

УДК 523–62,523.9

# ВЛИЯНИЕ ЦИКЛА ГЛЕЙСБЕРГА НА ВАРИАЦИИ ПЕРИОДА 11-ЛЕТНЕГО ЦИКЛА СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ В 1700–2021 гг.

© 2023 г. Н. Г. Птицына<sup>1</sup>, \*, И. М. Демина<sup>1</sup><sup>1</sup>Санкт-Петербургский филиал Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН (СПбФ ИЗМИРАН), Санкт-Петербург, Россия

\*e-mail: nataliaptitsyna@ya.ru

Поступила в редакцию 02.09.2022 г.

После доработки 04.10.2022 г.

Принята к публикации 28.11.2022 г.

При помощи вейвлет-анализа проведено исследование спектрального состава числа солнечных пятен  $SN$  в течение 1700–2021 гг. Кроме доминирующей 11-летней составляющей, в спектре прослеживаются две мощные составляющие цикла Глейсберга: до 1880 г. ветвь с периодом  $\sim 60$  лет, с 1850 г.  $\sim 115$  лет. Найдено, что ряды длины и амплитуды солнечного цикла в целом находятся в обратной зависимости (коэффициент корреляции  $k = -0.5...-0.63$ ). Лаг между рядами, при котором достигается максимум антикорреляции, зависит от времени. В XVIII–начале XIX века лаг равен одному циклу, в XIX в. — двум циклам, а начиная с 1950 г. и до нашего времени лаг уменьшается до 2 лет. Выделены квазипериодические структуры, которые характерны для длительных периодов пониженной солнечной активности. Такая спектральная особенность в  $\sim 1800$  г. (минимум Дальтона) вызвана влиянием 60-летней ветви, а формирующаяся с начала XXI в. — более слабым влиянием околостолетней. Поэтому следует ожидать, что ближайшие солнечные циклы будут более высокими и менее длинными, чем в период минимума Дальтона. Показано, что вариации длины солнечного цикла за последние 321 год могут быть описаны в рамках модели, представляющей собой 11-летнее колебание, которое подвергается частотной модуляции ветвями цикла Глейсберга (60 и 115 лет) с изменяющимся во времени влиянием модулятора.

DOI: 10.31857/S0016794022600508, EDN: UIUBPY

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Квазипериодические изменения различной длины являются одним из самых характерных свойств солнечной активности. Для исследования таких вариаций обычно используются индексы солнечной активности (СА), связанные с количественной оценкой пятнообразования на поверхности Солнца. Наиболее часто употребляемым численным индексом СА является число Вольфа  $W$  или его откорректированный вариант  $SN$ .  $W$  — это комбинация числа групп пятен и количества индивидуальных пятен, с учетом поправки, связанной с приведением наблюдений различных обсерваторий к единой системе. В спектре СА доминирует 11-летний цикл Швабе, который обычно называется солнечным циклом. Считается, что 11-летний цикл вызван работой солнечного динамо, однако физическая природа его до конца не выяснена.

Найдено, что в СА существуют и другие вариации с разными периодами [см., Hathaway, 2015; Обридо и Наговицын, 2017]. Некоторые из этих периодов имеют длину большую, чем 11 лет, —

от нескольких десятков до сотен и даже тысяч лет. В этом диапазоне наиболее широко исследованы периодичность, известная как вековой цикл Глейсберга, и двухвековой цикл Зюсса. В разные эпохи цикл Глейсберга состоит из двух или трех ветвей, периоды которых лежат в диапазоне от  $\sim 60$  до  $\sim 140$  лет [Наговицын, 2001; Ogurtsov et al., 2002; Komitov et al., 2016; Птицына и Демина, 2022]. Цикл Зюсса, обнаруженный в спектре различных космогенных изотопов, имеет более простую структуру одной ветви, период которой меняется в пределах 170–250 лет [Ogurtsov et al., 2002; Komitov et al., 2016; Птицына и Демина, 2022].

Множество работ посвящено выявлению закономерностей солнечного 11-летнего цикла, связям параметров цикла между собой и их изменениями во времени. Для этого использовались как данные телескопических наблюдений, так и реконструкции в прошлое. Результаты таких исследований представляют большой интерес потому, что это может помочь понять физику солнечного динамо. Кроме того, на знании особенностей цикла, его статистических характеристик и длиннопериодных вариаций строятся (с большим или

меньшим успехом) краткосрочные и долгосрочные прогнозы солнечной активности.

Установлено, что амплитуда солнечного цикла меняется с течением времени: от 73.3 в цикле 6 до 269.3 в цикле 19. Длина солнечного цикла также не остается постоянной. Длина, установленная по эпохам минимумов, изменяется от 8.2 до 15.0 лет, а установленная по эпохам максимумов — от 7.3 до 17.1 лет [Richards et al., 2009]. При этом длительность цикла изменяется в соответствии с уровнем СА таким образом, что во время высокой активности наблюдаются короткие циклы, в то время как более длинные циклы характерны для низкой активности. Максимальная длина цикла в 17 лет была обнаружена в минимуме СА (минимум Дальтона) в районе 1800 г. (цикл 4).

Глейсберг [Gleissberg, 1944, 1965] нашел, что изменения амплитуды 11-летнего цикла происходят квазипериодическим образом с периодом, близким к 80 годам. Это подтвердилось во многих других исследованиях [см. Usoskin, 2017 и ссылки там]. В простых моделях солнечная активность рассматривалась как 11-летняя синусоида, модулированная по амплитуде циклом Глейсберга с периодом ~80 лет [Sonett, 1983].

Изменения в длине 11-летнего цикла исследовались менее детально. В работе [Gleissberg, 1944] указывалось на существование длиннопериодных изменений в длине солнечного цикла с периодом ~80 лет. В работе [Птицына и Демина, 2022] при анализе реконструированных данных о СА в 1000–2000 гг. допускалась возможность модуляции длины солнечного цикла длинноволновым процессом с периодом 224 г. В работе [Richards et al., 2009] при спектральном анализе данных о СА за 1610–2000 гг. найдено существование вариаций в длине 11-летнего цикла с периодом 188–249 лет, а также 78 и 40 лет. Однако какой именно период является определяющим в изменениях длины 11-летнего цикла, каковы особенности и природа этих изменений, оставалось неясным.

В данной статье мы подробно исследовали вариации длины солнечного цикла и их характерные особенности в 1700–2021 гг. в спектральной и временной областях. Интерпретация результатов проведена в рамках модели, представляющей собой 11-летнее колебание, которое подвергается частотной модуляции разными ветвями цикла Глейсберга с изменяющимся во времени влиянием модулятора.

## 2. ДАННЫЕ И МЕТОДЫ

В качестве индекса СА мы использовали международное число солнечных пятен  $SN$ , версия 2.0, которое основано на классическом числе Вольфа, калиброванном и исправленном за некоторые ошибки и неточности [Clette and Lefèvre, 2016].

Данные за промежуток времени 1700–2021 гг. взяты с сайта *SILSO* (<http://www.sidc.be/silso/datafiles>). В параграфе 3 использовались годовые, а в параграфе 4 — месячные данные (среднее за каждый месяц число солнечных пятен без дополнительного сглаживания), которые известны с 1750 г.

Для проведения анализа состава и изменения во времени спектра ряда  $SN$  использовался метод вейвлет-анализа. Этот метод позволяет определить не только присутствие тех или иных периодичностей в сигнале, но выявить плавающие периоды и изменения амплитуд отдельных составляющих. Кроме того, вейвлет-анализ декларируется как метод, свободный от влияния тренда [Scargle, 1997]. Для исследования мы использовали непрерывное вейвлет-преобразование с порождающей функцией Морле:  $\text{morl}(x) = \exp(-x^2/2)\cos(5x)$ , представляющей собой плоскую волну, которая модулируется гауссианой [Grossman and Morlet, 1984; Daubechies, 1992; Scargle, 1997]. Для анализа состава и изменчивости спектров осуществлялась визуализация модуля вейвлет-коэффициентов в виде изолиний в плоскости масштаб — время, масштаб при этом пересчитывался в периоды. Шаг проведения изолиний и шкала раскраски выбирались так, чтобы можно было выделить локальные максимумы разного уровня и определить их координаты и значения.

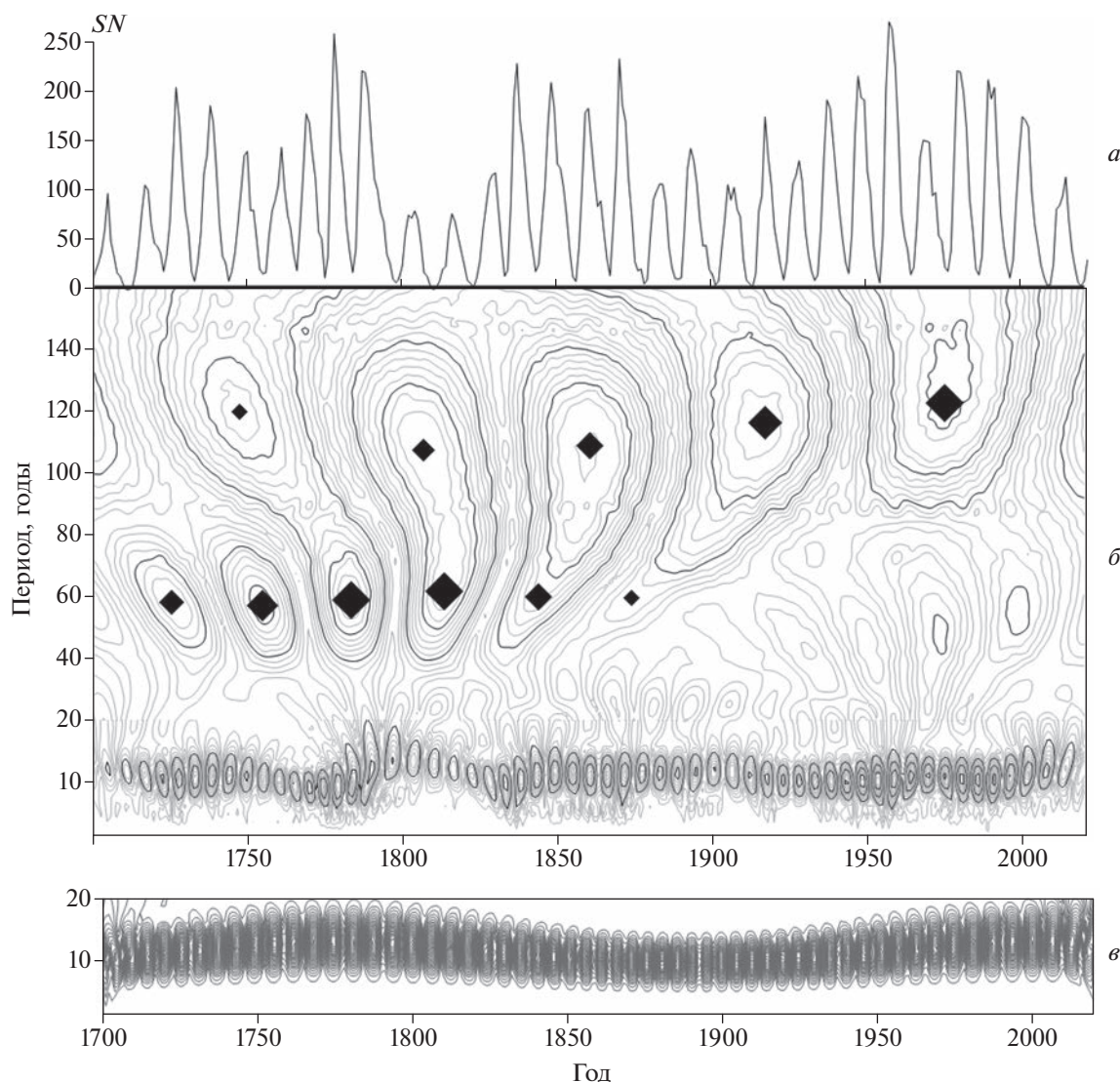
## 3. АНАЛИЗ ДЛИННОВОЛНОВОЙ ЧАСТИ СПЕКТРА $SN$ (ПЕРИОДЫ <160 ЛЕТ)

### 3.1. Вейвлет-анализ

Временной ряд годовых значений  $SN$  за промежуток времени 1700–2021 гг. приведен на рис. 1а. Длина этого ряда позволяет рассматривать периоды, меньшие 160 лет. Было вычислено вейвлет-преобразование Морле и получена матрица модуля вейвлет-коэффициентов, отражающая структуру и изменение во времени основных периодических составляющих, присутствующих в ряду  $SN$ . Из-за небольшой длины ряда вейвлет-коэффициенты в длинноволновой области содержали высокий уровень шума. Поэтому для анализа этой области спектра потребовалось предварительно сгладить матрицу коэффициентов. Для сглаживания нами было использовано скользящее окно Гаусса  $G$ , задаваемое матрицей  $3 \times 3$ :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} / 16.$$

Результат приведен на рис. 1б. Символами отмечены локальные максимумы. Размер символов пропорционален значению амплитуды в максимуме. Поскольку после сглаживания разрешение спектра в области коротких периодов уменьши-



**Рис. 1.** Вейвлет-преобразование временного ряда солнечной активности  $SN$ . (а) — исходный ряд  $SN$ ; (б) — вейвлет спектр ряда  $SN$ ; (в) — модель влияния 224-годового модулятора на изменение 11-летней составляющей. Символами отмечены локальные максимумы; размер символов пропорционален значению амплитуды в максимуме.

лось, для анализа этой области мы использовали первичный результат вейвлет-преобразования. На рис. 1б этому результату соответствует часть спектра с периодами от 2 до 20 лет в увеличенном масштабе.

В верхней части рис. 1б отчетливо выделяются две ветви цикла Глейсберга с периодами ~60 и 110–120 лет. Что касается 60-летней ветви, то она хорошо выделяется на рис. 1б до ~1880 г. с максимумом амплитуды около 1800 г. С 1900 г. эта мода не определяется, и только к концу рассматриваемого промежутка времени можно предположить рост ее амплитуды на фоне ряда 40–50-летних максимумов. Эти локальные максимумы в ~1970–2010 гг. на рис. 1б отмечены черной сплошной ли-

нией. На рис. 1б видно, что на всем протяжении XIX и XX веков наблюдается регулярный рост периода околостолетней составляющей цикла Глейсберга. В конце XX в. период этого цикла возрастает до ~130–140 лет (последний выделенный максимум).

Ранее мы исследовали поведение цикла Глейсберга в 1000–2000 гг. [Птицына и Демина, 2022] с использованием реконструированного ряда  $SN$  [Птицына и Демина, 2020] и нашли, что в разные эпохи видны либо три ветви (основная с периодом 88 лет, дополнительные 60 и 140 лет), либо две. При этом, в те эпохи, когда наблюдаются две ветви, могут исчезать как одна из дополнительных, так и основная ветвь. В частности, в работе

[Птицына и Демина, 2022] подтвердилось почти полное отсутствие 88-летней ветви в современную эпоху, что отмечали ранее другие авторы [Clilverd et al., 2006; McCracken et al., 2013; Svalgaard, 2018]. Это хорошо видно и в спектре ряда  $SN$ , приведенном на рис. 1б. В области периодов 85–90 лет наблюдаются небольшие особенности, но выделить их в отдельные максимумы не представляется возможным.

На рисунке 1а видно, что амплитуды солнечного цикла достигают максимальных значений в ~1780, ~1850 и ~1950 гг. Уменьшенные значения амплитуд солнечных циклов видны в районе 1700, 1800, 1900 и 2000 гг., что иллюстрирует наличие так называемых минимумов “рубежа веков”, которые были отмечены в работе [Silverman, 1992] при исследовании вариаций авроральной активности за последние 500 лет. Цикл Глейсберга имеет амплитудные максимумы в 1800 и 1950 гг., причем первый максимум приходится на 60-летнюю ветвь, а второй — на околостолетнюю (рис. 1б).

В работе [Птицына и Демина, 2022] относительно реконструированного ряда  $SN$  было сделано предположение о наличии частотной модуляции солнечного цикла более длинноволновым процессом. На временном масштабе 1000 лет был получен возможный период частотной модуляции длины, равный  $224 \pm 40$  лет. По анализируемому здесь небольшому временному отрезку в 300 лет можно получить только оценку периода модулирующего процесса. Это можно сделать, воспользовавшись формулой для комбинационных частот по средним значениям частот двух ветвей.

$$\omega_m = \omega_1 \pm m\omega_2, \quad (1)$$

где  $\omega_m$  — результирующая частота;  $\omega_1$  — частота основного сигнала;  $\omega_2$  — частота модулятора;  $m$  — целое число, максимальное значение которого определяется степенью влияния модулятора.

Тогда при  $m = 1$  (две ветви, ближайшие к основной) согласно формуле (1) разность комбинационных частот даст удвоенную частоту модулятора и, соответственно, его период. В данном случае было получено значение периода, равное 249 гг. При этом следует иметь в виду, что ветвь 60-летних колебаний существенно короче и среднее определяется лишь примерно, поэтому мы получаем только оценочное значение периода модулятора. Мы не можем использовать для получения этой оценки основное 88-летнее колебание, так как это колебание, практически, не дает выраженных максимумов. Если до 1850 г. еще можно его как-то оценить, то позже основное колебание уже не выделяется. Несмотря на это, полученная нами оценка периода модулятора не противоречит полученному ранее результату и лежит в пределах погрешности.

### 3.2. Частотная модуляция 11-летнего цикла

#### 3.2.1. Модуляция циклом Зюсса (200 лет)

В короткопериодной части вейвлет-спектра ряда  $SN$  (рис. 1б) четко выделяется 11-летняя составляющая. Изменение ее периода имеет ряд особенностей, которые очевидно не могут быть связаны с длинноволновым модулятором. Для подтверждения этого построим простую модель, в которой гармоническое колебание модулируется по частоте также гармоническим колебанием в соответствии с формулой (2).

$$F(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + K \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \varphi_1), \quad (2)$$

где  $\omega_1$  — то же, что и в формуле (1);  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — фазы, а  $A_1$  — амплитуда основного колебания,  $K$  — коэффициент частотного отклонения, определяющий степень влияния модулятора на основной сигнал, т.е. максимальное отклонение частоты основного сигнала от ее исходного значения. Это отклонение зависит от амплитуды модулирующего сигнала. Для построения по формуле (2) модельного сигнала были использованы  $\omega_1 = 2\pi/11$ ,  $\omega_2 = 2\pi/249$ , нулевые фазы и  $K = 3$ . В нашей работе не рассматривается механизм модуляции и природа ее источника, поэтому выбор величины  $K$  основан на сравнении полученных по формуле (2) результатов с наблюдательными данными. Так, из-за значительной разности частот основного колебания и модулятора получаемое при  $K = 1$  максимальное отклонение может приводить к появлению дополнительных периодов от 10.5 до 11.5 лет, что не соответствует полученному по экспериментальным данным изменению периода 11-летних колебаний в более широком диапазоне лет [Richards et al., 2009]. При  $K = 3$  диапазон дополнительных частот расширяется до 9.7–12.6 лет, что существенно ближе к наблюдательному разбросу значений длин солнечного цикла.

Для модельного сигнала было вычислено вейвлет-преобразование. Результат показан на рис. 1в. Видно, что только общий ход изменения спектра 11-летней составляющей передается правильно, однако влиянием 249-летнего модулятора не могут быть объяснены наблюдаемые на рис. 1б особенности, в частности, минимум Дальтона.

#### 3.2.2. Модуляция циклом Глейсберга

На рисунке 1б просматривается связь между особенностями в спектре 11-летней составляющей и характером изменения спектра ветвей Глейсберга. В частности, отчетливо видна коррелированность особенностей в районе 1800 г., в минимуме Дальтона. Это позволяет предположить, что процесс, вызывающий вековой цикл Глейсберга, оказывает влияние на источник 11-летних колебаний в солнечном динамо. Если принять, что это влияние носит характер частотной моду-

**Таблица 1.** Возможные дополнительные периоды, вызванные частотной модуляцией (в годах)

| $T_2$ , лет | $T_1 = 11$ лет |         |         |                        |
|-------------|----------------|---------|---------|------------------------|
|             | $m = 1$        | $m = 2$ | $m = 3$ |                        |
| 59.5        | 9.3            | 8.0     | 7.1     | $\omega_1 + n\omega_2$ |
|             | 13.5           | 17.5    | 24.5    | $\omega_1 - n\omega_2$ |
| 88          | 9.8            | 8.8     | 8       | $\omega_1 + n\omega_2$ |
|             | 12.6           | 14.7    | 17.6    | $\omega_1 - n\omega_2$ |
| 115         | 10.0           | 9.2     | 8.5     | $\omega_1 + n\omega_2$ |
|             | 12.2           | 13.6    | 15.4    | $\omega_1 - n\omega_2$ |

ляции, то можно по формуле (1) рассчитать, какие максимальные дополнительные периоды  $T_1$  могут возникать в результате такого влияния. Для этого используем средние значения периодов ветвей Глейсберга  $T_2$ . Результаты представлены в табл. 1.

Из таблицы видно, что при частотной модуляции источника 11-летних колебаний могут наблюдаться периоды в широком диапазоне, перекрывающие уже при  $m < 3$  диапазон экспериментальных данных о длине солнечного цикла: от 8 до 14 лет, полученных по минимумам цикла, и от 8 до 17 — по максимумам. При этом наибольшее влияние должна оказывать 60-летняя ветвь, что и наблюдается на рис. 1б. Максимальное отклонение периода от 11 лет ( $T = 17$  лет) приходится на минимум амплитуды 11-летнего цикла и максимум амплитуды 60-летней ветви цикла Глейсберга в районе 1800 г., т.е. минимум Дальтона приходится на максимум амплитуды 60-летней ветви.

#### 4. АНАЛИЗ КОРОТКОВОЛНОВОЙ ЧАСТИ СПЕКТРА $SN$ (ПЕРИОДЫ $< 35$ ЛЕТ)

##### 4.1. Сравнение результатов в спектральной и временной областях

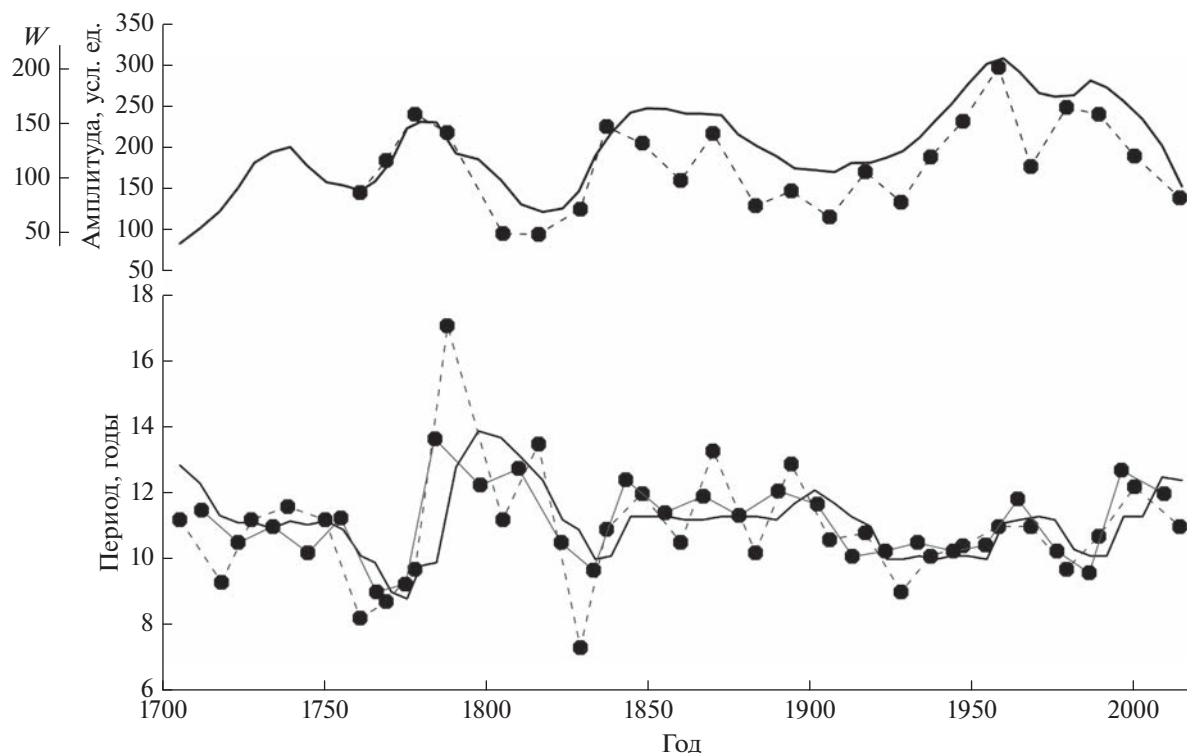
Далее проведем детальное исследование вариаций как длины, так и амплитуды 11-летней составляющей, полученных из вейвлет-спектра. Чтобы убедиться в том, что ход 11-летней составляющей, показанный на рис. 1б, не является артефактом или случайным результатом, мы сравнили его с ходом амплитуд и длин солнечного цикла, полученным по телескопическим наблюдениям [Richards et al., 2009]. Для этого в вейвлет-спектре для 11-летней составляющей в максимумах были определены значения соответствующих периодов и амплитуд. Полученные изменения амплитуды и периода 11-летней составляющей показаны на рис. 2 жирной сплошной линией. Туда же вынесены данные о периоде из работы [Richards et al., 2009], которые помечены точками. Штриховая

линия соответствует длительности цикла, определенной по максимумам, а тонкая сплошная — то же, но определенное по минимумам циклов. Амплитуда 11-летней спектральной составляющей приведена в условных единицах и масштабирована так, чтобы ее можно было сравнивать со значениями  $W$  из работы [Richards et al., 2009]. Хорошо видно, что полученные из вейвлет-анализа результаты подтверждаются экспериментальными данными.

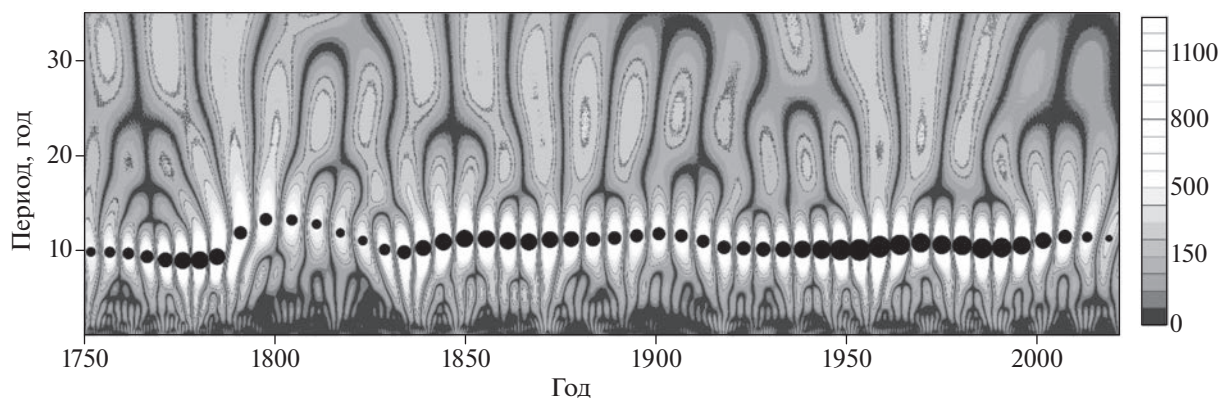
##### 4.2. Вейвлет-анализ

В таблице 1 приведены возможные дополнительные периоды, которые могут появляться в спектре в результате частотной модуляции. Однако в вейвлет-спектре  $SN$  на рис. 1б все эти дополнительные периоды слабо выражены, и выделить отдельные ветви не удастся. Мы скорее наблюдаем вытягивание спектра в сторону меньших и больших периодов. Вероятно, это связано с тем, что используемый для расчетов временной ряд, шаг которого равен 1 году, резко ограничивает разрешение спектра в коротковолновой области. Чтобы повысить это разрешение, мы использовали ряд месячных значений  $SN$ . Этот ряд несколько короче, но поскольку длинноволновая часть спектра нами уже получена и проанализирована, этот факт не представляется важным ограничением. Вейвлет-спектр вычислялся только для периодов, меньших 35 лет, чтобы избежать сглаживания. Результат представлен на рис. 3. Максимумы, соответствующие 11-летней составляющей, помечены символами, размер которых пропорционален амплитуде.

Спектр на рисунке 3 в общих чертах повторяет приведенный на рис. 1, но добавляет новые подробности. Четко выделяется в спектре интервал с 1780 по 1830 гг. Хорошо видно, что значительное увеличение длительности солнечного цикла сопровождается падением амплитуды. Можно было бы ожидать, что с уменьшением амплитуды будет уменьшаться и размер максимумов, однако последние сильно вытянуты как в сторону более длинных, так и в сторону более коротких периодов. Максимальные значения амплитуды смещаются на периоды 13–14 лет. И, кроме того, проявляются 7–9-летние и слабо выраженные 16–18-летние составляющие. Если обратиться к табл. 1, то можно видеть, что эти спектральные составляющие могут возникать в результате влияния 60-летней и 88-летней ветвей цикла Глейсберга, причем амплитуда дополнительных периодов, зависящих от 60-летней, доминирует, на ее фоне 11-летняя составляющая практически не видна. А более короткие (7–9 лет) и более длинные (16–18 лет) периоды имеют меньшие амплитуды, и там, где они не могут быть разрешены как отдельные максимумы, их влияние проявляется в вытянутости



**Рис. 2.** Сравнение результатов вейвлет-анализа с экспериментальными данными. Жирной сплошной линией показаны значения, полученные из вейвлет-анализа, тонкой и штриховой линиями с точками показаны экспериментальные данные.



**Рис. 3.** Вейвлет-спектр месячных значений  $SN$ . Кругами отмечены максимумы спектра.

спектральной составляющей. Характер описанных особенностей спектра, очевидно, отражает изменение амплитуды 60-летней ветви Глейсберга, из чего логично предположить, что коэффициент, определяющий степень влияния модулятора, пропорционален его амплитуде.

Схожую последовательность можно видеть в период с 1890 по 1970 гг., но со значительно меньшей амплитудой. Это связано с тем, что максимум амплитуды спектра цикла Глейсберга смеща-

ется на 115-летнюю ветвь, а эта ветвь оказывает меньшее влияние на основное колебание в соответствии с формулой (1) и таблицей. Началом следующего аналогичного цикла изменения периодов можно предполагать ~2000 г. Здесь по той же причине должен наблюдаться эффект с амплитудой меньшей, чем во время минимума Дальтона.

В интервале с 1840 по 1880 гг. наблюдаются лишь небольшие колебания периода около значения 11 лет и значительный рост амплитуды, что



**Рис. 4.** Изменение периода и амплитуды 11-летней составляющей. Сплошная линия — изменение периода, штриховая линия — изменение амплитуды.

естественно должно было повлечь за собой и увеличение размеров максимумов. Но сохраняющаяся их вытянутость, скорее всего отражает продолжающееся модулирующее влияние цикла Глейсберга. Для этого интервала времени амплитудная доминанта в спектре ветвей Глейсберга смещается на основной 88-летний цикл и длинноволновую ветвь. А поскольку их влияние может дать в качестве дополнительных только периоды, близкие к 11 годам, то эти периоды не выделяются в отдельные максимумы, а приводят лишь небольшому смещению и вытягиванию 11-летних спектральных максимумов.

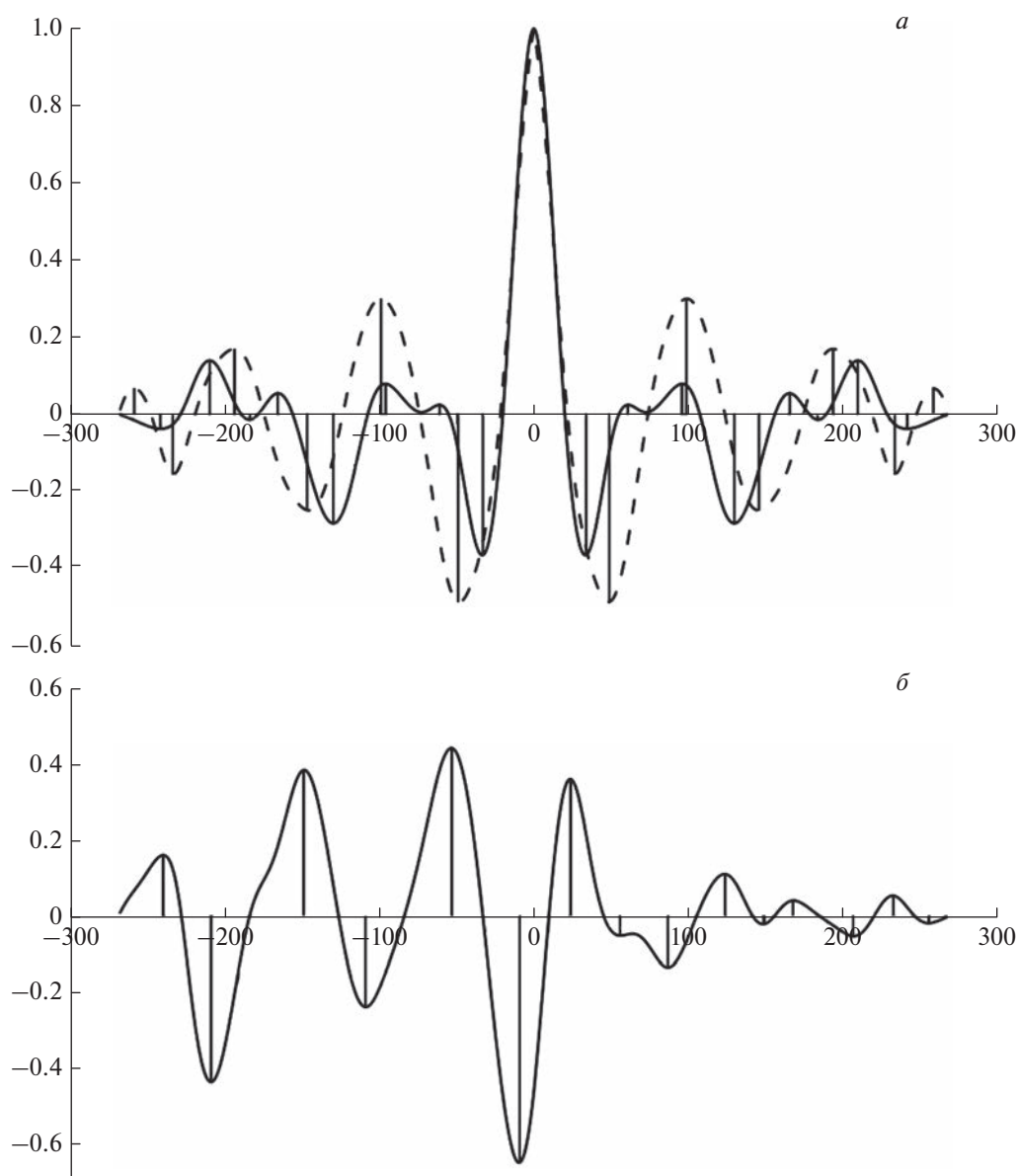
Аналогичную структуру спектра можно видеть для интервала с 1940 до 1980 гг. С той разницей, что в это время основное влияние оказывает 115-летняя ветвь цикла Глейсберга, на которую смещается доминанта амплитуды.

Здесь мы никак не оцениваем влияние цикла Зюсса, поскольку выделить это влияние на фоне ветвей цикла Глейсберга затруднительно. Заметим, что в спектре временного ряда, составленного из месячных значений  $SN$ , кроме четко выраженной 11-летней составляющей и упомянутых выше дополнительных периодов, можно видеть периоды 5–6 лет и 25–30 лет.

Как уже упоминалось, на рис. 3 отчетливо появляется тот факт, что рост периода сопровождается убыванием амплитуды. В следующем параграфе проведем подробный анализ этой зависимости.

#### 4.3. Длина и амплитуда 11-летней составляющей: долговременные изменения

По вейвлет-спектру были определены значения периодов и амплитуд в максимумах. На рис. 4 показано изменение периода и амплитуды 11-летней составляющей в течение рассматриваемого промежутка времени. Сплошной линией отмечен период, штриховой — амплитуда. В представленных на рис. 4 зависимостях периода и амплитуды отчетливо проявляется тот факт, что их изменения происходят в противофазе. Антикореляция период–амплитуда была установлена ранее (см. например, Hathaway, 2015; Usoskin and Mursula, 2003). Кроме того, во временном ходе и периода, и амплитуды на рис. 4 можно заметить присутствие выраженного тренда и квазипериодических составляющих. Для выявления этих периодичностей и получения оценки их периодов были вычислены автокорреляционные функции (АКФ) анализируемых временных рядов. Последние точки в обоих рядах скорее всего отражают краевой эффект и поэтому в дальнейшем анализе не участвовали. Предварительно был вычтен тренд, в данном случае мы ограничились линейным трендом. Затем была проведена интерполяция в равноотстоящие моменты времени. Интерполяция осуществлялась сглаживающими кубическими сплайнами. Небольшое сглаживание было необходимо, чтобы не допустить необоснованного усиления отдельных особенностей. Результат приведен на рис. 5а. АКФ амплитуды показана штриховой ли-



**Рис. 5.** Корреляционные свойства изменения периода и амплитуды 11-летней составляющей. (а) — АКФ, сплошной линией показана АКФ периода, штриховой линией показана АКФ амплитуды, вертикальными отрезками отмечены минимумы и максимумы; (б) — ВКФ.

нией. На рис. 5б приведена взаимная корреляционная функция (ВКФ) амплитуды и периода.

В изменении периода отчетливо видно присутствие двух периодичностей: ~60 лет и ~100 лет. Причем по первым минимумам видим, что вначале доминирует 60-летняя ветвь, а затем доминанта смещается на 100-летнюю. Это соответствует изменению периодов и амплитуд ветвей Глейсберга для рассматриваемого интервала времени (рис. 1б). Отметим, что первые нули АКФ соответствуют периоду 80 лет, т.е. несмотря на то, что период основного цикла Глейсберга не выделяется в спектре на фоне дополнительных ветвей, это не исключает его объективного присутствия и со-

ответственно его влияния на 11-летний цикл, что проявляется в АКФ как периода, так и амплитуды. Для изменения амплитуды, очевидно, ведущей является 100-летняя компонента. Однако это не означает отсутствие влияния на это изменение 60-летней ветви Глейсберга.

Рассмотрим полученную ВКФ (рис. 5б). Основной общий период, определенный по расстоянию между первыми нулями составляет 86 лет. Наиболее значительный пик во взаимной корреляции лежит в отрицательной области, т.е. наблюдается антикорреляция, это соответствует известному результату: более короткие циклы имеют тенденцию быть более высокими. В то же

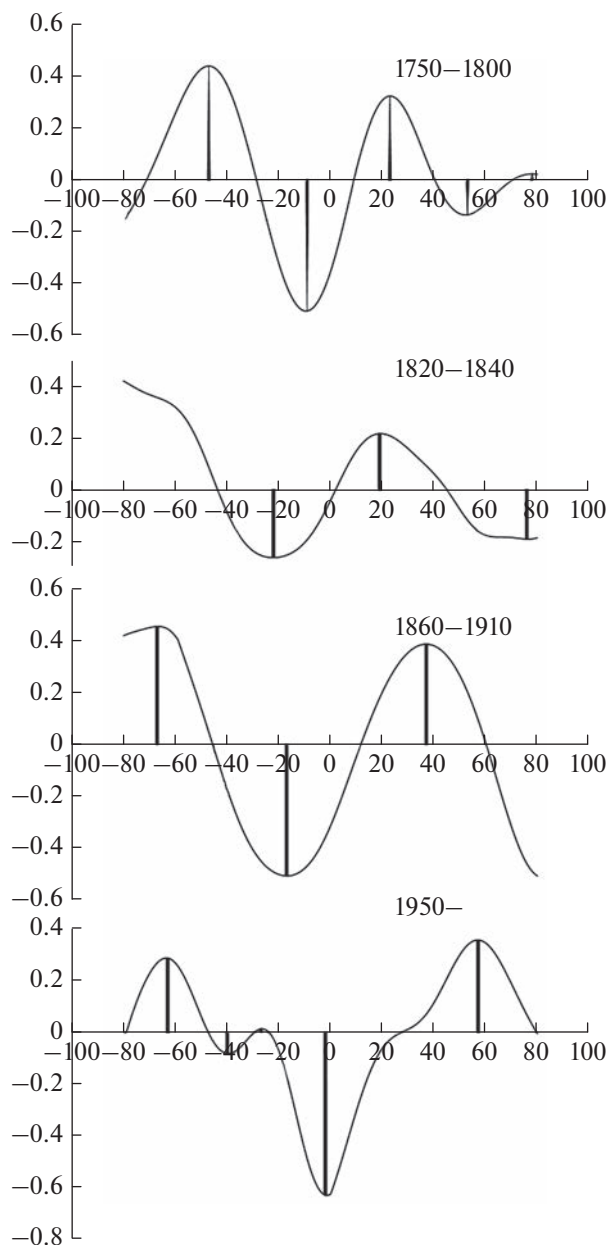


Рис. 6. ВКФ для отдельных интервалов времени.

время амплитуда и длина периода изменяются не строго в противофазе. Наиболее сильная антикорреляция достигается при отрицательном сдвиге по времени. Как следует из ВКФ, минимум сдвинут на  $-9$  лет, т.е. примерно на один цикл СА. Значение максимального коэффициента антикорреляции составляет  $k = -0.65$ . В работе [Solanki et al., 2002] был получен максимальный коэффициент антикорреляции  $k = -0.46$  для  $W$ . Заметим, что мы использовали ряд  $SN$ , который базируется на откорректированном ряде  $W$ , что, как видим, существенно улучшило корреляцию. При сдвиге фаз, равном нулю, также наблюдается

обратная связь, однако с меньшим коэффициентом корреляции  $k = -0.47$ . Таким образом, амплитуды и периоды одного и того же цикла также находятся в слабой обратной зависимости.

Все приведенные выше расчеты предполагают стационарность сравниваемых сигналов. В нашем случае и изменение амплитуды, и изменение периода цикла на рассматриваемом временном промежутке статистически неоднородны. Следует иметь в виду, что число солнечных пятен  $SN$  известно надежно с 1849 г. (достоверный ряд). До этого времени, с 1750 г., ряд месячных  $SN$  является восстановленным. Чтобы проверить стабильность связи между амплитудой и периодом солнечного цикла, мы вычислили ВКФ для различных временных интервалов.

В соответствии с полученным по АКФ основным периодом, равным 80 лет, из временного ряда изменения периода 11-летнего цикла выбирались последовательно с шагом в 10 лет отрезки длиной 80 лет. И затем вычислялась ВКФ этого отрезка и временного ряда изменения амплитуды со сдвигом, не превышающим 80 лет. Сравнивались количество максимумов в ВКФ и их положение. Далее будем это называть структурой и считать близкими по структуре ВКФ отрезки с одинаковым количеством максимумов и сдвиге в их положениях в пределах  $\pm 10$  лет. Анализ полученных результатов показал, что по структуре ВКФ можно выделить 4 стационарных участка. Первый — это период с 1750 по 1800 гг. (даты соответствуют начальным точкам отрезков). Для отрезка после 1810 г. наблюдалось полное разрушение прежней структуры ВКФ: уменьшение и смещение прежних экстремумов, формирование новых, доминирование главного максимума корреляции в области положительных значений абсцисс. Затем на небольшой период с 1820 по 1840 гг. возникает стабилизация новой структуры. Следующее резкое нарушение структуры было получено для отрезка 1850 г. А далее с 1860 по 1910 гг. сохранялась стабильность структуры, которая затем в период с 1920 по 1940 гг. сменилась плавной перестройкой ВКФ, формированием новых максимумов и смещением главного минимума. С 1950 г. по настоящее время наблюдается новая стабильная структура. Вид ВКФ для центральных отрезков каждого из стабильных участков приведен на рис. 6. Рисунок 6 демонстрирует, что структура ВКФ для отрезков первого интервала времени (1750–1810 гг.), до начала достоверных наблюдений, схожа со структурой общей ВКФ (1700–2020 гг., рис. 5б). Для первого интервала видна существенная антикорреляция ( $-0.52$ ) периода и амплитуды 11-летнего цикла со сдвигом в 10 лет. Таким образом, структура взаимной связи амплитуды и периода с использованием восстановленного ряда  $SN$ , может считаться достаточно типичной. Для второго временного

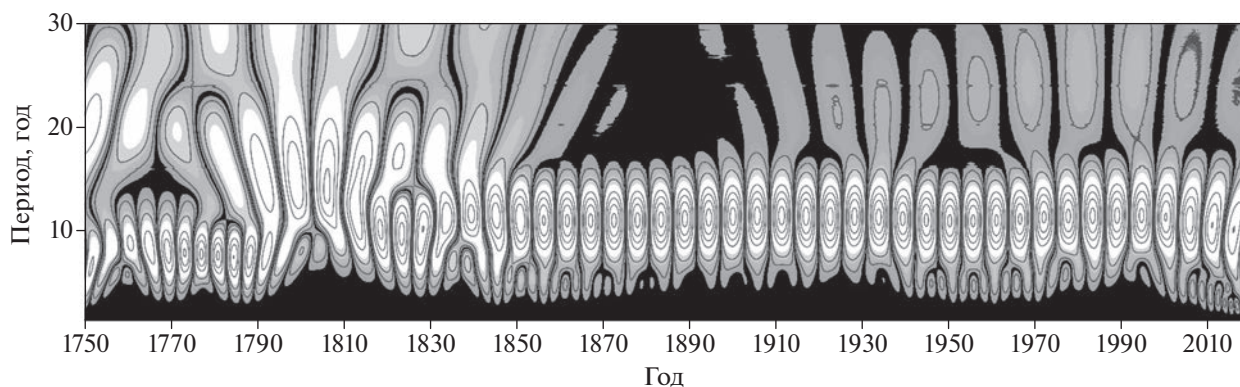


Рис. 7. Вейвлет-спектр модели 11-летнего гармонического сигнала, модулированного по частоте 60-летней и 115-летней ветвями составляющей Глейсберга.

интервала (1820–1840 гг.)  $k = -0.26$ , т.е. изменения амплитуды и длины цикла коррелируют очень слабо. Для третьего временного периода (1860–1910 гг.) характерна устойчивая структура ВКФ, для которой в минимуме коэффициент корреляции возвращается к значению  $k = -0.5$ , при этом сам минимум приходится на сдвиг, равный  $-19$  лет, а основной общий период, определяемый первыми нулями, равен уже 114 годам. Самый последний интервал (с 1950 г. до настоящего времени) показал возвращение глубокого минимума до  $k = -0.63$  и его смещение практически в 0 (лаг  $= -2$  года). Следовательно, начиная с 1950 г. наблюдается значительная обратная связь между длиной и амплитудой одного и того же цикла.

Таким образом, при сохранении обратной корреляции между периодом и амплитудой 11-летней составляющей, коэффициент корреляции и лаг, при котором наблюдается максимальная корреляция, эволюционируют в течение рассматриваемого промежутка времени. Для разных временных интервалов получены разные сдвиги по времени моментов, когда наблюдается максимум антикорреляции: в XVIII–начале XIX в. этот сдвиг равен одному циклу ( $-9$  лет), затем почти на всем протяжении XIX века — двум циклам ( $-22$  года и  $-17$  лет), а начиная с 1950 г. и до нашего времени сдвиг практически отсутствует ( $-2$  года). Значительная антикорреляция между длиной и амплитудой цикла ( $-0.5 \dots -0.63$ ) наблюдается почти на всем протяжении рассматриваемого промежутка времени. Исключение составляет период выхода из минимума Дальтона, когда коэффициент антикорреляции уменьшается до  $-0.25$ .

##### 5. МОДЕЛЬ МОДУЛЯЦИИ 11-ЛЕТНЕГО ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА ДВУМЯ ВЕТВЯМИ ЦИКЛА ГЛЕЙСБЕРГА

Построим модель, в которой 11-летнее гармоническое колебание модулируется по частоте

60-летней и 115-летней ветвями цикла Глейсберга. Для это несколько модифицируем формулу (2):

$$F(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + K_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + K_2 \cos(\omega_3 t + \varphi_3) + \varphi_1), \quad (3)$$

где параметры те же, что и в формуле (2), а  $\omega_3$ ,  $\varphi_3$  и  $K_2$  — соответственно частота, фаза и коэффициент частотного отклонения, определяемый вторым модулятором. Коэффициенты  $K_1$  и  $K_2$  предполагаются разными, поскольку в отсутствии четкого представления о механизме влияния, ориентироваться можно только на амплитуду 60-летних и 115-летних спектральных составляющих. Наиболее неопределенным остается вопрос фазы. Поскольку в непрерывном вейвлет-спектре Морле информация о фазе отсутствует, при моделировании мы использовали несколько комбинаций фаз, вычисляли вейвлет-спектр модельных сигналов и сравнивали со спектром, полученным для временного ряда  $SN$  (рис. 3). При этом в качестве реперных мы рассматривали увеличение периода около 1800 г., появление в этот же период дополнительных спектральных составляющих, а также рост периода в области 1910 и 1970 гг. Результат приведен на рис. 7. Очевидно, что модель не может передать весь спектр, поскольку затрагивает только изменение 11-летней составляющей, однако перечисленные выше реперные особенности спектра экспериментальных данных, в том числе, характерная особенность в минимуме Дальтона, присутствуют в спектре модели.

##### 6. ОБСУЖДЕНИЕ

Проведенный нами анализ показал, что в целом эволюцию спектра 11-летней составляющей в 1700–2021 гг. можно соотносить с более длинными периодическими процессами. Мы выяснили, что доминирующим периодом в изменениях длины солнечного цикла является цикл Глейсберга. При этом в XVIII и в первой половине XIX в. наиболее

существенное влияние на 11-летний цикл оказывает 60-летняя ветвь, которая хорошо выделяется до ~1880 г. с максимумом амплитуды около 1800 г. После 1850 г. доминирующей ветвью становится околостолетняя, период которой регулярно растет, достигая 130–140 лет в конце XX в. Это согласуется с результатами работ [Ишков и Шibaев, 2006; Шibaев и Шibaев, 2020], в которых найдено, что длина цикла Глейсберга увеличивается с течением времени, а ее оценка, сделанная по достоверному ряду СА, приближается к ~150 годам.

В работе [Птицына и Демина, 2022] при анализе данных о СА за 1000 лет получено, что цикл Глейсберга представляет собой трехчастотную структуру (~60, ~88 и 120–140 лет), периоды мод которой изменяются со временем. При этом 88-летний цикл является основным, источником которого, вероятно, служит солнечное динамо, а 60- и ~100-летние циклы — это результат частотной модуляции основного цикла модулятором с периодом ~220–230 лет. Проявление в спектре отдельных ветвей цикла зависит от соотношения параметров несущего и модулирующего сигнала. Если амплитуда последнего меняется со временем, то в результате в одни исторические эпохи могут наблюдаться все три ветви цикла Глейсберга, а в иные эпохи могут быть заметны только две ветви. То, что в некоторые эпохи может осуществиться ситуация, когда основная ветвь не наблюдается на фоне более мощных боковых составляющих, объясняет полученный здесь результат о том, что в современную эпоху в спектре СА практически не виден классический 88-летний цикл (рис. 1б). В работах [Clilverd et al., 2006; McCracken et al., 2013; Svalgaard, 2018] также отмечалось отсутствие ~80-летнего цикла в числе солнечных пятен, наблюдаемых за последние триста лет. Наши результаты, однако, указывают, что хотя основной 88-летний цикл не проявляется в вейвлет-спектре на фоне дополнительных ветвей, но он, тем не менее, может оказывать некоторое влияние на эволюцию длины 11-летнего цикла (рис. 5а).

Найдено, что в вейвлет-спектре присутствуют выделенные квазипериодические структуры, в которых наблюдается вытянутость спектральных максимумов в длинноволновую область до 14–15 лет и в коротковолновую область до 8–9 лет. Такие вытянутые спектральные структуры образуются вблизи минимумов СА “рубежа веков”, которые обнаруживались по данным о солнечной и авроральной активности за последние 500 лет в работе [Silverman, 1992]. В нашей работе, в частности, речь идет о спектральных особенностях при понижении СА в районе 1800 г. (минимум Дальтона) и 1900 г. (минимум Гневашева). Началом следующего аналогичного цикла изменения периодов можно предполагать 2000 год. При этом следует отметить, что спектральная

особенность во время минимума Дальтона обусловлена 60-летней составляющей, а более поздние особенности, в частности, та, которая начала формироваться в последние десятилетия, вызваны влиянием околостолетней волны (рис. 1б). При этом, чем больше период, тем меньшее влияние оказывает частотная модуляция на основное колебание, формула (1). Поэтому можно ожидать, что во время современного эпизода пониженной СА будет наблюдаться гораздо меньший эффект, чем тот, который наблюдался во время минимума Дальтона. Есть работы, в которых уменьшение амплитуды 11-летнего цикла во время минимумов “рубежа веков” связывают с совпадением минимумов циклов Глейсберга и Зюсса (200 лет) [Витинский и др., 1986; Usoskin and Mursula, 2003]. На основе идей о влиянии минимумов различных вековых циклов делались предположения о том, что ближайшие циклы СА (25–27) будут чрезвычайно низкими, напоминающими период минимума Дальтона или еще более глубокий минимум Маундера [Zharkova et al., 2015; Owens et al., 2017]. В работе [Nandy, 2021] к августу 2020 г. было проанализировано 34 прогноза текущего солнечного цикла 25. С тех пор появилось еще несколько десятков прогностических работ. В настоящий момент считается наиболее вероятным, что цикл 25 будет немного выше или немного ниже цикла 24 (~80 единиц), т.е. его пик будет находиться в диапазоне циклов минимума Дальтона 5–7. Наши результаты позволяют предположить, что ближайшие солнечные циклы, в том числе цикл 25, будут более высокими и менее длинными, чем в период минимума Дальтона. Это связано с тем, что 115-летняя ветвь цикла Глейсберга, действующая в настоящее время, оказывает гораздо меньшее модулирующее влияние на 11-летнюю составляющую, чем 60-летняя, доминировавшая во время минимума Дальтона.

Полученные результаты указывают на то, что источник изменений длины солнечного цикла может иметь внесолнечное происхождение. Частотная модуляция отражает процесс, который приводит к изменению условий генерации основного колебания [Гоноровский, 1948; Wilson, 1996]. Наличие частотной генерации длины 11-летнего цикла может говорить о существовании как эндогенной причины, связанной со сложным процессом генерации магнитного поля, так и внешней причины, которые вынуждают систему менять частоту собственного колебания. В работах [Наговицын и Певцов, 2018; Nagovitsyn and Pevtsov, 2020] изменение параметров солнечного цикла рассматривалось в рамках нелинейной модели осциллятора с внешней возмущающей силой на основе уравнения Дуффинга. Природа такой возмущающей силы, ведущей к неустойчивости солнечной цикличности, авторами не рассматривалась, однако в качестве возможностей указыва-

лись изменения дифференциального вращения или меридиональной циркуляции во времени, взаимодействие циклов крупномасштабного и пятенного поля, а также приливные силы планет солнечной системы. В работах [Птицына и Демина, 2021; Птицына и Демина, 2022] при рассмотрении длиннопериодных вариаций СА указывалось на возможные модуляционные эффекты модулятора внесолнечного происхождения.

Точка зрения, которая связывает вариации 11-летнего солнечного цикла с гравитационным влиянием планет [Scafetta, 2012, и ссылки там], исторически восходит к работам Вольфа середины XIX века [Wolf, 1859]. Она не получила широкого признания, так как энергетически влияние планет очень мало и не может обеспечить сколь угодно существенных эффектов. Кроме того, совпадение орбитального периода Юпитера (11.8 лет) с длиной солнечного цикла, на чем базируется эта точка зрения, может быть случайным [Obridko et al., 2022]. Тем не менее, в последнее время интерес к этой теме возрос, так как появились работы, в которых предложены различные механизмы воздействия гравитационных сил на работу солнечного динамо. В частности, рассматривалось действие крутящего момента планет на солнечный тахоклон или более экзотическое гравитационное воздействие темной материи, рассеянной на планетарных гравитационных линзах [Abrey et al., 2012; Zioutas et al., 2013; Bertolucci et al., 2017].

Результаты, полученные в данной статье, могут иметь потенциал для долгосрочного прогнозирования. Однако для использования их в прогностических целях необходимо проверить наши выводы на более длинном ряду данных, что мы предполагаем сделать в ближайшем будущем.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы провели вейвлет-анализ ряда  $SN$  за последний отрезок времени продолжительностью 321 год (1700–2021 гг.). Мы нашли и проанализировали эволюционирующую со временем мультичастотную структуру спектра в диапазоне периодов от 2 до 160 лет, в которой доминирует 11-летняя составляющая. Основные результаты можно сформулировать следующим образом.

1. Амплитуда и длина 11-летнего цикла в целом находятся в обратной зависимости, что согласуется с известными ранее результатами. Кроме того, найдено, что лаг между рядами длины и амплитуды цикла, при котором достигается максимум антикорреляции, зависит от времени. В XVIII в. и начале XIX в. лаг равен одному циклу, затем почти на всем протяжении XIX века — двум циклам, а начиная с 1950 г. и до нашего времени, лаг уменьшается до 2 лет.

2. Кроме доминирующей 11-летней составляющей, в спектре также прослеживаются две мощные составляющие цикла Глейсберга (60 и 110–120 лет). До 1880 г. это мода с периодом 60 лет, с 1850 г. — околостолетняя. На фоне этих ветвей практически не видна классическая ветвь с периодом 88 лет. Период околостолетней ветви систематически растет, достигая 130–140 лет в конце XX века.

3. Выделены квазипериодические структуры, которые характеризуются вытянутостью спектра в длинноволновую область до 14–15 лет и в коротковолновую до 7–9 лет. Они в основном обнаруживаются вблизи длительных минимумов рубежа веков: 1800, 1900, 2000 гг. Эти спектральные структуры отличаются по размеру, что связано с влиянием различных ветвей цикла Глейсберга. В частности, спектральная особенность в ~1800 г. (минимум Дальтона), вызвана влиянием 60-летней ветви, а формирующаяся в XXI в. — более слабым влиянием околостолетней. Поэтому следует ожидать, что ближайшие солнечные циклы будут более высокими и менее длинными, чем в период минимума Дальтона.

4. Построена модель, в которой 11-летнее гармоническое колебание модулируется по частоте 60-летней и 115-летней ветвями цикла Глейсберга с изменяющимся во времени коэффициентом модуляции. Результаты сравнения вейвлет-спектров модели и наблюдательного ряда подтвердили, что вариации длины солнечного цикла могут быть описаны в рамках процесса частотной модуляции двумя ветвями цикла Глейсберга.

Наш анализ подтверждает полученные ранее сведения о поведении параметров (длины и амплитуды) солнечного цикла. Кроме того, мы выявили несколько новых принципиальных особенностей вариаций длины солнечного цикла и прояснили их источники. Представляется, что эти сведения могут быть полезны при долгосрочном прогнозировании СА. Однако для этого предварительно следует проверить полученные результаты, анализируя более длинный ряд данных.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят В.Н. Ишкова и анонимного рецензента за замечания и комментарии, которые помогли улучшить статью, а также команду WDC-SILSO, Королевская Обсерватория Бельгии, за возможность использовать ряды числа солнечных пятен.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Витинский Ю.И., Конецкий М., Куклин Г.В. Статистика пятнообразовательной деятельности Солнца. М.: Наука, 296 с. 1986.
- Гоноровский И.С. Частотная модуляция и ее применения. М.: Связьиздат, 286 с. 1948.
- Ишков В.Н., Шибаев И.Г. Циклы солнечной активности: общие характеристики и современные границы прогнозирования // Изв. РАН. Сер. физич. Т. 70. № 10. С. 1439–1442. 2006.
- Наговицын Ю.А. Солнечная активность двух последних тысячелетий: “Служба Солнца” в древнем и средневековом Китае // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 41. № 5. С. 711–720. 2001.
- Наговицын Ю.А., Певцов А.А. Нелинейная математическая модель пятенной цикличности Солнца / Тр. XXII Всероссийской конф. “Солнечная и солнечно-земная физика-2018”, Санкт-Петербург, Пулковое, 8–12 октября 2018 г. Ред. А.В. Степанов и Ю.А. Наговицын. СПб.: изд-во ГАО РАН. С. 307–310. 2018. <https://doi.org/10.31725/0552-5829-2018-307-310>
- Обридко В.Н., Наговицын Ю.А. Солнечная активность, цикличность и методы прогноза. СПб.: ВВМ, 466 с. 2017.
- Птицына Н.Г., Демина И.М. Реконструкция солнечной активности в 1000–1700 гг. по данным о полярных сияниях с учетом вклада главного магнитного поля Земли // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 60. № 3. С. 515–527. 2020. <https://doi.org/10.31857/S0016794020030153>
- Птицына Н.Г., Демина И.М. Цикличность солнечной активности, реконструированной из статистики полярных сияний с учетом вклада главного магнитного поля Земли, 1000–2000 гг. // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 61. № 2. С. 295–308. 2021. <https://doi.org/10.31857/S0016794021020127>
- Птицына Н.Г., Демина И.М. Частотная модуляция как причина возникновения дополнительных ветвей векового цикла Глейсберга в солнечной активности // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 62. № 1. С. 48–61. 2022. <https://doi.org/10.31857/S0016794022010163>
- Шибаев А., Шибаев И. Влияние длины ряда WSN на период “цикла Глейсберга” / Proc. 16 th Intern. Conference on Space, Ecology, Safety—SES 2020. Sofia, Bulgaria, 4–6 November 2020. P. 40–44. 2020.
- Abreu J.A., Beer J., Ferriz-Mas A., McCracken K.G., Steinhilber F. Is there a planetary influence on solar activity? // Astron. Astrophys. V. 548. № A88. 2012. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201219997>
- Bertolucci S., Zioutas K., Hofmann S., Maroudas M. The Sun and its Planets as detectors for invisible matter // Physics of the Dark Universe. V. 17. P. 13–21. 2017. <https://doi.org/10.1016/j.dark.2017.06.001>
- Clette F., Lefèvre L. The new sunspot number: assembling all corrections // Solar Phys. V. 291. P. 2629–2651. 2016. <https://doi.org/10.1007/s11207-016-1014-y>
- Clilverd M.A., Clarke E., Ulich T., Rishbeth H., Martin J. Predicting solar cycle 24 and beyond // Space weather. V. 4. № 9. 2006. S09005. <https://doi.org/10.1029/2005SW000207>
- Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia, Pennsylvania. USA: Society for industrial and applied mathematics. 369 p. 1992. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970104>
- Gleissberg W. Evidence for a long solar cycle // The Observatory. V. 65. № 282. P. 123–125. 1944.
- Gleissberg W. The eighty-year solar cycle in auroral frequency numbers // J. Br. Astron. Assoc. V. 75. P. 227–231. 1965.
- Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions of constant shape // SIAM J. Math. V. 15. № 4. P. 723–736. 1984. <https://doi.org/10.1137/0515056.m>
- Hathaway D.H. The Solar Cycle // Living Rev. Sol Phys. V. 12. lrsp-2015-4. <https://doi.org/10.1007/lrsp-2015-4>. 2015. <http://www.livingreviews.org/lrsp-2015-4>. arXiv:1502.07020
- Komitov B., Sello S., Duchlev P., Dechev M., Penev K., Koleva K. Sub- and Quasi-Centennial Cycles in Solar and Geomagnetic Activity Data Series // Bulgar. Astron. J. V. 25. P. 78–103. 2016.
- McCracken K.G., Beer J., Steinhilber F., Abreu J. A phenomenological study of the cosmic ray variations over the past 9400 years, and their implications regarding solar activity and the solar dynamo // Solar Phys. V. 286. № 2. P. 609–627. 2013.
- Nagovitsyn Y.A., Pevtsov A.A. Duffing oscillator model of solar cycles // Astrophys. J. Letters. V. 888. № 2. L26. 2020. doi <https://orcid.org/0000-0003-0489-0920>
- Nandy D. Progress in Solar Cycle Predictions: Sunspot Cycles 24–25 in Perspective // Solar Phys. V. 296. № 54. 2021. <https://doi.org/10.1007/s11207-021-01797-2>
- Obriдко V.N., Katsova M.M., Sokoloff D.D. Solar and stellar activity cycles – no synchronization with exoplanets // Mon. Notices Royal Astron. Soc. stac2286. 2022. <https://doi.org/10.1093/mnras/stac2286>
- Ogurtsov M.G., Nagovitsyn Yu.A., Kocharov G.E., Jungner H. Long-period cycles of the sun’s activity recorded in direct solar data and proxies // Solar Phys. V. 211. P. 371–394. 2002. <https://doi.org/10.1023/A:1022411209257>
- Owens M.J., Lockwood M., Riley P. Global solar wind variations over the last four centuries // Sci. Rep. 2017. <https://doi.org/10.1038/srep41548>
- Richards M.T., Rogers M.L., Richards D.St.P. Long-term variability in the length of the solar cycle // Astron. Soc. Pac. PASP. V. 121. № 881. P. 797–809. 2009.
- Scafetta N. Multi-scale harmonic model for solar and climate cyclical variation throughout the Holocene based on Jupiter–Saturn tidal frequencies plus the 11-year solar dynamo cycle // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. V. 80. P. 296–311. 2012. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2012.02.016>
- Scargle J.D. Wavelet and other multi-resolution methods for time series analysis / Statistical challenges in modern astronomy II. Eds. G.J. Babu and E.D. Feigelson. P. 333–347. N.Y. USA: Springer-Verlag. 1997.
- Silverman S.M. Secular variation of the aurora for the past 500 years // Rev. Geophys. V. 30. № 4. P. 333–351. 1992.

- *Solanki S.K., Krivova N.A., Schüssler M., Fligge M.* Search for a relationship between solar cycle amplitude and length // *Astron Astrophys.* V. 396. P. 1029–1035. 2002. <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20021436>
- *Sonett C.P.* Sunspot index infers a small relict magnetic field in the Sun's core // *Nature.* V. 306. P. 670–673. 1983.
- *Svalgaard L.* Up to nine millennia of multimessenger solar activity. 2018. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1810/1810.11952.pdf>
- *Usoskin I.G.* A history of solar activity over millennia // *Living Rev. Sol. Phys.* V. 14. № 3. P. 1–94. 2017. <https://doi.org/10.1007/s41116-017-0006-9>
- *Usoskin I.G., Mursula K.* Long-term solar cycle evolution: review of recent developments // *Solar Phys.* V. 218. P. 319–343. 2003. <https://doi.org/10.1023/B:SOLA.0000013049.27106.07>
- *Wilson S.G.* Digital modulation and coding. Charlottesville, Virginia, USA: Prentice-Hall. 667 p. ISBN: 1258629917. 1996.
- *Wolf R.* Extract of a letter to Mr. Carrington. *M.N.R.A.S.* V. 19. P. 85. 1859.
- *Zioutas K.M., Tsagri Y.K., Semertzidis T., Papaevangelou D., Hoffmann H.H., Anastassopoulos V.* The 11-years solar cycle as the manifestation of the dark Universe // *Modern Phys. Lett. A.* V. 29. P. 1–37. 2013. <https://doi.org/10.1142/S0217732314400082>
- *Zharkova V., Shepherd S., Popova E., Zharkov S.I.* Heart-beat of the Sun from Principal Component Analysis and prediction of solar activity on a millenium timescale // *Sci. Rep.* V. 5. 15689. 2015. <https://doi.org/10.1038/srep15689>