}^{n_x} \tilde{I}_{i,x} \ddot{q}_{i,x} - H \dot{\beta} &= M_x, \\ a_{i,x} \ddot{\chi} + \ddot{q}_{i,x} + b_{i,x} \dot{q}_{i,x} + c_{i,x} q_{i,x} &= 0, \quad i = \overline{1, n_x}, \\ I_\beta \ddot{\beta} + k_d \dot{\beta} + H \dot{\chi} + a I_\beta \ddot{\beta}_s &= M_u(u_x). \end{aligned}$$

ММ (2) является основой для декомпозиции ее на три подсистемы, которые соответствуют изолированным каналам гиросtabilизации [22].

3. Алгоритмы управления угловым движением БКК

Синтез алгоритмов управления динамическими объектами с ММ вида (1) или (2) традиционно проводится последовательно двумя шагами [22]. На первом шаге определяются тип и параметры алгоритмов, формирующих величины компонент вектора $u_x(t)$, до начала сборки без учета упругих колебаний ($q = 0$). Такие алгоритмы называются базовыми, при синтезе которых ММ (2) преобразуется к виду

$$(3) \quad \begin{aligned} I_x \ddot{\chi} - H \dot{\beta} &= M_x, \\ I_\beta \ddot{\beta} + k_d \dot{\beta} + H \dot{\chi} + a I_\beta \ddot{\beta}_s &= M_u(u_x). \end{aligned}$$

На втором шаге синтеза для стабилизации и гашения упругих колебаний предлагается дополнительно к базовому алгоритму сформировать алгоритм управления, в котором используется информация об упругих колебаниях элементов и их параметрах.

В качестве базовых алгоритмов управления гиродинами в режиме стабилизации БКК на этапе сборки целесообразно применение ПД-алгоритмов в каждом k -м канале в виде

$$u_{x,k}(t) = p_{1,k}\chi_k(t) + p_{2,k}\dot{\chi}_k(t), \quad k = \overline{1,3},$$

где $p_{1,k}, p_{2,k}$ — коэффициенты, которые выбираются с учетом параметров уравнений (3) и без учета упругости конструкции из условий обеспечения устойчивости и требуемого качества управления.

Управляющие моменты, прикладываемые относительно осей прецессии ГД, формируются в виде [22]

$$(4) \quad M_{u,k}(u_{x,k}) = p_{0,k}(p_{1,k}\chi_k(t) + p_{2,k}\dot{\chi}_k(t)), \quad k = \overline{1,3},$$

где коэффициенты $p_{0,k}$ определяются конкретными конструкционными характеристиками корпуса и устанавливаются в зависимости от моментов инерции I_x на этапе сборки. Следует отметить, что ММ (3) с алгоритмами (4) описывают линейную динамическую систему с постоянными параметрами на этапе сборки, для которой из анализа ее характеристических уравнений в каждом k -м канале определяется условие устойчивости по вектору угловых скоростей $\dot{\chi}$ в виде [22]

$$(5) \quad k_d(h_k + p_{0,k}p_{2,k}) > I_\beta p_{0,k}p_{1,k}, \quad k = \overline{1,3}.$$

На основе тех же характеристических уравнений решается задача определения значений коэффициентов $p_{1,k}, p_{2,k}$ алгоритмов (4), которые обеспечивают требуемое время регулирования $t_{r,k} \approx 3/\eta_k^*$, $k = \overline{1,3}$ по координатам вектора χ . Здесь η_k^* — заданные значения степеней устойчивости характеристических уравнений [22].

Исследования динамики БКК зонтичного типа показали, что при увеличении числа упругих элементов в спектре частот появляются пониженные частоты упругих колебаний. Следует отметить, что гиросиловая система с базовым алгоритмом (4) обеспечивает необходимое демпфирование высокочастотных упругих колебаний. Однако при этом в указанной низкочастотной области процессы демпфирования упругих колебаний средствами базового управления (4) при условии (5) оказываются излишне затянутыми [22]. Подобная динамика процессов ориентации и стабилизации углового положения БКК является неудовлетворительной. Кроме этого, увеличение времени демпфирования упругих колебаний создает известные трудности при использовании свободно летающего космического манипуляционного робота в процессе сборки БКК [24]. Указанные недостатки требуют усложнения исходного базового алгоритма управления (4). Возможный путь коррекции базового алгоритма состоит в организации подсистемы дополнительной гиросиловой стабилизации низкочастотных упругих колебаний БКК, использующей оценки $\hat{q}_{i,x}, \dot{\hat{q}}_{i,x}$ соответствующих упругих координат. Дополнительная подсистема

подключается после окончания маневра переориентации и установки элемента конструкции на этапе сборки. Для ускорения гашения колебаний подсистема формирует на входах ГД дополнительные воздействия вида

$$(6) \quad M_{d,k}(u_{q,k}) = \sum_{i=1}^{n_k} \tilde{p}_{1,k,i} \hat{q}_{k,i} + \sum_{i=1}^{n_k} \tilde{p}_{2,k,i} \dot{\hat{q}}_{k,i}, \quad k = \overline{1,3},$$

где $\hat{q}_k, \dot{\hat{q}}_k$ — векторы оценок упругих координат и их производных, $\tilde{p}_{1,k,i}, \tilde{p}_{2,k,i}$ — постоянные на этапе сборки коэффициенты.

При выборе значений коэффициентов в (6) необходимо учитывать значения оценок параметров в уравнениях упругих колебаний ММ (2). Оценки значений парциальных частот $\omega_{i,x} = \sqrt{c_{i,x}}$ из низкочастотного спектра упругих колебаний позволяют выбрать коэффициенты $\tilde{p}_{1,k,i}, \tilde{p}_{2,k,i}$, которые обеспечивают устойчивость и минимальное время гашения упругой компоненты [22]. При использовании оценок $\hat{\chi}, \dot{\hat{\chi}}$ с учетом (6) управляющие моменты формируются в виде

$$(7) \quad M_{u,k}(u_{x,k}) = p_{0,k} \left[p_{1,k} \left(\hat{\chi}_k - I_x^{-1} \sum_{i=1}^{n_x} \tilde{I}_{i,k} \hat{q}_{i,k} \right) + \right. \\ \left. + p_{2,k} \left(\dot{\hat{\chi}}_k - I_x^{-1} \sum_{i=1}^{n_x} \tilde{I}_{i,k} \dot{\hat{q}}_{i,k} \right) \right], \quad k = \overline{1,3}.$$

Коэффициенты усиления в (7) при оценках $\hat{q}_{i,k}, \dot{\hat{q}}_{i,k}$ зависят от значений $\tilde{I}_{i,k}$, которые могут быть меньше значений I_x на порядок и более. Для ускоренной активной компенсации влияния упругих колебаний на угловую ориентацию БКК целесообразно в (7) ввести перенастраиваемые коэффициенты $\tilde{p}_{1,k,i}, \tilde{p}_{2,k,i}$. Тогда алгоритмы (7) принимают вид

$$(8) \quad M_{u,k}(u_{x,k}) = p_{0,k} \left[p_{1,k} \left(\hat{\chi}_k - \sum_{i=1}^{n_x} \tilde{p}_{1,k,i} \hat{q}_{i,k} \right) + \right. \\ \left. + p_{2,k} \left(\dot{\hat{\chi}}_k - \sum_{i=1}^{n_x} \tilde{p}_{2,k,i} \dot{\hat{q}}_{i,k} \right) \right], \quad k = \overline{1,3},$$

где $\tilde{p}_{1,k,i} \gg p_{1,k} I_x^{-1} \tilde{I}_i, \tilde{p}_{2,k,i} \gg p_{2,k} I_x^{-1} \tilde{I}_i$.

Если упругие элементы не имеют датчиков информации, то необходимо решать задачу получения оценок $\hat{q}$ и параметров упругих колебаний на каждом этапе сборки БКК после его окончания. Для решения данной задачи используется модифицированный вариант предложенного в [20] алгоритма оценивания на основе фильтра Калмана.

4. Синтез алгоритма совместного оценивания координат упругих колебаний и их параметров

Синтез алгоритма совместного оценивания координат углового движения и координат колебаний (тонов) упругих элементов конструкции проведем на примере изолированного канала $\chi_2 = \varphi$, который получается из ММ (2) в виде

$$(9) \quad \begin{aligned} I_\varphi \ddot{\varphi} + \sum_{i=1}^n \tilde{I}_i \ddot{q}_i - h_2 \dot{\beta} &= M_\varphi, \\ a_i \ddot{\varphi} + \ddot{q}_i + b_i \dot{q}_i + c_i q_i &= 0, \quad i = \overline{1, n_x}, \\ I_\beta \ddot{\beta} + k_d \dot{\beta} + h_2 \dot{\varphi} &= M_u(u_\varphi), \end{aligned}$$

где $M_u(u_\varphi) = p_\varphi u_\varphi$, $p_\varphi = (p_{1,\varphi}, p_{2,\varphi})$ — вектор коэффициентов, $u_\varphi = (\varphi, \dot{\varphi})^T$.

При синтезе алгоритма оценивания полагаем $M_\varphi = 0$. Тогда система (9) преобразуется к виду [20]:

$$(10) \quad \begin{aligned} \ddot{\varphi} - I_\varphi^{-1} h_2 \dot{\beta} &= 0, \\ \left(1 - I_\varphi^{-1} \sum_{i=1}^n a_i \tilde{I}_i \right) \ddot{q}_i + \left(1 - I_\varphi^{-1} \sum_{i=1, j \neq i}^n a_j \tilde{I}_j \right) (b_i \dot{q}_i + c_i q_i) + \\ &+ a_i \sum_{i=1, j \neq i}^n \tilde{I}_j (b_j \dot{q}_j + c_j q_j) + a_i h_2 \dot{\beta} = 0, \\ I_\beta \ddot{\beta} + k_d \dot{\beta} + h_2 \left(\dot{\varphi} - I_\varphi^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{I}_i \dot{q}_i \right) &= p_\varphi u_\varphi. \end{aligned}$$

и угол φ определяется выражением

$$(11) \quad \varphi = \bar{\varphi} - I_\varphi^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{I}_i q_i,$$

где $\bar{\varphi}$ — угол поворота корпуса, вызванный вращением БКК как жесткого объекта.

Представление координаты φ в виде (11) позволяет применять алгоритмы фильтрации для совместного оценивания координат углового движения рассматриваемой механической системы БКК с ГД, неизмеряемых координат q_i тонов упругих колебаний, а также идентификации параметров упругих колебаний в реальном времени. Следует отметить, что в отличие от [20] система (10) нелинейная, так как содержит неизвестные параметры. Для получения оценок используется нелинейный расширенный фильтр Калмана. При синтезе алгоритма оценивания представим уравнения ММ (10) и (11) в форме Коши

$$(12) \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) + du_\varphi + Cw(t),$$

где $x \in R^{5n+4}$ — вектор состояния, $x = (\bar{\varphi}, \dot{\varphi}, \beta, \dot{\beta}, q_i, \dot{q}_i, a_i, b_i, c_i)^T$, $i = \overline{1, n}$, $b \in R^{5n+4}$ с ненулевым элементом $d_4 = 1$, $f(x)$ — нелинейная вектор-функция, определяемая из (10) и (11),

$$\begin{aligned} f_1 &= x_2, \quad f_2 = I_\varphi^{-1} h_2 x_{2n+4}, \quad f_{2i+1} = x_{2i+2}, \quad f_{2n+3} = x_{2n+4}, \\ f_{2n+4} &= I_\beta^{-1} \left[d_4 u_\varphi - k_d x_{2n+4} - h_2 \left(x_2 - I_\varphi^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{I}_i x_{2i+2} \right) \right], \\ f_{2i+2} &= (\cdot)^{-1} \left[x_{2n+4+i} h_2 x_{2n+4} - (\cdot)_j (x_{3n+4+i} x_{2i+2} + x_{4n+4+i} x_{2i+1}) - \right. \\ &\quad \left. - x_{2n+4+i} \sum_{j=1, j \neq i}^n \tilde{I}_j (x_{3n+4+j} x_{2j+2} + x_{4n+4+j} x_{2j+1}) \right], \end{aligned}$$

$$\text{где } (\cdot) = 1 - I_\varphi^{-1} \sum_{i=1}^n a_i \tilde{I}_i, \quad (\cdot)_j = 1 - I_\varphi^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^n a_j \tilde{I}_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq i,$$

$f_{2n+4+i} = f_{3n+4+i} = f_{4n+4+i} = 0$; $w \in R^{4n+2}$ — вектор шумов,

$C = \text{diag}(C_0 \cdots C_i \cdots)$ — блочно-диагональная матрица шумов объекта, содержащая блоки $C_0 \in R^{4 \times 2}$, $C_i \in R^{5 \times 4}$. Элементы матрицы C_0 нулевые, кроме $c_{21} = c_{42} = 1$, в матрицах C_i также нулевые элементы, кроме $c_{21,i} = c_{32,i} = c_{43,i} = c_{64,i} = 1$.

Предполагается, что в (10) неизвестные параметры упругих колебаний приняты постоянными на этапе сборки. При необходимости в вектор состояния χ можно включить любые параметры, что приводит к громоздкости математических выражений.

Если на борту БКК измеряются только координаты φ и $\dot{\varphi}$, то уравнение измерений имеет вид

$$(13) \quad z(t) = Gx(t) + v(t),$$

где вектор измерений $z \in R^2$ имеет координаты $z_1 = x_1 - I_\varphi^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{I}_i x_{4+i} + v_1$,

$z_2 = x_2 - I_\varphi^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{I}_i x_{4+n+i} + v_2$; v — вектор шумов измерителей.

Структура матрицы измерений $G \in R^{2 \times (5n+4)}$ имеет вид [20]

$$G = [C_1 G_2 \cdots G_{i+2}],$$

где C_1, G_2, G_{i+2} — присоединенные матрицы, $i = \overline{1, n}$; G_1 — квадратная единичная матрица, G_2 — квадратная нулевая матрица; матрица $G_{i+2} \in R^{2 \times 5}$ состоит из следующих ненулевых элементов: $g_{11,i} = g_{22,i} = -I_\varphi^{-1} \tilde{I}_\varphi$.

Предполагается, что начальные значения $x(t_0), w, v$ независимы между собой, w и v — гауссовские белые шумы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями:

$$M\langle w(t)w^T(\tau) \rangle = Q_w(t)\delta(t - \tau), \quad M\langle v(t)v^T(\tau) \rangle = Q_v(t)\delta(t - \tau).$$

Здесь δ — дельта-функция Дирака, диагональные матрицы интенсивности шумов $Q_w(t)$ и $Q_v(t)$ непрерывны и положительно определены для $t \geq t_0$. Тогда задача синтеза алгоритма оценивания координат $x(t)$ по измерениям $z(t)$ сводится к частному случаю непрерывного нелинейного расширенного фильтра Калмана [20] с постоянными матрицами C и G :

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= f(\hat{x}) + du(t) + P(t)G^T Q_v^{-1}[z(t) - G\hat{x}(t)], \\ \dot{P}(t) &= D(\hat{x})P(t) + P(t)D^{-1}(\hat{x}) - P(t)G^T Q_v^{-1}GP(t) + CQ_w(t)C^T, \end{aligned}$$

где $\hat{x}(t)$ — вектор оценок координат вектора $x(t)$, $P(t)$ — ковариационная матрица, $D(\hat{x}) = \partial f(\hat{x})/\partial \hat{x}$ — матрица Якоби.

5. Математическое моделирование

Исследование возможностей алгоритма управления (8) для активной компенсации упругих колебаний при угловой ориентации БКК по координате φ проведено с помощью математического моделирования с использованием в (8) оценок, получаемых на основе алгоритма (14). Предполагалось, что количество тонов и величины их параметров известны и одинаковы как в ММ (9), так и в алгоритме оценивания (14), кроме тех параметров, которые считаются в (14) неизвестными. Для сокращения времени моделирования в (9) исследовались только два тона, т.е. $n = 2$, а для формирования момента управления использовались оценки $\hat{\varphi}$, $\dot{\hat{\varphi}}$ и $\hat{q}_i$, $\dot{\hat{q}}_i$ БКК. В качестве неизвестных были выбраны постоянные параметры c_1 и c_2 , а их оценки $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$ использовались в (14).

Сигнал управления формируется на основе (8) в виде

$$(15) \quad u_\varphi = p_1 \hat{\varphi} - \sum_{i=1}^2 \tilde{p}_{1,i} \hat{q}_{1,i} + p_2 \dot{\hat{\varphi}} - \sum_{i=1}^2 \tilde{p}_{2,i} \dot{\hat{q}}_{2,i},$$

где коэффициенты $\tilde{p}_{1,i}$, $\tilde{p}_{2,i}$ имеют тот же порядок, что и p_1 и p_2 соответственно.

При моделировании динамики угловой ориентации с целью получения измерений в качестве ММ использовался вариант системы (9) с алгоритмом (15) в виде [20]

$$(16) \quad \dot{y} = Ay + \bar{d}u_\varphi,$$

где $y \in R^8$ — вектор состояния, $y = (\bar{\varphi}, \dot{\bar{\varphi}}, \beta, \dot{\beta}, q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)^T$, $\bar{d} \in R^8$ — вектор с одним ненулевым элементом $\bar{d}_4 = 1$.

На основе (16) формировался вектор измеряемых координат $z = (\varphi^*, \dot{\varphi}^*)^T$ с помощью выражения $z = \bar{G}y + v$, где матрица $\bar{G} \in R^{2 \times 8}$ имеет ненулевые элементы $\bar{g}_{1,1} = \bar{g}_{2,2} = 1$, $\bar{g}_{1,5} = \bar{g}_{2,7} = -I_\varphi^{-1} \tilde{I}_1$, $\bar{g}_{2,6} = \bar{g}_{2,8} = -I_\varphi^{-1} \tilde{I}_2$, $v = (v_1, v_2)^T$ — вектор шумов измерений.

В (14) использовалась ММ (12) с вектором $x \in R^{10}$, в который включены идентифицируемые неизвестные параметры c_1 и c_2 , $x = (\bar{\varphi}, \dot{\varphi}, \beta, \dot{\beta}, q_i, \dot{q}_i, c_1, c_2)^T$, $i = \overline{1, 2}$, $d \in R^{10}$ — вектор с одним ненулевым элементом $d_4 = 1$. $C \in R^{10 \times 6}$ — матрица шумов с ненулевыми элементами $c_{2,1} = c_{4,2} = c_{6,3} = c_{8,4} = c_{9,5} = c_{10,6} = 1$. Модель измерений для алгоритма (14) формируется в виде $\hat{z} = G\hat{x}$, где матрица $G \in R^{2 \times 10}$ отличается от матрицы $\bar{G}$ наличием девятого и десятого нулевых столбцов. Матрицы $Q_w \in R^{6 \times 6}$ и $Q_v \in R^{2 \times 2}$ в (14) приняты постоянными.

Начальные значения при $t_0 = 0$ координат и параметров, а также векторов y , $\hat{x}$ и элементов диагональной ковариационной матрицы $P(0)$ приняты следующими [20]:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0,017; \quad y_2(0) = 0,016 \text{ с}^{-1}; \quad y_3(0) = 0,18 \cdot 10^{-3}; \\ y_4(0) &= 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \quad y_5(0) = 0,017; \quad y_6(0) = 0,19 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \\ y_7(0) &= 0,37 \cdot 10^{-2}; \quad y_8(0) = 0,13 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \\ a_1 &= 1,2; \quad a_2 = 2,32; \quad b_1 = 0,24 \text{ с}^{-1}; \quad b_2 = 0,12 \text{ с}^{-1}; \\ c_1 &= (0,34)^2 \text{ с}^{-2}; \quad c_2 = (0,47)^2 \text{ с}^{-2}; \\ I_\varphi &= 69\,200 \text{ Нмс}^2; \quad \tilde{I}_1 = 1270 \text{ Нмс}^2; \quad \tilde{I}_2 = 2500 \text{ Нмс}^2; \\ I_\beta &= 1,1 \text{ Нмс}^2; \quad k_d = 2,5 \text{ Нмс}; \quad h = 240 \text{ Нмс}; \\ p_{1,1} &= 3,9 \cdot 10^{-6}; \quad p_{2,2} = 3,8 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}; \quad p_{3,3} = 0,49 \cdot 10^{-2}; \\ p_{4,4} &= 6,1 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-2}; \quad p_{5,5} = 4,7 \cdot 10^{-4}; \quad p_{6,6} = 0,54 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-2}; \\ p_{7,7} &= 0,11 \cdot 10^{-4}; \quad p_{8,8} = 0,11 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}; \\ p_{9,9} &= 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-4}; \quad p_{10,10} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-4}. \end{aligned}$$

Использовались начальные значения оценок:

$$\hat{x}_1(0) = \varphi^*, \quad \hat{x}_2(0) = \dot{\varphi}^*, \quad \hat{x}_j(0) = 0 \quad \forall j = \overline{3, 8};$$

если учесть, что параметры c_1 и c_2 могут быть только положительными, то $\hat{x}_9(0) = 0,002 \text{ с}^{-2}$; $\hat{x}_{10}(0) = 0,005 \text{ с}^{-2}$.

Для моделирования дискретных аналогов непрерывных белых шумов объекта и измерителей принимались следующие среднеквадратические отклонения:

$$\begin{aligned} \sigma_{w,1} &= 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-2}; \quad \sigma_{w,2} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-2}; \quad \sigma_{w,3} = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}; \\ \sigma_{w,4} &= 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}; \quad \sigma_{w,5} = 4,8 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}; \quad \sigma_{w,6} = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}; \\ \sigma_{v,1} &= 2,6 \cdot 10^{-4}; \quad \sigma_{v,2} = 1,34 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Матрицы интенсивности белых шумов Q_w и Q_v приняты диагональными вследствие отсутствия корреляции между шумами объекта и шумами в каналах измерений. Элементы этих матриц вычисляются с помощью выражений

$$q_{w,kk} = 2\sigma_{w,k}^2\tau, \quad k = \overline{1, 6} \quad \text{и} \quad q_{w,jj} = 2\sigma_{v,j}^2\tau, \quad j = \overline{1, 2},$$

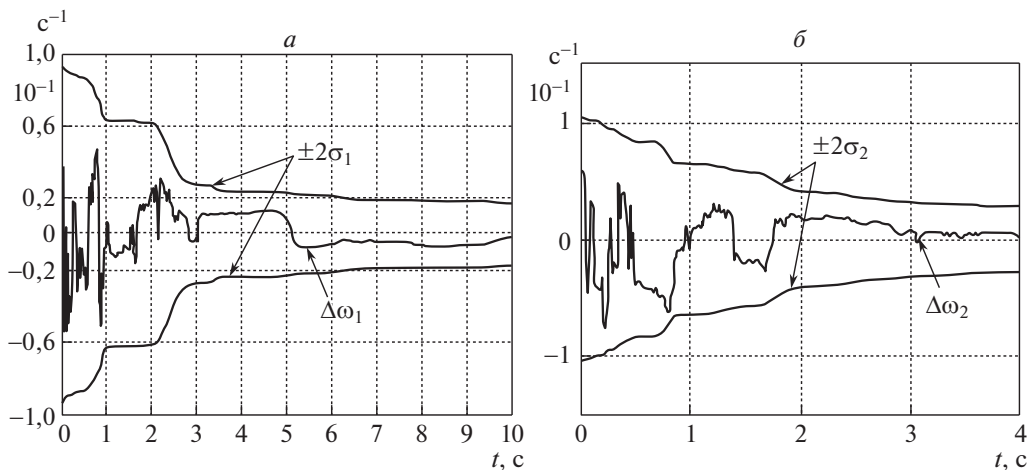


Рис. 1. Ошибки идентификации парциальных частот.

где τ — время корреляции, $\tau \leq \Delta t$, Δt — шаг интегрирования. При этом приняты следующие значения:

$$\begin{aligned} q_{w,11} &= 2,3 \cdot 10^{-12} \text{ с}^{-3}; & q_{w,22} &= 0,49 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-3}; & q_{w,33} &= 4,8 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-3}; \\ q_{w,44} &= 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-3}; & q_{w,55} &= 2,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-3}; & q_{w,66} &= 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-3}; \\ q_{v,11} &= 4,7 \cdot 10^{-12} \text{ с}; & q_{v,22} &= 2,9 \cdot 10^{-13} \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

При статистическом моделировании дискретизация уравнений (14) проводилась с использованием метода Рунге–Кутты четвертого порядка с Δt , который выбирался в диапазоне от 0,002 до 0,005 с.

На рис. 1 представлены графики ошибок идентификации неизмеряемых парциальных частот $\Delta\omega_i(t) = \sqrt{\hat{c}_i} - \sqrt{\hat{c}_i(t)}$, $i = \overline{1,2}$ с удвоенными средне-квадратическими отклонениями, рассчитанными как соответствующие диагональные элементы матрицы $P(t)$: $\sigma_{w,1} = p_{9,9}^{-4}$, $\sigma_{w,2} = p_{10,10}^{-4}$. Из результатов статистического моделирования следует, что время сходимости оценок параметров c_1 до 2% от максимальной величины начального значения составляет в среднем от 3 до 6 с. При этом время сходимости оценок координат $\hat{\varphi}$ и $\dot{\hat{\varphi}}$ до 2% от их максимальных величин составляет в среднем 20–25 с.

С целью проверки возможности применения алгоритма (15) для активной компенсации влияния колебаний упругих частей БКК на его угловую динамику проведено математическое моделирование в режиме угловой стабилизации. Результаты сравнительного моделирования углового движения БКК по координате φ с алгоритмом управления (7) и алгоритмом (15) представлены на рис. 2.

На рис. 2,а представлены графики реальных значений φ (11), полученных при использовании алгоритма (7) с $\tilde{p}_{1,i} = 0,017$, $\tilde{p}_{2,i} = 0,01$, $i = \overline{1,2}$, на рис. 2,б — при использовании алгоритма (15), в котором $\tilde{p}_{1,i} = 3,6$, $\tilde{p}_{2,i} = 2,3$.

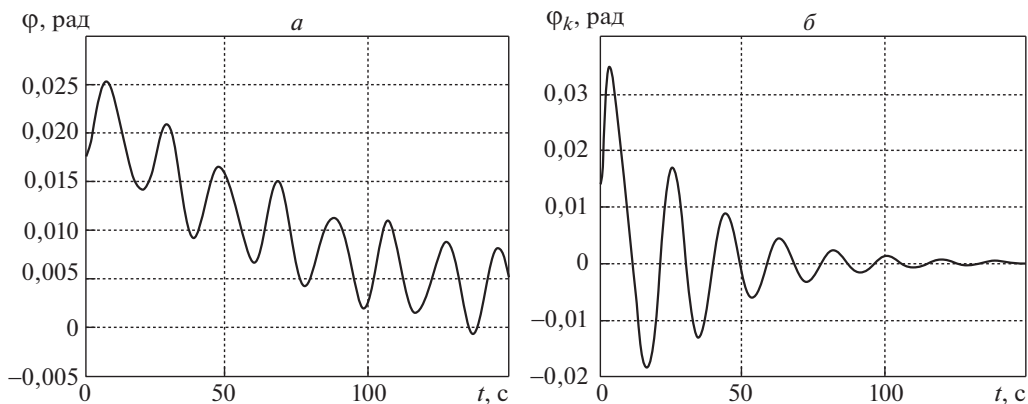


Рис. 2. Процессы стабилизации угла поворота конструкции.

В первом случае затухание упругих колебаний до 2% от максимального значения начального значения амплитуды происходит за ~ 6000 с, во втором случае при активной компенсации влияния упругих колебаний — за ~ 80 с.

При моделировании процесса стабилизации угла поворота до 150 с (см. рис. 2, б) ошибки идентификации парциальных частот колебались в диапазоне от 0,7 до 1,6% от истинных значений параметров ω_i .

6. Заключение

При управлении угловым движением собираемой на орбите БКК, содержащей упругие элементы, возникает проблема демпфирования колебаний при отсутствии информации о новых механических параметрах собираемой конструкции и начальных характеристиках, возникающих на каждом этапе сборки новых упругих компонент. Это требует обеспечения не только своевременной смены стратегии оценивания и соответственно управления при переходе конструкции из одного класса механических систем в другой, но и применения принципов адаптивного управления на интервале развития конструкции внутри каждого этапа сборки выше первого. При необходимости на этапе сборки должна решаться задача оптимизации коэффициентов в алгоритме (8) при координатах тонов упругих колебаний с точки зрения быстрого действия.

Синтезированный алгоритм совместного оценивания координат углового движения БКК, тонов упругих колебаний конструкции и их параметров позволяет только по показаниям измерителей углового движения БКК в отсутствие какой-либо объективной информации об упругих колебаниях получать с высокой точностью оценки их неизмеряемых координат и параметров в реальном времени.

Следует отметить, что при построении расширенного фильтра Калмана для оценки координат движения и их параметров такой сложной механиче-

ской системы, как рассматриваемая в работе БКК зонтичного типа, требуется использование полной ММ значительно более высокого порядка, в которой учитывается взаимное влияние колебательных компонент. Такую задачу целесообразно решать при разработке системы для конкретного варианта собираемой конструкции с использованием соответствующего объема вычислительных средств. В данной работе рассматривается принципиальная возможность использования предлагаемого подхода для решения задачи оценивания таких сложных динамических объектов.

Использование синтезированных алгоритмов (8) и (14) при сборке БКК имеет ряд достоинств. Так, при установке первого упругого элемента размерность вектора состояния в алгоритме оценивания увеличивается на пять неизмеряемых координат: две координаты тона упругих колебаний и три параметра колебаний. Так как эти параметры длительное время остаются постоянными, то после их идентификации они становятся известными и дальнейшая идентификация их нецелесообразна, тогда эти три параметра можно исключить из вектора состояния. После установки следующего упругого элемента указанное выше изменение размерности повторяется и вектор состояния увеличивается на пять координат. После процедуры идентификации следующих постоянных параметров вектор состояния также уменьшается на следующие три координаты и т.д. Таким образом, вектор состояния после идентификации параметров колебаний всех упругих элементов БКК увеличивается только на $2n$ координат, где n — количество установленных на БКК упругих элементов.

Результаты статистического математического моделирования доказывают возможность активной компенсации влияния колебаний упругих частей конструкции БКК на динамику угловой ориентации и стабилизации самого БКК с помощью управления вида (15). При моделировании алгоритма идентификации параметров a , b , c проверялись три варианта оценивания, в которых выбирался один из трех параметров, а остальные два считались известными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л.Д., Крылов С.С., Марков Ю.Г., Тун Тун Вин, Филиппова А.С. Динамика космического аппарата с упругими и диссипативными элементами в режиме ориентации // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 5. С. 106–115.
2. Геча В.Я., Гриневич Д.В., Чирков В.П., Канунникова Е.А. Влияние упругих трансформируемых элементов конструкции на точность стабилизации космического аппарата // Справочник. Инженерный журнал. 2013. № 5. С. 3–6.
3. Nurre G.S., Ryan R.S., Scofield H.N., Sims J.L. Dynamics and control of large space structures // J. of Guidance, Control, Dynam. 1984. V. 7. No. 5. P. 514–526.
4. Рутковский В.Ю., Суханов В.М. Большие космические конструкции: модели, методы исследования и принципы управления. Ч. 1 // АиТ. 1996. № 7. С. 52–65. Rutkovsky V.Yu., Sukhanov V.M. Large Space Structure: Models, Methods of Study and Control // Autom. Remote Control. 1996. V. 57. No. 7. Part 1. P. 953–963.

5. Mikulas M.M., Collins T.J., Hedgepeth J.M. Preliminary design considerations for 10–40 meter-diameter precision truss reflectors // J. Spacecraft Rockets. 1991. V. 28. No. 4. P. 439–447.
6. Boning P., Dubowsky S. Coordinated control of space robot teams for the on-orbit construction of large flexible space structures // Advanced Robotics. 2010. V. 24. No. 3. P. 303–323.
7. Белоножко П.П. Космическая робототехника для монтажа и сервиса. Потенциальные задачи, концепции перспективных систем // Воздушно-космическая сфера. 2018. № 4. С. 84–97.
8. Flores-Abad A., Ma O., Pham K., Ulrich S. A review of space robotics technologies for on-orbit serving // Progr. Aerospace Scie. 2014. No. 68. P. 1–26.
9. Papadopoulos E., Aghili F., Ma O., Lampariello R. Manipulation and capture in space: A survey // Front. Robot. AI. 2021. No. 8. P. 1–36.
10. Ishijima Yo., Tzeranis D., Dubowsky S. The on-orbit maneuvering of large space flexible structures by free-flying robots // Pros. of the 8 Int. Symp. on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space (SAIRAS-2005), Munich, 5–8 Sept., 2005, Noordwijk: ESTEC. 2005. P. 419–426. (ESA SP ISSN 1609-042X. No. 603).
11. Тимаков С.Н., Журнов А.В. Алгоритм активного демпфирования упругих колебаний конструкции Международной космической станции // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение». 2014. № 3. С. 37–53.
12. Крутова И.Н., Суханов В.М. Особенности динамики управления деформируемым космическим аппаратом в процессе его преобразования в большую космическую конструкцию // АиТ. 2008. № 5. С. 41–56.
Krutova I.N., Sukhanov V.M. Dynamic features of flexible spacecraft control in process of its transformation into a large space structure // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 5. P. 774–787.
13. Теория управления (дополнительные главы): Учебное пособие / под ред. Д.А. Новикова. М.: ЛЕНАНД, 2019.
14. Крутова И.Н., Суханов В.М. Синтез модифицированного PD-алгоритма управления угловым движением большой космической конструкции // АиТ. 2009. № 1. С. 39–50.
Krutova I.N., Sukhanov V.M. Design of modified PD algorithm to control angular motion of large space structure // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 1. P. 33–42.
15. Крутова И.Н., Суханов В.М. Синтез дискретной системы управления деформируемым космическим аппаратом, обеспечивающей робастную устойчивость упругих колебаний // АиТ. 2009. № 7. С. 25–36.
Krutova I.N., Sukhanov V.M. Design of discrete control system of flexible spacecraft maintaining robust stability of elastic oscillations // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 7. P. 1109–1119.
16. Rutkovsky V.Yu., Sukhanov V.M., Zemlyakov S.D., Glumov V.M. Models and methods of control of large space structures with discretely changing construction // Proceedings of International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace (ICNPAA-2008). Cambridge Scientific publishers. Ed. by S. Sivasundaram. 2009. Plenary paper, chapter 12. P. 115–142.
17. Глумов В.М., Крутова И.Н., Суханов В.М. Адаптивная система управления на основе нечеткой логики для большой космической конструкции в процессе ее сборки на орбите // АиТ. 2004. № 10. С. 109–127.

- Glumov V.M., Krutova I.N., Sukhanov V.M.* Fuzzy Logic-based Adaptive Control System for In-orbit Assembly of Large Space Structures // *Autom. Remote Control*. 2004. V. 65. No. 10. P. 1618–1634.
18. *Rutkovsky V.Yu., Glumov V.M., Sukhanov V.M.* New Adaptive Algorithm of Flexible Spacecraft Control // *Complex Systems. Relationships between Control, Communications and Computing*. Dordrecht, The Netherlands: Springer International Publishing. 2016. P. 313–326.
19. *Kalman R.E., Bucy R.* New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // *Trans. ASME. J. Basic Eng.* 1961. V. 83D. P. 95–108.
20. *Ермилов А.С., Ермилова Т.В.* Оценивание ненаблюдаемых координат упругих колебаний больших космических конструкций с гиросиловым приводом // *АиТ*. 2013. № 9. С. 143–156.
Ermilov A.S., Ermilova T.V. Estimating Nonmeasurable Coordinates of Elastic Oscillations for Large Space Constructions with a Gyroforce Engine // *Autom. Remote Control*. 2013. V. 74. No. 9. P. 1545–1556.
21. *Глумов В.М., Крутова И.Н., Суханов В.М.* Метод построения математической модели дискретно развивающейся большой космической конструкции // *АиТ*. 2003. № 10. С. 15–33.
Glumov V.M., Krutova I.N., Sukhanov V.M. A Method of Constructing the Mathematical Model of a Discretely Developing Large Space Structure // *Autom. Remote Control*. 2003. V. 64. No. 10. P. 1527–1543.
22. *Глумов В.М., Крутова И.Н., Суханов В.М.* Особенности гиросиловой стабилизации собираемой на орбите большой космической конструкции // *Проблемы управления*. 2016. № 1. С. 82–89.
Glumov V.M., Krutova I.N., Sukhanov V.M. Some Features of Powered Gyrostabilization of a Large Space Structure Assembled in Orbit // *Autom. Remote Control*. 2017. V. 78. No. 12. P. 1345–1355.
23. *Динамика и управление космическими объектами* / под ред. В.М. Матросова, М.Ф. Решетнева, Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние РАН, 1992.
24. *Glumov V.M.* Adaptive Control of Free-Flying Space Manipulation Robot in the Working Area when Assembling a Large Space Structure in Orbit // *Proceedings of the 12th International Conference “Management of Large Space System Development” (MLSD)* M: IEEE. 2019. P. 1–4.
<https://ieeexplore.ieee.org/document/8911089>

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 12.10.2022

После доработки 06.02.2023

Принята к публикации 30.03.2023

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. В.В. БАЛАШОВ, канд. физ.-мат. наук (hbd@cs.msu.ru),
В.А. КОСТЕНКО, канд. техн. наук (kostmsu@gmail.com),
И.А. ФЕДОРЕНКО (iliasfedorenko@mail.ru)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова),
Ц. ГАО, канд. физ.-мат. наук (gaojiexing@huawei.com)
(Московский исследовательский центр компании Хуавэй),
Ч.М. СУН, PhD (sunchumin@huawei.com),
Ц. СУН, PhD (j.sun@huawei.com)
(Гонконгский исследовательский центр компании Хуавэй)

АЛГОРИТМ ИМИТАЦИИ ОТЖИГА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СПИСОЧНЫХ РАСПИСАНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА КОЛИЧЕСТВО МЕЖПРОЦЕССОРНЫХ ПЕРЕДАЧ ДАННЫХ

Предложен алгоритм имитации отжига для построения многопроцессорных списочных расписаний минимальной длительности с дополнительным ограничением на количество передач между процессорами. Данное ограничение характерно для вычислительных систем с жесткими ограничениями на ресурсы межпроцессорной сети передачи данных. В целом задача минимизации длительности расписания возникает при разработке систем обработки данных в реальном масштабе времени, таких как бортовые и телекоммуникационные системы. Также задача актуальна для периферийных вычислений (edge computing). Экспериментальное исследование свойств алгоритма показало его высокую точность, стабильность и масштабируемость.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, списочные расписания, алгоритм имитации отжига.

DOI: 10.31857/S0005231023080093, **EDN:** HDDNWC

1. Введение

Алгоритмы построения расписаний можно разделить на два больших класса.

Класс 1. Алгоритмы начинают процесс построения расписания с пустого расписания, не содержащего работ, а затем на каждом шаге добавляют работы в расписание. К алгоритмам этого класса относятся жадные алгоритмы [1, 2], алгоритмы, сочетающие жадные стратегии, и ограниченный перебор [3], алгоритмы, основанные на методе ветвей и границ [4, 5].

Класс 2. Алгоритмы работают с полным расписанием (содержащим все работы). На каждом шаге такие алгоритмы изменяют расписание, пытаясь его улучшить. К этому классу относятся алгоритмы имитации отжига [6, 7], генетические и эволюционные алгоритмы [8–11], муравьиные алгоритмы [12–14], алгоритмы случайного поиска [15].

Рассматриваемая в работе задача построения списочных расписаний отличается от классической [2, 16] наличием дополнительного ограничения на корректность расписаний. Задается ограничение на максимально возможное число передач данных между процессорами. Наличие дополнительного ограничения может приводить к тому, что алгоритмы первого класса заходят в тупик: есть еще не размещенные в расписание работы, при этом ни одна из них не может быть размещена без нарушения дополнительного ограничения на корректность расписания. Для алгоритмов второго класса дополнительное ограничение может приводить к невозможности перехода между двумя корректными расписаниями при помощи переноса работ между процессорами по одной: такой перенос может увеличить число межпроцессорных передач, приводя к нарушению ограничения.

Ограничение на максимально возможное число передач данных между процессорами позволяет только за счет планирования вычислений уменьшить нагрузку на сеть обмена данными. При этом граф потока данных не изменяется. Изменение графа потока данных означает разработку нового алгоритма решения прикладной задачи. Данная задача актуальна для систем с жесткими ограничениями на доступные ресурсы, такие как вычислительная мощность, объем оперативной памяти, пропускная способность сети. К таким системам относятся, в частности, встроенные и бортовые управляющие системы, системы цифровой обработки сигналов. Также задача актуальна для периферийных вычислений (edge computing), для выполнения которых нет возможности использовать высокопроизводительные вычислители.

В работе математически сформулирована постановка задачи построения списочных расписаний с дополнительным ограничением на количество передач данных между процессорами, рассмотрены подходы к решению близких задач, предложен алгоритм имитации отжига для этой задачи и приведены результаты экспериментального исследования точности и вычислительной сложности алгоритма.

2. Задача построения списочных расписаний с дополнительным ограничением

Общая задача построения списочных расписаний заключается в распределении фиксированного множества работ на процессоры и задания порядка их выполнения таким образом, чтобы оптимизировать желаемую меру эффективности расписания и выполнить заданные ограничения, которые обеспечивают корректность полученного решения. Прежде чем конкретизировать постановку задачи построения расписаний, определим модели исходных данных и самого расписания.

Модель прикладной программы. При определении модели прикладной программы предполагается, что работы, подлежащие планированию, и параллелизм, допускаемый при выполнении программы, заданы (выявлены) предварительно. Модель программы задается графом потока данных. Это ориентированный ациклический граф G с N вершинами и M ребрами. Каждой вершине графа соответствует работа из набора работ $P = \{p_i\}_{i=1}^N$. Каждому ребру графа соответствует однонаправленная передача данных между работами. Директивные сроки для работ не определены.

Модель вычислительной системы. Вычислительная система HW представляет собой S одинаковых по функциональным возможностям и производительности процессоров: $SP = \{sp_i\}_{i=1}^S$, каждый из которых может одновременно выполнять одну работу. Времена выполнения работ p_j на любом из процессоров определяются вектором времен выполнения: $C = \{c_j\}$, $j = 1, \dots, N$. Работы непрерываемы, каждая работа должна быть целиком выполнена на одном процессоре.

Связь между процессорами sp_i и sp_j задается согласно матрице связности процессоров $D = \{d_{ij}\}$, $i = 1, \dots, S$, $j = 1, \dots, S$, причем $d_{ij} = 0$ при $i = j$. Значение d_{ij} задает задержку на передачу данных от sp_i к sp_j , т.е. если работы p_k и p_l находятся на процессорах sp_i и sp_j соответственно и в графе потока данных присутствует ребро (p_k, p_l) , то завершение p_k и старт p_l должны быть разделены по времени не менее чем на d_{ij} .

Размеры данных и конфликты доступа к среде передачи данных не рассматриваются. На процессоре возможно выполнение работы, даже если с этого процессора передаются и/или на этот процессор принимаются данные.

Модель расписания. Расписание HP выполнения прикладной программы определено для заданного набора работ и набора процессоров, если заданы: 1) привязка работ к процессорам; 2) порядок выполнения работ на каждом процессоре.

Будем рассматривать расписание в списочной форме. Списочная форма расписания HP представляет собой ориентированный граф G_{HP} , вершины которого соответствуют работам. В состав G_{HP} входят:

- для каждого процессора — простая цепь из привязанных к этому процессору работ, задающая порядок выполнения работ на этом процессоре;
- для каждой межпроцессорной передачи данных — секующее ребро между цепью процессора-отправителя и цепью процессора-получателя, соединяющее две работы, участвующие в передаче данных.

Отметим, что в G_{HP} отсутствуют ребра, соответствующие передачам данных между работами, выполняющимися на одном процессоре и не являющимися соседними в цепи этого процессора.

Расписание HP корректно, если выполнены следующие ограничения.

- 1) Каждая работа назначена на процессор.
- 2) Любую работу обслуживает лишь один процессор, без прерывания.

3) Процессор в каждый момент времени выполняет не более одной работы.

4) Частичный порядок, заданный графом потока данных G , сохранен в HP : $G \subset G_{HP}^*$, где G_{HP}^* – транзитивное замыкание отношения G_{HP} .

5) Расписание HP должно быть беступиковым (необходимо для построения временной диаграммы расписания). Достаточным условием беступиковости при неограниченном размере буферов обмена данными является отсутствие контуров в графе G_{HP} .

6) Ограничение на долю межпроцессорных передач данных: $CR \leq CR_U$; $CR = \frac{M_p}{M}$, где M_p – количество передач данных между работами, находящимися на разных процессорах; CR_U – исходно заданное число.

Ограничения 1–5 являются основными. Они обеспечивают корректность расписания и однозначность построения временной диаграммы по списочной форме расписания. Ограничение 6 является дополнительным. В дальнейшем будем обозначать $HP \in HP_{1-5}^*$ или $HP \in HP_{1-6}^*$, если расписание HP удовлетворяет ограничениям 1–5 или 1–6 соответственно. Нижний индекс в HP_{1-5}^* и HP_{1-6}^* указывает ограничения, налагаемые на расписание.

Временная диаграмма выполнения программы. Временная диаграмма определена для расписания и модели вычислительной системы, если каждая работа назначена на процессор (из расписания), определены времена начала и завершения каждой работы. Время начала работы определяется как минимальное возможное с учетом передачи данных от работ-предшественников и порядка выполнения работ на процессорах.

Задачу построения расписаний будем рассматривать в следующем варианте постановки.

Дано: G – модель прикладной программы, HW – модель вычислительной системы, CR_U – ограничение на число межпроцессорных передач.

Требуется: построить расписание HP выполнения программы.

Минимизируемый критерий: длительность расписания, т.е. время завершения последней работы в расписании. Времена старта и завершения работ определяются по временной диаграмме расписания.

Ограничение корректности: $HP \in HP_{1-6}^*$.

3. Алгоритмы решения близких задач

При выборе классов алгоритмов для решения поставленной задачи учитывается масштабируемость алгоритмов, так как в настоящей работе графы потока данных для оценки качества результатов алгоритма содержат несколько тысяч (до 10 000) работ.

Рассматриваемая задача построения списочных расписаний представляет собой один из вариантов задачи построения многопроцессорных расписаний и является NP-трудной [17]. В связи с этим вряд ли возможно разработать полиномиальный алгоритм, находящий точное решение поставленной зада-

чи. Существующие решения, основанные на таких методах, как метод ветвей и границ и динамическое программирование, имеют плохую масштабируемость. Например, алгоритм на основе метода ветвей и границ, предложенный в [18], был применен к наборам данных с числом процессоров до 16 и графами, содержащими до 100 вершин, и продемонстрировал экспоненциальный рост времени работы.

Попытки применения методов целочисленного линейного программирования к задаче построения многопроцессорного расписания [19] привели к алгоритму, время выполнения которого на примере, содержащем 8 процессоров и граф с 30 вершинами, составляло несколько часов. При увеличении размера входных данных время выполнения существенно увеличивалось. В [20] указано, что такие алгоритмы могут быть использованы для входных данных, содержащих до 50 вершин в графе потока данных.

Для задачи построения многопроцессорного расписания было предложено множество жадных алгоритмов, многие из которых основаны на последовательной схеме планирования [10, 21, 22]. В такой схеме работы линейно упорядочиваются в соответствии с некоторым критерием, с учетом частичного порядка, заданного графом потока данных. В полученном порядке работы выбираются для назначения на процессоры. Алгоритм, сочетающий жадные стратегии и ограниченный перебор, предложен в [3]. Качество работы жадной стратегии сильно зависит от класса исходных данных. Однако жадные алгоритмы можно использовать для генерации начального приближения для алгоритмов, перечисленных ниже.

Для решения задачи построения многопроцессорного расписания также предлагались генетические и эволюционные алгоритмы [23]. Основная проблема алгоритмов этого класса в их ограниченной масштабируемости. Например, в [24] наиболее быстрый алгоритм обрабатывал задачу с 1000 работ порядка 1,5 ч на процессоре с частотой 2 ГГц. Одна из причин такого большого времени выполнения заключается в том, что генетические и эволюционные алгоритмы работают с популяциями, содержащими десятки и даже сотни решений.

В отличие от генетических и эволюционных алгоритмов алгоритм имитации отжига работает с единственным решением. В [6] предложен алгоритм имитации отжига для задачи построения многопроцессорного списочного расписания без задержек на передачу данных. Этот алгоритм хорошо масштабируем и может быть адаптирован к рассматриваемой задаче посредством учета времени передачи данных при вычислении длительности расписания. Для решения рассматриваемой задачи в качестве основы был выбран именно этот алгоритм.

Муравьиные алгоритмы также используются для построения многопроцессорных расписаний. В [25] эксперименты были ограничены наборами данных с 11 процессорами и 120 вершинами. Авторы работы [25] делают вывод: чтобы гарантировать сходимость муравьиного алгоритма, необходимо точно

настроить его многочисленные параметры, что серьезно усложняет применение его к задаче с разными размерами графов.

По результатам обзора не было найдено работ, в которых описаны алгоритмы, поддерживающие ограничение по числу межпроцессорных передач. Поэтому выбранный алгоритм нуждается в доработке в части процедуры выбора начального приближения и операций, применяемых к расписанию.

4. Алгоритм имитации отжига

Введем следующие обозначения и понятия:

- $T = \frac{T_0}{\log(1 + (i + 1))}$ — схема изменения температуры, где T_0 — начальная температура, i — номер текущей итерации (схема Больцмана);
- $F(HP)$ — функция оценки качества расписания HP ;
- HP_{best} — лучшее найденное корректное расписание, причем $HP_{best} \in HP_{1-6}^*$;
- критерий останова — выполнение заданного числа итераций без изменения лучшего корректного решения.

Алгоритм имитации отжига построен по следующей схеме:

1) Инициализация. Задать начальное корректное расписание $HP_0 \in HP_{1-6}^*$ и считать его текущим: $HP = HP_0$. Вычислить длительность полученного расписания HP . Сохранить начальное расписание как лучшее найденное на данный момент: $HP_{best} = HP$.

2) Применить операцию преобразования расписания к HP и получить новое расписание HP' . Вычислить длительность расписания HP' . Если длительность расписания HP' является меньшей, чем у ранее сохраненного HP_{best} , и $HP' \in HP_{1-6}^*$, то сохранить его как лучшее найденное: $HP_{best} = HP'$.

3) Найти изменение функции оценки качества расписания $\Delta F = F(HP') - F(HP)$:

(i) Если $\Delta F \leq 0$ (т.е. нашлось расписание лучше, чем текущее), то новое расписание становится текущим: $HP = HP'$.

(ii) Если $\Delta F > 0$, то с вероятностью $e^{-\frac{\Delta F}{T}}$ принять новое расписание в качестве текущего.

4) Повторить заданное число раз шаги 2 и 3 без изменения текущей температуры.

5) Если критерий останова выполнен, то завершить работу алгоритма.

6) Изменить текущее значение температуры T в соответствии с выбранной схемой и перейти к шагу 2.

Инициализация. Обычно начальное расписание строится с помощью различных жадных схем. Однако с их помощью тяжело построить расписание, которое бы удовлетворяло ограничению на количество межпроцессорных пе-

редач, поскольку после построения частичного расписания со сбалансированным распределением работ по процессорам жадный алгоритм заходит в тупик и не может добавить в расписание новые работы без нарушения этого ограничения.

Поэтому первоначально был использован простой вариант построения начального расписания, гарантирующий выполнение этого ограничения, — назначение всех работ на один процессор. Таким образом, $CR = 0$, так как межпроцессорные передачи отсутствуют. Порядок работ на процессоре определяется топологической сортировкой графа G . То есть между работами установлен такой порядок, чтобы любое ребро графа G , соответствующее передаче данных, вело от работы с меньшим номером к работе с большим номером. Построенное этим способом начальное приближение по результатам экспериментов не приводило к решению, близкому к оптимуму, при числе процессоров $S \geq 10$. Вместо этого происходило сбалансированное распределение работ на меньшее число процессоров, после чего алгоритм имитации отжига не мог улучшить данное решение.

Для решения проблемы сбалансированного распределения работ по процессорам при построении начального расписания было использовано программное средство METIS [26], включающее в себя реализацию алгоритма разбиения графов на заданное число подграфов, минимизирующего число ребер между полученными подграфами. Если подать на вход алгоритму граф потока данных G , выбрать число разбиений, равное числу процессоров, и сопоставить каждый полученный подграф процессору, то получится распределение работ по процессорам с минимизацией числа межпроцессорных передач.

Различия в размерах (количестве вершин) подграфов управляются параметром $ufactor$ [27], ограничивающим отношение максимального размера подграфа к его среднему размеру. Увеличивая этот параметр, всегда возможно достичь необходимого отношения числа ребер между подграфами к общему числу ребер, т.е. удовлетворить заданному ограничению на количество межпроцессорных передач за счет меньшей сбалансированности распределения работ по процессорам.

После построения начального распределения работ по процессорам при помощи METIS порядок выполнения работ на процессорах определяется по следующей схеме. Для каждой работы по алгоритму ALAP [28] определяется наиболее позднее время ее завершения. Это время может быть вычислено, поскольку для работ определено их распределение по процессорам, а значит, известны и задержки на передачу данных между работами. Работы упорядочиваются по возрастанию наиболее позднего времени завершения. В соответствии с полученным порядком происходит выбор работ для включения в расписание. Если для очередной работы обнаружено, что она может быть поставлена раньше какой-то из уже включенных в расписание работ на том же процессоре без нарушения условий HP_{1-6}^* , она будет помещена перед этой

работой, в противном случае работа ставится в конец расписания на процессоре.

Операции преобразования расписания. Для представления расписания используется ярусная форма наибольшей высоты [6] с указанием привязки работ к процессорам. Эта форма в ходе выполнения алгоритма переводится во временную диаграмму для расчета времени работы программы с заданным расписанием (асимптотическая сложность перевода такого представления во временную диаграмму — $O(M)$). Ярусная форма наибольшей высоты характеризуется тем, что на каждом ярусе находится ровно одна работа и для любой работы p_i все работы-предшественники расположены на более высоких ярусах, чем p_i .

Для изменения расписания использовалась функционально полная система операций преобразования расписаний $\{O_1, O_2\}$, описанная в [29]. При представлении расписания в ярусной форме максимальной высоты операции выглядят следующим образом:

- 1) $O_1(p_i, sp_m \rightarrow sp_k)$ — операция изменения привязки работы. Переносит работу p_i с процессора sp_m на процессор sp_k на тот же ярус;
- 2) $O_2(p_i, sp_m, c)$ — операция изменения порядка работ на процессоре. Перемещает работу p_i на ярус c , сдвигая остальные работы в сторону изначальной позиции работы p_i на процессоре.

Сложность операции O_1 равна $O(1)$, а операции O_2 — $O(N)$.

Функция оценки качества расписания. Состоит из двух слагаемых: первое отвечает за длительность полученного расписания, второе — за превышение ограничения CR :

$$F(HP) = K \frac{Time(HP)}{\sum_1 C_i + N \max_{i,j=1\dots S} D_{ij}} + (1 - K)CR_{above},$$

где $Time(HP)$ — длительность полученного расписания, $CR_{above} = CR - CR_U$, если $CR > CR_U$, иначе $CR_{above} = 0$.

Знаменатель дроби в первом слагаемом отвечает за нормировку длительности расписания. Это выражение является верхней оценкой длительности расписания.

В [29] сформулирована и доказана следующая

Теорема 1. Если $HP_1 \in HP_{1-5}^*$ и $HP_2 \in HP_{1-5}^*$ — произвольные корректные варианты расписания, то существует конечная цепочка операций $\{O_i\}_{i=1}^K$, $O_i \in \{O_1, O_2\}$, переводящая расписание HP_1 в HP_2 , такая что все K промежуточных расписаний являются корректными ($HP_t \in HP_{1-5}^*$) и $K \leq 4N$, где N — количество работ.

Введенные выше операции изменения расписания могут преобразовывать его так, что получившееся расписание уже не будет удовлетворять ограничению на количество межпроцессорных передач (HP_{1-6}^*). Возможность рас-

смагивать расписания с невыполненным ограничением необходима, так как в общем случае множество решений не является связным относительно операций, не нарушающих ограничение $CR \leq CR_U$. Добавление штрафа за его нарушение предотвращает слишком большое отклонение алгоритма от множества корректных решений. Из всего вышесказанного для данного алгоритма справедливо следующее

Утверждение 1. Используемая в алгоритме система операций преобразования расписаний позволяет перейти от произвольного начального приближения $HP_1 \in HP_{1-6}^$ к оптимальному расписанию $HP_2 \in HP_{1-6}^*$ за $K \leq 4N$ шагов применения операций, причем для каждого из промежуточных расписаний HP_t верно, что $HP_t \in HP_{1-5}^*$.*

5. Экспериментальное исследование свойств алгоритма

Для исследования использовались различные наборы входных данных с известным оптимумом, удовлетворяющие дополнительному ограничению с $CR_U = 0,4$. Число процессоров S варьировалось от 2 до 64; число работ N — от 10 до 1000 с шагом 100 и от 1000 до 10 000 с шагом 1000; плотность графа, выражающаяся в отношении числа ребер к числу вершин (M/N) в графе G , для всех наборов входных данных примерно равнялась 5; времена выполнения работ варьировались от 1 до 10; время передачи данных между процессорами — от 1 до 3, в зависимости от пары процессоров. В качестве критерия останова алгоритма было установлено 10 000 итераций без изменения лучшего корректного решения. Наборы с отношением $N/S < 10$ не рассматривались.

Набор входных данных, для которого известен оптимум (т.е. длительность оптимального расписания), формируется по следующей схеме. Предполагается, что каждый процессор непрерывно (без простоев) занят от момента 0 до заданного момента L , который и будет длительностью оптимального расписания. Для каждого процессора интервал его занятости $[0; L]$ разделяется на части случайной длительности, выбираемой между заданными минимальной и максимальной длительностью (в рассматриваемом случае между 1 и 10). Эти части являются работами, размещенными на данный процессор, и для каждой из них по построению определено время старта. Затем случайным образом добавляются передачи данных между работами (т.е. пары <работа-отправитель, работа-получатель>) так, чтобы время старта работы-получателя было не меньше, чем время завершения работы-отправителя плюс длительность передачи данных между конкретной парой процессоров; при добавлении передач данных контролируется выполнение условия $CR \leq CR_U$. Затем по расписанию восстанавливается граф потока данных; для этого имеются все необходимые данные: длительность работ, наличие и длительность передач данных между работами. Значение L выбирается так, чтобы с учетом минимальной и максимальной допустимой длительности работ было возможно деление совокупности интервалов занятости всех процессоров на суммарное количество частей, равное требуемому коли-

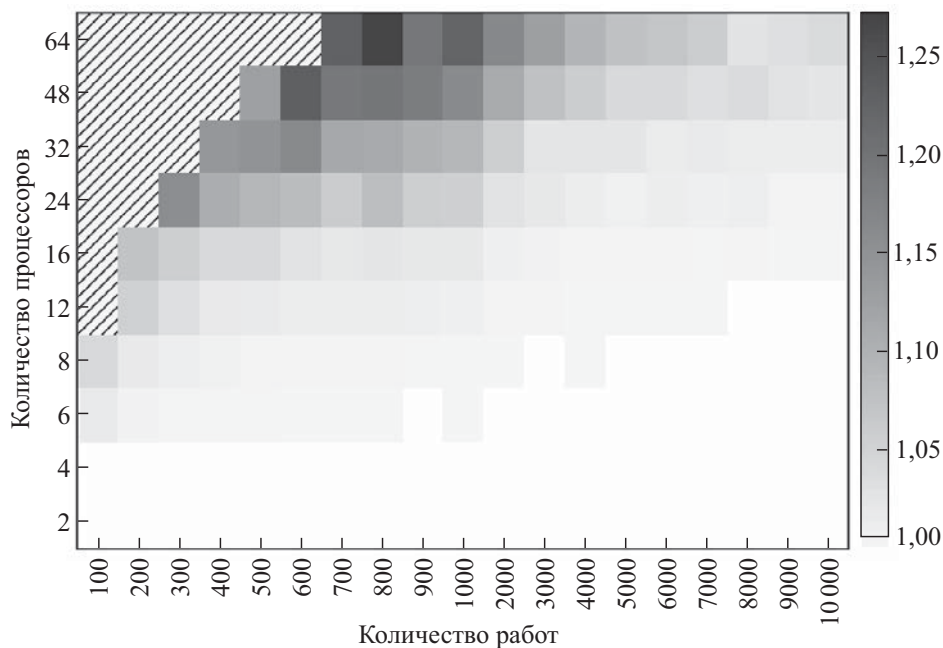


Рис. 1. Тепловая карта отношения длительности полученного расписания к длительности оптимального расписания.

честву работ. Передачи данных между работами добавляются до достижения требуемой плотности графа потока данных.

Утверждение 2. Расписание, по которому согласно описанной схеме «восстанавливается» граф потока данных, является оптимальным, потому что оно не содержит простоев и для каждого процессора интервал занятости один и тот же: $[0; L]$.

Поскольку для каждого использованного в экспериментах набора входных данных известна длительность оптимального расписания, для оценки качества алгоритма было выбрано отношение длительности полученного им расписания к длительности оптимального расписания. Это отношение всегда больше 1 и чем оно ниже, тем лучше результат работы алгоритма. На рис. 1 изображена тепловая карта, отображающая это отношение. По горизонтальной оси располагается число работ, по вертикальной оси — число процессоров. Отношение отображается градациями серого, соответствующая шкала изображена справа от графика. Алгоритм запускался на каждом наборе входных данных 5 раз. Результат усреднялся.

На рис. 2 показана та же информация в виде графиков. Каждой линии соответствуют наборы входных данных для фиксированного числа процессоров. По горизонтальной оси указано число работ, по вертикальной оси — отношение длительности полученного расписания к длительности оптимального расписания.

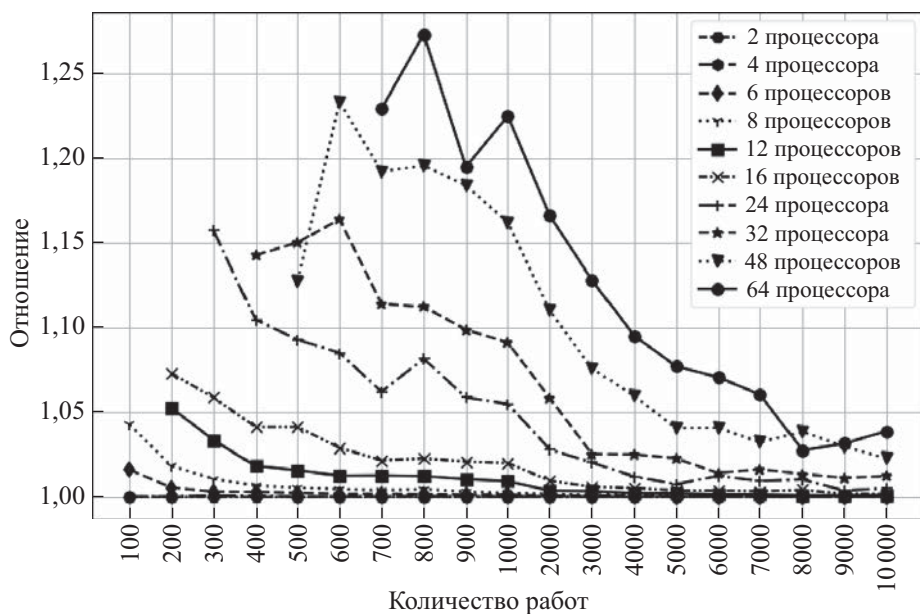


Рис. 2. Графики отношения длительности полученного расписания к длительности оптимального расписания.

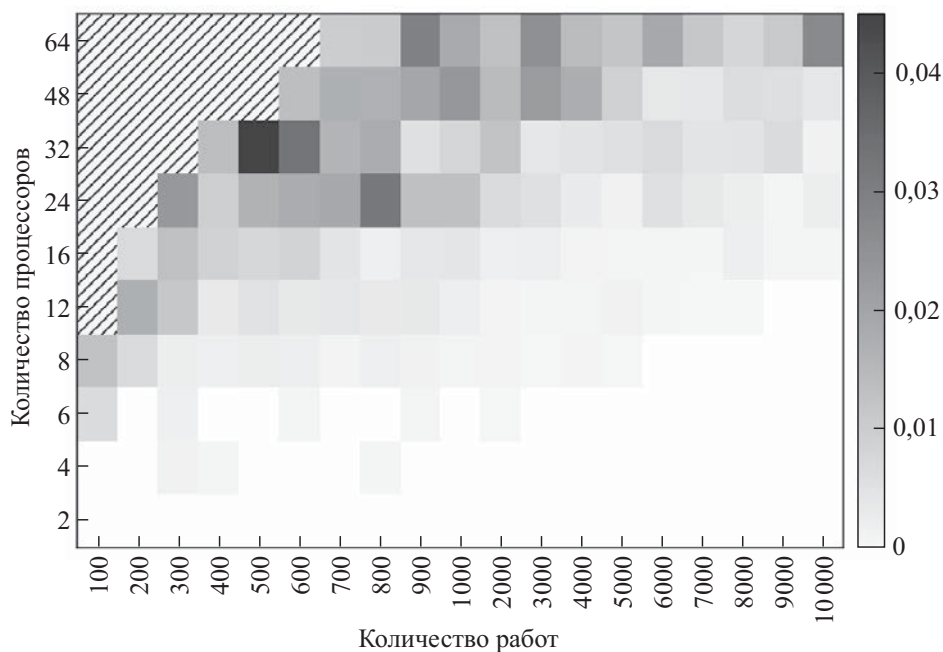


Рис. 3. Тепловая карта среднеквадратического отклонения отношения длительности полученного расписания к длительности оптимального расписания.

По результатам экспериментального исследования предлагаемого алгоритма отношение длительности построенного расписания к оптимуму почти всегда меньше 1,1, однако на отдельных наборах данных превышает это значение. Такое высокое отношение наблюдается на наборах данных с низким числом работ и высоким числом процессоров. Это можно объяснить тем, что при такой конфигурации среднее число работ на процессоре невелико и при переносе одиночной работы между процессорами длительность расписания сильно возрастает; вследствие этого измененное расписание с высокой вероятностью не принимается, что приводит к малому количеству переносов работ между процессорами, особенно при сниженной температуре. При увеличении числа работ на наборах данных с большим числом процессоров качество полученного решения улучшается.

Поскольку предлагаемый алгоритм является рандомизированным, необходимо исследовать его стабильность. На тепловой карте (рис. 3) показано среднеквадратическое отклонение отношения длительности полученного расписания к длительности оптимального расписания.

По тепловой карте на рис. 3 можно сделать вывод о высокой стабильности алгоритма. Для большинства наборов входных данных среднеквадратическое отклонение не поднимается выше 0,02. Более высокие (выше 0,03) значения отклонения на большом числе процессоров и малом числе задач возникают по тем же причинам, что и относительно невысокое качество решения в этой же ситуации.

Эксперименты выполнялись на компьютере с процессором Intel Core i5-8250U, 1,6 ГГц. Ни на одном наборе данных время выполнения алгоритма не превышало 6 мин. Следует отметить, что алгоритм демонстрирует приемлемое время выполнения и высокую точность в том числе на наборах входных данных, существенно превосходящих по масштабу те наборы, на которых проводилось исследование в статьях, рассмотренных в обзоре.

6. Заключение

Разработан алгоритм имитации отжига для построения многопроцессорных списочных расписаний минимальной длительности с дополнительным ограничением на количество передач между процессорами. Проблема выбора начального распределения работ по процессорам, удовлетворяющего дополнительному ограничению и являющегося сбалансированным (что существенно для длительности расписания), решена с использованием алгоритма из библиотеки METIS.

Проведенное экспериментальное исследование показало высокую точность и стабильность разработанного алгоритма, в особенности на наборах данных с достаточно большим (от 3000 до 10 000) количеством работ. Важным преимуществом алгоритма по сравнению с алгоритмами, рассмотренными в обзоре, является его высокая масштабируемость.

Разработанный алгоритм может применяться для построения расписаний в многопроцессорных вычислительных системах с ограниченными ресурсами межпроцессорной сети, например в бортовых и телекоммуникационных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2000.
2. Теория расписаний и вычислительные машины / Под ред. Э.Г. Коффмана. М.: Наука, 1984.
3. *Костенко В.А.* Алгоритмы комбинаторной оптимизации, сочетающие жадные стратегии и ограниченный перебор // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 2. С. 48–56.
Kostenko V.A. Combinatorial Optimization Algorithms Combining Greedy Strategies with a Limited Search Procedure // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2017. V. 56. No. 2. P. 218–226. <https://doi.org/10.1134/S1064230717020137>
4. *Lawler E.L., Wood D.E.* Branch-and-Bound Methods: A Survey // Oper. Res. 1966. V. 14. No. 4. P. 699–719. <https://doi.org/10.1287/opre.14.4.699>
5. *Fujita S.* A Branch-and-Bound Algorithm for Solving the Multiprocessor Scheduling Problem with Improved Lower Bounding Techniques // IEEE Transact. Comput. 2011. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2016.07.216>
6. *Калашников А.В., Костенко В.А.* Параллельный алгоритм имитации отжига для построения многопроцессорных расписаний // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 3. С. 133–142.
Kalashnikov A.V., Kostenko V.A. A Parallel Algorithm of Simulated Annealing for Multiprocessor Scheduling // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2008. V. 47. No 3. P. 455–463. <https://doi.org/10.1134/S1064230708030155>
7. *Зорин Д.А., Костенко В.А.* Алгоритм имитации отжига для решения задач построения многопроцессорных расписаний // АиТ. 2014. № 10. С. 97–110.
Zorin D.A., Kostenko V.A. Simulated annealing algorithm in problems of multiprocessor scheduling // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 10. P. 1790–1801. <https://doi.org/10.1134/S0005117914100063>
8. *Holland J.N.* Adaptation in Natural and Artificial Systems / Ann Arbor, Michigan: Univ. of Michigan Press, 1975.
9. *Скобцов Ю.А.* Основы эволюционных вычислений. Донецк: ДонНТУ, 2008.
10. *Akbari M., Rashidi H.* An Efficient Algorithm for Compile-Time task scheduling problem on heterogeneous computing systems // Int. J. Academ. Res. 2015. V. 7. No. 1. P. 192–202. <https://doi.org/10.7813/2075-4124.2015/7-1/A.45>
11. *Rzadka K., Sereczynski F.* Heterogeneous Multiprocessor Scheduling with Differential Evolution // IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2005. V. 3. P. 2840–2847. <https://doi.org/10.1109/CEC.2005.1555051>
12. *Dorigo M.* Optimization, Learning and Natural Algorithms // Ph.D. Thesis. Dipartimento di Elettronica. Milano: Politecnico Di Milano, 1992.
13. *Штовеба С.Д.* Муравьиные алгоритмы: теория и применение // Программирование. 2005. № 4. С. 1–15.

- Shtovba S.D.* Ant Algorithms: Theory and Applications // Program. Comput. Software. 2005. V. 31. No. 4. P. 167–178. <https://doi.org/10.1007/s11086-005-0029-1>
14. *Myszkowski P.B., Skowronski M.E., Olech L.P. et al.* Hybrid ant colony optimization in solving multi-skill resource-constrained project scheduling problem // Soft Comput. 2015. V. 19. No. 12. P. 3599–3619. <https://doi.org/10.1007/s00500-014-1455-x>
 15. *Расстригин Л.А.* Статистические методы поиска. М.: Наука, 1968.
 16. *Шахбазян К.В., Тушкина Т.А.* Обзор методов составления расписаний для многопроцессорных систем // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1975. Т. 54. С. 229–258.
 17. *Garey M.R., Johnson D.S.* Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. W.H. Freeman & Co., 1979.
 18. *Rahman M.* Branch and Bound Algorithm for Multiprocessor Scheduling // M.S. Thesis, Dept. Comput. Eng., Dalarna Univ., Sweden, 2009.
 19. *Venugopalan S., Sinnens O.* Optimal Linear Programming Solutions for Multiprocessor Scheduling with Communication Delays // Proc. ICA3PP 2012: Algorithms and Architectures for Parallel Processing, 2012. P. 129–138. <https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2016.03.003>
 20. *Mallach S.* Improved Mixed-Integer Programming Models for the Multiprocessor Scheduling Problem with Communication Delays // J. Combinat. Optim. 2018. V. 36. P. 871–895. <https://doi.org/10.1007/s10878-017-0199-9>
 21. *Hwang R., Gen M., Katayama H.* A Comparison of Multiprocessor Task Scheduling Algorithms with Communication Costs // Comput. Oper. Res. 2008. V. 35. P. 976–993. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2006.05.013>
 22. *Красовский Д.В.* Алгоритмы решения задачи составления оптимального расписания без прерываний // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, 05.13.18 Москва, 2007, 109 с.
 23. *da Silva E.C., Gabriel P.H.R.* Genetic Algorithms and Multiprocessor Task Scheduling: A Systematic Literature Review // Proc. ENIAC 2019. P. 250–261. <https://doi.org/10.5753/eniac.2019.9288>
 24. *Sheikh H.F., Ahmad I., Fan D.* An Evolutionary Technique for Performance-Energy-Temperature Optimized Scheduling of Parallel Tasks on Multi-Core Processors // IEEE Trans. Parallel Distributed Syst., 2016. V. 27. No. 3. P. 668–681. <https://doi.org/10.1109/TPDS.2015.2421352>
 25. *Lo S.-T., Chen R.-M., Huang Y.-M., Wu C.-L.* Multiprocessor System Scheduling with Precedence and Resource Constraints Using an Enhanced Ant Colony System // Expert Syst. Appl. 2008. V. 34. No. 3. P. 2071–2081. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2007.02.022>
 26. METIS — Serial Graph Partitioning and Fill-reducing Matrix Ordering: [Электронный ресурс]. URL: <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/overview> (Дата обращения: 21.11.2022).
 27. METIS. A Software Package for Partitioning Unstructured Graphs, Partitioning Meshes, and Computing Fill-Reducing Orderings of Sparse Matrices Version 5.1.0: [Электронный ресурс]. URL: <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/fetch/sw/metis/manual.pdf> (Дата обращения: 21.11.2022).

28. *Wu M.-Y., Gajski D.D.* Hypertool: A programming aid for message-passing systems // IEEE Trans. Parallel Distributed Syst. 1990. V. 1. P. 330–343.
<https://doi.org/10.1109/71.80160>
29. *Костенко В.А.* Задача построения расписания при совместном проектировании аппаратных и программных средств // Программирование. 2002. № 3. С. 64–80.
Kostenko V.A. The Problem of Schedule Construction in the Joint Design of Hardware and Software // Program. Comput. Software. 2002. V. 28. No 3. P. 162–173.
<https://doi.org/10.1023/A:1015636230903>

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 19.12.2022

После доработки 13.04.2023

Принята к публикации 09.06.2023

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. И.Н. СИНИЦЫН, д-р техн. наук (sinitsin@dol.ru),
Ю.П. ТИТОВ, канд. техн. наук (kalengul@mail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет);
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва)

УПРАВЛЕНИЕ НАБОРАМИ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ МУРАВЬИНЫХ КОЛОНИЙ

Рассматриваются модификация и применение метода муравьиных колоний для задачи направленного перебора значений параметров системы при выполнении расчетных многократных вычислений. Взаимодействие с пользователем позволяет останавливать процесс полного перебора наборов значений параметров, а применение модификации метода муравьиных колоний позволит рассмотреть рациональные наборы на ранних итерациях. Если пользователь не завершает работу алгоритма, то предложенные модификации позволяют перебрать все решения методом муравьиных колоний. Для модификации метода муравьиных колоний предложены новая вероятностная формула и различные алгоритмы метода муравьиных колоний, позволяющие для каждого агента находить новый набор значений параметров. Оптимальным алгоритмом, по результатам исследований, является применение повторного бесконечного циклического поиска нового решения. Данная модификация позволяет рассмотреть все решения и при этом найти все оптимальные решения среди первых 5% рассмотренных решений.

Ключевые слова: метод муравьиных колоний, параметрический граф, изменение порядка следования, вычислительный кластер, оптимизация гиперпараметров.

DOI: 10.31857/S000523102308010X, EDN: HDNFSR

1. Введение

В настоящее время в связи с развитием вычислительных кластеров множество расчетных и оптимизационных задач переносится с человека-эксперта на вычислительные машины. Для таких систем возникают задачи нахождения рациональных значений параметров для решения расчетной задачи, называемые оптимизацией гиперпараметров [1]. Среди алгоритмов оптимизации

гиперпараметров выделяют Байесовский оптимизатор, позволяющий на основе гипотез и апостериорной информации находить закономерности влияния значений отдельных параметров (и различных комбинаций) на критерии эффективности [2]. Для многокритериальных и многоэкстремальных задач часто необходимо рассмотрение всех наборов значений параметров, обычно методом полного перебора. В работе рассматривается возможность применения метода муравьиных колоний для решения задачи направленного перебора наборов гиперпараметров перед отправкой на вычислительную систему. За счет взаимодействия с пользователем возможна остановка работы метода до рассмотрения всех наборов значений параметров при нахождении удовлетворяющего пользователя набора. Направленный перебор методом муравьиных колоний позволит рассмотреть рациональные наборы значений параметров как можно раньше, но в случае неудовлетворенности пользователя результатами перебрать все наборы значений.

Метод муравьиных колоний первоначально разрабатывался для решения задачи коммивояжера [3, 4]. Современные исследования позволяют применять метод муравьиных колоний для поиска непрерывной оптимизации. Поиск методами CACO (ContinuousAntColonyOptimization — непрерывная оптимизация колонией муравьев) [5], ACOR (Ant Colony Optimization for continuous domain) [6] и CIAC (ContinuousInteractingAntColony — непрерывно взаимодействующая колония муравьев) [7, 8] не предполагает использования графа и активно исследовался, в том числе и российскими исследователями [9, 10]. Исследования описывают возможность применения метода муравьиных колоний для решения задач на графах: задачи о назначении с нечетким временем выполнения [11, 12], задачи нахождения оптимальных маршрутов для группы коммивояжеров [13, 14], задачи поддержки процессов поставок запасных частей [15]. В мировом сообществе активно исследуются параметрические задачи, связанные с поиском оптимального набора параметров, классификации, выявления зависимостей и т.д. [16–19]. Для подобных задач происходит создание специальной структуры графа. Представленные методы и модификации метода муравьиных колоний предназначены для поиска приближенных, рациональных решений. Обычно все агенты (муравьи) должны сойтись к одному решению. Поиск новых решений осуществляется путем мультистарта [9].

Для направленного перебора значений параметров необходимо не сойтись к одному решению (набору значений параметров), а последовательно рассматривать новые решения до остановки работы метода пользователем или рассмотрения всех возможных решений. В работе предложены модификации алгоритма для рассмотрения всех решений, а не сходимости к одному. Предложенный подход позволяет решать задачи с векторным критерием оптимальности и многомодальными целевыми функциями без повторного запуска алгоритма. При этом сохраняется свойство алгоритмов оптимизации: наискорейшее нахождение оптимальных решений.

2. Модели и методы

В основе метода муравьиных колоний лежит вероятностный поиск дуги в графе в соответствии с формулой

$$(1) \quad P_{ij,k}(t) = \frac{\tau_{ij}^{\alpha} \cdot \mu_{ij,t}^{\beta}}{\sum_{z \in J_{i,k}} \left(\tau_{iz}^{\alpha} \cdot \mu_{iz,t}^{\beta} \right)}.$$

С помощью (1) определяется вероятность перехода агента из текущей вершины i в вершины из множества $J_{i,k}$ на итерации t . По результатам вычислений определяется вероятность перехода в вершину j для k -го агента. В (1) учитывается информация о длине дуги τ_{ij}^{α} (удаленность) и некотором весе $\mu_{ij,t}^{\beta}$ (феромоне). Значение τ_{ij}^{α} является фиксированным и не зависит от номера итерации t . Количество весов $\mu_{ij,t}^{\beta}$ изменяется между итерациями, обновляя состояние графа, внешнюю среду для движения агентов.

Для определения значений параметров системы (решения) предлагается представить наборы значений в виде параметрического графа. Каждое конкретное значение одного параметра представляет вершину графа. Все значения одного параметра объединяются в слои. Из каждой вершины одного слоя имеется дуга в каждую вершину следующего слоя. Слои вершин расположены в определенном порядке, что позволяет уменьшить количество дуг в графе. Пример параметрического графа приведен на рис. 1. Подобные графы встречались в [13, 15, 18–21].

Веса (феромон) в подобном графе заносятся не на дуги, а на вершины. В результате дуги являются фиктивными, и подобный параметрический граф может быть представлен в виде множества слоев (параметров) и множества вершин (значений параметра) [22].

Для параметрического графа в вероятностной формуле (1) значение τ_{ij}^{α} может быть задано только на основе априорной информации от эксперта, но в общем виде данный параметр не может быть определен. При использовании в вероятностной формуле одного сомножителя увеличивается стагнация

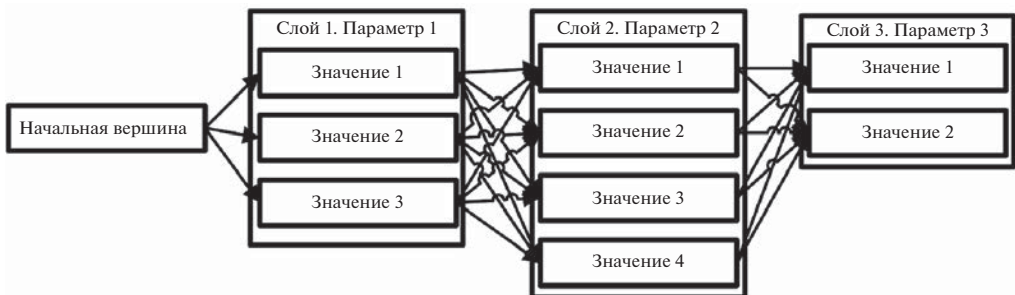


Рис. 1. Схема структуры параметрического графа.

процесса поиска решения. При этом алгоритм сходится к первому хорошему решению и не продолжает поиск оптимального.

Для решения проблемы стагнации можно производить «сброс» параметрического графа, перевод состояния вершин графа в начальное состояние или модифицировать вероятностную формулу

$$(2) \quad P_{ij,k}(t) = \frac{k1 \cdot \mu_{norm\,ij,t}^{\alpha} + k2 \cdot \left(\frac{1}{kol(t)_{ij,t}}\right)^{\beta} + k3 \cdot \left(\frac{kol(t)_{ij,t}}{MaxKol_{j,t}}\right)^{\gamma}}{\sum_{z \in J_{i,k}} \left(k1 \cdot \mu_{norm\,iz,t}^{\alpha} + k2 \cdot \left(\frac{1}{kol(t)_{iz,t}}\right)^{\beta} + k3 \cdot \left(\frac{kol(t)_{iz,t}}{MaxKol_{z,t}}\right)^{\gamma}\right)}.$$

Формула (2) представляет собой линейную свертку (а не мультипликативную, как в (1)) трех слагаемых и весовых коэффициентов. Первое слагаемое $\mu_{norm\,ij,t}^{\alpha}$ определяется количеством весов у i -й вершины j -го параметра (слоя параметрического графа) на итерации t . Для применения данного параметра во взвешенной сумме необходимо использовать нормализованное значение. Второе слагаемое $\left(\frac{1}{kol(t)_{ij,t}}\right)^{\beta}$ определяется количеством посещений агентами i -й вершины j -го параметра за время работы алгоритма. Данное слагаемое увеличивает вероятность посетить вершину, которая редко присутствует в решениях и позволяет избегать стагнации на ранних итерациях метода муравьиных колоний. В третьем слагаемом $\left(\frac{kol(t)_{ij,t}}{MaxKol_{j,t}}\right)^{\gamma}$ учитывается максимальное количество возможных посещений вершины — значения $MaxKol_{j,t}$ для параметра j на итерации t . Так как в параметрическом графе на каждом слое необходимо выбрать одну вершину (одно значение параметра), то можно вычислить общее количество решений, наборов значений параметров. Общее количество решений может быть вычислено как произведение количества вершин в каждом слое. Максимальное количество решений, в которых может содержаться конкретная вершина параметрического графа, вычисляется как отношение общего количества решений и количества вершин в данном слое, т.е. для каждой вершины слоя j значение $MaxKol_{j,t}$ будет одинаковым. Третье слагаемое на поздних итерациях позволяет увеличить вероятность выбора вершины, для которой рассмотрено большинство вариантов решений. Если для вершины рассмотрены все возможные решения, то из вероятностного поиска данную вершину можно исключить. Аддитивная свертка позволяет компенсировать значения слагаемых. Вершины с большим количеством весов и частыми посещениями (часто рассматриваемые вершины) могут быть компенсированы вершинами с небольшим количеством посещений (редкие вершины) или вершинами, для которых рассмотрены практически все решения.

Другой особенностью модификации алгоритма является необходимость взаимодействия с внешней вычислительной системой. Для таких модификаций необходимо хранить состояние системы, вычисленное для конкретного решения. Если метод муравьиных колоний повторно находит решение, то данное решение повторно не отправляется на вычислитель, а значение целевой функции берется из Хэш-таблицы [15, 21].

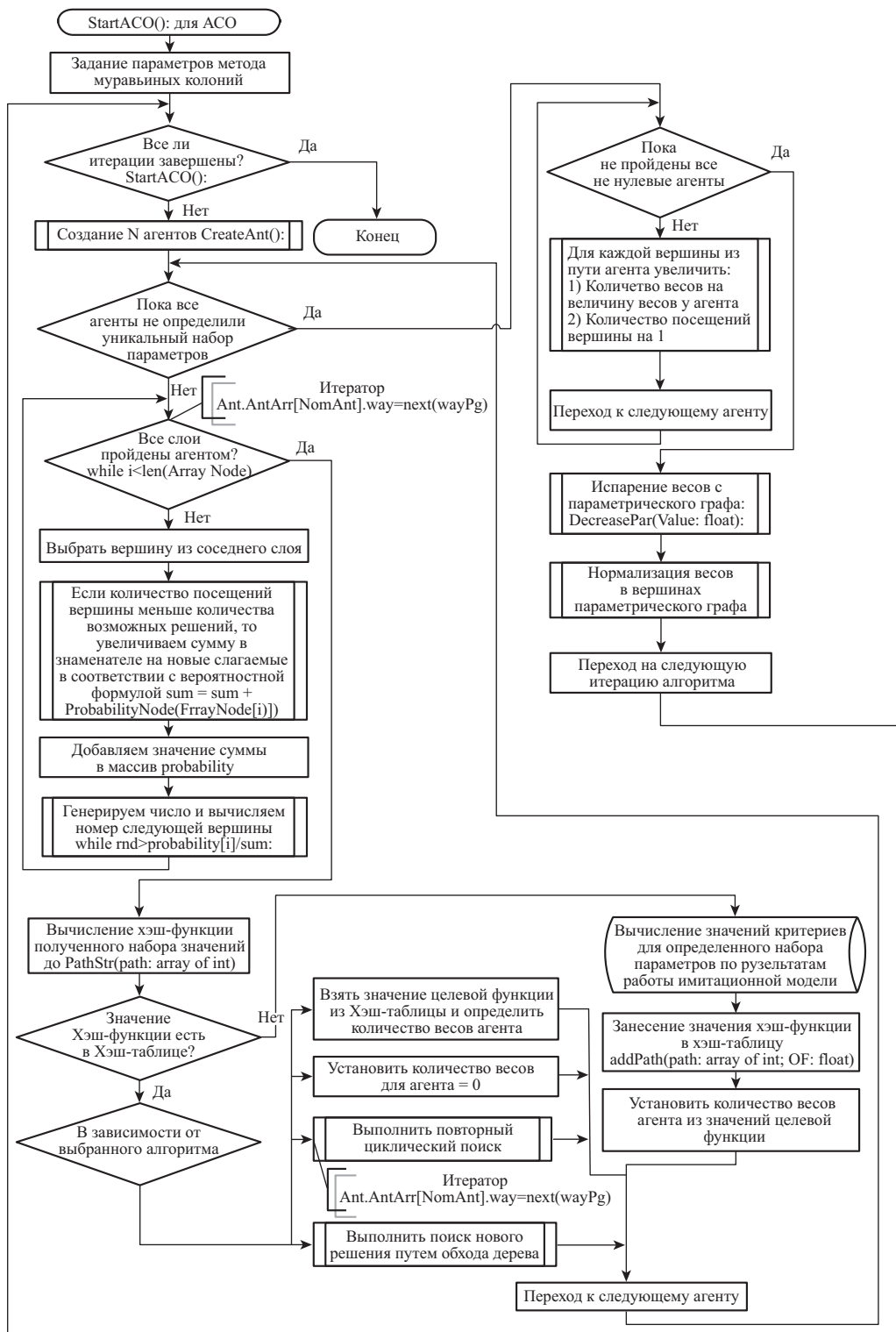


Рис. 2. Схема алгоритма модифицированного метода муравьиных колоний.

Для рассматриваемого алгоритма важен поиск нового решения на каждой итерации и поэтому, если решение уже имеется в Хэш-таблице, возможны различные действия:

1. Используя значения целевой функции из Хэш-таблицы, занести веса, как в оригинальном алгоритме.
2. Игнорировать агента. Агент не заносит веса на параметрический граф.
3. Повторный поиск нового, еще не рассмотренного на вычислителе, решения методом муравьиных колоний с ограничением на количество итераций. Если за установленное количество итераций не найдено новое решение, то агент игнорируется.
4. Повторный поиск нового, еще не рассмотренного на вычислителе, решения методом муравьиных колоний неограниченным количеством итераций. Ограничение в пункте № 3 может решить проблему стагнации.
5. Повторный поиск нового решения другим алгоритмом. Рассматривалась возможность обхода параметрического графа как дерева.

Схема алгоритма предлагаемой модификации метода муравьиных колоний приведена на рис. 2.

3. Эксперимент

Задачами направленного перебора значений параметров являются:

- перебор всех, без исключения, наборов значений параметров;
- наискорейшее получение оптимального набора значений параметра.

Можно заметить, что обе задачи противоречат друг другу, так как среди всех наборов значений параметров всегда будет наилучший. Но так как система взаимодействует с вычислителем и пользователем в режиме реального времени, то имеется возможность остановки программы пользователем, если найдено удовлетворяющее его решение. Также следует отметить возможность использования векторного критерия, переводящего задачу в область поддержки принятия решений и многокритериальной оптимизации [20].

Эффективность модификаций метода муравьиных колоний определяется двумя основными оценками:

- возможность алгоритма рассмотреть все решения. Определяется значением критерия: «оценка вероятности найти новое решение агентом». Данная оценка вычисляется путем отношения количества найденных решений за время работы алгоритма на общее количество рассмотренных решений;
- скорость нахождения оптимального решения. Определяется значением критерия: «оценка математического ожидания номера итерации, на котором данное решение было найдено».

Проведение экспериментов осуществлялось на программном обеспечении ASCO Cluster, написанном на языке Python. В качестве тестовых данных рассматривалось большинство из бенчмарков, взятых из [22, 23], и тестовые графы большой размерности [21]. Структура графа большой размерности приведена на рис. 3. Представленный граф большой размерности содержит бо-

Таблица 1. Оценка математического ожидания времени (в сек.) поиска решения одним агентом

Кол-во итер.	АСОСС	АСОСН	АСОСНИ	АСОССу3	АСОССуI	АСОСТ
2500	$1,404 \cdot 10^{-4}$	$1,547 \cdot 10^{-4}$	$1,562 \cdot 10^{-4}$	$1,627 \cdot 10^{-4}$	$1,619 \cdot 10^{-4}$	$1,887 \cdot 10^{-4}$
5000	$1,381 \cdot 10^{-4}$	$1,517 \cdot 10^{-4}$	$1,560 \cdot 10^{-4}$	$1,648 \cdot 10^{-4}$	$1,636 \cdot 10^{-4}$	$2,745 \cdot 10^{-4}$
7500	$1,388 \cdot 10^{-4}$	$1,505 \cdot 10^{-4}$	$1,567 \cdot 10^{-4}$	$1,665 \cdot 10^{-4}$	$1,647 \cdot 10^{-4}$	$4,158 \cdot 10^{-4}$
10 000	$1,391 \cdot 10^{-4}$	$1,501 \cdot 10^{-4}$	$1,578 \cdot 10^{-4}$	$1,690 \cdot 10^{-4}$	$1,654 \cdot 10^{-4}$	$5,645 \cdot 10^{-4}$
12 500	$1,370 \cdot 10^{-4}$	$1,547 \cdot 10^{-4}$	$1,562 \cdot 10^{-4}$	$1,706 \cdot 10^{-4}$	$1,657 \cdot 10^{-4}$	$6,980 \cdot 10^{-4}$
15 000	$1,364 \cdot 10^{-4}$	$1,526 \cdot 10^{-4}$	$1,569 \cdot 10^{-4}$	$1,700 \cdot 10^{-4}$	$1,650 \cdot 10^{-4}$	$8,593 \cdot 10^{-4}$
17 500	$1,328 \cdot 10^{-4}$	$1,472 \cdot 10^{-4}$	$1,585 \cdot 10^{-4}$	$1,695 \cdot 10^{-4}$	$1,655 \cdot 10^{-4}$	$9,776 \cdot 10^{-4}$
20 000	$1,325 \cdot 10^{-4}$	$1,469 \cdot 10^{-4}$	$1,582 \cdot 10^{-4}$	$1,741 \cdot 10^{-4}$	$1,688 \cdot 10^{-4}$	$10,549 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2. Оценка вероятности найти новое решение одним агентом на итерации метода муравьиных колоний

Кол-во итер.	АСОСС	АСОСН	АСОСНИ	АСОССу3	АСОССуI	АСОСТ
2500	0,248	0,618	0,966	1,000	1,000	1,000
5000	0,122	0,381	0,951	1,000	1,000	1,000
7500	0,082	0,282	0,942	1,000	1,000	1,000
10 000	0,063	0,223	0,935	1,000	1,000	1,000
12 500	0,049	0,184	0,929	1,000	1,000	1,000
15 000	0,041	0,158	0,925	1,000	1,000	1,000
17 500	0,035	0,136	0,921	1,000	1,000	1,000
20 000	0,030	0,125	0,918	1,000	1,000	1,000

— АСОСН (ACO Cluster New) — Аналогичный классическому методу муравьиных колоний, но в (2) коэффициенты k_2 и k_3 равны 1. Вероятность перехода определяется аддитивной сверткой.

— АСОСНИ (ACO Cluster New Ignor) — В (2) коэффициенты k_2 и k_3 равны 1. Если найдено решение, уже записанное в Хэш-таблицу, то данный агент игнорируется, не заносит веса на вершины параметрического графа.

— АСОССу3 (ACO Cluster Cycle3) — В (2) коэффициенты k_2 и k_3 равны 1. Если найдено решение, уже записанное в Хэш-таблицу, то производится повторный поиск решения методом муравьиных колоний. Поиск нового решения производится циклически. Установлено ограничение на количество итераций повторного поиска, равное 3. Если за установленное количество итераций не найдено новое решение, то агент игнорируется.

— АСОССуI (ACO Cluster Cycle Infinity) — В (2) коэффициенты k_2 и k_3 равны 1. Если найдено решение, уже записанное в Хэш-таблицу, то производится повторный поиск решения методом муравьиных колоний. Поиск нового решения производится циклически без ограничения на количество итераций.

— АСОСТ (ACO Cluster Tree) — В (2) коэффициенты k_2 и k_3 равны 1. Если найдено решение, уже записанное в Хэш-таблицу, то производится по-

Таблица 3. Оценка вероятности найти новое решение одним агентом на итерации метода муравьиных колоний

Кол-во итер.	АСОСС	АСОСН	АСОСНИ	АСОССуЗ	АСОССуІ	АСОСТ
2500	0,03	0,31	0,21	0,27	0,24	0,13
5000	0,03	0,49	0,26	0,26	0,33	0,25
7500	0,03	0,50	0,35	0,30	0,32	0,24
10 000	0,02	0,60	0,22	0,32	0,31	0,33
12 500	0,03	0,78	0,32	0,37	0,42	0,27
15 000	0,02	0,71	0,31	0,44	0,37	0,31
17 500	0,03	0,74	0,28	0,39	0,44	0,26
20 000	0,03	0,72	0,41	0,46	0,43	0,39

Таблица 4. Оценка математического ожидания номера решения (в %), на котором были найдены оптимальные значения параметров

Кол-во итер.	АСОСС	АСОСН	АСОСНИ	АСОССуЗ	АСОССуІ	АСОСТ
2500	$0,801 \cdot 10^{-6}$	$2,956 \cdot 10^{-6}$	$3,404 \cdot 10^{-6}$	$2,970 \cdot 10^{-6}$	$3,299 \cdot 10^{-6}$	$2,863 \cdot 10^{-6}$
5000	$1,122 \cdot 10^{-6}$	$3,191 \cdot 10^{-6}$	$4,501 \cdot 10^{-6}$	$4,415 \cdot 10^{-6}$	$5,648 \cdot 10^{-6}$	$5,030 \cdot 10^{-6}$
7500	$1,014 \cdot 10^{-6}$	$3,378 \cdot 10^{-6}$	$5,701 \cdot 10^{-6}$	$6,137 \cdot 10^{-6}$	$5,830 \cdot 10^{-6}$	$6,838 \cdot 10^{-6}$
10 000	$1,142 \cdot 10^{-6}$	$3,667 \cdot 10^{-6}$	$5,693 \cdot 10^{-6}$	$5,337 \cdot 10^{-6}$	$5,910 \cdot 10^{-6}$	$7,704 \cdot 10^{-6}$
12 500	$0,829 \cdot 10^{-6}$	$3,770 \cdot 10^{-6}$	$6,779 \cdot 10^{-6}$	$6,320 \cdot 10^{-6}$	$8,108 \cdot 10^{-6}$	$5,269 \cdot 10^{-6}$
15 000	$0,740 \cdot 10^{-6}$	$3,741 \cdot 10^{-6}$	$8,240 \cdot 10^{-6}$	$10,174 \cdot 10^{-6}$	$8,794 \cdot 10^{-6}$	$7,834 \cdot 10^{-6}$
17 500	$1,393 \cdot 10^{-6}$	$3,845 \cdot 10^{-6}$	$8,175 \cdot 10^{-6}$	$9,221 \cdot 10^{-6}$	$11,678 \cdot 10^{-6}$	$15,820 \cdot 10^{-6}$
20 000	$1,119 \cdot 10^{-6}$	$3,936 \cdot 10^{-6}$	$9,864 \cdot 10^{-6}$	$11,344 \cdot 10^{-6}$	$10,513 \cdot 10^{-6}$	$23,592 \cdot 10^{-6}$

вторный поиск нового решения другим алгоритмом. Рассматривается обход параметрического графа как дерева.

Оценки результатов работы модификаций для параметрического графа большой размерности приведены в табл. 1–4. При применении алгоритма АСОСН количество решений, необходимых для поиска наилучшего набора значения параметров, минимально, и слабо возрастает с увеличением количества итераций (3-й столбец табл. 4). Быстрее находит решение только алгоритм АСОСС, но вероятность найти оптимальное решение алгоритмом АСОСС менее 0,1 (2-й столбец табл. 3). Алгоритм АСОСС стагнирует на ближайшем рациональном решении. Алгоритмы, использующие повторный поиск для нулевых агентов (АСОССуЗ, АСОССуІ и АСОСТ), для каждого агента находят новое решение (столбцы 5–7 табл. 2). Для 25 агентов за $2 \cdot 10^4$ итераций представленными алгоритмами будет рассмотрено $5 \cdot 10^5$ наборов значений параметров. Время, затраченное на поиск агентом решения, для большинства алгоритмов не зависит от количества итераций алгоритма (табл. 1). В результате возможно прогнозировать необходимое количество итераций для поиска всех решений. Исключением является алгоритм АСОСТ, который при увеличении количества итераций требует больше времени на поиск пути одним агентом. По возрастанию времени поиска агентом решения можно про-

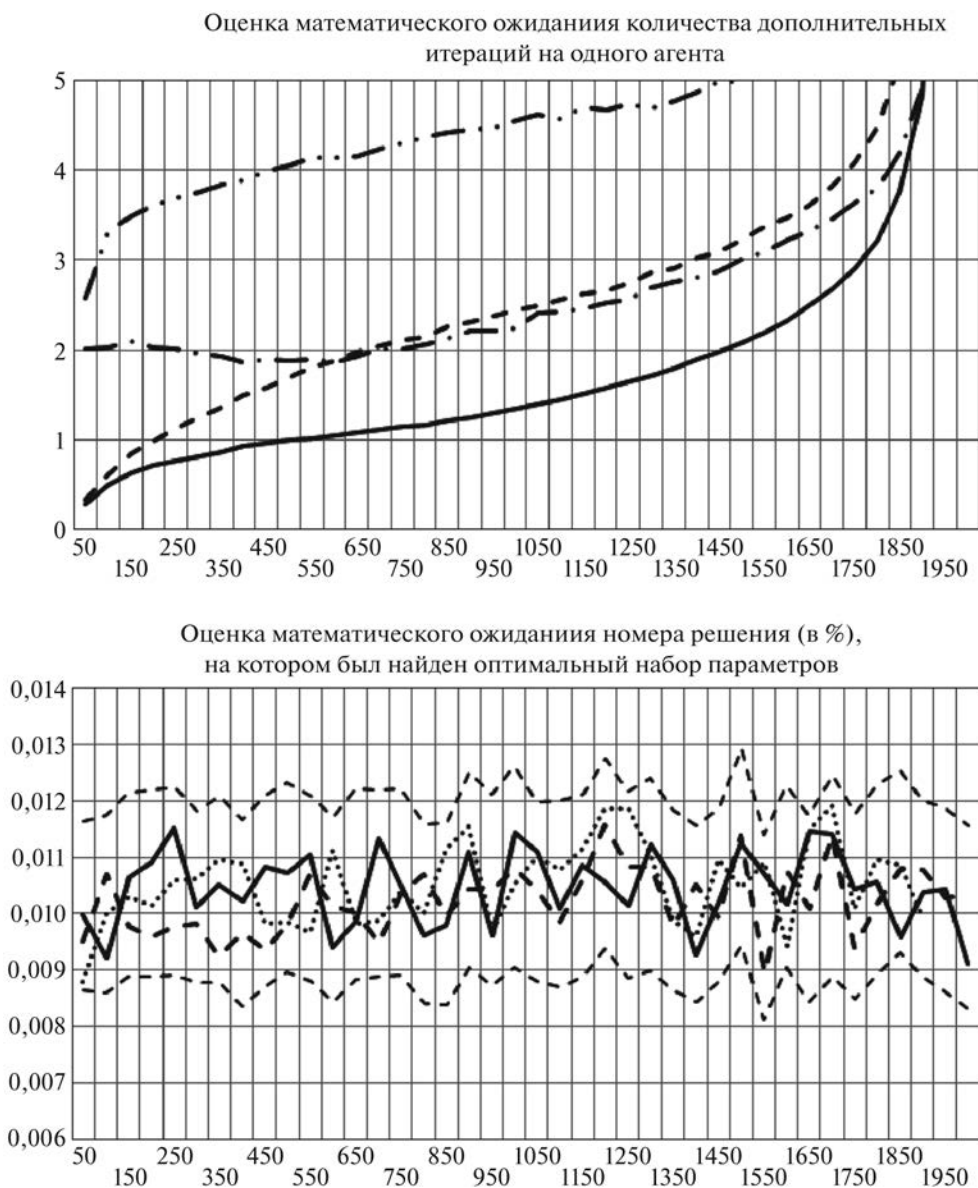


Рис. 4. Зависимость эффективности работы алгоритма от количества итераций метода муравьиных колоний для параметрического графа «Carrom table function».

ранжировать алгоритмы АСОСС, АСОСН, АСОСНИ, АСОССуЗ и АСОССуІ. Время поиска агентом решения в алгоритмах АСОССуЗ и АСОССуІ близкое, так как количество дополнительных итераций чаще всего меньше ограничения в 3 итерации.

Следует отметить, что циклический поиск фактически увеличивает количество итераций, так как работает по правилам метода муравьиных колоний. Если среди десяти агентов на итерации один не нашел нового решения и ему

Таблица 5. Оценка математического ожидания количества дополнительных итераций модификации АСОССуI

№ итер.	1900	1910	1920	1930	1940	1950
$k_2=0; k_3=0;$	8,379	8,712	9,582	10,487	23,004	25,153
$k_2=0; k_3=0; ignor;$	8,399	9,028	9,880	10,719	19,658	18,996
$k_2=0; k_3=1;$	5,035	5,248	5,735	6,536	13,408	12,861
$k_2=0; k_3=1; ignor;$	5,054	5,291	5,711	6,558	10,658	10,299
$k_2=1; k_3=0;$	7,049	7,780	8,990	11,493	44,962	42,247
$k_2=1; k_3=0; ignor;$	7,113	7,744	8,698	10,263	13,658	13,533
$k_2=1; k_3=1;$	4,864	5,312	5,990	7,383	19,585	19,828
$k_2=1; k_3=1; ignor;$	4,874	5,314	5,977	7,268	11,172	11,292

потребовалось десять дополнительных итераций, то фактически было выполнено двадцать итераций. В отличие от двадцати итераций оригинального алгоритма для данных итераций не происходит обновления весов на параметрическом графе и возможен контроль необходимого количества итераций.

Так как модификации АСОССу3 и АСОССуI показали хорошую сходимость к оптимальному решению и каждый агент в данном алгоритме находит новое решение (табл. 2), то исследуем возможность нахождения всех решений в параметрическом графе. Для исследования воспользуемся графом малой размерности (40 401 решение) с целевой функцией (3) «Carrom table function». Результаты применения модификации АСОССуI приведены на рис. 4. В отличие от АСОССуI модификацией АСОСNI за 2000 итераций рассмотрено только 35% решений. При исследовании модификации АСОССуI изменялись значения коэффициентов k_2 и k_3 в (2).

Длинные штрихпунктирные линии с точками на рис. 4 определяют модификацию, у которой $k_2 = 0$ (при $k_3 = 0$ — двойная точка, при $k_3 = 1$ — одна точка). При $k_2 = 0$ оптимальное решение с вероятностью 1 определяется только после 1000 итераций (более 60% рассмотренных решений). Более эффективными являются модификации, в которых $k_2 = 1$ (при $k_3 = 0$ — штриховая линия, при $k_3 = 1$ — сплошная линия). При любом количестве итераций оптимальное решение находится после рассмотрения от 0,009% ($40\,401 \cdot 0,009 = 363$) решений до 0,012% (484 решений) — доверительный интервал с доверительной вероятностью 0,99 (нижний график рис. 4). Для нахождения 0,99% оптимального решения требуется в 2 раза меньше рассмотренных решений, наборов значений параметров. Для модификации АСОСNI (линия из точек) требуется аналогичное количество рассмотренных решений для нахождения оптимального.

На верхнем графике рис. 4 отображено количество требуемых дополнительных итераций на одного агента. В среднем агенту требуется менее 5 дополнительных итераций при рассмотрении большинства возможных решений. В результате устанавливать ограничение, как в модификации АСОССу3, неэффективно. Минимальное количество дополнительных итераций, необхо-

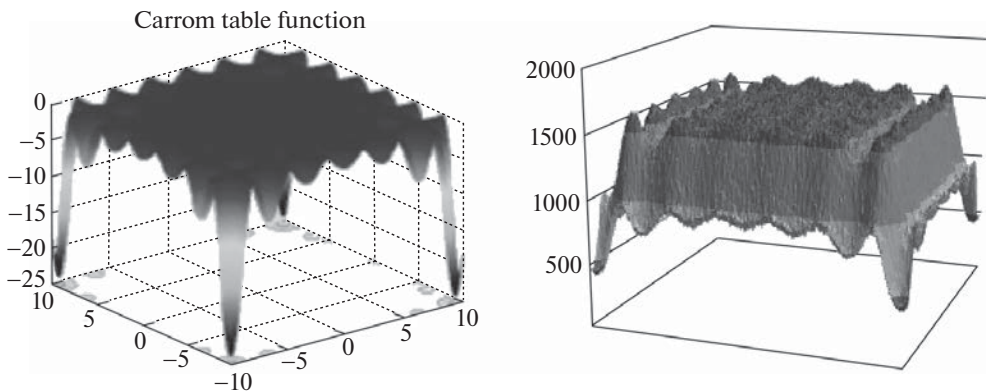


Рис. 5. График функции и оценки номера решения для «Carrom table function».

димых для поиска нового, еще не рассмотренного, набора значений параметров, гарантирует минимальные задержки по времени работы алгоритма.

Неэффективное поведение модификации происходит на последних 36-ти итерациях, на которых необходимо найти последние 900 оставшихся не рассмотренными решений (табл. 5). Четные строки таблицы с пометкой *ignor* — это результаты работы модификации АСОССуI с условием игнорирования вершин, для которых рассмотрены все решения. Модификация не рассматривает вершины, у которых $kol(t)_{ij,t} = MaxKol_{j,t}$ в вероятностной формуле (2).

Результаты, представленные в табл. 5, доказывают эффективность применения третьего слагаемого суммы в формуле (2). При $k3 = 1$ количество необходимых дополнительных итераций существенно меньше, чем при $k3 = 0$. Меньшее количество дополнительных итераций соответствует меньшему времени поиска оставшихся не рассмотренными наборов значений параметров. Высокую эффективность показывает игнорирование вершин, для которых рассмотрены все возможные решения (строки с надписью *ignor*).

Оба тестовых параметрических графа имеют несколько оптимальных (равных по значению целевой функции) значений параметров. На рис. 5 приведены график функции «Carrom table function» и график оценки номера решения, на котором рассматривались конкретные значения параметров x_1 и x_2 при 3000 прогонах модификации АСОССуI метода муравьиных колоний. При множестве прогонов алгоритм находит все 4 оптимума на самых ранних итерациях. График оценки номера итерации визуально повторяет график функции, т.е. оптимальные и рациональные решения, предложенные модификацией метода муравьиных колоний, статистически определяются на начальных операциях.

5. Заключение

В работе рассматривалась задача направленного перебора наборов значений параметров. Для решения задачи используется параметрический граф, в

котором набор параметров представлен в виде множества вершин, объединенных в группы — слои. В данном графе отсутствуют дуги, и необходимо определиться с порядком следования слоев, что может приводить к расхождению в эффективности предложенных модификаций. Но достоинством данного вида параметрического графа является простота его создания для пользователя. Для метода муравьиных колоний рассматривалась задача перебора всех значений параметров системы. Оптимизационные свойства метода позволяют рассмотреть оптимальный набор значений параметров как можно раньше. Предложены модификации, позволяющие упростить и контролировать поиск новых наборов значений параметров методом муравьиных колоний. Предполагается использование интерфейса для взаимодействия с пользователем с целью обеспечения возможности остановки работы метода при нахождении удовлетворяющего пользователя набора значений параметров системы. Если такой набор не найден, то метод муравьиных колоний рассмотрит все комбинации дискретных значений параметров. Данный подход также позволит решать многоэкстремальные и многокритериальные задачи.

Рассмотренный метод муравьиных колоний является достаточно мощным инструментом решения поставленной задачи, благодаря вероятностной формуле выбора следующей вершины. Предложена простая модификация вероятностной формулы, позволяющая существенно улучшить показатели эффективности работы алгоритма. Данная модификация определяет вероятность выбора следующей вершины как аддитивную свертку трех компонентов: весов в вершине, количества посещений вершины агентами и количества оставшихся решений, содержащих данную вершину.

В работе предложены модификации, позволяющие выбирать различные алгоритмы поведения при получении агентом уже рассмотренного решения. Проверка найденного решения осуществляется с помощью Хэш-таблицы. Повторный циклический поиск показал хорошую сходимость к оптимальному решению и наилучшую работу при поиске последних наборов значений параметров на различных параметрических графах. На графе большой размерности повторный циклический поиск показывает результаты хуже, чем работа оригинального алгоритма с новой вероятностной формулой.

Рассмотрение всех возможных комбинаций значений параметров системы является специфической задачей, так как перебрать все варианты можно полным перебором и в результате найти оптимальное решение. Большинство алгоритмов перебора вариантов системы нацелены на поиск рационального решения путем сходимости к нему, и “плохие” решения подобные алгоритмы не рассматривают. Несмотря на вероятностную сходимость метода муравьиных колоний к одному решению, в работе доказана возможность алгоритмом рассмотреть все решения, даже все неоптимальные, при любом распределении вероятностной формулы. Для многомодальных функций можно отказаться от процедуры мультистарта, вносящей дополнительную стохастичность в работу алгоритма.

К недостаткам метода муравьиных колоний относят наличие большого количества свободных параметров [9]. Параметры, относящиеся к “классическому” методу муравьиных колоний (количество агентов на итерации, коэффициент испарения весов и коэффициент добавления), подробно рассмотрены в [21]. При исследовании асинхронного поведения метода муравьиных колоний при взаимодействии с асинхронным вычислительным кластером предполагается устанавливать количество агентов равным количеству потоков, осуществляющих вычисления на кластере. Отсутствие сходимости алгоритма к одному решению не требует установки граничных условий и параметров мультистарта. Но наличие коэффициентов в новой вероятностной формуле требует дополнительных исследований. Исследованы различные дискретные значения весовых и степенных коэффициентов в формуле (2). Оптимальными являются значения, равные 1. При этом следует отметить, что ситуация, когда весовые коэффициенты принимают вещественные значения и в сумме дают 1, требует дальнейших исследований. Также дальнейших исследований требует динамическое изменение значений коэффициентов, так как коэффициент k_1 эффективен на ранних итерациях для быстрого поиска оптимального набора значений параметров, а коэффициент k_3 — для поиска оставшихся решений на последних итерациях.

Дальнейшее развитие предполагается в следующих направлениях.

1. Предложенный альтернативный алгоритм поиска нового решения путем обхода дерева показал низкую эффективность и требует доработки.
2. Не рассматривалась ценность отдельных слоев-параметров параметрического графа. Данное исследование позволит выделить наиболее и наименее значимые параметры технической системы.
3. Вероятностная формула выбора агентом следующей вершины является очень мощным инструментом, и возможна ее модификация с учетом ценности отдельных слоев.
4. Необходимо дальнейшее исследование структуры параметрического графа, разделение слоя на подслои, перестановки слоев и способов формирования графа.
5. Применение предложенного метода для решения задач с векторным критерием. Исследования модификаций для быстрого рассмотрения на кластере всех решений из множества Парето.
6. При работе метода муравьиных колоний совместно с асинхронным вычислителем. Предполагается получение значений целевой функции асинхронно по отношению к работе метода муравьиных колоний. Для такой модификации предлагается каждого агента просчитывать в своем потоке, и в результате рассмотреть асинхронную работу метода муравьиных колоний. Добавление и испарение весов с параметрического графа может осуществляться в виде отдельных потоков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feurer M., Hutter F., Vanschoren J.* Hyperparameter Optimization // The Springer Series on Challenges in Machine Learning. Springer, Cham. 2019.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-05318-5_1
2. *Koehrsen W.* A conceptual explanation of bayesian hyperparameter optimization for machine learning. 2018. (Открытый доступ 18.01.2023:
<https://towardsdatascience.com/a-conceptual-explanation-of-bayesian-model-based-hyperparameter-optimization-for-machine-learning-b8172278050f>)
3. *Colormi A., Dorigo M., Maniezzo V.* Distributed Optimization by Ant Colonies // Proc. First Eur. Conf. on Artific. Life, Paris, France, Elsevier Publishing. 1992. P. 134–142.
4. *Dorigo M., Stützle T.* Ant Colony Optimization // MIT Press. 2004. P. 321.
5. *Socha K., Dorigo M.* Ant colony optimization for continuous domains // Eur. J. Oper. Res., 2008, V. 185. Issue 3. pp. 1155–1173.
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.06.046>
6. *Mohamad M., Tokhi M., Omar O.M.* Continuous Ant Colony Optimization for Active Vibration Control of Flexible Beam Structures // IEEE International Conf. on Mechatronics (ICM). Apr., 2011. P. 803–808.
7. *Карпенко А.П., Чернобrivченко К.А.* Эффективность оптимизации методом непрерывно взаимодействующей колонии муравьев (CIAC) // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. № 2.
<https://doi.org/10.7463/0211.0165551>
8. *Карпенко А.П., Чернобrivченко К.А.* Мультимемеевая модификация гибридного муравьиного алгоритма непрерывной оптимизации HCIAC. // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. № 9.
<https://doi.org/10.7463/0912.0470529>
9. *Карпенко А.П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой // М.: Изд-во МГТУ им. Баумана. 2-е изд. 2017. 446 с.
10. *Саймон Д.* Алгоритмы эволюционной оптимизации : практическое руководство. М.: ДМК Пресс. 2020. 1002 с.
11. *Sudakov V.A., Titov Y.P.* Modified Method of Ant Colonies Application in Search for Rational Assignment of Employees to Tasks // Proceedings of 4th Computational Methods in Systems and Software 2020. Vol. 2, Vsetin: Springer Nature, 2020. P. 342–348. DOI 10.1007/978-3-030-63319-6_30
12. *Хажулин Г.Ф., Титов Ю.П.* Система поддержки решений поставок запасных частей летательных аппаратов военного назначения // Изв. Самарского научн. центра РАН. 2014. Т. 16. № 1–5. С. 1619–1623.
13. *Синицын И.Н., Титов Ю.П.* Развитие стохастических алгоритмов муравьиной организации // Бионика – 60 лет. Итоги и перспективы. Сборник статей Первой Междунар. науч.-практ. конф. Под редакцией А.П. Карпенко. 17–19 декабря 2021 г., г. Москва. Под ред. 2022. С. 210–220.
https://doi.org/10.53677/9785919160496_210_220
14. *Титов Ю.П.* Модификации метода муравьиных колоний для решения задач разработки авиационных маршрутов // АиТ. 2015. № 3. С. 108–124.
Titov Y.P. Modifications of the ant colony method for aviation routing // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. no 3. P. 458–471.
<https://doi.org/10.1134/S0005117915030091>

15. *Судаков В.А., Батъковский А.М., Тимов Ю.П.* Алгоритмы ускорения работы модификации метода муравьиных колоний для поиска рационального назначения сотрудников на задачи с нечетким временем выполнения // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2020. Т. 16. № 2. С. 338–350. <https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202002.338-350>
16. *Parpinelli R., Lopes H., Freitas A.* Data mining with an ant colony optimization algorithm // IEEE Trans. Evol. Comput. 2002. V. 6. No. 4 P. 321–332.
17. *Junior I.C.* Data mining with ant colony algorithms // ICIC. LNCS. 2013. V. 7996. P. 30–38.
18. *Martens D., De Backer M., Haesen R., Vanthienen J.* Classification with ant colony optimization // IEEE Trans. Evol. Comput. 2007. V. 11. No. 5. P. 651–665.
19. *Pasia J.M., Hartl R.F., Doerner K.F.* Solving a Bi-objective Flowshop Scheduling Problem by Pareto-Ant Colony Optimization // ANTS 2006. P. 294–305.
20. *Тимов Ю.П.* Опыт моделирования планирования поставок с применением модификаций метода муравьиных колоний в системах высокой доступности // Системы высокой доступности. 2018. Т. 14. № 1. С. 27–42.
21. *Синицын И.Н., Тимов Ю.П.* Оптимизация порядка следования гиперпараметров вычислительного кластера методом муравьиных колоний // Системы высокой доступности. 2022. Т. 18. № 3. С. 23–37. <https://doi.org/10.18127/j20729472-202203-02>
22. *Mishra Sudhanshu K.* Some New Test Functions for Global Optimization and Performance of Repulsive Particle Swarm Method // University Library of Munich, Germany, MPRA Paper. 2006. <https://doi.org/10.2139/ssrn.926132>
23. *Layeb Abdesslem.* New hard benchmark functions for global optimization. 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.04606>

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 23.01.2023

После доработки 21.03.2023

Принята к публикации 09.06.2023

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

- Хлебников М.В.** Синтез ПИ-регулятора для подавления внешних возмущений . . 3
- Коган М.М., Степанов А.В.** Синтез субоптимальных робастных регуляторов
на основе априорных и экспериментальных данных 24

Нелинейные системы

- Хацкевич В.Л.** Непрерывные процессы с нечеткими состояниями и их приложения 43
- Цирлин А.М.** Обобщение теоремы Каратеодори и принцип максимума в усредненных задачах нелинейного программирования 61

Стохастические системы

- Иванов С.В., Кибзун А.И., Акмаева В.Н.** Параметрический алгоритм поиска гарантирующего решения задачи квантильной оптимизации 73
- Шайкин М.Е.** Резольвенты дифференциальных уравнений ИТО, мультипликативных по вектору состояния 88

Управление в технических системах

- Григорьев Н.В.** Синтез тест-управления для идентификации аэродинамических характеристик летательных аппаратов 107
- Рутковский В.Ю., Глузов В.М., Ермилов А.С.** Управление угловым движением большой космической конструкции с упругими элементами 122

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Балашов В.В., Костенко В.А., Федоренко И.А., Гао Ц., Сун Ч.М., Сун Ц.** Алгоритм имитации отжига для построения списочных расписаний с ограничением на количество межпроцессорных передач данных 138
- Синицын И.Н., Титов Ю.П.** Управление наборами значений параметров системы методом муравьиных колоний 153

C O N T E N T S

Linear Systems

Khlebnikov M.V. PI Controller Design for Peak-to-Peak Gain Minimization	3
Kogan M.M., Stepanov A.V. Synthesis of Suboptimal Robust Controllers on the Basis of a Priori and Experimental Data	24

Nonlinear Systems

Khatskevich V.L. Continuous Processes with Fuzzy States and Their Applications . .	43
Tsirlin A.M. Generalization of the Caratheodory Theorem and the Maximum Principle in Averaged Problems of Nonlinear Programming	61

Stochastic Systems

Ivanov S.V., Kibzun A.I., Akmaeva V.N. Parametric Algorithm for Finding a Guaranteed Solution to a Quantile Optimization Problem	73
Shaikin M.E. Resolvents of the Ito Differential Equations Multiplicative with Respect to the State Vector	88

Control in Technical Systems

Grigoriev N.V. Synthesis of Test Control for Identifying the Aerodynamic Characteristics of Aircraft	107
Rutkovsky V.Y., Glumov V.M., Ermilov A.S. Angular Motion Control of a Large Space Structure with Elastic Elements	122

Optimization, System Analysis, and Operations Research

Balashov V.V., Kostenko V.A., Fedorenko I.A., Gao J., Sun C., Sun J. Simulated Annealing Algorithm for List Schedule Construction with Constraint on the Number of Interprocessor Data Transfers	138
Sinit syn I.N., Titov Yu.P. Management of the Set of Values of the System Parameters by the Ant Colonies Method	153