

СТРУКТУРА, ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ И ДИФФУЗИЯ

УДК 538.951

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ С НАСЫЩЕНИЕМ АМПЛИТУДНО-ЗАВИСИМОГО ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ, УМЕНЬШАЮЩИМСЯ С РОСТОМ ЧАСТОТЫ

© 2023 г. В. Е. Назаров^а, *, С. Б. Кияшко^а

^аИнститут прикладной физики РАН, ул. Ульянова, 46, Нижний Новгород, 603950 Россия

*e-mail: v.e.nazarov@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 13.02.2023 г.

После доработки 25.04.2023 г.

Принята к публикации 29.04.2023 г.

В результате модификации квазистатических упругого и неупругого гистерезисов предложены динамические гистерезисные уравнения состояния кристаллических твердых тел с частотно-зависимым насыщением амплитудно-зависимого внутреннего трения, уменьшающимся с ростом частоты. Методом возмущений исследовано нелинейное распространение первоначально гармонических продольных упругих волн в стержнях из таких материалов. Проведен численный, графический и сравнительный анализ полученных решений и выявлены характерные амплитудно-частотные зависимости нелинейных волновых эффектов. Предложена методика определения вида динамических гистерезисов для кристаллических твердых тел с частотно-зависимым насыщением амплитудно-зависимого внутреннего трения.

Ключевые слова: металлы, упругие волны, амплитудно-зависимое внутреннее трение, насыщение гистерезисных потерь, частотная зависимость

DOI: 10.31857/S001532302360020X, EDN: WVGRKQ

ВВЕДЕНИЕ

При распространении интенсивных первоначально гармонических волн (ПГВ) в кристаллических (или поликристаллических) твердых телах (металлах, сплавах, горных породах) наблюдаются эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения (АЗВТ) — нелинейные потери и изменение скорости распространения волн [1–4], а также генерация их высших гармоник [5]. Явление АЗВТ традиционно объясняется в рамках квазистатических гистерезисных уравнений состояния $\sigma = \sigma(\epsilon)$, где σ — напряжение, ϵ — деформация. Площадь $S(\epsilon_m)$ петель (или петель) гистерезиса определяет нелинейное затухание волны, или декремент затухания (ДЗ), а среднее (по периоду волны) значение $\langle \sigma_\epsilon(0) - \sigma_\epsilon(\epsilon_m) \rangle$ — нелинейную поправку к скорости волны или дефект модуля упругости (ДМУ), где ϵ_m — амплитуда деформации. Для описания АЗВТ используют два основных вида квазистатических гистерезисов: упругий (или гистерезис отрыва) и неупругий (гистерезис трения или пластический гистерезис) [1–4]. Для упругого гистерезиса — $\sigma(0) = 0$, а для неупругого — $\sigma(0) \neq 0$. Примерами упругого и неупругого квазистатических гистерезисов являются, соответственно, микроскопический гистерезис Гранато–Люкке

[2–4] и феноменологический гистерезис Давиденкова [1, 3, 4]. Вообще говоря, и упругий, и неупругий квазистатические гистерезисы качественно объясняют АЗВТ, однако они имеют существенные отличия, что проявляется в различии амплитудных зависимостей нелинейных акустических эффектов (НАЭ), возникающих при распространении в кристаллах ПГВ [5]. Так, для кристаллов, описываемых гистерезисами Гранато–Люкке и Давиденкова, имеют место экспоненциальная ($\propto \epsilon_m^{-1} \exp(-A/\epsilon_m)$, $A > 0$) и степенные ($\propto \epsilon_m^p$, $p > 0$) зависимости нелинейных ДЗ и ДМУ от амплитуды ϵ_m , при этом и ДЗ и ДМУ не зависят от частоты ω деформирования кристалла (т.е. от частоты акустической волны), а их отношение не зависит от амплитуды ϵ_m . В работах по изучению АЗВТ в металлах (Cu, Zn, Pb) и сплавах (Cu–Zn, Cu–Al, Cu–P) наблюдали различные амплитудные (степенные, с показателями степени p от 1 до 4 [6, 7, 4], экспоненциальные ($\propto \exp(-A/\epsilon_m)$ [8], $\propto \epsilon_m^{-1} \exp(-A/\epsilon_m)$ [10]) и различные частотные зависимости ДЗ и ДМУ, в основном уменьшающиеся с ростом частоты [9–11] или не зависящие от частоты (в небольшом частотном диапазоне) [7, 12, 13].

Многообразие амплитудно-частотных зависимостей эффектов АЗВТ, наблюдаемых в различных кристаллических твердых телах, определяется различной нелинейной динамикой дислокаций, зависящей от большого числа структурных характеристик кристалла (типа решетки, размеров зерна, вида дислокаций, их функции распределения, плотности и подвижности, концентрации вакансий, межузельных и примесных атомов и т.д.) [13, 14]. Нелинейные (гистерезисные) свойства кристаллических твердых тел более чувствительны к их дислокационной структуре, чем линейные (диссипативные и дисперсионные). В связи с этим исследования НАЭ в кристаллах способствуют изучению динамики дислокаций и созданию моделей их движения под действием динамических напряжений, что необходимо для развития теории прочности и пластичности — одного из актуальных направлений физики твердого тела [14–17].

Для многих кристаллических твердых тел (при относительно небольших амплитудах ϵ_m) имеет место линейная зависимость гистерезисных ДЗ и ДМУ от ϵ_m , а в некоторых металлах и сплавах (Cu [10, 16–18], Pb [12, 13, 19], Cu–Ni [20], Al [21, 22], In [23]) при увеличении ϵ_m наступает насыщение ДЗ и ДМУ, при этом с ростом частоты волны (при $\epsilon_m = \text{const}$) эффекты АЗВТ уменьшаются [10, 18, 24, 25]. В работах [26, 27] были предложены квазистатические гистерезисные уравнения состояния твердых тел с частотно-независимым насыщением ДЗ и ДМУ.

В работах [21, 28], для объяснения насыщения гистерезисных потерь, предполагали, что движение сегментов дислокаций, оторвавшихся от закрепляющих точечных дефектов — примесных атомов, определяется не только их линейным натяжением, но и полем упругих напряжений соседних примесных атомов: сегменты дислокации, оторвавшиеся от одних примесных атомов, последовательно закрепляются на других — соседних. Такой механизм ограничивает удлинение сегментов дислокаций и рост площади петли гистерезиса. При малых амплитудах ϵ_m это приводит к линейной зависимости ДЗ от ϵ_m , а при больших — к его насыщению, при этом разгрузочные ветви ($\dot{\epsilon} \geq 0$, $\dot{\epsilon} < 0$ и $\epsilon \leq 0$, $\dot{\epsilon} > 0$) в гистерезисе $\sigma = \sigma(\epsilon)$ становятся нелинейными. В работах [29–31], в плане развития теории дислокационного гистерезиса Гранато–Люкке [2] для положительных температур $T > 0$ К, рассматривали механизм термоактивированного отрыва сегментов дислокаций от примесных атомов. В этих работах учитывается, что отрыв сегментов дислокации (от примесного атома) не является мгновенным, а имеет характер релаксационного процесса, длительность которого уменьшается с ростом температуры в соответствии с уравнением Аррениуса. В предположе-

нии, что внешнее напряжение является гармоническим, было предсказано, что такой механизм приводит к уменьшению ДЗ с ростом частоты ω внешнего напряжения. Из этого результата следует, что при $T > 0$ К и ДМУ и динамическая гистерезисная нелинейность кристаллов также уменьшаются с ростом частоты ω . Однако в работах [21, 28–31] не было получено выражений ни для нелинейного ДМУ, ни для самого динамического гистерезиса. А между тем для описания эффектов АЗВТ и нелинейного распространения интенсивных акустических волн в кристаллических твердых телах необходимы именно динамические гистерезисные уравнения состояния таких материалов. Таким образом, в связи с большим разнообразием амплитудно-частотных зависимостей эффектов АЗВТ в различных кристаллах, разработка методов определения адекватных гистерезисных уравнений состояния является одним из актуальных вопросов при описании и выявлении механизмов гистерезисной нелинейности кристаллических твердых тел. Для этого необходимо знание закономерностей НАЭ в кристаллах с различными видами динамических гистерезисов, особенно с частотно-зависимым насыщением ДЗ и ДМУ.

В настоящей работе предлагаются феноменологические гистерезисные уравнения состояния кристаллических твердых тел с частотно-зависимым насыщением АЗВТ, уменьшающимся с ростом частоты деформации, и исследуются НАЭ, возникающие при распространении интенсивных первоначально гармонических продольных упругих волн в стержнях из таких материалов. Здесь рассматриваются динамические квадратичные (по деформации ϵ) гистерезисы твердых тел, полученные в результате модификации квазистатических упругого и неупругого гистерезисов без насыщения АЗВТ [5]. Проведен сравнительный анализ амплитудно-частотных зависимостей НАЭ и определены характеристики квазигармонических волн в таких кристаллах: амплитудно-зависимых потерь и изменения скорости распространения первичной волны, а также амплитуд ее второй и третьей гармоник. На основе анализа теоретических и экспериментально установленных амплитудно-частотных зависимостей НАЭ предложена методика определения динамических гистерезисов для кристаллических твердых тел с насыщением АЗВТ, уменьшающимся с ростом частоты.

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ КРИСТАЛЛОВ С НАСЫЩЕНИЕМ АЗВТ, УМЕНЬШАЮЩИМСЯ С РОСТОМ ЧАСТОТЫ

Реальные кристаллы содержат множество различных дефектов — дислокаций, вакансий, межузельных и примесных атомов. При статистиче-

ски однородном, изотропном и непрерывном распределении дислокаций в объеме кристалла, для упругих волн, длина которых много больше межатомных расстояний, кристаллические твердые тела являются сплошными “макрооднородными” средами [32]. Акустическая нелинейность кристаллов во многом определяется движением дислокаций и их взаимодействием с примесными атомами, причем в низкочастотном диапазоне кристаллы обладают гистерезисной нелинейностью. Гистерезисное уравнение состояния кристаллических твердых тел можно представить в виде:

$$\sigma(\epsilon) = E[\epsilon - f(\epsilon)], \quad (1)$$

где σ и ϵ — продольные напряжение и деформация; E — модуль упругости (для стержня E — это модуль Юнга); $f(\epsilon)$ — гистерезисная функция, $|f(\epsilon)| \ll |\epsilon| \ll 1$. Конечно, модуль упругости E кристалла зависит от плотности дислокаций и от частоты акустической волны, однако для низкочастотных волн такая зависимость довольно слабая, поэтому можно считать, что $E = \text{const}$.

Экспериментальные исследования АЗВТ для продольных упругих волн показывают, что при не очень больших амплитудах деформации ϵ_m , когда еще нет насыщения нелинейных ДЗ и ДМУ, для многих металлов (например, медь [18], свинец [19], цинк [24]) и горных пород (гранит, магнезит, известняк) имеем $f(\epsilon) \propto \epsilon^2$ [5]. Исследования также показывают, что для этих кристаллов амплитудно-зависимые ДМУ и ДЗ определяются разными параметрами нелинейности и, следовательно, для продольных напряжений σ и деформаций ϵ гистерезис в зависимости $f = f(\epsilon)$ состоит из квадратичных, но, вообще говоря, несимметричных ветвей, отвечающих разным фазам сжатия и растяжения кристалла. При построении гистерезисной функции $f = f(\epsilon)$ для динамического (упругого или неупругого) гистерезиса с насыщением ДЗ и ДМУ, следует учитывать, что при малых частотах ω (т.е. малых скоростях $\dot{\epsilon}$ деформации) динамический гистерезис должен переходить в квазистатический гистерезис (без насыщения).

Для упругого квадратичного динамического гистерезиса с насыщением ДЗ и ДМУ, уменьшающихся с ростом частоты деформации, функция $f(\epsilon)$ имеет вид:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{2(1 + \tau_0 |\dot{\epsilon}|)} \times \begin{cases} \gamma_1 \epsilon^2, & \epsilon \geq 0, \quad \dot{\epsilon} > 0, \\ -\gamma_2 \epsilon^2 + (\gamma_1 + \gamma_2) \epsilon_m \epsilon, & \epsilon \geq 0, \quad \dot{\epsilon} < 0, \\ -\gamma_3 \epsilon^2, & \epsilon \leq 0, \quad \dot{\epsilon} < 0, \\ \gamma_4 \epsilon^2 + (\gamma_3 + \gamma_4) \epsilon_m \epsilon, & \epsilon \leq 0, \quad \dot{\epsilon} > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где τ_0 — постоянный коэффициент, имеющий размерность времени, γ_{1-4} — безразмерные параметры нелинейности, $\tau_0 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 \geq 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 \geq 0$, $|\gamma_{1-4} \epsilon_m| \ll 1$. В общем случае $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3 \neq \gamma_4$. При $\tau_0 = 0$ гистерезис (2) [5] аналогичен квазистатическому гистерезису Гранато—Люкке [2], связанному с лавинообразным отрывом дислокаций от примесных атомов (и последующим закреплением на них же) под действием внешнего переменного напряжения. Для такого гистерезиса ДЗ и ДМУ определяются различными линейными комбинациями параметров γ_{1-4} [18, 19].

Для неупругого квадратичного динамического гистерезиса с насыщением ДЗ и ДМУ, уменьшающихся с ростом частоты деформации, функция $f(\epsilon)$ имеет вид:

$$f(\epsilon) = \frac{\beta \epsilon_m \epsilon}{1 + \tau_1 |\dot{\epsilon}|} + \frac{1}{2(1 + \tau_2 |\dot{\epsilon}|)} \times \begin{cases} \beta_1 \epsilon^2 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \epsilon_m^2, & \dot{\epsilon} > 0; \\ -\beta_2 \epsilon^2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \epsilon_m^2, & \dot{\epsilon} < 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\tau_{1,2}$ — постоянные коэффициенты, имеющие размерность времени; β , $\beta_{1,2}$ — безразмерные параметры нелинейности; $\tau_{1,2} \geq 0$, $\beta_1 + \beta_2 \geq 0$, $|\beta| \epsilon_m \ll 1$, $|\beta_{1,2}| \epsilon_m \ll 1$. В общем случае, $\tau_1 \neq \tau_2$, $\beta \neq \beta_1 \neq \beta_2$. При $\tau_{1,2} = 0$ [5] и $\beta = \beta_1 = \beta_2$ гистерезис (3) описывает симметричный квадратичный квазистатический гистерезис Давиденкова [1]. Гистерезис Давиденкова связывается с микропластической деформацией кристалла, вызванной обратимым смещением дислокаций под действием внешнего переменного напряжения. В выражении (3) первое (негистерезисное) слагаемое определяет ДМУ, второе (гистерезисное) — ДЗ.

В кристаллах с упругим гистерезисом (2) за частотно-зависящее насыщение ДЗ и ДМУ отвечает один и тот же множитель $(1 + \tau_0 |\dot{\epsilon}|)^{-1} \leq 1$, а с неупругим (3) — два разных: $(1 + \tau_1 |\dot{\epsilon}|)^{-1} \leq 1$ и $(1 + \tau_2 |\dot{\epsilon}|)^{-1} \leq 1$. Гистерезисные функции (2), (3) существенно различаются, поэтому и при $\tau_0 = 0$, $\tau_{1,2} = 0$ (нет насыщения) и при $\tau_0 |\dot{\epsilon}| > 1$, $\tau_{1,2} |\dot{\epsilon}| > 1$ (есть насыщение) амплитудные и частотные зависимости НАЭ в кристаллах с такими гистерезисами будут разными. При $\tau_0 = 0$, $\tau_{1,2} = 0$ нелинейные ДЗ и ДМУ не зависят от частоты волны ω , а при $\omega \tau_0 \epsilon_m \gg 1$ и $\omega \tau_{1,2} \epsilon_m \gg 1$ ДЗ и ДМУ будут обратно пропорциональны частоте ω , что соответствует результатам работ [28–30]. Гистерезисы (2) и (3) состоят из четырех ветвей ($1 - \epsilon \geq 0, \dot{\epsilon} > 0$; $2 - \epsilon \geq 0, \dot{\epsilon} < 0$; $3 - \epsilon \leq 0, \dot{\epsilon} < 0$ и $4 - \epsilon \leq 0, \dot{\epsilon} > 0$), переходящих друг в друга при $\epsilon = 0$ и $\epsilon = \pm \epsilon_m$. Для иллю-

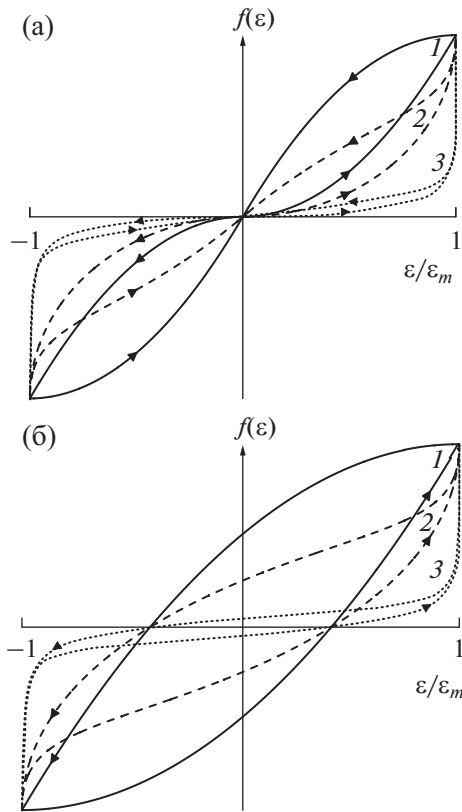


Рис. 1. Эволюция фигур Лиссажу для упругого (а) и неупругого (б) гистерезисов при увеличении частоты ω . Петли (1) соответствуют квазистатическим гистерезисам ($\omega\tau_{0,1,2}\varepsilon_m \ll 1$), увеличение номера петель соответствует росту частоты.

страции зависимости гистерезисов (2), (3) от частоты ω деформирования кристалла построим их фигуры Лиссажу, полагая что $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \sin \omega t$. На рис. 1 изображены семейства таких фигур при $\omega\tau_{0,1,2}\varepsilon_m \ll 1$ и $\omega\tau_{0,1,2}\varepsilon_m > 1$ – 2, 3. Из этих рисунков видно, что при $\omega\tau_{0,1,2}\varepsilon_m \ll 1$ фигуры Лиссажу функций (2), (3) соответствуют квазистатическим гистерезисам, а с ростом частоты ω форма динамических гистерезисов изменяется, при этом значения $S(\varepsilon_m)$ и $\langle f_\varepsilon(0) - f_\varepsilon(\varepsilon_m) \rangle$ уменьшаются, что соответствует насыщению нелинейных ДЗ и ДМУ, уменьшающихся с ростом частоты деформирования кристалла.

3. НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Подставляя уравнение состояния (1) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$ [33] и учитывая геометрическую дисперсию фазовой скорости продольных (вдоль оси x) упругих волн в стержне радиуса R

[34], получим одномерное волновое уравнение для продольной деформации $\varepsilon(x, t) = \partial U(x, t) / \partial x$:

$$\varepsilon_{tt} - C_0^2 \varepsilon_{xx} = -C_0^2 f_{xx}(\varepsilon) + v^2 r_0^2 [\varepsilon_{tt} - C_{sh}^2 \varepsilon_{xx}]_{xx}, \quad (4)$$

где $U(x, t)$ – смещение, $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$, ρ – плотность, v – коэффициент Пуассона, $r_0 = R/\sqrt{2}$, $C_{sh} = C_0/\sqrt{2(1+v)}$ – скорость сдвиговой волны, $R < \lambda/2$, λ – длина волны.

Граничное условие зададим в следующем виде: $\varepsilon(0, t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$, где ε_0 – начальная амплитуда волны. Подставляя в линеаризованное уравнение (3) $\varepsilon(x, t) \propto \exp\{j[\omega t - k(\omega)x]\}$, получаем дисперсионное соотношение $k = k(\omega)$ и выражение для фазовой скорости $C(\omega) = \omega/k(\omega)$ низкочастотных продольных волн в стержне:

$$k(\omega) = \pm \frac{\omega}{C_0} (1 + \eta \omega^2), \quad C(\omega) = C_0 (1 - \eta \omega^2), \quad (5)$$

где $\eta = (1 + 2\nu)v^2 R^2 / 8(1 + \nu)C_0^2$, $\eta \omega^2 \ll 1$.

Геометрическая дисперсия фазовой скорости не влияет на нелинейные ДЗ и ДМУ, но уменьшает эффективность генерации высших гармоник первичной волны.

Переходя в уравнении (4) к сопровождающей системе координат $\tau = t - x/C_0$, $x' = x \geq 0$, получим одноволновое уравнение для деформации $\varepsilon(x, \tau)$:

$$\varepsilon_x = -f_\tau(\varepsilon)/2C_0 + (\eta/C_0)\varepsilon_{\tau\tau\tau}. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) будем искать методом возмущений, полагая, что

$$\varepsilon(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varepsilon}_n(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(x) \sin[n\theta + \psi_n(x)], \quad (7)$$

где $\theta = \omega\tau + \Phi(x)$, $\varepsilon_n(x)$, $\Phi(x)$ и $\psi_n(x)$ – медленно-меняющиеся функции координаты x , $\psi_1(x) = 0$, $|\sum_{n=2}^{\infty} \bar{\varepsilon}_n(x, \theta)| \ll |\bar{\varepsilon}_1(x, \theta)|$, $\varepsilon_m(x) \approx \varepsilon_1(x)$, при этом амплитуды $\varepsilon_n(x)$ и фазы $\Phi(x)$, $\psi_{n \geq 2}(x)$ гармоник нелинейной волны $\varepsilon(x, \theta)$ зависят не только от координаты x , но и от начальной амплитуды ε_0 и от частоты ω .

Подставляя (7) в (6), получим уравнение для амплитуд $\varepsilon_n(x)$ и фаз $\Phi(x)$, $\psi_{n \geq 2}(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_n}{dx} \begin{pmatrix} \cos \psi_n \\ \sin \psi_n \end{pmatrix} \mp \varepsilon_n \left(n \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\psi_n}{dx} + \frac{\eta \omega^3 n^3}{C_0} \right) \begin{pmatrix} \sin \psi_n \\ \cos \psi_n \end{pmatrix} = \\ = \pm \frac{n\omega}{2C_0} \begin{pmatrix} a_n(\varepsilon_1) \\ b_n(\varepsilon_1) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{где } \begin{pmatrix} a_n(\varepsilon_1) \\ b_n(\varepsilon_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\bar{\varepsilon}_1(x, \theta)] \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} d\theta.$$

Производные $\Phi_x(x)$ и $\Psi_{nx}(x)$ определяют локальные изменения фазовых скоростей $C = C(\varepsilon_0, \omega)$ и $C_{n \geq 2} = C(\varepsilon_0, n\omega)$ первичной волны и ее гармоник:

$$\begin{aligned}\xi(\varepsilon_0, \omega, x) &= \frac{C(\varepsilon_0, \omega) - C(\omega)}{C_0} = \frac{1}{K} \frac{d\Phi(x)}{dx} + \eta\omega^2, \\ \xi_{n \geq 2}(\varepsilon_0, n\omega, x) &= \frac{C_n(\varepsilon_0, n\omega) - C(\varepsilon_0, \omega)}{C_0} + (n^2 - 1)\eta\omega^2 = \\ &= \frac{1}{nK} \frac{d\Psi_n(x)}{dx} + (n^2 - 1)\eta\omega^2,\end{aligned}$$

где $K = \omega/C_0$.

Определим эффективные (средние) нелинейные декремент затухания $\delta(\varepsilon_0)$ и относительные изменения фазовых скоростей $\xi(\varepsilon_0)$ и $\xi_n(\varepsilon_0)$ первичной волны и ее гармоник на расстоянии x от излучателя в зависимости от амплитуды ε_0 :

$$\begin{aligned}\mu(\varepsilon_0) &= -\frac{2\pi \ln[\varepsilon_1(x)/\varepsilon_0]}{Kx}, \\ \xi(\varepsilon_0) &= \frac{1}{Kx} \int_0^x \xi(\varepsilon_0, \omega, x') dx' = \frac{\Phi(x)}{Kx} + \eta\omega^2, \\ \xi_{n \geq 2}(\varepsilon_0) &= \frac{1}{nKx} \int_0^x \xi_n(\varepsilon_0, n\omega, x') dx' = \\ &= \frac{\Psi_n(x)}{nKx} + (n^2 - 1)\eta\omega^2.\end{aligned}\quad (9)$$

4.1. НАЭ в стержне с упругим гистерезисом

Из уравнений (8) получаем уравнения для амплитуд $e_{1,2,3}(z)$ и фаз $\Phi(z)$, $\Psi_{2,3}(z)$ первых трех гармоник нелинейной волны $\varepsilon = \varepsilon(x, \theta)$:

$$\begin{aligned}\frac{de_1}{dz} &= -\frac{e_1}{2\omega\tau_0} \times \\ &\times \left[\frac{4 - \pi}{4} - \frac{1}{\omega\tau_0\varepsilon_0e_1} + \frac{\pi}{2(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2} - \frac{\ln[1 + \omega\tau_0\varepsilon_0e_1]}{\omega\tau_0\varepsilon_0e_1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\sqrt{1 - (\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2}}{(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2} \arctg\left(\sqrt{\frac{1 - \omega\tau_0\varepsilon_0e_1}{1 + \omega\tau_0\varepsilon_0e_1}}\right) \right], \\ \frac{d\Phi}{dz} + m &= \frac{b}{4\omega\tau_0} \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{2}{\omega\tau_0\varepsilon_0e_1} + \frac{2[1 - (\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2] \ln[1 + \omega\tau_0\varepsilon_0e_1]}{(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2} + \frac{2}{b} \times \right. \\ &\times \left. \left[1 - \frac{\pi}{2\omega\tau_0\varepsilon_0e_1} + \frac{2\sqrt{1 - (\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2}}{\omega\tau_0\varepsilon_0e_1} \arctg\left(\sqrt{\frac{1 - \omega\tau_0\varepsilon_0e_1}{1 + \omega\tau_0\varepsilon_0e_1}}\right) \right] \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{de_2}{dz} \cos \psi_2 - e_2 \left(\frac{d(2\Phi + \Psi_2)}{dz} + 8m \right) \sin \psi_2 &= \\ &= \frac{ce_1}{\omega\tau_0} \left\{ \frac{5}{3} - \frac{\pi}{\omega\tau_0\varepsilon_0e_1} - \frac{2}{(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2[2 - (\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2] \sqrt{1 - (\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2}}{(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^3} \times \right. \\ &\quad \times \arctg\left(\sqrt{\frac{1 - \omega\tau_0\varepsilon_0e_1}{1 + \omega\tau_0\varepsilon_0e_1}}\right) + \frac{\pi}{(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^3} + \\ &\quad \left. + \frac{d}{c} \left[1 - \frac{2}{\omega\tau_0\varepsilon_0e_1} + \frac{[2 - (\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2] \ln[1 + \omega\tau_0\varepsilon_0e_1]}{(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2} \right] \right\}, \\ \frac{de_2}{dz} \sin \psi_2 + e_2 \left(\frac{d(2\Phi + \Psi_2)}{dz} + 8m \right) \cos \psi_2 &= \\ &= \frac{de_1}{\omega\tau_0} \left[\frac{3\pi - 8}{6} + \frac{1}{\omega\tau_0\varepsilon_0e_1} - \frac{\pi - 2}{(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2[1 - (\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2] \ln[1 + \omega\tau_0\varepsilon_0e_1]}{(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\sqrt{1 - (\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2}}{(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2} \arctg\left(\sqrt{\frac{1 - \omega\tau_0\varepsilon_0e_1}{1 + \omega\tau_0\varepsilon_0e_1}}\right) \right], \\ \frac{de_3}{dz} \cos \psi_3 - e_3 \left(\frac{d(3\Phi + \Psi_3)}{dz} + 27m \right) \sin \psi_3 &= \\ &= \frac{e_1}{\omega\tau_0} \left\{ \frac{10 - 3\pi}{4} - \frac{7}{2\omega\tau_0\varepsilon_0e_1} + \frac{3(5\pi - 8)}{4(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^3} - \frac{3\pi}{(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^4} + \frac{3[4 - 3(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2]}{2(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^3} \times \right. \\ &\quad \times \left[\ln[1 + \omega\tau_0\varepsilon_0e_1] + \frac{2\sqrt{1 - (\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2}}{\omega\tau_0\varepsilon_0e_1} \times \right. \\ &\quad \times \arctg\left(\sqrt{\frac{1 - \omega\tau_0\varepsilon_0e_1}{1 + \omega\tau_0\varepsilon_0e_1}}\right) \left. \right] \left. \right\}, \\ \frac{de_3}{dz} \sin \psi_3 + e_3 \left(\frac{d(3\Phi + \Psi_3)}{dz} + 27m \right) \cos \psi_3 &= \\ &= -\frac{e_1}{\omega\tau_0} \left\{ \frac{14 + 9b}{4} - \frac{9\pi + 22b}{4\omega\tau_0\varepsilon_0e_1} - \frac{3(2 + b)}{(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(\pi + 2b)}{(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^3} - \frac{3[4 - (\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2] \ln[1 + \omega\tau_0\varepsilon_0e_1]}{2(\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^3} \times \right. \\ &\quad \times \left[\frac{b \ln[1 + \omega\tau_0\varepsilon_0e_1]}{\omega\tau_0\varepsilon_0e_1} + \frac{2}{\sqrt{1 - (\omega\tau_0\varepsilon_0e_1)^2}} \times \right. \\ &\quad \times \arctg\left(\sqrt{\frac{1 - \omega\tau_0\varepsilon_0e_1}{1 + \omega\tau_0\varepsilon_0e_1}}\right) \left. \right] \left. \right\},\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\text{где } e_{1,2,3}(z) &= \frac{\varepsilon_{1,2,3}(z)}{\varepsilon_0}, \quad z = aKx, \quad a = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{2\pi}, \\ b &= \frac{\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}, \quad c = \frac{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}, \quad d =\end{aligned}$$

$$= \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}, m = \frac{\pi(1 + 2\nu)\nu^2 R^2 \omega^2}{4(1 + \nu)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)C_0^2} =$$

$$= \frac{2\pi\eta\omega^2}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}.$$

Уравнения (10) не имеют точных решений, поэтому далее мы приведем их приближенные аналитические и численные решения.

При малых скоростях деформации ($\omega\tau_0\varepsilon_0 \ll 1$, $\varepsilon_0 z \ll 1$) находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(z) &= \varepsilon_0(1 - \varepsilon_0 z/12), \quad \Phi(z) = -(m + b_1\varepsilon_0)z, \\ \mu(\varepsilon_0) &= \frac{\pi a \varepsilon_0}{6}, \quad \xi(\varepsilon_0) = -ab_1\varepsilon_0, \\ r(\varepsilon_0) &= \frac{\mu(\varepsilon_0)}{|\xi(\varepsilon_0)|} = \frac{\pi}{6|b_1|} = \text{const}, \\ \varepsilon_2(z) &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2\varepsilon_0^2} \left| \frac{\sin \psi_2(z)}{\psi_2(z)} \right| \ll \varepsilon_1(z), \\ \psi_2(z) &= b_1\varepsilon_0 z - 3mz + \psi_2(0), \\ \text{tg} \psi_2(0) &= b_2/a_2 = -[2 + (3\pi c/4d)]^{-1}, \\ \varepsilon_3(z) &= \sqrt{a_3^2 + b_3^2\varepsilon_0^2} \left| \frac{\sin \psi_3(z)}{\psi_3(z)} \right| \ll \varepsilon_1(z), \\ \psi_3(z) &= (3/2)b_1\varepsilon_0 z - 12mz + \psi_3(0), \\ \text{tg} \psi_3(0) &= b_3/a_3 = 4b, \end{aligned} \quad (11)$$

где $b_1 = \pi/8 + b/3$, $a_2 = -\pi c/8 - d/3$, $b_2 = d/6$, $a_3 = 1/20$, $b_3 = b/5$.

В режиме насыщения ($\omega\tau_0\varepsilon_0 \gg 1$) получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(z) &= \varepsilon_0 \exp[-(4 - \pi)z/8\omega\tau_0], \\ \Phi(z) &= -\frac{(1 + b)z \ln(\omega\tau_0\varepsilon_0)}{2\omega\tau_0} - mz, \quad \mu(\varepsilon_0) = \frac{\pi(4 - \pi)a}{4\omega\tau_0}, \\ \xi(\varepsilon_0) &= -\frac{(1 + b)a \ln(\omega\tau_0\varepsilon_0)}{2\omega\tau_0}, \\ r(\varepsilon_0) &= \frac{\mu(\varepsilon_0)}{|\xi(\varepsilon_0)|} = \frac{(4 - \pi)\pi}{2(1 + b) \ln(\omega\tau_0\varepsilon_0)} \neq \text{const}, \\ \varepsilon_2(z) &\approx \frac{\sqrt{(c + d)^2 + 4d^2\varepsilon_0 z \ln(\omega\tau_0\varepsilon_0)}}{\omega\tau_0} \times \\ &\times \left| \frac{\sin[\psi_2(z) - \psi_2(0)]}{\psi_2(z) - \psi_2(0)} \right|, \\ \psi_2(z) &\approx \frac{(1 + b)z \ln(\omega\tau_0\varepsilon_0)}{2\omega\tau_0} - 3mz + \psi_2(0), \\ \text{tg} \psi_2(0) &\approx \frac{2d}{c + d}, \quad \varepsilon_3(z) \approx \frac{3(1 + b)\varepsilon_0 z \ln(\omega\tau_0\varepsilon_0)}{2\omega\tau_0} \times \\ &\times \left| \frac{\sin[\psi_3(z) - \psi_3(0)]}{\psi_3(z) - \psi_3(0)} \right|, \quad \psi_3(z) \approx \frac{3(1 + b)z \ln(\omega\tau_0\varepsilon_0)}{4\omega\tau_0} - \\ &- 12mz + \psi_3(0), \quad \text{tg} \psi_3(0) \approx -\pi/2. \end{aligned} \quad (12)$$

4.2. НАЭ в стержне с неупругим гистерезисом

Аналогичные уравнения для амплитуд $e_{1,2,3}(z)$ и фаз $\Phi(z)$, $\psi_{2,3}(z)$ для стержня с неупругим гистерезисом (3) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dz} &= -\frac{\pi e_1}{4\omega\tau_2} \left[1 - \frac{4}{\pi\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1} + \frac{2}{(\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1)^2} \times \right. \\ &\times \left. \left(1 - \frac{4\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{1 - \omega\tau_2\varepsilon_0 e_1}{1 + \omega\tau_2\varepsilon_0 e_1}}\right)}{\pi\sqrt{1 - (\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1)^2}} \right) \right], \\ \frac{d\Phi}{dz} + m &= \frac{\delta}{2\omega\tau_1} \times \\ &\times \left[1 - \frac{\pi}{2\omega\tau_1\varepsilon_0 e_1} + \frac{2\sqrt{1 - (\omega\tau_1\varepsilon_0 e_1)^2}}{\omega\tau_1\varepsilon_0 e_1} \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{1 - \omega\tau_1\varepsilon_0 e_1}{1 + \omega\tau_1\varepsilon_0 e_1}}\right) \right], \\ \frac{de_2}{dz} \cos \psi_2 - e_2 \left(\frac{d(2\Phi + \psi_2)}{dz} + 8m \right) \sin \psi_2 &= \\ = \frac{\alpha e_1}{\omega\tau_2} \left[1 - \frac{3\pi}{5\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1} - \frac{6}{5(\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1)^2} + \frac{3\pi}{5(\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1)^3} - \right. \\ &- \frac{6[2 - (\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1)^2]\sqrt{1 - (\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1)^2}}{5(\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1)^3} \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{1 - \omega\tau_2\varepsilon_0 e_1}{1 + \omega\tau_2\varepsilon_0 e_1}}\right) \Big], \\ \frac{de_2}{dz} \sin \psi_2 + e_2 \left(\frac{d(2\Phi + \psi_2)}{dz} + 8m \right) \cos \psi_2 &= 0, \\ \frac{de_3}{dz} \cos \psi_3 - e_3 \left(\frac{d(3\Phi + \psi_3)}{dz} + 27m \right) \sin \psi_3 &= \\ = -\frac{1}{\omega^2\tau_2^2\varepsilon_0} \left\{ 1 - \frac{3\pi}{2\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1} - \frac{12}{(\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1)^2} + \frac{6\pi}{(\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1)^3} - \right. \\ &- \frac{6[4 - 3(\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1)^2]}{(\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1)^3\sqrt{1 - (\omega\tau_2\varepsilon_0 e_1)^2}} \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{1 - \omega\tau_2\varepsilon_0 e_1}{1 + \omega\tau_2\varepsilon_0 e_1}}\right) \Big\}, \\ \frac{de_3}{dz} \sin \psi_3 + e_3 \left(\frac{d(3\Phi + \psi_3)}{dz} + 27m \right) \cos \psi_3 &= \\ = -\frac{\delta e_1}{\omega\tau_1} \left\{ 7 - \frac{9\pi}{4\omega\tau_1\varepsilon_0 e_1} - \frac{6}{(\omega\tau_1\varepsilon_0 e_1)^2} + \frac{3\pi}{(\omega\tau_1\varepsilon_0 e_1)^3} - \right. \\ &- \frac{3[4 - (\omega\tau_1\varepsilon_0 e_1)^2]\sqrt{1 - (\omega\tau_1\varepsilon_0 e_1)^2}}{(\omega\tau_1\varepsilon_0 e_1)^3} \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{1 - \omega\tau_1\varepsilon_0 e_1}{1 + \omega\tau_1\varepsilon_0 e_1}}\right) \Big\}, \end{aligned}$$

где $e_{1,2,3}(z) = \frac{\varepsilon_{1,2,3}(z)}{\varepsilon_0}$, $z = aKx$, $a = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\pi}$, $\delta = \frac{8\beta}{\beta_1 + \beta_2}$, $\alpha = \frac{10(\beta_1 - \beta_2)}{3(\beta_1 + \beta_2)}$, $m = \frac{\pi(1 + 2\nu)\nu^2 R^2 \omega^2}{4(1 + \nu)(\beta_1 + \beta_2)C_0^2} = \frac{2\pi\eta\omega^2}{\beta_1 + \beta_2}$.

При малых скоростях деформации ($\omega\tau_{1,2}\varepsilon_0 \ll 1$, $\varepsilon_0 z \ll 1$) находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(z) &= \varepsilon_0[1 - (2\varepsilon_0 z/3)], \quad \Phi(z) = -[m + (\pi\delta\varepsilon_0/8)]z, \\ \mu(\varepsilon_0) &= \frac{4\pi a\varepsilon_0}{3}, \quad \xi(\varepsilon_0) = -\frac{\pi a\delta\varepsilon_0}{8}, \\ r(\varepsilon_0) &= \frac{\mu(\varepsilon_0)}{|\xi(\varepsilon_0)|} = \frac{4(\beta_1 + \beta_2)}{3|\beta|} = \text{const}, \\ \varepsilon_2(z) &= \frac{3\pi\alpha\varepsilon_0^2 z}{40} \left| \frac{\sin \psi_2(z)}{\psi_2(z)} \right| \ll \varepsilon_1(z), \\ \psi_2(z) &= (\pi/8)\delta\varepsilon_0 z - 3mz, \\ \varepsilon_3(z) &= \frac{2\varepsilon_0^2 z}{5} \left| \frac{\sin \psi_3(z)}{\psi_3(z)} \right| \ll \varepsilon_1(z), \\ \psi_3(z) &= \frac{3\pi\delta\varepsilon_0 z}{16} - \frac{3\omega\tau_1\varepsilon_0}{4\pi} - 12mz. \end{aligned} \quad (14)$$

В режиме насыщения ($\omega\tau_{1,2}\varepsilon_0 \gg 1$) получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(z) &= \varepsilon_0 \exp[-(\pi z/4\omega\tau_2)], \\ \Phi(z) &= -(\delta/2\omega\tau_1)z \ln(\omega\tau_1\varepsilon_0) - mz, \\ \mu(\varepsilon_0) &= \frac{\pi^2 a}{2\omega\tau_2}, \quad \xi(\varepsilon_0) = -\frac{\delta a \ln(\omega\tau_1\varepsilon_0)}{2\omega\tau_1}, \\ r(\varepsilon_0) &= \frac{\mu(\varepsilon_0)}{|\xi(\varepsilon_0)|} = \frac{\pi^2 \tau_1}{\delta \tau_2 \ln(\omega\tau_1\varepsilon_0)} \neq \text{const}, \\ \varepsilon_2(z) &\approx \frac{3\alpha\varepsilon_0 z \ln(\omega\tau_2\varepsilon_0)}{5\omega\tau_2} \left| \frac{\sin \psi_2(z)}{\psi_2(z)} \right| \ll \varepsilon_1(z), \\ \psi_2(z) &\approx \frac{\delta z \ln(\omega\tau_1\varepsilon_0)}{2\omega\tau_1} - 3mz, \\ \varepsilon_3(z) &\approx \frac{3\delta\varepsilon_0 z \ln(\omega\tau_1\varepsilon_0)}{2\omega\tau_1} \left| \frac{\sin \psi_3(z)}{\psi_3(z)} \right| \ll \varepsilon_1(z), \\ \psi_3(z) &\approx \frac{3\delta z \ln(\omega\tau_1\varepsilon_0)}{4\omega\tau_1} - 12mz - \pi/2. \end{aligned} \quad (15)$$

5. СРАВНЕНИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ НАЭ В СТЕРЖНЯХ С УПРУГИМ И НЕУПРУГИМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

Из выражений (11), (14) следует, что в малоамплитудном режиме амплитудные зависимости НАЭ для стержней с упругим (2) и неупругим (3) гистерезисом одинаковы: $\delta(\varepsilon_0) \propto \varepsilon_0$, $\xi(\varepsilon_0) \propto \varepsilon_0$, $r(\varepsilon_0) = \text{const}$, $\varepsilon_{2,3}(\varepsilon_0) \propto \varepsilon_0^2$. В этом режиме независимыми характеристиками нелинейной волны являются $\delta(\varepsilon_0)$, $\xi(\varepsilon_0)$ и $\varepsilon_2(\varepsilon_0)$, а $\varepsilon_3(\varepsilon_0)$ можно вычислить по измеренным значениям $\delta(\varepsilon_0)$ и $\xi(\varepsilon_0)$. В результате из сравнения и соответствия (или несоответствия) вычисленной (для упругого и неупругого гистерезисов) и измеренной в эксперименте амплитуде $\varepsilon_3(\varepsilon_0)$ можно определить, каким

гистерезисом определяются нелинейные эффекты АЗВТ в исследованном кристалле.

В режиме насыщения амплитудные и частотные зависимости $\mu(\varepsilon_0)$, $\xi(\varepsilon_0)$, $r(\varepsilon_0)$, $\varepsilon_2(\varepsilon_0)$ и $\varepsilon_3(\varepsilon_0)$ для разных гистерезисов качественно совпадают. В этом режиме при увеличении амплитуды ε_0 имеет место насыщение только для $\mu(\varepsilon_0)$, а для $\xi(\varepsilon_0)$ наблюдается логарифмически медленный рост. При увеличении частоты ω наблюдается уменьшение $\mu(\varepsilon_0)$ и $|\xi(\varepsilon_0)|$, но по разным законам: $\mu(\varepsilon_0) \propto (\omega\tau_{0,2})^{-1}$, $|\xi(\varepsilon_0)| \propto \ln(\omega\tau_{0,1}\varepsilon_0)/(\omega\tau_{0,1})$, так что $r(\varepsilon_0) \propto \ln^{-1}(\omega\tau_{0,1}\varepsilon_0) \neq \text{const}$. Ответ на вопрос, какими гистерезисом (упругим или неупругим) определяются эффекты АЗВТ в исследованном кристалле, можно получить из количественного соответствия установленных в эксперименте амплитудных зависимостей НАЭ с результатами численных решений уравнений (10), (13) при параметрах гистерезисов (2) и (3), определенных в малоамплитудном режиме.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО СЧЕТА

Выражения (11), (12) и (14), (15) определяют закономерности НАЭ в стержнях с упругим (2) и неупругим (3) гистерезисами в предельных режимах: при $\omega\tau_0\varepsilon_0 \ll 1$, $\omega\tau_{1,2}\varepsilon_0 \ll 1$ (при малых скоростях деформации, когда нет насыщения) и при $\omega\tau_0\varepsilon_0 \gg 1$, $\omega\tau_{1,2}\varepsilon_0 \gg 1$ (в режиме насыщения). Более полное представление о закономерностях НАЭ (при конкретных значениях дисперсионного параметра m и параметров гистерезисов) дают результаты численного решения уравнений (10), (13). На рис. 2 приведены зависимости $\varepsilon_{1,2,3}(z)$ от z для упругого и неупругого гистерезисов при $\varepsilon_0 = 3 \times 10^{-5}$, $m = 10^{-4}$, $b = 1/5$, $c = 1/10$, $d = 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = \beta_1 + \beta_2$, $(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) + 8(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4)/3\pi = 8\beta$, $\tau_0 = \tau_{1,2}$, $\delta = 1 + 8b/3\pi \approx 1.17$, $\alpha = 5c/3 = 1/6$ и различных значениях параметра $\omega\tau_{0,2}\varepsilon_0 = 0; 3; 10; 30$.

Из рис. 2 видно, что с ростом z амплитуда ε_1 первой гармоники монотонно уменьшается (из-за гистерезисных потерь), причем для упругого гистерезиса медленнее, чем для гистерезиса неупругого. С ростом параметра $\omega\tau_{0,2}\varepsilon_0$ (из-за уменьшения гистерезисных потерь) амплитуда ε_1 уменьшается медленнее. Амплитуды $\varepsilon_{2,3}(z)$ второй и третьей гармоник испытывают пространственные осцилляции (биения), что связано с дисперсией фазовой скорости продольных волн в стержне. С ростом z , из-за гистерезисных потерь волны основной частоты, амплитуды этих биений уменьшаются.

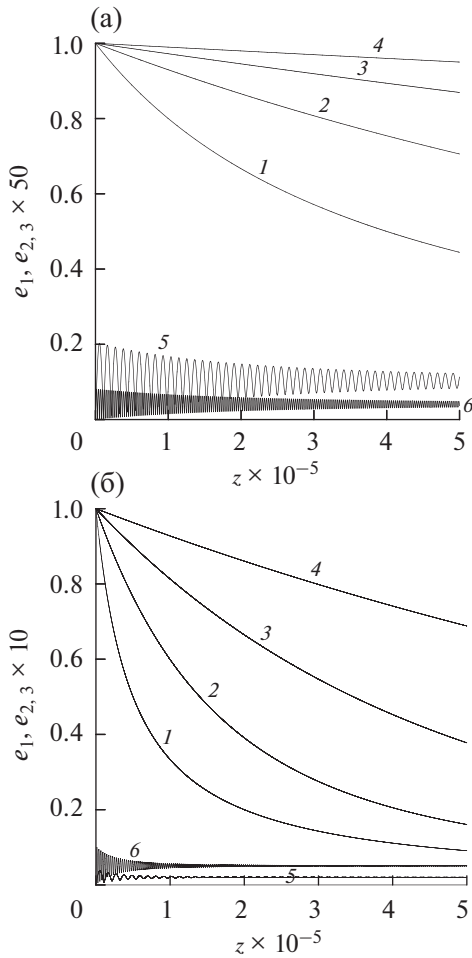


Рис. 2. Зависимости e_1 — линии 1, 2, 3, 4, e_2 — 5 и e_3 — 6 от z для упругого (а) и неупругого (б) гистерезисов при $\epsilon_0 = 3 \times 10^{-5}$, $m = 10^{-4}$, $\tau_0 = \tau_{1,2}$, $b = 1/5$, $c = 1/10$, $d = 0$, $\delta = 1 + 8b/3\pi \approx 1.1697$, $\alpha = 5c/3 = 1/6$ и при различных значениях параметра $\omega\tau_{0,2}$: $\omega\tau_{0,2} = 0$ — линии 1, 5, 6, $\omega\tau_{0,2} = 10^5 - 2$, $\omega\tau_{0,2} = 3.3 \times 10^5 - 3$, $\omega\tau_{0,2} = 10^6 - 4$.

Более информативными зависимостями характеристик нелинейной волны являются зависимости $\epsilon_{1,2,3}(\epsilon_0)$ и $\mu(\epsilon_0)$, $\xi(\epsilon_0)$, $r(\epsilon_0)$ от ϵ_0 (при $z = \text{const}$), поскольку в твердом теле сложно менять положение приемника (координату z , т.е. x), но можно легко менять амплитуду ϵ_0 первичной волны. На рис. 3 приведены зависимости $\epsilon_{1,2,3}(z)$ от ϵ_0 для упругого и неупругого гистерезисов при $z = 2 \times 10^6$ (и тех же параметрах гистерезисов, что и на рис. 2). Из рис. 3 видно, что при $\tau_{0,2} = 0$ с ростом ϵ_0 , сначала — $\epsilon_1 \propto \epsilon_0$, а затем ϵ_1 стремится к насыщению: $\epsilon_1 = \text{const}$. При $\tau_{0,2} > 0$ с ростом ϵ_0 имеем: при $\tau_{0,2}\epsilon_0 \ll 1$ и $\tau_{0,2}\epsilon_0 \gg 1$ — $\epsilon_1 \propto \epsilon_0$. Что же касается амплитуд $\epsilon_{2,3}$, то при $\tau_{0,2}\epsilon_0 \ll 1$ имеем $\epsilon_{2,3} \propto \epsilon_0^2$, а при $\tau_{0,2}\epsilon_0 > 1$ зависимо-

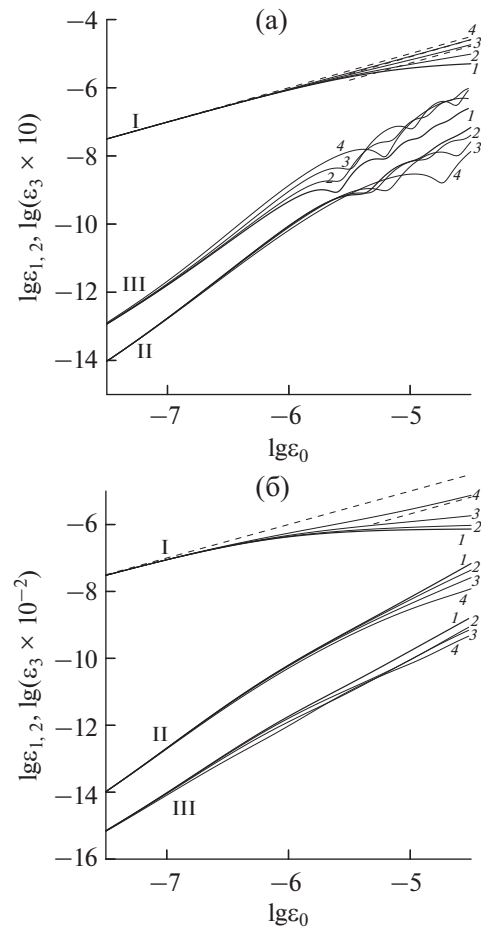


Рис. 3. Зависимости ϵ_1 — линии I, ϵ_2 — II и ϵ_3 — III от ϵ_0 для упругого (а) и неупругого (б) гистерезисов при $z = 2 \times 10^6$, $m = 10^{-4}$, $\tau_0 = \tau_{1,2}$, $b = 1/5$, $c = 1/10$, $d = 0$, $\delta = 1 + 8b/3\pi \approx 1.1697$, $\alpha = 5c/3 = 1/6$ и при различных значениях параметров $\omega\tau_{0,2}$: $\omega\tau_{0,2} = 0$ — линии I, $\omega\tau_{0,2} = 10^5 - 2$, $\omega\tau_{0,2} = 3.3 \times 10^5 - 3$, $\omega\tau_{0,2} = 10^6 - 4$. Штриховые линии соответствуют линейным зависимостям ϵ_1 от ϵ_0 .

сти $\epsilon_{2,3}$ от ϵ_0 различны для различных гистерезисов. Для сред с упругим гистерезисом амплитуды $\epsilon_{2,3}$ в среднем растут, но при $\epsilon_0 > 4 \times 10^{-6}$ испытывают осцилляции, связанные с проявлением нелинейной дисперсии фазовой скорости. Для сред с неупругим гистерезисом амплитуды $\epsilon_{2,3}$ растут монотонно — в средах с неупругим гистерезисом нелинейной дисперсии нет.

На рис. 4 приведены зависимости $\mu(\epsilon_0)$, $\xi(\epsilon_0)$ и $r(\epsilon_0)$ от ϵ_0 для упругого и неупругого гистерезиса (при тех же параметрах гистерезисов, что и на рис. 2). Из рис. 4 видно, что в мало-амплитудном режиме ($\tau_{0,1,2}\omega\epsilon_0 \ll 1$) зависимости $\mu = \mu(\epsilon_0)$ и $\xi = \xi(\epsilon_0)$ для упругого и неупругого гистерезисов одинаковы: $\mu(\epsilon_0) \propto \epsilon_0$, $\xi(\epsilon_0) \propto \epsilon_0$, поэтому

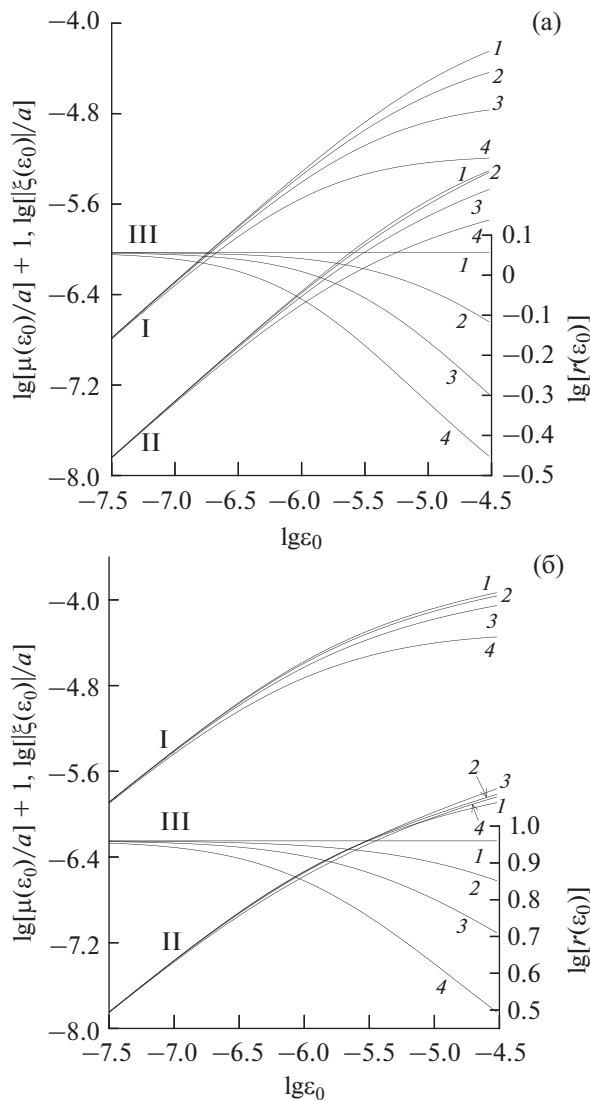


Рис. 4. Зависимости $\mu(\epsilon_0)$ — линии I, $\zeta(\epsilon_0)$ — линии II и $r(\epsilon_0)$ — линии III от ϵ_0 для упругого (а) и неупругого (б) гистерезисов при $z = 2 \times 10^6$, $m = 10^{-4}$, $\tau_0 = \tau_{1,2}$, $b = 1/5$, $c = 1/10$, $d = 0$, $\delta = 1 + 8b/3\pi \approx 1.1697$, $\alpha = 5c/3 = 1/6$ и при различных значениях параметров $\omega\tau_{0,2}$: $\omega\tau_{0,2} = 0$ — линии 1, $\omega\tau_{0,2} = 10^5 - 2$, $\omega\tau_{0,2} = 3.3 \times 10^5 - 3$, $\omega\tau_{0,2} = 10^6 - 4$.

$r(\epsilon_0) = \text{const}$. В режиме насыщения ($\tau_{0,1,2}\omega\epsilon_0 \gg 1$) эти зависимости различны: $\mu(\epsilon_0) \propto (\omega\tau_{0,2})^{-1}$, $|\zeta(\epsilon_0)| \propto \ln(\omega\tau_{0,1}\epsilon_0)/(\omega\tau_{0,1})$, так что с ростом параметра $\tau_{0,1,2}\omega\epsilon_0$ отношение $r(\epsilon_0) \propto 1/\ln(\tau_{0,1,2}\omega\epsilon_0)$ уменьшается. При этом для упругого гистерезиса отношение $r(\epsilon_0)$ существенно меньше, чем для неупругого.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведены аналитические и численные исследования нелинейных акустических эффектов (НАЭ), возникающих при распространении первоначально гармонических продольных волн в стержнях из кристаллических твердых тел с гистерезисной нелинейностью и насыщением амплитудно-зависимого внутреннего трения, уменьшающимся с ростом частоты волны.

Рассмотрены два основных вида динамических гистерезисов кристаллических твердых тел: упругий и неупругий. Методом возмущений, с учетом геометрической дисперсии фазовой скорости продольных волн в стержне, определены амплитудно-частотные зависимости НАЭ в мало-амплитудном режиме и режиме насыщения. В результате исследований:

получены выражения для нелинейных потерь и изменения скорости распространения первичной волны, а также для амплитуд второй и третьей ее гармоник;

проведен сравнительный анализ закономерностей нелинейных эффектов и предложена методика определения вида гистерезиса, основанная на соответствии полученных аналитических и экспериментально установленных закономерностей НАЭ в таких средах.

Экспериментальное исследование амплитудно-частотных зависимостей НАЭ для гистерезисных твердых тел и их сравнение с теоретическими — для сред с различными гистерезисами (упругим и неупругим), будет способствовать правильному выбору динамических гистерезисных уравнений состояния кристаллов и определению физических механизмов их гистерезисной нелинейности.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-22-00057 (<https://rscf.ru/project/23-22-00057/>, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук”, Нижегородская обл.).

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях // ЖТФ. 1938. Т. 8. № 6. С. 483–499.
2. Granato A.V., Lucke K. Theory of mechanical damping due to dislocations // J. Appl. Phys. 1956. V. 27. № 5. P. 583–593.
3. Asano S. Theory of nonlinear damping due to dislocation hysteresis // J. Phys. Soc. Jap. 1970. V. 29. № 4. P. 952–963.
4. Лебедев А.Б. Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационно-

- го гистерезиса // ФТТ. 1999. Т. 41. № 7. С. 1214–1221.
5. *Nazarov V.E., Radostin A.V.* Nonlinear Wave Processes in Elastic Micro-inhomogeneous Solids. Wiley, 2015. 251 p.
 6. *Takahachi S.* Internal friction and critical stress of copper alloys // J. Phys. Soc. Jap. 1956. V. 11. № 12. P. 1253–1261.
 7. *Novick A.S.* Variation of amplitude-dependent internal friction in single crystals of copper with frequency and temperature // Phys. Rev. 1950. V. 80. № 2. P. 249–257.
 8. *Beshers D.N.* Internal friction of copper and copper alloys // J. Appl. Phys. 1959. V. 30. № 2. P. 252–258.
 9. *Read T.A.* The internal friction of single metal crystals // Phys. Rev. 1940. V. 58. P. 371–380.
 10. *Ниблетт Д., Уилкс Дж.* Внутреннее трение в металлах, связанное с дислокациями // УФН. 1963. Т. 80. № 1. С. 125–187.
 11. *Кустов С.Б., Голяндин С.Н., Никифоров А.В., Кардашев Б.К.* Исследование частотной зависимости амплитудно-зависимого внутреннего трения в кристаллах LiF и NaCl // ФТТ. 1989. Т. 31. № 2. С. 260–263.
 12. *Hiki Y.* Internal friction of lead // J. Phys. Soc. Jpn. 1958. V. 13. P. 1138–1144.
 13. Ультразвуковые методы исследования дислокаций / Сб. статей. Пер. с англ. и нем. Под ред. Л.Г. Меркулова. М.: ИИЛ, 1963. 376 с.
 14. *Левин В.П., Проскурин В.Б.* Дислокационная неупругость в металлах. М.: Наука, 1993. 272 с.
 15. *Хоникомб Р.* Пластическая деформация металлов. Пер. с англ. Под ред. Б.Я. Любова. М. 1972. 408 с.
 16. *Судзуки Т., Есинага Х., Такеути С.* Динамика дислокаций и пластичность. М.: Мир, 1989. 296 с.
 17. Application to quantum and solid state physics, in Physical Acoustics and Methods, Edited by Warren P. Mason, V. 4, Part A. Academic Press, New York and London, 1966.
 18. *Назаров В.Е.* Влияние структуры меди на ее акустическую нелинейность // ФММ. 1991. Т. 71. № 3. С. 172–178.
 19. *Назаров В.Е.* Амплитудно-зависимое внутреннее трение свинца // ФММ. 1999. Т. 88. № 4. С. 82–90.
 20. *Kustov S., Gremaud G., Benoit W., Nishino Y., Asano S.* Strain amplitude-dependent anelasticity in Cu–Ni solid solution due to thermally activated and athermal dislocation-point obstacle interactions // J. Appl. Phys. 1999. V. 85. № 3. P. 1444–1459.
 21. *Gelli D.* A Qualitative model for amplitude dependent dislocation damping // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. № 4. P. 1547–1550.
 22. *Голяндин С.Н., Кустов С.Б., Сапожников К.В., Емельянов Ю.А., Синапи А.Б., Никаноров С.П., Робинсон У.Х.* Влияние температуры и деформации на амплитудно-зависимое трение высокочистого алюминия // ФТТ. 1998. Т. 40. № 10. С. 1839–1844.
 23. *Сапожников К.В., Голяндин С.Н., Кустов С.Б.* Амплитудная зависимость внутреннего трения и дефекта модуля Юнга поликристаллического индия // ФТТ. 2010. Т. 52. № 1. С. 43–47.
 24. *Назаров В.Е.* Об амплитудной зависимости внутреннего трения цинка // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 2. С. 228–233.
 25. *Назаров В.Е., Радостин А.В.* Экспериментальное исследование эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения в резонаторе из песчаника // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 4. С. 524–532.
 26. *Назаров В.Е., Кияшко С.Б.* Амплитудно-зависимое внутреннее трение и генерация гармоник в средах с гистерезисной нелинейностью и линейной диссипацией // Изв. Вузов. Радиофизика. 2013. Т. 56. № 10. С. 762–773.
 27. *Назаров В.Е., Кияшко С.Б.* Модифицированный гистерезис Давиденкова и распространение пилообразных волн в поликристаллах с насыщением гистерезисных потерь // ФММ. 2016. Т. 117. № 8. С. 793–799.
 28. *Swartz J.C., Weertman J.* Modification of the Koehler–Granato–Lucke dislocation damping theory // J. Appl. Phys. 1961. V. 32. № 10. P. 1860–1865.
 29. *Lucke K., Granato A.V., Teutoniko I.J.* Thermally assisted unpinning of a dislocation double loop // J. Appl. Phys. 1968. V. 39. № 11. P. 5181–5191.
 30. *Blair D.G.* Theory of high-temperature breakaway of dislocations from a row of randomly placed pinning agents // J. Appl. Phys. 1972. V. 43. № 1. P. 37–46.
 31. *Granato A.V., Lucke K.* Temperature dependence of amplitude-dependent dislocation damping // J. Appl. Phys. 1981. V. 52. № 12. P. 7136–7142.
 32. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
 33. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
 34. *Naugol'nykh K.A., Ostrovsky L.A.* Nonlinear Wave Processes in Acoustics. Cambridge. 1998. 298 p.