

ISSN 0005-2310

А Т АВТОМАТИКА И ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МЕХАНИКА



5

2023



Российская Академия Наук

А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

5

М А Й

Москва

2023

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневецкий В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталева М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»

© 2023 г. Р.П. АГАЕВ, д-р физ.-мат. наук (agaraf3@gmail.com),
Д.К. ХОМУТОВ (homutov_dk@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

О СВОЙСТВАХ МЕТОДА ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ В ЗАДАЧЕ О КОНСЕНСУСЕ

В статье изучается асимптотическое поведение многоагентной системы с информационными связями. Доказано, что для произвольного орграфа связей многоагентной системы метод ортогональной проекции, предложенный для регуляризации протокола консенсуса, характеризуется псевдообратной матрицей для введенной вспомогательной матрицы. Также исследован собственный проектор лапласовской матрицы, соответствующий орграфу связей, в котором влияния на фиксированного агента меняются пропорционально. Получен ряд результатов, которые имеют самостоятельное значение и могут быть использованы в моделях многоагентных систем с различными протоколами.

Ключевые слова: многоагентная система, консенсус, собственный проектор, лапласовская матрица, орграф связей, сбалансированный орграф.

DOI: 10.31857/S000523102305001X, EDN: AFGUFJ

1. Введение

Многоагентные системы (МАС) с информационными связями (см., например, [1–5]), как обычно, представляются взвешенным орграфом связей, а сам протокол согласования характеристик для непрерывного случая задается с помощью лапласовской матрицы. Протоколы – модели МАС для дискретного случая, описываются стохастическими матрицами. Условия достижения консенсуса в таких моделях определяются алгебраическими свойствами орграфа связей или же инвариантами (спектром, собственным проектором и т.п.) соответствующих матриц. В таких моделях существование остовного дерева является обязательным условием консенсуса или согласования характеристик. Асимптотическое поведение системы, как это было установлено в [6–8], определяется собственным проектором лапласовской матрицы, построенной для орграфа связей. Для дискретной модели консенсус также зависит от предела последовательности степеней стохастической матрицы. Для всех протоколов если консенсус достигается при любом векторе начальных значений, то собственный проектор должен иметь ранг, равный 1. По определению регулярности [9], стохастическая матрица регулярна, если ранг предела последовательности ее степеней равен 1. Если собственный проектор имеет ранг больше 1, то не для каждого вектора начальных значений

консенсус достигается. В этом случае любой метод, приводящий к консенсусу, называем методом регуляризации. Слово “регуляризация” связано с тем, что асимптотическое поведение системы после принятой меры задается стохастической матрицей ранга 1. А ранг предела последовательности степеней стохастической матрицы равен единице, если она регулярная.

В первой части работы приведена графовая интерпретация одного из методов регуляризации протокола консенсуса – метод ортогональной проекции. Исследованы свойства метода проекции с помощью псевдообратной матрицы. Согласно этому методу, пространство всевозможных начальных мнений ортогональным проектором, т.е. симметричной идемпотентной матрицей, отображается на подпространство области сходимости процедуры ДеГроота.

В [10] были рассмотрены некоторые элементы графовой интерпретации метода ортогональной проекции. Однако это касалось только соотношения весов множеств исходящих деревьев на множестве вершин базовых бикомпонент (определение приведено в следующем разделе) в результирующей матрице, и не вносило вклад в обоснования применения самого метода. В [11] для системы с отдельными базовыми бикомпонентами (без небазовых вершин) была приведена связь между методом ортогональной проекции и псевдообратной по Муру–Пенроузу для вспомогательной матрицы, построенной по лапласовской матрице. В настоящей работе мы полностью решаем поставленную в [11] задачу. Показано, что метод ортогональной проекции является естественным обобщением процесса согласования характеристик для системы с кратными нулевыми собственными значениями.

Во второй части статьи изучен собственный проектор лапласовской матрицы орграфа связей, полученного путем пропорционального изменения весов входящих дуг (в общем, всех вершин) в исходном орграфе связей. Выведено простое выражение для проектора модифицированной матрицы.

2. Необходимые понятия и вспомогательные результаты

Пусть $\Gamma = (V, E)$ – орграф с множеством вершин V и множеством дуг E .

Определение 1. *Непустое подмножество вершин K орграфа $\Gamma = (V, E)$ называют базовой бикомпонентой, если все вершины, принадлежащие K , взаимно достижимы, и нет дуг (i, j) , где $j \in K$, $i \in V \setminus K$. Множество вершин всех базовых бикомпонент обозначим через \mathcal{K} . Множество вершин, не принадлежащих базовым бикомпонентам, обозначим через $\bar{\mathcal{K}} = V \setminus \mathcal{K}$, и назовем их небазовыми.*

Для орграфа из рис. 1,а множества $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5\}$ и $\{6, 7\}$ являются базовыми бикомпонентами.

Рассмотрим многоагентную систему (МАС) с множеством агентов $\{1, \dots, n\}$. Для МАС пусть A – матрица связей (влияний), $A = (a_{ij})$, где a_{ij} – вес влияния j -го агента на i -го. Также для системы построим орграф связей с множеством вершин $V = \{1, \dots, n\}$, в котором каждому элементу $a_{ij} > 0$ матрицы A соответствует дуга (j, i) с весом a_{ij} .

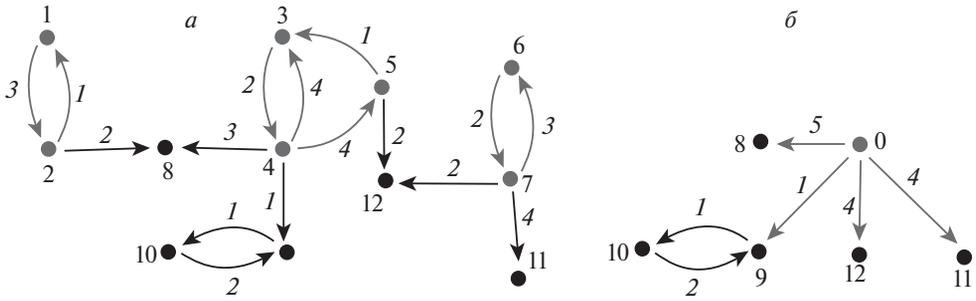


Рис. 1. а — Система с тремя базовыми бикомпонентами $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{6, 7\}$. б — “Склеивание” базовых бикомпонент в одну вершину 0.

Определение 2. 1) Вес орграфа G равен произведению весов всех его дуг: $\varepsilon(G) = \prod_{(i,j) \in E} a_{ji}$. 2) Вес множества орграфов $\mathcal{G} = \{G_i\}$ равен сумме весов всех орграфов, входящих в данное множество, т.е. $\varepsilon(\mathcal{G}) = \sum_i \varepsilon(G_i)$.

Предположим, что орграф связей, помимо базовых бикомпонент, также содержит небазовые вершины.

Ключевую роль в теории многоагентных систем с информационными связями играет лапласовская матрица орграфа связей, определяемая следующим образом: $L = \Delta(A) - A$, где $\Delta(A)$ — диагональная матрица с i -м диагональным элементом, равным сумме весов входящих дуг в вершину i . Если $\mathbf{0}_n = (0, \dots, 0)^T$ и $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^T$ — векторы порядка n из нулей и единиц, соответственно, то $L\mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$, т.е. L — вырожденная матрица, и сумма ее строчных элементов равна нулю. Если орграф связей неориентированный, то L — симметричная, положительно полуопределенная.

Определение 3. Собственным проектором (см., например, [12]) квадратной матрицы A называют такой проектор — идемпотентную матрицу A^\dagger , что $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^\nu)$ и $\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^\nu)$, где ν — индекс матрицы, т.е. такое наименьшее число, для которого имеет место $\text{rank}(A^\nu) = \text{rank}(A^{\nu+1})$.

Отметим, что собственный проектор L^\dagger для лапласовской матрицы L является неотрицательной стохастической матрицей. В общем случае L^\dagger для произвольной лапласовской матрицы — не обязательно симметричная, т.е. такой проектор не всегда является ортогональной для несимметричной матрицы.

Замечание 1. Для любой лапласовской матрицы L $\text{ind } L = 1$, и

$$(1) \quad LL^\dagger = L^\dagger L = \mathbf{0}_{n \times n}.$$

Для любой прямоугольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ существует единственная матрица $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$, для которой выполняются следующие четыре условия: 1) $A^+AA^+ = A^+$; 2) $AA^+A = A$; 3) $(AA^+)^* = AA^+$; 4) $(A^+A)^* = A^+A$. Матрицу A^+ называют псевдообратной по Муру–Пенроузу.

Определение 4. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – однотипные, если нулевые элементы этих матриц находятся в одинаковых позициях, т.е. $a_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда $b_{ij} = 0$.

В матричных обозначениях следуем книге [13]. Для A обозначим через A_{ij} подматрицу, получаемую удалением i -й строки и j -го столбца A . Также для подматрицы, образуемой строками с номерами из множества $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$ и столбцами с номерами из множества $\beta \subseteq \{1, \dots, n\}$, примем обозначение $A_{(\alpha)}^{\beta}$.¹

Теорема 1. 1) Собственный проектор L^\dagger лапласовской матрицы L совпадает с нормированной матрицей максимальных исходящих лесов $Q = (q_{ij})$ взвешенного орграфа Γ :

$$l_{ij}^\dagger = q_{ij} = \frac{\varepsilon(\mathcal{F}^{j \rightarrow i})}{\varepsilon(\mathcal{F})}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где $\varepsilon(\mathcal{F})$ – вес множества всех остовных максимальных исходящих лесов орграфа Γ , $\varepsilon(\mathcal{F}^{j \rightarrow i})$ – вес множества тех остовных максимальных исходящих лесов, где вершина j является корнем одного из исходящих деревьев, а i достижима из j .

2) Если i и j принадлежат одной базовой бикомпоненте, то соответствующие столбцы собственного проектора пропорциональны.

Теорема 2 (Матричная теорема о деревьях). Алгебраическое дополнение любого элемента i -й строки лапласовской матрицы равно суммарному весу остовных исходящих из i -й вершины деревьев.

Заметим, что если в лапласовской матрице орграфа какой-либо столбец заменить на столбец из единиц, то определитель полученной матрицы будет равным весу множества всех остовных исходящих деревьев.

3. Интерпретация метода ортогональной проекции с помощью псевдообратной матрицы

Рассмотрим базовую дифференциальную модель

$$(2) \quad \dot{x}(t) = -Lx(t),$$

где $x_i(t)$ – характеристика i -го агента.

Отметим, что протокол (2) изучен многими авторами (см., например, [3–5]). Известно, что если 0 – простое собственное значение лапласовской матрицы L , то при любом векторе начальных характеристик $x(0)$ асимптотический консенсус существует и равен пределу [6]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L^\dagger x(0).$$

¹ При перечислении номеров строк или столбцов, как обычно, между индексами не ставится запятая. В некоторых работах через $A_{(\alpha)}^{\beta}$ обозначают минор подматрицы.

А если 0 — кратное собственное значение лапласовской матрицы L , то для произвольного вектора начальных значений консенсус может не достигаться. Тогда возникает вопрос: как изменить протокол, чтобы получить консенсус при любом векторе начальных значений? Такая проблема регуляризации возникает не только в многоагентных системах, но и также в задачах кластеризации на несвязном орграфе. В этом случае после некоторых изменений исходной стохастической матрицы вектор стационарного распределения, используемый для взвешивания кластеров в задаче спектральной кластеризации, определяется однозначно с точностью до множителя.

К немногочисленным работам по многоагентным системам с несвязным орграфом связей относятся [7, 10]. В [7] исследовано несколько протоколов латентного консенсуса. В основе этих протоколов лежит добавление дополнительных дуг, приводящих к консенсусу при любом векторе начальных характеристик агентов. Эти методы аналогичны методу, применяемому в PageRank для ранжирования страниц в Интернете. Например, при методе фоновых связей к орграфу добавляется полный граф с малыми весами. Такой протокол имеет следующее представление:

$$(3) \quad \dot{x}(t) = -(L + \delta D)x(t),$$

где $\delta > 0$, $D = I - \mathbf{1}v^T$, $v_i > 0$, $\sum_{i=1}^n v_i = 1$.

В [7] в частности доказано, что если $x(t)$ — решение системы (3), то

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{1}v^T L^\dagger x(0).$$

Если $v = \frac{1}{n}\mathbf{1}$, то имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = EL^\dagger x(0),$$

где E — матрица с элементами n^{-1} .

Регуляризация “в духе” PageRank приводит к усреднению строк собственного проектора.

Другой метод регуляризации — метод ортогональной проекции, был предложен в [10]. Его также можно применить как для модели ДеГроота — $x_k = Px_{k-1}$, так и для непрерывного протокола. Согласно этому методу, пространство всевозможных начальных мнений ортогональным проектором, т.е. симметричной идемпотентной матрицей S , отображается на подпространство Q_L — область сходимости процедуры ДеГроота. Образ $\mathcal{R}(S)$ матрицы S совпадает с линейной оболочкой векторов, состоящих из линейно независимых столбцов матрицы $I - P$ и вектора из единиц. Если x_0 — вектор начальных мнений, а x'_0 — преобразованный вектор, тогда $|x'_0 - x_0|$ будет минимальной, поскольку матрица S — ортогональный проектор. Некоторые координаты преобразованного вектора могут иметь отрицательные знаки, если даже исходный вектор начальных характеристик был положительным. Однако

$P^\infty S$ является не только стохастической матрицей, но и матрицей единичного ранга. Поэтому, если вектор начальных значений x_0 имеет только положительные координаты, то результирующий вектор $P^\infty Sx_0$ также будет положительным.

Ортогональный проектор S на подпространство $Q_L = \mathcal{R}(L) \oplus \text{Span}(\mathbf{1})$ представляется в виде

$$(4) \quad S = UU^+ = U(U^T U)^{-1} U^T,$$

где U — матрица полного столбцового ранга r , полученная из L отбрасыванием по одному столбцу, соответствующему какой-либо вершине из каждой базовой бикомпоненты орграфа, и добавлением столбца $\mathbf{1}_n$ в качестве первого.

3.1. Связь между обобщенно обратной матрицей для U и методом ортогональной проекции

Графовая интерпретация метода ортогональной проекции частично была дана в [10] с помощью матриц X и Z (см. п. 3. теоремы 3 в [10]). В [11] была приведена связь между обобщенно обратной матрицей для U и методом ортогональной проекции для класса орграфов без небазовых вершин. В настоящем разделе мы рассмотрим более общий случай, предположим, что орграф связей, помимо отдельных базовых бикомпонент, также содержит вершины, не принадлежащие множеству \mathcal{K} . Покажем, что метод ортогональной проекции является естественным обобщением протокола достижения консенсуса.

Пусть E_{10} — квадратная матрица порядка n , первый столбец которой состоит из единиц, а все остальные элементы равны нулю.

Вначале предположим, что $\text{rank}(L) = n - 1$. В этом случае нет необходимости в регуляризации, и для любого вектора начальных значений консенсус достигается, и $L^+ = E_{10}U^{-1}$.

Если $\text{rank}(L) < n - 1$, то

$$(5) \quad L^+ S = L^+ U U^+ = E_{10} U^+,$$

т.е. в обоих случаях консенсус однозначно определяется первой строкой обобщенно обратной матрицы для U : в первом случае U^{-1} , а во втором — U^+ . Таким образом имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1.

- 1) Если $\text{rank}(L) = n - 1$, то $L^+ S = L^+ I = E_{10} U^{-1}$.
- 2) Если $\text{rank}(L) < n - 1$, то $L^+ S = E_{10} U^+$.

Из утверждения 1 следует, что если в системе достигается консенсус, то он однозначно определяется нормированными весами множества остовных исходящих деревьев орграфа коммуникаций. В свою очередь, эти веса, согласно матричной теореме о деревьях 2, однозначно определяются первой строкой матрицы U^{-1} . В силу утверждения 1, метод ортогональной проекции является естественным обобщением согласования характеристик и определяется в

общем случае первой строкой псевдообратной по Муру–Пенроузу матрицы U . Известно, что (см., например, Приложение А в [14]) элементы псевдообратной матрицы, так же как для невырожденной матрицы, можно представить с помощью миноров исходной матрицы следующим образом:

$$(6) \quad u_{1i_1}^+ = \frac{\sum_{i_2 < \dots < i_r} \det U \begin{pmatrix} i_2 & \dots & i_r \\ 2 & \dots & r \end{pmatrix} \det U \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix}}{\sum_{k_1 < \dots < k_r} \left(\det U \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} \right)^2}.$$

Используя (6), далее мы охарактеризуем метод ортогональной проекции и элементы матрицы U^+ с помощью лесной структуры орграфа связей. Для этого нам понадобятся следующие утверждения, в предположении, что матрица L имеет представление (7).

$$(7) \quad L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_v & 0 \\ * & * & \dots & * & L_R \end{pmatrix},$$

где v — число базовых бикомпонент в соответствующем орграфе, $*$ — блоки, которые в общем случае — ненулевые, L_R — подматрица L , строки и столбцы которой соответствуют всем небазовым вершинам. Важно отметить, что $\det L_R$ равен весу множества остовных исходящих деревьев орграфа Γ_ξ , полученного из Γ “склеиванием” всех вершин из \mathcal{K} в одну вершину ξ (см. [15]). На рис. 1,б приведен орграф “склеиванием” базовых вершин орграфа из рис. 1,а.

Утверждение 2. 1) Миноры $\det U \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix}$ и $\det U \begin{pmatrix} i_2 & \dots & i_r \\ 2 & \dots & r \end{pmatrix}$ равны нулю, если они получаются путем вычеркивания хотя бы одной строки, соответствующей вершине из $\bar{\mathcal{K}}$.

2) Минор $\det U \begin{pmatrix} i_2 & \dots & i_r \\ 2 & \dots & r \end{pmatrix}$ равен нулю, если множество $\{i_2, \dots, i_r\}$ содержит все вершины одной базовой бикомпоненты.

3) Абсолютное значение ненулевого минора $\det U \begin{pmatrix} i_2 & \dots & i_r \\ 2 & \dots & r \end{pmatrix}$ равно произведению $\det L_R$ на вес множества всех исходящих лесов на \mathcal{K} с корнями из вершин $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_2, \dots, i_r\}$.

Утверждение 3. Пусть $\{j_1, \dots, j_{m_s}\}$ — множество всех вершин некоторой базовой бикомпоненты s , содержащееся в $\{i_1, \dots, i_r\}$, и пусть в нем нет вершин других базовых бикомпонент. Тогда:

1)

$$(8) \quad \left| \det U \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ 1 & \dots & r \end{pmatrix} \right| = \sum_{p=1}^{m_s} \left| \det U \begin{pmatrix} K_p \\ 2 & \dots & r \end{pmatrix} \right|,$$

где $K_p = (i_1 \dots i_r) \setminus j_p$, $p = 1, \dots, m_s$;

2) $\det U \begin{pmatrix} j_p K_p \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \neq 0$ и $\det U \begin{pmatrix} K_p \\ 2 \dots r \end{pmatrix} \neq 0$, $p = 1, \dots, m_s$, имеют один и тот же знак.

Отметим, что $(i_1 \dots i_r) \setminus j_p$ означает, что из упорядоченного набора $(i_1 \dots i_r)$ удален элемент j_p . А запись $j_p K_p$ указывает на то, что к упорядоченному набору K_p слева добавлен элемент j_p .

Используя утверждения 2 и 3, можно доказать следующую теорему, которая впервые была доказана в [10] для системы без небазовых агентов.

Теорема 3. Для системы с произвольным оргграфом связей сумма элементов первой строки матрицы U^+ равна 1:

$$\sum_{i=1}^n u_{1i}^+ = 1.$$

Итак, метод ортогональной проекции в МАС с любым оргграфом связей и вектором начальных значений $x(0)$ приводит к консенсусу, и консенсус определяется произведением

$$(u_{11}^+, \dots, u_{1n}^+)(x_1(0), \dots, x_n(0))^T.$$

В частности, если оргграф связей содержит остовное дерево, то в этом случае матрица U будет квадратной, невырожденной, и, согласно (6), выполняется

$$u_{1i}^+ = u_{1i}^{-1} = \frac{|\det U \begin{pmatrix} (1 \dots n) \setminus i \\ 2 \dots n \end{pmatrix}| |\det U|}{(\det U)^2} = \frac{|\det U \begin{pmatrix} (1 \dots n) \setminus i \\ 2 \dots n \end{pmatrix}|}{\det U} = l_{1i}^+.$$

Последнее равенство следует из теоремы 1, согласно которой, $|\det U \begin{pmatrix} (1 \dots n) \setminus i \\ 2 \dots n \end{pmatrix}|$ совпадает с алгебраическим дополнением любого элемента i -й строки лапласовской матрицы оргграфа связей.

Утверждение 4. Если i_1 и j_1 принадлежат одной базовой компоненте, то $\frac{u_{1i_1}^+}{u_{1j_1}^+} = \frac{l_{1i_1}^+}{l_{1j_1}^+}$.

Используя утверждение 3, числитель выражения (6) можно представить как

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2 < \dots < i_r} \det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix} \det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_r} \left(\det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \right)^2 = \sum_{s=1}^v \sum_{i=1}^{q_s} \varrho_{si}^2, \end{aligned}$$

где $q_s = (m_1 m_2 \dots m_v) / m_s$, $s = 1, \dots, v$. Для каждой базовой бикомпоненты s с множеством вершин N_s число ϱ_{si} равно произведению веса множества всех

деревьев в бикомпоненте s на вес максимальных исходящих лесов с фиксированными вершинами.

Пусть $P_1 = \{1, \dots, m_1\}$ — множество вершин первой базовой бикомпоненты. Согласно выражению (6),

$$(9) \quad \begin{aligned} W_1 &= \sum_{i=1}^{m_1} u_{1i}^+ = D^{-1} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{K_i} \det U \left(\begin{array}{c} K_i \\ 2 \dots r \end{array} \right) \det U \left(\begin{array}{c} i K_i \\ 1 \dots r \end{array} \right) = \\ &= D^{-1} \sum_{m_1+1 < \dots < i_r} \left(\det U \left(\begin{array}{c} P_1 \ i_{m_1+1} \dots i_r \\ 1 \dots r \end{array} \right) \right)^2 = D^{-1} \sum_{i=1}^{q_1} \varrho_{1i}^2, \end{aligned}$$

где $K_t = (1 \dots m_1 i_{m_1+1} \dots i_r) \setminus t$, $t = 1, \dots, m_1$. Напомним, что в (9) для каждой базовой бикомпоненты s число ϱ_{si} равно произведению веса множества всех деревьев базовой бикомпоненты s на произведение весов всех деревьев с фиксированными корнями из остальных базовых бикомпонент, и определителя блока L_R . С помощью (9) можно определить отношение сумм весов в разных бикомпонентах.

Если орграф состоит из одной базовой бикомпоненты с множеством вершин $m_1 = n$, то из (9) в силу $\sum_{i=1}^n \det U \left(\begin{array}{c} N \setminus i \\ 2 \dots n \end{array} \right) = \det U \left(\begin{array}{c} 1 \dots n \\ 1 \dots n \end{array} \right) = \det U$ непосредственно следует:

$$W_1 = D^{-1} \sum_{i=1}^n \det U \left(\begin{array}{c} N \setminus i \\ 2 \dots n \end{array} \right) \det U = \frac{\det U \det U}{(\det U)^2} = 1.$$

4. Явное выражение для собственного проектора произведения положительной диагональной матрицы на лапласовскую

Как было отмечено во введении, асимптотическое поведение многих моделей МАС определяется свойствами собственного проектора лапласовской матрицы орграфа связей. При этом k -й столбец характеризует “важность” k -го агента в итоговом консенсусе. Для сильно связанного орграфа связей чем больше значения ℓ_{1k}^+ , тем сильнее влияния k -го агента на итоговое значение. Рассмотрим следующую задачу: если влияния других агентов на k -го агента меняются пропорционально, то как изменится собственный проектор и можно ли собственный проектор полученной матрицы выразить через собственный проектор исходной матрицы? При этом если влияния на k -го агента меняются в τ_k раз, то лапласовская матрица M орграфа с новыми весами будет равна TL , где L — матрица орграфа до изменения его весов, $T = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_n)$.

В данном разделе докажем, что собственный проектор M^+ можно представить как L^+D , где D — некоторая диагональная матрица. Согласно теореме 1 матрицы L^+ и M^+ — однотипны.

Если $\text{rank}L^+ = 1$, то очевидно, что всегда существует положительная диагональная матрица D , такая, что $M^+ = L^+D$. Однако, если $\text{rank}L^+ > 1$, то существование диагональной матрицы не очевидно. Кроме того, в первом случае если не известна M^+ , то нахождение D не является тривиальной задачей.

Теорема 4. Если $M = TL$, где $T = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ — положительная диагональная матрица, а L — произвольная лапласовская матрица, то существует неотрицательная диагональная матрица D , для которой имеет место:

$$(10) \quad M^+ = L^+D.$$

Следствие 1 (из теоремы 4). Если орграф связей сильно связный, и $T = \text{diag}(l_{11}^+, \dots, l_{1n}^+)$, то:

- 1) для собственного проектора матрицы $M = TL$ имеет место $M^+ = \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$;
- 2) матрица TL — сбалансированная.

Пример 1. Рассмотрим многоагентную систему с орграфом связей, приведенным на рис. 1. Также рассмотрим матрицы L_R^0 и U , первая из которых соответствует орграфу со “склеенными” в вершину $\mathbf{0}$ базовыми бикомпонентами:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$L_R^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выясним, из каких величин складывается элемент u_{16}^+ матрицы U^+ . Сумма в числителе выражения (6) для u_{16}^+ содержит шесть ненулевых слагаемых,

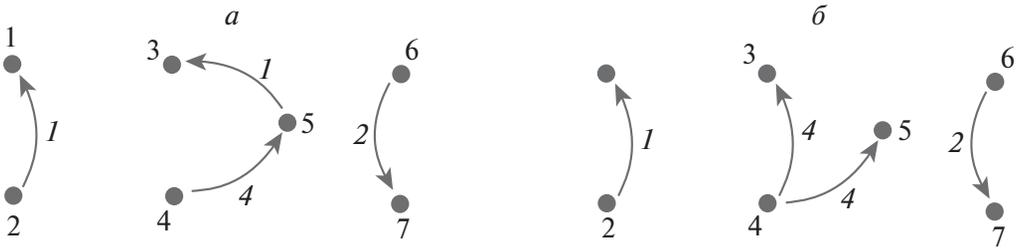


Рис. 2. Два леса — *a* и *б*, состоящие из трех исходящих деревьев с корнями 2, 4 и 6.

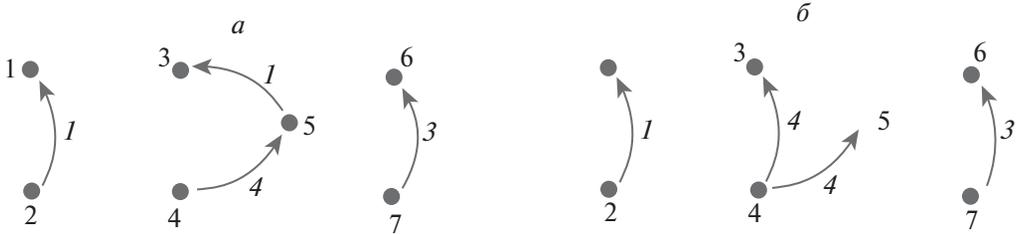


Рис. 3. Два леса — *a* и *б*, состоящие из трех исходящих деревьев с корнями 2, 4 и 7.

каждое из которых представляет собой произведение двух миноров. Одно из слагаемых равно

$$\det U \begin{pmatrix} 1357 & \dots & 12 \\ 23 & \dots & 10 \end{pmatrix} \det U \begin{pmatrix} 613578 & \dots & 12 \\ 12 & \dots & 10 \end{pmatrix}.$$

Согласно п. 3 утверждения 2 абсолютное значение ненулевого минора $\det U \begin{pmatrix} 13578 \dots 12 \\ 23 \dots 10 \end{pmatrix}$ равно произведению веса множества всех исходящих лесов на \mathcal{K} с корнями $\{2, 4, 6\} = \{1, \dots, 12\} \setminus \{1, 3, 5, 7, 8, \dots, 12\}$ на $\det L_R = 80$.

На рис. 2, *a* и 2, *б* приведены оба леса на множестве вершин $\mathcal{K} = \{1, \dots, 7\}$, исходящие из корней $\{2, 4, 6\}$. Вес первого леса равен 8, второго — 32, т.е. сумма весов этих лесов равна 40. Если это число умножим на вес дерева, показанного на рис. 1, *б*, т.е. на 80, то получится $\det U \begin{pmatrix} 13578 \dots 12 \\ 23 \dots 10 \end{pmatrix} = 40 \cdot 80 = = 3200$.

Аналогичную графовую интерпретацию имеет минор $\det U \begin{pmatrix} 13568 \dots 12 \\ 23 \dots 10 \end{pmatrix} = = -60 \cdot 80 = -4800$, абсолютное значение которого равно произведению веса множества всех исходящих лесов на \mathcal{K} с корнями $\{1 \dots 12\} \setminus \{13568 \dots 12\} = = \{247\}$ на $\det L_R = 80$.

На рис. 3 приведены оба леса, исходящие из корней $\{2, 4, 7\}$: вес первого леса равен 12, а второго равен 48, т.е. сумма весов двух лесов равна 60. Итак, $\det U \begin{pmatrix} 13578 \dots 12 \\ 23 \dots 10 \end{pmatrix} = -60 \cdot 80 = -4800$.

С другой стороны, если применить утверждение 3 для базовой бикомпоненты $\{6, 7\}$, то получим:

$$\begin{aligned} & \left| \det U \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & \dots & 12 \\ & & & & & & & 12 \\ & & & & & & 12 & \dots & 10 \end{pmatrix} \right| = \left| \det U \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 & 5 & 6 & 8 & \dots & 12 \\ & & & & & & & 12 \\ & & & & & & 12 & \dots & 10 \end{pmatrix} \right| = \\ & = \left| \det U \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & \dots & 12 \\ & & & & & & & 12 \\ & & & & & & 23 & \dots & 10 \end{pmatrix} \right| + \left| \det U \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 8 & \dots & 12 \\ & & & & & & & 12 \\ & & & & & & 23 & \dots & 10 \end{pmatrix} \right| = 3200 + 4800 = 8000. \end{aligned}$$

5. Заключение

В работе получено новое представление метода ортогональной проекции с использованием матрицы U^+ , ранее приведенного только для узкого класса орграфов связей. Показано, что метод проекции является естественным обобщением протокола консенсуса и представляется элементами псевдообратной матрицы U^+ . Установлено, что собственный проектор матрицы TL , где T — положительная диагональная матрица, можно представить как $(TL)^{\dagger} = L^{\dagger}D$, где D — положительная диагональная матрица. Доказано, что если орграф сильно связный, то у диагональной матрицы D все диагональные элементы равны между собой. Из основных результатов как следствие получен простой способ регуляризации произвольного орграфа.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 2. 1) Матрица U имеет следующий вид:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & \dots & l_{1k'} & \mathbf{0}_{1,n-k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & l_{k2} & \dots & l_{kk'} & \mathbf{0}_{1,n-k} \\ \mathbf{1}_{n-k,1} & * & * & * & L_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & U_1 \\ 1 & \ddots \\ \vdots & U_v \\ \mathbf{1}_{n-k,1} & * & * & L_R \end{pmatrix},$$

где $k' = k - v + 1$, $k = \sum_{i=1}^v m_i$ (v — число базовых бикомпонент), а матрица L_R — квадратная и невырожденная. Предположим, что упомянутый минор был получен путем вычеркивания строк, среди которых есть хотя бы одна строка с номером из множества $\{k + 1, \dots, n\}$. Тогда подматрица $U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$ будет иметь блочно-треугольный вид, правый нижний квадратный блок $L_{R'}$ которой содержит нулевую строку. Поэтому $\det L_{R'} = 0$, и $\det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} = 0$.

2) Пусть множество $\{i_2, \dots, i_r\}$ содержит все вершины $\{j_1, \dots, j_{m_s}\}$ одной — s -й базовой бикомпоненты. Тогда подматрица со строками $\{j_1, \dots, j_{m_s}\}$ содержит всего $m_s - 1$ ненулевых столбцов. Минор $\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$ состоит из членов, каждый из которых есть произведение $r - 1$ элементов подматрицы, взятых из различных строк и столбцов. Поэтому каждый такой член содержит нулевой множитель, и минор $\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$ равен нулю.

3) Если минор $\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$ отличен от нуля, то согласно пункту 2), множество $\{i_2, \dots, i_r\}$ состоит из $m_s - 1$ строк ($s = 1, \dots, v$) из каждой базовой

бикомпоненты и строк, соответствующих вершинам из $\bar{\mathcal{K}}$. Очевидно, что минор равен определителю блочно-диагональной матрицы, т.е.

$$\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} U'_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & U'_v & & 0 & \\ & & * & & & L_R \end{pmatrix},$$

где матрица U'_i получена из U_i вычеркиванием одной, например, i_k -й строки. Согласно матричной теореме о деревьях, определитель матрицы U'_i равен минору любого элемента i_k -й строки U_i и его абсолютное значение равно сумме весов всех исходящих деревьев из i_k -й вершины i -й базовой бикомпоненты. Это рассуждение верно для любого блока U'_i .

Таким образом, абсолютное значение ненулевого минора $\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$ равно произведению $\det L_R$ на вес множества всех исходящих лесов на \mathcal{K} с корнями $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_2, \dots, i_r\}$.

Доказательство утверждения 3.1) Не уменьшая общности, предположим, что вершины пронумерованы так, что $j_p = p, p = 1, \dots, m_s$. Пусть в множестве вершин $\{i_1, \dots, i_r\}$ подмножество $\{i_1, \dots, i_{r'}\}$, где $r' = r - |\bar{\mathcal{K}}|$, является подмножеством множества базовых вершин. Рассмотрим определитель $\det U \begin{pmatrix} 1 \dots m_s \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$ и представим его в блочном виде как

$$\det \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & \dots & l_{1m_s} & 0_{1,r'-m_s} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & l_{m_s 2} & \dots & l_{m_s m_s} & 0_{1,r'-m_s} & 0 \\ \mathbf{1}_{r'-p,1} & 0_{r'-p,1} & \dots & 0_{r'-p,1} & Q_{r'-m_s} & 0 \\ * & * & * & * & * & L_R \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} Q_{m_s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & Q_{r'-m_s} & \mathbf{0} \\ * & * & L_R \end{pmatrix}.$$

Согласно матричной теореме о деревьях 2, алгебраическое дополнение первого элемента любой k -й строки блока Q_{m_s} равно сумме весов деревьев, исходящих из вершины k . Поэтому определитель матрицы Q_{m_s} равен сумме весов всех исходящих деревьев базовой бикомпоненты с множеством вершин $\{1, \dots, m_s\}$, а $|\det U \begin{pmatrix} 1 \dots m_s \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}|$ — произведению суммы весов всех исходящих деревьев базовой бикомпоненты с вершинами $\{1, \dots, m_s\}$ на $|\det Q_{r'-m_s}|$, который равен сумме весов максимальных исходящих лесов на $\mathcal{K} \setminus \{1 \dots m_s\}$ с вершинами: $\mathcal{K} \setminus \{i_1, \dots, i_{r'}\}$, и на $\det L_R$. Таким образом, выполняется равенство (8).

2) Покажем, что знаки миноров $\det U \begin{pmatrix} j_p & K_p \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \neq 0$ и $\det U \begin{pmatrix} K_p \\ 2 \dots r \end{pmatrix} \neq 0, p = 1, \dots, m_s$, совпадают.

Заметим, что $\det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m_s} (-1)^{1+k+l} \det U_{k1}^s \xi = (-1)^l \zeta \xi$, где l — число строк в $U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$ до s -й базовой бикомпоненты, $U^s = (\mathbf{1}_{m_s} U_s)$, $\zeta > 0$ —

вес множества всех исходящих деревьев в s -й базовой бикомпоненте, ξ — произведение определителей других блоков. Поскольку $U \begin{pmatrix} j_p & K_p \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$ отличается от $U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$ перестановкой одной строки, их определители могут отличаться только знаком и имеет место

$$\det U \begin{pmatrix} j_p & K_p \\ 1 \dots r \end{pmatrix} = \det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} (-1)^{l+p-1} = (-1)^{2l+p-1} \zeta \xi,$$

где p — номер строки в s -м блоке.

Итак, знак $\det U \begin{pmatrix} j_p & K_p \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$ равен $(-1)^{p-1} \xi$. Легко можно установить, что $\det U \begin{pmatrix} K_p \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$ имеет знак $(-1)^{p+1} \xi$.

Доказательство теоремы 3. В силу (6) сумму элементов первой строки U^+ можно записать как

$$(II.1) \quad \sum_{i_1 \in N} u_{1i_1}^+ = \frac{\Sigma_{\mathcal{K}} + \Sigma_{\bar{\mathcal{K}}}}{D},$$

где $\Sigma_{\mathcal{K}}$ соответствует элементам из \mathcal{K} , член $\Sigma_{\bar{\mathcal{K}}}$ — вершинам из $\bar{\mathcal{K}} = N \setminus \mathcal{K}$, а

$$D = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \left(\det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \right)^2.$$

Согласно п. 1 утверждения 2, если множество $\{i_1, \dots, i_r\}$ содержит не все вершины из $\bar{\mathcal{K}}$, то соответствующий член $\det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$ в представлении D равен нулю. Также, в силу п. 1 утверждения 2 имеет место

$$\Sigma_{\bar{\mathcal{K}}} = \sum_{i_1 \in \bar{\mathcal{K}}} \sum_{i_2 < \dots < i_r} \det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix} \det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} = 0.$$

Отметим, что в $\Sigma_{\mathcal{K}}$ и D входит множитель $\det L_R$. Доказательство равенства единице соотношения $\frac{\Sigma_{\mathcal{K}}}{D}$ приведено в [11].

Доказательство утверждения 4. Справедливость данного утверждения следует из представления $u_{1k_1}^+$. Действительно, все соответствующие множители $\det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$, $\det U \begin{pmatrix} j_1 \dots j_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$ в выражении (6) для $u_{1i_1}^+$ и $u_{1j_1}^+$ отличаются только знаком, а $\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$ и $\det U \begin{pmatrix} j_2 \dots j_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$ — весами исходящих деревьев из i_1 и j_1 .

Доказательство теоремы 4. Теорему докажем конструктивно, т.е. построим такую диагональную матрицу D . Не уменьшая общности, предположим, что лапласовская матрица L имеет блочно-треугольный вид, а для L также построим вспомогательную матрицу B^L (II.2), которая получена из L заменой первого столбца в каждом блоке L_s , соответствующем базовой би-

компоненте s , на столбец из единиц:

$$(П.2) \quad B^L = \begin{pmatrix} B_1^L & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_2^L & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_v^L & 0 \\ * & * & \cdots & * & L_R \end{pmatrix},$$

диагональные блоки $B_s^L, s = 1, \dots, v$, для матрицы B^L определены как

$$(П.3) \quad B_s^L = \begin{pmatrix} 1 & l_{12}^s & \cdots & l_{1m_s}^s \\ 1 & l_{22}^s & \cdots & l_{2m_s}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & l_{m_s 2}^s & \cdots & l_{m_s m_s}^s \end{pmatrix}.$$

Аналогично B^L и B_s^L , определим матрицы B^M и B_s^M для M .

Заметим, что i -я строка M получается путем умножения аналогичной строки L на τ_i . Определим собственный проектор M^\top согласно п. 1 теоремы 1:

$$(П.4) \quad m_{ij}^\top = \frac{\varepsilon(\mathcal{F}^{j \rightarrow i})}{\varepsilon(\mathcal{F})}.$$

Согласно теореме 2 для каждой s -й базовой бикомпоненты сумма весов всех исходящих деревьев (на множестве всех вершин из данной базовой бикомпоненты) равна $\det(B_s)$. Поэтому $\varepsilon(\mathcal{F}) = \det(B^M)$.

Пусть ни в одном максимальном исходящем лесе вершина i не достижима из j . Так как графы, соответствующие лапласовским матрицам L и $M = TL$, имеют одинаковую структуру, то $m_{ij}^\top = l_{ij}^\top = 0$.

Рассмотрим случай, когда хотя бы в одном максимальном исходящем лесе i достижима из j , причем j является вершиной из s -й базовой бикомпоненты. Обозначим через $\{\Gamma_k(V, E_k)\}$ множество всех остовных подграфов, которое получилось из множества всех максимальных исходящих остовных орграфов, в которых i достижима из корневой вершины j , с добавлением к ним всех недостающих дуг из базовых бикомпонент. Пусть B^{L^k} и B^{M^k} — соответствующие матрицы полученных орграфов, построенные по аналогии с B^L и B^M . Диагональные блоки B^{L^k} и B^{M^k} , которые соответствуют базовым бикомпонентам, совпадают с аналогичными блоками матриц B^L и B^M соответственно. Очевидно, что число $\varepsilon(\mathcal{F}^{j \rightarrow i})$ для орграфа, соответствующего матрице M , равно сумме алгебраических дополнений элементов (j, i') матриц B^{M^k} т.е. $\varepsilon(\mathcal{F}^{j \rightarrow i}) = \sum_k B_{ji'}^{M^k}$, где $i' \in \{1, \dots, n\}$ — номер столбца B^{M^k} , который соответствует номеру столбца из единиц в подматрице, соответствующей базовой бикомпоненте s .

Пусть $j' \in \{1, \dots, m_s\}$ — номер строки блока с номером s , который соответствует строке j .

Важно подчеркнуть, что в отличие от i' , номер j' указывает на строку блока s . Тогда в силу $B_q^M = B_q^{M^k}$ для всех q и k получим

$$\begin{aligned} m_{ij}^\dagger &= \frac{\varepsilon(\mathcal{F}^{j \rightarrow i})}{\varepsilon(\mathcal{F})} = \frac{\sum_k \det B_{ji'}^{M^k}}{\det B^M} = \\ &= \frac{\prod_{q=1, q \neq s}^v \det B_q^M \left| \det B_s^M \begin{pmatrix} (1 \dots m_s) \setminus j' \\ 2 \dots m_s \end{pmatrix} \right| \sum_k \det M_R^k}{\det M_R \prod_{q=1}^v \det B_q^M} = \\ &= \frac{\left| \det B_s^M \begin{pmatrix} (1 \dots m_s) \setminus j' \\ 2 \dots m_s \end{pmatrix} \right| \sum_k \det M_R^k}{\det M_R \det B_s^M}. \end{aligned}$$

Отметим, что L_R^k и M_R^k — блоки, соответствующие небазовым вершинам в матрицах B^{L^k} и B^{M^k} соответственно. Далее полученное выражение представляем через матрицу L :

$$\begin{aligned} m_{ij}^\dagger &= \frac{\prod_{i=1, i \neq j'}^{m_s} \tau_i \left| \det L_s^M \begin{pmatrix} (1 \dots m_s) \setminus j' \\ 2 \dots m_s \end{pmatrix} \right| \sum_k \det L_R^k}{\prod_{i=1}^{m_s} \tau_i \sum_{p=1}^{m_s} \frac{1}{\tau_p} \det B_s^L \begin{pmatrix} (1 \dots m_s) \setminus p \\ 2 \dots m_s \end{pmatrix} \det L_R} = \\ &= \frac{\left| \det L_s^M \begin{pmatrix} (1 \dots m_s) \setminus j' \\ 2 \dots m_s \end{pmatrix} \right| \sum_k \det L_R^k}{\tau_j \sum_{p=1}^{m_s} \frac{1}{\tau_p} \det B_s^L \begin{pmatrix} (1 \dots m_s) \setminus p \\ 2 \dots m_s \end{pmatrix} \det L_R}. \end{aligned}$$

Знаменатель и числитель домножим на $\prod_{i=1}^v \det(B_i^L)$. Заметим, что данное число отлично от нуля, так как, согласно матричной теореме о деревьях, оно равно весу множества всех остовных исходящих лесов в орграфе, который состоит только из базовых бикомпонент. Тогда:

$$m_{ij}^\dagger = \frac{\left| \det L_s^M \begin{pmatrix} (1 \dots m_s) \setminus j' \\ 2 \dots m_s \end{pmatrix} \right| \sum_k \det L_R^k \det B_s^L \prod_{q \neq s} \det B_q^L}{\tau_j \sum_{p=1}^{m_s} \frac{1}{\tau_p} \det B_s^L \begin{pmatrix} (1 \dots m_s) \setminus p \\ 2 \dots m_s \end{pmatrix} \det L_R \prod_{q=1}^v \det B_q^L}.$$

Заметим, что в последней дроби

$$l_{ij}^{\dagger} = \frac{\left| \det L_s^M \left(\begin{smallmatrix} 1 \dots m_s \\ 2 \dots m_s \end{smallmatrix} \setminus j' \right) \right| \sum_k \det L_R^k \prod_{q \neq s} \det B_q^L}{\det L_R \prod_{q=1}^v \det B_q^L}.$$

Тогда

$$(II.5) \quad m_{ij}^{\dagger} = l_{ij}^{\dagger} \frac{\det B_s^L}{\tau_j \det C_s},$$

где матрицы C_s , $s = 1, \dots, v$, определены следующим образом:

$$(II.6) \quad C_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1^s} & l_{12}^s & \dots & l_{1m_s}^s \\ \frac{1}{\tau_2^s} & l_{22}^s & \dots & l_{2m_s}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\tau_{m_s}^s} & l_{m_s 2}^s & \dots & l_{m_s m_s}^s \end{pmatrix}.$$

Построим две диагональные матрицы $F = \text{diag}(f_1, \dots, f_n)$ и $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$ следующим образом: $f_t = \det B_s^L$ и $h_t = \det C_s$, если вершина t принадлежит s -й базовой бикомпоненте. Для всех остальных диагональных элементов матриц F и H положим $f_t = h_t = 1$.

Тогда

$$(II.7) \quad M^{\dagger} = L^{\dagger} T^{-1} F H^{-1} = L^{\dagger} D.$$

Отметим, что в (II.5) на вершину i не накладывається никаких требований. В частности, она может принадлежать некоторой базовой бикомпоненте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Olfati-Saber R., Fax J.A., Murray R.M.* Consensus and cooperation in networked multi-agent systems // Proceedings of the IEEE. 2007. V. 95. No. 1. P. 215–233.
2. *Jadbabaie A., Lin J., Morse A.S.* Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules // IEEE Transactions on automatic control. 2003. V. 48. No. 6. P. 988–1001.
3. *Olfati-Saber R.M., Murray R.M.* Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. V. 49. No. 9. P. 1520–1533.
4. *Ren W., Beard R.W., Atkins E.M.* Information consensus in multivehicle cooperative control // IEEE Control systems magazine. 2007. V. 27. No. 2. P. 71–82.
5. *Mesbahi M., Egerstedt M.* Graph theoretic methods in multiagent networks / Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks. Princeton University Press, 2010.

6. *Chebotarev P., Agaev R.* The Forest Consensus Theorem // IEEE Trans. Automat. Control. 2014. V. 59. No. 9. P. 2475–2479.
7. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Модели латентного консенсуса // АиТ. 2017. № 1. С. 106–120.
8. *Agaev R.P.* On the role of the eigenprojector of the Laplacian matrix for reaching consensus in multiagent second-order systems // Autom. Remote Control. 2019. T. 80. No. 11. P. 2033–2042.
9. *Гантмахер Ф.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
10. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы // АиТ. 2011. № 12. С. 38–59.
11. *Agaev R., Khomutov D.* Graph Interpretation of the Method of Orthogonal Projection for Regularization in Multiagent Systems // 14th International Conference “Management of Large-scale System Development” (MLSD). IEEE. 2021. P. 1–4.
12. *Rothblum G.* Computation of the eigenprojection of a nonnegative matrix at its spectral radius / Stochastic Systems: Modeling, Identification and Optimization, II. Springer, Berlin, Heidelberg. 1976. P. 188–201.
13. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
14. *Ben-Israel A., Greville T.N.E.* Generalized Inverses: theory and applications (Second Edition). Springer, 2003.
15. *Fiedler M., Sedláček J.O.* W -basich orientovaných grafu // Časopis pro pěstování matematiky. 1958. V. 83. No. 2. P. 214–225.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 16.06.2022

После доработки 25.12.2022

Принята к публикации 29.12.2022

© 2023 г. А.Н. НАИМОВ, д-р физ.-мат. наук (naimovan@vogu35.ru),
М.В. БЫСТРЕЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (pmbmv@bk.ru)
(Вологодский государственный университет, Вологда),
А.Б. НАЗИМОВ, д-р физ.-мат. наук (n.akbar54@mail.ru)
(Международный инновационный университет, Сочи)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ¹

Для динамической системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, исследована задача идентификации периодических режимов. Данная задача состоит в определении периодичности произвольного решения системы уравнений при обнаружении периодичности наблюдаемого значения решения. Исследованы условия, при которых разрешима задача идентификации периодических режимов. Сформулированы и доказаны теоремы, дополняющие известные результаты о наблюдаемости динамических систем.

Ключевые слова: динамическая система, идентификация периодических режимов, наблюдаемое значение.

DOI: 10.31857/S0005231023050021, EDN: AFNHKP

1. Введение

Рассмотрим динамическую систему, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями вида

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где \mathbb{R}^n — евклидово пространство n -мерных векторов с вещественными координатами, $n \geq 2$, $F(t, y) : \mathbb{R}^{1+n} \mapsto \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, периодическое по t с периодом $\omega > 0$. Всякое ω -периодическое решение $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $x(t + \omega) = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ системы уравнений (1) называем периодическим режимом. Качественная картина фазовых траекторий решений динамической системы (1) во многом определяется наличием периодических режимов. Нахождение периодических режимов аналитически или численно, в общем, весьма затруднительно. Поэтому представляется актуальным нахождение периодических режимов динамической системы (1) посредством

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00032).

так называемых наблюдаемых значений $Cx(t)$, где C — задаваемая ненулевая матрица размера $m \times n$. Определение ω -периодичности произвольного решения $x(t)$ при обнаружении ω -периодичности наблюдаемого значения $Cx(t)$ назовем задачей идентификации периодических режимов в динамической системе (1).

В теории управления задача наблюдаемости, состоящая в однозначном определении $x(t)$ по наблюдаемому значению $Cx(t)$, достаточно изучена для линейных систем (см., например, [1, 2]). Но задача идентификации периодических режимов по наблюдаемым значениям для линейных и нелинейных систем не исследована. Можно привести примеры линейных и нелинейных систем, где периодические режимы отсутствуют, хотя наблюдаемые значения периодичны. В настоящей работе выделены классы систем вида (1) и для них исследованы условия, при которых для произвольного решения $x(t)$ из ω -периодичности наблюдаемого значения $Cx(t)$ следует ω -периодичность $x(t)$. Сформулированы и доказаны теоремы, дополняющие известные результаты о наблюдаемости динамических систем.

Исследованию периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены многочисленные работы. Среди них можно отметить идейно близкие авторам монографии [3, 4], где представлены основополагающие методы исследования ограниченных и периодических решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В [5–7] исследованы условия существования периодических режимов в динамических моделях теории управления.

2. Основные результаты

Исследуем задачу идентификации периодических режимов для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + f(t, Cx), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $n \geq 2$, A — квадратная матрица порядка n , C — матрица размера $m \times n$, $f(t, y) : \mathbb{R}^{1+n} \mapsto \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, ω -периодическое по t .

Введем матрицу

$$(3) \quad B = [C; CA; \dots; CA^{n-1}],$$

составленную по строкам матриц C, CA, \dots, CA^{n-1} .

Верна следующая

Теорема 1. Пусть ранг матрицы B , определяемой формулой (3), равен n :

$$(4) \quad \text{rank}(B) = n.$$

Тогда для произвольного решения системы уравнений (2) из ω -периодичности $Cx(t)$ следует ω -периодичность $x(t)$.

Условие (4) в теории управления называют условием полной наблюдаемости для пары матриц (A, C) [2].

В качестве примера рассмотрим следующую систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(5) \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2 + f_1(t, Cx), \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3 + f_2(t, Cx), \quad \frac{dx_3}{dt} = f_3(t, Cx),$$

где

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, $f(t, y) = (f_1(t, y), f_2(t, y), f_3(t, y))^T$: $\mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ — непрерывное отображение, ω -периодическое по t . Системе уравнений (5) соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $B = [C; CA; CA^2]$ условие $\text{rank}(B) = 3$ выполняется лишь при $c_1 \neq 0$. Следовательно, согласно теореме 1 при $c_1 \neq 0$ для произвольного решения системы уравнений (5) из ω -периодичности наблюдаемого значения $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t)$ следует ω -периодичность самого решения $x(t)$. Существование ω -периодических решений зависит от задаваемых функций $f_1(t, y), f_2(t, y), f_3(t, y)$. Например, полагая $\omega = 2\pi$, зададим

$$f_1(t, y) = -2 \cos t \varphi_1(y), \quad f_2(t, y) = -2 \sin t \varphi_2(y), \quad f_3(t, y) = \cos t \varphi_3(y),$$

где $\varphi_k(y) = 1$ при $|y| \leq |c_1| + |c_2| + |c_3|$, $k = 1, 2, 3$. В этом случае вектор-функция $x^0(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t)^T$ является 2π -периодическим решением системы уравнений (5).

Выясним, при каких условиях система уравнений (2) имеет хотя бы одно решение с ω -периодическим наблюдаемым значением $Cx(t)$. Очевидно, такое решение существует, если система уравнений имеет ω -периодическое решение. Из теоремы 13.4, доказанной в монографии [8, с. 77–80], вытекает, что система уравнений (2) имеет ω -периодическое решение, если матрица A не имеет чисто мнимых собственных значений, кратных $i2\pi/\omega$, и отображение $f(t, y)$ удовлетворяет условию $|y|^{-1}|f(t, y)| \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$. Представляют интерес случаи, когда существует не ω -периодическое решение $x(t)$ с ω -периодическим наблюдаемым значением $Cx(t)$.

Рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(6) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где вектор-функция $g(t)$ предполагается заданным, непрерывным и ω -периодическим. Справедлива следующая

Теорема 2. Система уравнений (6) имеет единственное решение с ω -периодическим наблюдаемым значением $Cx(t)$ тогда и только тогда, когда выполнены условие (4) и условие

$$(7) \quad \det(e^{\omega A} - E) \neq 0,$$

где $e^{\omega A}$ — матричная экспонента, E — единичная матрица порядка n .

Заметим, что при выполнении условия (7) однородная система

$$(8) \quad \frac{dx}{dt} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

не имеет ненулевого ω -периодического решения [4]. Поэтому из теоремы 2 вытекает, что если выполнено условие (7) и нарушено условие (4), то система уравнений (8) имеет не ω -периодическое решение $x(t)$ с ω -периодическим наблюдаемым значением $Cx(t)$.

Теперь рассмотрим систему уравнений вида

$$(9) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + G(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где отображение $G(t, y) : \mathbb{R}^{1+n} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывно, ω -периодическое по t и удовлетворяет условию Липшица

$$|G(t, y_1) - G(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n,$$

с константой $L \geq 0$, не зависящей от t , y_1 и y_2 . Из общих свойств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений [9, гл. 2, §3] следует, что любое решение $x(t)$ системы уравнений (9) определено при всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть выполнено условие (4). Тогда

1) *существует число $M > 0$, зависящее лишь от матриц A , C , и такое что для любой вектор-функции $z(t) \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ справедлива оценка*

$$(10) \quad \max_{0 \leq t \leq 1} |z(t)| \leq M \left(\max_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{dz(t)}{dt} - Az(t) \right| + \max_{0 \leq t \leq 1} |Cz(t)| \right);$$

2) *если $LM < 1$, то для произвольного решения $x(t)$ системы уравнений (9) при любом $a \in \mathbb{R}$ верна оценка*

$$(11) \quad \max_{a \leq t \leq a+1} |x(t + \omega) - x(t)| \leq (1 - LM)^{-1} M \max_{a \leq t \leq a+1} |Cx(t + \omega) - Cx(t)|.$$

Доказательство теорем 1–3 дано в Приложении.

Приведенные теоремы можно обобщить, предполагая матрицы A и C зависящими от t непрерывно и ω -периодично, воспользовавшись результатами из книги [1, гл. 4].

Проверим справедливость следующей леммы.

Лемма. Для произвольного вектора $u \in \mathbb{R}^n$ тождество $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in (t_1, t_2)$ равносильно равенствам

$$(II.1) \quad Cu = 0, \quad CAu = 0, \quad \dots, \quad CA^{n-1}u = 0.$$

Доказательство леммы. Пусть имеет место тождество $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in (t_1, t_2)$. Проверим, что $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$. Для этого достаточно показать, что при любом $v \in \mathbb{R}^m$ функция $\varphi(t) = \langle Ce^{tA}u, v \rangle$ тождественно равна нулю на \mathbb{R} .

Найдем производные функции $\varphi(t)$: $\varphi^{(k)}(t) = \langle CA^k e^{tA}u, v \rangle$, $k = 1, 2, \dots$. Далее, воспользуемся тем, что согласно теореме Гамильтона–Кэли [10, с. 93] матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$A^n + q_1 A^{n-1} + \dots + q_{n-1} A + q_n E = O,$$

где

$$\lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + \dots + q_{n-1} \lambda + q_n \equiv \det(\lambda E - A).$$

Отсюда вытекает, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению

$$y^{(n)}(t) + q_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + q_{n-1} y'(t) + q_n y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Для данного уравнения только нулевое решение может обращаться в ноль тождественно на каком-либо интервале. Так как по условию $\varphi(t) \equiv 0$, $t \in (t_1, t_2)$, поэтому $\varphi(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, имеет место тождество $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$. Данное тождество дифференцируя k раз и полагая $k = 0, 1, \dots, n-1$, $t = 0$, получаем равенства (II.1).

Обратно, если имеют место равенства (II.1), то из теоремы Гамильтона–Кэли следует, что $CA^k u = 0$ при любом целом $k \geq 0$. Отсюда по определению матричной экспоненты выводим $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть выполнено условие (4) и $x(t)$ — решение системы уравнений (2), удовлетворяющее условию

$$(II.2) \quad Cx(t + \omega) = Cx(t), \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Систему уравнений (2) решим относительно $x(t)$, предполагая заданной вектор-функцию $f(t, Cx(t))$:

$$(II.3) \quad x(t) = e^{tA} \left(x(0) + \int_0^t e^{-sA} f(s, Cx(s)) ds \right).$$

С учетом этого равенства условие (П.2) принимает следующий вид:

$$Ce^{tA} \left((e^{\omega A} - E) x(0) + \int_0^{t+\omega} e^{(\omega-s)A} f(s, Cx(s)) ds - \int_0^t e^{-sA} f(s, Cx(s)) ds \right) = 0.$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_0^{t+\omega} e^{(\omega-s)A} f(s, Cx(s)) ds - \int_0^t e^{-sA} f(s, Cx(s)) ds \right) = \\ = f(t + \omega, Cx(t + \omega)) - f(t, Cx(t)) = 0, \quad t \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^{t+\omega} e^{(\omega-s)A} f(s, Cx(s)) ds - \int_0^t e^{-sA} f(s, Cx(s)) ds \equiv \int_0^{\omega} e^{(\omega-s)A} f(s, Cx(s)) ds,$$

и получаем равенство

$$Ce^{tA} \left((e^{\omega A} - E) x(0) + \int_0^{\omega} e^{(\omega-s)A} f(s, Cx(s)) ds \right) = 0, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Отсюда в силу леммы выводим:

$$(П.4) \quad B \left((e^{\omega A} - E) x(0) + \int_0^{\omega} e^{(\omega-s)A} f(s, Cx(s)) ds \right) = 0.$$

Таким образом, для решения $x(t)$ системы уравнений (2) из (П.2) вытекают (П.4) и

$$(П.5) \quad f(t + \omega, Cx(t + \omega)) = f(t, Cx(t)), \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Верно и обратное, если для решения $x(t)$ системы уравнений (2) выполнены (П.4) и (П.5), то имеет место (П.2).

Так как $\text{rank}(B) = n$, поэтому (П.4) возможно лишь при условии

$$(П.6) \quad (e^{\omega A} - E) x(0) + \int_0^{\omega} e^{(\omega-s)A} f(s, Cx(s)) ds = 0.$$

Из (П.3) и (П.6) следует ω -периодичность $x(t)$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Выше показали, что для решения $x(t)$ системы уравнений (2) условие (П.2) равносильно условиям (П.4) и (П.5).

Полагая в этих условиях $f(s, Cx(s)) \equiv g(s)$, получаем, что система уравнений (6) имеет единственное решение с ω -периодическим наблюдаемым значением $Cx(t)$ тогда и только тогда, когда система алгебраических уравнений

$$B \left((e^{\omega A} - E) x(0) + \int_0^{\omega} e^{(\omega-s)A} g(s) ds \right) = 0$$

имеет единственное решение с неизвестным $x(0) \in \mathbb{R}^n$. А такое возможно лишь при выполнении условия

$$\text{rank} (B (e^{\omega A} - E)) = n.$$

Данное условие согласно определению и общим свойствам ранга матрицы равносильно условиям (4) и (7).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что оценка (10) неверна. Тогда существует бесконечная последовательность вектор-функций $z_j(t) \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \dots$ такая, что

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |z_j(t)| > j \left(\max_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{dz_j(t)}{dt} - Az_j(t) \right| + \max_{0 \leq t \leq 1} |Cz_j(t)| \right), \quad j = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим вектор-функции

$$v_j(t) = r_j^{-1} z_j(t), \quad t \in [0, 1], \quad j = 1, 2, \dots,$$

где r_j — максимум функции $|z_j(t)|$ на отрезке $[0, 1]$. Для этих вектор-функций имеем:

$$1 = \max_{0 \leq t \leq 1} |v_j(t)| > j \left(\max_{0 \leq t \leq 1} |v_j'(t) - Av_j(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |Cv_j(t)| \right), \quad j = 1, 2, \dots$$

Переходя к пределу вдоль равномерно сходящейся подпоследовательности вектор-функций $v_{j_1}(t), v_{j_2}(t), \dots$, получаем функцию $v(t) \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ такую, что

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |v(t)| = 1, \quad v'(t) - Av(t) \equiv 0, \quad Cv(t) \equiv 0.$$

Отсюда выводим:

$$v(t) \equiv e^{tA} v(0), \quad v(0) \neq 0, \quad Ce^{tA} v(0) \equiv 0.$$

Из последнего тождества в силу леммы следует, что система уравнений (П.1) имеет ненулевое решение, что противоречит условию $\text{rank}(B) = n$. Оценка (10) доказана.

Пусть $LM < 1$ и $x(t)$ — произвольное решение системы уравнений (9). В оценке (10) вместо $z(t)$ подставляя $x(t + a + \omega) - x(t + a)$, получаем

$$\begin{aligned} & \max_{a \leq t \leq a+1} |x(t + \omega) - x(t)| \leq \\ & \leq M \left(\max_{a \leq t \leq a+1} |G(t, x(t + \omega)) - G(t, x(t))| + \max_{a \leq t \leq a+1} |Cx(t + \omega) - Cx(t)| \right). \end{aligned}$$

Далее, воспользуясь условием Липшица

$$\max_{a \leq t \leq a+1} |G(t, x(t + \omega)) - G(t, x(t))| \leq L \max_{a \leq t \leq a+1} |x(t + \omega) - x(t)|,$$

получаем оценку (11).

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. Учебное пособие. 2-е изд. СПб.: Изд-во “Лань”, 2009.
2. *Леонов Г.А.* Введение в теорию управления. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2004.
3. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
5. *Блиман П.А., Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* Секторные оценки нелинейностей и существование автоколебаний в системах управления // *АиТ.* 2000. № 6. С. 3–18.
Bliman P.A., Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I. Sector Estimates for Nonlinearities and the Existence of Auto-Oscillations in Control Systems // *Autom. Remote Control.* 2000. V. 61. No. 6. P. 889–903.
6. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* Существование континуумов циклов в гамильтоновых системах управления // *АиТ.* 2001. № 2. С. 65–74.
Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I. Existence of Continua of Cycles in Hamiltonian Control Systems // *Autom. Remote Control.* 2001. V. 62. No. 2. P. 227–235.
7. *Перов А.И.* Об одном критерии устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // *АиТ.* 2013. № 2. С. 22–37.
Perov A.I. On One Stability Criterion for Linear Systems of Differential Equations with Periodic Coefficients // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74. No. 2. P. 183–195.
8. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
10. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 23.01.2023

После доработки 06.02.2023

Принята к публикации 20.03.2023

© 2023 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается гладкая автономная система общего вида, допускающая невырожденное периодическое решение. Строится глобальное семейство (по параметру h) невырожденных периодических решений, выводится закон монотонного изменения периода на семействе, доказывается существование редуцированной системы второго порядка. Для нее решается задача стабилизации колебания управляемой системы, выделенного значением параметра h . Находится гладкое автономное управление, конструируется притягивающий цикл.

Ключевые слова: автономная система, невырожденное периодическое решение, глобальное семейство, теорема Ляпунова о центре, управление, притягивающий цикл, естественная стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231023050033, EDN: AFVGEI

1. Введение

В 1927 г. Ван дер Поль предложил уравнение, описывающее линейный осциллятор, на который действует малая нелинейная сила, линейная по скорости, и создающая диссипацию в каждой текущей точке траектории (диссипация Ван дер Поля). Уравнение допускает притягивающий цикл. Впоследствии Л.С. Понтрягин в [1] нашел достаточные условия для выделения цикла из семейства периодических решений гамильтоновой системы: применялись негамильтоновы возмущения. В линейном осцилляторе колебания изохронные, в нелинейной гамильтоновой системе период колебаний зависит от постоянной энергии.

В [2] диссипация типа Ван дер Поля вводилась для семейства периодических решений, в котором период монотонно зависит от параметра семейства h : для линейного осциллятора получается диссипация Ван дер Поля. Построена система, в которой для стабилизации колебания с параметром h выбирается соответствующее значение параметра в управлении. Управляемая система остается автономной и обладает асимптотически орбитально устойчивым циклом. Эти результаты развивались в [3–5], мехатронная система стабилизации предложена в [6]. В многомерных системах строилась редуцированная система возможного низшего порядка.

Другие исследования по стабилизации желаемого режима колебания отличаются применением управлений, явно зависящих от времени. Приведем некоторые из них. Обзор на примере перевернутого маятника дается в [7]. В [8] предлагается раскачивающее управление (swinging control). В [9] решается задача об орбитальной стабилизации периодических решений малоприводных нелинейных систем (с числом независимых приводов на единицу меньше числа степеней свободы неуправляемой консервативной системы). Синтезированный нелинейный закон управления с обратной связью зависит от времени. Стабилизация желаемых уровней механической энергии посредством импульсного управления проводится в [10], робастное стабилизирующее управление колебаниями ищется неявным методом Ляпунова в [11].

Редуцированную систему можно выделить, когда описано все множество периодических решений. В нелинейных системах период колебаний, как правило, меняется от колебания к колебанию. Множество одночастотных колебаний с монотонным изменением периода на нем от параметра, принимающего все возможные для множества значения, становится единицей такого множества и называется глобальным семейством периодических решений. В фазовом пространстве глобальное семейство заполняет связное инвариантное множество. В системе может быть конечное или счетное число глобальных семейств.

Задача о глобальном семействе первоначально возникла в многочисленных приложениях теоремы А.М. Ляпунова о центре (1892 г.). В теореме устанавливается существование локального семейства нелинейных периодических движений, примыкающей к равновесию консервативной системы. В конкретных задачах всегда встает вопрос о границе применимости ляпуновского семейства. Прогресс в вопросе о границе начался с исследований А.А. Зевина (1997 г.). В [12] даны условия на гамильтониан, гарантирующие в компакте $\Omega \in \mathbb{R}^{2n}$ продолжение ляпуновского семейства на границу $\partial\Omega$. Результаты развиты в [13]: найдены строго звездобразные (strictly starshaped) гамильтонианы, для которых условия продолжения [12] выполняются.

Сейчас стало понятно, что вопрос о границе в теореме Ляпунова разрешается знанием о глобальном семействе периодических решений, которое включает, как составляющее, локальное ляпуновское семейство.

Обратимая механическая система выделяется свойством пространственно-временной симметрии, однако в общем случае не допускает первый интеграл. В ней рассматриваются симметричные периодические движения. Глобальные семейства в этих системах изучались (см. [4, 5, 14, 15]); понятие глобального семейства вводилось в [14]. Результаты по глобальному семейству (включая вопросы его существования, построения, свойства и т.д.) использовались при нахождении управления с меняющимся значением параметром в [4–6].

В данной статье для автономной системы общего вида, не стесненной дополнительными ограничениями (гамильтоновость, обратимость, консервативность и т.д.), ставится и решается задача построения глобального семей-

ства невырожденных периодических решений. При этом применяется подход Понтрягина в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [16]) введения непродолжаемого решения. Во второй части статьи для редуцированной системы второго порядка строится управляемая система. Находится гладкое автономное управление с настраиваемым параметром, выделяющим стабилизируемое колебание.

2. Невырожденное периодическое решение автономной системы

Рассматривается гладкое автономное уравнение

$$(1) \quad \dot{z} = Z(z), \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

общее решение которого обозначается через $z(z_1^0, \dots, z_n^0, t)$, где $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$ — начальная точка (при $t = 0$). Необходимое и достаточное условие существования T -периодического решения системы (1) записывается в виде равенства

$$(2) \quad f \equiv z(z_1^0, \dots, z_n^0, T) - z^0 = 0.$$

Пусть уравнение (2) имеет решение $z^0 = z^*$, $T = T^*$, не совпадающее с равновесием¹: $Z(z^*) \neq 0$. В силу автономности системы (1) уравнение (2) вместе с указанным решением всегда обладает семейством решений по параметру γ — сдвига точки z^0 вдоль траектории:

$$(3) \quad z^0 = z^*(\gamma), \quad T = T^*.$$

Вычисляется ранг Ra функциональной матрицы A_f (матрицы Якоби) для функции f с параметром T в точке z^* при $T = T^*$. Тогда получается: $\text{Ra} \leq n - 1$.

Определение 1. Случай $\text{Ra} = n - 1$ называется невырожденным для периодического решения. При $\text{Ra} = n - 1$ периодическое решение называется невырожденным, в противном случае, оно называется вырожденным.

Далее исследуется случай $\text{Ra} = n - 1$.

Уравнение (2) может допускать единственное решение вида (3). Тогда автономное уравнение (1) имеет изолированное периодическое решение — цикл с периодом T^* . Альтернативой будет семейство решений, в котором период T меняется от решения к решению, т.е. является функцией некоторого параметра h : $z^0 = z^0(\gamma, h)$, $T = T(h)$.

Из равенства (2) в окрестности решения (3) выводится система линейных равенств

$$(4) \quad \begin{aligned} \xi_s &\equiv \frac{\partial f_s}{\partial z_1^0} dz_1^0 + \dots + \frac{\partial f_s}{\partial z_n^0} dz_n^0 + \frac{\partial f_s}{\partial T} dT = 0, \quad s = 1, \dots, n, \\ f &= (f_1, \dots, f_n), \end{aligned}$$

¹ замечание рецензента

в которой частные производные вычисляются при $z^0 = z^*$, $T = T^*$. Система (4), как и равенство (2), удовлетворяется тождественно по сдвигу γ . Так как производная

$$\frac{\partial f_s}{\partial T} = \frac{\partial z(z^0, T)}{\partial T} = Z_s(z^0),$$

то это необходимо приводит к линейной зависимости функций $Z_s(z^0)$, $s = 1, \dots, n$.

В ситуации цикла система (4) выполняется только при $\Delta T = T - T^* = 0$. Матрица A_f имеет простое нулевое собственное значение.

Далее рассматривается случай, когда матрица A_f содержит жорданову 2-клетку из нулевых собственных значений. Здесь имеем скалярный параметр h (см. [17]). Из равенств (4), рассматриваемых как система линейных уравнений с матрицей A_f , выводится существование в уравнении (2) локального семейства решений по dT . Соответственно, уравнение (1) допускает локальное h -семейство периодических решений. Для T^* -периодического решения: $T^* = T(h^*)$, $T'(h^*) \neq 0$ (через $'$ обозначается дифференцирование по h). Параметр h принадлежит окрестности числа h^* .

Далее h называется параметром семейства периодических решений. Функция $T(h)$ — монотонна, поэтому за h можно выбирать сам период T .

В ситуации семейства решения уравнений в вариациях состоят из частных производных от периодического решения соответственно по t и h . В результате дифференцирования по h получается растущее вместе со временем t решение, которое выписывается, например, в [18, стр. 416, формула (9.9)].

Вводится определение 2.

Определение 2. Семейство периодических решений уравнения (1) называется невырожденным, если период $T(h)$ на нем монотонно зависит от параметра h .

Определение 2 справедливо для рассмотренного локального семейства, в котором h меняется в окрестности числа h^* . Оно остается справедливым для любого семейства периодических решений: на нем h меняется в интервале. Значит, существует интервал изменения параметра h , который отвечает всем периодическим решениям семейства.

Определение 3. Невырожденное семейство периодических решений, на котором параметр h принимает всевозможные для решений семейства значения, называется глобальным семейством.

В фазовом пространстве глобальное семейство представляется связным множеством точек. Интервал изменения h в глобальном семействе может быть конечным (энергия маятника от нижнего до верхнего равновесий) или неограниченным (неограниченные по координате колебания). В уравнении (1) может существовать одно, несколько или счетное множество глобальных семейств невырожденных периодических решений. Предметом статьи будет отдельное глобальное семейство.

Для обозначения невырожденного периодического решения, принадлежащего семейству, далее применяется сокращение НПП. Тогда глобальное семейство невырожденных периодических решений будет называться глобальным семейством НПП и обозначается через Σ .

НПП существует для системы размерности $n \geq 2$. Колебания математического маятника дают пример НПП: $\ddot{x} + \sin x = 0$, $n = 2$, $Ra = 1$. При этом локальные колебания близ нижнего равновесия образуют ляпуновское семейство НПП. Его продолжение по периоду приводит ко всему семейству колебаний маятника (глобальное семейство НПП), связывающему нижнее и верхнее равновесия. Период колебаний на нем, начиная со значения 2π , монотонно, вместе с амплитудой колебания, стремящейся к π , стремится к бесконечности.

В линейном осцилляторе реализуется семейство вырожденных (изохронных) колебаний одного периода: $n = 2$, $Ra = 0$.

Замечание 1. В обратимых механических системах НПП могут быть симметричными, для таких решений понятие НПП уточняется в [4].

3. Локальные свойства НПП

НПП обладает следующими свойствами.

1°. Свойство локальной продолжимости НПП.

В системе (4) приращение dT не равно нулю и меняется независимо от γ . При непрерывном двустороннем изменении приращения dT из системы (4) находятся все кривые семейства НПП. Поэтому уравнение (1) вместе с НПП, где $h = h^*$, обладает семейством НПП с монотонной зависимостью периода $T(h)$ от h . При этом параметр h принадлежит некоторой окрестности числа h^* . Приращение dT ограничивается условием $Ra = n - 1$.

Семейство НПП также можно выделять интервалом изменения периода T ; семейство обозначается через $\Sigma(T)$.

2°. Семейство $\Sigma(T)$ заполняет двумерную область $\hat{\Sigma}(T)$.

Область $\hat{\Sigma}(T)$ образована замкнутыми кривыми — НПП уравнения (1), которые параметризованы сдвигом γ . Эти кривые меняются вместе с параметром семейства h .

Замечание 2. На локальном семействе период является единственным параметром. При этом $T'(h^*) \neq 0$ и период зависит от одного параметра h (закон зависимости периода нелинейных колебаний от одного параметра [17]).

4. Глобальное семейство НПП

Глобальное семейство НПП (Σ) получается двусторонним продолжением семейства $\Sigma(T)$ по периоду T (по параметру h). Соответственно, продолжение области $\hat{\Sigma}(T)$ по периоду T приводит в фазовом пространстве к глобальной области $\hat{\Sigma}$, заполненной решениями из Σ .

Лемма 1. Глобальное семейство Σ существует и заполняет глобальную область $\hat{\Sigma}$. На нем период является монотонной функцией параметра семейства. Для точек области $\hat{\Sigma}$ ранг $\text{Ra} = n - 1$, на ее границе $\partial\hat{\Sigma}$ условие $\text{Ra} = n - 1$ не выполняется.

Доказательство. Рассматривается НПР системы (1). Согласно свойствам 1° и 2° оно принадлежит семейству $\Sigma(T)$ и заполняет область $\hat{\Sigma}(T)$. К каждому НПР семейства $\Sigma(T)$ применяется свойство 1°. В результате возникают две ситуации. В первой из них область $\hat{\Sigma}(T)$ не меняется: глобальное семейство Σ — построено. Во-второй ситуации область $\hat{\Sigma}(T)$ расширяется в том смысле, что содержит все точки прежней области, а также новые точки. Значит, семейство $\Sigma(T)$ получило продолжение по периоду T , как в сторону увеличения, так и уменьшения T . Процесс продолжения описывается системой (4). На полученном семействе монотонное изменение периода от параметра семейства сохраняется.

На следующем шаге возникает такая же альтернатива, как на предыдущем шаге итерации.

В конечном результате получается глобальная область $\hat{\Sigma}$, в которой выполняется условие $\text{Ra} = n - 1$. Область $\hat{\Sigma}$ заполняется глобальным семейством НПР. На границе $\partial\hat{\Sigma}$ условие $\text{Ra} = n - 1$ нарушается.

Построение Σ происходит за бесконечное число шагов.

Замечание 3. Для достижения глобального семейства применяется подход Понтрягина к построению непродолжаемого решения в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Лемма 2. Глобальное семейство НПР описывается редуцированной системой второго порядка.

Доказательство. Равенства (4) выполняются на глобальном семействе Σ тождественно по паре (z^0, T) . Ранг матрицы A_f равен $n - 1$, производные по T линейно зависимы, а вектор $df/dT \neq 0$. Поэтому $n - 1$ линейно независимых дифференциальных форм из (4), связанных условиями (4), приводятся к системе, в которой только одна из полученных форм содержит dT . Независимость оставшихся форм от dT означает, что решения глобального семейства описываются системой второго порядка.

Замечание 4. В случае консервативной системы получается редуцированная консервативная система с одной степенью свободы.

На основе лемм 1 и 2 формулируется теорема 1.

Теорема 1. Пусть уравнение (1) допускает НПР. Тогда оно продолжается по периоду T на глобальное семейство Σ . На Σ период $T(h)$ монотонно зависит от параметра семейства h . Семейство Σ заполняет глобальную область $\hat{\Sigma}$; Σ описывается редуцированной системой второго порядка. Для точек области $\hat{\Sigma}$ ранг $\text{Ra} = n - 1$, на ее границе $\partial\hat{\Sigma}$ условие $\text{Ra} = n - 1$ не выполняется.

Замечание 5. При подходе к границе $\partial\hat{\Sigma}$ производная $T'(h)$ может стремиться к нулю, бесконечности или перестает существовать. В случае $T'(h) \rightarrow 0$ границей семейства может быть вырожденное периодическое решение. Или на границе находится центр (примеры 1 и 2, $\kappa < 1$). Также семейство может стать неограниченным по координате (пример 2, $\kappa > 1$). Случай $T'(h) \rightarrow \infty$ реализуется для центра (пример 2, $\kappa > 1$), седла (пример 1), а также — для неограниченного по координате глобального семейства (пример 2, $\kappa < 1$) (см. также [19]).

Следствие 1. Ляпуновское семейство продолжается на глобальное семейство невырожденных периодических решений (глобальная теорема Ляпунова о центре).

Доказательство. Период на локальном ляпуновском семействе монотонно зависит от постоянной энергии (см. [18]). Поэтому семейство состоит из НПР. По теореме 1 глобальное семейство существует и получается продолжением любого НПР. Следовательно, теорема Ляпунова о центре имеет глобальный характер.

Замечание 6. Проблема границы в теореме Ляпунова о центре получает полное решение описанием глобальной области $\hat{\Sigma}$ и ее границы.

Замечание 7. Из теоремы 1 в частном случае выводятся результаты [4, 14, 15].

Теорема 1 и замечание 5 иллюстрируются примерами. В частности, на них показывается, какие движения реализуются на $\partial\hat{\Sigma}$.

Пример 1. $\ddot{x} + \sin x = 0$. В математическом маятнике колебания образуют глобальное семейство невырожденных колебаний, границами которой служат равновесия (центр и седло) и сепаратриссы. На семействе период монотонно возрастает от центра к седлу.

Пример 2. $\ddot{x} + x^\kappa = 0, \kappa > 0$. На фазовой плоскости равновесие $x = 0, \dot{x} = 0$ окружено семейством периодических решений. Уравнение допускает первый интеграл

$$\dot{x}^2/2 + x^{\kappa+1}/(\kappa + 1) = h(\text{const}).$$

Вычислим период колебания с амплитудой x_{\max} :

$$T = 4 \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(h - x^{\kappa+1}/(\kappa + 1))}}.$$

Положим $x = h^{1/(\kappa+1)}y$. Тогда получается

$$T = 4h^{\frac{1-\kappa}{2(\kappa+1)}} \int_0^{y_{\max}} \frac{dy}{\sqrt{2(1 - y^{\kappa+1}/(\kappa + 1))}},$$

где $x_{\max} = h^{1/(\kappa+1)}y_{\max}$. Отсюда следует, что при $\kappa < 1$ период монотонно возрастает вместе с h (вместе с амплитудой колебаний), при $\kappa = 1$ (случай линей-

ного осциллятора) период колебаний не зависит h , а при $\kappa > 1$ период монотонно убывает к нулю с возрастанием амплитуды колебаний. Следовательно, в случае $\kappa \neq 1$ уравнение обладает семейством невырожденных неограниченных колебаний, одной из границ служит нулевое равновесие, а другая граница уходит на бесконечность.

5. Управляемая редуцированная система

Пусть уравнение (1) допускает НПР. По теореме 1 оно принадлежит глобальному семейству Σ , которое заполняет глобальную область $\hat{\Sigma}$. Предполагается, что $\hat{\Sigma}$ является притягивающей.

Семейство Σ описывается редуцированной системой второго порядка. Для этой системы ставится задача стабилизации НПР из семейства Σ . Рассматривается гладкая система.

Таким образом, решается задача нахождения в системе

$$(5) \quad \dot{x} = X(x, y) + \varepsilon F, \quad \dot{y} = Y(x, y) + \varepsilon G,$$

гладких управлений F и G с малым коэффициентом усиления регулятора ε таких, чтобы в (5) реализовался притягивающий цикл, близкий к выбранному НПР семейства Σ . Предполагается, что семейство Σ , т.е. решения системы (5) при $\varepsilon = 0$, описываются формулами

$$(6) \quad x = \varphi(h, t), \quad y = \psi(h, t).$$

Находятся управления, решающие задачу стабилизации для любого НПР семейства Σ : для выбранного НПР значение параметра $h = h^*$.

Для малых ε записывается неоднородная линейная система

$$(7) \quad \begin{aligned} \delta \dot{x} &= a_{11} \delta x + a_{12} \delta y + \varepsilon F, \\ \delta \dot{y} &= a_{21} \delta x + a_{22} \delta y + \varepsilon G, \\ \delta x &= x - \varphi(h, t), \quad \delta y = y - \psi(h, t), \end{aligned}$$

где однородная часть совпадает с уравнениями в вариациях для решения (6). В (7) учитываются только линейные члены по $\delta x, \delta y$: добавление нелинейных членов не меняет получаемых качественных выводов, которые количественно будут различаться от получаемых на величины $o(\varepsilon)$.

Лемма 3. Система (7) приводится к виду

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon [\dot{\psi}(h^*, t)F - \dot{\varphi}(h^*, t)G] / \Delta, \\ \dot{v} &= \frac{T'(h^*)}{T^*} u + \varepsilon [\eta(h^*, t)F - \xi(h^*, t)G] / \Delta, \end{aligned}$$

где T^* — периодические функции $\xi(h^*, t)$ и $\eta(h^*, t)$ — производные от функций соответственно $\varphi(h, (T/T^*)t)$ и $\psi(h, (T/T^*)t)$ по h при $h = h^*$.

Доказательство. Преобразованием Ляпунова однородная часть в (7) приводится к системе с постоянными коэффициентами. Тогда вся преобразованная система записывается как (8).

Замечание 8. В явном виде преобразование дается в Приложении. Формулы (8) справедливы для НПП, отвечающего значению параметра $h = h^*$.

6. Притягивающий цикл управляемой системы

Из первого уравнения системы (8) выводится необходимое условие

$$(9) \quad \int_0^{T^*} [\dot{\psi}(h^*, t)F - \dot{\varphi}(h^*, t)G] / \Delta(h^*, t) d\tau = 0$$

существования T^* -периодического решения управляемой системы. В случае выполнения (9) интегрированием в (8) второго уравнения находится формула для переменной v . При этом единственность изолированного T^* -периодического решения, т.е. существование цикла выводится из анализа (9).

Условие (9) можно рассматривать как уравнение для определения значения параметра h^* для НПП. Поэтому заменой h^* в функциях φ и ψ на h из (9) получается амплитудное уравнение

$$(10) \quad I(h) \equiv \int_0^{T^*} [\dot{\psi}(h, t)F - \dot{\varphi}(h, t)G] / \Delta(h, t) d\tau = 0.$$

Система (8) задает отображение $t : 0 \rightarrow T$ на периоде T^* . Неравенством $I'(h^*) \neq 0$ гарантируется единственность неподвижной точки отображения, а неравенством $I'(h^*) < 0$ — принадлежность собственного числа левой полуплоскости. Оно вычисляется как в [2].

Каждому простому корню $h = h^*$ уравнения (10) соответствует единственное T^* -периодическое решение уравнения (8), т.е. цикл управляемой системы (5). Соответствующее условие притяжения решений управляемой системы к циклу дается неравенством $I'(h^*) < 0$.

Таким образом, справедлива лемма 4.

Лемма 4. Простому корню амплитудного уравнения (10) отвечает цикл управляемой системы (5). При выполнении неравенства $I'(h^*) < 0$ цикл будет притягивающим.

7. Поиск управления

Основой для поиска управления служит амплитудное уравнение (10). Согласно лемме 4 задача стабилизации колебания управляемой системы (5) решается управлениями F и G , для которых амплитудное уравнение (10) допускает простой корень h^* : $I'(h^*) < 0$.

Переменные x и y и действующие управления F и G входят в систему (5) равноправно. Равноправность сохраняется в амплитудном уравнении (10). Получается, что выделенное колебание можно стабилизировать любой парой $(F, 0)$ или $(0, G)$, а также в общем случае выбирать $F \neq 0$, $G \neq 0$. С другой стороны, для периодического решения переменные x и y задают положение и скорость точки на траектории. Это хорошо демонстрируется в приведенной системе (8), в которой переменной u задается положение точки, а v — ее скорость. Также видно, что при выборе пары $(F, 0)$ диссипация по переменной x приводит также к диссипации по y .

В соответствии с постановкой задачи в разделе 5 находится управление, стабилизирующее любое НПР семейства Σ , выделяемое значением параметра h . Значит, управление содержит некоторую характеристику K такую, что при подстановке в выражение для управления вместо числа K функции $K(h)$ амплитудное уравнение (10) будет выполняться тождественно, т.е.

$$(11) \quad \int_0^{T(h)} \Phi(K(h), \varphi(h, t), \psi(h, t), \dot{\varphi}(h, t), \dot{\psi}(h, t)) d\tau \equiv 0,$$

$$\Phi = (\dot{\psi}F - \dot{\varphi}G)/\Delta.$$

Без ограничения общности функция Φ предполагается линейной по K . Тогда тождество (11) выполняется с функцией

$$(12) \quad \Phi = [1 - Ka(h, t)]b(h, t).$$

Явные выражения для $a(h, t)$ и $b(h, t)$ получаются при подстановке функций $\varphi(h, t)$ и $\psi(h, t)$ вместе с их производными в Φ .

При дифференцировании тождества (11) по h с подставленной в него функцией (12) получается

$$(13) \quad [1 - Ka(h, T)]b(h, T) \frac{dT(h)}{dh} + \int_0^{T(h)} \frac{d\Phi(h)}{dh} d\tau \equiv 0.$$

На НПР одна из производных $\dot{\varphi}(h, t)$ или $\dot{\psi}(h, t)$ в моменты времени $t = 0, T$ равняется нулю. Поэтому управления ищутся при условии $b(h, 0) = b(h, T) = 0$, и при $h = h^*$ из (13) выводится равенство

$$(14) \quad \frac{dI(h^*)}{dh} = \frac{dK(h^*)}{dh} \nu, \quad \nu = \int_0^{T^*} a(h^*, t)b(h^*, t) d\tau.$$

Само число K для заданного h^* вычисляется из амплитудного уравнения (11):

$$(15) \quad K(h^*) = \frac{\int_0^{T(h^*)} b(h^*, t) d\tau}{\int_0^{T(h^*)} a(h^*, t) b(h^*, t) d\tau}.$$

Зависимость $K(h)$ является характеристикой управления (и одновременно семейства Σ).

Таким образом, на основе леммы 4 формулируется общая теорема 2.

Теорема 2. Любое НПП глобального семейства Σ , соответствующее значению параметра $h = h^*$, стабилизируется управлениями с функцией (12), если для характеристики $K(h)$ при $h = h^*$ выполняется неравенство $K'(h^*)\nu < 0$.

Замечание 9. Применяется адаптивное управление с настраиваемым параметром h .

8. Некоторые управления

Теоремой 2 выделяется класс управлений. В частном случае механических систем в этот класс входит управление (см. [2–4]), которое естественным образом, без применения иных управлений, стабилизирует колебание. В нем применяется нелинейная сила, линейная по скорости, действующая в текущей точке траектории и приводящая к диссипации. Таким же свойством обладают и другие управления найденного класса.

Далее приводятся некоторые конкретные управления.

1. Рассматриваются управления

$$(16) \quad F = \alpha(1 - Kx^2)\dot{x}, \quad G = -\beta(1 - Ky^2)\dot{y}, \quad \alpha, \beta - \text{const},$$

с характеристикой $K = K(h)$. Тогда из (11) выводится амплитудное уравнение

$$I(h) \equiv \int_0^{T^*} [1 - K(\alpha x^2 + \beta y^2)] \dot{\varphi}(h, t) \dot{\psi}(h, t) / \Delta(h, t) d\tau = 0.$$

Отсюда находится функция

$$K(h) = \frac{\int_0^{T(h)} \dot{\varphi}(h, t) \dot{\psi}(h, t) / \Delta(h, t) d\tau}{\int_0^{T(h)} [\alpha \varphi^2(h, t) + \beta \psi^2(h, t)] \dot{\varphi}(h, t) \dot{\psi}(h, t) / \Delta(h, t) d\tau}.$$

Наконец, формула (14) для стабилизации НПР со значением параметра $h = h^*$ приобретает вид

$$\frac{dI(h^*)}{dh} = \frac{dK(h^*)}{dh}\nu, \quad \nu = \int_0^{T^*} (\alpha x^2 + \beta y^2) \dot{\varphi}(h^*, t) \dot{\psi}(h^*, t) / \Delta(h^*, t) d\tau.$$

Замечание 10. Для одного уравнения второго порядка $x = \dot{y}$, поэтому в (16) полагается: $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Замечание 11. Результаты для механической системы, подверженной действию позиционных сил, в частности, потенциальных сил, известны (см. [2]). Для системы $\Delta(h, t) = 1$.

Замечание 12. В случае $Y(x, 0) \equiv 0$ получается редуцированная обратимая механическая система второго порядка 2. Для системы $\Delta(h, t) = 1$. К ней в [4] применяются управления (16).

2. Выбираются управления

$$F = (1 - Kx^2)\dot{y}, \quad G \equiv 0.$$

Тогда характеристика дается формулой

$$K(h) = \frac{\int_0^{T(h)} \dot{\psi}^2(h, t) / \Delta(h, t) d\tau}{\int_0^{T(h)} \varphi^2(h, t) \dot{\psi}^2(h, t) / \Delta(h, t) d\tau}.$$

В рассматриваемом случае из (14) получается

$$\frac{dI(h^*)}{dh} = \frac{dK(h^*)}{dh}\nu, \quad \nu = \int_0^{T^*} \varphi^2(h^*, t) \dot{\psi}^2(h^*, t) / \Delta(h^*, t) d\tau.$$

3. Пусть применяются управления

$$F \equiv 0, \quad G = -(1 - Ky^2)\dot{x}.$$

Для них вычисляется такая характеристика

$$K(h) = \frac{\int_0^{T(h)} \dot{\varphi}^2(h, t) / \Delta(h, t) d\tau}{\int_0^{T(h)} \psi^2(h, t) \dot{\varphi}^2(h, t) / \Delta(h, t) d\tau},$$

а формула (14) записывается в виде

$$\frac{dI(h^*)}{dh} = \frac{dK(h^*)}{dh}\nu, \quad \nu = \int_0^{T^*} \psi^2(h^*, t) \dot{\varphi}^2(h^*, t) / \Delta(h^*, t) d\tau.$$

Замечание 13. Примеры стабилизации НПР конкретных систем приведены в [2–4, 20]. Далее дается пример стабилизации колебания, принадлежащего вырожденному семейству.

9. Вырожденное семейство

На семействе НПР параметр h отражает монотонное изменение периода T вместе с h : на семействе $T'(h) \neq 0$. На вырожденном семействе неравенство не удовлетворяется. Для такого семейства теорема 1 о глобальном семействе не применима. Тем не менее развитый в статье подход применим к вырожденному семейству на двумерном многообразии.

Для вырожденного семейства вместо периода можно предложить другую характеристику семейства решений, а именно — амплитуду колебания. Также, как и период, амплитуда может монотонно меняться на семействе. Решения семейства параметризуются амплитудой колебания.

Далее приводится примечательный пример стабилизации (в большом) цикла, рожденного из вырожденного семейства периодических решений автономной системы.

Пример 3. Рассматривается управляемая система

$$(17) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} + x = \varepsilon(1 - Kx^2)y,$$

где K — постоянная. В ней к линейному осциллятору применяется управление (16), в котором с точностью до обозначений переменных берутся числа: $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

При $\varepsilon = 0$ колебания даются формулой $x = A \cos(t + \gamma)$, где γ — временной сдвиг на траектории. Записывается амплитудное уравнение

$$\int_0^{2\pi} (1 - KA^2 \cos^2(t + \gamma)) A^2 \sin^2(t + \gamma) d\tau = 0.$$

Отсюда находятся два корня: $A = 0$ и $A = 2/\sqrt{K}$. Первый корень соответствует началу координат, второй корень — циклу, близкому к колебанию линейного осциллятора с амплитудой $2/\sqrt{K}$. Амплитуда A выбирается в качестве параметра семейства колебаний линейного осциллятора, при этом амплитуда цикла системы (17) задается параметром K в управлении.

Зависимость $K(A)$ дается формулой $K = 4/A^2$, производная $K'(A) < 0$, поэтому цикл стабилизируется в малом.

Таким образом, подход к стабилизации колебания, принадлежащего семейству НПР, развивается на семейство вырожденных периодических решений.

Замечание 14. В системе (17) по существу записано уравнение Ван дер Поля. Цикл системы (17) стабилизируется глобально.

10. Заключение

Невырожденное периодическое решение автономной системы может быть циклом или принадлежать семейству. На НПР период монотонно меняется вместе с параметром семейства. НПР продолжается по периоду на глобальное семейство НПР. Глобальное семейство НПР заполняет инвариантное многообразие и описывается редуцированной системой второго порядка. На глобальном семействе монотонное изменение периода сохраняется.

Задача стабилизации НПР решается для глобального семейства НПР, заполняющего глобальную область, которая предполагается притягивающей. Развивается подход, в котором управление строится для всего глобального семейства НПР, а для стабилизации выбранного НПР фиксируется параметр семейства. Применяется гладкое автономное управление, в результате которого реализуется притягивающий цикл, близкий к выделенному НПР глобального семейства. Подход применим также к вырожденному семейству периодических решений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведение однородной системы.

Уравнения в вариациях для решения (6) записываются в виде

$$(П.1) \quad \begin{aligned} \delta \dot{x} &= \frac{\partial X(x, y)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} \delta y, \\ \delta \dot{y} &= \frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y} \delta y, \end{aligned}$$

где частные производные вычисляются для $x = \varphi(h, t)$, $y = \psi(h, t)$.

Фундаментальная система решений в (П.1) дается матрицей

$$(П.2) \quad \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi(h, t)}{\partial t} & \frac{\partial \varphi(h, t)}{\partial h} \\ \frac{\partial \psi(h, t)}{\partial t} & \frac{\partial \psi(h, t)}{\partial h} \end{array} \right\|$$

с определителем

$$\Delta(h, t) = \Delta(h, 0) \exp \int_0^t \left(\frac{\partial X(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y} \right) d\tau.$$

Записывается общее решение системы в (П.1)

$$(П.3) \quad \begin{aligned} \delta x &= c_1 \dot{\varphi}(h, t) + c_2 \varphi'(h, t), \\ \delta y &= c_1 \dot{\psi}(h, t) + c_2 \psi'(h, t) \end{aligned}$$

с постоянными c_1 и c_2 . Разрешение системы (П.3) относительно c_1 и c_2 используется для перехода к новым переменным u, v :

$$(П.4) \quad u = -(\dot{\psi}\delta x - \dot{\varphi}\delta y)/\Delta, \quad v = [\eta(h, t)\delta x - \xi(h, t)\delta y]/\Delta.$$

При этом полагается

$$\begin{aligned} \xi(h, t) &= \frac{T'(h)}{T^*}t\dot{\varphi}(h, t) + \frac{\partial\varphi(h, t)}{\partial h}, \\ \eta(h, t) &= \frac{T'(h)}{T^*}t\dot{\psi}(h, t) + \frac{\partial\psi(h, t)}{\partial h}, \end{aligned}$$

где функции $\xi(h^*, t)$, $\eta(h^*, t)$ будут T^* -периодическими. Наконец, из выражения для v в (П.4) получается

$$(П.5) \quad v = \frac{T'(h)}{T^*}tu + (\psi'(h, t)\delta x - \varphi'(h, t)\delta y)/\Delta.$$

Подстановкой в формулы (П.4) и (П.5) первого решения из матрицы (П.2) вычисляется: $u = 0$, $v = 1$. Соответственно для второго решения записывается:

$$u = -(\dot{\psi}\varphi' - \dot{\varphi}\psi')/\Delta = 1, \quad v = \frac{T'(h^*)}{T^*}tu + u.$$

Таким образом, система (П.1) приводится к виду

$$\dot{u} = 0, \quad \dot{v} = \frac{T'(h^*)}{T^*}u.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.
2. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // АИТ. 2019. № 11. С. 83–92.
Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of a Controlled Mechanical System // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004.
3. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы с N степенями свободы // АИТ. 2020. № 9. С. 93–104.
Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an N Degree of Freedom Controlled Mechanical System // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1637–1646.
4. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний управляемой обратимой механической системы // АИТ. 2022. № 9. С. 94–108.
Tkhai V.N. Stabilization of Oscillations of a Controlled Reversible Mechanical System // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 9.
5. *Тхай В.Н.* Режим цикла в связанной консервативной системе // АИТ. 2022. № 2. С. 90–106.
Tkhai V.N. Cycle Mode in a Coupled Conservative System // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 2. P. 237–251.

6. *Тхай В.Н.* Мехатронная схема стабилизации колебаний // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 1. С. 9–16.
7. *Boubaker O.* The Inverted Pendulum Benchmark in Nonlinear Control Theory: a Survey // Int. J. Adv. Robot. Syst. 2013. V. 10. No. 5. 233–242.
8. *Fradkov A.L* Swinging Control of Nonlinear Oscillations // Int. J. Control. 1996. V. 64. Iss. 6. P. 1189–1202.
9. *Shiriaev A., Perram J.W., Canudas-de-Wit C.* Constructive Tool for Orbital Stabilization of Underactuated Nonlinear Systems: Virtual Constraints Approach // IEEE T. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 8. P. 1164–1176.
10. *Kant K., Mukherjee R., Khalil H.* Stabilization of Energy Level Sets of Underactuated Mechanical Systems Exploiting Impulsive Braking // Nonlinear Dynam. 2021. V. 106. P. 279–293.
11. *Guo Yu., Hou B., Xu Sh., Mei R., Wang Z., Huynh V.Th.* Robust Stabilizing Control for Oscillatory Base Manipulators by Implicit Lyapunov Method // Nonlinear Dynam. 2022. V. 108. P. 2245–226.
12. *Zevin A.A.* Nonlocal generalization of Lyapunov theorem // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1997. V. 28. No. 9. P. 1499–1507.
13. *Zevin A.A.* Global continuation of Lyapunov centre orbits in Hamiltonian systems // Nonlinearity. 1999. V. 12. P. 1339–1349.
14. *Тхай В.Н.* Колебания и равновесия в обратимой механической системе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Матем. Механ. Астрон. 2021. Вып. 4. С. 709–715.
Tkhai V.N. Equilibria and oscillations in a reversible mechanical system // Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy. 2021. Vol. 54. No. 4. P. 447–451.
<https://doi.org/10.1134/S1063454121040191>
15. *Tkhai V.N.* Spatial oscillations of a physical pendulum // Proc. 2022 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), IEEE Xplore: 29 June 2022.
<https://ieeexplore.ieee.org/document/9807507>
<https://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807507>
16. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
17. *Тхай В.Н.* Закон о зависимости периода нелинейных колебаний от одного параметра // Прикл. матем. механ. Т. 75. Вып. 3. С. 430–434.
18. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
19. *Devaney R.L.* Blue Sky Catastrophes in Reversible and Hamiltonian Systems // Indiana University Mathematics Journal. 1977. V. 26. No. 2. P. 247–263.
20. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // АИТ. 2016. № 6.
Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an Autonomous System // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 972–979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.М. Красносельским.

Поступила в редакцию 25.10.2022

После доработки 20.01.2023

Принята к публикации 26.01.2023

Управление в социально-экономических системах

© 2023 г. Г.И. АЛГАЗИН, д-р физ.-мат. наук (algaz46@yandex.ru),
Д.Г. АЛГАЗИНА, канд. техн. наук (darya.algazina@mail.ru)
(Алтайский государственный университет, Барнаул)

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ДИНАМИКИ РЕФЛЕКСИВНОГО КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ В МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ КУРНО ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Рассматривается модель олигополии Курно с произвольным числом рациональных агентов в условиях неполной информации для классического случая линейных функций издержек и спроса. В рамках динамической модели рефлексивного коллективного поведения каждый агент в каждый момент времени корректирует свой объем выпуска, делая шаг в направлении выпуска, максимизирующего его прибыль при ожидаемом выборе конкурентов. Обсуждается применение матриц перехода погрешностей динамики к исследованию условий ее сходимости к равновесию Курно–Нэша. Показаны эффекты от введения ограничений на диапазоны шагов агентов в устранении неопределенности о сходимости динамики. Предложен метод определения максимальных диапазонов шагов, гарантирующих сходимость динамики коллективного поведения для произвольного числа агентов.

Ключевые слова: олигополия Курно, неполная информированность, рефлексивное коллективное поведение, матрица перехода погрешностей, диапазоны шагов, условия сходимости.

DOI: 10.31857/S0005231023050045, EDN: AGBJSH

1. Введение

Значительное число математических работ, исследующих динамику коллективного поведения на конкурентных рынках, посвящено выявлению условий ее сходимости к равновесию Нэша (см., например, [1–9]). Данные исследования нельзя считать завершенными даже для случая модели олигополии Курно с линейными функциями затрат и спроса [4, 5, 10]. Настоящая статья посвящена именно такому случаю модели олигополии.

В рамках модели рефлексивного коллективного поведения каждый агент независимо от других корректирует свой объем выпуска выбором шага в направлении движения к своей текущей цели [11, 12]. Известно, что динамика коллективного поведения сходится к рыночному равновесию, если каждый агент корректирует свои действия малыми шагами (см., например, [13–15]).

Также если каждый агент всегда делает максимально допустимый шаг (т.е. выбирает свой наилучший ответ на ожидаемые действия конкурентов), то динамика сходится только для рынка, состоящего из двух агентов. Для рынков с числом агентов больше двух такая динамика коллективного поведения расходится [13, 14].

В настоящей статье развивается подход, основанный на использовании норм матриц перехода погрешностей динамик коллективного поведения, к исследованию условий сходимости динамик на рынках олигополии в классе линейных функций [16]. В рамках этого подхода проблема неопределенности о сходимости динамик усиливается в том случае, когда при выборе величин шагов агенты могут действовать разнонаправлено: выбирать «большие» шаги движения к своим текущим целям или, наоборот, «малые» шаги.

В данной статье ставится задача поиска ограничений на диапазоны допустимых откликов агентов, которые формулируются как условия, гарантирующие сходимость к равновесию динамики коллективного поведения в линейной модели Курно с произвольным числом агентов.

2. Формальная постановка задачи исследования

В качестве базовой рассматривается модель олигополии Курно, которая состоит из конкурирующих объемами выпуска однородной продукции агентов с целевыми функциями

$$(1) \quad \Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \phi(q_i) \rightarrow \max_{q_i},$$

линейными функциями затрат

$$(2) \quad \phi_i(q_i) = c_i q_i + d_i$$

и линейной обратной функцией спроса

$$(3) \quad p(Q) = a - bQ.$$

Здесь: $i \in N = \{1, \dots, n\}$, q_i — выпуск i -го агента, $Q = \sum_{i \in N} q_i$ — суммарный объем выпуска всеми агентами, c_i , d_i — предельные и постоянные издержки i -го агента соответственно, $p(Q)$ — единая рыночная цена, a , b — параметры спроса. Полагается, что весь выпуск реализуется, ограничения мощности и коалиции отсутствуют. Состояние рынка в момент времени t ($t = 0, 1, 2, \dots$) задается n -мерным вектором $q^t = (q_1^t, \dots, q_i^t, \dots, q_n^t)$.

Определим базовый процесс, когда смена состояний рынка удовлетворяет аксиоме индикаторного поведения [13] — в каждый момент времени $(t + 1)$ каждый агент наблюдает объемы выпуска всех агентов, выбранные ими в предыдущий момент времени t и корректирует свой выпуск, делая шаг в направлении текущего положения цели согласно следующей итерационной процедуре:

$$(4) \quad q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), \quad i \in N.$$

Здесь $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ — параметр, независимо выбираемый каждым i -м агентом, определяет величину его шага к текущему положению своей цели. Агент может делать полный шаг, полагая $\gamma_i^{t+1} = 1$, тем самым выбирая свой наилучший ответ, «оставаться на месте», выбирая $\gamma_i^{t+1} = 0$, или делать «неполный шаг», если $\gamma_i^{t+1} \in (0; 1)$.

Текущее положение цели i -го агента $x_i(q_{-i}^t)$ — это такой его объем выпуска, который максимизировал бы собственную целевую функцию при условии, что в текущий момент времени остальные агенты выбрали бы те же объемы выпуска, что и в предыдущий [13, 17]. Здесь $q_{-i}^t = (q_1^t, \dots, q_{i-1}^t, q_{i+1}^t, \dots, q_n^t)$ — обстановка i -го агента, вектор объемов выпуска всех агентов в момент времени t за исключением i -го агента. Известно, что (см., например, [14–16])

$$(5) \quad x_i(q_{-i}^t) = \frac{h_i - \sum_{j \neq i} q_j^t}{2} = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2}.$$

Здесь: $h_i = \frac{a-ci}{b}$, $Q_{-i}^t = \sum_{j \neq i} q_j^t$ — суммарный выпуск «окружением» i -го агента ($i, j \in N$).

Агенты точно знают собственные затраты и целевую функцию, собственную функцию реакции $x_i(q_{-i}^t)$, включая параметры спроса a и b ранее произведенный выпуск другими агентами, но не располагают достоверной информацией относительно их ожидаемых объемов выпуска, множеств допустимых действий, функций затрат и целевых функций.

Предполагаем, что в модели олигополии (1)–(3), как в игре в нормальной форме, равновесие $q^* = (q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*)$, понимаемое как статическое равновесие Нэша, существует и все агенты конкурентоспособны в равновесии, т.е. $q_i^* > 0 \forall i \in N$. В случае линейных издержек агентов и линейного спроса статическое равновесие существует и единственно.

Равновесие динамики коллективного поведения (4), (5) является статическим равновесием q^* в модели олигополии (1)–(3), но не всегда достижимо. Условия сходимости динамики относятся к параметрам γ_i^{t+1} , числу агентов на рынке и начальным приближениям $q^0 = (q_1^0, \dots, q_i^0, \dots, q_n^0)$. Полагаем также, что $q^0 > 0$.

В данной работе обсуждаются новые аспекты подхода к исследованию сходимости моделей динамики коллективного поведения, основанного на использовании нормы матрицы перехода погрешностей от t -го к $(t + 1)$ -му моменту времени в итерационном процессе (4), (5). Для линейной модели олигополии подход дает простой критерий сходимости по норме матрицы: она должна быть меньше единицы начиная с некоторого момента времени [16]. Когда агенты независимо друг от друга выбирают шаги в диапазоне $[0; 1]$, то критерий по норме, за исключением дуополии, не может быть выполнен. Основная задача статьи для изучаемой прикладной линейной модели олигополии с произвольным числом рациональных агентов — для заданного числа агентов получение диапазонов величин их шагов, при которых выполняется критерий по норме. Тогда при любых начальных приближениях q^0 будет

гарантирована сходимость модели динамики коллективного поведения (4), (5) к равновесию, которое является статическим равновесием Нэша в модели олигополии (1)–(3). Также не меньший интерес представляет решение задачи поиска максимальных таких диапазонов шагов.

3. Методы исследования

Следуя работе [16], приведем формальные выражения для норм матриц перехода погрешностей в итерационном процессе (4), (5) для базовой модели олигополии, а также известные результаты о сходимости процесса, основанные на использовании норм.

Погрешность итерационного процесса $\varepsilon^{t+1} = (\varepsilon_1^{t+1}, \varepsilon_2^{t+1}, \dots, \varepsilon_n^{t+1})^T = (q_1^{t+1} - q_1^*, q_2^{t+1} - q_2^*, \dots, q_n^{t+1} - q_n^*)^T$ определяется преобразованием $\varepsilon^{t+1} = B^{t+1}\varepsilon^t$ ($t = 0, 1, 2, \dots$), где B^{t+1} матрица перехода (пересчета, преобразования) погрешностей от t -го к $(t + 1)$ -му моменту времени

$$(6) \quad B^{t+1} = B(\gamma^{t+1}) = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_1^{t+1} & -\gamma_1^{t+1}/2 & \dots & -\gamma_1^{t+1}/2 \\ -\gamma_2^{t+1}/2 & 1 - \gamma_2^{t+1} & \dots & -\gamma_2^{t+1}/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\gamma_n^{t+1}/2 & -\gamma_n^{t+1}/2 & \dots & 1 - \gamma_n^{t+1} \end{pmatrix},$$

где $\gamma^{t+1} = (\gamma_1^{t+1}, \dots, \gamma_i^{t+1}, \dots, \gamma_n^{t+1})$.

Сходимость итерационного процесса (4), (5) означает, что $\varepsilon^t \rightarrow 0$ по евклидовой норме при $t \rightarrow \infty$ и полностью определяется матрицей B^{t+1} . Евклидова норма вектора ε определяется по формуле $\|\varepsilon\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2}$. Последовательность векторов $\{q^t\}_{t=0}^\infty$ сходится к равновесию q^* по норме при $t \rightarrow \infty$ будем записывать как $q^t \rightarrow q^*$. Норма вещественной матрицы B , имеющей n строк и n столбцов, является подчиненной евклидовой векторной норме и определяется как $\|B\| = \max_{\|\varepsilon\|=1} \|B\varepsilon\|$. Из определения нормы следует, что $\|B\varepsilon\| < \|B\|\|\varepsilon\|$ для всех B , ε или $\|B\varepsilon\| < \|B\|$ для всех B , $\|\varepsilon\| = 1$ [18, 19].

Тогда [16]

$$(7) \quad \|B^{t+1}\| = \max_{\|\varepsilon\|=1} \|B(\gamma^{t+1})\varepsilon\| = \max_{\|\varepsilon\|=1} \sqrt{\sum_{i \in N} \left[\varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) \right]^2},$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_n)$ — произвольный единичный вектор. В (7) опущен верхний индекс « t » для компонент вектора ε , как не влияющий на результат.

В терминах нормы матрицы B^{t+1} можно привести следующие результаты о сходимости итерационного процесса [16].

Лемма 1. Для сходимости к равновесию процесса (4), (5) при любом начальном приближении q^0 достаточно начиная с некоторого момента t_0 выполнения условия

$$(8) \quad \|B^{t+1}\| < 1.$$

Требование неотрицательности текущих выпусков агентов, возникающее, например, с точки зрения экономических ограничений, может быть реализовано процессом вида

$$(9) \quad q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), & x_i(q_{-i}^t) > 0; \\ 0, & x_i(q_{-i}^t) \leq 0. \end{cases}$$

Утверждение 1. Если начиная с некоторого момента t_0 $\|B^{t+1}\| < 1$, то процесс (9), (5) сходится при любом начальном приближении q^0 .

По этому утверждению если для процесса (4), (5) норма матрицы пересчета погрешностей меньше единицы, то будет сходиться также и процесс (9), (5), в котором не допускаются отрицательные текущие выпуски.

Обозначим через $f(\gamma^{t+1})$ подкоренное выражение в (7), т.е.

$$(10) \quad f(\gamma^{t+1}) = \sum_{i \in N} \left[\varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) \right]^2.$$

Утверждение 2. Пусть векторы γ^{t+1} , $\vec{\gamma}^{t+1}$, $\overleftarrow{\gamma}^{t+1}$ такие, что $\gamma_i^{t+1} \in [\vec{\gamma}_i^{t+1}; \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}]$, $[\vec{\gamma}_i^{t+1}; \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}] \subseteq [0; 1]$ и $\gamma_i^{t+1} = \alpha_i^{t+1} \vec{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}$, где $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0; 1]$, $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1$, $i \in N$.

Тогда функция $f(\gamma^{t+1})$ удовлетворяет неравенствам:

$$(11) \quad \begin{aligned} & f(\alpha_1^{t+1} \vec{\gamma}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \overleftarrow{\gamma}_1^{t+1}, \dots, \alpha_i^{t+1} \vec{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}, \dots \\ & \quad \dots, \alpha_n^{t+1} \vec{\gamma}_n^{t+1} + \beta_n^{t+1} \overleftarrow{\gamma}_n^{t+1}) \leq \\ & \leq \sum_{y_1 \in \{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\}} \dots \sum_{y_i \in \{\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}\}} \dots \sum_{y_n \in \{\alpha_n^{t+1}, \beta_n^{t+1}\}} y_1 \cdot \dots \cdot y_i \cdot \dots \cdot y_n \cdot \\ & \quad \cdot f(z_1^{t+1}, \dots, z_i^{t+1}, \dots, z_n^{t+1}), \end{aligned}$$

где $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0; 1]$, $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1$, $z_i^{t+1} = \begin{cases} \vec{\gamma}_i^{t+1}, & y_i = \alpha_i^{t+1}; \\ \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}, & y_i = \beta_i^{t+1}. \end{cases}$

$$(12) \quad \begin{aligned} & f(\alpha_1^{t+1} \vec{\gamma}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \overleftarrow{\gamma}_1^{t+1}, \dots, \alpha_i^{t+1} \vec{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}, \dots \\ & \quad \dots, \alpha_n^{t+1} \vec{\gamma}_n^{t+1} + \beta_n^{t+1} \overleftarrow{\gamma}_n^{t+1}) \leq \\ & \leq \sum_{i \in N} \left\{ \alpha_i^{t+1} \left[\varepsilon_i - \frac{\vec{\gamma}_i^{t+1}}{2} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) \right]^2 + \beta_i^{t+1} \left[\varepsilon_i - \frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

В левой части неравенства (11) — значение функции $f(\gamma^{t+1})$ во внутренней точке n -мерного прямоугольного параллелепипеда $[\vec{\gamma}_1^{t+1}, \check{\gamma}_1^{t+1}; \dots; \vec{\gamma}_i^{t+1}, \check{\gamma}_i^{t+1}; \dots; \vec{\gamma}_n^{t+1}, \check{\gamma}_n^{t+1}]$, в правой части — специального вида линейная комбинация значений функции $f(\gamma^{t+1})$ в крайних точках параллелепипеда. В частности, для случая $n = 3$ неравенство имеет вид

$$\begin{aligned} & f(\alpha_1^{t+1} \vec{\gamma}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \check{\gamma}_1^{t+1}, \alpha_2^{t+1} \vec{\gamma}_2^{t+1} + \beta_2^{t+1} \check{\gamma}_2^{t+1}, \alpha_3^{t+1} \vec{\gamma}_3^{t+1} + \beta_3^{t+1} \check{\gamma}_3^{t+1}) \leq \\ & \leq \alpha_1^{t+1} \alpha_2^{t+1} \alpha_3^{t+1} f(\vec{\gamma}_1^{t+1}, \vec{\gamma}_2^{t+1}, \vec{\gamma}_3^{t+1}) + \beta_1^{t+1} \alpha_2^{t+1} \alpha_3^{t+1} f(\check{\gamma}_1^{t+1}, \vec{\gamma}_2^{t+1}, \vec{\gamma}_3^{t+1}) + \\ & + \alpha_1^{t+1} \beta_2^{t+1} \alpha_3^{t+1} f(\vec{\gamma}_1^{t+1}, \check{\gamma}_2^{t+1}, \vec{\gamma}_3^{t+1}) + \alpha_1^{t+1} \alpha_2^{t+1} \beta_3^{t+1} f(\vec{\gamma}_1^{t+1}, \vec{\gamma}_2^{t+1}, \check{\gamma}_3^{t+1}) + \\ & + \beta_1^{t+1} \beta_2^{t+1} \alpha_3^{t+1} f(\check{\gamma}_1^{t+1}, \check{\gamma}_2^{t+1}, \vec{\gamma}_3^{t+1}) + \beta_1^{t+1} \alpha_2^{t+1} \beta_3^{t+1} f(\check{\gamma}_1^{t+1}, \vec{\gamma}_2^{t+1}, \check{\gamma}_3^{t+1}) + \\ & + \alpha_1^{t+1} \beta_2^{t+1} \beta_3^{t+1} f(\vec{\gamma}_1^{t+1}, \check{\gamma}_2^{t+1}, \check{\gamma}_3^{t+1}) + \beta_1^{t+1} \beta_2^{t+1} \beta_3^{t+1} f(\check{\gamma}_1^{t+1}, \check{\gamma}_2^{t+1}, \check{\gamma}_3^{t+1}). \end{aligned}$$

4. Результаты исследования и их обсуждение

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \gamma^{t+1}(\beta^{t+1}) &= (\gamma_1^{t+1}(\beta_1^{t+1}), \dots, \gamma_i^{t+1}(\beta_i^{t+1}), \dots, \gamma_n^{t+1}(\beta_n^{t+1})), \\ \gamma^{t+1}(\beta^{t+1}) &= (1 - \beta_i^{t+1}) \vec{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \check{\gamma}_i^{t+1} \quad (i \in N) \text{ и} \\ f^{t+1} &= f(\gamma^{t+1}(\beta^{t+1})). \end{aligned}$$

Идея применения результатов раздела 3 к решению задачи сходимости состоит в следующем.

Для крайней точки параллелепипеда $[\vec{\gamma}_1^{t+1}, \check{\gamma}_1^{t+1}; \dots; \vec{\gamma}_i^{t+1}, \check{\gamma}_i^{t+1}; \dots; \vec{\gamma}_n^{t+1}, \check{\gamma}_n^{t+1}]$ формула (12) приводится к виду $f^{t+1} \leq 1 - \varepsilon^T F^{t+1} \varepsilon$, где F^{t+1} — симметрическая матрица размера $n \times n$. Если F^{t+1} положительно определена (т.е. $\varepsilon^T F^{t+1} \varepsilon > 0$ для каждого набора действительных чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, не все из которых равны нулю), то для данной крайней точки $f^{t+1} < 1$. Если для всех крайних точек $f^{t+1} < 1$, то по неравенству (11) для любой внутренней точки параллелепипеда будет $f^{t+1} < 1$ и по (7), (10) для нее будет $\|B^{t+1}\| \leq \max_{\|\varepsilon\|=1} \sqrt{1 - \varepsilon^T F^{t+1} \varepsilon} < 1$. То есть для всех точек параллелепипеда

$[\vec{\gamma}_1^{t+1}, \check{\gamma}_1^{t+1}; \dots; \vec{\gamma}_i^{t+1}, \check{\gamma}_i^{t+1}; \dots; \vec{\gamma}_n^{t+1}, \check{\gamma}_n^{t+1}]$ выполняется критерий сходимости (8) для процесса (4), (5). Если у всех агентов одинаковые левые и правые границы диапазонов, то трудоемкость решения данной задачи существенно уменьшается за счет сокращения числа анализируемых крайних точек с 2^n до $(n - 1)$. К тому же современные пакеты компьютерной математики располагают необходимыми средствами для проверки на положительную определенность матриц практически любого размера.

Результаты, представленные в разделе 3, используются и для решения задачи нахождения максимальных диапазонов шагов агентов (параллелепипеда максимального объема), гарантирующих сходимость к равновесию динамики коллективного поведения, что также составляет важный результат данной статьи.

Но вначале остановимся подробнее на предпосылках к ограничению диапазонов шагов агентов. Для этого первым рассмотрим классический диапазон $[\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}] = [0; 1]$ ($\forall i \in N; t = 0, 1, 2, \dots$).

Соответствующее этому диапазону неравенство (12) имеет вид

$$(13) \quad f^{t+1} = f(\gamma^{t+1}(\beta^{t+1})) \leq 1 - \sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} (\varepsilon_i)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} \left(\sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_j \right)^2.$$

В (13) использовано, что $\gamma_i^{t+1} = (1 - \beta_i^{t+1}) \cdot 0 + \beta_i^{t+1} \cdot 1 = \beta_i^{t+1}$.

Если симметрическая квадратичная форма

$$\sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} (\varepsilon_i)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} \left(\sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_j \right)^2$$

является положительно определенной для каждого набора действительных чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_n$, то это равносильно тому, что она положительно определена для каждого набора действительных чисел таких, что $\sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 = 1$.

Тогда $f^{t+1} < 1$ и по (7), (10) $\|B^{t+1}\| < 1$. Отметим, что $f^{t+1} \geq 0$, поскольку $\sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} (\varepsilon_i)^2 \leq 1$.

Соответствующая данной квадратичной форме симметрическая матрица имеет вид

$$(14) \quad F^{t+1} = F(\gamma^{t+1}(\beta^{t+1})) =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_1^{t+1} - \frac{1}{4} \sum_{i \in N \setminus \{1\}} \beta_i^{t+1} & -\frac{1}{4} \sum_{i \in N \setminus \{1,2\}} \beta_i^{t+1} & \dots & -\frac{1}{4} \sum_{i \in N \setminus \{1,n\}} \beta_i^{t+1} \\ -\frac{1}{4} \sum_{i \in N \setminus \{2,1\}} \beta_i^{t+1} & \beta_2^{t+1} - \frac{1}{4} \sum_{i \in N \setminus \{2\}} \beta_i^{t+1} & \dots & -\frac{1}{4} \sum_{i \in N \setminus \{2,n\}} \beta_i^{t+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{4} \sum_{i \in N \setminus \{n,1\}} \beta_i^{t+1} & -\frac{1}{4} \sum_{i \in N \setminus \{n,2\}} \beta_i^{t+1} & \dots & \beta_n^{t+1} - \frac{1}{4} \sum_{i \in N \setminus \{n\}} \beta_i^{t+1} \end{pmatrix}.$$

Используем следующий известный результат (см., например, [19]): действительная квадратичная форма является положительно определенной в том и только в том случае, если определители всех главных (угловых) миноров соответствующей ей матрицы положительны (или, что равносильно, если матрица положительно определена).

Более подробно рассмотрим частные случаи рынка, когда $n = 2, 3, 4$.

Вначале рассмотрим хрестоматийный случай — дуополию Курно. Соответствующие неравенство (13) и матрица (14) имеют вид

$$f^{t+1} \leq 1 - \beta_1^{t+1}(\varepsilon_1)^2 + \frac{\beta_1^{t+1}}{4}(\varepsilon_2)^2 - \beta_2^{t+1}(\varepsilon_2)^2 + \frac{\beta_2^{t+1}}{4}(\varepsilon_1)^2,$$

$$F^{t+1} = \begin{pmatrix} \beta_1^{t+1} - \beta_2^{t+1}/4 & 0 \\ 0 & \beta_2^{t+1} - \beta_1^{t+1}/4 \end{pmatrix}.$$

Если $4\beta_1^{t+1} - \beta_2^{t+1} > 0$ и, по симметрии, $4\beta_2^{t+1} - \beta_1^{t+1} > 0$, то определители главных миноров матрицы F^{t+1} положительны. Процесс сходится, когда эти неравенства выполнены (т.е. шаг каждого агента больше одной четвертой шага другого) начиная с некоторого момента времени t . В частности, это так, когда $\beta_1^{t+1} = \beta_2^{t+1} = 1$, т.е. каждый агент выбирает наилучшие ответы на ожидаемые действия конкурента. Когда агенты действуют разнонаправленно и указанные неравенства не выполняются, вопрос о сходимости по норме остается без ответа, хотя известно, что процесс сходится при $\beta_1^{t+1}, \beta_2^{t+1} \in (0; 1]$.

Для случая олигополии Курно с тремя агентами соответствующие неравенство (13) и матрица (14) имеют вид

$$f^{t+1} \leq 1 - \beta_1^{t+1}(\varepsilon_1)^2 - \beta_2^{t+1}(\varepsilon_2)^2 - \beta_3^{t+1}(\varepsilon_3)^2 + \frac{\beta_1^{t+1}}{4}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 +$$

$$+ \frac{\beta_2^{t+1}}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)^2 + \frac{\beta_3^{t+1}}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2,$$

$$F^{t+1} = \begin{pmatrix} \beta_1^{t+1} - \frac{\beta_2^{t+1}}{4} - \frac{\beta_3^{t+1}}{4} & -\frac{\beta_3^{t+1}}{4} & -\frac{\beta_2^{t+1}}{4} \\ -\frac{\beta_3^{t+1}}{4} & \beta_2^{t+1} - \frac{\beta_1^{t+1}}{4} - \frac{\beta_3^{t+1}}{4} & -\frac{\beta_1^{t+1}}{4} \\ -\frac{\beta_2^{t+1}}{4} & -\frac{\beta_1^{t+1}}{4} & \beta_3^{t+1} - \beta_1^{t+1} - \frac{\beta_2^{t+1}}{4} \end{pmatrix}.$$

Проверено, что для каждого набора действительных чисел $\beta_1^{t+1}, \beta_2^{t+1}, \beta_3^{t+1}$ определитель неположителен, т.е. на основе неравенства (13) не удастся подтвердить сходимость процесса. Довольно неожиданный вывод, поскольку известно, что процесс сходится для многих наборов параметров β_i^{t+1} . Такой вывод обусловлен значительной разницей в значениях $\overline{\gamma}_i^{t+1} = 0$ и $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} = 1$, агенты могут выбирать любые шаги: от близких к нулю, практически оставаясь «на месте», до максимально возможных, т.е. оптимальных по прибыли.

Также для $n > 3$ и классического диапазона шагов $[\overline{\gamma}_i^{t+1}; \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}] = [0; 1]$ не удастся подтвердить сходимость процесса ни для одного набора параметров β_i^{t+1} . Отметим, что при равных для всех агентов параметрах β_i^{t+1} матрица F^{t+1} для $n > 2$ не является положительно определенной. Достаточно в этом убедиться для какого-либо одного значения параметра. При $n = 4$ и равных параметрах уже определитель второго главного минора матрицы отрицателен.

Для преодоления неопределенности в подтверждении гипотезы «процесс сходится» предполагаем ограничивать диапазоны выбора шагов агентами. При определении границ диапазонов будем исходить из того, что для агентов большие шаги часто являются предпочтительнее малых шагов, поэтому правые границы желательно иметь как можно ближе к единице.

В дальнейшем помогут следующие утверждения и леммы, доказательство которых приведено в Приложении.

Утверждение 3. В модели олигополии Курно процесс (4), (5) сходится для диапазонов шагов $[\vec{\gamma}_i^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}]$, если начиная с некоторого момента времени t_0 положительно определены матрицы F^{t+1} , элементы которых имеют вид

$$(15) \quad \begin{aligned} f_{ii}^{t+1} &= 3(\mu_i^{t+1} - \eta_i^{t+1}) + \mu_i^{t+1} - \sum_{k \in N} \eta_k^{t+1}, \\ f_{ij}^{t+1} &= (\mu_i^{t+1} - \eta_i^{t+1}) + (\mu_j^{t+1} - \eta_j^{t+1}) - \sum_{k \in N} \eta_k^{t+1}, \quad i, j \in N, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu_i^{t+1} &= [\vec{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1}(\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} - \vec{\gamma}_i^{t+1})]/2, \\ \eta_i^{t+1} &= [(\vec{\gamma}_i^{t+1})^2 + \beta_i^{t+1}((\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1})^2 - (\vec{\gamma}_i^{t+1})^2)]/4, \quad \beta_i^{t+1} \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть A квадратная матрица размера $m \times m$ с элементами вида $a_{ii} = a$, $a_{ij} = b$, $i, j \in M = \{1 \dots, m\}$, $i \neq j$. Тогда $\det(A) = (a - b)^{m-1}[a + b(m - 1)]$.

Лемма 3. Матрица (15) положительно определена при $\vec{\gamma}_i^{t+1} = \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} < \frac{4}{1+n}$, $i \in N$.

По лемме 3 для случая $n = 2$ имеем $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} < \frac{4}{3}$, поэтому процесс придет в равновесие, когда все агенты выбирают максимальные шаги, равные единице. Для случая $n = 3$ должно быть $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} < 1$, поэтому не подтверждается сходимостью процесса, когда все агенты выбирают максимальные шаги. Для случая $n = 4$ можно подтвердить сходимостью процесса только, когда шаги агентов не выходят за правую границу диапазона, равную 0,8.

Рассмотрим снова модель дуополии, но изменим границы диапазона. Положим $\vec{\gamma}_i^{t+1} = 0,2$ и $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} = 1$, т.е. теперь агенты не могут выбирать «самые маленькие» шаги. По (15) $\mu_i^{t+1} = 0,1 + \beta_i^{t+1}0,4$, $\eta_i^{t+1} = 0,01 + \beta_i^{t+1}0,24$, $F^{t+1} =$

$$= \begin{pmatrix} 0,35 + 0,64\beta_1^{t+1} - 0,24\beta_2^{t+1} & 0,16 - 0,08\beta_1^{t+1} - 0,08\beta_2^{t+1} \\ 0,16 - 0,08\beta_1^{t+1} - 0,08\beta_2^{t+1} & 0,35 + 0,64\beta_2^{t+1} - 0,24\beta_1^{t+1} \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица F^{t+1} положительно определена при $\beta_1^{t+1}, \beta_2^{t+1} \in [0; 1]$. Положительность определителя первого главного минора очевидна, положительность определителя второго главного минора следует уже из того, что каждый из диагональных элементов больше каждого из недиагональных элементов. Поэтому

если агенты выбирают шаги в диапазоне $[\vec{\gamma}_i^{t+1}; \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}] = [0,2; 1]$, то процесс (4), (5) сходится при $\beta_1^{t+1}, \beta_1^{t+1} \in [0; 1]$. В следующем утверждении для дуополии доказывается в Приложении, что нижняя граница диапазона может быть уменьшена.

Утверждение 4. Если в дуополии Курно агенты начиная с некоторого момента времени t_0 выбирают шаги в диапазоне $\gamma_1^{t+1}, \gamma_2^{t+1} \in [0,136; 1]$, то матрицы перехода погрешностей F^{t+1} будут положительно определены, $\|B^{t+1}\| < 1$ и процесс (4), (5) сходится.

Эти выводы согласуются с известными результатами, полученными другими методами [3–5, 14, 15], в том числе экспериментами.

Вернемся к модели олигополии с тремя агентами. Ранее для диапазона $[0; 1]$ не подтвердилась гипотеза «процесс сходится» ни для одного набора параметров β . Теперь изменим диапазон шагов. Положим, что $\vec{\gamma}_i^{t+1} = 0,6$ и $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} = 1$. Агенты выбирают неравные шаги, пусть $\beta_1^{t+1} = 0,4$, $\beta_2^{t+1} = 0,5$, $\beta_3^{t+1} = 0,6$. По (15) $\mu_1^{t+1} = 0,38$; $\eta_1^{t+1} = 0,154$; $\mu_2^{t+1} = 0,4$; $\eta_2^{t+1} = 0,17$; $\mu_3^{t+1} = 0,42$; $\eta_3^{t+1} = 0,186$; $F^{t+1} = \begin{pmatrix} 0,548 & -0,054 & -0,05 \\ -0,054 & 0,58 & -0,56 \\ -0,05 & -0,56 & 0,612 \end{pmatrix}$. Матрица положительно определена (с большим запасом), т.е. условие сходимости процесса заведомо имеет место при $\gamma_1^{t+1} = 0,76$, $\gamma_2^{t+1} = 0,8$, $\gamma_3^{t+1} = 0,84$.

Для максимального диапазона шагов, гарантирующего сходимость процесса, справедливо

Утверждение 5. Если в дуополии Курно агенты начиная с некоторого момента времени t_0 выбирают шаги в диапазоне $\gamma_1^{t+1}, \gamma_2^{t+1}, \gamma_3^{t+1} \in [0,334; 1]$, то матрицы перехода погрешностей F^{t+1} будут положительно определены, $\|B^{t+1}\| < 1$ и процесс (4), (5) сходится.

Для модели олигополии Курно с четырьмя и более агентами для получения максимальных диапазонов шагов, гарантирующих сходимость процессов коллективного поведения, может быть рекомендован метод, который был использован при доказательстве утверждений 4 и 5 для случаев $n = 2$ и $n = 3$. Суть метода состоит в следующем:

1. Определяется единая для всех агентов и моментов времени t правая граница $\overleftarrow{\gamma}^*$ диапазонов выбора ими шагов. По лемме 2 желаемая максимальная граница определяется из условия $\overleftarrow{\gamma}^* = \min \left\{ \frac{4}{1+n}; 1 \right\}$. При $n = 2$ имеем $\overleftarrow{\gamma}^* = 1$, при $n = 3$ имеем $\overleftarrow{\gamma}^* = 1$ (для трех агентов сама единица не включается в диапазон), $n = 4 - \overleftarrow{\gamma}^* = 0,8$, $n = 5 - \overleftarrow{\gamma}^* = 2/3$ и т.д.

Имеем, что для n агентов в (10) будет $f(\overleftarrow{\gamma}^*, \overleftarrow{\gamma}^*, \dots, \overleftarrow{\gamma}^*) < 1$ (в скобках n -мерный вектор) для каждого набора действительных чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ такого, что $\sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 = 1$.

2. Определяется единая для всех агентов и моментов t нижняя граница $\vec{\gamma}^*$

диапазонов шагов. Для этого решаются $(n-1)$ задач на положительную определенность матриц F .

Для набора параметров $(\vec{\gamma}, \gamma^*, \gamma^*, \dots, \gamma^*)$ положив $\beta_1^{t+1} = 0$ и $\beta_2^{t+1} = \beta_3^{t+1} = \dots = \beta_n^{t+1} = 1$ определяем матрицу по (15). Пусть $\vec{\gamma}_{(1)}$ — минимальное значение параметра $\vec{\gamma}$, при котором матрица положительно определена. Имеем, что $f(\vec{\gamma}_{(1)}, \gamma^*, \gamma^*, \dots, \gamma^*) < 1$, если $\sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 = 1$. Также будет $f(\gamma^*, \vec{\gamma}_{(1)}, \gamma^*, \dots, \gamma^*) < 1$, $f(\gamma^*, \gamma^*, \vec{\gamma}_{(1)}, \gamma^*, \dots, \gamma^*) < 1$, \dots , $f(\gamma^*, \gamma^*, \gamma^*, \dots, \gamma^*, \vec{\gamma}_{(1)}) < 1$.

Для набора параметров $(\vec{\gamma}, \vec{\gamma}, \gamma^*, \gamma^*, \dots, \gamma^*)$ при $\beta_1^{t+1} = \beta_2^{t+1} = 0$ и $\beta_3^{t+1} = \dots = \beta_n^{t+1} = 1$ определяем матрицу по (15). Обозначим через $\vec{\gamma}_{(2)}$ минимальное значение параметра $\vec{\gamma}$, при котором матрица положительно определена. Имеем, что $f(\vec{\gamma}_{(2)}, f \vec{\gamma}_{(2)}, \gamma^*, \dots, \gamma^*) < 1$, если $\sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 = 1$. Также будет, что $f(\vec{\gamma}_{(2)}, \gamma^*, \vec{\gamma}_{(2)}, \gamma^*, \dots, \gamma^*) < 1$, $f(\gamma^*, \vec{\gamma}_{(2)}, \vec{\gamma}_{(2)}, \gamma^*, \dots, \gamma^*) < 1$, \dots , $f(\gamma^*, \gamma^*, \dots, \gamma^*, \vec{\gamma}_{(2)}, \vec{\gamma}_{(2)}) < 1$.

Подобным образом определяются $\vec{\gamma}_{(3)}, \vec{\gamma}_{(4)}, \dots, \vec{\gamma}_{(n-1)}$.

При определении нижней границы $\vec{\gamma}_{(n)}$ имеем, что для набора параметров $(\vec{\gamma}, \vec{\gamma}, \dots, \vec{\gamma})$ будет $\det(F) = \vec{\gamma}^n (1+n)(2-\vec{\gamma})^{n-1} (2-(1+n)\vec{\gamma})$ и матрица F положительно определена, если $\vec{\gamma} \neq 0$.

Единая нижняя граница диапазонов определяется из условия $\vec{\gamma}^* = \max_i \{ \vec{\gamma}_{(i)}; i = \overline{1, (n-1)} \}$.

5. Заключение

Один из возможных подходов к аналитическому исследованию условий сходимости динамических процессов коллективного поведения в линейной модели олигополии основан на использовании матриц перехода погрешностей процессов от t -го к $(t+1)$ -му моменту времени. С помощью этого подхода предпринята попытка исследовать условия сходимости для модели Курно за счет введения ограничений на диапазоны шагов агентов в направлении их текущих целей. Предложен метод определения максимальных диапазонов шагов, гарантирующих сходимость процессов для произвольного числа агентов. Получаемые диапазоны не зависят от параметров рынка и агентов, но зависят от числа агентов на рынке. Для рынков с двумя и тремя агентами по предложенному методу рассчитаны максимальные диапазоны шагов.

По утверждению 1 если процесс (4), (5) сходится по норме, то в этих диапазонах будет сходиться и процесс (9), (5), в котором в каждый момент времени выполнены условия конкурентоспособности агентов.

Задачи поиска равновесия или условий сходимости ставятся и решаются в рамках других моделей рефлексии (см., например, [20]). Предложенный в статье подход здесь может иметь перспективу для будущих исследований, если поиск решения этих задач приводит к последовательностям типа $\varepsilon^{t+1} \rightarrow 0$ и $\varepsilon^{t+1} = B^{t+1} \varepsilon^t$.

Доказательство утверждения 3. Доказательство сводится к преобразованиям правой части (12).

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in N} \left\{ (1 - \beta_i^{t+1}) \left[\varepsilon_i - \frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) \right]^2 + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \beta_i^{t+1} \left[\varepsilon_i - \frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) \right]^2 \right\} = \\
 & = \sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 - \sum_{i \in N} \varepsilon_i \overrightarrow{\gamma}_i^{t+1} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) + \left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \right)^2 \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right)^2 - \\
 & - \sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} \left\{ \left[\varepsilon_i - \frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) \right]^2 - \left[\varepsilon_i - \frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) \right]^2 \right\} = \\
 & = 1 - \sum_{i \in N} \varepsilon_i \overrightarrow{\gamma}_i^{t+1} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) + \left(\frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \right)^2 \sum_{i \in N} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right)^2 - \\
 & - \sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} \left[2\varepsilon_i - \left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} + \frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \right) \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) \right] \times \\
 & \qquad \qquad \qquad \times \left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} - \frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \right) \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) = \\
 & = 1 - \sum_{i \in N} 2\varepsilon_i \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) \left[\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} + \beta_i^{t+1} \left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} - \frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \right) \right] + \\
 & + \sum_{i \in N} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right)^2 \left[\left(\frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \right)^2 + \beta_i^{t+1} \left(\left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\overrightarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \right)^2 \right) \right] = \\
 & = 1 - \sum_{i \in N} 2\varepsilon_i \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) \mu_i^{t+1} + \sum_{i \in N} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right)^2 \eta_i^{t+1} = \\
 & = 1 - 2 \sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 \mu_i^{t+1} - \sum_{i \in N} 2\varepsilon_i \mu_i^{t+1} \sum_{j \in N} \varepsilon_j + \\
 & + \sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 \eta_i^{t+1} + \sum_{i \in N} 2\varepsilon_i \eta_i^{t+1} \sum_{j \in N} \varepsilon_j + \sum_{i \in N} \left(\sum_{j \in N} \varepsilon_j \right)^2 \eta_i^{t+1} =
 \end{aligned}$$

$$= 1 - \sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 \left(4\mu_i^{t+1} - 3\eta_i^{t+1} - \sum_{k \in N} \eta_k^{t+1} \right) - \\ - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_i \varepsilon_j \left[(\mu_i^{t+1} - \eta_i^{t+1}) + (\mu_j^{t+1} - \eta_j^{t+1}) - \sum_{k \in N} \eta_k^{t+1} \right].$$

Если определители главных миноров матрицы (15) положительны, то квадратичная форма $\sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 \left(4\mu_i^{t+1} - 3\eta_i^{t+1} - \sum_{k \in N} \eta_k^{t+1} \right) + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_i \varepsilon_j \times$
 $\times \left[(\mu_i^{t+1} - \eta_i^{t+1}) + (\mu_j^{t+1} - \eta_j^{t+1}) - \sum_{k \in N} \eta_k^{t+1} \right]$ является положительно определенной и по (7), (10) $\|B^{t+1}\| < 1$. То есть процесс (4), (5) сходится при данных значениях параметров $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}, \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}$.

Утверждение 3 доказано.

Доказательство леммы 2. Будут полезными свойства определителей: 1) определитель не изменится, если к элементам любой строки прибавить соответствующие элементы какой-либо другой, умноженные на одно и то же произвольное число; 2) определитель треугольной квадратной матрицы равен произведению его диагональных элементов.

Прибавлением к элементам каждой строки соответствующих элементов следующей строки, умноженных на (-1) , получаем

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-a & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a-b & b-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & b-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Затем разложением по последней строке с использованием формулы вычисления треугольных определителей имеем $\det(A) = a(a-b)^{m-1} + (m-1)b(a-b)^{m-1} = (a-b)^{m-1}[a + (m-1)b]$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Имеем $\gamma_i^{t+1} = \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}$, при $\beta_i^{t+1} = 1$ и по (15)

$$\mu_i^{t+1} = \frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}, \quad \eta_i^{t+1} = \left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \right)^2, \\ f_{ii}^{t+1} = 2\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} - (3+n) \left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \right)^2, \quad f_{ij}^{t+1} = \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} - (2+n) \left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2} \right)^2, \\ i, j \in N, i \neq j.$$

По лемме 2 $\det(F^{t+1}) = (1+n) \left(\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)^n \left(2 - \frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right)^{n-1} \left[2 - (1+n)\frac{\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}}{2}\right]$.
 Определитель положителен при $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} < \frac{4}{1+n}$. При выполнении данного неравенства также положителен определитель k -го главного минора матрицы F^{t+1} ($k < n$). Имеем $a + (k-1)b = \overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} [2(1+k) - (1+2k+nk)\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}/2] / 2$.
 При $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} = \frac{4}{1+n}$ будет $a + (k-1)b = \frac{4(n-k)}{(1+n)^2} > 0$. При $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1} < \frac{4}{1+n}$ положительность определителя k -го главного минора очевидна.

Лемма 3 доказана.

Доказательство утверждения 4. При определении границ диапазонов правые границы желательно иметь как можно ближе к единице. Также будем исходить из единого для всех агентов и моментов времени диапазона. Поэтому при f и F будем опускать верхний индекс $(t+1)$.

На основании леммы 2 для дуополии правую границу $\overleftarrow{\gamma}$ диапазона следует взять равной единице и $f(1, 1) < 1$.

Рассмотрим $f(\overrightarrow{\gamma}; 1)$. Соответствующая этой квадратичной форме матрица (15) определяется при $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 1$ и имеет вид $F = \begin{pmatrix} 2\overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2 - 0,25 & \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 \\ \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 & 1 - \overrightarrow{\gamma}^2/4 \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы можно

преобразовать к более простому виду $\det(F) = \begin{vmatrix} 3,75 & \overrightarrow{\gamma}/2 - 2 \\ \overrightarrow{\gamma}/2 - 2 & 1 - \overrightarrow{\gamma}^2/4 \end{vmatrix}$.

Матрица положительно определена, если $\overrightarrow{\gamma} \geq 0,136$. Поэтому $f(0,136; 1) < 1 \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Естественно, что $f(0,136; 1) = f(0,136; 1) < 1$

Рассмотрим $f(\overrightarrow{\gamma}; \overrightarrow{\gamma})$. Соответствующая матрица (15) определяется при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и имеет вид $F = \begin{pmatrix} 2\overrightarrow{\gamma} - 5\overrightarrow{\gamma}^2/4 & \overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2 \\ \overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2 & 2\overrightarrow{\gamma} - 5\overrightarrow{\gamma}^2/4 \end{pmatrix}$. Матрица положительно определена, если $\overrightarrow{\gamma} \neq 0$. Поэтому $f(0,136; 0,136) < 1 \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Из (11) следует доказываемое утверждение 4.

Доказательство утверждения 5.

Рассмотрим $f(1; 1; \overrightarrow{\gamma})$. Соответствующая этой квадратичной форме матрица (15) определяется при $\beta_1 = \beta_2 = 1$ и $\beta_3 = 0$. Она имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 0,75 - \overrightarrow{\gamma}^2/4 & -\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0,25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 \\ -\overrightarrow{\gamma}^2/4 & 0,75 - \overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0,25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 \\ -0,25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 & -0,25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 & -0,5 + 2\overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы можно преобразовать к более удобному для вычислений виду $\det(F) = \begin{vmatrix} 0,75 & -\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0,25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 \\ 0 & 0,75 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 & -0,25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2 \\ 0 & -0,25 + \overrightarrow{\gamma}/2 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 & -0,5 + 2\overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2 \end{vmatrix}$.

Минимальное значение $\overrightarrow{\gamma}$, для которого матрица F положительно определена, равно 0,334. Поэтому $f(1; 1; 0,334) < 1 \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Имеем также, что $f(1; 1; 0,334) = f(1; 0,334; 1) = f(0,334; 1; 1) < 1 \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Рассмотрим $f(1; \overrightarrow{\gamma}; \overrightarrow{\gamma})$. Соответствующая матрица (15) определяется при $\beta_1 = 1$, и $\beta_2 = \beta_3 = 0$. Она имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 1 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 & \overrightarrow{\gamma}/2 - 3\overrightarrow{\gamma}^2/4 & \overrightarrow{\gamma}/2 - 3\overrightarrow{\gamma}^2/4 \\ \overrightarrow{\gamma}/2 - 3\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0,25 + 2\overrightarrow{\gamma} - 5\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0,25 + \overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2 \\ \overrightarrow{\gamma}/2 - 3\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0,25 + \overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2 & -0,25 + 2\overrightarrow{\gamma} - 5\overrightarrow{\gamma}^2/4 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы можно преобразовать к более удобному для вычисления

$$\text{виду } \det(F) = \begin{vmatrix} 1 - \overrightarrow{\gamma}^2/2 & \overrightarrow{\gamma} - 3\overrightarrow{\gamma}^2/2 & 1 - 3\overrightarrow{\gamma}^2/4 \\ \overrightarrow{\gamma}/2 - 3\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0,5 + 3\overrightarrow{\gamma} - 9\overrightarrow{\gamma}^2/4 & -0,25 + \overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2 \\ 0 & 0 & \overrightarrow{\gamma} - \overrightarrow{\gamma}^2/4 \end{vmatrix}.$$

Минимальное значение $\overrightarrow{\gamma}$, для которого матрица F положительно определена, равно 0,22. Поэтому $f(1; 0,22; 0,22) < 1 \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Также $f(0,22; 1; 0,22) = f(0,22; 0,22; 1) = f(1; 0,22; 0,22) < 1 \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Рассмотрим $f(\overrightarrow{\gamma}; \overrightarrow{\gamma}; \overrightarrow{\gamma})$. Соответствующая матрица (15) определяется при $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ и имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 2\overrightarrow{\gamma} - 3\overrightarrow{\gamma}^2/2 & \overrightarrow{\gamma} - 5\overrightarrow{\gamma}^2/4 & \overrightarrow{\gamma} - 5\overrightarrow{\gamma}^2/4 \\ \overrightarrow{\gamma} - 5\overrightarrow{\gamma}^2/4 & 2\overrightarrow{\gamma} - 3\overrightarrow{\gamma}^2/2 & \overrightarrow{\gamma} - 5\overrightarrow{\gamma}^2/4 \\ \overrightarrow{\gamma} - 5\overrightarrow{\gamma}^2/4 & \overrightarrow{\gamma} - 5\overrightarrow{\gamma}^2/4 & 2\overrightarrow{\gamma} - 3\overrightarrow{\gamma}^2/2 \end{pmatrix}.$$

По лемме $2 \det(F) = \overrightarrow{\gamma}^3(2 - \overrightarrow{\gamma}/2)^2(1 - \overrightarrow{\gamma})$. Матрица положительно определена, если $\overrightarrow{\gamma} \neq 0,1$. Из полученных значений для нижней границы надо выбрать максимальное, т.е. 0,334.

На основании леммы 2 для олигополии с тремя агентами правую границу $\overleftarrow{\gamma}$ диапазона следует брать меньше единицы.

Из (11) следует доказываемое утверждение 5 для диапазона $[0,334; 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nash J.* Non-Cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
2. *Askar S.S., Elettreybc M.F.* The Impact of Cost Uncertainty on Cournot Oligopoly Games // Appl. Math. Comput. 2017. V. 312. P. 169–176.
3. *Al-Khedhairi A.* Dynamical Study of Competition Cournot-like Duopoly Games Incorporating Fractional Order Derivatives and Seasonal Influences // Int. J. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2020. V. 21. P. 339–359.
4. *Elsadany A.A.* Dynamics of a Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality Based on Relative Profit Maximization // Appl. Math. Comput. 2017. V. 294. P. 253–263.
5. *Ueda M.* Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality // Appl. Math. Comput. 2019. V. 362. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.049.124535>
6. *Fedyanin D.N.* Monotonicity of Equilibriums in Cournot Competition with Mixed Interactions of Agents and Epistemic Models of Uncertain Market // Procedia Computer Science. 2021. V. 186(3). P. 411–417.

7. *Гераськин М.И.* Анализ равновесий в нелинейной модели олигополии // *АиТ.* 2022. № 8. С. 140–158.
Geraskin M.I. Analysis of Equilibria in a Nonlinear Oligopoly Model // *Autom. Remote Control.* 2022. No. 83. P. 1261–1277.
8. *Корепанов В.О.* Управление рефлексивным поведением агентов в модели олигополии Курно // *УБС.* 2010. Т. 31. С. 225–249.
9. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* О возможности последовательного приближения к равновесию в коалиционной игре при повторении коллективных действий // *Экономика и математические методы.* 2020. № 4. С. 103–115.
10. *Cournot A.* *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth.* London: Hafner, 1960. (Original 1838).
11. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* *Reflexion and Control: Mathematical Models.* Leiden: CRC Press, 2014.
12. *Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A.* Reflexion in Mathematical Models of Decision-Making // *Int. J. Parallel Emerg. Distrib. Syst.* 2018. V. 33. No. 3. P. 319–335.
13. *Опоицев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
14. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // *АиТ.* 2020. № 2. С. 115–133.
Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 2. P. 345–359.
15. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Моделирование динамики коллективного поведения в рефлексивной игре с произвольным числом лидеров // *Информатика и автоматизация.* 2022. Т. 21. № 2. С. 339–375.
16. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* К аналитическому исследованию условий сходимости процессов рефлексивного коллективного поведения в моделях олигополии // *АиТ.* 2022. № 3. С. 84–109.
Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 3. P. 367–388.
17. *Малишевский А.В.* Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.
18. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
19. *Белицкий Г.Р., Любич Ю.И.* Нормы матриц и их приложения. Киев: Наукова думка, 1984.
20. *Гераськин М.И.* Рефлексивный анализ равновесий в игре триполии при линейных функциях издержек агентов // *АиТ.* 2022. № 3. С. 110–131.
Geraskin M.I. Reflexive Analysis of Equilibria in a Triopoly Game with Linear Cost Functions of the Agents // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 3. P. 389–406.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 07.10.2022

После доработки 02.02.2023

Принята к публикации 15.02.2023

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2023 г. Х. ЧЕН, PhD (eric.hf.chen@hotmail.com)
(Чжэцзян Шурен университет, Ханчжоу),
С.А. ИГНАТЬЕВА (s.ignatieva@psu.by),
Р.П. БОГУШ, д-р техн. наук (r.bogush@psu.by)
(Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой, Новополоцк),
С.В. АБЛАМЕЙКО, д-р техн. наук (ablameyko@bsu.by)
(Белорусский государственный университет, Минск)

ПОВТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛЮДЕЙ В СИСТЕМАХ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ: АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ

Статья посвящена многостороннему анализу повторной идентификации людей в системах видеонаблюдения и современных методов ее решения с использованием глубокого обучения. Рассматриваются общие принципы и применение сверточных нейронных сетей для этой задачи. Предложена классификация систем реидентификации. Приведен анализ существующих наборов данных для обучения глубоких нейронных архитектур, описаны подходы для увеличения количества изображений в базах данных. Рассматриваются подходы к формированию признаков изображений людей. Представлен анализ основных применяемых для реидентификации моделей архитектур сверточных нейронных сетей, их модификаций, а также методов обучения. Анализируется эффективность повторной идентификации на разных наборах данных, приведены результаты исследований по оценке эффективности существующих подходов в различных метриках.

Ключевые слова: реидентификация, видеоданные, сверточные нейронные сети, метрики оценки точности, дескрипторы изображений.

DOI: 10.31857/S0005231023050057, EDN: ANHWFO

1. Введение

Широкое внедрение систем видеонаблюдения позволяет решать множество практических задач, в том числе и повышения уровня общественной безопасности. Так, важным и актуальным является определение присутствия заданного человека по его изображениям на видеоданных в другом месте или

в разное время в пространственно-распределенных системах видеонаблюдения. Такая задача называется повторной идентификацией или реидентификацией человека. Для ее решения необходимо выявить отличительные признаки и путем выполнения запроса к базе данных сравнить их с признаками из имеющейся выборки изображений множества людей (галереи). Причем состав набора признаков в значительной мере определяет эффективность реидентификации. Поиск и выделение наиболее отличительных особенностей объектов на изображениях, в том числе и людей, не формализованы. Следовательно, используется эмпирический подход, который в большинстве случаев является долгим и трудоемким процессом. Для реидентификации людей из-за неоднозначности внешнего вида с разных ракурсов, вариаций освещения, различных разрешений камер, окклюзий для этого требуются нерационально большие вычислительные затраты. Поэтому долгое время для повторной идентификации людей значимые результаты не достигались. Совершенствование средств вычислительной техники и открытия в области глубокого обучения, в частности развитие сверточных нейронных сетей (СНС), позволили автоматизировать процесс извлечения признаков изображений людей и обеспечить значительное увеличение точности реидентификации. Однако несмотря на то, что данной задачей с применением методов глубокого обучения занимаются многие ученые и инженеры в мире, она не решена полностью, и при разработке системы повторной идентификации по-прежнему приходится сталкиваться с большим числом проблем, а широкое разнообразие областей применения повторной идентификации, таких как пропускные системы на режимных предприятиях, поиск пропавших людей или правонарушителей, сбор статистической информации о посещении людьми торговых центров и других социальных объектов, приводят к существованию большого числа подходов и алгоритмов для ее решения, которые имеют разные качественные характеристики.

2. Организация и оценка эффективности повторной идентификации людей в распределенных системах видеонаблюдения

2.1. Обобщенная схема системы повторной идентификации

Пространственно-распределенная система видеонаблюдения состоит из территориально разнесенных IP камер и организована, как правило, на основе единого центра обработки данных. На рис. 1 показана упрощенная структура повторной идентификации в такой системе, которая включает три IP видеокamеры C_1, C_2, C_3 . На каждом кадре F^k , k — номер видеокamеры, с помощью детектора выполняется обнаружение всех людей, попадающих в поле зрения камер, и формирование ограничительных рамок для них, которые описывают прямоугольником обнаруженные фигуры. Изображения людей I_i , где $i = 1, \dots, N_{img}$, N_{img} — общее количество изображений, размещаются в галерее. Для каждого из них с помощью СНС определяются векто-

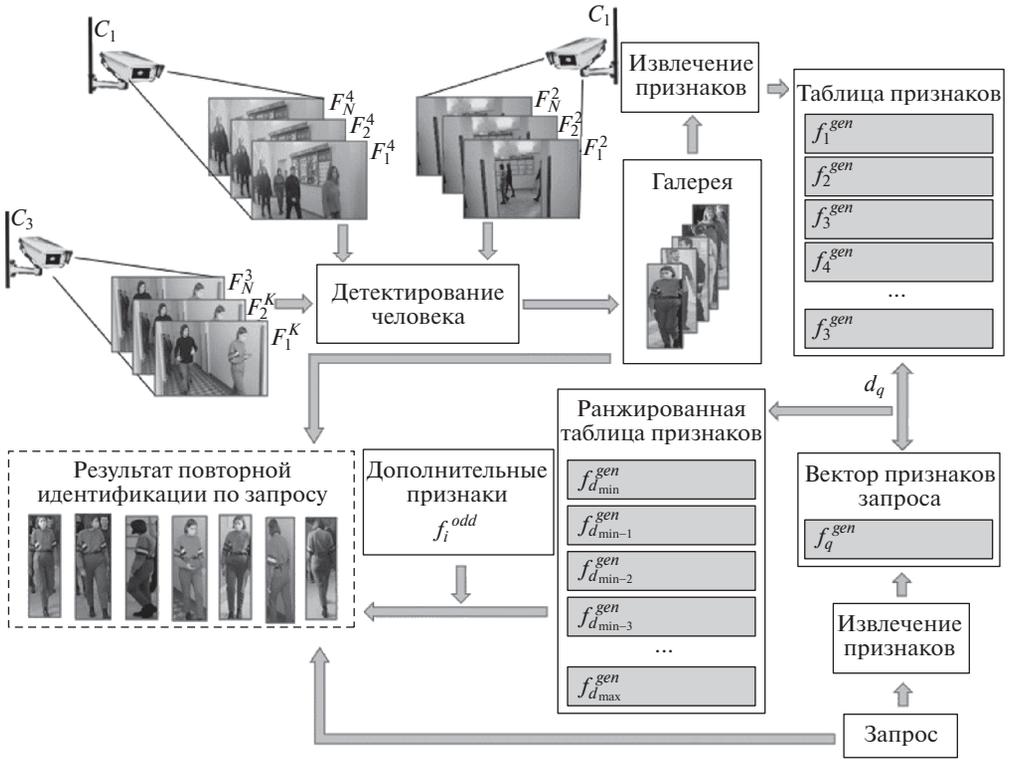


Рис. 1. Общая схема системы повторной идентификации.

ры f_i^{gen} (СНС дескрипторы), формирующие общее пространство СНС признаков $\chi_{I_i} = \{f_i^{gen}\}$, которое представляется в виде таблицы, причем каждая строка является СНС дескриптором f_i^{gen} для одного изображения.

Для описания человека при релентификации используется составной вектор признаков, который может быть представлен как

$$(1) \quad P_{ID} = (p_n^{ID}, f_i^{gen}, f_i^{add}),$$

где p_n^{ID} — идентификатор (метка) человека; n — количество возможных идентификаторов, равное общему числу уникальных людей; f_i^{gen} — вектор СНС признаков для i -го изображения человека, который может включать СНС признаки, разделяемые на глобальные признаки f_i^{global} , характеризующие изображение в целом, и локальные $f_{i,j}^{local}$, получаемые при разделении изображения на j частей; f_i^{add} — дополнительные признаки, которые могут содержать информацию, позволяющую улучшить эффективность системы релентификации, например идентификатор камеры C_{ID} , номер кадра с k -й видеокамеры F_m^k или др. [1].

При поступлении запроса для повторной идентификации человека вычисляется его вектор признаков f_q^{gen} , который используется для нахождения расстояния d_q , определяющего степень подобия между данным запросом и

дескрипторами изображений галереи. С использованием найденных расстояний выполняется ранжирование в таблице χ_{I_i} от d_{\min} до d_{\max} . С учетом дополнительных признаков исключаются изображения, которые по каким-либо критериям позволяют предполагать, что несмотря на схожесть визуальных признаков, изображение-кандидат не соответствует искомому человеку. Например, если на изображениях с двух неперекрывающихся камер в одно и то же время находится объект интереса со схожими визуальными признаками, то можно однозначно утверждать, что это разные люди, так как один и тот же человек не может присутствовать в двух местах одновременно. После исключения всех неподходящих кандидатов в качестве результата повторной идентификации отображаются изображения людей, f_i^{gen} которых находились вверху списка ранжированной таблицы. Первый человек из этого списка принимается за результат повторной идентификации как наиболее схожий с запросом.

2.2. Классификация систем повторной идентификации

Широкая область применения систем повторной идентификации человека обуславливает существование большого количества алгоритмов и подходов для решения задачи, и, соответственно, различные способы классификации таких систем (рис. 2). Так, по взаимодействию с внешней средой можно выделить системы повторной идентификации закрытые (Close-world), использующие готовые наборы данных для обучения и тестирования, и открытые (Open-world), в которых галерея изображений постоянно пополняется новыми кадрами [2]. Закрытые системы обычно применяются в исследовательских целях и набор данных состоит из ограниченного количества видеопоследовательностей или изображений, полученных с нескольких камер видеонаблюдения. Данные в таких наборах аннотированы и подготовлены заранее, запрос присутствует в галерее. В открытых системах используется набор данных,

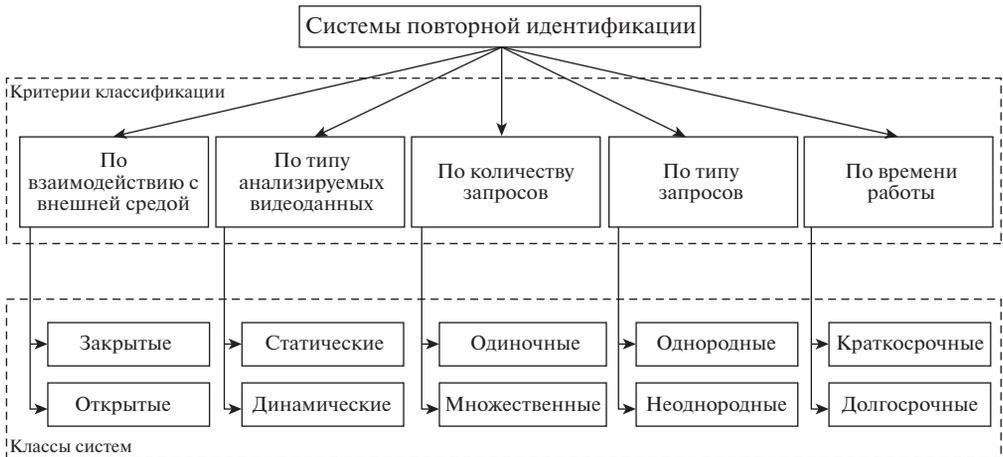


Рис. 2. Классификация систем повторной идентификации.

который изменяется с течением времени, по мере поступления новых записей с камер наблюдения ограничительные рамки необходимо генерировать в режиме реального времени. Полученные новые изображения требуется аннотировать для обучения, т.е. формировать псевдо-метки (pseudo-label) для возможности тренировки СНС при видеонаблюдении. Организация таких систем намного сложнее, они требуют высокопроизводительной аппаратной части, но наиболее приближены к реальным условиям.

В зависимости от типа анализируемых видеоданных системы повторной идентификации можно разделить на статические (image-based), которые обрабатывают отдельные кадры через некоторые интервалы времени, и динамические (video-based), когда рассматривается последовательность кадров из видео [3]. В динамических системах признаки формируются не только на основе анализа пространственной области, но и учитывают временную составляющую о человеке, например информацию о походке, направлении движения и другие дополнительные признаки.

В зависимости от количества запросов [4] системы реидентификации можно разделить на одиночную повторную идентификацию (для одного человека) и множественную (для всех людей, попавших в поле зрения камер). В первом случае в наборе данных требуется найти человека по запросу, и повторная идентификация сводится к задаче поиска или проверке, присутствует ли искомый человек в галерее. Во втором — для каждого человека устанавливается уникальный идентификатор и определяется, на каких кадрах каждый из этих людей встречается снова, и эта задача сводится к классификации [5].

По типу запросов системы повторной идентификации можно разделить на однородные (single-modality) и неоднородные (cross-modality) [2]. При использовании однородных данных в качестве запросов используются изображения или видео, полученные с камер видеонаблюдения видимого диапазона. Если в качестве запроса используется текстовое описание искомого человека, изображение с инфракрасной камеры, рисунок или эскиз, то такие системы будут называться неоднородными.

По времени работы системы выделяют краткосрочную повторную идентификацию и долгосрочную [6]. Так, если каждый человек на изображениях в наборе данных находится в одной и той же одежде, изменения внешности незначительны и обусловлены только возможным изменением наличия аксессуаров или вещей в руках, съемка осуществлялась в течение ограниченного интервала времени, за которое человек не мог значительно изменить образ, то такая система будет краткосрочной. Долгосрочная повторная идентификация направлена на способность повторно идентифицировать людей, даже если прошло уже значительное количество времени, за которое человек мог изменить внешний вид [7].

Любая из рассмотренных выше систем может столкнуться с проблемой смещения домена (domain shift), когда обучение и тестирование осуществляются на данных из разных доменов. Под доменом понимают комплект изоб-

ражений, которые были получены в одинаковых условиях в одной системе видеонаблюдения. На каждое изображение в наборе данных оказывает влияние совокупность факторов, включающих разрешение камер, фон, условия освещения и даже внешний вид людей, т.е. статистически европейцы будут иметь отличный вид от азиатов, летняя одежда от зимней и т.д. Система, обученная на наборе данных, полученном с внутренних камер видеонаблюдения, может иметь крайне низкую эффективность на тестовой выборке, состоящей из изображений людей с наружных камер видеонаблюдения. Алгоритмы, направленные на решение этой проблемы, называются «междоменной реидентификацией» (Cross-domain ReID) и реализуют задачу адаптации (или переносимости) домена.

2.3. Метрики оценки точности

Одним из важнейших вопросов для оценки результатов повторной идентификации является выбор метрик, позволяющих дать численную оценку эффективности алгоритма и сравнить результаты для разных подходов реидентификации. Наиболее распространенными является группа метрик RankN, включающая Rank1, Rank5, Rank10, и mAP. Группа метрик RankN характеризует качество ранжирования и показывает процент числа запросов, для которых верный выданный результат был среди первых N полученных результатов. Соответственно, метрика Rank1 показывает процент запросов, для которых идентификатор первого изображения-кандидата совпадает с идентификатором запроса. Если $N = 5$, то Rank5 показывает процент запросов, для которых среди первых пяти выданных изображений-кандидатов было верное решение, соответственно для Rank10 учитываются первые десять изображений-кандидатов. Для вычисления RankN определяется отношение суммы числа запросов, для которых верное решение было найдено среди первых выданных результатов, к общему числу запросов Q :

$$(2) \quad \text{RankN} = \frac{\sum K_{i,N}}{Q},$$

где i — номер запроса; $K_{i,N}$ — i -й запрос, для которого верное решение было найдено среди первых N выданных результатов.

Метрика mAP является оценкой точности алгоритма повторной идентификации, отражающей среднее значение средних точностей для всех запросов, и рассчитывается по формуле

$$(3) \quad \text{mAP} = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^Q AP_i,$$

где AP — средняя точность, определяемая как площадь под кривой *precision-recall*, где $\text{precision} = \frac{TP}{TP+FP}$ — точность, TP — количество верных предсказаний запросов; FP — количество ложных положительных предсказаний

запросов; $recall = \frac{TP}{TP+FN}$ — чувствительность; FN — количество ложных отрицательных предсказаний запросов.

В системах повторной идентификации приоритетно, чтобы верные предсказания находились в начале ранжированного списка и имели как можно меньше ложных предсказаний. Следует отметить, что метрики RankN и mAP не отражают сложность поиска правильно идентифицированных изображений людей для поступающего запроса. Кроме этого, при одинаковых показателях Rank точность AP может отличаться. Для учета поиска наиболее сложных правильных предсказаний в [8] используется метрика mINP (mean Inverse Negative Penalty), предложенная в [2], которая позволяет исключить доминирование легких совпадений, влияющих на метрики Rank и mAP. Для ее вычисления вводятся дополнительные метрики: NP (Negative Penalty) — отрицательный штраф, назначаемый за неверные предсказания для i -го запроса и уменьшающий вероятность правильной реидентификации при неправильном нахождении самого сложного совпадения; INP (Inverse Negative Penalty) — обратная величина для NP, рост которой свидетельствует о повышении эффективности системы. При этом mINP характеризует среднее значение INP для всех запросов и вычисляется как

$$(4) \quad mINP = \frac{1}{Q} \sum_i (1 - NP_i) = \frac{1}{Q} \sum_i \left(1 - \frac{R_i^{hard} - |G_i|}{R_i^{hard}} \right) = \frac{1}{Q} \sum_i \frac{|G_i|}{R_i^{hard}},$$

где $NP_i = \frac{R_i^{hard} - |G_i|}{R_i^{hard}}$ — отрицательный штраф; R_i^{hard} — позиция самого сложного верного предсказания; $|G_i|$ — общее количество верных предсказаний для запроса.

На рис. 3 показан пример, когда в галерее для каждого запроса есть только три верных изображения (True). В первых двух ранжированных списках на рис. 3 при одинаковом значении Rank1 метрики AP различны: $AP_1 = 0,77$ (см. рис. 3,а), $AP_2 = 0,63$ (см. рис. 3,б). Это связано с тем, что в начале первого ранжированного списка имеются два верных совпадения, а во втором — только одно. При этом ближайшее верное совпадение занимает пятую позицию. Если сравнивать списки на рис. 3,б и 3,в, то очевидно, что в третьем ранжированном списке $AP_3 = 0,64$, т.е. больше, чем во втором, но при этом Rank1 в этом примере равен нулю. Это так же объясняется тем, что все возможные правильные ответы были получены вверху ранжированной таблицы (на второй, третьей и четвертой позиции), за исключением первого, неверного, предсказания. Предпочтительнее, чтобы все верно идентифицированные изображения людей были получены как можно раньше, однако при оценке системы метрики AP и Rank не позволяют это определить с максимальной точностью.

Анализ рис. 3,в показывает, чтобы иметь все возможные верные ответы, необходимо получить только четыре первых изображения-кандидата, и соответственно отрицательный штраф будет равен $NP = 0,25$, который минимальный для примеров на рис. 3. На рис. 3,б самое сложное предсказание

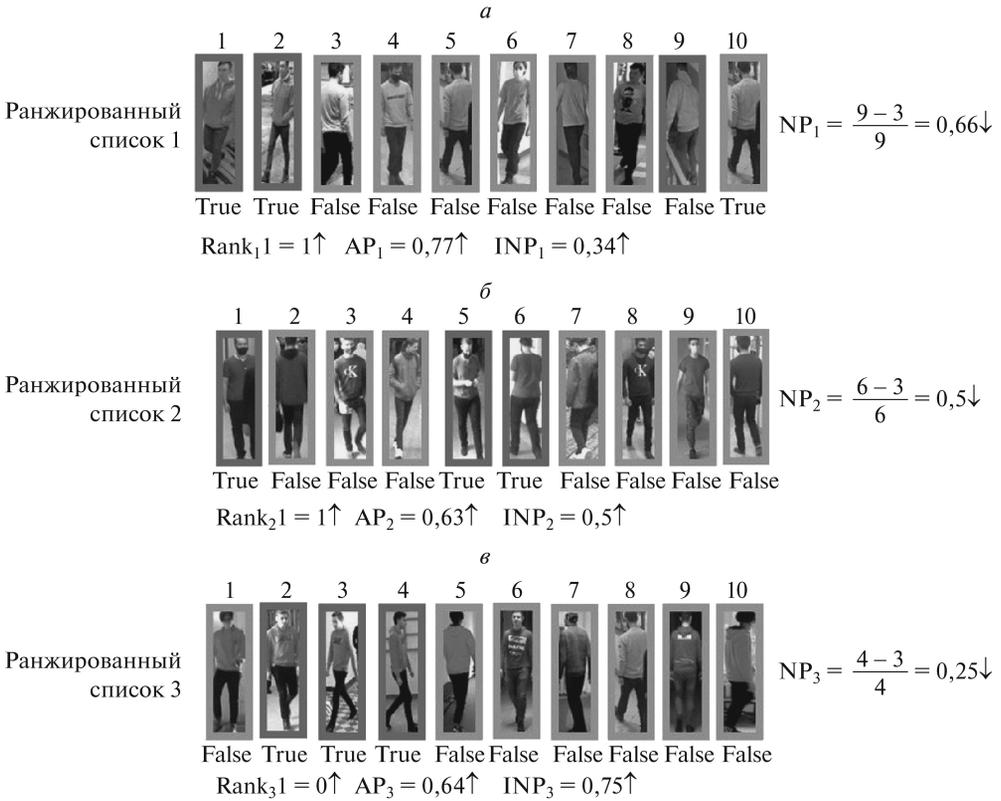


Рис. 3. Различие в метриках Rank, AP, NP и INP в зависимости от позиции истинных и ложных предсказаний.

соответствует шестой позиции в ранжированной таблице, на рис. 3,а неправильное обнаружение человека характерно для девятой позиции. Поэтому для примеров на рис. 3,а и 3,б увеличиваются значения NP, соответственно уменьшается INP. Таким образом, метрика INP позволяет оценить влияние сложности поиска всех верных совпадений. Чем больше это значение, тем лучше система выполняет поиск всех людей с одинаковым идентификатором. Соответственно следует стремиться к снижению NP и уменьшать число позиций от начала списка ранжирования до самого сложного, который может быть неправильно идентифицирован при поиске изображения.

3. Наборы и подготовка данных для обучения СНС

Использование СНС для извлечения признаков приводит к необходимости обучения используемой модели глубокой нейронной сети. Для этой цели обычно применяется аннотированный набор данных, который содержит уникальный идентификатор для каждого отдельного человека $S = \{(I_i, p_1^{ID}), \dots, (I_m, p_n^{ID})\}$, где I_i — изображение, $1 \leq i \leq m$, m — количество изображений, p_n^{ID} — идентификатор человека. Часто изображения сопровож-

даются информацией о номере камеры, с которой они были получены, номере кадра в видеопоследовательности. В аннотированном наборе данных для эффективной работы системы необходимо извлекать такой вектор признаков $f^{gen}(I_i)$ чтобы во всем пространстве признаков χ_{I_i} расстояние между ними для одинаковых идентификаторов было меньше, чем для людей с разными метками, т.е. следует стремиться к уменьшению ошибки E предсказания идентичности в S

$$(5) \quad \min E(I_i, p_n^{ID}) \in [p_n^{ID} - g(f^{gen}(I_i))],$$

где g — классификатор. Качество извлеченных признаков зависит от распределения и разнообразия данных в S [9].

При тренировке СНС для улучшения точности повторной идентификации рекомендуется подбирать наиболее оптимальные гиперпараметры, такие как скорость обучения, размер пакета, количество эпох; использовать увеличение обучающей выборки, аугментацию данных, найти наиболее эффективную функцию потерь, архитектуру СНС или рассматривать изображение не целиком, а разделяя его на фрагменты.

Для уже обученной модели улучшение работы алгоритма можно достигнуть, подбирая наиболее эффективный способ ранжирования таблицы признаков, использовать повторное ранжирование, учитывать дополнительную информацию о времени и месте съемки, атрибутах. Под атрибутами понимают семантическую информацию о человеке, имеющую значение для его идентификации. К ним относятся цвет и вид одежды, длина волос человека, наличие и особенности сумки, рюкзака, очков и других значимых деталей.

3.1. Анализ наборов данных

На точность повторной идентификации существенное влияние оказывают размер и состав обучающей выборки. Однако алгоритм для реидентификации в значительной мере определяет требования к набору данных. Формирование банка изображений для обучения и тестирования представляет трудоемкий и длительный процесс. Кроме этого существует проблема сдвига домена [10, 11], когда наблюдается значительное снижение точности повторной идентификации при использовании системы в условиях, стилистически отличающихся от обучающей выборки. Частичным решением проблемы является объединение разных наборов данных, что рассматривается в [12, 13], в том числе и для необходимого домена [12, 14].

При использовании существующих наборов данных для обучения СНС, кроме проблемы сдвига домена, приходится сталкиваться с проблемой защиты персональных данных. Некоторые базы изображений являются закрытыми, в них авторы предоставляют для исследований только извлеченные признаки [15]. Другие наборы данных можно использовать с ограничениями [16–18], т.е. при публикации исследований авторы просят соблюдать конфиденциальность студентов, изображения которых использовались при со-

здании, и распространение этих баз изображений возможно только при согласовании с авторами. Для некоторых наборов данных ограничивается возможность их использования. Например, MSMT17 [19] в настоящее время не доступен в публичном доступе, а DukeMTMC-ReID [20] был отозван и его использование не рекомендуется [21].

Существующие наборы изображений отличаются количеством сцен съемки и разных людей, а также числом изображений для каждого отдельного человека. Такие базы данных могут содержать отдельные кадры целиком, например PRW [22] и CUHK-SYSU [23], или вырезанные с этих кадров прямоугольные фрагменты на основе ограничительных рамок, содержащие только изображение человека. В некоторых наборах данных включены комплекты ограничительных рамок, полученных с нескольких последовательно идущих кадров, которые называются треклетами (tracklets), например MARS [24], LPW [25]. Также могут содержаться ограничительные рамки, полученные с отдельных кадров, взятых с некоторым интервалом по времени, например Market-1501 [26], CUHN01 [16], CUHN02 [17], CUHN03 [18], VIPeR [27] и др.

Изображения для наборов данных, как правило, получены при различных условиях съемки вне помещений (Market-1501 [26], LPW [25], PRID [28]) или в помещениях (QMUL iLIDS [29], Airport [30]). При формировании базы изображений PolReID [31] использовалось 856 сцен съемки внутреннего и наружного наблюдения. В наборе данных CUHN01 изображения для каждого человека получены с двух камер, области обзора которых не пересекаются. В CUHN02 используется пять таких пар видеокамер, а в CUHN03 изображения формируются с шести видеокамер, но для каждого человека предоставляются ограничительные рамки только с двух. Набор данных VIPeR был сформирован на основе изображений, полученных с двух видеокамер наружного видеонаблюдения, и для каждого человека представлено всего по одному изображению с каждой из них. При формировании LPW использовалось три разных локации, и на первой локации было установлено три видеокамеры, на двух других по четыре. Наборы данных PRW, Market-1501 и MARS были получены в одном и том же месте возле супермаркета в университете Циньхуа с шести видеокамер и отличаются только способом представления данных: кадры целиком, ограничительные рамки с изображением человека, треклеты соответственно.

Для обучения и тестирования неоднородных систем повторной идентификации применяются специальные наборы данных, использующие в качестве запроса текст (CUHK-PEDES [32], ICFG-PEDES [33]), изображение низкого разрешения (LR-PRID [34], LR-VIPeR [35]), изображение с инфракрасной камеры (SYSU-MM01 [36], RegDB [37]) или эскиз (PKU-Sketch [38]).

Набор данных CUHK-PEDES [32] объединяет пять существующих, таких как CUHK03 [18], Market-1501 [26], SSM [39], VIPeR [27] и CUHK01 [16], и каждое изображение аннотируется двумя текстовыми описаниями на английском языке. Текстовое описание состоит в среднем из 23,5 слов и содержит

информацию о внешнем виде человека, его действиях, позах. Другим набором данных для неоднородных систем повторной идентификации является ICFG-PEDES [33], который содержит в среднем 37,2 слов с более детальным описанием внешности, чем CUNH-PEDES, и сформирован на основе MSMT17 [19].

Наборы данных LR-PRID [34], LR-VIPeR [35] получены с использованием PRID [28] и VIPeR [27] соответственно, и для каждого человека имеется пара изображений, одно из которых с низким разрешением, а другое с большим, что позволяет их применять для систем повторной идентификации с видеокameraми разного разрешения.

SYSU-MM01 [36] был получен с двух инфракрасных и четырех RGB-камер, состоит из 15 712 инфракрасных изображений и 22 559 цветных для 491 человека. Набор RegDB [37] содержит по 10 цветных изображений, снятых днем, и 10 тепловых изображений с ночной ИК-камеры для 412 человек, что определяет возможность их использования в неоднородных системах повторной идентификации с инфракрасными и RGB-видеокамерами.

В [38] предлагается набор данных для двухсот человек, включающий по два изображения с разных камер и эскиз для каждого. Для создания эскизов были привлечены волонтеры, которые описывали внешность людей пяти разным художникам для обучения открытой (open-world) неоднородной (cross-modality) системы повторной идентификации. В случае отсутствия фотографии человека используется эскиз, нарисованный по описанию.

Еще одним набором данных для открытых (open-world) систем повторной идентификации является MPR Drone [40], который отличается тем, что для получения изображений используется одна видеокamera летающего дрона. Весь набор состоит из двух частей, первая часть размечена для 113 610 обнаруженных ограничительных рамок, а вторая содержит необработанные кадры для первой части.

В [41] представлен большой немаркированный набор данных LUPerson, который включает более четырех миллионов изображений для двухсот тысяч человек и может использоваться для неконтролируемого обучения систем повторной идентификации. Он сформирован с использованием видеоданных с более чем семидесяти тысяч уличных видео из различных городов.

В табл. 1 приведены сравнительные характеристики рассмотренных наборов данных.

В связи с тем, что при создании набора данных необходимо явное согласие всех участников, некоторые исследователи для формирования обучающей выборки применяют сгенерированные изображения. В [42] предлагается синтетический набор данных для повторной идентификации людей MOTSynth, для создания которого использовались видеопоследовательности из игры Grand Theft Auto V (GTA-V), имитирующей город с жителями в трехмерном пространстве. Авторы вручную разместили точки обзора камеры, спланировали маршруты и перемещения пешеходов, установили параметры,

Таблица 1. Сравнительная таблица наборов данных для повторной идентификации

Набор данных	Количество камер	Количество человек	Количество ограничительных рамок	Размер изображения
PRW [22]	6	932	34 304	Различный
CUNK-SYSU [23]	6	8432	96 143	–
MARS [24]	6	1261	1 191 003	256×128
LPW [25]	3, 4, 4	2731	592 438	256×128
Market-1501 [26]	6	1501	32 217	128×64
CUHN01 [16]	2	971	3884	160×60
CUHN02 [17]	10 (5 пар)	1816	7264	160×60
CUHN03 [18]	6	1360	13 164	Различный
MSMT17 [19]	15	4101	126 441	Различный
VIPeR [27]	2	632	1264	128×48
PRID [28]	2	934	24 541	128×64
QMUL iLIDS [29]	2	119	476	Различный
Airport [30]	6	9651	39 902	128×64
PolReID [31]	856	657	52 035	Различный
CUNK-PEDES [32]	–	13 003	80 412	–
ICFG-PEDES [33]	–	4102	52 522	–
LR-PRID [34]	2	100	200	–
LR-VIPeR [35]	2	632	1264	128×48 и 64×24
SYSU-MM01 [36]	6	491	38 271	–
RegDB [37]	2	412	8240	–
PKU-Sketch [38]	2	200	400	–

связанные с поведением людей, характерным для людных мест. Анализировалось 597 различных моделей пешеходов, для которых случайным образом менялась одежда, рюкзаки, сумки, маски, прически и бороды. Это позволило получить более 9519 уникальных пешеходов. Приведенные авторами результаты показывают, что обучение на синтетическом наборе позволяет повысить точность реидентификации на 6,9 % в метрике mAP по сравнению с использованием для обучения Market-1501 [26] и на 2,5% в метрике mAP при обучении на объединенном наборе данных из Market-1501[26] и CUNK03 [18].

В [9] рассматривается алгоритм генерации синтетических изображений для повышения устойчивости системы к смене домена. Для создания трехмерных реалистичных изображений людей применяется MakeHuman [43], а для моделирования видеонаблюдения платформа — Unreal Engine 4 (UE4) [44] с возможностью регулирования условий съемки (ночная, в помещении, на

улице), количества окклюзий людей, скорости ходьбы. Используется большое число деталей внешности, таких как маски, очки, наушники, головные уборы. На полученных изображениях людей присутствуют реальные фрагменты одежды, что отличает данный подход от существующих. При генерации намеренно добавляются люди с похожей внешностью и небольшими отличительными особенностями. Представлены результаты исследования в [9], которые показывают, что применение данного набора позволяет получить большую точность Rank1 при междоменном тестировании с использованием MSMT17, по сравнению с применением других синтетических баз изображений, таких как SOMAset [45], SyRI [46], PersonX [47], RandPerson [48]. Результаты подтверждаются при тестировании на Market-1501 и DukeMTMC-ReID.

В [49] предлагается синтетический набор данных ClonedPerson, содержащий 3D-изображения людей, при этом одежда всех сгенерированных персонажей копируется с реальных изображений, что позволяет усилить сходство между виртуальным человеком и его прототипом. Всего набор данных включает 887 766 изображений для 5621 человека. Для генерации изображений использовалась платформа Unity3D [50], как и для RandPerson [48]. Полученный таким образом набор данных используется для обучения СНС и позволяет достигнуть лучших результатов при тестировании на изображениях из другого домена в метрике mAP на CUNK03[18], Market-1501 [26], MSMT17 [19] по сравнению с применением для обучения RandPerson [48] и UnrealPerson [9]. Следует отметить, что существенным преимуществом синтетических наборов данных является автоматическая генерация аннотаций.

3.2. Аугментация обучающей выборки

Увеличение объема обучающей выборки за счет модификации имеющихся в ней изображений называют аугментацией. Традиционными подходами для этого являются различные преобразования изображений, такие как поворот, отражение, изменение размера, контраста, яркости, вариации цветовой составляющей, размытие. Для повышения устойчивости к окклюзиям применяется метод «случайного стирания» [51]. При этом прямоугольный фрагмент изображения, размер и форма которого выбирается произвольным образом, заполняется нулевыми или случайными значениями (рис. 4). Тестирование данного метода аугментации для реидентификации осуществлялось на наборах Market-1501, DukeMTMC-ReID и CUNK03. Результаты исследований показали, что в некоторых случаях, например при тестировании на CUNK03, такой способ позволяет повысить точность почти на 9% в метрике Rank1 и более чем на 6% в метрике mAP. При использовании Market-1501 и DukeMTMC-ReID для разных алгоритмов точность в метриках Rank1 и mAP была увеличена на 1–4%.

Следует отметить, что в алгоритмах повторной идентификации аугментация данных используется для увеличения обучающей выборки путем случайного выбора изображения для какого-либо преобразования, но механизм этого влияния не рассматривается, т.е. как факт принимается то, что это

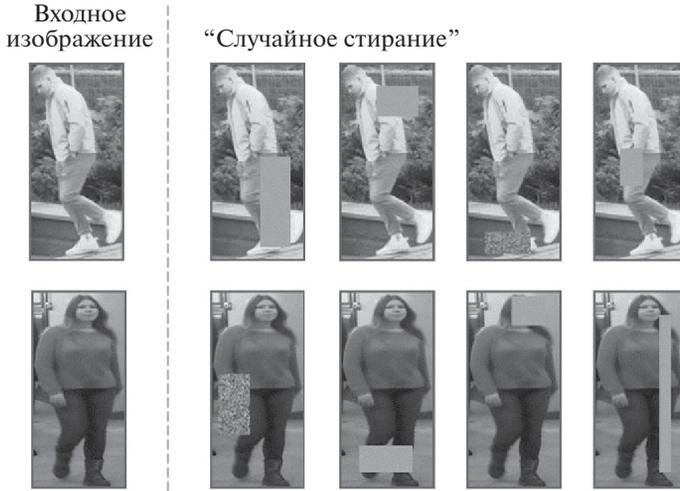


Рис. 4. Примеры применения стирания фрагмента изображения для аугментации данных.

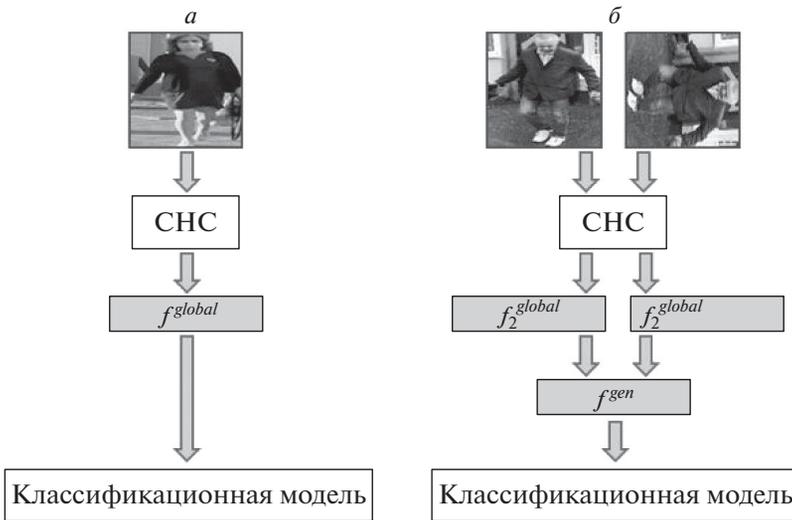


Рис. 5. Принцип извлечения признаков: *a* – базовый, *б* – с учетом поворота изображений [52].

позитивно влияет на точность работы обученной модели за счет улучшения обобщающей способности сети. В [52] используются повороты для увеличения количества изображений, но при этом тренировка СНС осуществляется одновременно как для исходного изображения, так и для преобразованных, и оцениваются потери, возникающие при повороте, что позволяет минимизировать среднеквадратичную ошибку между векторами признаков для соответствующей пары изображений. На рис. 5 представлено сравнение базового алгоритма аугментации данных при обучении извлечению признаков и предложенно-

го в [52]. Базовый алгоритм предполагает, что используется один поворот для случайного образца за один проход по сети при обучении, а рассмотренный в [52] предполагает, что каждое изображение поворачивается на случайный угол и подается на вход сети одновременно с исходным. С помощью СНС из пары изображений извлекаются признаки, которые затем усредняются. При сравнении с другими алгоритмами повторной идентификации предложенный позволил повысить точность в метрике mAP: более чем на 5% для Market-1501, более 10% для DukeMTMC-reID и более 20% для MSMT-17 по сравнению с базовым алгоритмом (рис. 5,а). При этом для MSMT-17 достигнуто максимальное значение точности повторной идентификации в метриках $mAP = 81,3$ и $Rank1 = 87,5$ на момент публикации работы [52]. В [53] предложен алгоритм, повышающий значения метрик $mAP = 84,4$ и $Rank1 = 89,9$ для набора данных MSMT-17.

Более сложным методом аугментации данных является применение генеративно-сопоставительных сетей (Generative Adversarial network — GAN), которые используются для генерации изображений, близких к естественным, на основе уже имеющихся данных. Генеративно-сопоставительная сеть представляет собой алгоритм машинного обучения, в основе которого лежит комбинация двух нейронных сетей. Одна из них генерирует изображения, а другая пытается определить, могут ли они быть онесены к подлинным. Применительно к реидентификации использование GAN может быть направлено на улучшение способности извлечения эффективных признаков [54] или на решение задач со смещением доменов [55].

В [54] рассматривается проблема, характерная для повторной идентификации в реальных условиях, когда возможно присутствие различных факторов, ухудшающих качество изображений, полученных с камер видеонаблюдения. Например, если в момент наблюдения идет дождь, то система, обученная на данных, полученных при других условиях, не сможет с высокой точностью интерпретировать извлеченные дескрипторы. В подобных случаях существует высокая вероятность того, что большое число сформированных признаков будет учитывать сходства не людей, а факторов, ухудшающих качество изображения. Для решения этой проблемы необходимо изучить признаки различных явлений, снижающих качество изображений. Однако в реальных условиях сложно получить аннотации для описания подобных возмущающих воздействий, а в обучающей выборке может не быть эталонных примеров. Для извлечения робастных к ухудшающим факторам изображений признаков авторы используют GAN для синтеза изображений с заранее известной степенью искажения.

В [55] GAN применяется для аугментации данных, однако в отличие от аналогичных систем авторы предлагают добавлять в обучающую выборку не все сгенерированные изображения, а только те, которые позволяют повысить точность повторной идентификации. Для этого отбрасываются изображения, которые имеют схожие признаки с ранее полученными, так как они могут снижать качество обучения, увеличивать время и при этом при-

водить к разбалансировке при обобщении. В этом случае система будет считать, что признаки, выделенные для схожих изображений, имеют большее значение, чем те, примеров которых было недостаточно. Для решения этой проблемы используется метод Local Outlier Factor (LOF), который контролирует количество схожих сгенерированных изображений и в случае, если их число возрастает, часть из них случайным образом отбрасывает. Такой подход позволяет не только повысить точность повторной идентификации, но и значительно улучшить устойчивость системы к смещению домена. В [55] приводятся результаты сравнения с другими алгоритмами, направленными на решение проблемы смещения домена, и в рейтинге точности в метриках Rank1, Rank5 и mAP предложенный в [55] подход занимает первые и вторые позиции для разных наборов данных среди современных подходов.

В [56] рассматривается подход, направленный на генерацию дополнительных изображений людей, когда в системе видеонаблюдения количество изображений с одной камеры больше, чем с другой, или вид с другой камеры для определенного человека отсутствует. Этот подход применяется для повышения робастности алгоритмов, если необходимы пары изображений одного и того же человека с разных камер. Однако такие образцы генерируются не в виде изображений, а в пространстве признаков. Это обусловлено тем, что при генерации изображений требуются значительно большие вычислительные затраты генеративной модели на качественное формирование фона и освещенности. Однако это не всегда оказывает положительное влияние на модель повторной идентификации, тогда как генерация только признаков не учитывает особенностей всего изображения снимаемой сцены.

4. Анализ используемых признаков

Для повторной идентификации с помощью СНС используются: глобальные признаки (рис. 6,а), т.е. формируемые для всего изображения человека в целом; локальные, когда изображение разделяется на отдельные фрагменты (рис. 6,б); ключевые точки (рис. 6,в), предполагающие для каждого участка изображения отдельный вектор признаков; дополнительные признаки (рис. 6,г), к которым можно отнести вспомогательные аннотации, информацию о времени и месте съемки, атрибуты; признаки человека из последовательности кадров (рис. 6,д).

4.1. Глобальные признаки

При повторной идентификации людей использование глобальных признаков является базовым подходом, и они применяются совместно с локальными [3] или дополнительными [57] для повышения точности повторной идентификации или в алгоритмах, в которых увеличение эффективности реидентификации достигается за счет их получения [58] или обработки [52].

При использовании глобальных признаков система повторной идентификации может оказаться недостаточно устойчивой к окклюзиям из-за того,

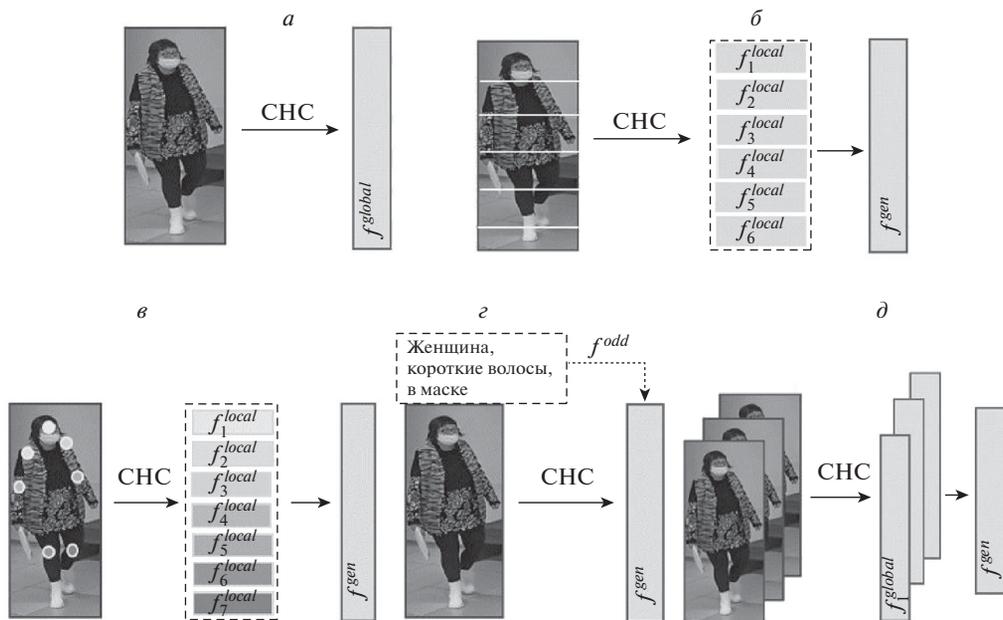


Рис. 6. Стратегии изучения и использования признаков.

что в сформированном векторе признаков для скрытого изображения часть дескрипторов будет характеризовать не внешность человека, а предмет, его перекрывающий. Кроме того, при таком подходе могут «теряться» признаки мелких отличительных деталей внешности, например таких, как очки, фурнитура одежды или сумки, которые могли бы служить характерным отличием при принятии решения о принадлежности обнаруженного человека к запросу.

4.2. Локальные признаки

Для снижения влияния недостатков глобальных признаков применяются локальные, которые могут рассматриваться как самостоятельно, так и в совокупности с глобальными. Например, в [59] предлагается горизонтальное разделение изображения на шесть равных частей и изучение каждой части в отдельности. Такой подход получил название Part-based Convolutional Baseline (PCB) и является надстройкой над СНС, при этом осуществляется разделение на части выходных данных первого сверточного слоя. Он позволяет повысить точность повторной идентификации на 1–2% в метриках Rank1 и mAP. Недостатком является требование к расположению и содержимому каждой части: человек должен находиться в строго вертикальном положении и фрагменты изображения должны располагаться в «правильных» местах. Ошибки обнаружения, когда часть человека оказывается обрезана ограничительной рамкой, могут приводить к ошибкам идентификации.

В [60] проводилось исследование по оценке влияния количества фрагментов, на которые разделяется изображение, на точность повторной идентификации. Изображение разбивалось на два, три, четыре, шесть, восемь и двенадцать фрагментов, и лучший результат точности повторной идентификации в метриках Rank1 и mAP был получен при делении изображения на шесть частей.

В [61] представлен алгоритм для реидентификации, основанный на рассмотрении ключевых частей тела человека. Так, с помощью HR-Net [62] извлекаются ключевые точки, а затем исследуются признаки в окрестностях каждой из них. Данный подход направлен на уменьшение влияния окклюзий. Поэтому при сопоставлении векторов признаков не учитываются дескрипторы ключевых точек, которые оказались скрыты.

В [63] рассматривается алгоритм, требующий разделения изображения фигуры человека на 6 горизонтальных частей, при этом сеть пытается предсказать, есть ли на каждой из них видимая часть фигуры человека. При положительном решении сети с помощью оценщика поз AlphaPose [64] определяются ключевые точки человека и при предсказании, является ли обнаруженный человек искомым, признаки невидимых частей не учитываются. Это позволяет повысить точность повторной идентификации человека и увеличить устойчивость системы к окклюзиям.

4.3. Дополнительные признаки

Еще одним подходом увеличения точности повторной идентификации является использование дополнительной информации, которая предоставляется с набором данных в виде аннотаций. Использование такого подхода предлагается в [57], при этом с помощью СНС (DenseNet-121, ResNet-50 или PCB) извлекаются визуальные признаки объектов, а номер камеры и номер кадра содержатся в названиях самих файлов. После ранжирования таблицы визуальных признаков из нее удаляются дескрипторы изображений, которые нерелевантны по пространственно-временным характеристикам людей, т.е. для тех, которые физически не могли находиться в определенном месте или в определенный час.

В большинстве случаев в алгоритмах повторной идентификации неочевидны типы признаков, используемых при принятии решения о сходстве или различии запроса и изображений людей в галерее. В [65] проводится исследование и предлагается подход, позволяющий определить и визуализировать признаки, которые система рассматривала при принятии решения, какие именно из них были значимыми и какой вклад вносит каждый атрибут. Для этого разработан метод, получивший название AMD (Attributeguided Metric Distillation), который представляет собой интерпретатор, подключаемый к целевой модели для оценки вклада каждого атрибута и визуализации наиболее значимых деталей. Интерпретатор учится разделять расстояние между признаками различных людей на основе атрибутов, и вводится

функция потерь, которая позволяет сосредоточиться на характерных отличиях. Эксперименты авторов показывают, что предоставляется возможность не только визуализировать значимые признаки, но и дополнительно улучшить точность повторной идентификации в целевых моделях. Представлены в данной работе также результаты исследования, показывающие улучшение точности повторной идентификации при тестировании алгоритма на междоменных данных.

В [66] предлагается повышение устойчивости систем реидентификации к смещению домена. Как правило, для таких систем предполагается, что есть исходный домен (source domain), используемый для обучения, и целевой (target domain), на котором осуществляется тестирование. При этом считается, что они изолированы между собой. В [66] применяются промежуточные домены в качестве дополнительной информации, которые позволят уменьшить различие между исходной и целевой областями. На вход базовой СНС подаются изображения как целевого, так и исходного домена, на их основе формируются дескрипторы, которые затем объединяются с различными соотношениями смешивания для получения вектора признаков промежуточного домена. Для этого применяется технология, предложенная в [67]. При объединении дескрипторов изображений из разных доменов возникает такой побочный эффект, как смешение признаков изображений разных людей и генерации изображения нового человека. Это может привести к тому, что в процессе обучения сеть сосредоточится на человеке со смешанными дескрипторами, вместо того чтобы учитывать разнообразие стилей в разных доменах. Для компенсации этого явления применяется дополнительный модуль, использующий подход к переносу стилей AdaIN [68], который позволяет получить дескрипторы одного и того же человека с учетом особенностей целевого или исходного домена. Сгенерированные признаки промежуточных доменов используются для обучения СНС и уменьшают расстояние между извлеченными дескрипторами из исходного и целевого доменов.

В [69] для решения таких проблем при повторной идентификации, как изменение освещения, окклюзии, фоновые помехи и возможная смена внешнего вида, предлагается использование технологии Wi-Fi, что позволяет подсчитывать и определять локализацию людей. Процедура обнаружения человека использует вариации Wi-Fi сигналов, которые могут информировать о присутствии человека и их можно отслеживать с помощью информации о состоянии канала (channel state information (CSI)) точек доступа. Из Wi-Fi сигнала извлекаются значимые признаки, на основе которых формируется радиобиометрическая подпись, используемая для реидентификации человека.

В [70] в качестве дополнительной информации, позволяющей повысить точность повторной идентификации в невидимых доменах, предлагается использовать «обучение распределению меток» (Label distribution learning (LDL)). Для обучения СНС используется несколько наборов данных, а сам процесс направлен на поиск взаимосвязи между изображениями разных людей. Каждый человек рассматривается как отдельный класс, и поиск соот-

ветствий между различными классами из разных наборов данных позволяет извлекать признаки, инвариантные к домену. Особое внимание уделяется похожим людям из разных доменов, что позволяет сформировать дескриптор, характеризующий внешность человека, а не условия видеонаблюдения. Для уменьшения разрыва между данными из разных доменов метки (идентификаторы) изображений для обучения распределяются таким образом, чтобы больше внимания уделять не самому домену, к которому принадлежит класс, а междоменным связям.

В [71] в качестве дополнительных признаков используется информация о ракурсе человека и при повторной идентификации учитываются признаки, связанные с углом обзора. С помощью СНС определяется один из трех рассматриваемых ракурсов, таких как вид спереди, сбоку и сзади, что позволяет улучшить устойчивость системы к смене доменов.

4.4. Признаки, использующие временные особенности

Алгоритмы повторной идентификации по последовательности кадров (video-based) используют преимущества временной составляющей, которой обладает видеоряд, в отличие от анализа отдельных кадров [60]. В [3] предлагается алгоритм, объединяющий как глобальные, так и локальные признаки на изображении человека для повышения точности повторной идентификации на видео. На разных уровнях пирамиды, представленной на рис. 7, изображение разделяется вертикальными или горизонтальными линиями и для каждого фрагмента изображения извлекается вектор признаков. Общий вектор признаков для каждого i -го человека в [9] определяется как

$$(6) \quad f_i^{gen} = \left[f_i^{global}; f_{i,v}^{local-vertical}; f_{i,h}^{local-horizontal}; f_{i,patch}^{local-patch} \right],$$

где $v, h, patch$ — количество частей, на которые разделяется изображение на каждом уровне пирамиды.

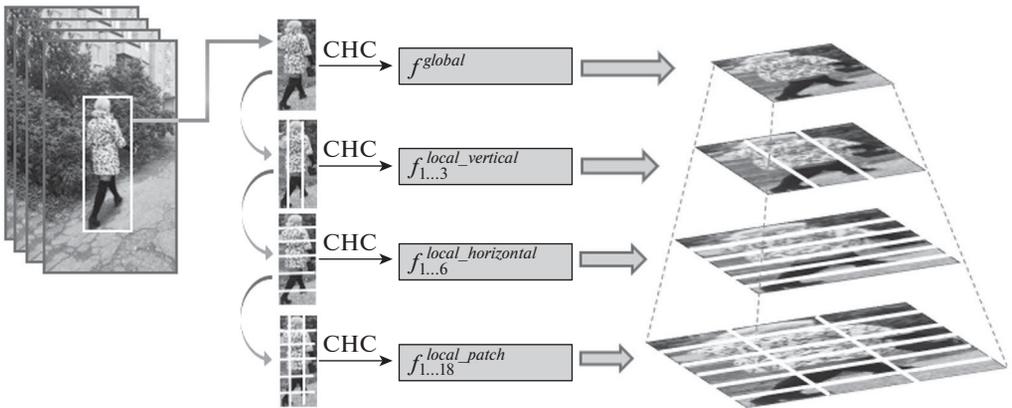


Рис. 7. Извлечение глобальных и локальных признаков на основе разделения изображения и многоуровневой пирамиды.

Для последовательности из K кадров видео вектор признаков для каждого человека описывается выражением

$$(7) \quad \bar{f}_i^{gen} = \left[\sum_{k=1}^K f_{i,k}^{global}, \sum_{k=1}^K f_{i,v,k}^{local-vertical}, \sum_{k=1}^K f_{i,h,k}^{local-horizontal}, \sum_{k=1}^K f_{i,patch,k}^{local-patch} \right].$$

В [72] предлагается извлекать информацию о походке для силуэтов людей с использованием метода вычитания фона. Несмотря на то что цветные изображения содержат больше информации, чем образ фигуры человека, анализ силуэта позволяет сосредоточиться на определении особенностей, характерных для разных людей при движении. На первом этапе в [72] из видео удаляются фон и яркостно-цветовые отличия человека, в результате выделяется образ его фигуры. После вычитания фона генерируются ограничительные рамки для всех людей на каждом пятом кадре видео, а для расчета остальных ограничительных рамок используется линейная интерполяция. Извлеченные силуэты нормализуются по аналогии с методом, предложенным в [73], и на первом этапе рассматривается верхняя и нижняя часть фигуры, а затем анализируется совокупная сумма пикселей по оси X относительно центра этого объекта. После этого все изображения приводятся к единому размеру с сохранением соотношения сторон, но с высотой 224 пикселя. Согласно [72] для реидентификации по походке необходимо сформировать изображение (Gait Energy Images (GEI)), отражающее характерные особенности человека при ходьбе на основе анализа последовательности кадров. Для формирования GEI определяется траектория движения с использованием центральных координат ограничительных рамок. Полученная криволинейная траектория движения человека с помощью алгоритма кусочной регрессии разделяется на несколько прямолинейных участков. Для каждого такого участка к соответствующей последовательности кадров применяется алгоритм кластеризации k -средних, и формируется GEI.

В [74] рассматривается подход для повторной идентификации на видео, в котором к определенным последовательным кадрам применяется операция 3D свертки, объединяющая визуальную и временную составляющую, что позволяет учитывать изменения внешности в процессе движения. Кроме этого, используется специальная архитектура сети SSN для извлечения признаков отдельных частей тела и разделения дескрипторов на группы с учетом движущихся и статических частей тела на видео.

В [75] предлагается выделять наиболее эффективные пространственно-временные признаки на основе анализа глобальных и локальных дескрипторов для видеопоследовательности. Для построения глобальных признаков используется модуль Relation-Based Global Feature Learning Module (RGL), с помощью которого формируются карты корреляций дескрипторов между кадрами для поиска наиболее важных, а для синтеза локальных применяется модуль Relation-Based Partial Feature Learning Module (RPL), который позво-

ляет определить взаимосвязь между признаками одного и того же фрагмента на разных кадрах.

В [76] для более эффективного использования временной информации в видео предлагается подход, который включает два модуля. Первый Key Frame Screening with Index (KFSI) предполагает поиск похожих кадров и выбор из них для обучения СНС наиболее информативных для реидентификации. Второй модуль Feature Reorganization Based on Inter-Frame Relation (FRBIFR) предназначен для выявления наиболее значимых признаков людей на основе анализа их расположения на последовательности кадров, что позволяет уменьшить влияние шумовых факторов, например, перекрытий изображений людей.

4.5. Признаки ключевых областей

Для повышения устойчивости к влиянию помех фона и изменению признаков объекта при движении ряд исследователей предлагают выполнять поиск и выделение областей с использованием модулей (моделей, механизмов) внимания (attention module, attention model, attention mechanisms) [77]. В [78] для этого применяются локальный и глобальный анализы и предлагается модуль RGA (Relation aware global attention), который охватывает структурную информацию всего изображения и изучает фрагментарные отличительные особенности. Нахождение ключевых областей позволяет определить местоположение значимых отличительных признаков. Для их поиска выполняется попарное сравнение каждого дескриптора со всеми остальными и вычисленный результат включается в общий вектор признаков, позволяет учитывать взаимосвязь глобальных и локальных отличий изображений людей.

Механизм внимания используется во временной области [79], в [60, 80] анализируется пространственно-временная, может применяться в пространственно-локальной [81], и направлен на оценку позы человека и предсказание видимых частей. В [82] предлагается механизм самовнимания (self-attention) для повышения обобщающей возможности СНС путем учета взаимосвязи признаков.

Пирамидальный модуль для извлечения признаков с применением мультивнимания (pyramid multi-part features with multi-attention) (PMP-MA) рассмотрен в [60]. Полученные таким путем признаки позволяют учитывать важные отличительные особенности с различной степенью детализации. В [60] показана точность Rank5 = 99,3% на наборах данных iLIDS-vid и DukeMTMC-VideoReID, а для PRID Rank5 = 100%.

В [83] предлагается добавлять модули внимания между блоками ResNet для улучшения возможности извлечения признаков из кадров видеоряда. При прохождении изображения по СНС, часть важной информации может быть утеряна, но при этом сформированный вектор признаков будет содержать избыточную информацию для реидентификации. Поэтому в [83] предлагается встраивать модули пространственного внимания на разных уровнях сети

ResNet. Выходные карты признаков с определенных уровней СНС объединяются и формируют дескриптор для каждого отдельного кадра видеопоследовательности. Модуль внимания применяется для усреднения значений полученных карт признаков и построения результирующего вектора.

4.6. Метрики для определения расстояния между признаками

Для поиска изображения человека x_p в галерее $G = \{g_i | i = 1, \dots, N\}$ из N изображений применяется вычисление расстояний между векторами признаков p -го запроса и изображения g_i . На данном этапе наиболее применимы следующие метрики:

1. Косинусное расстояние (Cosine distance) [57, 14]:

$$(8) \quad d(p, g_i) = \frac{x_p x_{g_i}}{\|x_p\| \|x_{g_i}\|}.$$

2. Расстояние Евклида (Euclidean distance) [7, 10, 13, 26, 84]:

$$(9) \quad d(p, g_i) = \|x_p - x_{g_i}\|_2^2.$$

3. Расстояние Махаланобиса (Mahalanobis distance) [85]:

$$(10) \quad d(p, g_i) = \sqrt{(x_p - x_{g_i})^T M^{-1} (x_p - x_{g_i})},$$

где M — ковариационная матрица.

4. Расстояние Жаккара для k -ближайших соседей (Jaccard distance) [85]:

$$(11) \quad d(p, g_i) = 1 - \frac{|R^*(p, k) \cap R^*(g_i, k)|}{|R^*(p, k) \cup R^*(g_i, k)|},$$

где $R^*(p, k)$ и $R^*(g_i, k)$ — множества ближайших соседей.

Следует отметить, что для повышения точности повторной идентификации в некоторых алгоритмах применяют повторное ранжирование после первой сортировки, которое позволяет уточнить результат. В [85] для первоначальной сортировки используется расстояние Махаланобиса. Из полученной таблицы выбираются первые k изображений и включаются в $R(p, k)$, а затем выполняется повторное ранжирование с использованием расстояния Жаккара.

В [26] на основе расстояния Евклида выполняется первичная сортировка векторов признаков. Далее при повторном ранжировании из полученной таблицы $S(p, g)$ выбираются k -первых результатов и для каждого из них осуществляется поиск в галерее. В результате формируются новые списки $S(r_i, g)$ с весовыми коэффициентами, которые определяются как $\frac{1}{i+1}$, где $i = 1, \dots, k$. Итоговая таблица признаков вычисляется по формуле

$$(12) \quad S^*(p, g) = S(p, g) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i+1} S(r_i, g).$$

В [84] предлагается учитывать контекстную информацию ранжирования дескрипторов в процессе обучения СНС совместно с признаками для повторной идентификации. Алгоритм использует двухпоточную архитектуру, состоящую из внешнего и внутреннего потоков. На первом из них применяется сортировка для каждого запроса, что позволяет найти наиболее эффективные визуальные различия вверху ранжированного списка галереи и сформировать предварительный набор для дальнейшей обработки. На втором потоке анализируются локальные признаки для полученного результата предыдущего шага. Предполагается, что такой подход создает гибридное ранжирование для сопоставления людей, позволяющее повысить точность повторной идентификации по сравнению с методами, в которых применяется постобработка списка. Кроме указанных метрик, для оценки схожести признаков могут быть использованы и другие [86], однако эффективность их требует дополнительных исследований.

5. Модели и обучение СНС для описания изображений людей

5.1. Базовые СНС

Наиболее часто при реидентификации в настоящее время в качестве базовых СНС для извлечения признаков используются ResNet-50 [87] в работах [12, 65, 88] и DenseNet-121 [89] в работах [7, 57], а также MobileNetV2 [88, 90], PCB [57, 84], GoogleNet [91], или оригинальные архитектуры СНС, например, как в [92]. В [93] предлагается подход, который позволяет повысить устойчивость системы к окклюзиям. При этом повторная идентификация выполняется по изображению головы человека, а для обнаружения ограничительных рамок используется СНС YOLOv3.

Архитектуры семейства ResNet характеризуются наличием Res-блоков (рис. 8, *a*), которые используют пропуск соединений (skip-connection) для снижения вероятности возникновения исчезающих градиентов при обучении. Res-блок состоит из двух ветвей, одна из которых содержит сверточные слои, а другая передает информацию на выход без изменений. На выходе данные с обеих ветвей суммируются. В процессе обучения при обратном распространении ошибки такой подход не позволяет обнулить градиенты в СНС.

Архитектура DenseNet-121 (рис. 8, *б*) отличается наличием соединений между слоями, при которых карты признаков всех предыдущих слоев используются в качестве входных для всех последующих в блоке. Кроме этого, карты признаков не суммируются от слоя к слою, что характерно для ResNet, а конкатенируются. Некоторые исследователи приводят результаты сравнения работы предлагаемых алгоритмов с использованием в качестве базовых СНС для извлечения признаков различные типы архитектур. Так, в [7] выполняется сравнение эффективности ResNet-50 и DenseNet-121 и показано повышение точности в метриках Rank1 и mAP при использовании DenseNet-121. В [65] для реидентификации исследованы ResNet-34, ResNet-50 и ResNet-101

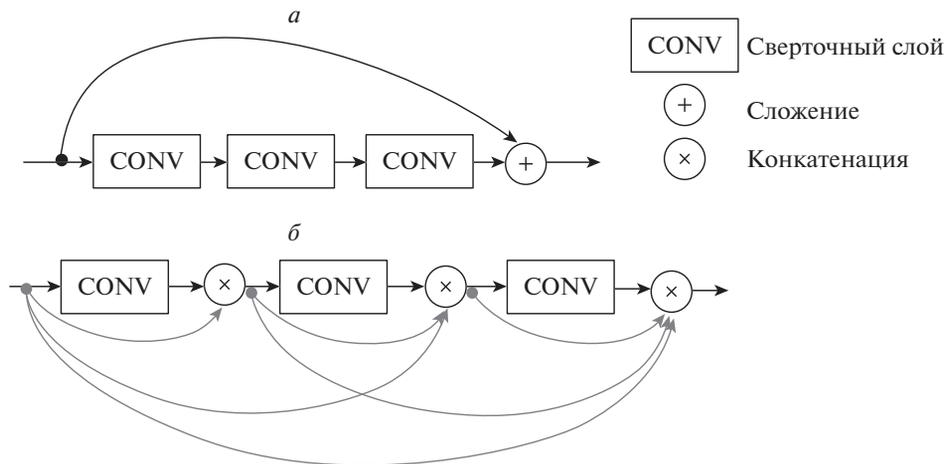


Рис. 8. Структуры блоков DenseNet и ResNet.

и представлено, что увеличение глубины сети положительно сказывается на точности повторной идентификации. В [57] выполнена оценка эффективности PCB [59], которая используется как надстройка для ResNet-50, ResNet-50 и DenseNet-121. Анализ результатов экспериментов показывает, что наилучшей в метриках Rank1 и mAP является PCB (Rank1 = 94,0, mAP = 82,8), более низкая точность для DenseNet-121 (Rank1 = 90,8, mAP = 76,9), а наименьшие значения метрик у ResNet-50 (Rank1 = 87,7, mAP = 72,2).

В [92] для реидентификации предлагается новая архитектура СНС SGWCNN (sparse graph wavelet convolution neural network) на основе анализа признаков последовательности кадров, что позволяет учитывать семантическую связь между локальными фрагментами людей на видео. Такой подход позволяет извлекать дополнительную информацию за счет пространственно-временного анализа видеоданных. Предполагается, что использование предложенной нейронной сети для уточнения региональных признаков позволяет более эффективно решать проблему кратковременных окклюзий при движении пешеходов.

Следует отметить, что качество работы СНС в значительной мере определяется гиперпараметрами при ее тренировке: количеством эпох, скоростью обучения, размером пакета изображений.

Количество эпох определяет, сколько раз каждое изображение из обучающей выборки пройдет по сети. При малых значениях данного параметра модель окажется не полностью обученной и в результате точность повторной идентификации будет низкой. Слишком большое количество эпох может привести к переобучению, т.е. сеть запомнит все рассмотренные изображения и не сможет эффективно обработать даже тестовые примеры. Для повторной идентификации тренировка СНС выполняется в большинстве случаев в течение 60–100 эпох. Как правило, на вход сети подаются пакеты с количеством изображений от 16 до 64. Увеличение размера пакета обусловлено стремле-

нием к распараллеливанию вычислений, так как это позволяет сократить время, затраченное на тренировку СНС, но снижает точность работы обученной нейронной сети. В [94] предлагается подход, согласно которому при тренировке СНС постепенно увеличивается размер пакета, что позволяет минимизировать уменьшение точности, обеспечивая сокращение времени обучения. Наиболее полное исследование влияния размера пакета на точность при тренировке СНС для реидентификации представлено в [60]. В данной работе показано, что наибольшей точности удалось достигнуть для пакета из 32 изображений на наборах данных DukeMTMC-VideoReID, MARS, iLIDS-vid, PRID.

Известно, что скорость обучения показывает, как изменяются весовые коэффициенты при каждом их обновлении. Для повторной идентификации при тренировке СНС используют планировщики скорости, которые позволяют изменять скорость обучения после некоторого интервала времени или по определенным критериям. В [95] рассматривается механизм снижения скорости ADEL, который отслеживает значения весов сети и каждый раз, когда они перестают изменяться скачкообразно, скорость обучения уменьшается. Это позволяет обеспечить более быструю сходимость в СНС.

В [96] предлагается подход, включающий три режима изменения скорости обучения η , которые зависят от кривизны λ_0 поверхности функции потерь. Первый режим предполагает медленную фазу (lazy phase), при ней скорость обучения имеет относительно небольшое значение $\eta < \frac{2}{\lambda_0}$ и шаг изменения весов остается практически постоянным на первом этапе обучения. Второй режим характеризуется быстрой фазой (catapult phase), при которой скорость обучения принимает значения $\frac{2}{\lambda_0} < \eta < \eta_{\max}$. На этом этапе наблюдается экспоненциальный рост потерь и быстрое уменьшение кривизны η до тех пор, пока не стабилизируется на значении $\lambda_{final} < \frac{\eta}{2}$. При соответствии этому условию достигается плоский минимум. Фаза расхождения (divergent phase) выполняется на третьем режиме. При этом скорость тренировки превышает значение η_{\max} и модель перестает обучаться. Кроме этого, в [96] выдвигается предположение, которое затем подтверждается исследованиями, что использование больших скоростей обучения позволяет находить плоские минимумы, которые обобщают лучше, чем резкие. К этому же, по мнению авторов, приводит и использование небольших пакетов для обучения.

5.2. Модификации СНС

Изменения базовых архитектур предоставляют возможности для повышения точности работы систем повторной идентификации. В [88] исследуется влияние способа нормализации данных на выходе сверточных слоев и предлагается технология MetaBIN (Meta Batch-Instance Normalization), которая использует комбинацию двух подходов: пакетную нормализацию и нормализацию отдельных изображений [97]. Первый позволяет получать информацию о различных стилях изображений в пакете. Однако это может приводить к снижению точности реидентификации в невидимых доменах. Второй подход

позволяет игнорировать информацию об особенностях домена, однако недостатком является возможное уменьшение при этом полезной информации. Для решения двух этих проблем вводится обучаемый параметр, который позволяет найти баланс между рассмотренными подходами и тем самым не только повысить эффективность повторной идентификации, но и сделать систему более устойчивой при работе в другом домене. В [98] рассматривается влияние функции активации (ФА) в СНС ResNet-50, DenseNet-121 и DarkNet-53 на точность реидентификации. Наиболее распространенной функцией активации является ReLU [99], которая представляет собой кусочно-заданную функцию

$$(13) \quad \phi(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

где x — входное значение нейрона.

Основное преимущество заключается в низкой вычислительной сложности как при прямом, так и при обратном проходе по сети. Однако значения производной на положительной части области определения функции активации могут приводить к взрывным градиентам при обучении, а на отрицательной — к потере некоторой информации при обучении, так как все нейроны с отрицательными значениями не будут активированы. Чтобы избежать этого, можно применять функцию Leaky-ReLU [100]

$$(14) \quad \phi(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ \alpha x, & x \leq 0, \end{cases}$$

где α — угловой коэффициент, принимающий небольшие значения, традиционно $\alpha = 0,01$.

В [101] представлены результаты эмпирического исследования, в котором определяется влияние угла наклона отрицательной части функции на задаче классификации изображений при использовании ФА ReLU и Leaky-ReLU, а также их модификаций: параметрической выпрямленной линейной единицы (PReLU) и рандомизированной выпрямленной линейной единицы с утечкой (RReLU). Проведенные исследования показали, что лучшие результаты были получены при использовании PReLU. Однако в этом случае высока вероятность переобучения СНС при использовании небольшого набора данных, поэтому RReLU оказывается более эффективной на практике.

Кроме указанных модификаций, небольшой наклон в отрицательной части области определения функции имеют ФА ELU, SeLU, GeLU, что позволяет предположить эффективность их использования для повторной идентификации людей.

ФА ELU (Exponential Linear Unit) [102] определяется выражением

$$(15) \quad \phi(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ \alpha(e^x - 1), & x < 0, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент, ограничивающий величину выходных значений на отрицательном участке области определения функции.

ФА SELU (Scaled Exponential Linear Unit) является масштабированным вариантом ELU и описывается выражением

$$(16) \quad \phi(x) = \lambda \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ \alpha(e^x - 1), & x < 0. \end{cases}$$

В исследовании, представленном в [103], определяются значения для коэффициентов $\alpha = 1,67326$, $\lambda = 1,0507$.

ФА GELU (Gaussian Error Linear Units) [104] определяется выражением

$$(17) \quad \phi(x) = \frac{1}{2}x \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right] \approx 0,5x \left(1 + \tan \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}(x + 0,044715x^3) \right) \right)$$

или

$$(18) \quad \phi(x) = x\sigma(1,702x),$$

где $\sigma = \frac{1}{1+e^{-x}}$ — функция активации сигмоиды.

В [105] для поиска наиболее эффективной ФА используется подход автоматической генерации, основанный на последовательном переборе унарных и бинарных функций, которые поочередно объединяются, а результат оценивается эмпирически. Полученная функция Swish определяется выражением

$$(19) \quad \phi(x) = x\sigma(\beta x),$$

где β — коэффициент, регулирующий степень кривизны функции, σ — функция сигмоиды.

В [106] рассмотрена ФА Mish

$$(20) \quad \phi(x) = x \tanh(\operatorname{softplus}(x)) = x \tanh(\ln(1 + e^x)).$$

ФА влияет как на динамику тренировки, так и на точность работы обученной модели. Из [98] следует, что использование вместо ReLU таких функций, как GeLU, Swish и Mish, может повысить точность повторной идентификации. Дополнительные исследования показали, что применение этих функций увеличивает время обучения модели, при этом не позволяет получить достаточно стабильный результат. К наиболее предпочтительным ФА для СНС при повторной идентификации можно отнести GeLU и ReLU.

Для решения специфических задач, например для неоднородных систем реидентификации [8], в которых используются изображения с инфракрасной камеры и с камеры видимого диапазона, предлагается новая архитектура СНС MCLNet (Modality Confusion Learning Network). MCLNet основывается

на частично разделенной двухпоточной сети. Для повышения устойчивости СНС к разнородным данным последовательно извлекаются признаки, характерные для каждого типа данных в отдельности, а затем общие дескрипторы. Так как видимые и инфракрасные образцы имеют разное распределение признаков и они не могут быть согласованы для сравнения, сеть обучается игнорировать информацию о модальности и пытается извлекать общие отличительные особенности для разнородных изображений человека. Чтобы не упустить важные особенности разных людей, создается механизм запутывания обучения, в результате чего несоответствие между разнородными изображениями сводится к минимуму, а сходство максимизируется. В [7] предлагается архитектура СНС RCSANet (Clothing Status Awareness Network) для долгосрочной повторной идентификации. Методы, применяемые для этого, учитывают, что после некоторого интервала времени человек сменил одежду, в которой он опять попадает в поле зрения видеокамеры. Однако такие подходы неэффективны, если в данном интервале времени человек не переоделся, и точность работы систем долгосрочной реидентификации значительно снижается. Для этого в [7] предлагается RCSANet, которая упорядочивает признаки пешеходов и включает в общий дескриптор особенности состояния одежды. RCSANet представляет собой двухпоточную систему, основанную на DenseNet-121, и содержит ICE-поток (Inter-Class Enforcement), который позволяет максимизировать различия для каждого человека, и ICR-поток (Intra-Class appearance Regularization), который используется для упорядочивания признаков, полученных в ICE, с учетом информации о том, имела ли место смена одежды. Предложенный подход для тестовой выборки, в которой смены одежды не было, позволил обеспечить значения Rank1 = 100% и mAP = 97,2%, а при наличии людей в различной одежде метрики равны Rank1 = 48,6% и mAP = 50,2%.

5.3. Сиамские сети

Сиамская нейронная сеть представляет собой такой тип архитектуры, который содержит две или больше идентичных подсетей с одинаковыми архитектурами, параметрами и весами. Выходом сиамской сети будет являться показатель подобия двух изображений, поданных на вход [107].

В сиамских сетях могут использоваться парные модели (рис. 9,а), состоящие из двух подсетей [108, 69], и триплетные [91], включающие три подсети (рис. 9,б).

В [108] сиамская архитектура используется для минимизации косинусного расстояния между признаками двух экземпляров при контрастном обучении для выявления сходства между ними. В [69] с помощью глубокой нейронной сети с двумя ветвями, работающей по сиамскому принципу, обрабатываются амплитуда и фаза Wi-Fi сигналов для извлечения значимых признаков радио-биометрической подписи, позволяющей повторно идентифицировать человека.

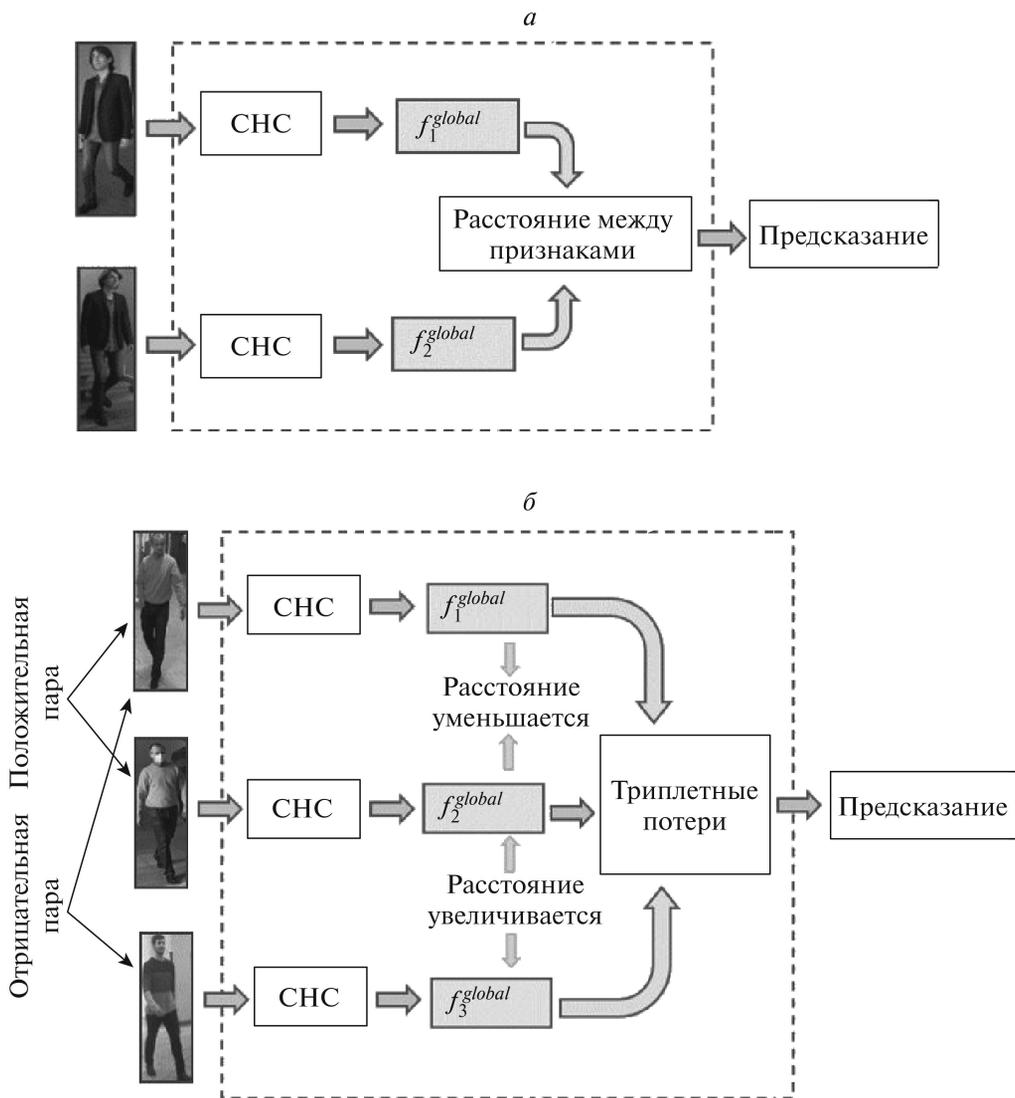


Рис. 9. Модели сиамской нейронной сети *a*) — парная модель; *б*) — триплетная модель.

В [109] сиамские сети используются для предотвращения переобучения и предлагается архитектура, состоящая из двух сиамских сетей. Первая из них является базовой, входными данными для нее служат положительные или отрицательные пары изображений людей. При этом положительной парой считаются изображения, полученные для одного человека в разное время, отрицательная пара представляет собой изображения двух разных людей. Признаки, извлеченные каждой ветвью базовой сиамской сети, подаются на входы другой сети, используемой для извлечения более глубоких признаков. Каждая из двух сиамских сетей предсказывает, является ли входная пара

изображениями одного человека, или нет. Между двумя сетями вводится функция потерь (verification loss), которая позволяет корректировать относительное расстояние между векторами признаков, полученными с каждой из сиамских сетей для людей с одинаковыми или разными идентификаторами, и тем самым улучшить точность идентификации.

В [110] предлагается глубокая архитектура для повторной идентификации, которая использует в структуре сиамской сети модуль внимания. Такой подход позволяет обеспечить согласованность важных деталей внешности человека с различных кадров и находить более важные отличительные черты для разных людей. Кроме этого, поиск расположения отличительных признаков на изображении реализуется в процессе обучения, что делает систему способной находить ключевые области автоматически.

Сиамская сеть с триплетными потерями предлагается в [91] с GoogleNet в качестве базовой подсети. Признаки людей при ее использовании извлекаются с разных уровней сети, а затем объединяются, формируя общую карту дескрипторов для каждого из входных изображений. Применение триплетных потерь позволяет приближать в пространстве признаков положительные пары изображений и отдалять отрицательные.

5.4. Обучение СНС

В общем обучение нейронной сети для эффективного извлечения признаков заключается в поиске весовых коэффициентов с целью уменьшения значения функции потерь L . Она отображает разницу между полученным результатом и ожидаемым. Для задачи повторной идентификации наиболее распространенными являются кросс-энтропийная функция потерь (Cross-entropy loss) [11, 14, 42, 57] и триплетные потери (Triplet loss) [7, 63, 111, 112].

Кросс-энтропийная функция потерь позволяет рассматривать реидентификацию как классификацию и используется после softmax-слоя [113]. Для набора из n тренировочных изображений $\{I_{ni}\}_{ni=1,\dots,n}$, содержащего n_{id} различных людей (классов) с соответствующими идентификационными метками $\{p_{ni}^{ID}\}_{ni=1,\dots,n}$, $\{p_{ni}^{ID}\} \in [1, \dots, n_{id}]$, кросс-энтропийные потери можно рассчитать как [113]

$$(21) \quad L_i = - \sum_{k=1}^{n_{id}} \{p_{ni}^{ID} = k\} \log \frac{e^{\hat{p}_{ni}^{ID_i}}}{\sum_{l=1}^{n_{id}} e^{p_{ni}^{ID_i}}},$$

где $\hat{p}_{ni}^{ID_i}$ — предсказанное значение.

Отличительной чертой триплетных потерь является рассмотрение двух пар изображений: при положительной паре изображения принадлежат одному и тому же человеку ($y_a = y_p$, где y_a — изображение человека с меткой идентификатора a , y_p — изображение, составляющее положительную пару, $p = a$); при отрицательной паре два изображения принадлежат разным людям ($y_a \neq y_n$, где y_n — изображение, составляющее отрицательную пару, т.е.

их идентификаторы не равны $n \neq a$). Таким образом, учитываются расстояние $d_{a,p}$ между признаками для положительной пары и расстояние $d_{a,n}$ между признаками разных людей. Чтобы СНС не только увеличивала $d_{a,n}$ для разных классов, но и уменьшала его для одинаковых, вводится коэффициент регуляризации m . Если не использовать этот коэффициент, то при обучении сеть будет увеличивать расстояние между изображениями разных людей и не учитывать расстояние между одинаковыми классами. Это связано с тем, что найти разницу между различными людьми легче, чем сходство между одинаковыми, соответственно m позволяет ограничить рост $d_{a,n}$ и обеспечивает уменьшение $d_{a,p}$. Для вычисления триплетной функции потерь используется выражение [111]

$$(22) \quad L = \sum_{\substack{a,p,n \\ y_a=y_p \neq y_n}} \max([m + d_{a,p} - d_{a,n}], 0).$$

В [53] при использовании триплетных потерь анализируется отрицательная пара, включающая изображения разных, но наиболее похожих людей. Такой подход позволяет научиться сети находить различия для людей со схожей внешностью. На наборе данных MSMT17 [19] метрика mAP составляет 84,4%, а в метрике Rank1 89,9%, что является лучшим результатом для MSMT17 на момент анализа.

В [114] предполагается, что при кластеризации изображений использование триплетных потерь является недостаточно эффективным подходом. Поэтому разработана функция потерь cluster loss, которая позволяет получить на выходе модели большие межклассовые и меньшие внутриклассовые различия, чем при использовании триплетов. Cluster loss вычисляется по формуле:

$$(23) \quad LC = \frac{\beta \sum_i^p d_i^{intra}}{\gamma + \sum_i^p d_i^{inter}},$$

где $d_i^{intra} = \sum_k \|f(x) - f_i^m\|_2^2$ — внутриклассовая вариация для каждого i -го идентификатора, представляющая собой расстояние между признаками $f(x)$ идентификатора из выборки и средним значением для этого идентификатора $f_i^m = \frac{\sum_k f(x)}{K}$ из K изображений; $d_i^{inter} = \sum_{\forall i_d \in P, i_d \neq i} \|f_i^m - f_{i_d}^m\|_2^2$ — межклассовая вариация, представляющая собой расстояние между средним значением признаков идентификатора и средним значением для признаков всех P идентификаторов.

Для повышения точности повторной идентификации иногда используют несколько функций потерь. Например, в [65] для определения наиболее эффективных признаков и наиболее значимых атрибутов предлагается две составляющие для функции потерь: метрического разделения (Loss function of metric distillation) L_d и приоритетных атрибутов (Loss function of attribute

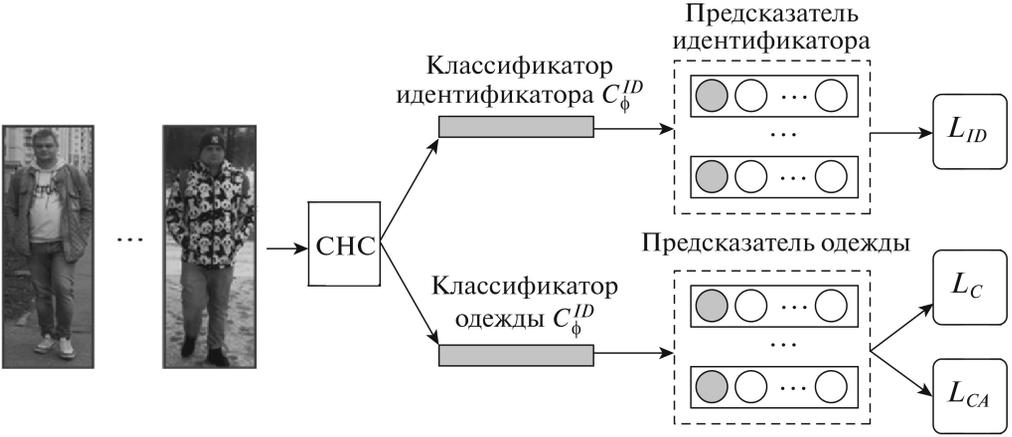


Рис. 10. Схема алгоритма Clothes-based Adversarial Loss.

prior) L_p :

$$(24) \quad L = L_d + \alpha L_{p1} + \beta L_{p2},$$

где $L_d = |d_{i,j} - \sum_{k=1}^M d_{i,j}^k|$ — функция потерь, определяющая расстояние $d_{i,j}$ между векторами признаков, выделенных алгоритмом реидентификации для всего изображения, и признаками, выделенными модифицированным алгоритмом, направленным на поиск признаков различных атрибутов, что позволяет оценить вклад каждого атрибута в общий вектор признаков; $d_{i,j}^k$ — расстояние между x_i и x_j для k -го из M атрибутов.

Очевидно, что составляющая функции потерь L_p состоит из двух частей: L_{p1} — определяет вклад общих атрибутов, L_{p2} — определяет вклад индивидуальных особенностей:

$$(25) \quad L_{p1} = \max \left(0, \left(\frac{M_E}{M} \right)^v - \sum_{e=1}^{M_E} \frac{d_{i,j}^e}{\hat{d}_{i,j}} \right) + \\ + \max \left(0, \sum_{c=1}^{M-M_E} \frac{d_{i,j}^c}{\hat{d}_{i,j}} - 1 + \left(\frac{M_E}{M} \right)^v \right),$$

$$(26) \quad L_{p2} = \sum_{e=1}^{M_E} \max \left(0, e^{-\lambda \frac{(\frac{M_E}{M})^v}{M_E}} - \frac{d_{i,j}^e}{\hat{d}_{i,j}} \right) + \\ + \sum_{c=1}^{M-M_E} \max \left(0, \frac{d_{i,j}^c}{\hat{d}_{i,j}} - e^{\lambda \frac{1 - (\frac{M_E}{M})^v}{M - M_E}} \right),$$

где $\hat{d}_{i,j} \approx \sum_{k=1}^M d_{i,j}^k$ — предсказанное значение расстояния между признаками, M_E — количество уникальных атрибутов.

В [6] предлагается использовать состязательные потери на основе анализа одежды (Clothes-based Adversarial Loss (CAL)), которые позволяют извлекать признаки без учета одежды человека для долгосрочной повторной идентификации. Общая схема предлагаемого подхода показана на рис. 10 и состоит из двух классификаторов: идентификатора C_ϕ^{ID} и одежды C_ϕ^C . Каждый классификатор обучается отдельно. На первом этапе обучения минимизируются потери L_C (clothes classification loss) для классификатора одежды, которые основаны на кросс-энтропии между предсказанной меткой одежды $C_\phi^C(g_0(x_i))$ и y_i^C . При этом СНС тренируется не учитывать признаки одежды за счет минимизации функции потерь L_{CA} (Clothes-based Adversarial Loss), определяющей признаки, не относящиеся к одежде. После обучения классификатора одежды весовые коэффициенты для него фиксируются и дальнейший этап направлен на минимизацию функции потерь для классификатора идентификатора.

Тестирование предложенного алгоритма выполнялось на наборе данных CCVID [6], метод CAL позволил увеличить точность повторной идентификации более чем на 20% в метриках Rank1 и mAP по сравнению с базовым алгоритмом.

В настоящее время все большее внимание уделяется неконтролируемому или полу-контролируемому обучению, в которых данные не имеют заранее подготовленных меток и аннотаций. В некоторых работах по реидентификации людей исследователи предлагают использовать информацию, полученную с применением существующих размеченных наборов данных с известными идентификаторами, в невидимых доменах. Под невидимыми доменами подразумеваются наборы данных, изображения из которых не использовались при обучении и которые могут не иметь меток идентификаторов. В этом случае говорят о неконтролируемой адаптации домена (unsupervised domain adaptation (UDA)). Такой подход применяется в [115] и использует в качестве исходной информации объединение нескольких наборов данных. Как исходные и целевые домены рассматриваются Market-1501 [26], DukeMTMC-ReID [20], CUHK03 [18] и MSMT17 [19], которые объединяются в различных комбинациях. Кроме этого, предлагаются два модуля, позволяющие изучать отличительные признаки, характерные для одного домена, и для объединенных доменов. В первом случае предлагается модуль пакетной нормализации RDSBN, позволяющий снизить влияние признаков, специфических для домена, и улучшить различимость черт лица. Во втором — используется объединение информации о доменах на основе сети Graph Convolution Network (GCN), направленное на уменьшение расстояния между признаками разных доменов. GCN используется для построения графа, объединяющего все экземпляры в домене, т.е. создается узел, обобщающий характерные признаки для каждого человека внутри домена, что позволяет определить глобальные дескрипторы для домена в целом.

Неконтролируемые методы повторной идентификации, основанные на адаптации домена для целевой области, зачастую хорошо работают только

на одном домене, для которого были адаптированы. Решение этой проблемы рассматривается в [116] и предлагается проведение постоянной неконтролируемой адаптации к новым данным, т.е. непрерывное обучение. При этом знания, полученные ранее для предыдущих доменов, сохраняются. Это крайне важно в системах, применяемых в реальных условиях, когда новые данные появляются регулярно. Причем в систему могут быть включены дополнительные видеокамеры, установленные в других местах, а адаптация к новым данным должна быть с сохранением навыков повторной идентификации в уже известных доменах. Для решения этой задачи небольшое количество образцов из существующих доменов хранится в буферах долговременной памяти для сформированных ранее кластеров. В процессе адаптации модели к новой области старые образцы также добавляются в выборку, на основе которой выполняется контрастное обучение. Основная идея такой тренировки СНС заключается в максимизации сходства между положительной парой изображений, полученных при различных условиях.

При неконтролируемом обучении некоторые исследователи используют методы кластеризации для создания псевдометок во время обучения модели. При этом может возникать ситуация, когда в одном кластере объединяются изображения разных людей, а для одного и того же человека кластер может быть разбит на две группы. Это значительно снижает точность СНС, обученной на таких данных. В [117] предполагается, что из-за ограниченного количества выборок для каждого человека часть информации может отсутствовать. Поэтому предлагается метод Implicit Sample Extension (ISE), позволяющий создавать на границах кластеров образцы поддержки на основе реальных изображений текущего и соседних с ним кластеров через стратегию progressive linear interpolation (PLI), которая позволяет объединить два кластера, если они содержат изображения одного и того же человека, и разделить кластер, если в нем имеются изображения разных людей.

Методы самоконтролируемого обучения (self-supervised learning (SSL)) направлены на изучение отличительных признаков на основе больших массивов неразмеченных данных. В [118] для повышения точности повторной идентификации предлагается применение самоконтролируемого предварительного обучения с использованием немаркированных изображений людей, которое показывает лучшие результаты по сравнению с традиционным предварительным обучением на ImageNet. Основной идеей метода из [118] является выделение глобальных и локальных признаков. Структура предложенной в работе системы Part-Aware SelfSupervised pre-training (PASS) состоит из двух частей, имеющих одинаковую архитектуру: сеть учеников (student network) и сеть учителей (teacher network). PASS обучает сеть учеников соответствовать выходным данным учителя. На вход этой сети передаются как глобальные, так и локальные признаки, полученные для случайно выбранных областей. Сеть учителей анализирует только глобальные признаки. Сходство между результатами оценивается на основе кросс-энтропии. После предварительного обучения PASS имеет возможность изучать глобальные признаки и при

этом автоматически фокусироваться на различных локальных особенностях изображений.

В [119] рассматривается предварительное обучение для повторной идентификации, при котором для видео из набора LUperson применяется алгоритм сопровождения людей. Каждому сопровождаемому человеку присваиваются метки, которые используются для формирования новой обучающей выборки LUperson-NL и, соответственно, предварительной тренировки СНС. За счет такого подхода в LUperson-NL заносятся шумные метки (noisy labels), которые могут содержать ошибки, возникающие при присвоении идентификаторов в неразмеченных наборах данных. Примером является присвоение одному и тому же человеку, изображения которого получены с разных камер или в различное время, отличающихся идентификаторов. Другим примером является назначение одинаковых идентификаторов схожим по внешним признакам, но разным людям. Предполагается, что впоследствии ошибочные метки будут корректироваться. Подход из [119] предполагает три этапа. На первом выполняется контролируемое обучение повторной идентификации с использованием полученных шумных меток. Второй этап применяет контрастное обучение, которое позволяет исправить зашумленные метки. Для их исправления выбирается изображение-прототип, и по мере поступления новых данных, в случае их сходства с выбранным прототипом, изображения добавляются в кластер, и вычисляется усредненный для всех изображений в кластере вектор признаков, который динамически обновляется. На третьем этапе применяется контрастное обучение на основе уже исправленных меток. В результате похожие примеры объединяются в один прототип, а зашумленные метки исправляются.

В [120] предлагается подход PPLR (Part-based Pseudo Label Refinement), который уменьшает влияние шумных меток при неконтролируемом обучении за счет использования взаимодополняющей связи между глобальными и локальными признаками человека на изображении. Чтобы исключить влияние нерелевантных частей изображения, таких как окклюзии, которые могут появляться в разное время, исказить состав локальных и глобальных признаков человека и в итоге приводить к неверным предсказаниям, метки уточняются на основе введенного показателя взаимного согласования (cross agreement score) сходства k -ближайших соседей между пространствами глобальных и локальных признаков изображения человека.

В [108] рассмотрен подход для неконтролируемой повторной идентификации на основе скелета человека (skeleton-based) и предлагается схема контрастного обучения для извлечения признаков немаркированных 3D-скелетов человека. На последовательности необработанных данных накладываются маски скелетов, выбирается маска-прототип и по наиболее характерным особенностям скелета выполняется кластеризация. Чтобы найти отличительные особенности для различных прототипов без использования каких-либо меток, сопоставляются схожие черты скелетов. Чтобы учитывать корреляцию внутри одной и той же видеопоследовательности, связанную с изменениями

в процессе движения человека, используют сиамскую архитектуру, которая позволяет зафиксировать наиболее характерные признаки для каждого человека на основе его скелета.

6. Сравнение эффективности алгоритмов повторной идентификации на разных наборах данных

Сравнение эффективности различных алгоритмов повторной идентификации по одиночным изображениям на наиболее крупных и распространенных наборах данных Market-1501, DukeMTMC-ReID, MSMT17 представлено в табл. 2.

Таблица 2. Точность повторной идентификации по изображениям для наборов данных Market-1501, DukeMTMC-ReID и MSMT17

Алгоритм	Год	Метрики	Набор Market-1501	Набор DukeMTMC-ReID	Набор MSMT17
PCP+RPP [59]	2018	mAP Rank1	81,6 93,8	69,2 83,3	– –
CASN [110]	2019	mAP Rank1	82,8 94,4	73,7 87,7	– –
MGN+PTL [58]	2019	mAP Rank1	87,34 94,83	79,16 89,36	– –
st-ReID [57]	2019	mAP Rank1	95,5 98,0	92,7 94,5	– –
HOReID [61]	2020	mAP Rank1	84,9 94,2	75,6 86,9	– –
AGW[2]	2021	mAP Rank1 mINP	– – –	– – –	49,3 68,3 14,7
CIL [121]	2021	mAP Rank1 mINP	84,04 93,38 57,9	– – –	52,4 76,1 12,45
SBS [65]	2021	mAP Rank1	88,29 95,55	78,26 89,21	– –
Алгоритм из [55]	2021	mAP Rank1	89,2 96,2	79,6 91,0	57,2 81,9
FlipReID [52]	2021	mAP Rank1	94,7 95,8	90,7 93,0	81,3 87,5
HBRReID [53]	2021	mAP Rank1	– –	– –	84,4 89,9
RANGEv2 [84]	2022	mAP Rank1	86,8 94,7	78,2 87,0	51,3 76,4
RANGEv2+K-reciprocal [84]	2022	mAP Rank1	91,3 95,1	84,2 88,7	– –
CAL [6]	2022	mAP Rank1	87,5 94,7	– –	57,3 79,9

В незначительном количестве работ [58, 59, 110] авторами приводятся результаты экспериментов для CUNK03. Однако данный набор включает не более пяти изображений для человека, полученных с каждой камеры из двух используемых, что является недостаточным для эффективной оценки точности реидентификации. Из табл. 2 очевидно, что при применении одного и того же алгоритма для разных наборов данных получены разные результаты точности: для набора Market-1501 наиболее высокие показатели, а для MSMT17 наиболее низкие значения. Такие результаты связаны с тем, что MSMT17 имеет значительно большее количество изображений (см. табл. 1), чем другие, и при его формировании использован более сложный сценарий видеонаблюдения, который охватил различное время суток и погодных условий, изображения как с внутренних, так и наружных камер видеонаблюдения. Хотя показатели точности для этого набора данных значительно ниже, чем для других рассматриваемых, но их можно считать более объективными, так как сценарий формирования MSMT17 более приближен к реальным ситуациям при реидентификации, следовательно, корректнее отображает эффективность алгоритмов для открытых систем повторной идентификации. На момент анализа лучший результат в метрике mAP при тестировании на наборе данных MSMT17 получен для алгоритма HBRID [53], для него Rank1 = 89,9%.

Это обеспечено за счет тщательного отбора положительных и отрицательных пар изображений для триплетных потерь и использования составительных потерь, позволяющих изучить фон и не учитывать его при классификации людей, используя только признаки человека. Наиболее близкий по точности результат, Rank1 = 87,5, был получен с применением алгоритма FlipReID [52]. Отличием данного алгоритма является использование усредненных признаков входного и повернутого случайным образом изображения.

Для наборов Market-1501 и DukeMTMC-ReID среди рассмотренных алгоритмов повторной идентификации наиболее эффективный предложен в [57].

В данном алгоритме, кроме визуальных признаков, использовалась дополнительная информация о времени (номер кадра) и месте (идентификатор камеры) съемки, которая предоставляется с этими наборами данных в виде имени файла изображения из Market-1501 и DukeMTMC-ReID. При реидентификации авторы использовали условие о том, что человек не может находиться в поле зрения нескольких пересекающихся камер одновременно, ему требуется время для перехода. Таким образом, все изображения, имеющие визуальное сходство с запросом, должны быть проверены, могли ли эти люди быть в том или ином месте в определенное время относительно предыдущего, и все нерелевантные изображения по данным критериям не учитываются при реидентификации. Несмотря на то что данный подход был предложен в 2019 г., в настоящее время в метриках Rank1 и Rank5 этот подход имеет одни из лучших значений при тестировании на Market-1501 и DukeMTMC-ReID. Следует отметить, что авторы алгоритма из [57] не проводили эксперименты на других наборах данных, вероятно, из-за того, что с другими базами

Таблица 3. Точность алгоритмов повторной идентификации по видеопоследовательностям для наборов данных MARS, DukeVideo, PRID, QMUL iLIDS, iLIDS-VID, VIPer

Алгоритм	Год	Метрики	Набор MARS	Набор DukeVideo	Набор PRID	Набор iLIDS-VID
AGW [2]	2021	mAP Rank1 mINP	83,0 87,6 63,9	94,9 95,4 91,9	– 94,4 95,4	– – –
PiT [3]	2022	mAP Rank1	97,23 90,22	– –	– –	86,80 92,07
MetaBin [88]	2021	mAP Rank1	– –	– –	81,0 74,2	87,0 81,3
SSN3D [74]	2021	mAP Rank1	86,2 90,1	96,3 96,8	– –	– 88,9
PMP-MA [60]	2022	mAP Rank1 Rank5	88,1 90,6 99,6	96,3 97,2 99,3	99,3 98,9 100	95,3 92,8 99,3
Алгоритм из [83]	2022	mAP Rank1 Rank5	82,6 88,2 96,5	94,2 95,4 99,3	– 96,6 100	– 89,3 98,7

изображений не предоставлялось достаточно пространственно-временной информации. Анализ табл. 2 показывает, что несмотря на отличие показателей точности для различных наборов данных, в большинстве современных алгоритмов, если улучшение точности отмечается для одного из наборов данных, то вероятно, что и на других наборах данных при тетировании будет отмечаться увеличение точности.

Сравнение эффективности алгоритмов повторной идентификации по видеопоследовательностям представлено в табл. 3 и показывает, что для таких систем улучшение точности на одном наборе данных не всегда приводит к улучшению при тестировании на другом.

Наборы данных, используемые при обучении и тестировании, содержат последовательности изображений людей из нескольких кадров (треклеты), причем количество треклетов в отдельных наборах данных для каждого человека отличается количеством изображений. Применение треклетов позволяет учитывать временные признаки, что дает возможность исключить влияние кратковременных окклюзий, учесть информацию о походке или усреднить визуальные признаки для меняющих положение в пространстве частей тела на нескольких кадрах. Следовательно, количество изображений человека в треклете оказывает достаточно существенное влияние на оценку алгоритма.

При тестировании на наборе данных MARS (см. табл. 3) наилучшей точностью характеризуется алгоритм PiT [3] в метриках mAP и Rank1. Данный алгоритм использует пирамиды локальных признаков с разной степенью детализации и усреднение дескрипторов по нескольким кадрам. При тестиро-

Таблица 4. Точность повторной идентификации для алгоритмов междоменной повторной идентификации для наборов данных Market-1501, DukeMTMC-ReID, MSMT17, VIPeR, PRID и GRID

Алгоритм (Год)	Набор данных	Метрика	Тестовая выборка					
			Market-1501	DukeMTMC-ReID	MSMT17	VIPeR	PRID	GRID
Алгоритм из [48] (2020)	RandPerson [48]	mAP Rank1	28,8 55,6	27,1 47,6	6,3 20,1	- -	- -	- -
	RandPerson [48] + MSMT17	mAP Rank1	35,8 62,3	39,8 61,0	36,8 65,0	- -	- -	- -
SNR [12] (2020)	Market-1501	mAP Rank1	84,7 94,4	33,6 55,1	- -	42,3 32,3	42,2 30,0	36,7 29,0
	DukeMTMC-ReID	mAP Rank1	33,9 66,7	72,9 84,4	- -	41,2 32,6	45,4 35,0	35,3 26,0
	Market-1501+DukeMTMC-ReID+CUHK+MSMT17	mAP Rank1	82,3 93,4	73,2 85,5	- -	65,0 55,1	60,0 49,0	41,3 30,4
NRMT[10] (2020)	Market-1501	mAP Rank1	- -	62,3 78,1	19,8 43,7	- -	- -	- -
	DukeMTMC-ReID	mAP Rank1	72,2 88,0	- -	20,6 45,2	- -	- -	- -
Алгоритм из [11] (2020)	Market-1501	* mAP Rank1	- -	65,2 79,5	20,4 43,7	- -	- -	- -
	DukeMTMC-ReID	mAP Rank1	71,5 88,1	- -	24,3 51,7	- -	- -	- -
CBN [9] (2021)	UnrealPerson [9]	mAP Rank1	54,3 79,0	49,4 69,7	15,3 38,5	- -	- -	- -
JVTC [9] (2021)		mAP Rank1	80,2 93,0	75,2 88,3	34,8 68,2	- -	- -	- -
MetaBin [88] MobileNetV2 (2021)	CUHK02+ CUHK03+ Market-1501 + +DukeMTMC-ReID+CUHK-SYSU	mAP Rank1	- -	- -	- -	66,0 56,9	79,8 72,5	58,1 49,7
MetaBin [88] ResNet-50 (2021)		mAP Rank1	- -	- -	- -	68,6 59,9	81,0 74,2	57,9 48,4
QACConv [49] (2022)	ClonedPerson [49]	mAP Rank1	21,8 22,6	- -	18,5 49,1	- -	- -	- -
IDM [66] (2022)	Market-1501	mAP Rank1	- -	73,2 85,5	40,2 69,9	- -	- -	- -
	DukeMTMC-ReID	mAP Rank1	85,3 94,2	- -	40,5 69,5	- -	- -	- -
	MSMT17	mAP Rank1	85,2 94,1	73,6 84,6	- -	- -	- -	- -

вании на наборах данных Duke-Video и iLIDS-VID наилучшие результаты получены для алгоритма PMP-MA [60] в метрике mAP. В основе PMP-MA используется пирамидальное представление схем мультивнимания и учитываются результаты точной настройки СНС, в том числе подбор размера пакета данных при обучении. PMP-MA и алгоритм, предложенный в [83] при тестировании на базе данных PRID, позволяют получить Rank5 = 100%, что обеспечивается относительной легкостью набора для данной метрики, так как использовалось только две камеры, фон довольно равномерный, а окклюзии для человека с другими людьми встречаются редко.

Актуальным является сравнение точности работы алгоритмов реидентификации при обучении и тестировании на разных базах данных, что позволяет оценить эффективность при смене доменов. В табл. 4 представлена точность повторной идентификации алгоритмов, в которых для доменной переносимости использовались подходы, направленные на поиск признаков с учетом данной задачи.

Следует отметить, что независимо от используемого алгоритма увеличение обучающей выборки путем объединения существующих наборов данных позволяет повысить точность повторной идентификации, что подтверждается исследованиями в [12, 48]. В [48] добавление к синтетическому набору, используемому в качестве обучающей выборки, изображений из MSMT17 позволило повысить mAP с 47,6% до 61% при тестировании на DukeMTMC-ReID.

Включение в обучающую выборку данных из целевого домена позволяет увеличить Rank1 для MSMT17 с 6,3 до 36,8% в [48]. Аналогично, в [12] использование при обучении изображений из целевого домена позволяет увеличить mAP для Market-1501 с 33,9 до 82,3%, для DukeMTMC-ReID также обеспечивается значительное увеличение mAP с 33,6 до 73,2%.

Среди современных алгоритмов для междоменной повторной идентификации (см. табл. 4) в метрике mAP наибольшая точность достигнута для алгоритма IDM [66] при тестировании на наборах данных Market-1501 и MSMT17. В данном алгоритме для повышения устойчивости к смещению домена применялась генерация промежуточных доменов, которые объединяли в себе особенности исходного и целевого. При использовании в качестве целевого домена DukeMTMC-ReID наиболее эффективным оказался подход JVTC [9] с применением в качестве обучающей выборки синтетического набора данных UnrealPerson [9].

Алгоритмы реидентификации по видеопоследовательностям, направленные на повышение устойчивости к смещению домена, наиболее часто используют наборы данных VIPeR, PRID и GRID. Среди проанализированных подходов лучшие показатели Rank1 и mAP были получены при применении алгоритма MetaBIN [88] (см. табл. 4), основная идея которого заключается в обобщении слоев нормализации и снижении влияния особенностей, присущих исходному домену.

Таблица 5. Точность алгоритмов повторной идентификации с неконтролируемым и полуконтролируемым обучением для наборов данных Market-1501, DukeMTMC-ReID и MSMT17

Алгоритм	Год	Метрики	Набор Market-1501	Набор DukeMTMC-ReID	Набор MSMT17
[115] обучен на Market-1501	2021	mAP Rank1	– –	66,6 80,3	34,9 64,7
[115] обучен на Duke-MTMC-ReID	2021	mAP Rank1	81,5 92,9	– –	33,6 64,0
[116] с непрерывной адаптацией домена	2022	mAP Rank1	59,3 82,7	– –	40,8 67,5
ISE[117] + GeM-pooling	2022	mAP Rank1	85,3 94,3	– –	37,0 67,6
PASS [118]	2022	mAP Rank1	93,3 96,9	– –	74,4 89,7
PNL[119]+MGN пред-обучен на LuPerson	2022	mAP Rank1	91,9 96,6	84,3 92,0	68,0 86,0
PPLR [120] без использования меток камеры	2022	mAP Rank1	81,5 92,8	– –	31,4 61,1
PPLR [120] с использованием меток камеры	2022	mAP Rank1	84,4 94,3	– –	42,2 73,3

Другим подходом для адаптации к смене домена при реидентификации является неконтролируемое или полуконтролируемое обучение на неразмеченных данных. Как очевидно из табл. 5, среди рассмотренных алгоритмов наилучшие предложены в [118, 119]. В [118] используются предварительное обучение на немаркированных изображениях людей, двухпоточная архитектура, глобальные и локальные признаки. Алгоритм из [119] предполагает предварительное обучение на немаркированном наборе данных LUPerson, для которого формируются и исправляются в процессе обучения шумные метки. В большинстве работ для предварительного обучения применяется набор данных ImageNet, однако последние исследования [118, 119] показали, что наиболее эффективно на этом этапе использовать изображения людей.

7. Заключение

Повторная идентификация человека в распределенной системе видеонаблюдения является достаточно новой актуальной задачей, которая в последнее время стала успешно решаться с помощью технологий глубокого обучения. В работе рассмотрены общие принципы организации повторной идентификации людей с использованием сверточных нейронных сетей при видеонаблюдении. Предложена классификация систем реидентификации. Приведен

анализ существующих наборов данных для обучения глубоких нейронных архитектур, описаны подходы для увеличения количества изображений в базах данных, рассмотрены виды признаков изображений людей. Представлен анализ основных применяемых для реидентификации моделей архитектур сверточных нейронных сетей, их модификаций, а также методов обучения. Проанализирована эффективность повторной идентификации людей на разных наборах данных, в том числе при междоменной реидентификации. Приведены результаты исследований по оценке эффективности повторной идентификации в различных метриках для существующих подходов, отмечены достоинства и недостатки разных метрик. Несмотря на то что глубокое обучение и нейронные сети продемонстрировали свои большие преимущества в анализе видеоизображений, все еще остаются проблемы, которые предстоит решить для повторной идентификации. Одним из наиболее заметных недостатков глубокого обучения является то, что для процесса обучения требуется огромное количество точных аннотированных наборов данных, что требует утомительной работы и часто приводит к искажениям. Многие исследователи начали делиться своими данными на общедоступных платформах, что полезно для разработки единого оценочного индекса, однако некоторые наборы данных для реидентификации исключены из общего доступа, например DukeMTMC-ReID [20], а MTMC17 [19] не доступен в публичном доступе и может быть получен лишь после подписания соглашения с авторами об использовании только в исследовательских целях без передачи третьим лицам [122].

Глубокое обучение достигло удовлетворительных результатов в задачах классификации и сегментации изображений, однако для задачи повторной идентификации, особенно по последовательностям изображений, производительность глубокого обучения все еще недостаточна высока. Поэтому актуальным направлением является разработка новых решений с использованием СНС, обеспечивающих более высокую точность и скорость работы, особенно для междоменной повторной идентификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ye S., Bohush R.P., Chen H.* Person Tracking and Re-identification for Multicamera Indoor Video Surveillance Systems // *Pattern Recognit. Image Anal.* 2020. No. 30. P. 827–837. <https://doi.org/10.1134/S1054661820040136>
2. *Ye M., Shen J., Lin G., Xiang T., Shao L., Hoi S.C.* Deep Learning for Person Re-identification: A Survey and Outlook // *IEEE Transactions On Pattern Analysis And Machine Intelligence.* 2021. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2021.3054775>
3. *Zang X., Li G., Gao W.* Multi-direction and Multi-scale Pyramid in Transformer for Video-based Pedestrian Retrieval // *ArXiv, abs/2202.06014.* 2022. <https://doi.org/10.1109/TII.2022.3151766>
4. *Mihaescu R., Chindea M., Paleologu C., Carata S., Ghenescu M.* Person Re-Identification across Data Distributions Based on General Purpose DNN Object Detector // *Algorithms.* 2020. No. 13. 343. <https://doi.org/10.3390/a13120343>

5. *Liu H., Qin L., Cheng Z., Huang Q.* Set-based classification for person re-identification utilizing mutual-information // 2013 IEEE International Conference on Image Processing. 2013. P. 3078–3082. <https://doi.org/10.1109/ICIP.2013.6738634>.
6. *Gu X., Chang H., Ma B., Bai S., Shan S., Chen X.* Clothes-Changing Person Re-identification with RGB Modality // ArXiv, abs/2204.06890, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.06890>
7. *Huang Y., Wu Q., Zhong Y., Zhang Z.* Clothing Status Awareness for Long-Term Person Re-Identification // 2021 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision, 2021. P. 11895–11904. <https://doi.org/10.1109/ICCV48922.2021.01168>
8. *Hao X., Zhao S., Ye M., Shen J.* Cross-Modality Person Re-Identification via Modality Confusion and Center Aggregation // 2021 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV). 2021. P. 16383–16392. <https://doi.org/10.1109/ICCV48922.2021.01660>
9. *Zhang T., Xie L., Wei L., Zhuang Z., Zhang Y., Li, B. Tian, Q.* UnrealPerson: An Adaptive Pipeline towards Costless Person Re-identification // 2021 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2021. P. 11501–11510. <https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.01134>
10. *Zhao F., Liao S., Xie G., Zhao J., Zhang K., Shao L.* Unsupervised Domain Adaptation with Noise Resistible Mutual-Training for Person Re-identification // ECCV 2020. Lecture Notes in Computer Science, 2020. V. 12356. P. 526–544. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-58621-8_31
11. *Luo C., Song C., Zhang Z.* Generalizing Person Re-Identification by Camera-Aware Invariance Learning and Cross-Domain Mixup // ECCV 2020. Lecture Notes in Computer Science, 2020. V. 12356. P. 224–241. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-58555-6_14
12. *Jin X., Lan C., Zeng W., Chen Z., Zhang L.* Style Normalization and Restitution for Generalizable Person Re-Identification // 2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2020. P. 3140–3149. <https://doi.org/10.1109/cvpr42600.2020.00321>
13. *Song J., Yang Y., Song Y., Xiang T., Hospedales T.M.* Generalizable Person Re-Identification by Domain-Invariant Mapping Network // 2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2019. P. 719–728. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.00081>
14. *Ihnatsyeva S., Bohush R., Ablameyko S.* Joint Dataset for CNN-based Person Re-identification // Pattern Recognition and Information Processing (PRIP'2021) Proceedings of the 15th International Conference, 21–24 Sept. 2021, Minsk, Belarus / United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus. Minsk, 2021. P. 33–37.
15. *Liao S., Mo Z., Hu Y., Li S.* Open-set Person Re-identification // ArXiv, abs/1408.0872, 2014. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1408.0872>
16. *Li W., Zhao R., Wang X.* Human Reidentification with Transferred Metric Learning // Proceedings of the 11th Asian conference on Computer Vision (ACCV). 2012. https://doi.org/10.1007/978-3-642-37331-2_3
17. *Li W., Wang X.* Locally Aligned Feature Transforms across Views // 2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2013. P. 3594–3601. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2013.461>

18. *Li W., Zhao R., Xiao T., Wang X.* DeepReID: Deep Filter Pairing Neural Network for Person Re-identification // 2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, P. 152–159. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2014.27>
19. *Wei L., Zhang S., Gao W., Tian Q.* Person Transfer GAN to Bridge Domain Gap for Person Re-identification // 2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2018. P. 79–88. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2018.00016>
20. *Ristani E., Solera F., Zou R.S., Cucchiara R., Tomasi C.* Performance Measures and a Data Set for Multi-target, Multi-camera Tracking // ArXiv, abs/1609.01775, 2016. https://doi.org/10.1007/978-3-319-48881-3_2
21. Exposing.ai. Duke MTMC. URL: https://exposing.ai/duke_mtmc
22. *Zheng L., Zhang H., Sun S., Chandraker M., Yang Y., Tian Q.* Person Re-identification in the Wild // 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2017. P. 3346–3355. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2017.357>
23. *Xiao T., Li S., Wang B., Lin L., Wang, X.* Joint Detection and Identification Feature Learning for Person Search // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2017. P. 3376–3385. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2017.360>
24. *Zheng L., Bie Z., Sun Y., Wang J., Su C., Wang S., Tian Q.* MARS: A Video Benchmark for Large-Scale Person Re-Identification // ECCV 2016. Lecture Notes in Computer Science, V. 9910. P. 863–884. Springer, Cham. 2016. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46466-4_52
25. *Song G., Leng B., Liu Y., Hetang C., Cai S.* Region-based Quality Estimation Network for Large-scale Person Re-identification // AAAI. ArXiv, abs/1711.08766. 2018. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.08766>
26. *Zheng L., Shen L., Tian L., Wang S., Wang J., Tian, Q.* Scalable Person Re-identification: A Benchmark // IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), 2015. P. 1116–1124. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2015.133>
27. *Gray D., Brennan S., Tao H.* Evaluating Appearance Models for Recognition, Reacquisition, and Tracking // IEEE Workshop on Visual Surveillance and Performance Evaluation of Tracking and Surveillance. 2007.
28. *Hirzer M., Beleznai C., Roth P.M., Bischof H.* Person Re-identification by Descriptive and Discriminative Classification // SCIA. Lecture Notes in Computer Science. 2011. V. 6688. P. 91–102, Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21227-7_9
29. *Zheng W., Gong S., Xiang T.* UnrealPerson: An Adaptive Associating Groups of People // BMVC. 2009. <https://doi.org/10.5244/C.23.23>
30. *Karanam S., Gou M., Wu Z., Rates-Borras A., Camps O.I., Radke R.J.* A Systematic Evaluation and Benchmark for Person Re-Identification: Features, Metrics, and Datasets // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2019. No. 41. P. 523–536. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2018.2807450>
31. *Ihnatsyeva S., Bohush R.* PolReID, 2021. URL: <https://github.com/SvetlanaIgn/PolReID>
32. *Li S., Xiao T., Li H., Zhou B., Yue D., Wang X.* Person Search with Natural Language Description // 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern

- Recognition (CVPR). 2017. P. 5187–5196.
<https://doi.org/10.1109/CVPR.2017.551>
33. *Ding Z., Ding C., Shao Z., Tao, D.* Semantically Self-Aligned Network for Text-to-Image Part-aware Person Re-identification // ArXiv, abs/2107.12666, 2021
 34. *Li X., Zheng W., Wang X., Xiang T., Gong S.* Multi-Scale Learning for Low-Resolution Person Re-Identification // 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). 2015. P. 3765–3773.
<https://doi.org/10.1109/ICCV.2015.429>
 35. *Jing X., Zhu X., Wu F., Hu R., You X., Wang Y., Feng H. Yang J.* Super-Resolution Person Re-Identification With Semi-Coupled Low-Rank Discriminant Dictionary Learning // IEEE Transactions on Image Processing, 2015. No. 26. P. 1363–1378. <https://doi.org/10.1109/TIP.2017.2651364>
 36. *Wu A., Zheng W., Yu H., Gong S., Lai J.* RGB-Infrared Cross-Modality Person Re-identification // IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). 2017. P. 5390–5399. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2017.575>
 37. *Nguyen T.D., Hong H.G., Kim K., Park K.R.* Person Recognition System Based on a Combination of Body Images from Visible Light and Thermal Cameras // Sensors (Basel, Switzerland). No. 17. 2017. <https://doi.org/10.3390/s17030605>
 38. *Pang L., Wang Y., Song Y., Huang T., Tian, Y.* Cross-Domain Adversarial Feature Learning for Sketch Re-identification // Proceedings of the 26th ACM international conference on Multimedia. 2018. <https://doi.org/10.1145/3240508.3240606>
 39. *Xiao T., Li S., Wang B., Lin L., Wang X.* End-to-end deep learning for person search // ArXiv, abs/1604.01850, 2016
 40. *Layne R., Hospedales T.M., Gong S.* Investigating Open-World Person Re-identification Using a Drone // ECCV Workshops. 2014.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-16199-0_16
 41. *Fu D., Chen D., Bao J., Yang H., Yuan L., Zhang L., Li H., Chen D.* Unsupervised Pre-training for Person Re-identification // IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2021. P. 14745–14754.
<https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.01451>
 42. *Fabbi M., Brasó G., Maugeri G., Cetintas O., Gasparini R., Osep A., Calderara S., Leal-Taixe L., Cucchiara R.* MOTSynth: How Can Synthetic Data Help Pedestrian Detection and Tracking // 2021 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV). 2021. P. 10829–10839.
<https://doi.org/10.1109/iccv48922.2021.01067>
 43. Makehuman community. Makehuman, 2020.
URL: <http://www.makehumancommunity.org>
 44. Epic Games Incorporated. Unreal engine, 2020.
URL: <https://www.unrealengine.com>
 45. *Barbosa I.B., Cristani M., Caputo B., Rognhaugen A., Theoharis T.* Looking beyond appearances: Synthetic training data for deep CNNs in re-identification // ArXiv, abs/1701.03153., 2018. <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2017.12.002>
 46. *Bak S., Carr P., Lalonde J.* Domain Adaptation through Synthesis for Unsupervised Person Re-identification // ECCV. ArXiv, abs/1804.10094, 2018.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-01261-8_12

47. *Sun X., Zheng L.* Dissecting Person Re-Identification From the Viewpoint of Viewpoint // IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2019. P. 608–617. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.00070>
48. *Wang Y., Liao S., Shao L.* Surpassing Real-World Source Training Data: Random 3D Characters for Generalizable Person Re-Identification // Proceedings of the 28th ACM International Conference on Multimedia. 2020. <https://doi.org/10.1145/3394171.3413815>
49. *Wang Y., Liang X., Liao S.* Cloning Outfits from Real-World Images to 3D Characters for Generalizable Person Re-Identification // ArXiv, abs/2204.02611. 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.02611>
50. Unity Technologies. 2020. Unity3D: Cross-platform game engine. URL: <https://unity.com>
51. *Zhong Z., Zheng L., Kang G., Li S., Yang Y.* Random Erasing Data Augmentation // AAAI. 2020. <https://doi.org/10.1609/AAAI.V34I07.7000>
52. *Ni X., Rahtu E.* FlipReID: Closing the Gap Between Training and Inference in Person Re-Identification // 2021 9th European Workshop on Visual Information Processing (EUVIP). 2021. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/EUVIP50544.2021.9484010>
53. *Li W., Xu F., Zhao J., Zheng R., Zou C., Wang M., Cheng Y.* HReID: Harder Batch for Re-identification // ArXiv, abs/2112.04761, 2021. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.04761>
54. *Huang Y., Zha Z., Fu X., Hong R., Li L.* Real-World Person Re-Identification via Degradation Invariance Learning // IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2020. P. 14072–14082. <https://doi.org/10.1109/cvpr42600.2020.01409>
55. *Jiang Y., Chen W., Sun X., Shi X., Wang F., Li H.* Exploring the Quality of GAN Generated Images for Person Re-Identification // Proceedings of the 29th ACM International Conference on Multimedia. 2021. <https://doi.org/10.1145/3474085.3475547>
56. *Wu C., Ge W., Wu A., Chang X.* Camera-Conditioned Stable Feature Generation for Isolated Camera Supervised Person Re-Identification // ArXiv, abs/2203.15210, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.15210>
57. *Wang G., Lai J., Huang P., Xie X.* Spatial-Temporal Person Re-identification // ArXiv, abs/1812.03282. 2019. <https://doi.org/10.1609/aaai.v33i01.33018933>
58. *Yu Z., Jin Z., Wei L., Guo J., Huang J., Cai D., He X., Hua X.* Progressive Transfer Learning for Person Re-identification // IJCAI. 2019. <https://doi.org/10.24963/ijcai.2019/586>
59. *Sun Y., Zheng L., Yang Y., Tian Q., Wang S.* Beyond Part Models: Person Retrieval with Refined Part Pooling // ECCV. 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-030-01225-0_30
60. *Bayoumi R.M., Hemayed E.E., Ragab M.E., Fayek M.B.* Person Re-Identification via Pyramid Multipart Features and Multi-Attention Framework // Big Data and Cognitive Computing. 2022. <https://doi.org/10.3390/bdcc6010020>
61. *Wang G., Yang S., Liu H., Wang Z., Yang Y., Wang S., Yu G., Zhou E., Sun J.* High-Order Information Matters: Learning Relation and Topology for Occluded

- Person Re-Identification // IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2020. P. 6448–6457.
<https://doi.org/10.1109/CVPR42600.2020.00648>
62. *Sun K., Xiao B., Liu D., Wang J.* Deep High-Resolution Representation Learning for Human Pose Estimation // 2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2019. P. 5686–5696.
<https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.00584>
 63. *Yang J., Zhang J., Yu F., Jiang X., Zhang M., Sun X., Chen Y., Zheng W.S.* Learning to Know Where to See: A Visibility-Aware Approach for Occluded Person Re-identification // Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. 2021. P. 11885–11894.
 64. *Fang H., Xie S., Tai Y., Lu C.* RMPE: Regional Multi-person Pose Estimation // IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). 2017. P. 2353–2362.
<https://doi.org/10.1109/ICCV.2017.256>
 65. *Chen X., Liu X., Liu W., Zhang X., Zhang Y., Mei T.* Explainable Person Re-Identification with Attribute-guided Metric Distillation // IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV). 2022. P. 11793–11802.
<https://doi.org/10.1109/ICCV48922.2021.01160>
 66. *Dai Y., Sun Y., Liu J., Tong Z., Yang Y., Duan L.* Bridging the Source-to-target Gap for Cross-domain Person Re-Identification with Intermediate Domains // ArXiv, abs/2203.01682. 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.01682>
 67. *Zhang H., Cisse M., Dauphin Y., Lopez-Paz D.* mixup: Beyond Empirical Risk Minimization // ArXiv, abs/1710.09412, 2018.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1710.09412>
 68. *Huang X., Belongie S.J.* Arbitrary Style Transfer in Real-Time with Adaptive Instance Normalization // 2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). 2017. P. 1510–1519. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2017.167>
 69. *Avola D., Cascio M., Cinque L., Fagioli A., Petrioli C.* Person Re-Identification Through Wi-Fi Extracted Radio Biometric Signatures // IEEE Transactions on Information Forensics and Security. V. 17. 2022. P. 1145–1158.
<https://doi.org/10.1109/TIFS.2022.3158058>
 70. *Qi L., Shen J., Liu J., Shi Y., Geng X.* Label Distribution Learning for Generalizable Multi-source Person Re-identification // ArXiv, abs/2204.05903. 2022.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.05903>
 71. *Yang X., Zhou Z., Wang Q., Wang Z., Li X., Li H.* Cross-domain unsupervised pedestrian re-identification based on multi-view decomposition // Multimed Tools Appl. 2022. <https://doi.org/10.1007/s11042-021-11797-w>
 72. *Elharrouss O., Almaadeed N., Al-Maadeed S.A., Bouridane A.* Gait recognition for person re-identification // J. Supercomput. 2021 No. 77. P. 3653–3672.
<https://doi.org/10.1007/s11227-020-03409-5>
 73. *Chao H., He Y., Zhang J., Feng J.* GaitSet: Regarding Gait as a Set for Cross-View Gait Recognition // ArXiv, abs/1811.06186, 2019.
<https://doi.org/10.1609/aaai.v33i01.33018126>
 74. *Jiang X., Qiao Y., Yan J., Li Q., Zheng W., Chen D.* SSN3D: Self-Separated Network to Align Parts for 3D Convolution in Video Person Re-Identification // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2021. No. 35(2). P. 1691–1699. <https://ojs.aaai.org/index.php/AAAI/article/view/16262>

75. *Yang F., Wang X., Zhu X., Liang B., Li W.* Relation-based global-partial feature learning network for video-based person re-identification // *Neurocomputing*. 2022. V. 488. P. 424–435. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.03.032>.
76. *Lu Z., Zhang G., Huang G., Yu Z., Pun C., Ling K.* Video person re-identification using key frame screening with index and feature reorganization based on inter-frame relation // *Int. J. Mach. Learn. Cyber.* 2022. <https://doi.org/10.1007/s13042-022-01560-4>
77. *Yadav A., Vishwakarma D.K.* Person Re-Identification using Deep Learning Networks: A Systematic Review // *ArXiv*, abs/2012.13318. 2020. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.13318>
78. *Zhang Z., Lan C., Zeng W., Jin X., Chen Z.* Relation-Aware Global Attention for Person Re-Identification // *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2020. P. 3183–3192. <https://doi.org/10.1109/CVPR42600.2020.00325>
79. *Pathak P., Eshratifar A.E., Gormish M.J.* Video Person Re-ID: Fantastic Techniques and Where to Find Them // *AAAI*. 2020. <https://doi.org/10.1609/aaai.v34i10.7219>
80. *Liu X., Zhang P., Yu C., Lu H., Yang X.* Watching You: Global-guided Reciprocal Learning for Video-based Person Re-identification // *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2021. P. 13329–13338. <https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.01313>
81. *Gao S., Wang J., Lu H., Liu Z.* Pose-Guided Visible Part Matching for Occluded Person ReID // *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2020. P. 11741–11749. <https://doi.org/10.1109/cvpr42600.2020.01176>
82. *Zhang S., Yin Z., Wu X., Wang K., Zhou Q., Kang B.* FPB: Feature Pyramid Branch for Person Re-Identification // *ArXiv*, abs/2108.01901. 2021. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.01901>
83. *Yang F., Li W., Liang B., Han S., Zhu X.* Multi-stage attention network for video-based person re-identification // *IET Comput. Vis.* 2022. P. 1–11. <https://doi.org/10.1049/cvi2.1210>
84. *Wu G., Zhu X., Gong Sh.* Learning hybrid ranking representation for person re-identification // *Pattern Recognition*. V. 121. 2022. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2021.108239>
85. *Zhong Z., Zheng L., Cao D., Li S.* Re-ranking Person Re-identification with k-Reciprocal Encoding // *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2017. P. 3652–3661. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2017.389>
86. *Bohush R.P., Ablameyko S.V., Adamovskiy E.R.* Image Similarity Estimation Based on Ratio and Distance Calculation between Features // *Pattern Recognit. Image Anal.* 2020. No. 30. P. 147–159. <https://doi.org/10.1134/S1054661820020030>
87. *He K., Zhang X., Ren S., Sun J.* Deep Residual Learning for Image Recognition // *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2016. P. 770–778. <https://doi.org/10.1109/cvpr.2016.90>
88. *Choi S., Kim T., Jeong M., Park H., Kim C.* Meta Batch-Instance Normalization for Generalizable Person Re-Identification // *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2021. P. 3424–3434. <https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.00343>

89. *Huang G., Liu Z., Weinberger K.Q.* Densely Connected Convolutional Networks // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2017. P. 2261–2269. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2017.243>
90. *Chen P., Dai P., Liu J., Zheng F., Tian Q., Ji R.* Dual Distribution Alignment Network for Generalizable Person Re-Identification // AAAI. ArXiv, abs/2007.13249, 2021. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.13249>
91. *Zhao C., Chen K., Wei Z., Chen Y., Miao D., Wang W.* Multilevel triplet deep learning model for person re-identification // Pattern Recognit. Lett. 2019. No. 117. P. 161–168. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2018.04.029>
92. *Yao Y., Jiang X., Fujita H., Fang Z.* A sparse graph wavelet convolution neural network for video-based person re-identification // Pattern Recognition. 2022. V. 129. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2022.108708>
93. *Lu P., Lu K., Wang W., Zhang J., Chen P., Wang B.* Real-Time Pedestrian Detection in Monitoring Scene Based on Head Model // Intelligent Computing Theories and Application. ICIC 2019. Lecture Notes in Computer Science. V. 11644. P. 558–568, Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-26969-2_53
94. *Lee S., Kang Q., Madireddy S., Balaprakash P., Agrawal A., Choudhary A.N., Archibald R., Liao W.* Improving Scalability of Parallel CNN Training by Adjusting Mini-Batch Size at Run-Time // 2019 IEEE International Conference on Big Data (Big Data). 2019. P. 830–839. <https://doi.org/10.1109/BigData47090.2019.9006550>
95. *Lewkowycz A.* How to decay your learning rate // ArXiv, abs/2103.12682, 2021. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.12682>
96. *Lewkowycz A., Bahri Y., Dyer E., Sohl-Dickstein J., Gur-Ari G.* The large learning rate phase of deep learning: the catapult mechanism // ArXiv, abs/2003.02218, 2020. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.02218>
97. *Ulyanov D., Vedaldi A., Lempitsky V.S.* Instance Normalization: The Missing Ingredient for Fast Stylization // ArXiv, abs/1607.08022, 2016. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1607.08022>
98. *Chen H., Ihnatsyeva S., Bohush R., Ablameyko S.* Choice of activation function in convolution neural network in video surveillance systems // Programming and computer software. 2022. No. 5. P. 312–321. <https://doi.org/10.1134/S0361768822050036>
99. *Nair, Vinod, Geoffrey E. Hinton.* Rectified linear units improve restricted Boltzmann machines // ICML / 2010. P. 807–814.
100. *Maas Andrew L.* Rectifier non linearities improve neural network acoustic models // ICML. 2013. V. 30.
101. *Xu B., Wang N., Chen T., Li M.* Empirical Evaluation of Rectified Activations in Convolutional Network // ArXiv, abs/1505.00853, 2015. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1505.00853>
102. *Clevert D., Unterthiner T., Hochreiter S.* Fast and Accurate Deep Network Learning by Exponential Linear Units (ELUs) // arXiv: abs/1511.07289v5, 2016. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1511.07289>
103. *Klambauer G., Unterthiner T., Mayr A., Hochreiter S.* Self-Normalizing Neural Networks // ArXiv, abs/1706.02515, 2017. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1706.02515>

104. *Hendrycks D., Gimpel K.* Bridging Nonlinearities and Stochastic Regularizers with Gaussian Error Linear Units. // ArXiv, abs/1606.08415, 2016. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1606.08415>
105. *Ramachandran P., Zoph B., Le Q.V.* Swish: a Self-Gated Activation Function // arXiv: abs/1710.05941v2, 2017. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1710.05941>
106. *Misra D.* Mish: A Self Regularized Non-Monotonic Neural Activation Function // ArXiv, abs/1908.08681, 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1908.08681>
107. *Lavi B., Ullah I., Fatan M., Rocha A.* Survey on Reliable Deep Learning-Based Person Re-Identification Models: Are We There Yet? // ArXiv, abs/2005.00355, 2020. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2005.00355>
108. *Rao H., Miao C.* SimMC: Simple Masked Contrastive Learning of Skeleton Representations for Unsupervised Person Re-Identification // ArXiv, abs/ 2204.09826v1, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.09826>
109. *Zheng Y., Zhou Y., Zhao J., Jian M., Yao R., Liu B., Chen Y.* A siamese pedestrian alignment network for person re-identification // *Multim. Tools Appl.* 2021. No. 80. P. 33951–33970. <https://doi.org/10.1007/s11042-021-11302-3>
110. *Zheng M., Karanam S., Wu Z., Radke R.J.* Re-Identification With Consistent Attentive Siamese Networks // *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2019. P. 5728–5737. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.00588>
111. *Hermans A., Beyer L., Leibe B.* In Defense of the Triplet Loss for Person Re-Identification // ArXiv, abs/1703.07737, 2017. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1703.07737>
112. *Organisciak D., Riachy C., Aslam N., Shum H.* Triplet Loss with Channel Attention for Person Re-identification // *J.WSCG*. 2019. No. 27. <https://doi.org/10.24132/JWSCG.2019.27.2.9>
113. *Zhai Y., Guo X., Lu Y., Li H.* In Defense of the Classification Loss for Person Re-Identification // 2019 *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW)*. 2019. P. 1526–1535. <https://doi.org/10.1109/CVPRW.2019.00194>
114. *Alex D., Sami Z., Banerjee S., Panda S.* Cluster Loss for Person Re-Identification // *Proceedings of the 11th Indian Conference on Computer Vision, Graphics and Image Processing*. 2018. <https://doi.org/10.1145/3293353.3293396>
115. *Bai Z., Wang Z., Wang J., Hu D., Ding E.* Unsupervised Multi-Source Domain Adaptation for Person Re-Identification // 2021 *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2021. P. 12909–12918. <https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.01272>
116. *Chen H., Lagadec B., Bremond F.* Unsupervised Lifelong Person Re-identification via Contrastive Rehearsal // ArXiv, abs/2203.06468, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.06468>
117. *Zhang X., Li D., Wang Z., Wang J., Ding E., Shi J., Zhang Z., Wang J.* Implicit Sample Extension for Unsupervised Person Re-Identification // ArXiv, abs/2204.06892, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.06892>
118. *Zhu K., Guo H., Yan T., Zhu Y., Wang J., Tang M.* Part-Aware Self-Supervised Pre-Training for Person Re-Identification // ArXiv, abs/2203.03931, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.03931>

119. *Fu D., Chen D., Yang H., Bao J., Yuan L., Zhang L., Li H., Wen F., Chen D.* Large-Scale Pre-training for Person Re-identification with Noisy Labels // ArXiv, abs/2203.16533, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.16533>
120. *Cho Y.H., Kim W.J., Hong S., Yoon S.* Part-based Pseudo Label Refinement for Unsupervised Person Re-identification // ArXiv, abs/2203.14675, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.14675>
121. *Chen M., Wang Z., Zheng F.* Benchmarks for Corruption Invariant Person Re-identification // ArXiv, abs/2111.00880. 2021. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.00880>
122. Dataset and Code. URL: <https://www.pkuvmc.com/dataset.html>

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 11.05.2022

После доработки 10.12.2022

Принята к публикации 26.01.2023

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. А.И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru),
В.А. РАССКАЗОВА, канд. физ.-мат. наук (varvara.rasskazova@mail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

МОДЕЛЬ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КАК МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПОТОКОВОГО ПРОИЗВОДСТВА НА ЭТАПЕ ОПЕРАТИВНОГО ГРАФИКОВАНИЯ¹

Исследуется задача оптимального планирования потокового производства на этапе оперативного графикования. В качестве примера рассматривается отделение внепечной обработки конвертерного передела сталелитейного производства в отрасли черной металлургии. Для решения этой задачи предлагается модель целочисленного линейного программирования, в полной мере описывающая специфику исследуемых технологических процессов. Важным преимуществом такого подхода является его масштабируемость для решения смежных оптимизационных задач в отрасли цеховой логистики, а также гибкость к изменчивости и тонкой настройке системы ограничений и целевого функционала. Программная реализация разработанной модели составляет основу модуля оперативного графикования системы оптимального планирования потокового производства, с использованием которой проводится масштабный вычислительный эксперимент на реальных данных.

Ключевые слова: математическое обеспечение, целочисленное линейное программирование, потоковое производство, оперативное планирование.

DOI: 10.31857/S0005231023050069, **EDN:** AIRUYJ

1. Введение

Целочисленное линейное программирование (ЦЛП) широко используется в различных областях науки и техники, включая транспортное и производственное планирование. В [1, 2] были разработаны модели ЦЛП для решения прикладных задач планирования транспортных процессов на железной дороге. В [3] методы ЦЛП рассматривались в контексте решения задач о потоках

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00293).

в сетях. В [4, 5] различные задачи теории расписаний были сведены к рассмотрению соответствующих задач ЦЛП. В [6] модели ЦЛП были предложены для решения некоторых задач промышленного планирования. Основные трудности, возникающие при сведении прикладных задач к рассмотрению соответствующих моделей ЦЛП, связаны с описанием комплексной системы ограничений, присущей многим задачам прикладной природы. В настоящей статье предлагается модель ЦЛП для решения задачи оптимального планирования потокового производства на этапе оперативного графирования, которая в полной мере отражает все значимые особенности рассматриваемых технологических процессов. Программная реализация предложенной модели составляет основу модуля оперативного графирования интеллектуальной системы принятия решений в задачах планирования и логистики потокового производства в отрасли черной металлургии.

В [7–10] приводится расширенный обзор приложений моделей ЦЛП, а также современных методов решения. В [7, 8] детально обсуждаются классические постановки и методы решения задач ЦЛП, включая булевое ЦЛП. В [9, 10] особое внимание уделяется разработке моделей ЦЛП для решения различных прикладных задач в области управления, планирования и принятия решений. Предлагаемый в настоящей статье подход также является масштабируемым и может быть продолжен для решения смежных задач оптимизации технологических процессов на металлургическом производстве. Такими смежными задачами могут быть транспортная цеховая логистика, управление крановым хозяйством, переназначение технологических маршрутов и другие.

Поскольку задача ЦЛП является хорошо известной \mathcal{NP} -трудной задачей, методы ее решения продолжают активно исследоваться и развиваться. Расширенный обзор современных методов решения задач ЦЛП представлен в [11, 12]. В настоящей статье не обсуждаются подробно методы решения задач ЦЛП. Основной целью здесь является разработка адекватной и масштабируемой математической модели, в полной мере описывающей технологические особенности рассматриваемых процессов. При этом для получения решения может быть использовано любое современное программное обеспечение.

В [13–15] обсуждались некоторые прикладные задачи, связанные с оптимальным планированием технологических процессов на металлургическом производстве, ориентированные в основном на повышение качества конечной продукции. В [13] была предложена методология для решения комплексных задач принятия решений в управлении металлургическим производством. Робастные оптимизационные подходы к решению смежных задач на сталеплавильном производстве были предложены в [16–18]. В [14, 15] также были разработаны алгоритмы для улучшения качества конечной продукции на стане горячей прокатки. В настоящей работе рассматривается идеологически другой подход к оптимизации производства, когда основное внимание уделяется энергоэффективности каждого этапа производственной цепочки. В частно-

сти, оптимальная реализация рассматриваемого в работе этапа оперативного графикования позволит существенно повысить качество производства в целом за счет повышения показателей исполнимости плана и равномерной загрузки оборудования.

Хорошо известно, что различные классы задач Machine Scheduling и Shop Scheduling могут быть успешно сведены к задаче Resources Constrained Project Scheduling Problem (RCPSP). Исследуемая в настоящей работе прикладная задача планирования потокового производства на этапе оперативного графикования также характеризуется свойствами, схожими с RCPSP. Для заданного множества ресурсов (машин, агрегатов внепечной обработки) требуется построить график обработки требований (работ, сталь-ковшей с плавками горячего металла) в рамках заданного набора технологических ограничений. Таким образом, исследуемая задача оперативного графикования потокового производства может быть классифицирована как RCPSP с фиксированной длительностью обработки и с ограничениями на время начала и завершения обработки каждого требования. Широкий обзор различных классов задач RCPSP представлен в [19].

RCPSP является \mathcal{NP} -трудной задачей в сильном смысле даже в своей простейшей постановке. Наилучший точный алгоритм для ее решения был предложен в [20] и доставляет решение на входах размера до $n = 60$, где n — количество требований. Ясно, что такая размерность оказывается недостаточной в практических задачах. Что касается алгоритмов полиномиальной сложности с гарантированной погрешностью (когда ошибка не превосходит заданной константы), они не известны даже для случая $K = 1$, где K — количество ресурсов. Популярный подход к решению RCPSP основан на формировании верхних и нижних оценок для оптимального решения. В [21, 22] верхние и нижние оценки решения RCPSP были получены с использованием методов линейного программирования. Среди эффективных полиномиальных алгоритмов для решения RCPSP следует выделить алгоритм List Scheduling (LS). Важным недостатком алгоритма LS является ограничение на размерность задачи — даже в случае небольшого (несколько единиц) количества требований алгоритм не гарантирует оптимальности полученного решения. Но, кроме того, LS оказывается недостаточно гибким к имплементации в модель специфических ограничений прикладного характера, таким, как посменный план производства (когда в указанный интервал времени должно быть исполнено заданное число требований в совокупности по всем машинам). То же самое верно и для различных модификаций LS, включая Ant Colony и другие метаэвристики. Таким образом, актуальной представляется разработка обобщенной модели, допускающей тонкую настройку ограничений и функционала с учетом особенностей рассматриваемых процессов. В настоящей статье для этих целей предлагается модель ЦЛП.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 1 приводится общая постановка задачи, в том числе в терминах предметной области. Раздел 2 посвящен описанию модели ЦЛП для решения исследуемой задачи и алгорит-

мов формирования функционального пространства. В разделе 3 приводятся результаты вычислительного эксперимента с использованием разработанной модели ЦЛП. В заключении обсуждаются пути дальнейшего развития тематики, наращивание функционала модели на случай несовместности системы ограничений, а также продолжение методологии в решении смежных задач цеховой логистики.

2. Математическая модель задачи оперативного графирования потокового производства

Под задачей оперативного графирования потокового производства понимается формирование детализированного графика движения требований (работ, подлежащих исполнению) по машинам цеха с ограничениями на последовательность машин в технологической цепочке, интервалы и длительность обработки каждого требования в зависимости от заданных характеристик и типа машины. Рассмотрим участок потокового производства на примере отделения внепечной обработки конвертерного сталелитейного цеха. Обозначим:

T — количество различных типов машин для внепечной обработки стали (установка доводки стали, агрегат циркуляционного вакуумирования стали и т.п.),

$k(i) \in \mathbb{N}$ — количество машин типа $i = \overline{1, T}$ (установка доводки стали № 1, установка доводки стали № 2, установка печь-ковш № 1 и т.д. по каждому типу машин),

$$K = \sum_{i=1}^T k(i)$$

— количество всех машин в цехе.

Нормативную длительность транспортировки (минимальное время в минутах) для каждой пары машин в цехе определим квадратной матрицей вида

$$\Delta = \|\delta_{ij}\|, \quad i, j = \overline{1, K},$$

где $\delta_{ij} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и выполняются следующие условия:

- 1) равенство $\delta_{ij} = 0$ достигается в том и только в том случае, когда транспортировка работы (сталь-ковша) от машины i до машины j запрещена;
- 2) транспортировка допускается только между различными машинами, т.е.

$$\delta_{ii} = 0 \quad \text{для всех } i = \overline{1, K};$$

- 3) длительность транспортировки для любой пары машин не зависит от начала движения, т.е.

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad \text{для всех } i, j = \overline{1, K}.$$

При последовательном назначении нескольких работ на одну и ту же машину требуется время на ее настройку. Это обусловлено тем, что разные работы могут иметь разные технологические характеристики и требования к обработке и тогда машина (агрегат внепечной обработки) должна быть подготовлена для выполнения соответствующих требований. И даже при одинаковых технологических требованиях необходима проверка работоспособности машины перед назначением ее на выполнение следующей работы. В предположении, что нормативы настройки определяются только типом машины, обозначим вектор длительностей настройки через

$$\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_T),$$

где π_i — минимально необходимое время (в минутах).

В период планирования работ для любой машины могут быть предусмотрены ремонтные и обслуживающие мероприятия — технический осмотр (ТО) или планово-предупредительный ремонт (ППР). Обозначим множество всех запланированных ТО и ППР (далее ТО) через

$$R = \{\rho_i | i = 1, \dots, Ro\},$$

где Ro — число таких осмотров и ремонтов. Для каждого элемента ρ_i определены параметры $(s(\rho_i), f(\rho_i), m(\rho_i))$, где $s(\rho_i), f(\rho_i)$ — время начала и завершения, а $m(\rho_i) \in 1, \dots, K$ — идентификатор машины (агрегата внепечной обработки), для которой планируется ТО.

Сортамент стали является важнейшей характеристикой работ, подлежащих назначению на машины. Именно сортамент стали определяет технологическую инструкцию для формирования работы уже на уровне прогнозного графикования. Так, в частности, для разных сортов сталей определены различные нормативы по минимальной и максимальной допустимым выдержкам металла в сталь-ковшах. На этапе оперативного графикования сортамент стали также играет определяющую роль, поскольку различные сортаменты подлежат различным процедурам внепечной обработки (по типу и по количеству агрегатов в технологическом маршруте, по длительности обработки стали на агрегате определенного типа и т.п.) Пусть для рассматриваемого потокового производства (конвертерного цеха) задано множество сортов сталей

$$S = \{\sigma_i | i = \overline{1, s}\}.$$

Нормативные минимальную и максимальную длительности обработки для каждого сортамента стали и для каждого типа машин определим матрицами

$$M = \|\mu_{ij}\|, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, T}$$

и

$$\hat{M} = \|\hat{\mu}_{ij}\|, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, T},$$

где $\mu_{ij}, \hat{\mu}_{ij} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ характеризуют соответственно минимальное и максимальное время обработки (в минутах) для стали сортамента i на машине типа j и $\mu_{ij} = \hat{\mu}_{ij} = 0$, если сталь сортамента i не подлежит обработке на машине типа j .

Пусть для каждого сортамента $\sigma_i \in S$ также определены допустимые типы технологических маршрутов (множество обобщенных технологических маршрутов, обобщенных ТМ), т.е.

$$P(\sigma_i) = \{p_1(i), \dots, p_n(i)\},$$

где $n = n(\sigma_i) \in \mathbb{N}$ — количество различных обобщенных ТМ для обработки сортамента σ_i , и каждый обобщенный ТМ $p_j(i)$ представляет собой последовательность типов машин вида

$$p_j(i) = (\tau_1(i, j), \dots, \tau_l(i, j)),$$

где $l = l(\sigma_i, j) \in \mathbb{N}$ — количество машин в обобщенном ТМ j для обработки сортамента σ_i , и $\tau_k(i, j) \in \{1, 2, \dots, T\}$ — тип k -й машины в рассматриваемом ТМ. При этом для всех σ_i множество $P(\sigma_i)$ содержит первым элементом основной ТМ и допустимые альтернативные в порядке убывания приоритета. По существу приоритет определяется показателем энергоэффективности производства, следующего по данному ТМ. Так, в частности, для основного ТМ закладывается меньшая совокупная длительность транспортировки (даже с учетом минимально возможной длительности обработки на каждой машине) с тем, чтобы машины не простаивали, а сырье не остывало (дополнительный нагрев требует значительных расходов ресурсов).

2.1. Исходные данные

Пусть $Z = \{\zeta_i | i = \overline{1, z}\}$ — множество работ прогнозного графика. Для каждой работы ζ_i заданы $(k_i, r_i, u_i, d_i, \sigma_i)$, где k_i — позиция начала (конвертер), r_i — время начала, u_i — позиция завершения (машина непрерывной разливки стали), d_i — время завершения, $\sigma_i \in S$ — сортament стали. Необходимо определить конкретные технологические маршруты и сроки выполнения всех работ.

Поскольку позиции начала и завершения работ прогнозного графика по сути своей также являются некоторыми опорными точками цеха, то определим нормативную длительность транспортировки работы (сталь-ковша) от каждой такой позиции до остальных машин. Обозначим:

$$\Delta' = \|\delta'_{ij}\|, \quad i = \overline{1, K'}, \quad j = \overline{1, K},$$

где K' — количество начальных позиций в цехе (количество конвертеров), δ'_{ij} — минимальное время транспортировки (в минутах) от начальной позиции i до машины j , и $\delta'_{ij} = 0$, если транспортировка запрещена. Аналогично

$$\Delta'' = \|\delta''_{ij}\|, \quad i = \overline{1, K''}, \quad j = \overline{1, K},$$

где K'' — количество конечных позиций в цехе (количество установок непрерывной разливки стали), δ''_{ij} — минимальное время транспортировки (в минутах) от машины j до конечной позиции i , и $\delta''_{ij} = 0$, если транспортировка запрещена.

2.2. Постановка задачи

Задача формирования оперативного графика назначения плавок (задача оперативного графикования) может быть сформулирована следующим образом. Для каждой работы $\zeta_i \in Z$, $i = \overline{1, z}$ должен быть назначен детализированный по времени и по машинам технологический маршрут (расширенный ТМ) вида

$$f(\zeta_i) = (s_1(i), m_1(i), f_1(i), \dots, s_l(i), m_l(i), f_l(i))$$

с ограничениями:

- 1) для любого $f(\zeta_i)$ такого, что $\sigma = \sigma_i$, и некоторого $j \in \{1, \dots, n(\sigma)\}$ выполняется $l = l(\sigma, j)$, т.е. длина (по количеству машин) расширенного ТМ соответствует длине некоторого обобщенного ТМ для обработки сортамента σ ;
- 2) для любого $f(\zeta_i)$ и соответствующего $j \in \{1, \dots, n(\sigma)\}$ выполняется

$$t(m_k(i)) = \tau_k(i, j)$$

для всех $k = \overline{1, l}$, где $t(m_k(i))$ — тип k -й машины в расширенном ТМ;

- 3) для всех $f(\zeta_i)$ и $m_k(i), m_h(i)$ таких, что $k < h$, выполняется

$$s_h(i) - f_k(i) \geq \delta_{kh},$$

где δ_{kh} — минимальная длительность транспортировки от машины $m_k(i)$ до машины $m_h(i)$;

- 4) для всех $f(\zeta_i)$ и $m_k(i)$ таких, что $t(m_k(i)) = t$, выполняется

$$\mu_{\sigma t} \leq f_k(i) - s_k(i) \leq \hat{\mu}_{\sigma t},$$

где $\mu_{\sigma t}, \hat{\mu}_{\sigma t}$ — соответственно минимальная и максимальная длительности обработки сортамента σ на машине типа t ;

- 5) для любых $f(\zeta_i), f(\zeta_j)$ и $m = m_k(i) = m_h(j)$ таких, что $t(m) = t$, выполняется

$$\begin{cases} s_h(i) - f_k(j) \geq \pi_t, & \text{если } s_k(i) \leq s_h(j), \\ s_k(i) - f_h(j) \geq \pi_t & \text{иначе,} \end{cases}$$

где π_t — минимальное время (в минутах), необходимое для настройки машины типа t при последовательном назначении работ;

6) для всех $f(\zeta_i)$ и ТО $\rho_j \in R$ таких, что $m_k(i) = m = m(\rho_j)$ для некоторого k , выполняется

$$\begin{cases} s_k(i) > s(\rho_j), \\ s_k(i) \geq f(\rho_j) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} s_k(i) < s(\rho_j), \\ f_k(i) \leq s(\rho_j), \end{cases}$$

где $s(\rho_j)$, $f(\rho_j)$ — время начала и завершения ТО на машине m ;

7) для всех $f(\zeta_i)$ таких, что $k_i = k$ и $m_1(i) = m$, выполняется

$$s_1(i) - r_i \geq \delta'_{km},$$

где $s_1(i)$ — время прибытия работы i на первую машину в расширенном ТМ $f(\zeta_i)$, r_i — начало выполнения i -й работы, k_i — позиция начала выполнения работы, δ'_{km} — минимальное время транспортировки (в минутах) от позиции начала выполнения работы до первой машины в расширенном ТМ;

8) для всех $f(\zeta_i)$ таких, что $u_i = u$ и $m_l(i) = m$, выполняется

$$d_i - f_l(i) \geq \delta''_{um},$$

где $f_l(i)$ — время завершения выполнения работы i на последней машине в расширенном ТМ, d_i — время завершения выполнения i -й работы, δ''_{um} — минимальное время транспортировки (в минутах) от последней машины в расширенном ТМ до позиции завершения работы.

Целевой функционал определим как минимальную совокупную длительность транспортировки, что соответствует максимальной совокупной длительности обработки всех требований на каждой машине в ТМ обработки, т.е.

$$\sum_{i=1}^z \sum_{j=1}^{l(i)} (f_j(i) - s_j(i)) \rightarrow \max,$$

где $l(i)$ — длина (по количеству машин) ТМ $f(\zeta_i)$, назначенного для исполнения работы $\zeta_i \in Z$. Выбор данного функционала обусловлен тем, что длительная транспортировка влечет необходимость в доводке требований на очередной машине в ТМ и сопутствующие дополнительные расходы ресурсов (температурный или химический нагрев). Таким образом, суммарная длительность транспортировки, как уже было отмечено при обсуждении приоритетов ТМ, отражает показатель энергоэффективности процесса, а минимизация ее (т.е. максимизация длительности обработки, времени пребывания на агрегате) соответствует целям повышения энергоэффективности.

Другими словами, задача оперативного графикования состоит в том, чтобы для каждого требования был построен детальный ТМ в условиях заданных ограничений на последовательность и длительность обработки на каждой машине, а также с учетом нормативной длительности транспортировки. Для решения этой задачи предлагается модель ЦЛП, обсуждению и описанию которой посвящен следующий раздел.

3. Модель целочисленного линейного программирования для решения задачи оперативного графического потокового производства

В моделировании прикладных задач методами ЦЛП основополагающая роль отводится структуре функционального пространства (переменных модели), поскольку эффективная и адекватная реализация этого этапа закладывает как структуру системы ограничений, так и последующие возможности тонкой настройки модели с учетом дополнительных технологических особенностей исследуемых процессов. Остановимся подробнее на этой процедуре.

В алгоритме 1 для каждого требования формируется набор булевских переменных, соответствующих обработке требования на одной из машин цеха с указанием времени начала и окончания, а также длительности операций. При этом:

- функция $end(i, s, j, k)$ — фиксирует $l(s, j) - k$ машин в маршруте (начиная с окончания) с минимальной длительностью обработки и транспортировки, где i — идентификатор требования, j — обобщенный ТМ для обработки сортамента $s = \sigma_i$, и k — количество фиксируемых машин;
- функция $start(i, s, j, k)$ — фиксирует $k - 1$ машин в маршруте (начиная с начала) аналогично функции $end(i, s, j, k)$;
- функция $move(i, s, j, k, r)$ — для фиксированных начала и окончания маршрута формирует варианты начала и окончания обработки требования i на k -й машине с минимальной длительностью обработки.

Алгоритм 1. Формирование функционального пространства

- | | | |
|-----|--|---|
| 1: | $c = 0$ | ▷ глобальный счетчик переменных |
| 2: | $s_1 = 0, s_2 = 0, f_1 = 0, f_2 = 0$ | ▷ вспомогательные счетчики |
| 3: | Для всех $i = \overline{1, z}$ выполнять | |
| 4: | $s = \sigma_i$ | ▷ сортмент |
| 5: | $n = n(s)$ | ▷ количество обобщенных ТМ |
| 6: | Для всех $j = \overline{1, n}$ выполнять | |
| 7: | Для всех $k = \overline{1, l(s, j)}$ выполнять | |
| 8: | Если $k \neq l(s, j)$ то | |
| 9: | $end(i, s, j, k)$ | ▷ зафиксировать $l(s, j) - k$ машин от конца ТМ |
| 10: | Иначе | |
| 11: | $s_1 = 0, s_2 = 0$ | |
| 12: | Если $k \neq 1$ то | |
| 13: | $start(i, s, j, k)$ | ▷ зафиксировать $k - 1$ машин от начала |
| 14: | Иначе | |
| 15: | $f_1 = 0, f_2 = 0$ | |
| 16: | $t = \tau_k(s, j)$ | ▷ тип k -й машины |
| 17: | Для всех $r = \overline{1, k(t)}$ выполнять | |
| 18: | $move(i, s, j, k, t, r)$ | ▷ перемещение k -й машины |
-

Алгоритм 2. Функция $end(i, s, j, k)$

- 1: Для всех $h = \overline{1, l(s, j) - k}$ выполнять
 - 2: $t = \tau_{l(s, j) - h + 1}(s, j)$
 - 3: Для всех $r = \overline{1, k(t)}$ выполнять
 - 4: $m = m(t, r)$ ▷ идентификатор r -й машины типа t
 - 5: Для всех $ii = \overline{f_1, f_2}$ выполнять
 - 6: $c = c + 1$
 - 7: Если $ii = 0$ то
 - 8: $u = u_i$
 - 9: $f(c) = d_i - \delta'_{um}$ ▷ отступить влево длительность транспортировки
 - 10: Иначе
 - 11: $f(c) = s(ii) - \delta_{m(ii)m}$
 - 12: $s(c) = f(c) - \mu_{st}$ ▷ отступить влево длительность обработки
 - 13: $id(c) = i, p(c) = j, num(c) = l(s, j) - h + 1, \alpha(c) = j$
 - 14: Если $f_2 = 0$ то
 - 15: $f_1 = c - k(t) + 1$
 - 16: Иначе
 - 17: $f_1 = f_2 + 1$
 - 18: $f_2 = c$
-

Алгоритм 3. Функция $start(i, s, j, k)$

- 1: Для всех $h = \overline{1, k - 1}$ выполнять
 - 2: $t = \tau_h(s, j)$
 - 3: Для всех $r = \overline{1, k(t)}$ выполнять
 - 4: $m = m(t, r)$
 - 5: Для всех $ii = \overline{s_1, s_2}$ выполнять
 - 6: $c = c + 1$
 - 7: Если $ii = 0$ то
 - 8: $v = k_i$
 - 9: $s(c) = r_i + \delta'_{vm}$ ▷ отступить вправо длительность транспортировки
 - 10: Иначе
 - 11: $s(c) = f(ii) + \delta_{m(ii)m}$
 - 12: $f(c) = s(c) + \mu_{st}$ ▷ отступить вправо длительность обработки
 - 13: $id(c) = i, p(c) = j, num(c) = h, \alpha(c) = j$
 - 14: Если $s_2 = 0$ то
 - 15: $s_1 = c - k(t) + 1$
 - 16: Иначе
 - 17: $s_1 = s_2 + 1$
 - 18: $s_2 = c$
-

Алгоритм 4. Функция $move(i, s, j, k, t, r)$

```
1:  $m = m(t, r)$ 
2: Для всех  $ii = \overline{s_1, s_2}$  выполнять
3:   Для всех  $jj = \overline{f_1, f_2}$  выполнять
4:     Если  $ii = 0$  то
5:        $t_1 = r_i, v = k_i, \delta = \delta'_{vm}$ 
6:     Иначе
7:        $t_1 = f(ii), \delta = \delta_{m(ii)m}$ 
8:     Если  $jj = 0$  то
9:        $u = u_i, t_2 = d_i - \delta''_{um} - \mu_{st}$ 
10:    Иначе
11:       $t_2 = s(jj) - \delta_{m(ii)m} - \mu_{st}$ 
12:    Пока  $t_2 - t_1 \geq \delta$  выполнять
13:       $c = c + 1, s(c) = t_2, f(c) = s(c) + \mu_{st}, id(c) = i, p(c) = j, num(c) = k,$   

 $m(c) = m, \alpha(c) = j, t_2 = t_2 - step$  ▷ переместить начало обработки  

на  $k$ -й машине влево
```

Ясно, что реализация алгоритма 1 возможна и в иной конфигурации, когда в первую очередь фиксируется начало маршрута и только затем его окончание. В общем случае формируемые в разных подходах подмножества переменных модели могут оказаться различными, что влечет за собой структурные различия последующих ограничений и функционала. Кроме того, в предложенном варианте для каждого требования i фиксируется минимальная длительность обработки на каждой машине, что снижает оптимизационный потенциал. Однако с целью сокращения размерности модели в целом задача оперативного графикования потокового производства может быть деконструирована на два этапа, первым из которых и является предложенная конфигурация алгоритма 1 с фиксированной минимальной длительностью обработки. Последующее расширение в допустимых пределах для каждой машины может быть реализовано в рамках вспомогательной модели ЦПП с гарантированным решением, что составляет область развития предложенной методологии.

Отдельно отметим содержательный смысл параметра $step$ в алгоритме 4 — это настраиваемый параметр, соответствующий дискрету формирования функционального пространства. Так, в частности, при достаточно малом значении параметра $step$ переменные, соответствующие одному и тому же требованию i и обработке по одному и тому же ТМ j , будут иметь различия в длительности транспортировки пропорционально величине параметра $step$. Соответственно малые значения параметра $step$ (в экстремальном случае, равном 1 мин) существенно увеличивают размерность функционального пространства. В этой связи возникает естественная задача поиска баланса между величиной параметра $step$ и быстродействием модели в целом (поскольку большая размерность функционального пространства влечет значительное увеличение расхода вычислительных ресурсов).

По результатам работы алгоритма 1 (включая вложенные функции алгоритмов 2, 3 и 4) будут сформированы массивы параметров переменных модели ЦЛП. При этом для каждой переменной $x_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, c}$ определены

$$id_i, p_i, num_i, m_i, s_i, f_i, \alpha_i,$$

где id_i — идентификатор работы, для которой производится назначение машины, p_i — обобщенный ТМ, num_i — порядковый номер машины в ТМ, m_i — идентификатор машины, s_i — время начала обработки, f_i — время завершения обработки, α_i — коэффициент целевой функции, определяемый в простейшем случае как порядковый номер выбранного обобщенного ТМ.

Важнейшим ограничением в решении задачи оперативного графирования является выполнение всех работ множества Z . Тогда

$$(1) \quad \sum_{i=1}^c \{x_i : id_i = id, num_i = 1\} = 1$$

для всех $id = \overline{1, z}$. Условие (1) обеспечивает выбор единственного расширенного ТМ для выполнения каждой работы. Причем признак $num_i = 1$ позволяет избежать конструкции “если, то”, связанной с длиной выбираемого ТМ.

Далее выбранное в ограничении (1) начало ТМ должно быть продолжено в соответствии с его длиной по количеству машин, т.е.

$$(2) \quad \sum_{i=1}^c \{x_i : id_i = id, p_i = p\} = l(\sigma, p) \cdot \sum_{i=1}^c \{x_i : id_i = id, p_i = p, num_i = 1\}$$

для всех $id = \overline{1, z}$ и $p = \overline{1, n(\sigma)}$, где $\sigma = \sigma_{id}$. Другими словами, ограничение (2) призвано “отследить” выбор полного (по количеству машин) ТМ, начало которого определяется ограничением (1). В то же время ограничение (2) не противоречит выбору таких $x_i = x_j = 1$, что $num_i = num_j = k$ для некоторых $k > 1$. С целью исключения подобных ошибок введем в рассмотрение следующие ограничения:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^c \{x_i : id_i = id, p_i = p, num_i = k\} \leq 1$$

для всех $id = \overline{1, z}$, $p = \overline{1, n(\sigma)}$ и $k = \overline{2, l(\sigma, p)}$, где $\sigma = \sigma_{id}$.

Таким образом, ввиду ограничений (1) в решение будет выбран единственный ТМ. Далее ввиду ограничений (2) этот ТМ будет достроен до $l(\sigma, p)$ по числу машин. Причем каждая машина k будет выбрана только один раз ввиду ограничения (3).

Сформулируем теперь ограничения на производительность машин. При последовательном назначении работ на одну и ту же машину время на подготовку должно быть не менее заданного параметра производительности для

соответствующего типа машины, т.е.

$$(4) \quad x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^c \{x_j : m_i = m_j, |s_i - f_j| \leq \pi_t\} \leq 1$$

для всех $m_i = \overline{1, K}$, где $t = \tau_k(\sigma, p)$ при $k = \text{num}_i$, $id_i = id$, $\sigma = \sigma_{id}$, $p = p_i$, и π_t — нормативная длительность подготовки машины типа t . Ясно, что ограничения (4) оказываются избыточными, поскольку некоторые из них могут быть подмножеством других. Для формирования набора максимальных по включению ограничений вида (4) может быть использовано простое лексикографическое правило (попарное сравнение двоичных строк длины K , где каждая строка соответствует ограничению для переменной x_i и j -й элемент строки принимает значение 1, если m_j входит в ограничение для x_i).

Ограничения на ТО могут быть введены на этапе формирования функционального пространства посредством обращения в нуль всех переменных, для которых

$$(5) \quad \sum_{i=1}^c \{x_i : s(\rho) \leq s_i \leq f(\rho), m_i = m(\rho)\} = 0,$$

$$(6) \quad \sum_{i=1}^c \{x_i : s_i \leq s(\rho) \leq f_i, m_i = m(\rho)\} = 0$$

для всех запланированных ТО $\rho \in R$, где $m(\rho)$ — машина, на которой планируется ТО, $s(\rho)$, $f(\rho)$ — начало и завершение. Другими словами, для любых x_i таких, что время начала или завершения обработки требования i на машине m_i приходится на период запланированного ТО этой машины, должно выполняться $x_i = 0$. Это условие может быть выполнено как на уровне формирования множества переменных модели (за счет предварительной проверки), так и на уровне ограничений. Последний вариант оказывается более предпочтительным в условиях модифицированной постановки поиска максимальной совместной подсистемы ограничений, когда часть из них может быть нарушена в соответствии с установленными приоритетами. Однако такая постановка остается за пределами настоящего исследования и составляет направление развития.

В общем случае целевым функционалом в задаче оперативного графирования потокового производства выступает показатель энергоэффективности. Однако с целью декомпозиции задачи и снижения размерности основной модели в простейшей конфигурации коэффициентами переменных используются порядковые номера обобщенных ТМ — основной ТМ является более энергоэффективным по сравнению с альтернативными, причем для каждого следующего альтернативного ТМ имеет место снижение показателей энергоэффективности обработки. Таким образом, задача состоит в минимизации

целевой функции вида

$$(7) \quad \sum_{i=1}^c \alpha_i \cdot x_i \longrightarrow \min$$

с ограничениями

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^c \{x_i: id_i = id, num_i = 1\} = 1, \\ \sum_{i=1}^c \{x_i: id_i = id, p_i = p\} = l(\sigma, p) \cdot \sum_{i=1}^c \{x_i: id_i = id, p_i = p, num_i = 1\}, \\ \sum_{i=1}^c \{x_i: id_i = id, p_i = p, num_i = k\} \leq 1, \\ x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^c \{x_j: m_i = m_j, |s_i - f_j| \leq \pi_t\} \leq 1, \\ \sum_{i=1}^c \{x_i: s(\rho) \leq s_i \leq f(\rho), m_i = m(\rho)\} = 0, \\ \sum_{i=1}^c \{x_i: s_i \leq s(\rho) \leq f_i, m_i = m(\rho)\} = 0, \\ x_i \in \{0, 1\}, \end{array} \right.$$

где

- $id = \overline{1, z}$ — множество требований, подлежащих назначению на последовательность машин,
- $p = \overline{1, n(\sigma)}$ — множество обобщенных ТМ для обработки сортамента $\sigma = \sigma_{id}$,
- $l(\sigma, p)$ — длина ТМ по числу машин,
- $k = \overline{1, l(\sigma, p)}$ — порядковый номер машины в ТМ p ,
- $t = \tau_k(\sigma, p)$ — тип k -й машины в ТМ p ,
- π_t — нормативная длительность настройки для машины типа t ,
- $\rho \in R$ — множество запланированных ТО,
- $m(\rho)$ — машина, на которой планируется ТО ρ ,
- $s(\rho), f(\rho)$ — начало и завершение ТО ρ .

Для решения задачи (7) с ограничениями (8) может быть использовано любое прикладное программное обеспечение (ПО) для решения задач математического программирования (IBM CPLEX, Analytic Solver VBA Excel, Gurobi, Google OR-Tools и т.д.) или встроенные библиотеки языков программирования высокого уровня (Optimization Toolbox, CVXOPT, HeO и др.).

4. Вычислительный эксперимент

Модель ЦЛП (7), (8) была реализована на языке Python версии 3.8.5 с использованием библиотеки PuLP для поиска решения в модуле оперативного графирования системы планирования потокового производства. Простейшая схема компонент системы и потоков данных представлена на рисунке, где

- [1] запрос параметров суточного задания, передача набора серий разливки с указанием времени начала разливки, количества плавок, идентификаторов серий;
- [2] запрос параметров суточного задания по идентификаторам серий (сортament стали, цикл разливки, рекомендованный технологический маршрут внепечной обработки);
- [3] передача параметров суточного задания из внешних систем в базу данных;
- [4] передача параметров суточного задания из базы данных на ВЭБ-интерфейс Пользователя;
- [5] запрос на расчет прогнозного графика, передача набора серий разливки с указанием начала разливки, количества плавок и параметров суточного задания;
- [6] запрос нормативно-справочной информации по допустимым выдержкам по сортаментам и статистики расходов энергоресурсов в зависимости от длительности обработки (формирование коэффициентов целевого функционала);
- [7] передача нормативно-справочной информации из базы данных в модуль прогнозного графирования;
- [8] передача параметров прогнозного графика (перечень плавок с указанием сортамента, выдержки, времени окончания продувки на конвертере

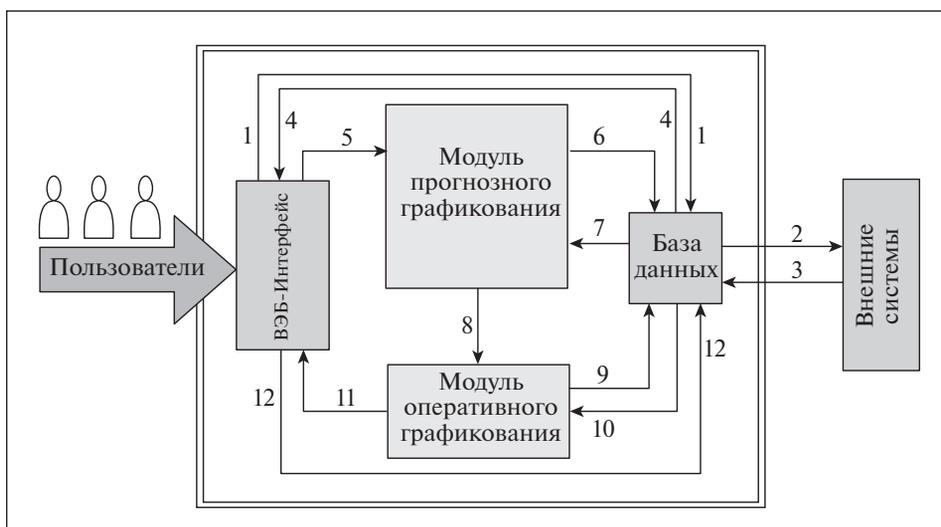


Схема компонент системы.

и начала разливки, рекомендованного технологического маршрута внепечной обработки);

- [9] запрос нормативно-справочной информации (альтернативные технологические маршруты внепечной обработки, длительность обработки на каждой машине в зависимости от сортамента и выдержки, длительность транспортировки сталь-ковша с плавкой между агрегатами цеха);
- [10] передача нормативно-справочной информации из базы данных в модуль оперативного графирования;
- [11] передача результатов расчета прогнозного и оперативного графиков (полный маршрут обработки каждой плавки в суточном задании с указанием времени начала и окончания обработки на каждом агрегате, включая конвертер и машину непрерывного литья);
- [12] сохранение результатов расчета прогнозного и оперативного графиков для последующего отображения (по запросу) и анализа.

Вычислительный эксперимент проводился на персональном компьютере с характеристиками Intel Core m3 1.2 GHz, 8Gb 1867 MHz LPDDR3, macOS 10.13.6. Входными данными выступили данные о фактически реализованных сценариях производства, зафиксированных в конвертерном цехе № 2 Новолипецкого металлургического комбината (г. Липецк, Россия). Для каждого зафиксированного суточного задания (по месяцам 2020 и 2021 г.) был предложен оптимизированный график внепечной обработки (оперативный график) и сравнивались средневзвешенные затраты по расходу энергоресурсов каждого типа в денежном эквиваленте. Результаты проведенного вычислительного эксперимента частично представлены в табл. 1, 2, где были использованы следующие обозначения.

- В столбце “Дата” указан день рассматриваемого месяца, для которого было зафиксировано суточное задание и произведено сравнение затрат на производство в фактически реализованном сценарии и в оптимизированном, полученном с помощью разработанной модели ЦЛП.
- В столбцах “ F_1 ” и “ F_2 ” приводятся значения целевой функции фактически реализованного и оптимизированного сценариев соответственно — суммарный расход на производство всех плавков суточного задания по типам ресурсов в денежном эквиваленте (в сотнях рублей). Данные значения рассчитываются по каждой плавке, исходя из маршрута ее обработки и с учетом заданных средних расходов (например, расход электродов при нагреве плавки низколегированного сортамента на установке печь-ковш составляет 25 кг, что в денежном выражении эквивалентно 4644,2 руб).
- В столбце “ Δ , %” указана разница между значениями “ F_1 ” и “ F_2 ”, т.е. если значение в столбце “ Δ , %” отрицательно, то достигнутое значение функционала в оптимизированном сценарии оказывается больше, чем для фактически реализованного (это объясняется тем, что в фактически реализованных сценариях некоторые технологические ограничения

модели могут быть нарушены, что по сути влечет принципиально другую постановку задачи в части нормативно-справочной информации).

- В столбце “ t , с” указано процессорное время в секундах, затраченное на поиск решения для оптимизированного сценария.

Таблица 1. Май, 2020

Дата	F_1	F_2	Δ , %	t , с	Дата	F_1	F_2	Δ , %	t , с
01	1961,6	1852,1	5,58	7,11	02	1859,8	1759	5,42	5,20
03	1730,9	1690,2	2,35	3,22	05	1953,4	1843,8	5,61	6,64
06	1816,3	1627,7	10,38	3,92	07	1894,8	1835	3,16	4,64
08	1893,3	1832,8	3,20	9,25	09	1801,9	1717,2	4,70	8,69
10	2162,4	1823,8	15,66	60,75	11	1673,3	1251,6	25,20	1,08
12	1426,8	1101,8	22,78	0,55	13	2921,7	1131,3	61,28	0,74
14	1632,0	931,5	42,92	0,44	15	1364,2	1080,5	20,80	0,88
16	1434,8	1086,9	24,25	0,50	17	1488,4	1133,2	23,86	0,42
18	1527,8	1283,7	15,98	0,74	19	1641,3	1233,4	24,85	0,51
20	1781,4	1383	22,36	0,52	21	1877,2	1704,7	9,19	2,65
22	1820,3	1723,2	5,33	16,07	24	1990,7	2065,5	-3,76	33,47
25	1787,1	1632,2	8,67	34,85	26	1887,2	1925,6	-2,03	10,34
27	1905,0	1770,6	7,06	3,94	28	2136,1	1982,8	7,18	3,71
29	1887,9	1990,8	-5,45	25,17	30	2017,1	1891,7	6,22	26,67
31	2052,3	1935,3	5,70	15,39					

Таблица 2. Июнь, 2020

Дата	F_1	F_2	Δ , %	t , с	Дата	F_1	F_2	Δ , %	t , с
01	2297,0	2205,9	3,97	23,05	02	1952,1	1833,3	6,09	16,67
03	2291,1	1815,4	20,76	7,52	04	2045,3	1659,5	18,86	10,29
05	1997,5	2005,2	-0,39	24,68	06	1915,3	1880,5	1,82	4,63
07	1942,8	2044,4	-5,23	6,93	08	1599,5	1321,3	17,39	5,67
09	1648,8	1299,8	21,17	3,79	10	1786,3	1535,1	14,06	5,11
11	2228,7	1903,2	14,60	32,12	12	1723,8	1507,4	12,55	2,69
13	1483,7	1228	17,23	0,66	14	1554,5	984,9	36,64	0,46
15	1195,7	1030,9	13,78	0,67	16	1104,1	873,9	20,85	0,71
17	1461,5	1123,6	23,12	0,55	18	918,9	748,1	18,59	0,67
19	1692,3	1439,8	14,92	1,71	20	1959,7	1790,9	8,61	20,54
21	1956,8	1566,8	19,93	3,37	22	2305,3	2126,6	7,75	23,25
23	1986,4	1567,8	21,07	24,78	24	1839,5	1807,7	1,73	41,31
25	1732,3	1556	10,18	7,64	26	1721,3	1742,4	-1,23	22,03
27	1921,4	1691,6	11,96	4,98	28	1679,7	1424,8	15,18	13,14
29	1831,0	1462,7	20,11	3,86	30	1963,9	1503,8	23,43	4,13

Таблица 3. Результаты вычислительного эксперимента

Месяц	Avg, %	Месяц	Avg, %	Месяц	Avg, %
2020, May	13,05	2020, June	13,65	2020, July	9,76
2020, August	8,81	2020, September	11,10	2020, October	18,09
2020, November	9,64	2020, December	19,16	2021, January	9,39
2021, February	13,58	2021, March	10,59	2021, April	18,15

Аналогичные расчеты были произведены для периодов с августа по декабрь 2020 г. и с января по апрель 2021 г. В табл. 3 представлены обобщенные результаты по каждому месяцу рассматриваемого периода со средним значением параметра “ Δ , %”, где:

- в столбце “Месяц” указан месяц рассматриваемого периода 2020–2021 гг.,
- в столбце “Avg, %” приводятся значения показателя улучшения целевой функции в среднем, рассчитанное как среднее арифметическое по всем значениям “ Δ , %” в указанном месяце.

Как видно из табл. 3, разработанная в настоящей статье модель ЦЛП как математическое обеспечение модуля оперативного графикования системы оптимального планирования потокового производства доставляет существенное улучшение функционала качества на реальных данных — до 19,16% в среднем (максимальное значение в столбце “Avg, %” в табл. 3). Экономический эффект достигается за счет перераспределения машин цеха между требованиями, что влечет в свою очередь преимущественный выбор основного ТМ для обработки. Другими словами, в фактическом сценарии по основному ТМ обрабатываются требования, которые в оптимизированном сценарии были назначены на альтернативные ТМ. В совокупности это приводит к тому, что суммарный показатель энергоэффективности по суточному заданию в целом оказывается выше в оптимизированном сценарии. Следует также отметить, что значение имеет не только количественный признак (когда количество требований, следующих по основному ТМ, в оптимизированном сценарии больше, чем в фактическом), но и качественный — если одно из двух фиксированных требований необходимо подлежит назначению на альтернативный ТМ, то приоритетным с точки зрения целевого функционала является вариант назначения, для которого совокупный расход ресурсов меньше (с учетом сортамента каждого требования). При этом вычислительные затраты оказываются вполне приемлемыми с точки зрения оперативности функционирования системы (значения в столбце “ t , с” в табл. 1, 2). Таким образом, можно ожидать высокую эффективность внедрения системы в целом и, в частности, модуля оперативного графикования, основанного на разработанной модели ЦЛП, в практику эксплуатации потокового производства.

5. Заключение

В статье исследовалась задача оптимального планирования потокового производства на этапе оперативного графикования на примере отделения внепечной обработки конвертерного цеха сталелитейного производства в отрасли черной металлургии. Для решения этой задачи была предложена модель целочисленного линейного программирования, в полной мере описывающая все технологические особенности исследуемых процессов, а также допускающая гибкую настройку и модификацию системы ограничений и целевого функционала. Программная реализация предложенной модели была положена в основу модуля оперативного графикования системы оптимального планирования

потокового производства, с использованием которой был проведен масштабный вычислительный эксперимент на реальных данных. Результаты проведенного вычислительного эксперимента демонстрируют высокую эффективность предложенного подхода и перспективу достижения значительного экономического эффекта от внедрения системы в практику эксплуатации потокового производства.

Дальнейшее развитие тематики связано, в первую очередь, с оснащением разработанной модели дополнительным функционалом для улучшения качества получаемых решений за счет увеличения длительности обработки требований на каждой машине в пределах допустимых интервалов. Другой функционал, также подлежащий развитию и имплементации в разработанную модель, связан с поиском максимально совместных подсистем ограничений с приоритетами в условиях противоречивости модели в ее исходной постановке.

Продолжением предложенного подхода к моделированию производственных задач методами целочисленного линейного программирования является исследование смежных задач цеховой логистики, включая транспортное планирование и управление крановым хозяйством. В таких задачах также часто имеет место несовместность системы ограничений в исходной постановке. В этой связи планируемые к исследованию и разработке методы формирования максимальных совместных подсистем ограничений с приоритетами также могут получить широкое и эффективное приложение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лазарев А.А., Мусатова Е.Г. Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения // Управление большими системами. 2012. № 38. С. 161–169.
2. Гайнанов Д.Н., Игнатов А.Н., Наумов А.В., Рассказова В.А. О задаче назначения “технологического окна” на участках железнодорожной сети // АИТ. 2020. № 6. С. 3–16. <https://doi.org/10.31857/S0005231020060013>
Gainanov D.N., Ignatov A.N., Naumov A.V., Rasskazova V.A. On Track Procession Assignment Problem at the Railway Network Sections // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 6. P. 967–977. <https://doi.org/10.1134/S0005117920060028>
3. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.
4. Ryan D.M., Foster B.A. An Integer Programming Approach to Scheduling. Computer Scheduling of Public Transport Urban Passenger Vehicle and Crew Scheduling / Eds. Wren A. Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 269–280.
5. Wagner H.M. An Integer Linear-Programming Model for Machine Scheduling // Nav. Res. Logist. Quart. 1959. V. 6. No. 2. P. 131–140.
6. Pochet Y., Wolsey L.A. Production Planning by Mixed Integer Programming. Switzerland: Springer Series in Operations Research & Financial Engineering, 2006.
7. Шевченко В.Н., Золотых Н.Ю. Линейное и целочисленное линейное программирование. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского, 2004.

8. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.
9. *Сигал И.Х., Иванова А.П.* Введение в прикладное дискретное программирование. Модели и вычислительные алгоритмы. М.: Физматлит, 2007.
10. *Appa G.M., Pitsoulis L.S., Paul W.H.* Handbook on Modeling for Discrete Optimization. Switzerland: Springer Series in Operations Research & Management Science., 2006.
11. *Wolsey L.A.* Integer Programming. NJ: John Wiley & Sons, 2020.
12. *Hu T.C., Kahng A.B.* Linear and Integer Programming Made Easy. Switzerland: Springer, 2016.
13. *Кабулова Е.Г.* Интеллектуальное управление многостадийными системами металлургического производства // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2019. Т. 7. № 1(24). С. 341–351.
<https://doi.org/10.26102/2310-6018/2019.24.1.022>
14. *Столбов В.Ю., Гитман М.Б., Федосеев С.А.* Управление процессом формирования качества продукции промышленного предприятия // Прикладная математика и вопросы управления. 2016. № 3. С. 79–98.
15. *Gainanov D.N., Berenov D.A.* Algorithm for Predicting the Quality of the Product of Metallurgical Production // CEUR Workshop Proceedings. 2017. V. 1987. P. 194–200.
16. *Qiu Y., Wang L., Xu X., Fang X., Pardalos P.M.* Scheduling a Realistic Hybrid Flow Shop with Stage Skipping and Adjustable Processing Time in Steel Plants // Appl. Soft Comput. 2018. V. 64. P. 536–549.
17. *Kong M., Pei J., Xu J., Liu X., Pardalos P.M.* A Robust Optimization Approach for Integrated Steel Production and Batch Delivery Scheduling with Uncertain Rolling Times and Deterioration Effect // Int. J. Prod. Res. 2020. V. 58. No. 17. P. 5132–5154. <https://doi.org/10.1080/00207543.2019.1693659>
18. *Long J., Sun Z. et al.* A Robust Dynamic Scheduling Approach Based on Release Time Series Forecasting for the Steelmaking Continuous Casting Production // Appl. Soft Comput. 2020. V. 92. P. 106271.
19. *Лазарев А.А., Гафаров А.А.* Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. М.: Наука, 2011.
20. *Brucker P., Knust S.* Complex Scheduling. Germany: Springer-Verlag Berlin, 2006.
21. *Mingozzi A., Maniezzo V., Ricciardelli S., Bianco L.* An Exact Algorithm for Project Scheduling with Resource Constraints Based on New Mathematical Formulation // Management Sci. 1998. V. 44. P. 714–729.
22. *Burkov V.N.* Problems of Optimum Distribution of Resources // Control Cybernet. 1972. V. 1. No. 1(2). P. 27–41.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 08.11.2022

После доработки 22.02.2023

Принята к публикации 20.03.2023

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. А.Г. ЧЕНЦОВ, чл.-корр. РАН (chentsov@imm.uran.ru),
П.А. ЧЕНЦОВ, канд. физ.-мат. наук (chentsov.p@mail.ru)
(Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург;
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина,
Екатеринбург)

ДВУХЭТАПНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ С ЭЛЕМЕНТАМИ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Рассматривается экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями. Одно из таких ограничений связано с выделением в составе исходной задачи предваряющей и финальной подзадач; задания, относящиеся к предваряющей подзадаче, должны быть выполнены прежде, чем начнется выполнение заданий финальной подзадачи. Такое условие может, в частности, возникать в задаче об управлении инструментом при термической резке на машинах с числовым программным управлением (ЧПУ): при наличии среди заготовок так называемых длинномерных деталей вблизи узкой границы материала процесс резки следует начинать с этих заготовок, так как такие детали подвержены тепловым деформациям, что потенциально может привести к браку. В рассматриваемой постановке выделяются две зоны, связанные с обслуживанием деталей. Предполагается, что совокупный маршрутный процесс в исходной задаче включает точку старта, собственно маршрут (перестановку индексов) и конкретную траекторию, согласованную с упомянутыми маршрутом и точкой старта. Предполагается, что в каждой из подзадач выделены свои условия предшествования, а функции стоимости, формирующие аддитивный критерий, могут допускать зависимость от списка заданий. Для применения динамического программирования в качестве метода решения вводится специальная двухэтапная процедура. Установлена структура оптимального решения и, на ее основе, построен алгоритм, реализованный на персональной электронно-вычислительной машине (ПЭВМ). Проведен вычислительный эксперимент.

Ключевые слова: динамическое программирование, маршрут, мегаполис, условия предшествования.

DOI: 10.31857/S0005231023050070, **EDN:** AJGKXO

1. Введение

В прикладных задачах нередко возникает необходимость в выборе очередности тех или иных заданий с соблюдением разнообразных ограничений.

Последнее обстоятельство приводит к существенным отличиям уже на уровне постановки данных задач в сравнении с естественным прототипом — задачей коммивояжера (ЗК или TSP в англоязычных публикациях); см. [1–7] и др. Ряд обстоятельств, включая наличие ограничений, потребовал разработки специальной теории для решения задач маршрутизации прикладной направленности (сейчас отметим только монографии [8–10]).

Так, в частности, выяснилось [8, § 4.9], что условия предшествования, естественные для инженерных приложений, можно использовать “в положительном направлении” в смысле снижения вычислительной сложности; данный факт был установлен теоретическим путем. Оказалось также, что ограничение, являющееся основным в данной работе (см. также [11, 12]), также работает “в положительном направлении”, что видно, например, из результатов [11, раздел 10].

Речь идет о постановке, когда все множество заданий, подлежащих последовательному выполнению, разбито на два (дизъюнктивных) подмножества (п/м), причем выполнение заданий, относящихся ко второму п/м, можно начинать только после выполнения всех заданий, относящихся к первому п/м (отметим, что в данной задаче могут присутствовать свои условия предшествования, а функции стоимости, формирующие аддитивный критерий, допускают зависимость от списка заданий). Такая ситуация складывается в задаче, связанной с фигурной термической резкой деталей на машинах с ЧПУ. Речь идет о возможности эффективного отвода тепла, что мотивируется соображениями, связанными с термическими деформациями (подробнее см. в [10, § 1.3]: правила жесткости детали и жесткости листа). Упомянутые соображения приводят, в частности, к идее резки зонами (см. [10, § 1.3.3]); в связи с реализацией данной идеи отметим, в частности, построения [12, § 12], относящиеся к многоэтапному варианту процедуры на основе динамического программирования (ДП).

Опуская подробности (см. [10, гл. 1]), ограничимся сейчас обсуждением одного характерного случая двух зон. Рассмотрим вопрос о предваряющей резке длинномерных деталей (см. [11, раздел 10]); это детали, у которых [10, с. 46] один из габаритов больше другого не менее чем в 10 раз. Такие заготовки подвержены максимальным тепловым деформациям, а потому, если заготовки находятся вблизи узкой границы материала, процесс резки следует начинать с них; тогда при осуществлении резки этих заготовок возле точек врезки и выключения инструмента будет находиться достаточно “много” сплошного металла. Естественная реализация данного принципа состоит в формировании зоны, включающей длинномерные (и, возможно, еще какие-то) детали; данную зону следует связать с предваряющей задачей. Оставшиеся детали образуют вторую (финальную) зону. Разумеется, данный вариант является простейшим всего лишь в части резки зонами, но на нем остановимся подробнее, продолжая построения [11, 12] и сопровождая алгоритмические построения теоретическими обоснованиями. В частности,

положения [11, 12] будут дополнены некоторыми свойствами предваряющей задачи.

Отметим, что разделение исходной задачи на совокупность двух подзадач можно свести к наложению новых условий предшествования. В этом случае реализуется “стандартная” (в смысле [8, 13, 14]) экстремальная задача маршрутизации, для которой структура оптимального решения известна; однако для задач ощутимой размерности возникают (понятные в связи с известной труднорешаемостью ЗК) трудности с вычислительной реализацией. Декомпозиционный подход [11, 12] позволяет в значительной степени эти трудности преодолеть (см. результаты вычислительного эксперимента в [11, 12]), не теряя оптимальность. Это делает целесообразным его детальное исследование особенно в связи с работами по фигурной листовой резке на машинах с ЧПУ (см., в частности, [10, 15–18]). Здесь будем ориентироваться на вариант с предваряющей резкой длинномерных деталей. Условия предшествования полагаем сразу локализованными для предваряющей и финальной подзадач.

2. Общие понятия и обозначения; постановка задачи

Отметим используемые ниже аббревиатуры: в/з (вещественнозначная), ДП (динамическое программирование), ДР (допустимое решение), ЗК (задача коммивояжера), МП (маршрутный процесс), п/м (подмножество), УП (упорядоченная пара). Задачи, исследуемые в статье и традиционно рассматриваемые как труднорешаемые, требуют для построения оптимальных процедур прежде всего обстоятельной формализации. Это тем более существенно в условиях ограничений, которые возникают в инженерных приложениях и существенно осложняют постановку в сравнении с более традиционными для дискретной оптимизации задачами типа ЗК. В этой связи потребуются сводка определений общего характера, включая некоторые положения теории множеств. Последнее существенно уже для корректной постановки задачи.

Используем стандартную теоретико-множественную символику (кванторы, связки и др.); \emptyset — пустое множество, \triangleq — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Как обычно [19, с. 62], выражение $\{a \in A \mid \dots\}$ обозначает множество всех элементов $a \in A$ со свойством \dots ; данное соглашение широко используется в дальнейшем.

Двум любым объектам x и y сопоставляется неупорядоченная пара $\{x; y\} : \{x; y\}$ — множество, содержащее x , y и не содержащее никаких других элементов. Тогда объекту z сопоставляем синглетон $\{z\} \triangleq \{z; z\}$, содержащий z . Множество является объектом, а потому, следуя [19, с. 67], любым двум объектам u и v сопоставляем их упорядоченную пару (УП) $(u, v) \triangleq \{\{u\}; \{u; v\}\}$ с первым элементом u и вторым элементом v . Если же h есть УП, то через $\text{pr}_1(h)$ и $\text{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h , $h = (\text{pr}_1(h), \text{pr}_2(h))$. Трём любым объектам x , y и z сопоставляется их (упорядоченный) триплет $(x, y, z) \triangleq ((x, y), z)$ [20, с. 17] с первым

элементом x , вторым элементом y и третьим элементом z . Итак, упорядоченный триплет вводится (см. [20, с. 17]), строго говоря, как УП специального вида (соглашение, используемое в теории множеств); иногда это используется в дальнейшем.

Через $\mathcal{P}(H)$ и $\mathcal{P}'(H)$ обозначаем соответственно семейства всех и всех непустых п/м произвольного множества H , а через $\text{Fin}(H)$ — семейство всех непустых конечных п/м H ; $\text{Fin}(H) \subset \mathcal{P}'(H)$. Для конечного множества H имеем $\text{Fin}(H) = \mathcal{P}'(H)$. Если A , B и C — три множества, то [20, с. 17] $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$; поэтому при $x \in A \times B$ и $y \in C$ имеем $(x, y) \in A \times B \times C$. Для любых непустых множеств S и T через T^S обозначаем (см. [19, с. 76]) множество всех отображений (функций) из S в T ; выражения $h \in T^S$ и $h : S \rightarrow T$ отождествимы. Значение отображения в точке области определения (здесь — множество S) обозначается традиционно: при $g \in T^S$ и $s \in S$ имеем $g(s) \in T$. Для непустых множеств S , T , $C \in \mathcal{P}'(S)$ и отображения $h \in T^S$

$$h^1(C) \triangleq \{h(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}'(T)$$

есть образ C при действии h . Следуем традиционным обозначениям для функций нескольких переменных; отметим только, что для непустых множеств S , T , P , Q , отображения $\psi \in Q^{S \times T \times P}$ и точек $h \in S \times T$, $l \in P$ определено $\psi(h, l) = \psi(\text{pr}_1(h), \text{pr}_2(h), l) \in Q$. В качестве Q часто используем $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$, где \mathbb{R} — вещественная прямая. Если H — непустое множество, то $\mathcal{R}_+[H] \triangleq (\mathbb{R}_+)^H$ есть множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на H .

В дальнейшем $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$; при $K \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем $K \oplus m \triangleq \{k + m : k \in K\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$. При $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{p, q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leq k) \& (k \leq q)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$$

(случай $\overline{p, q} = \emptyset$ не исключается). Заметим, что $\overline{1, 0} = \emptyset$ и $\overline{1, m} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq m\}$ при $m \in \mathbb{N}$. Для непустого конечного множества K в виде $|K| \in \mathbb{N}$ имеем мощность K и, в виде $\overline{1, |K|} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \leq |K|\}$, непустой дискретный интервал \mathbb{N} . Если $m \in \mathbb{N}$, то (bi) $\overline{1, m}$ есть (непустое) множество всех перестановок [21, с. 87] дискретного интервала $\overline{1, m}$; при $\alpha \in (\text{bi})\overline{1, m}$ в виде $\alpha^{-1} \in (\text{bi})\overline{1, m}$ имеем перестановку, обратную к α :

$$\alpha(\alpha^{-1}(k)) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = k \quad \forall k \in \overline{1, m}.$$

Отображения, определенные на конечных п/м \mathbb{N}_0 , называем кортежами, используя для них понятие образа непустых п/м области определения; в частности, это касается перестановок. Будем часто использовать индексную форму записи отображений и, в частности, кортежей (семейство с индексом; см. [22, с. 11]). Символы \diamond и \square будут использоваться для обозначения операций склеивания кортежей.

Как и принято в теории множеств (см. [19]), отношением называем множество, состоящее из УП.

2.1. Постановка задачи

В дальнейшем X — непустое множество, $X^0 \in \text{Fin}(X)$ — множество возможных точек старта рассматриваемых процессов, $\mathbf{n} \in N$, $\mathbf{n} \geq 4$; фиксированы множества

$$(2.1) \quad M_1 \in \text{Fin}(X), \dots, M_{\mathbf{n}} \in \text{Fin}(X),$$

называемые мегаполисами, а также отношения

$$(2.2) \quad \mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \dots, \mathbb{M}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{P}'(M_{\mathbf{n}} \times M_{\mathbf{n}}).$$

При каждом $j \in \overline{1, N}$ предполагается, что элементами отношения \mathbb{M}_j являются всякий раз УП, включающая пункт прибытия в мегаполис M_j и пункт отправления из M_j ; само \mathbb{M}_j есть множество всех УП упомянутого вида. В отношении X^0 и мегаполисов (2.1) полагаем, что

$$(2.3) \quad (M_j \cap X^0 = \emptyset \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}) \& (M_p \cap M_q = \emptyset \quad \forall p \in \overline{1, \mathbf{n}} \quad \forall q \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \{p\}).$$

Условия (2.3) типичны для обсуждаемых задач маршрутизации. В виде $\mathcal{M} \triangleq \{M_i : i \in \overline{1, \mathbf{n}}\}$ получаем семейство мегаполисов основной задачи, подлежащих посещению из той или иной точки X^0 . Полагаем, что \mathcal{M} реализуется в виде суммы двух непустых подсемейств. Для их введения фиксируем число $N \in \overline{2, \mathbf{n} - 2}$, в терминах которого полагаем, что

$$(2.4) \quad \mathcal{M}_1 \triangleq \{M_i : i \in \overline{1, N}\}, \quad \mathcal{M}_2 \triangleq \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1 = \{M_i : i \in \overline{N+1, \mathbf{n}}\}$$

(последнее в (2.4) свойство легко проверяется с учетом (2.3)). Каждое из семейств (2.4) содержит не менее двух мегаполисов. Определяя семейства (2.4), рассмотрим задачу о посещении мегаполисов из \mathcal{M} как совокупность двух связанных подзадач: задачу о посещении мегаполисов из \mathcal{M}_1 и задачу о посещении мегаполисов из \mathcal{M}_2 . В этой связи полагаем при $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$, что (см. (2.2))

$$M^{(j)} \triangleq M_{N+j} \in \text{Fin}(X) \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}.$$

Из (2.4) следует, что $\mathcal{M}_2 = \{M^{(j)} : j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}\}$. В связи с упомянутым подходом уместно принять соглашение о том, что условия предшествования, возможно имеющиеся в \mathcal{M} -задаче, локализуются в \mathcal{M}_1 - и \mathcal{M}_2 -задаче. С учетом этих соображений введем множества

$$(\mathbf{K}_1 \in \mathcal{P}(\overline{1, N} \times \overline{1, N})) \& (\mathbf{K}_2 \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n} - N} \times \overline{1, \mathbf{n} - N})),$$

элементы которых (а это УП) называем адресными парами; у каждой такой пары первый элемент называем отправителем, а второй — получателем. Полагаем далее, что

$$(2.5) \quad (\forall \mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_1) \exists z^0 \in \mathbf{K}^0 : \text{pr}_1(z^0) \neq \text{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}^0) \\ \& (\forall \tilde{\mathbf{K}}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_2) \exists z^0 \in \tilde{\mathbf{K}}^0 : \text{pr}_1(z^0) \neq \text{pr}_2(z) \quad \forall z \in \tilde{\mathbf{K}}^0).$$

Условия (2.5) обычно выполняются в практических задачах (см. обсуждение в [8, часть 2]). Так, в случае листовой резки к этому условию сводится следующее традиционное требование: если вырезаемая деталь имеет ряд внутренних контуров, то их резка должна осуществляться раньше по отношению к резке внешнего (объемлющего) контура; см. далее [8, замечание 2.2.1].

Замечание 1. Если ввести $\tilde{\mathbf{K}}_2 \triangleq \{(\text{pr}_1(z) + N, \text{pr}_2(z) + N) : z \in \mathbf{K}_2\}$, то в виде \mathbf{K}_1 и $\tilde{\mathbf{K}}_2$ получим два п/м $\overline{1, \mathbf{n}} \times \overline{1, \mathbf{n}}$. Можно рассматривать случай, когда $\mathbf{K}_1 \subset \tilde{\mathbf{K}}$ и $\tilde{\mathbf{K}}_2 \subset \tilde{\mathbf{K}}$, где $\tilde{\mathbf{K}} \subset \overline{1, \mathbf{n}} \times \overline{1, \mathbf{n}}$, а $\tilde{\mathbf{K}} \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n}} \times \overline{1, \mathbf{n}})$ можно рассматривать как совокупное множество адресных пар и использовать для введения совокупных условий предшествования. Если при этом УП $\hat{z} \in \tilde{\mathbf{K}}$ такова, что $\hat{k} \triangleq \text{pr}_1(\hat{z}) \in \overline{1, N}$ и $\hat{l} \triangleq \text{pr}_2(\hat{z}) \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$, то в рамках данной постановки с выделением \mathcal{M}_1 - и \mathcal{M}_2 -задачи посещение $M_{\hat{k}}$ раньше, чем $M_{\hat{l}}$, будет осуществляться автоматически и специального учета \hat{z} как адресной пары уже не требуется. Если же $\tilde{z} \in \tilde{\mathbf{K}}$ обладает свойством $\tilde{k} \triangleq \text{pr}_1(\tilde{z}) \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$ и $\tilde{l} \triangleq \text{pr}_2(\tilde{z}) \in \overline{1, N}$, то задача с условиями предшествования, определенными посредством $\tilde{\mathbf{K}}$, неразрешима при предваряющем решении \mathcal{M}_1 -задачи и последующем решении \mathcal{M}_2 -задачи. С учетом этих соображений вполне естественным, в рамках данной постановки с выделением \mathcal{M}_1 -задачи и \mathcal{M}_2 -задачи, представляется случай, когда $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_1 \cup \tilde{\mathbf{K}}_2$, т.е. дополнительное рассмотрение перекрестных условий предшествования не требуется, если только рассматривается разрешимая, в условиях вышеупомянутой декомпозиции, совокупная задача.

Пусть $\mathbb{P}_1 \triangleq (\text{bi})[\overline{1, N}]$ и $\mathbb{P}_2 \triangleq (\text{bi})[\overline{1, \mathbf{n} - N}]$; тогда (см. [8, (2.1.5), (2.2.53); 10, (4.4.6)]) имеем с учетом (2.5), что

$$(2.6) \quad \mathcal{A}_1 \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P}_1 \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}_1\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_1),$$

$$(2.7) \quad \mathcal{A}_2 \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P}_2 \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_2).$$

Итак, имеем (при условиях (2.5)) непустые множества допустимых по предшествованию маршрутов (перестановки индексов называем маршрутами) в \mathcal{M}_1 - и \mathcal{M}_2 -задаче. Пусть теперь $\mathbb{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, \mathbf{n}}]$ (множество всех маршрутов полной задачи). При $\alpha \in \mathbb{P}_1$ и $\beta \in \mathbb{P}_2$ (склеенный) маршрут $\alpha \diamond \beta \in \mathbb{P}$ определяется правилом

$$(2.8) \quad \left((\alpha \diamond \beta)(k) \triangleq \alpha(k) \quad \forall k \in \overline{1, N} \right) \& \\ \& \left((\alpha \diamond \beta)(l) \triangleq \beta(l - N) + N \quad \forall l \in \overline{N+1, \mathbf{n}} \right).$$

Здесь говорится о склеивании перестановок специального вида (склейка со сдвигом). Ниже будет введена еще одна операция склеивания, которая будет применяться уже не к перестановкам, а к фрагментам траекторий, в связи с чем там будет использоваться другое обозначение. В (2.8) можно, в частности, использовать маршруты из множеств (2.6), (2.7). С учетом этого получаем, что

$$(2.9) \quad \mathbf{P} \triangleq \{\alpha \diamond \beta : \alpha \in \mathcal{A}_1, \beta \in \mathcal{A}_2\} = \{\text{pr}_1(z) \diamond \text{pr}_2(z) : z \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}).$$

Маршруты из \mathbf{P} (2.9) рассматриваем как допустимые в \mathcal{M} -задаче (исходя из идеи предварительного решения \mathcal{M}_1 -задачи и последующего решения \mathcal{M}_2 -задачи). Следуя [11, (2.11)–(2.13)], естественным образом приходим к траекториям [11, (2.14)]. Для этого полагаем сначала, что $\mathfrak{Z} \triangleq (X \times X)^{\overline{0, \mathbf{n}}}$. Тогда при $x \in X^0$ и $\gamma \in \mathbf{P}$ в виде

$$(2.10) \quad \mathcal{Z}_\gamma[x] \triangleq \left\{ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z} \mid (z_0 = (x, x)) \& (z_\tau \in \mathbb{M}_{\gamma(\tau)} \quad \forall \tau \in \overline{1, \mathbf{n}}) \right\} \in \text{Fin}(\mathfrak{Z})$$

имеем (см. [11, (2.11)–(2.13)]) пучок траекторий, стартующих из x (в редакции [11, 12] из (x, x) ; различие несущественно) и согласованных с γ . Кроме того, при $x \in X^0$

$$(2.11) \quad \tilde{\mathbf{D}}[x] \triangleq \left\{ (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \mid (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x] \right\} \in \text{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z})$$

рассматриваем как множество всех допустимых решений (ДР) в \mathcal{M} -задаче со стартом в x , т.е. допустимых в (\mathcal{M}, x) — задаче. Наконец в виде

$$(2.12) \quad \mathbf{D} \triangleq \left\{ (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0 \mid (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] \right\} \in \text{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0)$$

имеем множество всех ДР \mathcal{M} -задачи, называемых маршрутными процессами (МП). Подробности содержательного характера см. в [11, 12]. Следуя [11, (2.17)], при $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$ введем (см. (2.2)) множества

$$\left(\mathfrak{M}_j \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \in \text{Fin}(M_j) \right) \& \left(\mathbf{M}_j \triangleq \{\text{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \in \text{Fin}(M_j) \right)$$

со свойством $\mathbb{M}_j \subset \mathfrak{M}_j \times \mathbf{M}_j \subset M_j \times M_j$. При $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ имеем, конечно, что

$$(2.13) \quad M^{(j)} = M_{N+j} \in \text{Fin}(X), \quad \mathbb{M}^{(j)} \triangleq \mathbb{M}_{N+j} \in \mathcal{P}'(M^{(j)} \times M^{(j)}), \\ \mathfrak{M}^{(j)} \triangleq \mathfrak{M}_{N+j} \in \text{Fin}(M^{(j)}), \quad \mathbf{M}^{(j)} \triangleq \mathbf{M}_{N+j} \in \text{Fin}(M^{(j)}).$$

Здесь имеем простую перенумерацию множеств, используемых в финальной задаче. Кроме того, с учетом (2.13) полагаем (см. [11, (2.18)]), что \mathbf{M} есть объединение всех множеств $\mathbf{M}^{(i)}$, $i \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$. Пусть, наконец, $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n}})$; множества из \mathfrak{N} называем далее списками. Следуя [11, (2.19)], имеем, что

$$(2.14) \quad \left(\mathbb{X} \triangleq \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathfrak{M}_i \in \text{Fin}(X) \right) \& \left(\mathbf{X} \triangleq \left(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{M}_i \right) \cup X^0 \in \text{Fin}(X) \right);$$

фиксируем в дальнейшем следующие в/з функции:

$$(2.15) \quad \mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}], \quad \dots, \\ c_{\mathbf{n}} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_{\mathbf{n}} \times \mathfrak{N}], \quad f \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbb{M}}].$$

Отметим в этой связи, что при $\gamma \in \mathbf{P}$ и $\tau \in \overline{\mathbb{I}, \mathbf{n}}$ в виде $\gamma^1(\overline{\tau, \mathbf{n}}) \in \mathfrak{N}$ имеем образ дискретного интервала $\overline{\tau, \mathbf{n}}$ при действии γ . Значения \mathbf{c} используем для оценивания внешних перемещений, значения $c_1, \dots, c_{\mathbf{n}}$ — для оценивания внутренних работ, связанных с посещением мегаполисов, а значения f — для оценивания терминального состояния. Заметим, что одним из аргументов функций $\mathbf{c}, c_1, \dots, c_{\mathbf{n}}$ является список заданий. Данная зависимость может возникать в задаче, связанной с листовой резкой, из соображений учета возможности тепловых деформаций деталей при врезке путем введения штрафов. Говоря об общей постановке, отметим, что зависимость от списка заданий может возникать и в силу других причин (например, в задачах последовательного демонтажа радиационно опасных объектов “светят” те и только те объекты, которые не демонтированы на данный момент). Приступаем к построению аддитивного критерия. Итак, следуя [11, (2.21)], имеем при $x \in X^0$, $\gamma \in \mathbf{P}$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$, что

$$(2.16) \quad \mathfrak{C}_\gamma \left[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} \left[\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + \right. \\ \left. + c_{\gamma(t)}(z_t, \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}})) \right] + f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}}));$$

разумеется (см. (2.11)), значение (2.16) определено при $x \in X^0$ и $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]$. При $x \in X^0$ вводим (\mathcal{M}, x) -задачу

$$(2.17) \quad \mathfrak{C}_\gamma \left[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] \rightarrow \min, \quad (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x],$$

для которой определен экстремум $\tilde{V}[x] \in \mathbb{R}_+$ и непустое множество $(\text{sol})[x]$ всех ее оптимальных решений:

$$(2.18) \quad \tilde{V}[x] \triangleq \min_{(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]} \mathfrak{C}_\gamma \left[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(2.19) \quad (\text{sol})[x] \triangleq \left\{ \left(\gamma^0, (z_t^0)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] \mid \mathfrak{C}_{\gamma^0} \left[(z_t^0)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] = \tilde{V}[x] \right\} \in \text{Fin}(\tilde{\mathbf{D}}[x]).$$

В (2.17) оптимизируется сумма затрат на внешние перемещения, внутренние работы и реализацию терминального состояния. В случае листовой резки в первом случае имеется в виду оценивание фрагментов холостого хода, во втором — оценивание собственно резки, реализуемой в режиме рабочего хода; в третьем случае может, например, оцениваться перемещение инструмента к точке “парковки” в режиме холостого хода. В простейшем случае все

упомянутые компоненты могут иметь смысл соответствующих времен исполнения указанных операций. В общем случае имеем задачу на минимум аддитивного критерия (2.16) в классе ДР, определяемых каждое в виде УП маршрут-траектория; (2.19) есть множество всех экстремальных в упомянутом смысле УП маршрут-траектория. Допускаем возможность варьирования $x \in X^0$. Как следствие, возникает основная \mathcal{M} -задача:

$$(2.20) \quad \mathfrak{C}_\gamma \left[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] \rightarrow \min, \quad \left(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x \right) \in \mathbf{D};$$

задаче (2.20) сопоставляется глобальный экстремум \mathbb{V} и непустое множество **SOL** всех оптимальных МП:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \mathbb{V} &\triangleq \min_{(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{D}} \mathfrak{C}_\gamma \left[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] = \\ &= \min_{x \in X^0} \min_{(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]} \mathfrak{C}_\gamma \left[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \right] = \min_{x \in X^0} \tilde{V}[x] \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

$$(2.22) \quad \mathbf{SOL} \triangleq \left\{ (\gamma^0, (z_t^0)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x^0) \in \mathbf{D} \mid \mathfrak{C}_{\gamma^0}[(z_t^0)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathbb{V} \right\} \in \text{Fin}(\mathbf{D})$$

(в (2.21) учтены (2.12) и (2.18)). Элементы множества (2.22) суть оптимальные МП. Они являются триплетами в отличие от элементов (2.19). С зависимостью

$$(2.23) \quad \tilde{V}[\cdot] \triangleq (\tilde{V}[x])_{x \in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0]$$

связываем задачу оптимизации точки старта

$$(2.24) \quad \tilde{V}[x] \rightarrow \min, \quad x \in X^0,$$

в которой (2.23) выступает в роли критерия; экстремум задачи (2.24) совпадает (см. (2.21)) с \mathbb{V} , а экстремальное множество есть

$$(2.25) \quad X_{\text{opt}}^0 \triangleq \left\{ x \in X^0 \mid \tilde{V}[x] = \mathbb{V} \right\} \in \mathcal{P}'(X^0).$$

В (2.24) оптимизируется точка старта при том условии, что в случае конкретного ее выбора ДР в виде УП маршрут-траектория также выбирается оптимальным. Результатом является реализация глобального экстремума.

Предложение 1. Если $x \in X_{\text{opt}}^0$ и $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in (\text{sol})[x]$, то $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{SOL}$.

Доказательство получается очевидной комбинацией (2.19), (2.22) и (2.25). Действительно, здесь речь идет фактически о последовательной реализации в (2.21): сначала минимум по ДР типа элементов (2.11) при фиксации точки старта, а затем — по самой точке старта (см. (2.24), (2.25)).

3. Предваряющая и финальная задачи маршрутизации

Как уже отмечалось, для решения задачи (2.20) здесь используем (по сути дела) декомпозицию в совокупность \mathcal{M}_1 -задачи и \mathcal{M}_2 -задачи. Данная декомпозиция будет в некотором смысле оптимальной: будем находить (2.21) и какой-либо МП из множества (2.22). Данный оптимальный способ (см. [11, 12]) обсудим на содержательном уровне после формулировки упомянутых частичных задач. При этом постановка \mathcal{M}_1 -задачи будет зависеть от набора параметров, определяемых при решении \mathcal{M}_2 -задачи. По этой причине сначала мы обсудим \mathcal{M}_2 -задачу (задачу верхнего уровня) или финальную задачу. Однако в самой ее постановке присутствует объект, связанный очень просто с \mathcal{M}_1 -задачей. С него и начнем. Речь идет о множестве точек старта в \mathcal{M}_2 -задаче. Итак, полагая

$$(3.1) \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 \triangleq \{\text{pr}_1(h) : h \in \mathbf{K}_1\},$$

получаем [8, (4.9.9), предложение 4.9.3], что $\overline{1, N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1 \in \mathcal{P}'(\overline{1, N})$, и определяем (см. (2.14)) в виде

$$(3.2) \quad X^{00} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1, N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1} M_i \in \text{Fin}(\mathbf{X})$$

множество всех возможных точек старта \mathcal{M}_2 -задачи, в которой $M^{(1)}, \dots, M^{(n-N)}$ определяют семейство мегаполисов, подлежащих посещению.

Множество X^{00} играет роль “входной переменной” для \mathcal{M}_2 -задачи. С момента построения X^{00} (3.2) она является вполне определенной с точки зрения набора параметров. Далее осуществляется ее решение в части определения нужных фрагментов (слоев) функции Беллмана (построение оптимального решения \mathcal{M}_2 -задачи откладывается) и, как результат, нахождение функции экстремума, определенной на X^{00} . Данная функция определяет затем терминальную компоненту аддитивного критерия \mathcal{M}_1 -задачи и в этом смысле имеет смысл “выходной переменной” \mathcal{M}_2 -задачи. \mathcal{M}_2 -задача участвует в построении критерия предваряющей \mathcal{M}_1 -задачи. В результате получаем возможность решения \mathcal{M}_1 -задачи (критерий полностью определен). Осуществляем теперь построение нужных фрагментов (слоев) функции Беллмана данной задачи и, в частности, функции экстремума, определенной на X^0 . Этого достаточно, как показано в [12], для нахождения \mathbb{V} и оптимальной точки старта, для которой затем стандартно строится \mathcal{M}_1 -оптимальное ДР, фиксируется его финишная точка, из которой реализуется оптимальное \mathcal{M}_2 -решение в виде УП маршрут-траектория, которое склеивается с \mathcal{M}_1 -решением и образует оптимальное ДР полной задачи с фиксированным стартом. Дополняя последним склеенное (покомпонентно) ДР, получаем оптимальный МП. Такова общая схема исследования; к ней еще вернемся, а сейчас напомним некоторые понятия, связанные с финальной задачей.

При $j \in \overline{1, n-N}$ с мегаполисом $M^{(j)}$ связывается отношение $\mathbb{M}^{(j)}$, для которого (см. (2.13))

$$(3.3) \quad \left(\mathfrak{M}^{(j)} = \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}^{(j)}\} \in \text{Fin}(M^{(j)}) \right) \& \\ \& \left(\mathbf{M}^{(j)} = \{\text{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}^{(j)}\} \in \text{Fin}(M^{(j)}) \right).$$

Посредством \mathcal{A}_2 определяется множество всех допустимых маршрутов \mathcal{M}_2 -задачи. Пусть $\mathfrak{Z}^* \triangleq (X \times X)^{\overline{0, \mathbf{n}-N}}$; при $x \in X^{00}$ и $\beta \in \mathcal{A}_2$ в виде

$$(3.4) \quad \mathcal{Z}_\beta^*[x] \triangleq \left\{ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^* \mid (z_0 = (x, x)) \& \right. \\ \left. \& (z_t \in \mathbb{M}^{(\beta(t))} \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}-N}) \right\} \in \text{Fin}(\mathfrak{Z}^*)$$

имеем пучок траекторий \mathcal{M}_2 -задачи, стартующих из x и согласованных с β . Из (2.13) и (2.14) имеем, что $\mathbf{M}^{(j)} \subset \mathbf{X}$ при $j \in \overline{1, \mathbf{n}-N}$; кроме того, в силу (2.14) и (3.2) $X^{00} \subset \mathbf{X}$. Из (2.13), (2.14), (3.3) и (3.4) получаем при $x \in X^{00}$, $\beta \in \mathcal{A}_2$, $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$ и $\tau \in \overline{1, \mathbf{n}-N}$, что $\text{pr}_1(z_\tau) \in \mathbb{X}$ и $\text{pr}_2(z_\tau) \in \mathbf{X}$. Поэтому (см. (2.13)) при $x \in X^{00}$, $\beta \in \mathcal{A}_2$, $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$ и $\tau \in \overline{1, \mathbf{n}-N}$ определено $\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{\tau-1}), \text{pr}_1(z_\tau), K) \in \mathbb{R}_+$ и $c_{N+\beta(\tau)}(z_\tau, K) \in \mathbb{R}_+$, где $K \in \mathfrak{N}$. С учетом (3.4) имеем при $x \in X^{00}$, что

$$(3.5) \quad \mathbf{D}^*[x] \triangleq \left\{ (\beta, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathcal{A}_2 \times \mathfrak{Z}^* \mid (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x] \right\} \in \\ \in \text{Fin}(\mathcal{A}_2 \times \mathfrak{Z}^*)$$

есть множество всех ДР (\mathcal{M}_2, x)-задачи, т.е. \mathcal{M}_2 -задачи со стартом в x . Пусть $\mathfrak{N}^* \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n}-N})$ (семейство всех непустых п/м $\overline{1, \mathbf{n}-N}$); при $K \in \mathfrak{N}^*$ имеем список

$$(3.6) \quad K \oplus N = \{k + N : k \in K\} \in \mathfrak{N}$$

основной задачи. Легко видеть (см. [11, (4.9)]), что при $x \in X^{00}$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$ определено значение

$$(3.7) \quad \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} \left[\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}) \oplus N) + \right. \\ \left. + c_{N+\beta(t)}(z_t, \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}) \oplus N) \right] + f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}-N})) \in \mathbb{R}_+.$$

Для представления данных значений введем преобразование функций стоимости с целью получения выражений, подобных [14, (3.16)]. Для этого сначала введем

$$(3.8) \quad \left(\mathbb{X}^* \triangleq \left(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}-N} \mathfrak{M}^{(i)} \right) \in \text{Fin}(X) \right) \& \\ \& \left(\mathbf{X}^* \triangleq \left(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}-N} \mathbf{M}^{(i)} \right) \cup X^{00} \in \text{Fin}(X) \right)$$

со свойством $\mathbb{X}^* \subset \mathbb{X}$ и $\mathbf{X}^* \subset \mathbf{X}$ (учитываем (2.13), (2.14), (3.2)), после чего $\mathbf{c}^* \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^* \times \mathbb{X}^* \times \mathfrak{N}^*]$ определяем правилом (см. (2.15), (3.6))

$$(3.9) \quad \mathbf{c}^*(x, y, K) \triangleq \mathbf{c}(x, y, K \oplus N) \quad \forall x \in \mathbf{X}^* \quad \forall y \in \mathbb{X}^* \quad \forall K \in \mathfrak{N}^*.$$

Посредством (3.8), (3.9) определены стоимости внешних перемещений \mathcal{M}_2 -задачи (см. (3.7)). При $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ определяем $c_j^* \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}^{(j)} \times \mathfrak{N}^*]$ посредством правила

$$(3.10) \quad c_j^*(z, K) \triangleq c_{N+j}(z, K \oplus N) \quad \forall z \in \mathbb{M}^{(j)} \quad \forall K \in \mathfrak{N}^*;$$

посредством (3.10) определяются стоимости внутренних работ для \mathcal{M}_2 -задачи. Наконец, терминальную компоненту аддитивного критерия полагаем совпадающей с f (см. (2.15)). Итак, в виде $(\mathbf{c}^*, c_1^*, \dots, c_{\mathbf{n}-N}^*, f)$ имеем кортеж в/з функций стоимости \mathcal{M}_2 -задачи. Тогда при $x \in X^{00}$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$ выражение (3.7) сводится к виду

$$(3.11) \quad \mathfrak{C}_\beta^* \left[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \right] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n} - N} \left[\mathbf{c}^*(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n} - N})) \right) + \\ + c_{\beta(t)}^*(z_t, \beta^1(\overline{t, \mathbf{n} - N})) \right] + f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n} - N})) \in \mathbb{R}_+.$$

Тем самым определен аддитивный критерий \mathcal{M}_2 -задачи. При $x \in X^{00}$ получаем (\mathcal{M}_2, x) -задачу

$$(3.12) \quad \mathfrak{C}_\beta^* \left[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \right] \rightarrow \min, \quad \left(\beta, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \right) \in \mathbf{D}^*[x],$$

которой сопоставляется экстремум $\tilde{V}^*[x] \in \mathbb{R}_+$ и (непустое) множество $(\text{sol})^*[x]$ всех оптимальных решений:

$$(3.13) \quad \tilde{V}^*[x] \triangleq \min_{(\beta, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}}) \in \mathbf{D}^*[x]} \mathfrak{C}_\beta^* \left[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \right] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(3.14) \quad (\text{sol})^*[x] \triangleq \left\{ \left(\beta, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \right) \in \mathbf{D}^*[x] \mid \mathfrak{C}_\beta^* \left[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \right] = \tilde{V}^*[x] \right\} \in \\ \in \text{Fin}(\mathbf{D}^*[x]).$$

Посредством (3.13) определена важная функция $\tilde{V}^*[\cdot]$ вида

$$(3.15) \quad x \mapsto \tilde{V}^*[x] : X^{00} \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

Рассмотрим (3.14), (3.15) как своеобразные результаты \mathcal{M}_2 -задачи; с использованием (3.15) сконструируем аддитивный критерий \mathcal{M}_1 -задачи, к рассмотрению которой сейчас приступаем.

Пусть $\mathfrak{Z}^\natural \triangleq (X \times X)^{\overline{0, N}}$; при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathcal{A}_1$ в виде

$$(3.16) \quad \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x] \triangleq \left\{ (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{Z}^\natural \mid (z_0 = (x, x)) \& (z_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)} \quad \forall \tau \in \overline{1, N}) \right\} \in \\ \in \text{Fin}(\mathfrak{Z}^\natural)$$

имеем пучок траекторий \mathcal{M}_1 -задачи, стартовых из x и согласованных с маршрутом α . Введем в рассмотрение множества

$$(3.17) \quad \left(\mathbb{X}^\natural \triangleq \bigcup_{i=1}^N \mathfrak{M}_i \in \text{Fin}(X) \right) \& \left(\mathbf{X}^\natural \triangleq \left(\bigcup_{i=1}^N \mathbf{M}_i \right) \cup X^0 \in \text{Fin}(X) \right),$$

для которых (см.(2.14)) $\mathbb{X}^\natural \subset \mathbb{X}$ и $\mathbf{X}^\natural \subset \mathbf{X}$. При $x \in X^0$ определяем множество всех ДР (\mathcal{M}_1, x)-задачи (т.е. \mathcal{M}_1 -задачи со стартом в x):

$$(3.18) \quad \mathbf{D}^\natural[x] \triangleq \left\{ \left(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \right) \in \mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^\natural \mid (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x] \right\} \in \text{Fin}(\mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^\natural).$$

Отметим весьма очевидное, но важное свойство, позволяющее “привязывать” \mathcal{M}_2 -задачу к \mathcal{M}_1 -задаче. А именно (см. [11, предложение 3.3]): если $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x]$, то

$$(3.19) \quad \text{pr}_2(z_N) \in X^{00}.$$

Теперь последовательно введем функции стоимости, формирующие аддитивный критерий \mathcal{M}_1 -задачи. Начнем с терминальной компоненты, фактически отождествляя ее с функцией $\tilde{V}^*[\cdot]$ (3.15). Точнее, полагая, что \mathbf{M}^\natural есть объединение всех множеств \mathbf{M}_i , $i \in \overline{1, N}$, принимаем, что $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}^\natural]$ определяется правилом

$$(3.20) \quad \left(\mathbf{f}(x) \triangleq \tilde{V}^*[x] \quad \forall x \in X^{00} \right) \& \left(\mathbf{f}(x) \triangleq 0 \quad \forall x \in \mathbf{M}^\natural \setminus X^{00} \right).$$

Второе выражение в (3.20) несущественно и введено для согласования с [14]. Пусть $\mathfrak{N}^\natural \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$ (семейство всех непустых п/м $\overline{1, N}$). Полагаем с учетом (2.15), что $\mathbf{c}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^\natural \times \mathbb{X}^\natural \times \mathfrak{N}^\natural]$ определяется условиями

$$(3.21) \quad \mathbf{c}^\natural(z, K) \triangleq \mathbf{c}(z, K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \quad \forall z \in \mathbf{X}^\natural \times \mathbb{X}^\natural \quad \forall K \in \mathfrak{N}^\natural.$$

При $j \in \overline{1, N}$ функцию $\mathbf{c}_j^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_j \times \mathfrak{N}^\natural]$ определяем правилом

$$(3.22) \quad \mathbf{c}_j^\natural(z, K) \triangleq c_j(z, K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \quad \forall z \in \mathbb{M}_j \quad \forall K \in \mathfrak{N}^\natural.$$

Итак, посредством (3.20)–(3.22) определен кортеж $(\mathbf{c}, c_1^\natural, \dots, c_N^\natural, \mathbf{f})$ в/з функций стоимости \mathcal{M}_1 -задачи. При $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x]$ полагаем, что (см. (3.20)–(3.22))

$$(3.23) \quad \mathbf{c}_\alpha^\natural[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] \triangleq \sum_{t=1}^N \left[\mathbf{c}^\natural(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t, N})) + \right. \\ \left. + c_{\alpha(t)}^\natural(z_t, \alpha^1(\overline{t, N})) \right] + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_N)) = \sum_{t=1}^N \left[\mathbf{c}^\natural(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t, N})) + \right. \\ \left. + c_{\alpha(t)}^\natural(z_t, \alpha^1(\overline{t, N})) \right] + \tilde{V}^*[\text{pr}_2(z_N)];$$

здесь учтено (3.19) и (3.20). Если $x \in X^0$, то (\mathcal{M}_1, x) -задачу определяем как

$$(3.24) \quad \mathfrak{C}_\alpha^\natural \left[(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \right] \rightarrow \min, \quad \left(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \right) \in \mathbf{D}^\natural[x];$$

данной задаче сопоставляем экстремум $V^\natural[x]$ и (непустое) множество $(\text{sol})^\natural[x]$ всех оптимальных решений:

$$(3.25) \quad V^\natural[x] \triangleq \min_{(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x]} \mathfrak{C}_\alpha^\natural \left[(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \right] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(3.26) \quad (\text{sol})^\natural[x] \triangleq \left\{ \left(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \right) \in \mathbf{D}^\natural[x] \mid \mathfrak{C}_\alpha^\natural \left[(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \right] = V^\natural[x] \right\} \in \text{Fin}(\mathbf{D}^\natural[x]).$$

В виде $x \mapsto V^\natural[x] : X^0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ имеем функцию $V^\natural[\cdot]$ экстремума \mathcal{M}_1 -задачи, аргументом которой является точка старта. Выделяем для отдельного рассмотрения задачу

$$(3.27) \quad V^\natural[x] \rightarrow \min, \quad x \in X^0,$$

которой сопоставляется экстремум $\mathbb{V}^\natural \in \mathbb{R}_+$ и (непустое) множество $X_{\text{opt}}^\natural \in \text{Fin}(X^0)$ всех оптимальных точек старта:

$$(3.28) \quad \mathbb{V}^\natural \triangleq \min_{x \in X^0} V^\natural[x] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(3.29) \quad X_{\text{opt}}^\natural \triangleq \left\{ x \in X^0 \mid V^\natural[x] = \mathbb{V}^\natural \right\} \in \text{Fin}(X^0).$$

Итак, введены две взаимосвязанные задачи, ориентированные на (декомпозиционное) решение основной задачи.

4. Структура решения на функциональном уровне (содержательное обсуждение)

В настоящем кратком разделе наметим схему оптимального решения (основной) \mathcal{M} -задачи, соответствующую построениям двух предыдущих разделов; ограничиваемся здесь описанием логической цепочки. Фактически речь идет об алгоритме на функциональном уровне.

Шаг 1. Используя (3.2), определить множество X^{00} возможных точек старта \mathcal{M}_2 -задачи.

Шаг 2. Сформировать \mathcal{M}_2 -задачу в виде системы (\mathcal{M}_2, x) -задач (3.12), где $x \in X^{00}$, определить при этом функцию $\tilde{V}^*[\cdot]$ (3.15) экстремума, которая используется для построения терминальной компоненты критерия \mathcal{M}_1 -задачи (см. (3.20)).

Шаг 3. Сформировать \mathcal{M}_1 -задачу в виде системы (\mathcal{M}_1, x) -задач (3.24), где $x \in X^0$, найти функцию экстремума $V^{\natural}[\cdot]$, экстремум \mathbb{V}^{\natural} задачи (3.27) и некоторую (оптимальную) точку старта $x^0 \in X_{\text{opt}}^{\natural}$; также определить оптимальное в (\mathcal{M}_1, x^0) -задаче решение из множества (3.26), где $x = x^0$, называя его \mathcal{M}_1 -решением.

Шаг 4. Принять финишную точку x^{00} \mathcal{M}_1 -решения, являющуюся элементом X^{00} (см. (3.19)), за стартовую в \mathcal{M}_2 -задаче. После этого построить оптимальное решение (\mathcal{M}_2, x^{00}) -задачи, получая \mathcal{M}_2 -решение.

Шаг 5. Склеить \mathcal{M}_1 -решение и \mathcal{M}_2 -решение (раздельно склеиваются маршруты и траектории), получая в совокупности с x^0 оптимальный МП.

Важно отметить равенство $\mathbb{V} = \mathbb{V}^{\natural}$, установленное в [11, 12]. Это позволяет более просто реализовать \mathbb{V} в условиях, когда не требуется определять оптимальный МП, а важно установить только глобальный экстремум и оптимальную точку старта. В этом случае этапы 1) и 2) сохраняются, а этап 3) сводится к нахождению функции экстремума $V^{\natural}[\cdot]$, минимизация которой на X^0 как раз и доставит требуемое значение \mathbb{V} и точку старта, его реализующую.

Заметим, что в качестве инструмента реализации этапов 1)–4) используется широко понимаемое ДП.

Введем в рассмотрение процедуру естественного склеивания траекторий. Данная процедура отличается от склеивания перестановок; она относится к траекториям, а это — совсем другие объекты. В этой связи введем новое обозначение. Для этого сначала полагаем, что при $\mathbf{z}' \in \mathfrak{Z}^{\natural}$ и $\mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z}^*$ кортеж $\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z}$ определяется правилом

$$(4.1) \quad \left((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(\tau) \triangleq \mathbf{z}'(\tau) \quad \forall \tau \in \overline{0, N} \right) \& \\ \& \left((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(\tau) \triangleq \mathbf{z}''(\tau - N) \quad \forall \tau \in \overline{N+1, \mathbf{n}} \right).$$

В частности, в качестве \mathbf{z}' и \mathbf{z}'' в (4.1) могут использоваться траектории. При этом (см. [11, предложение 6.4]) $\forall x \in X^0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_1 \quad \forall \beta \in \mathcal{A}_2 \quad \forall \mathbf{z}' \in \mathcal{Z}_{\alpha}^{\natural}[x] \quad \forall \mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_{\beta}^*[\text{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]$

$$(4.2) \quad \mathbf{z}' \square \mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_{\alpha \diamond \beta}[x].$$

Легко видеть, что (см. (3.19)) $\text{pr}_2(z_N) \in X^{00}$ при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha \diamond \beta}[x]$. Напомним здесь же [11, предложение 6.5]: если $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$, $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha \diamond \beta}[x]$ и кортеж $(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*$ определяется правилом

$$\left(z_0^* \triangleq (\text{pr}_2(z_N), \text{pr}_2(z_N)) \right) \& \left(z_{\tau}^* \triangleq z_{\tau+N} \quad \forall \tau \in \overline{1, \mathbf{n}-N} \right),$$

то непременно реализуется включение

$$(4.3) \quad (z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_{\beta}^*[\text{pr}_2(z_N)].$$

С учетом (4.2), (4.3) устанавливается следующее уже упоминавшееся положение (см. [12, теорема 1]):

$$(4.4) \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}^\natural;$$

в (4.4) следует учитывать (3.28) и [12, (6.12)]. В связи с логической цепочкой 1)–5) отметим следующее положение.

Предложение 2.

Пусть $x^0 \in X_{\text{opt}}^\natural$, $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in (\text{sol})^\natural[x^0]$ и $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}) \in (\text{sol})^*[\text{pr}_2(y_N)]$. Тогда решение

$$(4.5) \quad \left(\xi \diamond \eta, (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}} \right) \in \tilde{\mathbf{D}}[x^0]$$

таково, что

$$(4.6) \quad \mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta} \left[(y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}} \right] = \mathbb{V}.$$

Предложение 2 (доказательство — в Приложении) указывает фактически конкретный способ построения оптимального МП.

В самом деле, пусть выполнены все условия предложения 2 (имеются в виду условия на x^0 , $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}})$, $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}})$). Тогда в силу (2.12) и (4.5) имеем, поскольку $x^0 \in X^0$ (см. (3.29)), что

$$(4.7) \quad \left(\xi \diamond \eta, (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}, x^0 \right) \in \mathbf{D}$$

(получили допустимый МП со свойством (4.6)). В силу (2.22) и (4.6) имеем теперь, что

$$(4.8) \quad \left(\xi \diamond \eta, (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}, x^0 \right) \in \mathbf{SOL},$$

т.е. построен оптимальный МП. Заметим здесь же, что в силу (2.18), (2.21), (4.4)–(4.6) $\tilde{V}[x^0] = \mathbb{V}$, а потому (см. (2.25)) $x^0 \in X_{\text{opt}}^0$. В следующих разделах обсудим реализацию этапов 1)–5) в свете (4.4) и (4.8).

Отметим в дополнение к положениям [11, 12] ряд свойств, подобных, в части конструкций склеивания, обсуждаемому в предложении 2 и важных для последующего применения ДП.

Предложение 3. Если $x \in X^0$, $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x]$ и $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}) \in \mathbf{D}^*[\text{pr}_2(y_N)]$, то

$$\mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta} \left[(y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}} \right] = \mathfrak{C}_\xi^\natural \left[(y_i)_{i \in \overline{0, N}} \right] - \tilde{V}^* \left[\text{pr}_2(y_N) \right] + \mathfrak{C}_\eta^* \left[(\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}} \right].$$

Доказательство проводится в существенной части подобно обоснованию предложения 2.

Следствие 1. Если $x \in X^0$, $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x]$ и $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in (\text{sol})^*[\text{pr}_2(y_N)]$, то

$$\mathfrak{C}_{\xi \circ \eta} \left[(y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \right] = \mathfrak{C}_{\xi}^{\natural} \left[(y_i)_{i \in \overline{0, N}} \right].$$

Следствие 2. Если $x \in X^0$, $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in (\text{sol})^{\natural}[x]$ и $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in (\text{sol})^*[\text{pr}_2(y_N)]$, то

$$\mathfrak{C}_{\xi \circ \eta} \left[(y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \right] = V^{\natural}[x].$$

Предложение 4. Справедливо равенство $X_{\text{opt}}^0 = X_{\text{opt}}^{\natural}$.

Доказательство приведено в Приложении. Из (4.4) и предложения 4 следует, что при таком построении \mathcal{M}_1 -задача воспроизводит наиболее важные элементы исходной \mathcal{M} -задачи: глобальный экстремум (2.21) и экстремальное множество задачи (2.24). Отметим еще одно полезное, хотя и не используемое в дальнейшем, положение о совпадении функций экстремума.

Предложение 5. Если $x \in X^0$, то $V^{\natural}[x] = \tilde{V}[x]$.

Обоснование осуществляется по схеме, подобной доказательству предложения 4.

5. Финальная задача

В настоящем разделе обсудим вопрос о том, как именно реализовать этапы 1)–5), применяя аппарат широко понимаемого ДП (см. [13, 14] и др.). Рассмотрение начнем с решения \mathcal{M}_2 -задачи, следуя этапу 2) и придерживаясь алгоритмического варианта изложения, подобного [13, 14]. Речь пойдет о построении слоев функции Беллмана, где активно используются условия предшествования. Данные конструкции неоднократно использовались авторами и ранее, а потому вводятся в достаточно краткой форме с необходимыми ссылками. Прежде всего введем оператор вычеркивания (заданий из списка) \mathbf{I}^* , действующий в \mathfrak{N}^* по правилу: при $K \in \mathfrak{N}^*$ и $\Xi^*[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K}_2 \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K)\}$ полагаем, что множество $\mathbf{I}^*(K) \in \mathfrak{N}^*$ есть

$$(5.1) \quad \mathbf{I}^*(K) \triangleq K \setminus \{\text{pr}_2(z) : z \in \Xi^*[K]\}$$

(определение \mathbf{I}^* (5.1) соответствует [8, (2.2.27), (2.2.28)]). С использованием \mathbf{I}^* определяются существенные [13, 14] списки заданий. Полагаем, что

$$(5.2) \quad \mathfrak{S}^* \triangleq \{K \in \mathfrak{N}^* \mid \forall z \in \mathbf{K}_2 \ (\text{pr}_1(z) \in K) \implies (\text{pr}_2(z) \in K)\};$$

множества — элементы (5.2) — назовем существенными списками в \mathcal{M}_2 -задаче. При $s \in \overline{1, \mathbf{n}-N}$ полагаем $\mathfrak{S}_s^* \triangleq \{K \in \mathfrak{S}^* \mid s = |K|\}$. Тогда $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N}^* = \{\overline{1, \mathbf{n}-N}\}$ (синглетон) и при $\hat{\mathbf{K}}_2 \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}_2\}$

$$\mathfrak{S}_1^* = \{\{t\} : t \in \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \hat{\mathbf{K}}_2\}.$$

Кроме того, имеем (см. [14, (4.6)]) при $s \in \overline{2, \mathbf{n} - N}$

$$(5.3) \quad \mathfrak{S}_{s-1}^* = \{ K \setminus \{t\} : K \in \mathfrak{S}_s^*, t \in \mathbf{I}^*(K) \}.$$

Посредством (5.3) определена следующая рекуррентная процедура:

$$(5.4) \quad \mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N}^* \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N-1}^* \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathfrak{S}_1^*.$$

Регулярный шаг процедуры (5.4) реализуется посредством (5.3).

Располагая множествами \mathfrak{S}_s^* , $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$, приступаем к построению слоев пространства позиций, обозначаемых через $D_0^*, D_1^*, \dots, D_{\mathbf{n}-N}^*$. При этом

$$(5.5) \quad D_0^* \triangleq \{(x, \emptyset) : x \in \hat{\mathcal{M}}^*\},$$

где $\hat{\mathcal{M}}^*$ отождествляется с объединением всех множеств $\mathbf{M}^{(j)}$, $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \hat{\mathbf{K}}_2$. Кроме того, полагаем, что

$$(5.6) \quad D_{\mathbf{n}-N}^* \triangleq \{(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) : x \in X^{00}\}.$$

Рассмотрим построение D_s^* при $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N - 1}$; сначала при всяком $K \in \mathfrak{S}_s^*$ конструируем последовательно

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_s^*(K) &\triangleq \{j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}_{s+1}^*\}, \quad \mathcal{M}_s^*[K] \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s^*(K)} \mathbf{M}^{(j)}, \\ \mathbb{D}_s^*[K] &\triangleq \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s^*[K]\} \end{aligned}$$

(реализуется процедура: $\mathcal{J}_s^*(K) \rightarrow \mathcal{M}_s^*[K] \rightarrow \mathbb{D}_s^*[K]$), после чего полагаем

$$(5.7) \quad D_s^* \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_s^*} \mathbb{D}_s^*[K].$$

Каждый слой D_j^* , $j \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$, есть непустое множество (см. [8, предложение 4.9.3]). Отметим важное свойство [11, (5.5)]. При $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$, $(x, K) \in D_s^*$, $j \in \mathbf{I}^*(K)$ и $z \in \mathbf{M}^{(j)}$

$$(5.8) \quad (\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}^*$$

(см. также [8, предложение 4.9.4]).

Следующий шаг — построение слоев функции Беллмана: $v_0^*, v_1^*, \dots, v_{\mathbf{n}-N}^*$. Используем уравнение Беллмана (см. [23, теорема 5.1]) и сужения получающейся функции Беллмана на слои пространства позиций. Данные построения можно свести к рекуррентной процедуре

$$(5.9) \quad v_0^* \rightarrow v_1^* \rightarrow \dots \rightarrow v_{\mathbf{n}-N}^*.$$

При этом $v_0^* \in \mathcal{R}_+[D_0^*]$ определяется правилом

$$(5.10) \quad v_0^*(x, \emptyset) \triangleq f(x) \quad \forall x \in \hat{\mathcal{M}}^*.$$

Регулярный шаг процедуры реализуется следующим образом, учитывающим (5.8): при $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ определяем $v_s^* \in \mathcal{R}_+[D_s^*]$ на основе $v_{s-1}^* \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}^*]$ по правилу [11, (5.6)], т.е.

$$(5.11) \quad v_s^*(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}^*(K)} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} \left[\mathbf{c}^*(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j^*(z, K) + \right. \\ \left. + v_{s-1}^*(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \right] \quad \forall (x, K) \in D_s^*.$$

Для финальной функции $v_{\mathbf{n}-N}^* \in \mathcal{R}_+[D_{\mathbf{n}-N}^*]$ имеем, что

$$(5.12) \quad \tilde{V}^*[x] = v_{\mathbf{n}-N}^*(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \quad \forall x \in X^{00}.$$

Замечание 2. Подчеркнем, что в случае, когда требуется определить $\tilde{V}^*[\cdot]$ и не требуется построение оптимального в \mathcal{M}_2 -задаче маршрутного процесса, реализацию (5.9) можно осуществить с перезаписью слоев (отметим построения [24] для несколько иной задачи). В этом случае предполагается, что при $s \in \overline{1, N - 1}$ в памяти вычислителя находится слой v_{s-1}^* функции Беллмана, который после определения v_s^* уничтожается и заменяется слоем v_s^* . Если при этом $s \leq N - 2$, то для построения v_{s+1}^* используется слой v_s^* . Данное простое обстоятельство непосредственно следует из (5.11) и доставляет некоторую экономию ресурсов памяти (см. [25]).

После построения $v_{\mathbf{n}-N}^*$ приступаем к решению \mathcal{M}_1 -задачи, используя (5.12). Итак, переходим к этапу 3), используя (3.20) для определения терминальной компоненты аддитивного критерия.

6. Предваряющая задача

Посредством (3.20) и (5.12) находим функцию \mathbf{f} (теперь существенно, что

$$\mathbf{f}(x) \triangleq v_{\mathbf{n}-N}^*(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \quad \forall x \in X^{00},$$

что позволяет явным образом определить \mathbf{f}). Дальнейшие построения аналогичны построениям для \mathcal{M}_2 -задачи и потому излагаются в краткой форме; имеется в виду реализация ДП в духе [13, 14] (в основе находятся конструкции [8, §4.9]).

Вводим оператор вычеркивания \mathbf{I}^\sharp , действующий в \mathfrak{N}^\sharp : при $K \in \mathfrak{N}^\sharp$ и

$$\Xi^\sharp[K] \triangleq \{ z \in \mathbf{K}_1 \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K) \}$$

полагаем, что множество $\mathbf{I}^\sharp(K)$ есть

$$(6.1) \quad \mathbf{I}^\sharp(K) \triangleq K \setminus \{ \text{pr}_2(z) : z \in \Xi^\sharp[K] \}.$$

Далее рассматривается построение существенных списков заданий в \mathcal{M}_1 -задаче; пусть

$$(6.2) \quad \mathfrak{S}^{\natural} \triangleq \{ K \in \mathfrak{N}^{\natural} \mid \forall z \in \mathbf{K}_1 \text{ (pr}_1(z) \in K) \implies (\text{pr}_2(z) \in K) \},$$

множества — элементы семейства (6.2) — называем существенными списками в \mathcal{M}_1 -задаче. При $s \in \overline{1, N}$ полагаем, что

$$\mathfrak{S}_s^{\natural} \triangleq \{ K \in \mathfrak{S}^{\natural} \mid s = |K| \}.$$

Легко видеть, что $\mathfrak{S}_N^{\natural} = \{ \overline{1, N} \}$ (синглетон). Далее, при $\hat{\mathbf{K}}_1 \triangleq \{ \text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}_1 \}$, получаем, что $\mathfrak{S}_1^{\natural} = \{ \{t\} : t \in \overline{1, N} \setminus \hat{\mathbf{K}}_1 \}$. Легко видеть, что при $s \in \overline{2, N}$

$$(6.3) \quad \mathfrak{S}_{s-1}^{\natural} = \{ K \setminus \{j\} : K \in \mathfrak{S}_s^{\natural}, j \in \mathbf{I}^{\natural}(K) \}.$$

Посредством (6.3) определена рекуррентная процедура

$$(6.4) \quad \mathfrak{S}_N^{\natural} \longrightarrow \mathfrak{S}_{N-1}^{\natural} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathfrak{S}_1^{\natural}$$

((6.3) определяет регулярный шаг процедуры (6.4)). Располагая множествами $\mathfrak{S}_s^{\natural}$, $s \in \overline{1, N}$, конструируем слои пространства позиций, обозначаемые через $D_0^{\natural}, D_1^{\natural}, \dots, D_N^{\natural}$. Полагаем, что

$$(6.5) \quad \left(D_0^{\natural} \triangleq \{ (x, \emptyset) : x \in X^{00} \} \right) \& \left(D_N^{\natural} \triangleq \{ (x, \overline{1, N}) : x \in X^0 \} \right),$$

получая крайние слои пространства позиций. Если $s \in \overline{1, N-1}$, то сначала при $K \in \mathfrak{S}_s^{\natural}$ последовательно определяем

$$(6.6) \quad \mathcal{J}_s^{\natural}(K) \triangleq \{ j \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}_{s+1}^{\natural} \}, \quad \mathcal{M}_s^{\natural}(K) \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s^{\natural}(K)} \mathbf{M}_j,$$

$$\mathbb{D}_s^{\natural}[K] \triangleq \{ (x, K) : x \in \mathcal{M}_s^{\natural}(K) \}$$

(реализуется процедура $\mathcal{J}_s^{\natural}(K) \rightarrow \mathcal{M}_s^{\natural}(K) \rightarrow \mathbb{D}_s^{\natural}[K]$); слой D_s^{\natural} определяем правилом

$$(6.7) \quad D_s^{\natural} \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_s^{\natural}} \mathbb{D}_s^{\natural}[K].$$

Итак, все слои $D_0^{\natural}, D_1^{\natural}, \dots, D_N^{\natural}$ построены; при этом все эти слои — непустые множества (см. [8, предложение 4.9.3]). Отметим, что при $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in D_s^{\natural}$, $j \in \mathbf{I}^{\natural}(K)$ и $z \in \mathbb{M}_j$

$$(6.8) \quad (\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}^{\natural}.$$

Конструкция (6.6)–(6.8) используется при построении слоев функции Беллмана: последовательно определяем функции $v_0^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_0^{\natural}]$, $v_1^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_1^{\natural}]$, ..., $v_N^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_N^{\natural}]$, совпадающие с сужениями функции Беллмана на слои пространства позиций. При этом

$$(6.9) \quad v_0^{\natural}(x, \emptyset) \triangleq \tilde{V}^*[x] = v_{\mathbf{n}-N}^*(x, \overline{\mathbf{1}, \mathbf{n}-N}) \quad \forall x \in X^{00}.$$

Если $s \in \overline{\mathbf{1}, N}$ и функция v_{s-1}^{\natural} уже построена, то с учетом (6.8) полагаем, что $v_s^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_s^{\natural}]$ такова, что

$$(6.10) \quad v_s^{\natural}(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbb{I}^{\natural}(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \left[c^{\natural}(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j^{\natural}(z, K) + v_{s-1}^{\natural}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \right] \quad \forall (x, K) \in D_s.$$

Получили следующую рекуррентную процедуру:

$$(6.11) \quad v_0^{\natural} \longrightarrow v_1^{\natural} \longrightarrow \dots \longrightarrow v_N^{\natural};$$

регулярный шаг процедуры (6.11) характеризуется посредством (6.10). При этом

$$(6.12) \quad v_N^{\natural}(x, \overline{\mathbf{1}, N}) = V^{\natural}[x] \quad \forall x \in X^0.$$

Это свойство следует из того, что все функции в (6.11) суть сужения функции Беллмана; см. также (6.5). Располагая функцией v_N^{\natural} , определяем (см. (3.28), (3.29)) \mathbb{V}^{\natural} и точку из $X_{\text{opt}}^{\natural}$. При этом в силу (3.28), (4.4) и (6.12)

$$(6.13) \quad \mathbb{V} = \min_{x \in X^0} v_N^{\natural}(x, \overline{\mathbf{1}, N}),$$

а точка $x^0 \in X_{\text{opt}}^{\natural}$ (см. (4.4), предложение 4) определяется из следующего условия: точка $x^0 \in X^0$ такова, что

$$(6.14) \quad \mathbb{V} = v_N^{\natural}(x^0, \overline{\mathbf{1}, N}).$$

Посредством (6.13), (6.14) определили глобальный экстремум и оптимальную точку старта, не прибегая к построению МП. Тем самым реализована существенная часть этапа 3). Отметим, что логика замечания 2 полностью применима к процедуре (6.11): для получения \mathbb{V} и x^0 может использоваться вариант с перезаписью слоев. По сути дела, имеем единую склеенную процедуру

$$(6.15) \quad (v_0^* \longrightarrow v_1^* \longrightarrow \dots \longrightarrow v_{\mathbf{n}-N}^*) \rightarrow (v_0^{\natural} \longrightarrow v_1^{\natural} \longrightarrow \dots \longrightarrow v_N^{\natural}),$$

где склеивание реализуется посредством (6.9).

Рассмотрим сейчас построение оптимального МП, полагая при этом, что владеем всеми функциями, участвующими в (6.15), т.е. процедура (6.15)

реализована с сохранением упомянутых функций в памяти вычислителя. Следуя 3), начинаем с определения \mathcal{M}_1 -решения. Итак, имеем $\mathbb{V} \in \mathbb{R}_+$ и $x^0 \in X_{\text{opt}}^{\natural}$ (см. (6.13), (6.14)). Учитываем (4.4) и предложение 4. Полагаем, что $y_0 \triangleq (x^0, x^0)$, получая по выбору x^0 , что (см. (6.5))

$$(6.16) \quad (\text{pr}_2(y_0), \overline{1, N}) = (x^0, \overline{1, N}) \in D_N^{\natural}.$$

Из (6.10) и (6.14) имеем равенство

$$(6.17) \quad \mathbb{V} = \min_{j \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \left[\mathbf{c}^{\natural}(x^0, \text{pr}_1(z), \overline{1, N}) + c_j^{\natural}(z, \overline{1, N}) + v_{N-1}^{\natural}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}) \right].$$

С учетом (6.16), (6.17) выбираем $\xi_1 \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1, N})$ и $y_1 \in \mathbb{M}_{\xi_1}$, для которых

$$(6.18) \quad \mathbb{V} = \mathbf{c}^{\natural}(x^0, \text{pr}_1(y_1), \overline{1, N}) + c_{\xi_1}^{\natural}(y_1, \overline{1, N}) + v_{N-1}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}).$$

Из (6.8) и (6.16) вытекает, что $(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) \in D_{N-1}^{\natural}$. Поэтому согласно (6.10) имеем равенство

$$(6.19) \quad v_{N-1}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1, N} \setminus \{\xi_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} \left[\mathbf{c}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \text{pr}_1(z), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + c_j^{\natural}(z, \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + v_{N-2}^{\natural}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; j\}) \right].$$

С учетом (6.19) выбираем $\xi_2 \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1, N} \setminus \{\xi_1\})$ и $y_2 \in \mathbb{M}_{\xi_2}$, для которых

$$(6.20) \quad v_{N-1}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) = \mathbf{c}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \text{pr}_1(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + c_{\xi_2}^{\natural}(y_2, \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + v_{N-2}^{\natural}(\text{pr}_2(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\});$$

при этом согласно (6.8) $(\text{pr}_2(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}) \in D_{N-2}^{\natural}$. Согласно (6.18) и (6.20) имеет место равенство

$$(6.21) \quad \mathbb{V} = \mathbf{c}^{\natural}(x^0, \text{pr}_1(y_1), \overline{1, N}) + \mathbf{c}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \text{pr}_1(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + c_{\xi_1}^{\natural}(y_1, \overline{1, N}) + c_{\xi_2}^{\natural}(y_2, \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + v_{N-2}^{\natural}(\text{pr}_2(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}).$$

Замечание 3. При $N = 2$ из (6.21) легко извлекается свойство оптимальности УП $((\xi_i)_{i \in \overline{1, 2}}, (y_i)_{i \in \overline{0, 2}})$ в (\mathcal{M}_1, x^0) -задаче.

В общем случае $N \geq 2$ процедуры, подобные (6.18), (6.20), следует продолжать вплоть до исчерпания $\overline{1, N}$. В результате будут построены кортежи $\xi \triangleq (\xi_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathcal{A}_1$ и $(y_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\xi}^{\natural}[x^0]$ со свойством

$$(6.22) \quad \mathbf{e}_{\xi}^{\natural}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}}] = \mathbb{V}.$$

Тогда (см. (3.18)) $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x^0]$. При этом согласно (3.25), (3.28), (4.4) и (6.22)

$$\mathbb{V}^{\natural} \leq V^{\natural}[x^0] \leq \mathbf{C}_{\xi}^{\natural}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}}] = \mathbb{V} = \mathbb{V}^{\natural},$$

а потому $\mathbf{C}_{\xi}^{\natural}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}}] = V^{\natural}[x^0] = \mathbb{V} = \mathbb{V}^{\natural}$. Из (3.26) имеем теперь свойство

$$(6.23) \quad (\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in (\text{sol})^{\natural}[x^0].$$

С другой стороны, поскольку $V^{\natural}[x^0] = \mathbb{V}^{\natural}$, имеем из (3.29), что $x^0 \in X_{\text{opt}}^{\natural}$. Следовательно (см. (6.23)),

$$(6.24) \quad x^0 \in X_{\text{opt}}^{\natural} : (\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in (\text{sol})^{\natural}[x^0].$$

Итак, этап 3) завершен построением \mathcal{M}_1 -решения (6.23).

7. Композиционное решение полной задачи: оптимальный маршрутный процесс

В настоящем разделе завершаем этапы 4), 5). Напомним в этой связи, что $\text{pr}_2(y_N) \in X^{00}$ согласно (3.19). С учетом этого полагаем, что $x^{00} \triangleq \text{pr}_2(y_N)$, получая, что

$$(7.1) \quad x^{00} \triangleq \text{pr}_2(y_N) \in X^{00}.$$

Напомним, что функции $v_0^*, v_1^*, \dots, v_{\mathbf{n}-N}^*$ известны; особо отметим (5.12). С учетом (7.1) полагаем, что

$$\hat{y}_0 \triangleq (x^{00}, x^{00}) = (\text{pr}_2(y_N), \text{pr}_2(y_N));$$

$\hat{y}_0 \in X^{00} \times X^{00}$. При этом согласно (5.6)

$$(7.2) \quad (x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = (\text{pr}_2(\hat{y}_0), \overline{1, \mathbf{n} - N}) \in D_{\mathbf{n}-N}^*.$$

С учетом (5.11) и (7.2) получаем следующее равенство:

$$(7.3) \quad v_{\mathbf{n}-N}^*(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} \left[\mathbf{c}^*(x^{00}, \text{pr}_1(z), \overline{1, \mathbf{n} - N}) + c_j^*(z, \overline{1, \mathbf{n} - N}) + v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{j\}) \right].$$

С учетом (7.3) выбираем $\eta_1 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N})$ и $\hat{y}_1 \in \mathbb{M}^{(\eta_1)}$, для которых

$$(7.4) \quad v_{\mathbf{n}-N}^*(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \mathbf{c}^*(x^{00}, \text{pr}_1(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N}) + c_{\eta_1}^*(\hat{y}_1, \overline{1, \mathbf{n} - N}) + v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}),$$

где $(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) \in D_{\mathbf{n}-N-1}^*$ согласно (5.8). Из (5.11) имеем поэтому следующее равенство:

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) &= \\ &= \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} \left[\mathbf{c}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \text{pr}_1(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + \right. \\ &\quad \left. + c_j^*(z, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{\mathbf{n}-N-2}^*(\text{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; j\}) \right]. \end{aligned}$$

С учетом этого выбираем $\eta_2 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\hat{y}_2 \in \mathbb{M}^{(\eta_2)}$, для которых

$$\begin{aligned} (7.5) \quad &v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) = \\ &= \mathbf{c}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \text{pr}_1(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ &+ c_{\eta_2}^*(\hat{y}_2, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{\mathbf{n}-N-2}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}), \end{aligned}$$

причем $(\text{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \in D_{\mathbf{n}-N-2}^*$ согласно (5.8). Отметим, что из (7.4), (7.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} (7.6) \quad &v_{\mathbf{n}-N}^*(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \mathbf{c}^*(x^{00}, \text{pr}_1(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N}) + \\ &+ \mathbf{c}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \text{pr}_1(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ &+ c_{\eta_1}^*(\hat{y}_1, \overline{1, \mathbf{n} - N}) + c_{\eta_2}^*(\hat{y}_2, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ &+ v_{\mathbf{n}-N-2}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \end{aligned}$$

(легко видеть, что при $\mathbf{n} = N + 2$ из (7.6) вытекает оптимальность решения $((\eta_i)_{i \in \overline{1, 2}}, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, 2}})$ в (\mathcal{M}_2, x^{00}) -задаче; здесь имеется аналогия с замечанием 3). В общем случае $N \in \overline{2, \mathbf{n} - 2}$ процедуры выбора (а на самом деле, решения локальных экстремальных задач), подобные (7.4), (7.5), следует продолжать вплоть до исчерпывания $\overline{1, \mathbf{n} - N}$. В итоге будут построены кортежи $\eta \triangleq (\eta_i)_{i \in \overline{1, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{A}_2$ и $(\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_\eta^*[x^{00}]$, для которых (см. (5.12))

$$(7.7) \quad \mathfrak{C}_\eta^*[(\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = v_{\mathbf{n}-N}^*(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) = \tilde{V}^*[x^{00}].$$

Поскольку при этом (см. (3.5)) $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x^{00}]$, имеем из (3.14) и (7.7), что

$$(7.8) \quad (\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in (\text{sol})^*[x^{00}].$$

С учетом (7.1) и (7.8) имеем, конечно, свойство

$$(7.9) \quad (\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in (\text{sol})^*[\text{pr}_2(y_N)].$$

С учетом (6.24), (7.9) и предложения 2 получаем, что

$$(\xi \diamond \eta, (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x^0]$$

и (см. (4.6)) $\mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}] = \mathbb{V}$. Тогда в силу (2.12), (3.29) и (6.24) триплет

$$(\xi \diamond \eta, (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}, x^0) \in \mathbf{D}$$

непрерывно является оптимальным МП, т.е. справедливо (4.8). Итак, реализована двухэтапная процедура

$$\begin{aligned} [x^0 \rightarrow (\xi_1, y_1) \rightarrow \dots \rightarrow (\xi_N, y_N)] \rightarrow \\ \rightarrow [x^{00} = \text{pr}_2(y_N) \rightarrow (\eta_1, \hat{y}_1) \rightarrow \dots \rightarrow (\eta_{n-N}, \hat{y}_{n-N})], \end{aligned}$$

приводящая к оптимальному МП (4.8). При этом $x^0 \in X_{\text{opt}}^0$ в силу предложения 4, т.е. x^0 есть оптимальная точка старта в смысле (2.24).

8. Вычислительный эксперимент (предваряющая резка длинномерных деталей)

Рассмотрим модельный пример, касающийся вопросов листовой резки деталей на машинах с ЧПУ. Полагаем в настоящем разделе, что $X = [0, a] \times [0, b]$, где $a > 0$, $b > 0$ — два заданных числа. Предполагается заданным (для листа X) раскройный план. Имеется \mathbf{n} попарно дизъюнктивных контуров, подлежащих резке. Мегаполисы сопоставлены контурам по стандартному правилу: для каждого контура задается эквидистанта, на которой располагаются возможные точки врезки и отвечающие им точки выключения инструмента. Внешние перемещения (между мегаполисами, а также из точки старта к мегаполисам) осуществляются в режиме холостого хода, т.е. “быстро”. Каждое перемещение от точки врезки до точки начала реза на контуре и, после окончания реза, к точке выключения инструмента реализуются в режиме рабочего хода, т.е. “медленно”. Оптимизируем совокупное время, исключая собственно время резки самих контуров, которое является одним и тем же для всех вариантов решения задачи. При этом, однако, учитываются соображения, связанные с тепловыми деформациями и приводящие к использованию штрафов за нарушение требований по эффективному отводу тепла; см. [14, разделы 5, 6]. Такое использование приводит (см. [14, раздел 6]) к функциям стоимости с зависимостью от списка заданий.

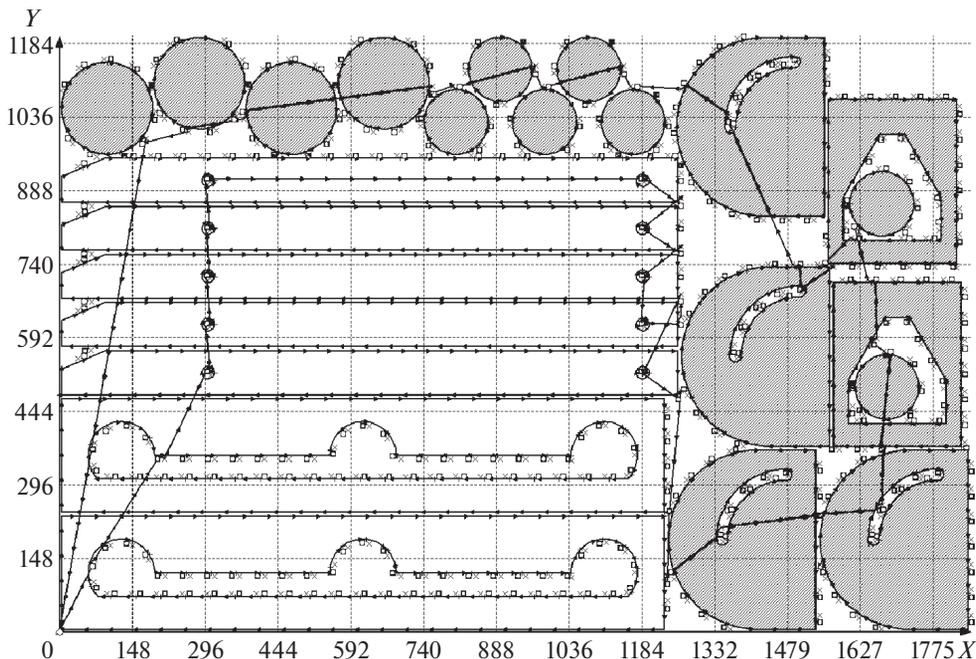
Условия предшествования в совокупной задаче определяются соображениями, связанными с вложенностью контуров и деталей. Так, у детали, имеющей внутренние контуры, их резка должна предшествовать резке внешнего контура; аналогичное требование относится к резке вложенных деталей (см. [10, § 1.3.2]). Таким образом, определяется множество $\tilde{\mathbf{K}}$ (см. замечание 1) совокупных адресных пар. Предполагаем, однако, что семейство \mathcal{M} мегаполисов разбито в дизъюнктивную сумму подсемейств \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 (см. раздел 2), с учетом что в \mathcal{M}_1 включены мегаполисы, отвечающие контурам длинномерных деталей (см. раздел 1). Отметим, что имеются и другие варианты выделения контуров для первоочередной резки, см. в этой связи [10, § 1.3.3]). Предполагается, что $\tilde{\mathbf{K}}$ -ограничение сведено к варианту, определяемому мно-

жествами \mathbf{K}_1 и $\tilde{\mathbf{K}}_2$ замечания 1, где $\tilde{\mathbf{K}}_2$ определяется посредством рационального выбора \mathbf{K}_2 . Эти соображения легко реализовать, опираясь на правила вложенности (грубо говоря, используя распределение по объемлющим деталям и их контурам). При этом, конечно, построение \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 требует предварительной работы, связанной с реализацией условий предшествования, отвечающих \mathcal{M}_1 - и \mathcal{M}_2 -задаче. Полагаем далее этот (весьма несложный) этап постановки выполненным.

Допускаем возможность выбора различных точек старта в интересах оптимизации аддитивного критерия, задавая конечное множество X^0 ; как правило, X^0 является п/м границы листа X . Это множество является одновременно множеством возможных точек старта \mathcal{M}_1 -задачи; множество X^{00} , исполняющее аналогичную роль для \mathcal{M}_2 -задачи, формируется алгоритмом на этапе 1).

Вычислительный эксперимент. Вычисления производились на персональной ЭВМ с процессором Intel i5-11300H с 8Гб оперативной памяти, работающей под управлением Windows 11 (64-bit). Для разработки программы были использованы язык C++, компилятор MinGW и интерфейсная библиотека Qt. Далее приводятся данные примера (непосредственно координаты точек контуров, точек врезки, точек начала реза контура и точек выключения инструмента не приводятся из соображений экономии места). Количество контуров — 42, количество деталей — 24, количество адресных пар — 20. Все контуры разделены на два кластера. В первый вошли контуры семи длинномерных деталей (19 контуров). Во второй — контуры семнадцати компактных деталей (23 контура). Для простоты здесь предполагается, что X^0 — одноэлементное множество (синглетон), соответствующее началу координат. Значения f отвечают вычислению времени холостого хода при возвращении инструмента в начало координат (исследуется более понятный случай замкнутой задачи). В примере учитывались тепловые ограничения, описанные в [14, разделы 5, 6]. Речь идет о формировании специальных областей завершения реза с выделением порогового отношения (значения), характеризующего долю сплошного металла в каждой такой области. Именно, область завершения реза имеет длину 100 мм и ширину 25 мм. Пороговое значение для использования штрафа равно 0,5 от площади области завершения реза.

На рисунке указано размещение на листе деталей, подлежащих резке, и траектория процесса, полученная в результате вычислительного эксперимента. Ромб в начале координат — точка начала и завершения движения. Квадраты — точки врезки. Крестики — точки выключения инструмента. Плюсы на контурах — точки начала и завершения реза. Траектория холостого хода — набор отдельных линий. Именно, линия от точки старта до точки врезки для первого контура, линии от точки выключения инструмента для предыдущего контура до точки врезки следующего контура и линия от точки выключения инструмента для последнего контура до точки завершения движения. Траектория резки — набор линий, каждая из которых состоит из линии, идущей от точки врезки до точки начала реза контура, самого контура и линии, идущей от точки завершения реза контура до точки выключения инструмента.



Результат работы алгоритма.

Подробное описание постановки данной конкретной задачи соответствует [14, разделы 5, 6], и здесь ограничимся совсем краткими напоминаниями. Как уже отмечалось, оптимизируется совокупное время (единицы измерения — секунды). Все штрафные константы совпадают с 1 000 000. Полученный результат (значение V) 97,724 существенно меньше данной константы, что означает соблюдение всех ограничений, связанных с отводом тепла (общие соображения на эту тему приведены в начале раздела). Время счета составило 7 мин 8 с, что вполне приемлемо с точки зрения решения реальных практических задач, при том что 42 контура соответствуют задаче ощутимой размерности. Полезно отметить (см. [26, раздел 5]), что для задач меньшей размерности при решении по методу ДП без применения декомпозиции время счета существенно выше (при $N = 30$ и $|K| = 20$ в [26, раздел 5] получено время счета 51 мин 58 с; имеется в виду вариант стандартной резки). Таким образом, прием, использованный в настоящей работе, является актуальным с точки зрения учета технологических ограничений и позволяет надеяться на возможность применения в практических задачах.

В заключение отметим, что в [26, Введение] приведен детальный обзор исследований, связанных с листовой резкой на машинах с ЧПУ.

9. Заключение

В работе построен метод решения экстремальной задачи маршрутизации с выделенной системой первоочередных заданий. В основе исследования нахо-

дится декомпозиция с выделением предваряющей и финальной экстремальных задач и применением в каждой из упомянутых частичных задач широко понимаемого динамического программирования. Это позволяет решать маршрутные задачи ощутимой размерности за приемлемое время. Одно из возможных применений разработанного метода касается задачи управления инструментом при фигурной листовой резке деталей зонами на машинах с ЧПУ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство предложения 2. Учитываем (4.2),

$$(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \triangleq (y_t)_{t \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_{\xi \diamond \eta}[x^0].$$

Поскольку $\xi \diamond \eta \in \mathbf{P}$, получаем (4.5), т.е.

$$(II.1) \quad (\xi \diamond \eta, (\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x^0].$$

При этом согласно (3.26) и (3.21) $\mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_t)_{t \in \overline{0, N}}] = V^{\natural}[x^0] = \mathbb{V}^{\natural}$, причем $\text{pr}_2(y_N) \in X^{00}$ в силу (3.19); $\tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)] \in \mathbb{R}_+$. Кроме того,

$$(II.2) \quad \mathfrak{C}_{\eta}^*[(\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)].$$

Заметим, что в силу (3.9)–(3.11) имеем, однако, что

$$(II.3) \quad \mathfrak{C}_{\eta}^*[(\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} \left[\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{y}_{t-1}), \text{pr}_1(\hat{y}_t), \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}) \oplus N) + \right. \\ \left. + c_{N+\eta(t)}(\hat{y}_t, \eta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}) \oplus N) \right] + f(\text{pr}_2(\hat{y}_{\mathbf{n}-N})).$$

Кроме того, по выбору ξ и $(y_t)_{t \in \overline{0, N}}$ имеем, что (см. (3.21), (3.22))

$$(II.4) \quad \mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_t)_{t \in \overline{0, N}}] = \sum_{t=1}^N \left[\mathbf{c}(\text{pr}_2(y_{t-1}), \text{pr}_1(y_t), \xi^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) + \right. \\ \left. + c_{\xi(t)}(y_t, \xi^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \right] + \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)].$$

Наконец, с учетом (2.16) и (II.1) получаем равенство

$$(II.5) \quad \mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \sum_{t=1}^N \left[\mathbf{c}(\text{pr}_2(\omega_{t-1}), \text{pr}_1(\omega_t), (\xi \diamond \eta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + \right. \\ \left. + c_{(\xi \diamond \eta)(t)}(\omega_t, (\xi \diamond \eta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) \right] + \sum_{t=N+1}^{\mathbf{n}} \left[\mathbf{c}(\text{pr}_2(\omega_{t-1}), \text{pr}_1(\omega_t), (\xi \diamond \eta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + \right. \\ \left. + c_{(\xi \diamond \eta)(t)}(\omega_t, (\xi \diamond \eta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) \right] + f(\text{pr}_2(\omega_{\mathbf{n}})).$$

С учетом (4.1), (П.5) и определения $(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}$ получаем, что

$$\begin{aligned}
 (\text{П.6}) \quad \mathfrak{C}_{\xi \circ \eta}[(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] &= \sum_{t=1}^N \left[\mathbf{c}(\text{pr}_2(y_{t-1}), \text{pr}_1(y_t), \xi^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) + \right. \\
 &\quad \left. + c_{\xi(t)}(y_t, \xi^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \right] + \\
 &\quad + \sum_{t=N+1}^{\mathbf{n}} \left[\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{y}_{t-N-1}), \text{pr}_1(\hat{y}_{t-N}), \eta^1(\overline{t-N, \mathbf{n}-N}) \oplus N) + \right. \\
 &\quad \left. + c_{\eta(t-N)+N}(\hat{y}_{t-N}, \eta^1(\overline{t-N, \mathbf{n}-N}) \oplus N) \right] + f(\text{pr}_2(\hat{y}_{\mathbf{n}-N})).
 \end{aligned}$$

Учтена цепочка равенств $\text{pr}_2(\omega_N) = \text{pr}_2(y_N) = \text{pr}_2(\hat{y}_0)$ (см. (3.4), (3.5), (3.14)). Из (П.3), (П.4) и (П.6) вытекает, что

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{C}_{\xi \circ \eta}[(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] &= \mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_t)_{t \in \overline{0, N}}] - \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)] + \\
 &\quad + \sum_{\tau=1}^{\mathbf{n}-N} \left[\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{y}_{\tau-1}), \text{pr}_1(\hat{y}_{\tau}), \eta^1(\overline{\tau, \mathbf{n}-N}) \oplus N) + \right. \\
 &\quad \left. + c_{\eta(\tau)+N}(\hat{y}_{\tau}, \eta^1(\overline{\tau, \mathbf{n}-N}) \oplus N) \right] + f(\text{pr}_2(\hat{y}_{\mathbf{n}-N})) = \\
 &= \mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_t)_{t \in \overline{0, N}}] - \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)] + \mathfrak{C}_{\eta}^*[(\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}],
 \end{aligned}$$

а потому с учетом (П.2) получаем равенство

$$(\text{П.7}) \quad \mathfrak{C}_{\xi \circ \eta}[(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_t)_{t \in \overline{0, N}}],$$

где по выбору $(\xi, (y_t)_{t \in \overline{0, N}})$ имеем из (3.26), что $\mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_t)_{t \in \overline{0, N}}] = V^{\natural}[x^0] = \mathbb{V}^{\natural}$. В силу (4.4) и (П.7) получаем цепочку равенств

$$\mathfrak{C}_{\xi \circ \eta}[(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathbb{V}^{\natural} = \mathbb{V};$$

с учетом определения $(\omega_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}$ получаем теперь (4.6), где (4.5) выполнено в силу (П.1).

Доказательство предложения 4. Пусть $x_* \in X_{\text{opt}}^{\natural}$, т.е. $x_* \in X^0$ и $V^{\natural}[x_*] = \mathbb{V}$ (см. (4.4)). Используя (3.27), выберем

$$(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in (\text{sol})^{\natural}[x_*],$$

получая $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x_*]$ со свойством $\mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}}] = V^{\natural}[x_*]$ (оптимальное в (\mathcal{M}_1, x_*) -задаче ДР). Тогда (см. (4.4)) $\mathfrak{C}_{\xi}^{\natural}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}}] = \mathbb{V}$. С учетом (3.15) выберем

$$(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in (\text{sol})^*[\text{pr}_2(y_N)],$$

получая $(\eta, (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[\text{pr}_2(y_N)]$ со свойством

$$\mathfrak{C}_{\eta}^*[(\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)].$$

Из предложения 2 следует, что $(\xi \diamond \eta, (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x_*]$ таково, что справедливо (4.6). С учетом (2.18) имеем неравенство

$$\tilde{V}[x_*] \leq \mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}] = \mathbb{V},$$

где $\mathbb{V} \leq \tilde{V}[x_*]$ в силу (2.21). В итоге $\tilde{V}[x_*] = \mathbb{V}$, а потому (см. (2.25)) $x_* \in X_{\text{opt}}^0$. Итак,

$$(II.8) \quad X_{\text{opt}}^{\natural} \subset X_{\text{opt}}^0.$$

Пусть $x^* \in X_{\text{opt}}^0$, т.е. $x^* \in X^0$ и $\tilde{V}[x^*] = \mathbb{V}$. С учетом (2.19) выберем оптимальное ДР

$$(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, n}}) \in (\text{sol})[x^*];$$

тогда $\mathfrak{C}_{\alpha}[(z_i)_{i \in \overline{0, n}}] = \tilde{V}[x^*] = \mathbb{V}$. При этом $\alpha \in \mathbf{P}$, а потому $\alpha = \alpha_1 \diamond \alpha_2$, где $\alpha_1 \in \mathcal{A}_1$ и $\alpha_2 \in \mathcal{A}_2$. Поэтому (см. (2.11)) $(z_i)_{i \in \overline{0, n}} \in \mathcal{Z}_{\alpha_1 \diamond \alpha_2}[x^*]$. Тогда $(z_i)_{i \in \overline{0, n}} \in \mathcal{Z}_{\alpha_1}^{\natural}[x^*]$, а потому (см. (3.18))

$$(\alpha_1, (z_i)_{i \in \overline{0, n}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x^*].$$

Введем кортеж $(\tilde{z}_i)_{i \in \overline{0, n-N}}$ в $X \times X$ посредством правила

$$(\tilde{z}_0 \triangleq (\text{pr}_2(z_N), \text{pr}_2(z_N))) \& (\tilde{z}_t \triangleq z_{N+t} \quad \forall t \in \overline{1, n-N}).$$

Легко видеть, что $(\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, n-N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha_2}^*[\text{pr}_2(z_N)]$ (см. (4.3)), а потому (см. (3.5))

$$(\alpha_2, (\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, n-N}}) \in \mathbf{D}^*[\text{pr}_2(z_N)].$$

При этом $(z_t)_{t \in \overline{0, n}} = (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \square (\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, n-N}}$. Поэтому согласно предложению 3 и (4.4)

$$\mathbb{V}^{\natural} = \mathfrak{C}_{\alpha}[(z_t)_{t \in \overline{0, n}}] = \mathfrak{C}_{\alpha_1}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] - \tilde{V}^*[\text{pr}_2(z_N)] + \mathfrak{C}_{\alpha_2}^*[(\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, n-N}}],$$

где (см. (3.14)) $\tilde{V}^*[\text{pr}_2(z_N)] \leq \mathfrak{C}_{\alpha_2}^*[(\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, n-N}}]$. Получаем теперь, что

$$\mathfrak{C}_{\alpha_1}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] = \mathbb{V}^{\natural} - \mathfrak{C}_{\alpha_2}^*[(\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, n-N}}] + \tilde{V}^*[\text{pr}_2(z_N)] \leq \mathbb{V}^{\natural}.$$

Тогда $\mathbb{V}^{\natural} \leq \mathfrak{C}_{\alpha_1}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] \leq \mathbb{V}^{\natural}$. В итоге $\mathfrak{C}_{\alpha_1}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] = \mathbb{V}^{\natural}[x^*] = \mathbb{V}^{\natural}$, а потому (см. (3.29)) $x^* \in X_{\text{opt}}^{\natural}$, чем завершается проверка свойства $X_{\text{opt}}^0 \subset X_{\text{opt}}^{\natural}$, а следовательно (см. (II.8)), и равенства $X_{\text{opt}}^0 = X_{\text{opt}}^{\natural}$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gutin G., Punnen A.* The traveling salesman problem and its variations. Berlin: Springer, 2002.
2. *Cook W.J.* In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2012.
3. *Гимади Э.Х., Хачай М.Ю.* Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
4. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера // *АиТ.* 1989. № 9. С. 3–33; № 10. С. 3–29; № 11. С. 3–26.
5. *Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К.* Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // *Экономика и математические методы.* 1965. Т. 1. № 1. С. 94–107.
6. *Беллман Р.* Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере / *Кибернетический сборник.* М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
7. *Хелд М., Карп Р. М.* Применение динамического программирования к задачам упорядочения / *Кибернетический сборник.* М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
8. *Ченцов А.Г.* Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижев. ин-т компьют. исслед., 2008.
9. *Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Сесекин А.Н.* Задачи маршрутизации перемещений с неаддитивным агрегированием затрат, М.: Ленанд, 2021.
10. *Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы. Екатеринбург: УрФУ, 2020.
11. *Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Динамическое программирование в задаче маршрутизации: декомпозиционный вариант // *Вестник российских университетов. Математика.* 2022. Т. 27. № 137. С. 95–124.
12. *Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Экстремальная двухэтапная задача маршрутизации и процедуры на основе динамического программирования // *Тр. Ин-та мат. и механики УрО РАН.* 2022. Т. 28. № 2. С. 215–248.
13. *Ченцов А.Г.* Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования. *АиТ.* 2014. № 4. С. 170–190.
14. *Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // *АиТ.* 2016. № 11. С. 96–117.
15. *Петунин А.А.* О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // *Вестн. Уфим. гос. авиац. техн. ун-та.* 2009. Т. 13. № 2. С. 280–286.
16. *Фроловский В.Д.* Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ // *Информ. технологии в проектировании и производстве.* 2005. № 4. С. 63–66.
17. *Wang G.G., Xie S.Q.* Optimal process planning for a combined punch-and-laser cutting machine using ant colony optimization // *Int. J. Product. Res.,* 43:11, Jun. (2005), P. 2195–2216.
18. *Lee M.-K., Kwon K.-B.* Cutting path optimization in CNC cutting processes using a two-step genetic algorithm // *Int. J. Product. Res.* 2006. No. 44. P. 5307–5326.

19. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
20. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
21. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2002.
22. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
23. Ченцов А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82.
24. Lawler E.L. Efficient implementation of dynamic programming algorithms for sequencing problems, Report BW106, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1979. P. 1–16.
25. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. К вопросу о нахождении значения маршрутной задачи с ограничениями // Проблемы управления и информатики. 2016. № 1. С. 41–54.
26. Петушин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Оптимальная маршрутизация в задачах последовательного обхода мегаполисов при наличии ограничений // Челяб. физ.-мат. журн. 2022. Т. 7. № 2. С. 209–233.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 17.10.2022

После доработки 24.01.2023

Принята к публикации 26.01.2023

Заметки, хроника, информация

Памяти Бориса Теодоровича Поляка

DOI: 10.31857/S0005231023050082, EDN: AJIJUL

... Последний раз мы виделись с Борисом в начале октября 2022 г. Борис выглядел очень плохо, ушел раньше положенного времени. Через день-другой я позвонил ему справиться о его здоровье. Он потряс меня сообщением о том, что у него обнаружили рак IV степени, излечить который невозможно. Потрясенный я молчал. И тогда Борис сказал, что прожил очень интересную и плодотворную жизнь и скорый конец его не страшит.

Хочу вспомнить здесь кое-что об этой замечательной личности и его судьбе.

Мы ровесники и могли познакомиться еще на школьных мехматских кружках. Но этого не произошло. Мы могли бы учиться на одном курсе, поступая в МГУ в 1952 г., но в то время большую роль играли анкетные ограничения. Бориса провалили на собеседовании, он подробно описал то, как это происходило. О многом из той поры тяжело вспоминать.

Борис оказался среди тех, кто должен был искать себе какой-то технический ВУЗ для получения высшего образования. Он поступил в Московский институт стали. Борис принадлежит к очень небольшому числу тех, кто был отброшен от мехмата, но стал настоящим математиком. Он очень хорошо учился, но не переставал мечтать стать математиком. На момент окончания им ВУЗа времена изменились. В течение двух лет он работал в Институте теоретической и экспериментальной физики (ИТЭФ), где ведущую роль играл А.С. Кронрод.

Александр Семенович Кронрод — выдающаяся личность, он был очень талантливым ученым и организатором. Кронрод считал себя последним учеником Николая Николаевича Лузина. Саша Кронрод еще до войны начинал как чистый математик. С началом войны добровольцем пошел на фронт, был дважды ранен, в 1943 г. комиссован по состоянию здоровья и в 1944 г. возобновил обучение на мехмате МГУ. Он стал создавать теорию функций двух переменных, составившую основное содержание его кандидатской диссертации, за которую в 1949 г. ему была, присуждена степень доктора физико-математических наук. Вскоре после этого Кронрод оставил теоретическую математику, по-видимому, осознав, что науку второй половины XX века ждут грандиозные перемены, связанные с рождением новых вычислительных средств. В 50-х гг. он стал возглавлять лабораторию в ИТЭФ, предназначенную для решения на компьютерах физических задач, связанных с созданием атомного оружия.

Борис Поляк проработал в ИЭФ около двух лет, в полной мере освоив идеологию кибернетики, информатики и вычислительной математики. В 1960 г. поступил в аспирантуру мехмата МГУ. Мы познакомились в 1961 г., когда оба поехали через Псков в Ленинград, где состоялся IV (и последний) Всесоюзный математический съезд. Борис сразу подключился к нашей университетской компании, в которую входили Р.Л. Добрушин, Ф.А. Березин, В.А. Успенский, Н.Д. Введенская, Р.А. Минлос, Л.Р. Волевич, А.А. Зализняк и его жена Е.В. Падучева. . . Борис сразу стал принимать участие в лыжных и байдарочных прогулках по Подмоскovie, а со следующего года стал ходить в большие походы.

В 1963 г., летом мы с ним участвовали в необычайно интересном путешествии по Восточным Саянам. И потом на протяжении многих лет Борис ходил в далекие походы. Один из них едва не закончился трагически. В этом странствии по Северному Уралу было четыре участника: Никита Введенская, Михаил Лидов со своим учеником и сам Борис, который сломал ногу в тундре и был обречен на верную смерть. Невероятную самоотверженность проявил Миша Лидов: спасая Поляка он прошел двадцать часов без отдыха, ориентируясь по Уральскому хребту, вышел к людям, организовал вертолет для спасения Бориса и нашел оставленных друзей, ориентируясь с воздуха! Такие поступки называют подвигом.

Борис очень быстро вошел в математическую среду. В 1966 г. в Москве состоялся Международный математический съезд. Борису Поляку была доверена ответственная должность секретаря секции математических проблем управляющих систем, председателем которой был Андрей Николаевич Колмогоров. Б.Т. Поляк блестяще справился со своими обязанностями.

В 1966 г. на мехмате МГУ была создана новая кафедра прикладного направления, получившая название кафедры Общих проблем управления. Возникла необходимость организовать специальные курсы и специальные семинары на этой новой кафедре. Был образован научно-исследовательский семинар по теории экстремальных задач, которыми руководили В.М. Алексеев и В.М. Тихомиров и активное участие принимали А.Д. Иоффе, И.В. Гирсанов, Б.Т. Поляк. Большое влияние на саму тематику теории экстремума, оказала статья в Журнале экспериментальной и теоретической физики А.Я. Дубовицкого и А.А. Милотина. Алексей Алексеевич Милотин также был очень активным участником семинара. Борис Теодорович Поляк сразу включился в разработку численных методов теории оптимизации. Участники семинара не раз обращались к Б.Т. Поляку с просьбой произвести численный расчет решений конкретных нестандартных экстремальных задач.

В марте 1968 г. было написано открытое письмо в защиту А.С. Есенина-Вольпина, получившее название "Письмо девяноста девяти". Среди подписавших был и Борис Теодорович Поляк. Это письмо, в частности, послужило причиной того, что Поляк должен был оставить Московский университет. С 1971 г. Борис стал работать в Институте проблем управления РАН старшим

(затем ведущим и главным) научным сотрудником. Впоследствии стал заведующим лабораторией. Научная деятельность Бориса Теодоровича, в ИПУ сложилась очень успешно. Он получил множество выдающихся результатов, был удостоен нескольких премий и награжден медалью Европейского общества исследования операций (Euro Gold Medal). При нем сформировалась большая математическая школа. Один из его учеников Ю.Е. Нестеров стал всемирно известным специалистом в области численных методов и искусственного интеллекта.

Борис Теодорович был верным другом и товарищем. Когда он работал в Московском университете он очень сдружился с Игорем Владимировичем Гирсановым. Гирсанов в начале 60-х гг. прочитал замечательный специальный курс по теории экстремальных задач. В этом курсе, в частности, была изложена теория Дубовицкого–Милютина. Курс был трудным. Для того, чтобы можно было его сдавать студентам, он был издан на ротاپринте. Гирсанов погиб в турпоходе летом 1967 г. Борис издал его лекции в издательстве МГУ в 1970 г., потом эта, книжка в переводе Бориса Теодоровича, была опубликована на английском языке; репринт издания семидесятого года вышел в 2003 г.

Борис Теодорович Поляк был близким другом Никиты Дмитриевны Введенской. Никита Дмитриевна сыграла исключительную роль в объединении целого поколения выдающихся представителей науки и культуры. Среди друзей и знакомых Никиты были люди самых разнообразных профессий: математики, лингвисты, физики, историки, филологи, искусствоведы, и все они были необычайно содержательные и глубокие люди.

В особо торжественных случаях Никита созывала несколько десятков друзей и подруг. На последнем дне рождения Никиты 9 октября 2021 г. собралось около десяти человек. В этот раз у Никиты уже не было сил самостоятельно подготовить вечер, и его организация выпала на долю Бориса. Надо сказать, что в последние полгода ее жизни Борис проявлял особую заботу о ней, чуть ли не ежедневно посещая Никиту.

Никита скончалась 6 мая 2022 г. В день ее рождения, 9 октября того же года мы собрались — семеро друзей — вспомнить о ней. Это и была моя последняя встреча с Борисом, о которой я упомянул в начале. В декабре я послал Борису свою статью памяти Никиты Введенской, и Борис живо обсуждал ее со мной.

Мне передавали, что он проявлял заботу о своих учениках еще в начале 2023 г. за несколько дней до своей кончины.

Память о Борисе Теодоровиче Поляке навсегда останется в сердцах тех, кто имел счастье с ним общаться.

*Заслуженный профессор МГУ,
доктор физико-математических наук
В.М. Тихомиров*

Уважаемые читатели!

Приглашаем вас принять участие в 33-й Международной конференции по компьютерной графике, обработке изображений и машинному зрению, системам визуализации и виртуального окружения ГрафиКоН2023, которая состоится 19–21 сентября 2023 г.

Тематика конференции включает следующие разделы (но не ограничивается ими):

- Интеллектуальные решения в компьютерной графике
- Научная визуализация и визуальная аналитика
- Компьютерное зрение
- Системы проектирования, технологической подготовки производства
- Цифровая Земля и Большие данные
- Обработка и анализ биомедицинских изображений
- Геометрическое моделирование. Компьютерная графика и образование
- Компьютерная графика в материаловедении, светотехнике и дизайне
- Вычислительная оптика и оптический дизайн
- Искусственный интеллект, когнитивные технологии и робототехника
- Подготовка кадров высшей квалификации в области компьютерной геометрии и графики

Программу мероприятия дополняет сессия молодых ученых. На сессии с докладами выступают студенты, аспиранты и молодые ученые. Участие в молодежной сессии поможет молодым ученым найти единомышленников и получить советы от ведущих ученых и специалистов отрасли о возможных направлениях дальнейших исследований и разработок. Это также поможет получить адресную поддержку в виде рекомендаций для участия в спонсируемых исследовательских программах. Лучшие доклады среди участников молодежной сессии будут награждены дипломами. Доклады всех участников будут опубликованы в сборнике трудов конференции. Лучшие доклады будут рекомендованы к публикации в виде полнотекстовых статей в научных журналах, индексируемых в ВАК РФ, WoS, Scopus и RSCI.

Для участия в конференции необходимо зарегистрироваться на сайте конференции и указать название доклада и авторов. Текст доклада можно представить до 30.06.2023 г.

Контактная информация

Сайт конференции: <http://graphicon.srcipt.ru>

E-mail: graphicon@srcipt.ru

Телефон: +7 (916) 507-57-99

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

- Агаев Р.П., Хомутов Д.К.** О свойствах метода ортогональной проекции в задаче о консенсусе 3

Нелинейные системы

- Наимов А.Н., Быстрецкий М.В., Назимов А.Б.** Идентификация периодических режимов в динамической системе 21
- Тхай В.Н.** Стабилизация колебаний управляемой автономной системы 29

Управление в социально-экономических системах

- Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.** Условия сходимости динамики рефлексивного коллективного поведения в модели олигополии Курно при неполной информации 45

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

- Чен Х., Игнатьева С.А., Богущ Р.П., Абламейко С.В.** Повторная идентификация людей в системах видеонаблюдения с использованием глубокого обучения: анализ существующих методов 61

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Кибзун А.И., Рассказова В.А.** Модель целочисленного линейного программирования как математическое обеспечение системы оптимального планирования потокового производства на этапе оперативного графикования 113
- Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Двухэтапное динамическое программирование в задаче маршрутизации с элементами декомпозиции 133

Заметки, хроника, информация

- Тихомиров В.М.** Памяти Бориса Теодоровича Поляка 165
- Информация 168

C O N T E N T S

Linear Systems

- Agaev R.P., Khomutov D.K.** On the Properties of the Orthogonal Projection Method for Reaching Consensus 3

Nonlinear Systems

- Naimov A.N., Bystretskii M.V., Nazimov A.B.** Identification of Periodic Regimes in a Dynamic System..... 21
- Tkhai V.N.** Stabilization of Oscillations of a Controlled Autonomous System ... 29

Control in Social Economic Systems

- Algazin G.I., Algazina D.G.** Convergence Conditions for the Dynamics of Reflexive Collective Behavior in the Cournot Oligopoly Model under Incomplete Information 45

Intellectual Control Systems, Data Analysis

- Chen H., Ihnatsyeva S.A., Bohush R.P., Ablameyko S.V.** Person Re-Identification in Video Surveillance Systems Using Deep Learning: Analysis of Methods 61

Optimization, System Analysis, and Operations Research

- Kibzun A.I., Rasskazova V.A.** Integer Linear Programming Model as a Mathematical Ware for the System of Optimal Planning of Flow Production at the Stage of Operational Scheduling..... 113
- Chentsov A.G., Chentsov P.A.** Two-Stage Dynamic Programming in the Routing Task with Decomposition Elements 133

Notes, Meetings, Information

- Tikhomirov V.M.** In memory of Boris Teodorovich Polyak 165
- Information 168