

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ
СВОЙСТВА

УДК 537.613

ВИХРЕВЫЕ ПОЛОСЫ В ДВУМЕРНОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

© 2023 г. А. Б. Борисов^а *, Д. В. Долгих^а

^аИнститут физики металлов УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 18, Екатеринбург, 620108 Россия

*e-mail: borisov@imp.uran.ru

Поступила в редакцию 18.12.2022 г.

После доработки 13.02.2023 г.

Принята к публикации 26.02.2023 г.

Изучены новые магнитные структуры в двумерной модели Гейзенберга классических спинов. Предложена оригинальная подстановка, которая позволяет свести уравнения, соответствующие модели, к интегрируемой системе нелинейных ОДУ. Полученное таким образом решение можно охарактеризовать как “вихревую полосу” или кольцевой вихрь. Его отличительные свойства – конечные размеры области определения, в которой оно может существовать, ограниченность полной энергии и отсутствие центра вихря при наличии вихревой структуры.

Ключевые слова: модель Гейзенберга, вихри, изотропный магнетик, вихревая полоса

DOI: 10.31857/S001532302260191X, EDN: VIKZFY

1. ВВЕДЕНИЕ

Вихреобразные распределения параметра порядка (вихри) широко используются в физике конденсированных сред. В теории магнетизма к таким структурам относятся плоские вихри, инстантоны и скирмионы [1–4], предсказанные много лет назад в двумерных магнетиках. Помимо академического интереса такие структуры важны для возникающей спинтронной промышленности, где они рассматриваются как перспективные объекты для переноса и хранения информации. Гамильтониан, определяющий магнитные структуры в ферромагнетиках, учитывает довольно много взаимодействий (таких как обменное, магнитостатическое, диполь-дипольное, взаимодействие Дзялошинского–Мори, взаимодействие с внешним полем, и т.д.), которые образуют определенную иерархию. Однако наибольший вклад вносит энергия обменного взаимодействия Гейзенберга. Поэтому один из подходов к исследованию новых магнитных состояний заключается в минимизации обменной энергии Гейзенберга и получении тем самым метастабильных состояний, дальнейшая динамика которых определяется следующими по значению членами иерархии гамильтониана. Отметим, что магнитные вихри являются частным случаем дефектов, изучаемых в физике конденсированных сред, которые наблюдали и исследовали в различных средах достаточно давно. Исторически исследование вихрей прежде всего связано с гидродинамикой, в которой гидродинамические вихри визуально наблюдаемы, а вихревая динамика со-

ставляет существенную область общей гидродинамики [5]. Начиная с работы Гельмгольца 1868 г., в гидродинамике были исследованы различные типы вихревых структур [6, 7], среди которых особый интерес представляют вихревые образования, существующие в ограниченной области на плоскости, вне которой течение жидкости потенциально.

Цель этой работы – предсказать и исследовать новые типы вихревых метастабильных структур в двумерном ферромагнетике.

В континуальном приближении статические магнитные структуры определяются минимизацией энергии

$$E = \iint E_0 dx dy$$

с плотностью

$$E_0 = \frac{1}{2} J \sum_{i=1}^3 (\nabla n_i) (\nabla n_i) \quad (1)$$

для единичного вектора намагниченности $\mathbf{n} = \mathbf{M}/M_0$ и уравнениями

$$\Delta \mathbf{n} - \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n}) = 0 \quad (2)$$

в безразмерных переменных. Далее для описания структур удобно воспользоваться следующей параметризацией единичного вектора \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = (\cos \Phi \sin \theta, \sin \Phi \sin \theta, \cos \theta),$$

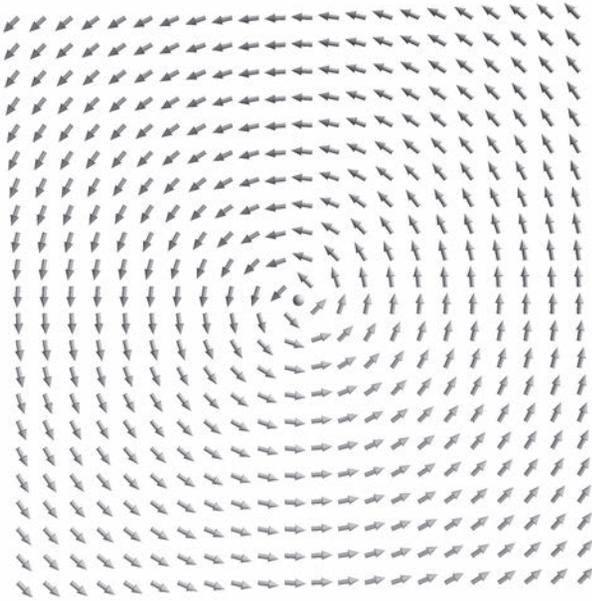


Рис. 1. Распределение вектора \mathbf{n} в плоскости для плоского вихря при $Q = 1$.

где Φ, θ – сферические координаты. Тогда уравнения (2) записываются в простом виде:

$$\Delta\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta (\nabla\Phi)^2 = 0; \quad (3)$$

$$2 \cos \theta (\nabla\theta \cdot \nabla\Phi) + \sin \theta \Delta\Phi = 0. \quad (4)$$

Модель Гейзенберга (1) для классических спинов часто называется $O(3)$ -моделью в трехмерном пространстве, она имеет многочисленные приложения в теории поля и физике жидких кристаллов [8]. Уравнения модели инвариантны относительно группы спиновых и пространственных вращений $SO(3) \times SO(3)$, что и позволяет найти широкий класс вихревых структур в аналитическом виде. Обсудим вначале кратко характерные особенности известных решений уравнений (3), (4), чтобы подчеркнуть их отличие от результатов этой статьи.

2. ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗВЕСТНЫХ ВИХРЕВЫХ РЕШЕНИЙ

Большинство известных вихревых решений были найдены простыми подстановками. Простейшим из них является плоский вихрь:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi = Q\varphi + \varphi_0 \quad (Q \in Z) \quad (5)$$

с целочисленным значением Q . Отображение $\varphi \rightarrow \Phi$ имеет интересные особенности. Рассмотрим поведение $\Phi(\varphi)$ на любой замкнутой кривой (например, окружности), окружающей начало ко-

ординат – центр вихря. Областью изменения параметра порядка Φ является окружность (сфера S^1). Поэтому $\Phi(\varphi)$ отображает окружность в окружность. При полном обходе окружности в плоскости против часовой стрелки для однозначности \mathbf{n} функция $\Phi(\varphi)$ должна приобретать приращение, кратное 2π :

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) + 2\pi Q.$$

Как доказано в топологии, все отображения $S^1 \rightarrow S^1$ отображаются на классы, характеризуемые целым числом

$$Q = \int d\Phi, \quad (6)$$

названным топологическим зарядом, который остается неизменным при любых непрерывных деформациях. Поэтому вихри (5) – топологически стабильные конфигурации. Распределение вектора \mathbf{n} в плоскости (рис. 1) идентично распределению вектора скорости несжимаемой невязкой жидкости [6].

Так же, как в гидродинамике, начало координат является особой точкой, где неограниченны частные производные: $\partial_x \Phi, \partial_y \Phi \rightarrow \infty$. Поэтому плотность энергии (1) пропорциональна r^{-2} и полная энергия вихря E в магнетике в образце с размером R равна

$$E \approx Q^2 J \ln \frac{R}{l}, \quad (7)$$

где l – радиус кора (сердцевины вихря). На расстояниях $r < l$ неприменимо континуальное приближение, и нужно использовать аппроксимацию решений или учитывать дискретность решетки.

Отметим важное обстоятельство. Известно, что уравнения (2), записанные в независимых переменных $z = x + iy, z^* = x - iy$, конформно инвариантны: если $\mathbf{n}(z, z^*)$ является решением (2), то и $\mathbf{n}(f(z), f^*(z))$ с произвольной аналитической функцией $f(z)$ также является решением этих уравнений. Для непрерывности решений $f(z)$ выбирают рациональной функцией от z . Это уникальное свойство позволяет из известного решения получать целое семейство решений. Положим $f(z) = z(z - b)$. Тогда формула

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi = \frac{Q}{2i} \left(\ln \frac{z}{z^*} + \ln \frac{z-b}{z^*-b} \right) \quad (b \in R) \quad (8)$$

описывает два вихря с центрами в точках $(x, y) = (0, 0), (x, y) = (b, 0)$ и с одинаковым топологическим зарядом Q (рис. 2). Прямые вычисле-

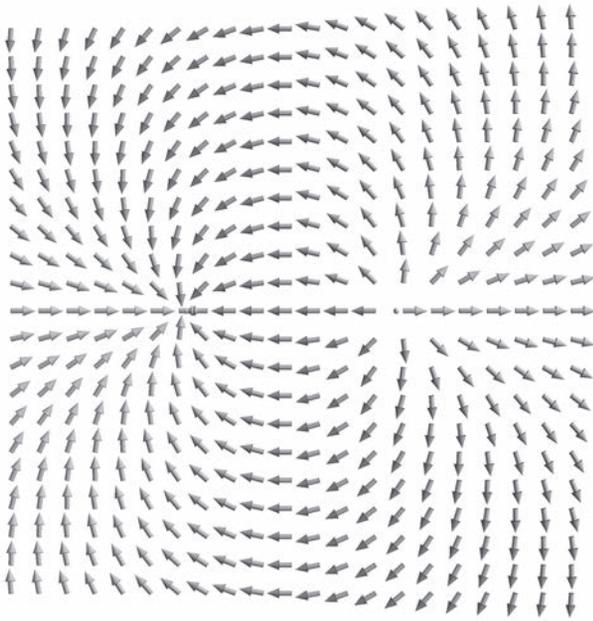


Рис. 2. Распределение вектора \mathbf{n} в двухвихревой структуре.

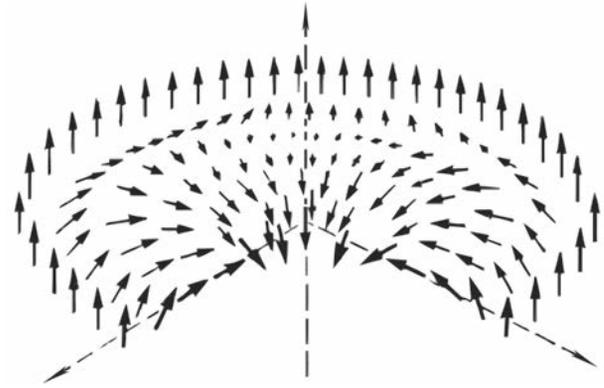


Рис. 3. Распределение вектора \mathbf{n} в инстантоне при $Q = 1$.

ния показывают, что энергия E_{int} их взаимодействия равна

$$E_{\text{int}} = \pi J Q^2 \ln \frac{b}{l}.$$

Следующей популярной вихревой структурой является инстантон [4]. Подстановка $\theta = \theta(r)$, $\Phi = \Phi(\varphi)$ приводит к нетривиальному решению (рис. 3):

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{r^Q}, \quad \Phi = Q\varphi \quad (Q \in Z). \quad (9)$$

Такие двумерные структуры с однородной асимптотикой на пространственной бесконечности

$$\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}_0 = (0, 0, \pm 1) \quad (10)$$

характеризуются другим топологическим зарядом [4].

(x, y) -Плоскость вместе с бесконечно удаленной точкой $|z| = \infty$, $z = x + iy$ (расширенная плоскость) топологически эквивалентна двумерной сфере S^2 . Поле $\mathbf{n}(x, y)$ осуществляет отображение $S^2 \rightarrow S^2$ расширенной плоскости на сферу $\mathbf{n}^2 = 1$, которая также является двумерной. Когда координаты (x, y) пробегают плоскость, вектор \mathbf{n} покрывает сферу $\mathbf{n}^2 = 1$ $|Q|$ раз.

Степень отображения или топологический заряд Q вычисляется по формуле [4]:

$$N = \frac{1}{4\pi} \int q d^2 \mathbf{r}; \quad q = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} ([\partial_\nu \mathbf{n} \times \partial_\mu \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n}), \quad (11)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu}$ – двумерный антисимметричный тензор ($\varepsilon_{12} = 1$). Магнитные структуры инстантонов имеют две уникальные особенности. Во-первых, из теоремы Хоббарта–Деррика [9–11] следует, что локализованные двумерные магнитные структуры в соизмеримых ферромагнетиках с конечной энергией существуют только в обменном приближении. Плотность энергии инстантона (9) конечна:

$$E = 4\pi Q. \quad (12)$$

Вторая особенность связана с взаимодействием инстантонов. Положим $Q = 1$ и конформным преобразованием $z \rightarrow f(z) = z(z - b)$ из структуры (9) получим двухвихревое решение:

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{r \sqrt{(x-b)^2 + y^2}}; \quad (13)$$

$$\Phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x-b}$$

с центрами вихрей в точках с координатами $(x, y) = (0, 0)$ и $(x, y) = (b, 0)$.

Для вихревых спиралей [11–13] поля θ, Φ зависят от линейной комбинации $c_1\varphi + c_2 \ln r$ с различными постоянными c_1, c_2 :

$$n_3 = \operatorname{sn} \left[\frac{Q}{k} \ln \frac{r}{r_0} - \frac{2K(k)}{\pi} N(\varphi - \varphi_0), k \right]; \quad (14)$$

$$\Phi = Q(\varphi - \varphi_0) + \frac{2k}{\pi} K(k) N \ln \frac{r}{r_0}.$$

Энергия спирального вихря, как и для плоского вихря, пропорциональна $\ln R/l$. В итоге все описанные выше вихри имеют центр – начало координат, и областью их определения является вся плоскость.

3. НОВЫЕ ТИПЫ ПЛОСКИХ ВИХРЕЙ В ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Как уже отмечали во введении, в классической гидродинамике исследованы вихревые движения жидкости в односвязных ограниченных областях плоскости. Эти структуры были найдены решением линейных уравнений и применением аппарата теории аналитических функций.

В ходе анализа новых типов вихрей нелинейных уравнений (3), (4) мы используем новую подстановку:

$$\theta = \theta(r), \quad \Phi = Q\varphi + G(\theta(r)), \quad Q \in Z, \quad (15)$$

которая позволяет сравнительно просто получить решения в неявном виде. После перехода к полярной системе координат и применения подстановки (5) уравнения (3), (4) приобретают следующий вид:

$$\frac{1}{r} \partial_r [r \partial_r \theta] - \frac{1}{2} \sin 2\theta \left[(G'(\theta) \partial_r \theta)^2 + \left(\frac{Q}{r} \right)^2 \right] = 0; \quad (16)$$

$$2 \cos \theta G'(\theta) (\partial_r \theta)^2 + \sin \theta \left[\frac{1}{r} \partial_r (r G'(\theta) \partial_r \theta) \right] = 0. \quad (17)$$

Исключение $\partial_r^2 \theta$ из системы (16), (17) позволяет выразить $\partial_r \theta$ как функцию от $\theta, G'(\theta), G''(\theta)$:

$$\partial_r \theta = \pm \left[\frac{-Q^2 G'(\theta) \sin \theta \sin 2\theta}{2r^2 (2G'(\theta) \cos \theta + G''(\theta) \sin \theta + 1/2 (G'(\theta))^3 \sin \theta \sin 2\theta)} \right]^{1/2}. \quad (18)$$

Подстановка (18) в любое из уравнений (16), (17) приводит к замкнутому обыкновенному дифференциальному нелинейному уравнению относительно $G'(\theta)$:

$$24 \cos^3 \theta (G'(\theta))^2 + \csc \theta \sin^3 2\theta (G'(\theta))^4 + 3 \sin \theta \sin 2\theta (G''(\theta))^2 + \sin \theta [2(4 + 5 \cos 2\theta) \times (19) \times G''(\theta) - G^{(3)}(\theta) \sin 2\theta] G'(\theta) = 0.$$

Помимо тривиального решения $G(\theta) = \text{const}$, из которого следует структура (9), другое решение уравнения (19):

$$G'(\theta) = \pm \frac{\csc \theta}{\sqrt{F_2(\theta)}}, \quad (20)$$

$$F_2(\theta) = -1 - 4U^2 (1 - \cos^2 \theta) (A + \cos^2 \theta), \quad U > 0$$

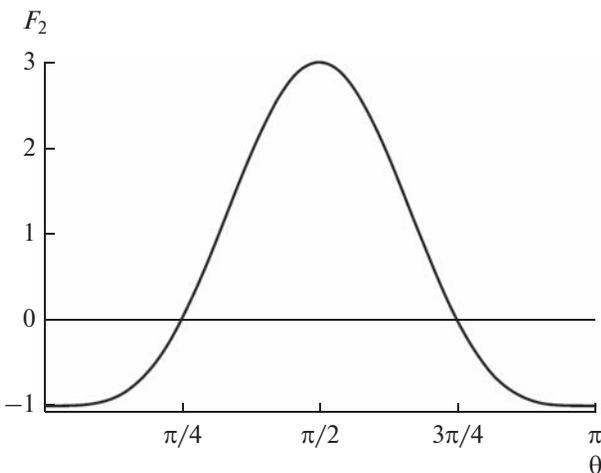


Рис. 4. График функции $F_2(\theta)$ при $A = -1, U = 1$.

с постоянными A, U можно получить после замены $G'(\theta) = [1 + V(\sin \theta)]^{-1/2}$ в этом уравнении.

Выражения (18), (20) сразу определяют $\partial_r \theta$:

$$\partial_r \theta(r) = \pm \frac{|Q| \sqrt{F_2(\theta(r))}}{2U r \sin \theta(r)}. \quad (21)$$

Ясно, что требование положительной определенности функции $F_2(\theta)$ при конкретных значениях U и A ограничивает диапазон допустимых значений поля $\theta(r)$ и, как мы увидим ниже, задает область существования структуры (15) в плоскости xOy .

Далее мы будем рассматривать в качестве примера следующий набор постоянных:

$$A = -1, \quad U = 1. \quad (22)$$

График функции $F_2(\theta)$ изображен на рис. 4. Видно, что область допустимых значений поля $\theta(r)$, при которой положительна $F_2(\theta(r))$, определяется интервалом $\theta(r) \in (\pi/4, 3\pi/4)$.

Интегрируя (21), получим неявное выражение, определяющее поле $\theta(r)$:

$$F \left[i \operatorname{arsh} \left(\sqrt{\frac{2}{T_+}} U \cos \theta \right), k \right] = \pm \frac{|Q|}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 + 4AU^2}{T_+}} \ln \frac{r}{a}, \quad (23)$$

где a – параметр, $F[u, k]$ – эллиптический интеграл первого рода с модулем $k = \sqrt{-T_+/T_-}$ [14] и

$$T_{\pm} = \sqrt{U^2 + (1 + A)^2 U^4} \pm (A - 1) U^2. \quad (24)$$

Обращение эллиптического интеграла в (23) приводит к простой формуле

$$\cos \theta(r) = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{-T_+}{2}} \operatorname{sn} \left[\pm \frac{|Q|}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+4AU^2}{T_+}} \ln \frac{r}{a}, k \right], \quad (25)$$

где $\operatorname{sn}(u, k)$ – эллиптическая функция с модулем k [14]. Тогда $G(\theta)$ определяется прямым интегрированием формулы (20):

$$G(\theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{2U}} \sqrt{\frac{T_+}{1+4AU^2}} \times \times \Pi \left[-\frac{T_+}{2U^2}, i \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{2}{T_+}} U \cos \theta, k \right], \quad (26)$$

где $\Pi(m, u, k)$ – эллиптический интеграл третьего рода [14]. Без ограничения общности далее будем рассматривать положительные ветви решений (25), (26).

Интервал вещественности поля $\theta(r)$ задает область существования решения (r_1, r_2) на плоскости xOy . Из (13) сразу следует, что при выборе постоянных (11):

$$r_1 = r \left(\frac{3\pi}{4} \right) = a \exp \left[-\frac{1}{Q} \sqrt{\frac{2}{3}} K(k_1) \right], \quad (27)$$

$$r_2 = r \left(\frac{\pi}{4} \right) = a \exp \left[\frac{1}{Q} \sqrt{\frac{2}{3}} K(k_1) \right], \quad k_1 = \sqrt{\frac{1}{3}},$$

где $K(k_1)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k_1 [14]. Поэтому описанное выше решение (13), (14) существует только в круговой полосе, ограниченной двумя концентрическими окружностями радиусов r_1 и r_2 .

Интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \nabla \Phi d\mathbf{r} \quad (28)$$

по любому замкнутому контуру Γ , обходящему начало координат внутри полосы против часовой стрелки, равен, согласно (15), Q , и решение (15), (25), (26) является вихревой круговой полосой, которую уместно назвать *кольцевым вихрем*. Ее примечательной особенностью, в отличие от известных ранее вихревых структур, является отсутствие центра вихря, область определения структуры ограничена. Кроме того, последнее обстоятельство не позволяет классифицировать эти структуры топологическим зарядом (11), так как невозможно отобразить вихревую полосу в сферу S^2 и нет отображения $S^2 \rightarrow S^2$. Вихревая природа полосы отчетливо видна на рис. 5. Хорошо заметны области с $n_z < 0$, $n_z = 0$ и $n_z > 0$.

Другая важная особенность решения – ограниченность полной энергии полосы. Как уже отмечалось, из теоремы Хоббарта–Деррика следу-

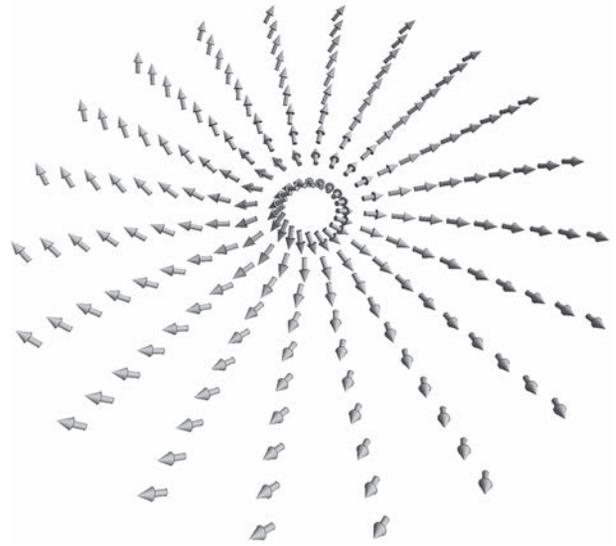


Рис. 5. Распределение векторного поля \mathbf{n} в круговой полосе при $A = -1$, $U = 1$.

ет, что локализованные двумерные магнитные структуры в соизмеримых ферромагнетиках с конечной энергией существуют только в обменном приближении. В нашем случае плотность энергии (1) после подстановки (5):

$$E_0 = \frac{Q^2 \sin^2 \theta(r)}{2r} + \frac{1}{2} \left(1 + G'(\theta)^2 \sin^2 \theta(r) \right) (\partial_r \theta(r))^2 \quad (29)$$

с учетом соотношения

$$G'(\theta) \partial_r \theta = \frac{Q}{2U r \sin^2 \theta}$$

конечна во всем интервале (r_1, r_2) и не зависит от размера образца. Так, для значений констант интегрирования (22) и $Q = 1$:

$$r_1 \approx 0.24a, \quad r_2 \approx 4.12a,$$

и полная энергия

$$E \approx 2.09 \frac{J}{2}.$$

Предсказанные вихревые полоски могут наблюдаться на торцевой стороне сквозного нанопровода с поверхностной анизотропией на его боковых поверхностях, согласованной с граничными условиями кольцевого вихря.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЬЦЕВЫХ ВИХРЕЙ

Необычная структура описанных выше вихрей влияет на их взаимодействие. Для их исследования положим $Q = 1$ и применим, как и ранее, конформное преобразование $z \rightarrow f(z) = z(z - b)$. В

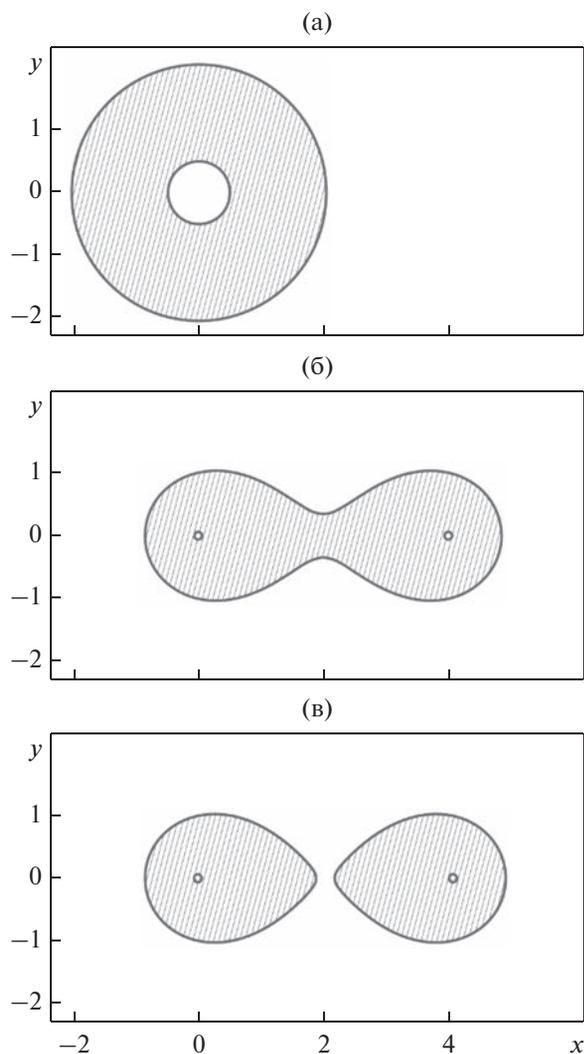


Рис. 6. Области определения двухвихревой структуры при $b = 0$ (а), $b = 1.97\sqrt{r_2}$ (б), $b = 2.005\sqrt{r_2}$ (в).

результате мы получим двухвихревую структуру. Из-за специфики задачи в первую очередь изменится область определения этой структуры. С учетом (27) она определяется неравенством:

$$r_1 \leq r(x, y) \leq r_2, \quad (30)$$

$$r(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2)((x - b)^2 + y^2)}.$$

Видеофильм, иллюстрирующий непрерывное изменение области (30) с увеличением параметра b , приведен в [15]. В нем ясно видна деформация кругового кольца (рис. 6а). Сначала при $b = 2\sqrt{r_1}$ внутренняя граница приобретает вид “восьмерки”, и далее с ростом b “полость” кольца теряет связность. Затем при $b = 2\sqrt{r_2}$ внешняя граница области также смыкается в точке, и при $b > 2\sqrt{r_2}$ область существует в виде двух несвязанных де-

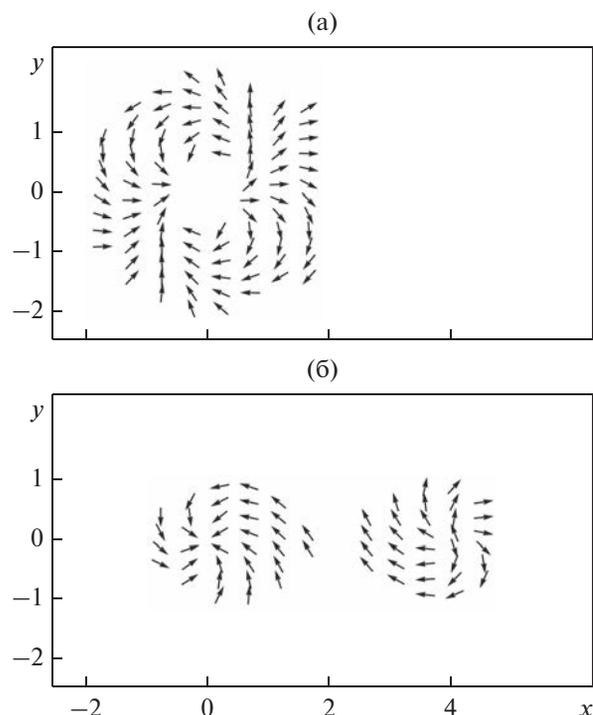


Рис. 7. Двухвихревая структура при $b = 0$ (а), $b = 2.005\sqrt{r_2}$ (б).

формирующихся колец, которые расходятся в пространстве по мере роста параметра b (рис. 6в). Видеофильм [16] иллюстрирует изменение векторного поля $(\cos \Phi(x, y), \sin \Phi(x, y))$ двухвихревой структуры при увеличении параметра b . На рис. 7 приведены начальное и конечное состояния поля для выбранного диапазона этого параметра.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы показали, что в двумерном ферромагнетике существуют новые типы вихрей, структура и свойства которых отличаются от известных ранее вихревых структур. Отличительные свойства новых вихрей – конечные размеры области определения, в котором они могут существовать, ограниченность полной энергии и отсутствие центра вихря при наличии вихревой структуры. Заметим, что кольцевые вихри могут наблюдаться в жидких кристаллах. В этих средах уравнения для статических структур в одноконстантном приближении совпадают с (3), (4). Отметим, наконец, что все описанные в статье вихри не исчерпывают все многообразие вихревых структур в двумерном ферромагнетике, так как не исследованы структуры (помимо спиралей), где поля θ, Φ зависят от двух независимых переменных x, y .

Авторы благодарны рецензентам за детальный, квалифицированный анализ первоначального варианта рукописи. В результате их советов и замечаний был переработан текст и расширен объем статьи. Авторы глубоко признательны К.Л. Метлову, Ф.Н. Рыбакову, В.В. Киселеву за интерес к работе, полезные замечания и плодотворные обсуждения экспериментальной реализации вихревой дорожки.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (тема “Квант”, номер г.р. 122022000038-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наукова думка, 1983. 192 с.
2. *Kosevich A.M., Ivanov B.A., Kovalev A.S.* Magnetic Solitons // *Physics Reports*. 1990. V. 194. № 3–4. P. 117–238.
3. *Богданов А.Н., Яблонский Д.А.* Термодинамические устойчивые “вихри” в магнитоупорядоченных кристаллах. Смешанное состояние магнетиков // *ЖЭТФ*. 1989. Т. 95. С. 178–182.
4. *Belavin A.A., Polyakov A.M.* Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets // *JETP Lett*. 1975. V. 22. P. 503–506.
5. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1998. 238 с.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1993. 417 с.
7. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. 929 с.
8. *Kurik M.V., Lavrentovich O.D.* Defects in liquid crystals: homotopy theory and experimental studies // *Sov. Phys. Usp.* 1988. V. 31. P. 196–224.
9. *Hobart R.H.* On the Instability of a Class of Unitary Field Models // *Proc. Phys. Soc.* 1963. V. 82. № 2. P. 201–203.
10. *Derrick G.M.* Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles // *J. Math. Phys.* 1964. V. 5. № 9. P. 1252–1254.
11. *Борисов А.Б., Киселев В.В.* Двумерные и трехмерные топологические дефекты, солитоны и текстуры в магнетиках. М.: Физматлит, 2022. 456 с.
12. *Борисов А.Б.* Спиральные вихри в ферромагнетике // *Письма в ЖЭТФ*. 2001. Т. 73. № 5. С. 279–282.
13. *Borisov A.B., Rybakov F.N.* Three-dimensional magnetic solitons // *Phys. Met. Metal.* 2011. V. 112. № 7. P. 745–766.
14. *Byrd P.F., Friedman M.D.* Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. N.Y., Heidelberg, Berlin: Springer–Verlag, 1971. 372 с.
15. Изменение области определения двухвихревой структуры. Видеофильм. <https://youtu.be/vgMpEnrZSIY>.
16. Двухвихревая структура. Видеофильм. <https://youtu.be/gh0IbYmpfIU>.