

УДК 533.951

МОДЕЛЬ ГЕНЕРАЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО В ПРОСТРАНСТВЕ ВИХРЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ НЕУСТОЙЧИВОЙ АТМОСФЕРЕ

© 2023 г. О. Г. Онищенко^{1, 2, *}, С. Н. Артеха^{2, **}, Ф. З. Фейгин^{1, ***}, Н. М. Астафьева^{2, ****}

¹Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта (ИФЗ РАН), Москва, Россия

²Институт космических исследований (ИКИ РАН), Москва, Россия

*e-mail: onish@ifz.ru

**e-mail: sergey.arteha@gmail.com

***e-mail: feygin@ifz.ru

****e-mail: ast@iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 28.01.2023 г.

После доработки 19.03.2023 г.

Принята к публикации 28.03.2023 г.

В данной работе представлена новая модель генерации осесимметричных сосредоточенных вихрей. Получено и проанализировано решение нелинейного уравнения для внутренних гравитационных волн в неустойчивой стратифицированной атмосфере в рамках идеальной гидродинамики. Соответствующие выражения, описывающие зависимости от радиуса для радиальной и вертикальной компонент скоростей во внутренней и внешней области вихря, включают комбинации функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя. Предложенная новая нелинейная аналитическая модель позволяет исследовать структуру и нелинейную динамику вихрей в радиальной и вертикальной области. Вихрь ограничен по высоте. Максимум вертикальной компоненты скорости достигается на определенной высоте. Ниже этой высоты радиальные потоки сходятся к оси, а выше происходит отток. Возникшая неустойчивость в стратифицированной атмосфере приводит к росту радиальной и вертикальной составляющей скоростей по закону гиперболического синуса, переходящему в экспоненциальный рост. Характерное время роста определяется обратным темпом роста неустойчивости. Проанализировано формирование вихрей с конечными составляющими скоростей, нарастающих во времени. Радиальная структура азимутальной скорости определяется структурой начального возмущения и может изменяться с высотой. Максимальное вращение достигается на определенной высоте. Рост азимутальной скорости происходит по сверх экспоненциальному закону.

DOI: 10.31857/S0016794023600047, EDN: OUEAFP

1. ВВЕДЕНИЕ

Существование вихревых структур в атмосфере является одним из основных факторов, влияющих на погоду и климат, в результате взаимодействия вихрей разной топологии и масштаба. В многообразии атмосферных вихревых движений отчетливо выделяются мезомасштабные и сосредоточенные вихри, представляющие большой интерес как для фундаментальных, так и для прикладных научных исследований. Сосредоточенные вихри (СВ) представляют собой локализованные в пространстве нестационарные вертикально вытянутые вихревые структуры с характерным поперечным масштабом от нескольких метров до нескольких сотен метров. К СВ относятся пыльные дьяволы (ПД) [Ives, 1947; Balme and Greeley, 2006], более интенсивные и крупномасштабные вихри — торнадо [Nalivkin, 1983; Justice, 1930], водяные смерчи [Church et al., 1979], которые можно наблюдать на море или крупных озерах, и огненные смерчи, ко-

торые могут внезапно возникать при пожарах в безветренную погоду [Battaglia et al., 2000; Tohidi et al., 2018] или при извержениях вулканов [Thorarinsson and Vonnegut, 1964]. В отличие от ПД, переносащих частицы пыли, водяные смерчи вовлекают капли воды в вертикальное вихревое движение. Несмотря на то, что перечисленные вихри возникают в разных средах и могут порождаться разными природными механизмами, все они испытывают восходящее геликоидальное движение. Скорость вращения в СВ достигает максимального значения на некотором расстоянии от оси вихря и стремится к нулю на его периферии. ПД, как наиболее простые и легко наблюдаемые СВ, представляют особый интерес для изучения всего класса СВ в атмосферах Земли и Марса.

Анализируя данные наблюдений ПД, Синклер [Sinclair 1969, 1973] предположил, что необходимыми условиями для их возникновения являются

наличие пыли в приповерхностном слое атмосферы и аномально высокие температуры грунта. Это согласуется с современными моделями [Balme and Greeley, 2006; Rafkin et al., 2016], в которых ПД образуются из конвективных ячеек в неустойчивом приповерхностном слое со сверхадиабатическим градиентом температуры. Ряд наблюдений [Balme and Greeley, 2006; Tohidi et al., 2018] показал, что генерация антициклонических и циклонических вихрей такого масштаба на открытой местности равновероятна. Из наблюдаемого отсутствия корреляции между внешней завихренностью, временем генерации и диаметром вихря следует, что одной внешней завихренности в атмосфере недостаточно для генерации ПД. Метеорологические наблюдения [Sinclair, 1973] послужили основой для создания первой термодинамической модели генерации ПД [Renno et al., 2002; Raasch and Franke, 2011]. В этой модели теплый воздух в конвективно-неустойчивой атмосфере поднимается вверх, а затем, охлаждаясь, опускается. Предлагаемая модель является аналогом тепловой машины, черпающей энергию из горячего поверхностного слоя.

Несмотря на значительное количество предшествующих исследований, механизм генерации и интерпретации наблюдаемых вихревых структур остается неопределенным. В работе [Onishchenko et al., 2014] была предложена гидродинамическая модель аксиально-симметричных конвективных вихрей (в предположении слабых возмущений) в конвективно-неустойчивой атмосфере на начальной стадии генерации. В работах, например [Onishchenko et al., 2015; Horton et al., 2016; Onishchenko et al., 2016; Onishchenko et al., 2020], эта модель получила дальнейшее развитие для конечных амплитуд скоростей при двумерном винтовом движении и различных случаях функций тока и затравочных азимутальных скоростей. Однако эти модели по-прежнему ограничивались анализом радиальной и вертикальной составляющих скорости полоидального движения либо в очень узкой центральной части, либо далеко на периферии конвективной ячейки. Целью настоящей работы является расширение аналитической модели, используемой для описания динамики осесимметричного вихря, на произвольное радиальное расстояние от центра. Для этого было получено решение в виде функций Бесселя (вместо степенных и экспоненциальных функций) с использованием метода поиска стационарных крупномасштабных дипольных вихрей волн Россби в нейтральной атмосфере [Larichev and Reznik, 1976].

Структура статьи следующая. В части 2 выводятся упрощенные уравнения для нелинейных внутренних гравитационных волн (ВГВ) в неустойчивой стратифицированной атмосфере. В части 3 обсуждается новая модель генерации вихрей, а в части 4 исследуется предложенная модель. В за-

ключении обсуждаются основные результаты исследования.

2. РЕДУЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Метеорологические наблюдения послужили основой для создания первых термодинамических моделей генерации вертикальных течений (конвективных ячеек) [Rafkin et al., 2016; Raasch and Franke, 2011; Renno et al., 1998]. В настоящее время современные представления о генерации вертикальных течений связаны с неустойчивостью стратифицированной атмосферы. Атмосфера считается неустойчиво стратифицированной, если квадрат частоты Брента–Вяйсяля или частоты плавучести:

$$\omega_g^2 = \mathbf{g} \left(\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a H} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} \right), \quad (1)$$

характеризующий ВГВ, отрицателен. Здесь $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения, γ_a — отношение удельных теплоемкостей, H — локальный масштаб высоты атмосферы, T и dT/dz — температура среды и температурный градиент в вертикальном направлении соответственно. Из-за солнечного прогрева почвы вертикальный градиент температуры (второй член частоты Брента–Вяйсяля) отрицателен, а его величина превышает первый член. Последнее соответствует известному критерию Шварцшильда для конвективной неустойчивости. В этом случае ВГВ превращаются в неустойчивые, экспоненциально растущие клетки. При выводе основного уравнения будем следовать работам [Onishchenko et al., 2014; Stenflo, 1987]. В качестве исходной системы уравнений мы использовали уравнение Эйлера идеальной гидродинамики (без учета вязкости), которое можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}, \quad (2)$$

и уравнение переноса для потенциальной температуры θ , являющейся однозначной функцией энтропии, которое можно записать как

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (3)$$

где мы пренебрегли диссипативными эффектами (такими как теплопроводность и вязкость). В введенных выше уравнениях ρ и p обозначают соответственно плотность и давление, $\mathbf{v}$ — скорость вещества, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ — эйлерова (конвективная) производная по времени, $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$ — ускорение свободного падения, $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор вдоль вертикальной оси, $\theta = p^{1/\gamma_a}/\rho$. Чтобы замкнуть нашу систему уравнений, мы использовали уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона) $p/\rho T = \text{const}$.

Следуя процедуре, разработанной в [Renno et al., 1998; Onishchenko et al., 2020; Stenflo 1987, 1990], мы можем вывести упрощенное уравнение для нелинейных ВГВ. Вводим цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с осью z в вертикальном направлении и полагаем, что $\partial/\partial\varphi = 0$. В общем случае скорость бездивергентного потока $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ можно разложить на его полоидальную составляющую $\mathbf{v}_p$ и азимутальную составляющую $v_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi$, т.е. $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + v_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi$, где $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ — соответствующий единичный вектор, а φ — угол цилиндрической системы. Полоидальные компоненты скорости связаны с функцией тока $\psi(t, r, \varphi, z)$ соотношениями:

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (4)$$

Согласно [Onishchenko et al., 2014] сокращенное уравнение, описывающее эволюцию нелинейных внутренних гравитационных волн (ВГВ), имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_g^2 \right) \Delta^* \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} J(\psi, \Delta^* \psi) = 0. \quad (5)$$

где $J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial r}$ — якобиан, а оператор Δ^* определяется как

$$\Delta^* = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (6)$$

Якобиан в уравнении (5) соответствует так называемой векторной нелинейности:

$$J(\psi, \Delta^* \psi) = -[\nabla \psi \times \nabla \Delta^* \psi]_\varphi.$$

Если $\omega_g^2 < 0$, уравнение (3) описывает нелинейную динамику ВГВ в неустойчиво стратифицированной атмосфере. Именно этот случай мы и будем рассматривать, когда в момент $t = 0$ возникает неустойчивость, т.е. в (5) имеем $\omega_g^2 \rightarrow -|\omega_g|^2$. В противоположном случае неустойчивости не возникает и энергия возмущений уносится из области их возникновения с помощью ВГВ. Отметим, что уравнение, подобное уравнению (5), было получено ранее в [Steflo, 1990] для интерпретации поведения акустико-гравитационных вихрей.

3. ГЕНЕРАЦИЯ СТРУЙ (РАДИАЛЬНЫХ И ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПОТОКОВ)

Мы будем искать скалярную функцию тока, которая может генерировать компоненты скорости, в виде

$$\psi(t, r, z) = v_0 r^2 f(z/L) \text{sh}(\gamma t) \Psi(R), \quad (7)$$

где $v_0 = \text{const}$ — некоторая характерная скорость; $\gamma = |\omega_g|$; $R = r/r_0$, $L = \text{const}$ — характерный пространственный масштаб по вертикали, такой, что $L \ll H$; Ψ — функция, зависящая от безразмерного радиального расстояния, r_0 — характерный радиус вихря, функция $f(z/L)$ будет определена в дальнейшем. Конечно, выбор функции тока в таком виде не однозначен, однако функция должна удовлетворять условиям регулярности трех компонент скорости и давления на оси симметрии вихря. Именно для возможности аналитического решения мы ищем решение методом разделения переменных. С этой функцией потока уравнение (5) сводится к:

$$J(\psi, \Delta^* \psi) = 0. \quad (8)$$

Нелинейное решение уравнения (8) можно свести к линейному решению вида

$$\Delta^* \psi = A \psi, \quad (9)$$

где величина A является постоянной. Рассматриваемая здесь функция тока должна оставаться локализованной в радиальном направлении, поэтому она должна удовлетворять условиям:

$$\left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \rightarrow 0, \quad (10)$$

когда $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$, т.е. функция должна быть регулярной вдоль оси симметрии цилиндра и обращаться в нуль на бесконечности. Чтобы найти решение уравнения (8), удовлетворяющее этим граничным условиям, мы использовали метод, предложенный в [Larichev and Reznik, 1976] для исследования крупномасштабных стационарных вихрей. Применяя оператор Δ^* к функции тока, заданной уравнением (7), мы получаем:

$$\Delta^* \psi = v_0 f(z/L) \text{sh}(\gamma t) \left(R^2 \frac{d^2 \Psi}{dR^2} + 3R \frac{d\Psi}{dR} \right). \quad (11)$$

Выбирая в уравнении (9) $A = \pm a_0^2 / r_0^2$ и используя (11), получаем следующее линейное уравнение для функции Ψ :

$$R^2 \frac{d^2 \Psi}{dR^2} + 3R \frac{d\Psi}{dR} = \pm a_0^2 R^2 \Psi. \quad (12)$$

Общее решение приведенного выше уравнения может быть представлено в виде функций Бесселя. Если a_0 — действительное число, то при отрицательном знаке справа решением будет комбинация функций: $\Psi(R) = J_1(a_0 R)/R$ и $\Psi(R) = Y_1(a_0 R)/R$. При положительном знаке справа в (12) это могут быть следующие действительные функции: $\Psi(R) = I_1(a_0 R)/R$ и $\Psi(R) = K_1(a_0 R)/R$. При нулевом значении a_0 получаем $\Psi(R) = C_0 + C'/R^2$. Поскольку исходное уравнение (5)

является нелинейным, то сумма вышеприведенных решений уже не является решением, так как константы в уравнении (12) справа будут разными. В результате легко проверить, что уравнение (5) будет удовлетворяться тождественно каждой из вышеприведенных функций, но области применимости этих решений по переменной R должны различаться. Более того, мы убеждаемся, что при таком выборе функция $f(z/L)$ может быть выбрана совершенно произвольно.

Среди найденных решений надо выбрать те, которые действительно и не дают особенностей для компонент скорости. Для внутренней области вихря решения должны приводить к нулевой радиальной скорости на оси, а для больших расстояний от оси решения должны не осциллировать, а достаточно быстро убывать. Решения для разных областей, в том числе для компонент скоростей, должны непрерывно и гладко состыковываться друг с другом. Также решение должно быть похоже на реальный сосредоточенный вихрь по соотношениям всех величин.

Для выполнения условий (10) ищем решение уравнения (12) методом соединения непрерывных решений во внутренней $\Psi_{\text{int}}(r < r_1)$ и внешней $\Psi_{\text{ext}}(r > r_1)$ областях. Величина r_1 , где происходит сшивку решений, будет определена в дальнейшем. На границе внутренней и внешней области (при $r = r_1$) выполняются условия непрерывности:

$$\left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)_{\text{int}} = \left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)_{\text{ext}}. \quad (13)$$

Во внутренней области всем требуемым условиям удовлетворяет только решение следующего вида (мы положили $a_0 = \delta_0$ при $r < r_1$):

$$\Psi_{\text{int}}(R) = \frac{J_1(\delta_0 R)}{R J_1(\delta_0)}. \quad (14)$$

Определим характерный радиус $r_0 < r_1$ как радиальное расстояние, при котором радиальная скорость максимальна по модулю. Тогда из условия $J_0(\delta_0) - J_2(\delta_0) = 0$ однозначно находим величину $\delta_0 \approx 1.841184$. Во внешней области вид решения тоже однозначен:

$$\Psi_{\text{ext}}(R) = m \frac{K_1(\delta R)}{R K_1(\delta)}, \quad (15)$$

где m и δ – постоянные параметры. Для того, чтобы решения (7) с функциями (14) и (15) удовлетворяли условиям (13) на границе раздела $r = r_1$, оставшиеся параметры и величина r_1 должны быть связаны следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \delta_0 K_1(\delta r_1) J_0(\delta_0 r_1) + \delta K_0(\delta r_1) J_1(\delta_0 r_1) = 0 \\ m K_1(\delta r_1) J_1(\delta_0) = K_1(\delta) J_0(\delta_0 r_1). \end{cases} \quad (16)$$

Для иллюстрации выберем произвольно параметр $\delta = 2$. Тогда из первого уравнения системы (16) следует $r_1 \approx 1.679375$, а из второго уравнения системы (16) однозначно получаем $m \approx 2.785071$.

Пространственная зависимость $\Psi(R)$ и ее “гладкость” на границе $R = r_1/r_0$ показаны на рис. 1 (здесь и далее для примера используются найденные выше значения параметров).

Тогда, используя уравнения (4), (7) и (14) или (15), для лучевой скорости во внутренней ($0 \leq r < r_1$) и внешней областях ($r_1 \leq r < \infty$) получаем следующие выражения:

$$v_r^{\text{int}} = -v_0 \frac{r_0}{L} f'(Z) \text{sh}(\gamma t) \frac{J_1(\delta_0 R)}{J_1(\delta_0)}, \quad (17)$$

$$v_r^{\text{ext}} = -v_0 \frac{r_0}{L} f'(Z) \text{sh}(\gamma t) m \frac{K_1(\delta R)}{K_1(\delta)}. \quad (18)$$

За счет выбора вида функции $f(Z)$ безразмерного параметра $Z = z/L$ можно добиться разной z -зависимости компонент скорости v_r и v_z , например, чтобы какая-то компонента (или обе) обращалась в ноль на границах вихря, достигали максимума на определенной высоте или меняла знак, начиная с определенной высоты. Пока, только для простоты графического представления, нарисуем зависимость радиальной компоненты скорости для той высоты, где $f'(Z) = 1$, и для той высоты, где $f'(Z) = -1$. Например, при простейшем выборе

$$f(z/L) = \begin{cases} (z/L), & 0 \leq z \leq L/2 \\ 1 - (z/L), & L/2 < z \leq L, \end{cases} \quad (19)$$

имеем $f'(Z) = 1$ при $0 \leq z \leq L/2$, и $f'(Z) = -1$ при $L/2 < z \leq L$. Радиальное изменение компоненты v_r (в единицах v_0) во внутренней и внешней областях показано на рис. 2 для различных значений члена γt и конкретного отношения $r_0/L = 0.1$. Это показывает, что решения и их производные непрерывны на границе, а компонента v_r регулярна на оси симметрии и обращается в ноль вдали от структуры.

Аналогично, выражения для вертикальной скорости во внутренней области ($0 \leq r < r_1$) и внешней области ($r_1 \leq r < \infty$) можно записать в виде:

$$v_z^{\text{int}} = v_0 f(z/L) \text{sh}(\gamma t) \delta_0 \frac{J_0(\delta_0 R)}{J_1(\delta_0)}, \quad (20)$$

$$v_z^{\text{ext}} = -v_0 f(z/L) \text{sh}(\gamma t) m \delta \frac{K_0(\delta R)}{K_1(\delta)}, \quad (21)$$

где функция $f(z/L)$ для простейшего выбора определена в (19). Такая структура полоидально-

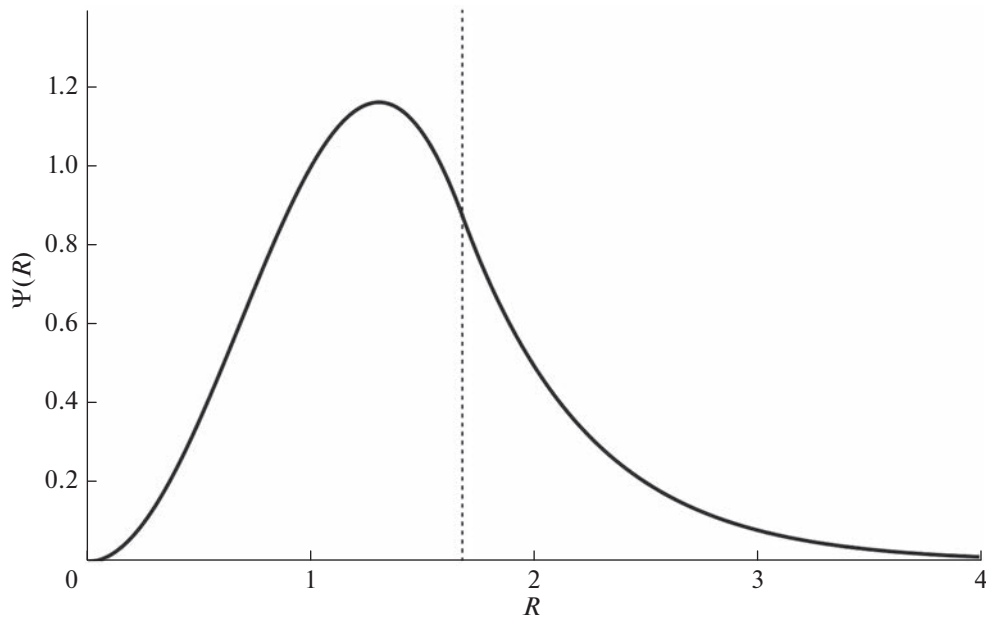


Рис. 1. Изменение функции тока $\Psi(R)$ в зависимости от безразмерного радиального расстояния R .

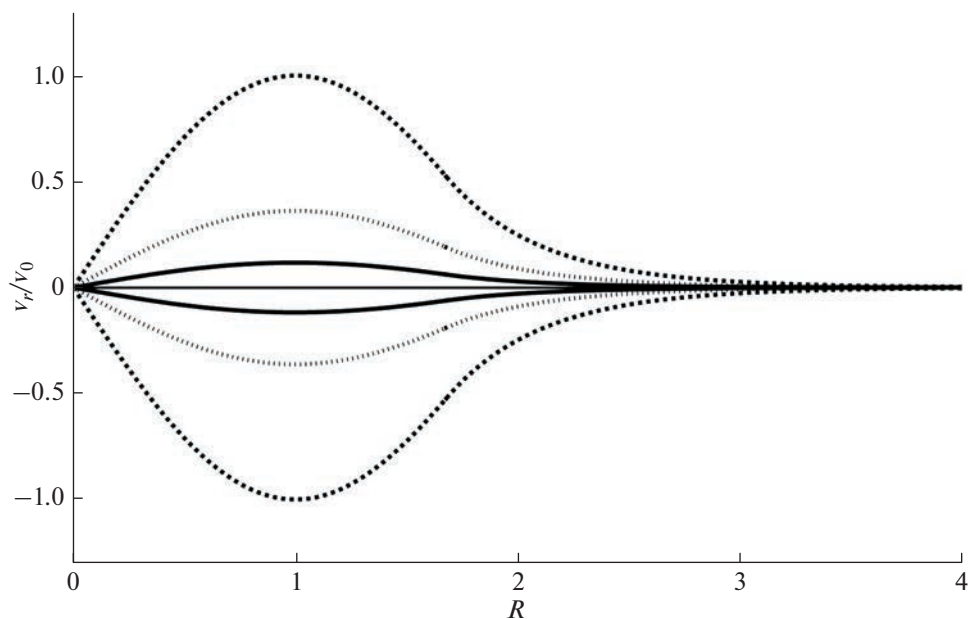


Рис. 2. Зависимость $v_r(R)/v_0$. Сплошная, пунктирная и штриховая линии отвечают значениям $\gamma t = 1, 2, 3$ соответственно; $\eta_0/L = 0.1$. Отрицательные скорости (подток) соответствуют высотам $0 < z < L/2$, положительные скорости (отток) отвечают высотам $L/2 < z < L$.

го движения жидкости конвективных ячеек описывает нарастающие во времени вертикальные потоки (или струи). Изменение вертикальной составляющей скорости (в единицах v_0 по отношению к безразмерному радиальному расстоянию от центра $R = r/r_0$) показано на рис. 3 для трех значений приращения γt .

4. МОДЕЛЬ ГЕНЕРАЦИИ ВИХРЯ

Для исследования генерации вихревого движения используем азимутальную составляющую уравнения импульса (с учетом того, что $\partial/\partial\phi = 0$):

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} = 0, \quad (22)$$

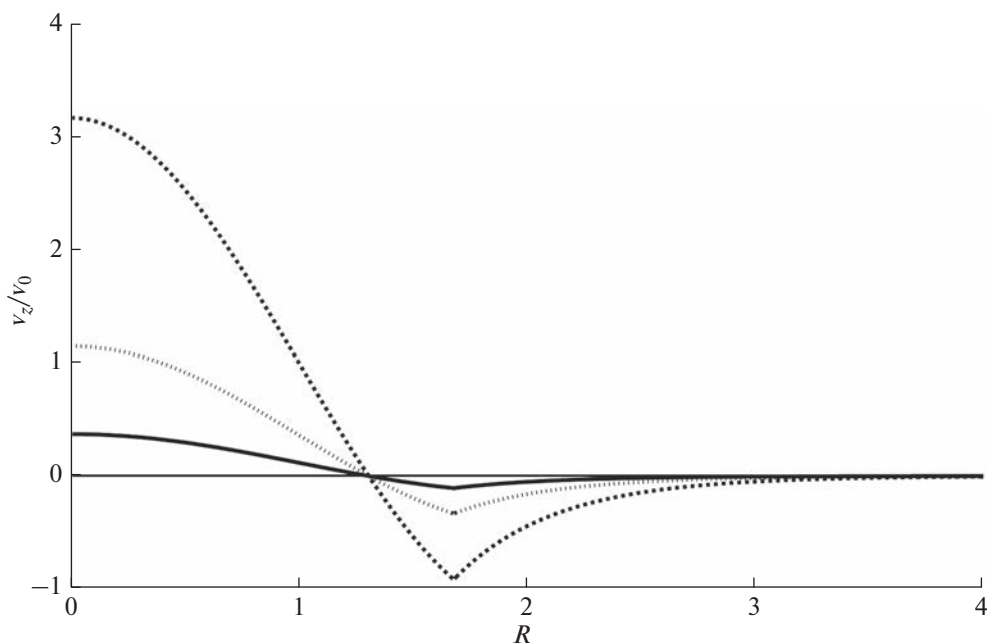


Рис. 3. Зависимость безразмерной вертикальной составляющей скорости v_z/v_0 от безразмерного радиального расстояния $R = r/r_0$. Рисунок отвечает выбору $f(z/L) = 0.1$. Сплошная, пунктирная и штриховая линии соответствуют $\gamma t = 1, 2, 3$. Если мы выбираем простейшую зависимость (19), то высота $z = L/2$ соответствует максимальной z -компоненте скорости. На этой высоте соответствующие скорости будут больше изображенных в 5 раз. Далее z -компонента скорости убывает с высотой.

где радиальная и вертикальная составляющие скорости задаются уравнениями (17)–(21). Для того, чтобы определить временную и пространственную эволюцию азимутальной составляющей скорости, мы будем искать решение для азимутальной составляющей скорости методом разделения переменных:

$$v_\varphi = v_{\varphi 0} y(t) f_0(z/L) V_{\varphi r}(R), \quad (23)$$

где $v_{\varphi 0} = \text{const}$. Для того, чтобы решение уравнения (22) определялось такой функцией с разделяющимися переменными, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{d y(t)}{d t} = \gamma c_0 \operatorname{sh}(\gamma t) y(t), \quad (24)$$

$$\frac{\tilde{v}_r}{R r_0} + \frac{\tilde{v}_r}{r_0 V_{\varphi r}(R)} \frac{d V_{\varphi r}(R)}{d R} + \frac{\tilde{v}_z}{L f_0(Z)} \frac{d f_0(Z)}{d Z} = -\gamma c_0, \quad (25)$$

где $c_0 = \text{const}$ – некоторое число (безразмерная константа), а каждая компонента со значком тильды означает множитель этой же функции без временной зависимости. Тогда решением уравнения (24) будет функция:

$$y(t) = \exp\{c_0 (\operatorname{ch}(\gamma t) - 1)\}. \quad (26)$$

Подставим теперь решения (17), (18), (20), (21) в уравнение (25). В результате имеем:

$$f'(Z) \hat{V}_r(R) + f'(Z) \frac{R \hat{V}_r(R)}{V_{\varphi r}(R)} \frac{d V_{\varphi r}(R)}{d R} - \frac{f(Z) \hat{V}_z(R)}{f_0(Z)} \frac{d f_0(Z)}{d Z} = \frac{\gamma c_0 L}{v_0}, \quad (27)$$

где введены обозначения для внутренней ($0 \leq r < r_1$) и внешней ($r_1 \leq r < \infty$) областей:

$$\hat{V}_r^{\text{int}}(R) = \frac{J_1(\delta_0 R)}{R J_1(\delta_0)}, \quad (28)$$

$$\hat{V}_r^{\text{ext}}(R) = m \frac{K_1(\delta R)}{R K_1(\delta)}, \quad (29)$$

$$\hat{V}_z^{\text{int}}(R) = \delta_0 \frac{J_0(\delta_0 R)}{J_1(\delta_0)}, \quad (30)$$

$$\hat{V}_z^{\text{ext}}(R) = m \delta \frac{K_0(\delta R)}{K_1(\delta)}. \quad (31)$$

Легко видеть, что в простейшем случае (19) выбор решения $f_0(Z) = f(Z)$ приводит к разделению переменных. Заметим, что (19) можно несколько усложнить, чтобы скорость роста величин по вертикали C_1 была произвольной, и максимум величин достигался не посередине, а в пределах верти-

кального размера вихря в произвольной точке Z_1 безразмерной переменной Z : $0 < Z_1 < 1$. Можно выбрать $f(Z) = C_1 Z$, $Z \in [0, Z_1]$, и $f(Z) = C_1 Z_1 \times (1 - Z)/(1 - Z_1)$, $Z \in [Z_1, 1]$. При этом переменные тоже разделяются, изменяется временной ход азимутальной скорости, но математически это приводит лишь к изменению константы c_0 в правой части (27), поэтому мы рассмотрим простейший случай (19). Тогда решение для оставшейся радиальной функции соответственно во внутренней области ($0 \leq r < r_1$) и внешней области ($r_1 \leq r < \infty$) будет:

$$V_{\varphi r}^{\text{int}}(R) = \exp \left\{ - \int_R^1 \frac{\alpha_{1,2} + V_z^{\text{int}}(x) - V_r^{\text{int}}(x)}{R V_r^{\text{int}}(x)} dx \right\}, \quad (32)$$

$$V_{\varphi r}^{\text{ext}}(R) = \exp \left\{ \int_1^R \frac{\alpha_{1,2} + V_z^{\text{ext}}(x) - V_r^{\text{ext}}(x)}{R V_r^{\text{ext}}(x)} dx \right\}, \quad (33)$$

где постоянные величины α_1 и α_2 относятся соответственно к нижней части $0 \leq z \leq L/2$ и к верхней части $L/2 < z \leq L$ по высоте вихря, и для этих областей сделаны соответствующие подстановки $c_0 = \frac{\alpha_1 v_0}{\gamma L}$ и $c_0 = -\frac{\alpha_2 v_0}{\gamma L}$. Здесь знаки выбраны таким образом, чтобы в начальный момент времени затравочная азимутальная скорость была непрерывной по высоте. Если для верхней части вихря вместо знака минус выбрать знак плюс, то это приведет к очень быстрому затуханию вращения в верхней половине вихря. Разные значения постоянных величин α_1 и α_2 отвечают различным дифференциальным вращениям и разной динамике вихревого движения по высоте в области радиального подтока и оттока. Естественно, что для непрерывности потока в горизонтальной плоскости величины α_1 и α_2 должны быть одинаковы во внутренней области ($0 \leq r < r_1$) и внешней области ($r_1 \leq r < \infty$) вихря (на одной высоте). Если же выбрать разные значения α_1^{int} и α_1^{ext} , то этот выбор отвечает не просто дифференциальному вращению, а вращению с разрывом (сдвиг при $r = r_1$). Поскольку нас интересует случай единого вихря с непрерывным азимутальным вращением, то в этом случае $\alpha_{1,2}^{\text{int}} = \alpha_{1,2}^{\text{ext}} \equiv \alpha_0$.

Таким образом, задание величин $\delta, \alpha_0, v_0, v_{\varphi 0}$ и γ полностью определяет структуру и динамику вихря. Мы продолжим расчеты с прежними значениями этих параметров, выбрав $\alpha_0 = 0.01$. Выбираем для определенности $|v_{\varphi 0}| = v_0$, так как начальные скорости (в том числе затравочное вращение) должны быть сопоставимы (и мы будем искать отношение этих величин). С точки зрения физи-

ки это вопрос о том, какой начальной завихренности достаточно, чтобы мог возникнуть вихрь подобного масштаба, и сколько времени должна поддерживаться начальная закрутка, чтобы возникший вследствие неустойчивости радиальный подток и вертикальное течение смогли подпитывать возникшую структуру. По-видимому, с точки зрения идеальной гидродинамики закрутка должна поддерживаться в течение времени $\tau \sim 1/\gamma$, пока не нарастет скорость подтока; тогда надо выбрать $|v_{\varphi 0}| \approx v_0/e$. В дополнение к неустойчивости, приводящей к вертикальному и радиальному движению, вращение нарастает и поддерживается физически за счет сохранения момента импульса. Поэтому вихрь будет нарастать или поддерживаться до тех пор, пока вся область с первоначальной ненулевой закруткой не подтянется к оси за счет радиального подтока (следовательно, величина α_0 должна быть очень маленькой), а для движущегося вихря — пока он движется в области неустойчивости с ненулевой закруткой (ненулевой спиральностью).

Заметим, что мы могли бы выбрать разное направление вращения для верхней и нижней половины вихря и разную структуру (такая система связанного циклонического-антициклонического вращения встречается довольно часто, правда, для тропических циклонов). В этом случае R -распределение азимутальной скорости и ее динамика может различаться для верхней и нижней половины вихря.

Рисунки 2–4 демонстрируют экспоненциальную локализацию течения в радиальном направлении. В частности, на рис. 2 представлена зависимость радиальной составляющей нормированной скорости потока (v_r/v_0) от безразмерной величины R для трех различных значений γt и $r_0/L = 0.1$. Лучевая скорость сходится на оси симметрии и достигает максимального значения на радиальном расстоянии $R = 1$. В начальный момент скорость равна нулю, и со временем рост радиальной компоненты становится экспоненциальным. На рис. 3 представлена зависимость нормированной скорости вертикального потока (v_z/v_0) от той же самой безразмерной величины R при $z/L = 0.1$ и при трех различных значениях γt . Вертикальная скорость возрастает в соответствии с уравнениями (20) и (21). Видно, что v_z/v_0 достигает максимального значения в центре струи. В области $R \approx 1.3$ осевая компонента скорости обращается в нуль. В области $R > 1.3$ восходящее течение в центре струи переходит в нисходящее движение и достигает максимальных значений при $R = 1.68$. Далее скорость стремится к нулю на границе вихря.

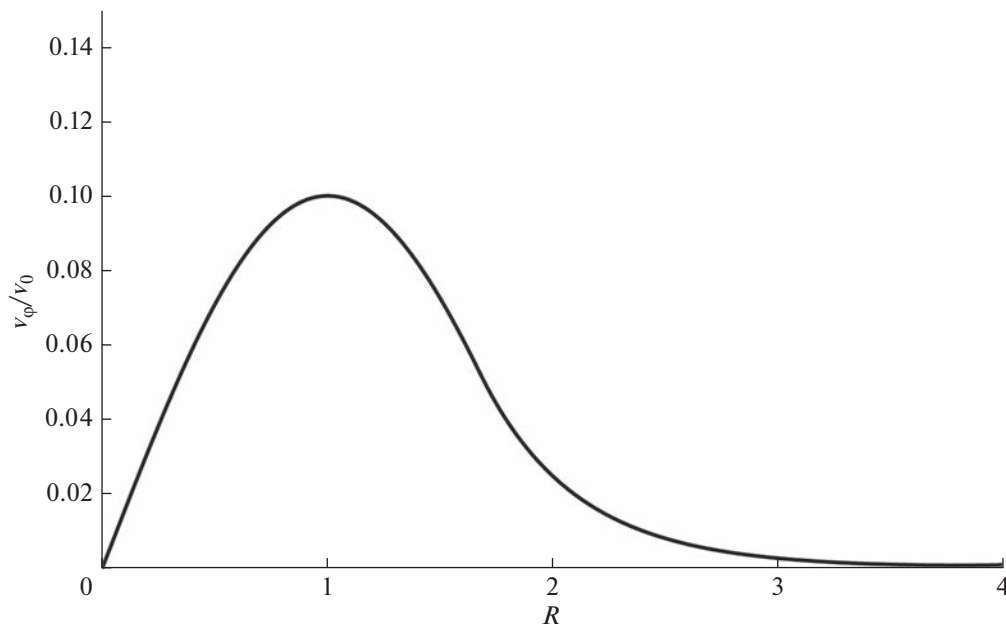


Рис. 4. Зависимость v_ϕ/v_0 при $\gamma t = 1$ на высоте $z/L = 0.1$.

На рис. 4 представлена зависимость азимутальной составляющей скорости v_ϕ/v_0 от расстояния R . За счет выбора различных значений α_0 можно получить различное дифференциальное вращение. Азимутальная скорость достигает максимальных значений при $R = 1$. В нижней половине вихря в максимуме по высоте ($z = L/2$) скорость будет в 5 раз больше изображенной на графике. Если радиальная и вертикальная скорости увеличиваются примерно в e раз при увеличении $\gamma t = 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$ на каждую единицу (рост стремится к экспоненциальному), то рост азимутальной скорости в нижней половине вихря стремится к сверх экспоненциальному закону. Хотя вначале азимутальная компонента скорости увеличивается медленно из-за малости α_0 , но уже после $\gamma t = 5$ ее увеличение резко обгоняет рост двух других компонент скорости (примерный рост на каждую единицу γt : в 1.08, 1.23, 1.77, 4.74, 68.76, 98729, ... раз). Поэтому мы не стали изображать этот рост.

Полученное в данной работе решение описывает генерацию и начальную стадию развития вихря, поэтому его применимость ограничена во времени, так как для описания перехода к квазистационарной стадии и описания такой стадии необходимо было бы использовать уравнения Навье-Стокса, что существенно усложняет задачу.

В случае $\omega_g^2 > 0$ неустойчивость не возникает, все гиперболические функции в решениях переходят в соответствующие тригонометрические функции, возмущения уносятся из области воз-

никновения с помощью ВГВ, и структура не развивается.

5. ВЫВООДЫ

В настоящей работе в рамках идеальной гидродинамики получено нелинейное уравнение для ВГВ в неустойчивой стратифицированной атмосфере, приводящее к образованию аксиально-симметричных структур, растущих во времени. Показано, что полученное уравнение можно свести к более простому уравнению, которое все еще содержит векторную нелинейность. Предложена функция тока $\Psi(R)$, которая позволяет свести данное нелинейное уравнение к уравнению, имеющему в качестве решений различные функции Бесселя. Путем согласования решений на границе конвективной ячейки, разделяющей внутреннюю область и внешнюю область, было получено аналитическое решение для радиальной и вертикальной компонент скорости, верное для всех радиальных расстояний R .

Предлагаемая модель зависит от пяти параметров: $\delta, \alpha_0, v_0, v_{\phi 0}$ и γ . Это позволяет в значительной мере варьировать пространственную структуру вихря, включая относительные величины компонент скорости, направления вращения, а также динамику развития вихря во времени. Очевидно, что область применимости решения по времени ограничена начальной стадией развития вихря (так как не учитывались диссипативные процессы). По пространственным переменным решение применимо, пока скорости не сравняются с фо-

новыми значениями. Физически, область применимости решения ограничена областью существования неустойчивости и областью с ненулевыми вращательным моментом.

Структура решения имеет следующий вид. Лучевая скорость сходится на оси симметрии и достигает максимального значения на определенном расстоянии R . С некоторой высоты приток сменяется радиальным оттоком. В начальный момент радиальная и вертикальная скорости равны нулю, и со временем их рост становится экспоненциальным. Вертикальный поток наибольший на оси вихря и достигает максимума на определенной высоте. По краям вихря реализуется нисходящее движение.

Таким образом, предлагаемая модель позволяет анализировать локализованные структуры полоидального движения жидкости, например, экспоненциально нарастающие во времени вертикальные струи в зависимости от R . Вихревое вращение оказывается дифференциальным. Радиальная структура азимутальной скорости определяется структурой начального возмущения. Азимутальная скорость может изменяться с высотой. Максимальное вращение достигается на определенной высоте. Рост азимутальной скорости происходит по сверхэкспоненциальному закону.

Область применимости предложенной модели ограничена относительно тонким слоем атмосферы, где развивается конвективная неустойчивость, но может быть расширена для объяснения генерации высокоскоростных астрофизических джетов или джетов в солнечной короне.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках Государственного задания Института физики Земли РАН и в рамках государственного задания по теме фундаментального научного исследования “Мониторинг” ИКИ РАН (122042500031-8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- *Balme M., Greeley R.* Dust devils on Earth and Mars // *Rev. Geophys.* 44, RG3003. 2006.
- *Battaglia F., Rehm R.G., Baum H.R.* The fluid mechanics of fire whirls: An inviscid model // *Phys. Fluids* V. 12. P. 2859–2867. 2000.
- *Church C.R., Snow J.T., Baker G.L., Agee E.M.* Characteristics of Tornado-Like Vortices as a Function of Swirl Ratio: A Laboratory Investigation // *J. Atmos. Sci.* V. 36. P. 1755–1776. 1979.
- *Justice A.A.* Seeing the Inside of a Tornado // *Monthly Weather Review.* V. 58(5). P. 205–206. 1930.
- *Horton W., Miura H., Onishchenko O., Couedel L., Arnas C., Escarguel A., Benkadda S., Fedun V.* Dust devil dynamics // *J. Geophys. Res. Atmos.* V. 121. P. 7197–7214. 2016.
- *Ives R.L.* Behavior of Dust Devils // *Bull. Am. Meteorol. Soc.* V. 28. P. 168–174. 1947.
- *Larichev V.D., Reznik G.M.* On two-dimensional solitary Rossby waves // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* V. 231. P. 1077–1079. 1976.
- *Nalivkin D.V.* Hurricanes, Storms, and Tornadoes // *Geographic Characteristics and Geological Activity.* Rotterdam: A.A. Balkema, 1983.
- *Onishchenko O.G., Horton W., Pokhotelov O.A., Stenflo L.* Dust devil generation // *Phys. Scr.* V. 89. 075606. 2014.
- *Onishchenko O., Pokhotelov O., Horton W., Fedun V.* Dust devil vortex generation from convective cells // *Ann. Geophys.* V. 33. P. 1343–1347. 2015.
- *Onishchenko O.G., Horton W., Pokhotelov O.A., Fedun V.* Explosively growing vortices of unstably stratified atmosphere // *J. Geophys. Res. Atmos.* V. 121. P. 11–264. 2016.
- *Onishchenko O.G., Pokhotelov O.A., Astafeva N.M., Horton W., Fedun V.N.* Structure and dynamics of concentrated mesoscale vortices in planetary atmospheres // *Phys. Uspekhi.* V. 63. P. 683–697. 2020.
- *Raasch S., Franke T.* Structure and formation of dust devil-like vortices in the atmospheric boundary layer: A high-resolution numerical study // *J. Geophys. Res. Atmos.* V. 116. D16120. 2011.
- *Rafkin S., Jemmett-Smith B., Fenton L., Lorenz R., Take-mi T., Ito J., Tyler D.* Dust Devil Formation // *Space Sci. Rev.* V. 203. P. 183–207. 2016
- *Rennó N.O., Burkett M.L., Larkin M.P.* A Simple Thermodynamical Theory for Dust Devils // *J. Atmos. Sci.* V. 55 P. 3244–3252. 1998.
- *Renno N.O., Abreu V.J., Koch J., Smith P.H., Hartogensis O.K., De Bruin H.A.R., Burose D., Delory G.T., Farrell W.M., Watts C.J.* MATADOR 2002: A pilot field experiment on convective plumes and dust devils // *J. Geophys. Res. (Planets)* V. 109, E07001. 2004.
- *Sinclair P.C.* The Lower Structure of Dust Devils // *J. Atmos. Sci.* V. 30. P. 1599–1619. 1973.
- *Stenflo L.* Acoustic solitary vortices // *Phys. Fluids.* V. 30. P. 3297–3299. 1987.
- *Stenflo L.* Acoustic gravity vortices // *Phys. Scr.* V. 41. P. 641. 1990.
- *Thorarinsson S., Vonnegut B.* Whirlwinds Produced by the Eruption of Surtsey Volcano. *Bull. // Am. Meteorol. Soc.* V. 45(8). P. 440–444. 1964). Sinclair P.C. General Characteristics of Dust Devils // *J. Appl. Meteorol.* V. 8. P. 32–45. 1969.
- *Tohidi A., Gollner M.J., Xiao H.* Fire Whirls // *Annu. Rev. Fluid Mech.* V. 50. P. 187–213. 2018.