

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ГЕОМАГНИТНОЙ АКТИВНОСТИ ОТНОШЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ НА ГЕОСТАЦИОНАРНОЙ ОРБИТЕ К МИНИМАЛЬНОМУ

© 2023 г. С. В. Смолин*

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

**e-mail: smolinsv@inbox.ru*

Поступила в редакцию 29.01.2023 г.

После доработки 16.04.2023 г.

Принята к публикации 25.05.2023 г.

Предложена новая математическая модель с использованием обыкновенного дифференциального уравнения, описывающая аналитически (когда индекс геомагнитной активности $Kp = \text{const}$ или $Kp \approx \text{const}$) или численно (если $Kp(t) \neq \text{const}$) перпендикулярные (для питч-угла 90°) дифференциальные или интегральные потоки релятивистских электронов на геостационарной (геосинхронной) орбите, а также на любой круговой орбите в магнитосфере Земли. В модели предполагается, что потоки зависят от местного времени LT на орбите, Kp , параметра Мак-Илвейна L и перпендикулярного дифференциального потока или интегрального потока релятивистских электронов, взятых для 00 LT. Используются наблюдения потоков релятивистских (>2 МэВ) электронов, усредненные по местному часу LT вдоль орбиты космического аппарата GOES с 1995 по 2009 г. Выполнено сравнение модели с этими данными. Получено практически идеальное согласие наблюдений с моделью при эффективности предсказания точности модели $PE = 0.9989$. Использование аналогичных данных аппарата GOES 10 позволяет получить $PE = 0.9924$. Предложенные формулы позволяют находить, например, среднюю величину перпендикулярного интегрального потока релятивистских электронов за сутки и прогнозировать приблизительно на сутки вперед максимальный перпендикулярный интегральный поток релятивистских электронов на геостационарной орбите. Нелинейный эффект теоретически прогнозируется в виде нелинейной зависимости отношения максимального перпендикулярного интегрального потока к минимальному потоку заряженных частиц на геостационарной орбите от Kp -индекса геомагнитной активности. Пока сравнение модели с усредненными интегральными потоками релятивистских электронов произведено для диапазона $0 \leq Kp < 6$ с прогнозируемым максимальным отношением потоков в 24.4139 раза при $Kp = 8$ и с $PE = 0.8678$.

DOI: 10.31857/S0016794023600035, EDN: THTIKQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует несколько моделей для прогнозирования (предсказания) потоков релятивистских электронов (РЭ) во внешнем радиационном поясе Земли (РПЗ). Например, одна из первых основополагающих работ по прогнозированию потоков (флуенсов) РЭ на геостационарной орбите (ГСО) – это работа [Baker et al., 1990]. В работе [Li et al., 2001] описана модель предсказания для суточного усредненного потока релятивистских электронов на ГСО. Здесь численно решается одномерное уравнение радиальной диффузии при заданных параметрах солнечного ветра. В работе [Li, 2004] использована модель [Li et al., 2001], чтобы развить модель прогноза логарифма суточного усредненного потока релятивистских электронов на ГСО с заблаговременностью 24 ч и 48 ч. Эта модель включает несколько других особенностей в дополнение к солнечному ветру. В работе

[Turner and Li, 2008] создана модель предсказания, которая использовала поток низкоэнергичных электронов, чтобы прогнозировать релятивистский поток на ГСО. Ukhorskiy et al. [2004] предложили основанную на данных модель, чтобы получать предсказание на одни сутки для суточного максимума потока электронов на ГСО. Модель комбинирует условную вероятность с техниками нелинейного анализа временных рядов. Fok et al. [2008] развили основанную на физике модель среды радиационного пояса RBE (Radiation Belt Environment), чтобы исследовать внешний РПЗ и обеспечивать реальное во времени текущее прогнозирование популяции электронов внешнего пояса. Lyatsky and Khazanov [2008] ввели другую модель предсказания, которая прогнозирует кубический корень от суточного усредненного потока электронов с энергией >2 МэВ на ГСО. Их метод использует два уравне-

ния с источниками и потерями. Модель предсказания потока (FluxPred) [Ling et al., 2010] – это нейронная сетевая модель, использующая 17 входов, состоящих из данных о потоках на ГСО за последние 10 дней и данных Kp -индекса геомагнитной активности за 7 дней. Выходом нейронной сети были прогнозирование на 24, 48 и 72 ч суточного усредненного потока электронов с энергией >2 МэВ на ГСО. В работе [Efitorov et al., 2016] рассматривается прогнозирование максимальных за сутки значений потока релятивистских электронов на ГСО при помощи адаптивных методов. Turner et al. [2011] представили улучшенную систему прогнозирования для релятивистских электронов на ГСО, которая включает три реальные во времени модели предсказания. Результаты недавних измерений протонов и электронов на ГСО и их обсуждений представлены, например, в работах [Borovsky et al., 2014, 2016]. А в работе [Pinto et al., 2020] рассматривается радиальный ответ, или отклик (англ. radial response), внешнего электронного радиационного пояса во время увеличений (англ. enhancements) релятивистских электронов на ГСО. В этой работе идентифицированы 60 случаев увеличения релятивистских электронов на ГСО, чтобы исследовать радиальный ответ (отклик) потоков внешнего пояса и корреляцию между потоками на ГСО ($L = 6.6$, GOES 15) и потоками на L -оболочках ниже ($2.5 < L < 6.0$, Van Allen probes ECT-REPT). Для понимания эволюции внешнего радиационного пояса на разных L -оболочках также оценивалось отношение максимального интегрального потока релятивистских (>2 МэВ) электронов к минимальному интегральному потоку для всех $2.5 < L < 6.0$ в зависимости от трех геомагнитных индексов: $SYM-H$, AE и Kp . В работе [Мягкова и др., 2021] описано краткосрочное и среднесрочное прогнозирование потоков релятивистских электронов внешнего радиационного пояса Земли методами машинного обучения, а в работе [Kalegaev et al., 2022] представлено среднесрочное прогнозирование флуенса релятивистских электронов на геостационарной орбите, основываясь на солнечных наблюдениях.

Анализ литературы, которая приведена в СПИСКЕ ЛИТЕРАТУРЫ, показывает, что значительная часть работ посвящена моделям для прогнозирования суточного усредненного потока релятивистских электронов на ГСО [Li et al., 2001; Li, 2004; Lyatsky and Khazanov, 2008; Ling et al., 2010; Мягкова и др., 2021], максимального за сутки потока РЭ на ГСО [Ukhorskiy et al., 2004; Efitorov et al., 2016] и для среднесрочного прогнозирования флуенса релятивистских электронов на геостационарной орбите [Мягкова и др., 2021; Kalegaev et al., 2022]. А моделей, описывающих потоки РЭ вдоль ГСО в зависимости от местного време-

ни ЛТ (особенно моделей, основанных на физике, а не на статистической обработке данных) значительно меньше, например [O'Brien, 2009; Turner et al., 2011; Su et al., 2014]. В этих работах экспериментальные данные вдоль ГСО показывают наличие максимального потока РЭ \sim в полдень и минимального потока РЭ \sim в полночь. Поэтому будет интересным исследовать отношения максимального потока РЭ к минимальному потоку на ГСО в зависимости, например, от Kp -индекса геомагнитной активности.

Исходя из изложенного, целью данной работы является математическое моделирование потоков заряженных частиц, в частности релятивистских электронов, на геостационарной (геосинхронной) орбите (ГСО). Моделирование в виде: 1) новой, основанной на физике, математической модели, описывающей перпендикулярные дифференциальные или интегральные потоки релятивистских (>2 МэВ) электронов на ГСО в зависимости от местного времени ЛТ на ГСО и Kp -индекса геомагнитной активности; 2) сравнения модельного перпендикулярного интегрального потока релятивистских (>2 МэВ) электронов с усредненными экспериментальными данными на ГСО КА GOES, вычисляя величину эффективности предсказания (англ. prediction efficiency) PE точности предложенной модели и 3) теоретического прогнозирования (предсказания) нелинейного эффекта, т.е. нелинейной зависимости отношения максимального потока релятивистских электронов к минимальному потоку на ГСО в зависимости от Kp -индекса геомагнитной активности.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Одномерное уравнение питч-угловой диффузии (или модифицированное уравнение Фоккера–Планка) для плотности (или функции) распределения частиц в фазовом пространстве, описывающее только “чистую” питч-угловую диффузию с потерями от взаимодействий “волна–частица” для диапазона питч-углов от 0° до 180° , таково [Смолин, 2012; Smolin, 2015]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(D_{\alpha\alpha} \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{2L} \frac{dL}{dt} f \right) - \frac{f}{T_{wp}} + S_{\perp} \sin^2 \alpha f. \quad (1)$$

Здесь f – плотность распределения частиц в фазовом пространстве (или функция питч-углового распределения частиц); t – время; α – локальный питч-угол; $D_{\alpha\alpha}$ – коэффициент питч-угловой диффузии; L – параметр Мак-Илвейна; dL/dt – радиальная скорость дрейфа заряженных частиц в магнитосфере Земли; T_{wp} – среднее вре-

мя жизни вследствие взаимодействий “волна – частица”; S_{\perp} – перпендикулярный коэффициент функции источника частиц ($\alpha = 90^{\circ}$).

Используя уравнение (1), для аналитического описания перпендикулярного ($\alpha = 90^{\circ}$) дифференциального потока заряженных частиц в магнитосфере Земли как модель [Смолин, 2018а, б; 2019; Smolin, 2021] предлагается обыкновенное дифференциальное уравнение, которое зависит от времени и нескольких параметров:

$$\frac{dj_{\perp}}{dt} + \left(-\frac{1}{2L} \frac{dL}{dt} + \frac{\gamma_{\perp} - \gamma_{\perp 0}}{\gamma_{\perp 0}(\gamma_{\perp 0} + 2)T_{wp\perp}} \right) j_{\perp} = 0, \quad (2)$$

где j_{\perp} – перпендикулярный дифференциальный поток заряженных частиц ($j = 2mEf$, m – масса заряженной частицы, E – энергия частицы); $\gamma_{\perp 0}$ – хорошо известный (когда $j = j_{\perp} \sin^{\gamma(\alpha)} \alpha$ [Смолин, 1996]) индекс анизотропии (или показатель) питч-углового распределения заряженных частиц, взятый для питч-угла 90° при $t = 0$; $\gamma_{\perp} \equiv \gamma_{\perp}(t)$ – зависимость от времени перпендикулярного индекса анизотропии питч-углового распределения заряженных частиц на интервале времени вычисления; $T_{wp\perp}$ – время жизни вследствие взаимодействий “волна–частица” для питч-угла $\alpha = 90^{\circ}$.

Описание перехода от уравнения Фоккера–Планка в частных производных (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению (2) очень подробно представлено в работе [Смолин, 2019]. Для такого вывода, когда был рассмотрен предел при питч-угле α , стремящемся к 90° , использовались следующие ранее полученные результаты: $\gamma_{\perp} = -1/j_{\perp} d^2 j/d\alpha^2|_{\perp}$ [Смолин, 1996] и формулы для коэффициента питч-угловой диффузии D_{\perp} и функции источника заряженных частиц S_{\perp} [Смолин, 2012; Smolin, 2015].

При проведении численных расчетов будем полагать в уравнениях (1) и (2), что $dL/dt \approx \langle dL/dt \rangle$. Тогда баунс-усредненная радиальная дрейфовая скорость движения заряженных частиц в магнитосфере Земли будет определена, например для дипольного магнитного поля Земли, так [Смолин, 1993, 1996]:

$$\left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle = -\Omega \frac{\Phi_2}{\Phi_0} L^4 \cos \varphi, \quad (3)$$

где φ – азимутальный угол (местное время $LT = 0$ ч в полночь) или геомагнитная восточная долгота в плоскости магнитного экватора; $\Omega = 2\pi/24$ – угловая скорость вращения Земли, 1/ч; $\Phi_0 = 92$ кВ, а зависимость Φ_2 , измеренная в кВ, от индекса геомагнитной активности $Kp \equiv Kp(t)$, определя-

ется по формуле [Nishida, 1978; Khazanov et al., 2003]

$$\Phi_2 \approx \frac{\Phi_{20}}{(1 - 0.16Kp + 0.01Kp^2)^3}, \quad (4)$$

где $\Phi_{20} \equiv \Phi_2(Kp = 0) = 0.045$ кВ.

На физическом уровне потенциал электрического поля магнитосферной конвекции Φ_2 , определяемый эмпирически, можно объяснить частичной экранировкой внешнего электрического поля альвеновским слоем [Nishida, 1978].

Уравнение (2) с учетом (3) записывается следующим образом:

$$\frac{dj_{\perp}}{dt} + \left(\frac{\Omega \Phi_2(t) L^3(t) \cos \varphi(t)}{2\Phi_0} + \frac{\gamma_{\perp}(t) - \gamma_{\perp 0}}{\gamma_{\perp 0}(\gamma_{\perp 0} + 2)T_{wp\perp}} \right) j_{\perp} = 0. \quad (5)$$

Теперь к уравнению (5) можно добавить уравнения, описывающие траекторию движения космического аппарата (КА) в гравитационном поле Земли. Но будет проще, если задать траекторию КА в параметрическом виде. В этом случае для ГСО получаем

$$L(t) = 6.6; \quad \varphi(t) = \Omega t + \phi, \quad (6)$$

где $\phi = \text{const}$ будет определяться из сопоставления с экспериментальными данными на ГСО, а t – это уже местное время LT вдоль ГСО в часах.

В дальнейшем, для КА с любой круговой орбитой или с эллиптической орбитой движения такую замену в (5) можно будет сделать аналогично (6).

Для первого приближения предположим, что, например, в течение одних суток на ГСО $\gamma_{\perp}(t) \approx \gamma_{\perp 0}$ и $Kp \approx \text{const}$, т.е. (4) $\Phi_2(t) \approx \text{const}$, тогда уравнение (5) упрощается. С учетом (6) получается уравнение [Смолин, 2018а, б]

$$\frac{dj_{\perp}}{dt} + \left(\frac{\Omega \Phi_2 L^3 \cos(\Omega t + \phi)}{2\Phi_0} \right) j_{\perp} = 0, \quad (7)$$

которое решается аналитически

$$j_{\perp}(t) = j_{\perp 0} \exp\left(-\frac{\Phi_2 L^3}{2\Phi_0} [\sin(\Omega t + \phi) - \sin \phi] \right). \quad (8)$$

Здесь, $j_{\perp 0}$ – перпендикулярный дифференциальный поток заряженных частиц при $t = 0$, т.е. когда местное время вдоль ГСО $LT = 0$ ч в полночь.

Дополнительно найдем перпендикулярный интегральный поток заряженных частиц. Для этого надо проинтегрировать перпендикулярный дифференциальный поток $j_{\perp}(t)$ по энергии от какого-то значения энергии (например, $E = 2$ МэВ) до бесконечности (в идеале) или до очень большого значения энергии. Поэтому интегрируя (8) по

энергии слева и справа, в итоге получаем зависимость перпендикулярного интегрального потока заряженных частиц $J(>E)_{\perp}(t)$ от местного времени LT вдоль ГСО

$$J(>E)_{\perp}(t) = J(>E)_{\perp 0} \times \exp\left(-\frac{\Phi_2 L^3}{2\Phi_0} [\sin(\Omega t + \phi) - \sin\phi]\right), \quad (9)$$

где $J(>E)_{\perp 0}$ – перпендикулярный интегральный поток заряженных частиц в полночь на ГСО (для LT = 0 ч).

Зная из экспериментальных данных зависимости $j_{\perp 0}$ и $J(>E)_{\perp 0}$ от Kp -индекса геомагнитной активности, можно будет вычислять (прогнозировать) перпендикулярный дифференциальный поток $j_{\perp}(t)$ (8) и перпендикулярный интегральный поток заряженных частиц $J(>E)_{\perp}(t)$ (9) от местного времени LT вдоль ГСО, когда $Kp \approx \text{const}$, например, в течение одних суток.

Если $Kp(t) \neq \text{const}$ и (4) $\Phi_2(t) \neq \text{const}$ (зависимость от t может быть сложной), получим, используя (7), следующие общие формулы для модельных (прогнозных) расчетов на ГСО и на любой круговой орбите КА:

$$j_{\perp}(t) = j_{\perp 0} \exp\left(\int_0^t \left(-\frac{\Omega\Phi_2(t)L^3}{2\Phi_0} \cos(\Omega t + \phi)\right) dt\right) \quad (10)$$

или

$$J(>E)_{\perp}(t) = J(>E)_{\perp 0} \times \exp\left(\int_0^t \left(-\frac{\Omega\Phi_2(t)L^3}{2\Phi_0} \cos(\Omega t + \phi)\right) dt\right). \quad (11)$$

Обычно в реальной жизни планетарный трехчасовой (в силу своего определения) Kp -индекс геомагнитной активности зависит разным образом от времени. Этот индекс уже хорошо прогнозируется на сутки, а иногда и на несколько суток вперед. Поэтому чаще всего для прогноза надо использовать формулы (10) и (11). Для определения тренда, основанного на предлагаемой физической модели, во временном развитии потока заряженных частиц от местного времени LT вдоль ГСО или при сравнении с другими моделями или подходами к прогнозированию потоков на ГСО, например [Li et al., 2001; Li, 2004; Ukhorskiy et al., 2004; Turner and Li, 2008; Fok et al., 2008; Lyatsky and Khazanov, 2008; Ling et al., 2010; Turner et al., 2011; Efitorov et al., 2016; Мягкова и др., 2021; Kalegaev et al., 2022].

Для второго приближения надо использовать полные уравнения (5), (6), но для этого еще необходимы дополнительные (теоретические и экспериментальные) исследования на ГСО, например, зависимости от времени перпендикулярного индекса анизотропии (или показателя) питч-угло-

вого распределения заряженных частиц на интервале времени вычисления $\gamma_{\perp}(t)$ и времени жизни вследствие взаимодействий “волна–частица” для питч-угла $\alpha = 90^\circ$ $T_{wp\perp}$. Поэтому в этой статье будет подробно рассмотрено только первое упрощенное приближение для потоков заряженных частиц вдоль ГСО (7)–(11) с учетом (4), (6).

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И РАСЧЕТЫ

В качестве экспериментальных данных используются наблюдения с КА GOES интегральных потоков релятивистских (с энергией больше 2 МэВ) электронов, усредненные по местному часу LT вдоль ГСО с 1995 г. по 2009 г., взятые из публикации [Turner et al., 2011]. На рис. 1 эти данные показаны кружочками и хорошо видно, что распределение усредненного интегрального потока релятивистских электронов $J(>2 \text{ МэВ})(t)$ от местного времени LT вдоль ГСО имеет максимум около полудня (между 11 LT и 12 LT) и минимум потока около полночи. Средняя величина этого распределения – это суточная средняя величина потока релятивистских электронов, которая может быть значительно меньше, чем максимальный поток, встречаемый на ГСО [Turner et al., 2011].

Для сравнения экспериментальных данных с результатами расчетов будем предполагать, что с хорошей точностью усредненный интегральный поток релятивистских электронов приблизительно равен перпендикулярному ($\alpha = 90^\circ$) интегральному потоку релятивистских электронов, т.е. на рис. 1 кружочки – это $J(>2 \text{ МэВ})(t) \approx J(>2 \text{ МэВ})_{\perp}(t)$.

По этим экспериментальным данным максимум интегрального потока $J(>2 \text{ МэВ})(t)$, когда $t_m = 11.4104$ ч LT на ГСО. Таким образом, в дальнейшем t_m будет обозначать момент времени в часах LT, когда интегральный поток на ГСО имеет максимальное значение.

Далее необходимо разобраться, как $\phi = \text{const}$ (9) будет определяться из сопоставления с экспериментальными данными на ГСО. В точке максимума первая производная (уравнение, аналогич-

ное (7)) $\frac{dJ(>E)_{\perp}}{dt}(t = t_m) = 0$, поэтому с учетом того, что $J(>E)_{\perp}(t = t_m) > 0$ всегда, должно выполняться условие

$$\cos(\Omega t_m + \phi) = 0. \quad (12)$$

Учитывая, что $t_m = 11.4104$ ч, условие (12) выполняется, когда $\Omega t_m + \phi = 3\pi/2$. Откуда следует, что

$$\phi = \frac{\pi(18 - t_m)}{12}. \quad (13)$$

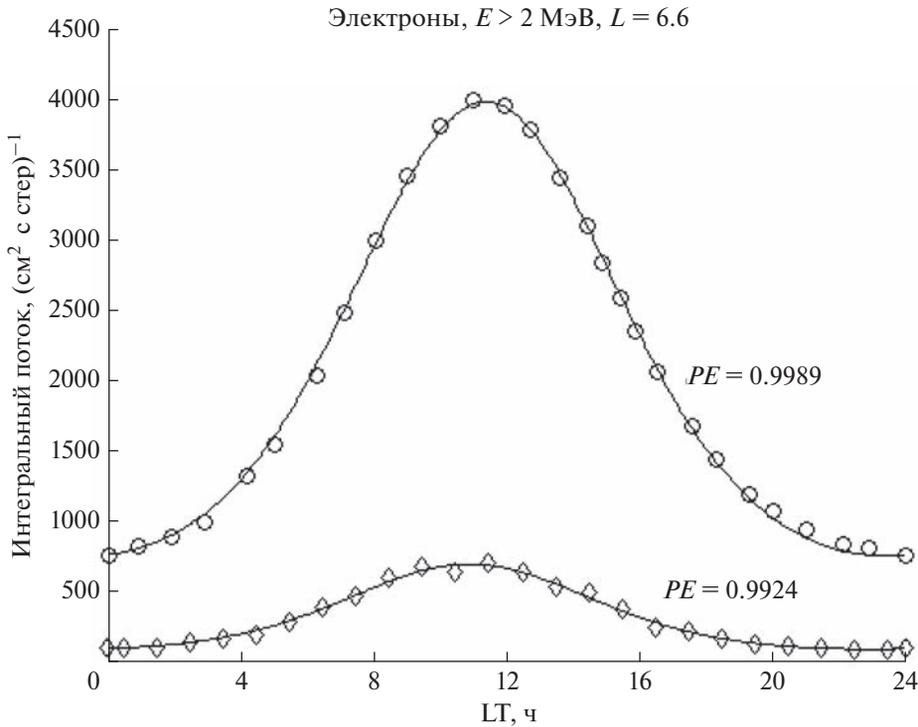


Рис. 1. Кружочками показан по данным КА GOES интегральный поток релятивистских электронов $J(>2 \text{ МэВ})(t)$, усредненный по местному часу LT вдоль ГСО с 1995 по 2009 г. Верхняя сплошная кривая – это модельный (по формуле (9)) перпендикулярный (питч-угол $\alpha = 90^\circ$) интегральный поток релятивистских электронов $J(>2 \text{ МэВ})_\perp(t)$ в зависимости от местного времени LT вдоль ГСО. Эффективность предсказания точности модели (9) по этим данным $PE = 0.9989$. Ромбиками показан интегральный поток релятивистских электронов $J(>2 \text{ МэВ})(t)$ КА “GOES 10”, а сплошной нижней кривой – модельный перпендикулярный интегральный поток релятивистских электронов $J(>2 \text{ МэВ})_\perp(t)$ с эффективностью предсказания точности модели (9) по данным КА GOES 10 $PE = 0.9924$.

По формуле (13) для экспериментальных данных [Turner et al., 2011] величина $\phi = 1.72514$ рад, а $J(>2 \text{ МэВ})_{\perp 0} \approx 762.5$ электронов/(см² с стер). Отсюда получается аналитическая зависимость (9) для перпендикулярного интегрального потока релятивистских электронов с энергией больше 2 МэВ на ГСО, когда $Kp \approx \text{const}$, например, в течение одних суток.

Далее найдем на ГСО отношение максимального потока $J(>2 \text{ МэВ})_\perp(t_m)$ к минимальному потоку $J(>2 \text{ МэВ})_\perp(0) \equiv J(>2 \text{ МэВ})_{\perp 0}$, используя формулу (9) и учитывая (12)

$$\frac{J(>2 \text{ МэВ})_\perp(t_m)}{J(>2 \text{ МэВ})_{\perp 0}} = \exp\left(\frac{\phi_2 L^3}{2\phi_0} [1 + \sin \phi]\right). \quad (14)$$

Из формулы (14) при необходимости можно определять (или оценивать) ϕ_2

$$\phi_2 = \frac{2\phi_0}{(1 + \sin \phi) L^3} \ln \frac{J(>2 \text{ МэВ})_\perp(t_m)}{J(>2 \text{ МэВ})_{\perp 0}}. \quad (15)$$

По экспериментальным данным на рис. 1 (кружочки) максимальный поток $J(>2 \text{ МэВ})_\perp(t_m) \approx 3981.41$ электронов/(см² с стер), поэтому фор-

мула (15) дает $\phi_2 \approx 0.5321$ кВ. В данном случае учитывались потоки релятивистских электронов с энергией больше 2 МэВ, усредненные по местному часу LT на ГСО примерно за 15 лет с 1995 по 2009 г. [Turner et al., 2011].

Теперь известно все необходимое для того, чтобы по формуле (9) построить верхнюю сплошную кривую для сопоставления с экспериментальными данными (кружочки) на рис. 1.

Ясно видно, что даже для первого приближения (9) наблюдается практически идеальное согласие теоретической кривой математической модели с 00 LT до 24 LT и точечных экспериментальных данных. Чтобы это количественно оценить, используем формулу [Turner et al., 2011], позволяющую определять величину эффективности предсказания (англ. prediction efficiency) PE точности модели

$$PE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (m_i - p_i)^2}{\sum_{i=1}^N (m_i - \langle m_i \rangle)^2}, \quad (16)$$

где N – число точек в группе экспериментальных данных; p_i – результаты модели предсказания для группы; m_i – группа измеренных экспериментальных данных с ее средним арифметическим $\langle m_i \rangle$. Результирующие величины вычисления PE в общем случае находятся в области $(-\infty, 1)$. В пределе $PE = 1$, но это может быть только тогда, когда все предсказанные в модели величины будут равны соответствующим измеренным величинам.

Для предложенной модели (9) после расчетов по формуле (16) для всего диапазона от 00 ЛТ до 24 ЛТ вдоль ГСО [Turner et al., 2011] (рис. 1) величина эффективности предсказания точности модели получена $PE = 0.9989$.

Далее используем экспериментальные данные КА GOES 10 для интегральных потоков релятивистских (с энергией больше 2 МэВ) электронов, усредненных по местному часу ЛТ вдоль ГСО, взятые из работы [O'Brien, 2009]. На рис. 1 эти данные показаны ромбиками. Хорошо видно, что распределение этого усредненного интегрального потока релятивистских электронов $J(>2 \text{ МэВ})(t) \approx J(>2 \text{ МэВ})_{\perp}(t)$ от местного времени ЛТ вдоль ГСО также имеет максимум около полудня и минимум потока около полночи.

По этим данным $J(>2 \text{ МэВ})(t) \approx J(>2 \text{ МэВ})_{\perp}(t)$ [O'Brien, 2009] максимум интегрального потока, когда $t_m = 10.9188$ ч ЛТ на ГСО, т.е. в другой момент времени по отношению к предыдущему распределению интегральных потоков.

По формуле (13) для экспериментальных данных [O'Brien, 2009] величина $\phi = 1.85385$ рад, а $J(>2 \text{ МэВ})_{\perp 0} \approx 94.05$ электронов/(см² с стер). Отсюда получается аналитическая зависимость (9) для перпендикулярного интегрального потока релятивистских электронов с энергией больше 2 МэВ на ГСО, когда $Kp \approx \text{const}$, например, в течение одних суток.

По данным на рис. 1 (ромбики) максимальный поток $J(>2 \text{ МэВ})_{\perp}(t_m) \approx 695.28$ электронов/(см² с стер), поэтому формула (15) дает $\phi_2 \approx 0.6532$ кВ. Теперь известно все необходимое для того, чтобы по формуле (9) построить нижнюю сплошную кривую для сопоставления с экспериментальными данными (ромбики) на рис. 1.

Используя экспериментальные данные [O'Brien, 2009], для предложенной модели (9) после расчетов по формуле (16) для всего диапазона от 00 ЛТ до 24 ЛТ вдоль ГСО величина эффективности предсказания точности модели в этом случае получена $PE = 0.9924$ (рис. 1).

Используя аналитическую зависимость (9), найдем среднюю суточную величину перпендикулярного интегрального потока релятивистских

электронов с энергией больше 2 МэВ на ГСО, когда $Kp \approx \text{const}$ в течение одних суток, по формуле [Смолин, 2018a]

$$\langle J(>2 \text{ МэВ})_{\perp} \rangle = \frac{J(>2 \text{ МэВ})_{\perp 0}}{24} \times \int_0^{24} \exp\left(-\frac{\phi_2 L^3}{2\phi_0} [\sin(\Omega t + \phi) - \sin \phi]\right) dt, \quad (17)$$

где t – местное время ЛТ вдоль ГСО в часах.

Подставляя в (17) соответствующие дополнительные данные ($J(>2 \text{ МэВ})_{\perp 0} \approx 762.5$ электронов/(см² с стер), $\phi_2 \approx 0.5321$ кВ, $\phi = 1.72514$ рад), получаем, что $\langle J(>2 \text{ МэВ})_{\perp} \rangle \approx 2046.5$ электронов/(см² с стер). Тогда как средняя суточная величина группы данных КА GOES для потоков релятивистских (с энергией больше 2 МэВ) электронов, усредненных по местному часу ЛТ вдоль ГСО с 1995 г. по 2009 г. [Turner et al., 2011] (рис. 1), $\langle J(>2 \text{ МэВ}) \rangle \approx 2050$ электронов/(см² с стер).

Поэтому относительная погрешность для этих величин получается такая:

$$\varepsilon = \frac{2046.5 - 2050}{2050} \times 100\% \approx 0.1694\%, \text{ что говорит в космической физике практически об идеальном соответствии между моделью и экспериментальными данными.}$$

Иногда еще вычисляют суточные флуенсы релятивистских электронов внешнего радиационного пояса Земли, в том числе и на ГСО. При этом под флуенсом (англ. fluence), в общем, понимается интеграл по времени от плотности потока частиц или энергии. Здесь рассмотрим суточный флуенс от модельного распределения (9) перпендикулярного интегрального потока релятивистских электронов с энергией больше 2 МэВ на ГСО, имеющего размерность электроны/(см² с стер). Поэтому берем телесный угол 4π стер, временной интервал $t = 24$ ч ЛТ и используем следующую формулу для расчета модельного (прогнозируемого) суточного флуенса [Смолин, 2018a]

$$F(>2 \text{ МэВ})_{\perp} = 4\pi J(>2 \text{ МэВ})_{\perp 0} \times \int_0^{24} \exp\left(-\frac{\phi_2 L^3}{2\phi_0} [\sin(\Omega t + \phi) - \sin \phi]\right) dt, \quad (18)$$

где t – местное время ЛТ вдоль ГСО в часах, но после интегрирования в формуле (18) размерность времени ч переводится в с. Тогда итоговая размерность для флуенса электроны/см², как это и должно быть. Подставляя в (18) предыдущие дополнительные данные, получаем, что $F(>2 \text{ МэВ})_{\perp} \approx 2.222 \times 10^9$ электронов/см².

Формулы (17) и (18) справедливы тогда, когда в течение одних суток индекс геомагнитной актив-

ности $Kp = \text{const}$ или $Kp \approx \text{const}$. Если $Kp(t) \neq \text{const}$ и (4) $\phi_2(t) \neq \text{const}$, надо сначала воспользоваться формулой (11), чтобы найти $J(>E)_\perp(t)$, а затем по найденному распределению от времени найти, например, модельный (прогнозируемый) суточный флуенс аналогично (18). Но, вероятно, более адекватно, так как используется перпендикулярный (питч-угол $\alpha = 90^\circ$) интегральный поток релятивистских электронов, не умножать в (18) на 4π стер и тогда получаем следующий вариант определения модельного суточного флуенса (18) в других единицах измерения $F(>2 \text{ МэВ})_\perp \approx 1.7682 \times 10^8$ электронов/(см² стер) для усредненных с 1995 г. по 2009 г. экспериментальных данных КА GOES [Turner et al., 2011] на рис. 1.

Используется и такой вариант – это интегральный поток релятивистских электронов за сутки на ГСО, который тоже называется флуенсом [Vaker et al., 1990], но имеет размерность электроны/(см² стер сут). Исходя из этой размерности, его величину можно определить следующим образом. Надо найти средний за сутки интегральный поток релятивистских электронов на ГСО в единицах электроны/(см² стер с), например используя (17) $\langle J(>2 \text{ МэВ})_\perp \rangle \approx 2046.5$ электронов/(см² стер с). А затем, учитывая, что $1 \text{ с} = 1/86400$ сут, перейти к единицам электроны/(см² стер сут). Полученная таким образом величина будет численно равна величине флуенса $F(>2 \text{ МэВ})_\perp \approx 1.7682 \times 10^8$ электронов/(см² стер) (частный случай (18)). Возможен и обратный элементарный расчет, т.е. зная величину флуенса из экспериментальных данных в электроны/(см² стер сут), можно быстро рассчитать точную величину среднего за сутки интегрального потока релятивистских электронов на ГСО в электроны/(см² стер с).

Нелинейный эффект для отношений перпендикулярных интегральных потоков заряженных частиц на ГСО (максимального к минимальному) в зависимости от Kp -индекса геомагнитной активности был впервые теоретически спрогнозирован (предсказан) в работе [Смолин, 2018а], используя частный случай уравнения (14), когда для всех экспериментальных данных предполагалось, что всегда $t_m = 12$ ч ЛТ на ГСО, а $\phi = \pi/2$ (13). В последующей работе [Смолин, 2018б] сначала для измененного (т.е. с учетом $\phi = \pi/2$) уравнения (9) и экспериментальных данных [Turner et al., 2011] после расчетов по формуле (16) для всего диапазона от 00 ЛТ до 24 ЛТ вдоль ГСО была получена величина эффективности предсказания точности такой модели $PE = 0.963$. А потом было замечено, что теоретически тот же самый нелинейный эффект справедлив и для отношений перпендику-

лярных дифференциальных потоков заряженных частиц (максимального к минимальному) в зависимости от Kp -индекса геомагнитной активности на ГСО, а также рассуждая аналогично, вероятно, в какой-то степени и для любой круговой орбиты.

Прогнозируемый нелинейный эффект представлен на рис. 2. На этом рисунке квадратики – это экспериментальные данные четырех КА GOES с 1995 по 2007 г. [Su et al., 2014] в виде отношений средних максимальных интегральных потоков релятивистских ($>2 \text{ МэВ}$) электронов около полудня к минимальным интегральным потокам около полночи $J(>2 \text{ МэВ})(0) \approx J(>2 \text{ МэВ})(t_{\text{min}} = 0.2157 \text{ ч})$ на ГСО в зависимости от Kp -индекса геомагнитной активности пока только для диапазона $0 \leq Kp < 6$ [Su et al., 2014]. Здесь также представлены модельные (прогнозируемые) кривые 1, 2 и 3 отношений перпендикулярных максимальных интегральных потоков электронов $J(>2 \text{ МэВ})_\perp(t_m)$ (~ в полдень) к минимальным интегральным потокам $J(>2 \text{ МэВ})_\perp(0) \equiv J(>2 \text{ МэВ})_{\perp 0}$ (в полночь) в зависимости от Kp -индекса, но уже для диапазона $0 \leq Kp \leq 9$.

Если в течение одних суток индекс геомагнитной активности $Kp = \text{const}$ или $Kp \approx \text{const}$, математическое описание теоретически прогнозируемого (предсказываемого) нелинейного эффекта (рис. 2) начнем с использования уравнения (14) ($\phi = \langle \phi \rangle$ (20)) и формулы (4) ($\phi_{20} = 0.045 \text{ кВ}$) для электрического потенциала ϕ_2 . В этом случае отношение максимального потока к минимальному потоку от Kp -индекса геомагнитной активности представлено на рис. 2 нелинейной зависимостью 1 [Смолин, 2018а]. При сопоставлении этой зависимости с экспериментальными данными (квадратиками) [Su et al., 2014] видно, что необходимо уточнение. Поэтому предлагается использовать следующее уравнение:

$$\frac{J(>2 \text{ МэВ})_\perp(t_m)}{J(>2 \text{ МэВ})_{\perp 0}} = A \exp\left(\frac{\phi_2 L^3}{2\phi_0} [1 + \sin \langle \phi \rangle]\right), \quad (19)$$

где

$$A = 4.85238, \text{ а } \langle \phi \rangle = 1.7214 \text{ рад.} \quad (20)$$

Числовое значение $\langle \phi \rangle$ определяется как среднее арифметическое значение по шести экспериментальным данным для ϕ (13) от Kp -индекса геомагнитной активности ($0 \leq Kp < 6$) [Su et al., 2014]. Если в дальнейшем не усреднять, а учесть зависимость $\phi(Kp)$ (так как t_m зависит от Kp -индекса) (13), то, вероятно, будет более точное совпадение (19) с экспериментальными данными [Su et al., 2014] – квадратиками на рис. 2.

Предложенная нелинейная зависимость (19), (20), $\phi_{20} = 0.045 \text{ кВ}$ показана кривой 2. Но, веро-

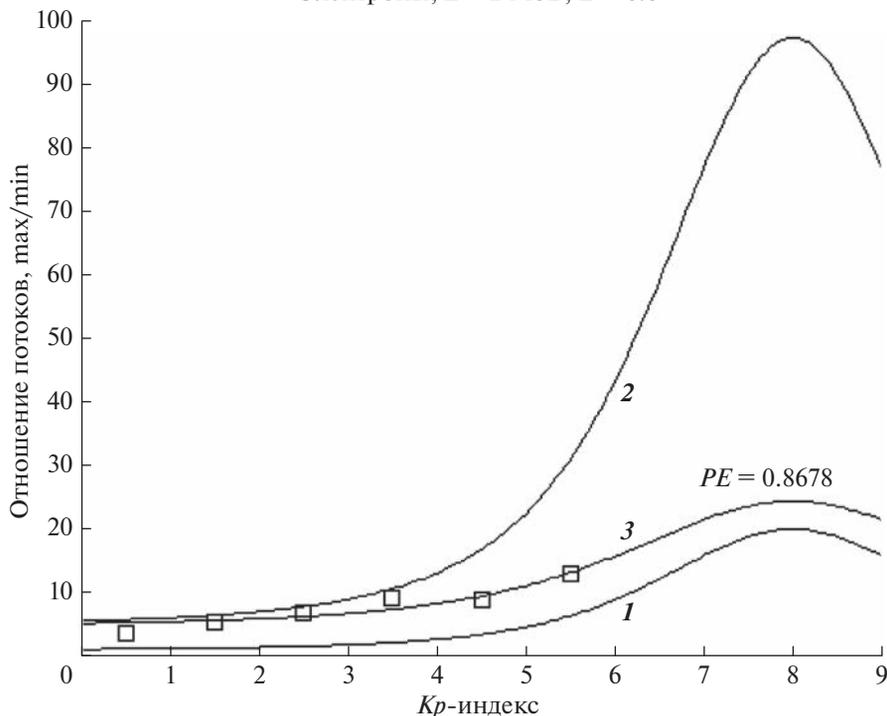
Электронны, $E > 2$ МэВ, $L = 6.6$ 

Рис. 2. Квадратиками показаны экспериментальные данные четырех КА GOES с 1995 по 2007 г. в виде отношений средних максимальных интегральных потоков релятивистских (>2 МэВ) электронов около полудня к минимальным интегральным потокам около полночи на ГСО в зависимости от Kp -индекса геомагнитной активности для диапазона $0 \leq Kp < 6$. Здесь также представлены модельные (прогнозируемые) кривые: (1) — уравнения (14), (4), $\varphi_{20} = 0.045$ кВ; (2) — (19), (20), $\varphi_{20} = 0.045$ кВ и (3) — (19), (20), $\varphi_{20} = 0.0243$ кВ отношений перпендикулярных максимальных интегральных потоков электронов $J(>2 \text{ МэВ})_{\perp}(t_m)$ (\sim в полдень) к минимальным интегральным потокам $J(>2 \text{ МэВ})_{\perp}(0) \equiv J(>2 \text{ МэВ})_{\perp 0}$ (в полночь) в зависимости от Kp -индекса для диапазона $0 \leq Kp \leq 9$. При сравнении модельной (теоретической) кривой (3) с экспериментальными данными эффективность предсказания точности нелинейного эффекта пока для диапазона $0 \leq Kp < 6$ $PE = 0.8678$ с прогнозируемым максимальным отношением потоков в 24.4139 раза при $Kp = 8$.

ятно, более точное математическое описание экспериментальных данных получается, если взять опять уравнения (19), (20), а в (4) предыдущее значение $\varphi_{20} \equiv \varphi_2(Kp = 0) = 0.045$ кВ заменить на другое, например, $\varphi_{20} = 0.0243$ кВ. Естественно, такая замена требует в дальнейшем постоянных экспериментальных исследований потенциала электрического поля магнитосферной конвекции φ_2 (4) [Nishida, 1978; Khazanov et al., 2003] для уточнения его зависимости от Kp -индекса геомагнитной активности для всего диапазона $0 \leq Kp \leq 9$. Таким образом, на рис. 2 получаем нелинейную зависимость 3. Для такой предложенной модели при сравнении теоретической (модельной) кривой 3 с экспериментальными данными [Su et al., 2014] по формуле (16) эффективность предсказания (прогнозирования) точности нелинейного эффекта пока для диапазона $0 \leq Kp < 6$ получена $PE = 0.8678$ с прогнозируемым максимальным отношением потоков в 24.4139 раза при $Kp = 8$.

При сравнении двух уравнений (19) вместе с (20) и (14) можно заключить, что уравнения (19), (20) по сравнению с уравнением (14) позволяют, вероятно, хотя бы приближенно кроме влияния магнитосферной конвекции дополнительно учесть (за счет постоянной величины A) влияние анизотропии питч-углового распределения релятивистских (>2 МэВ) электронов и времени жизни вследствие взаимодействий “волна—частица” на нелинейный эффект и тем самым более точно его описать математически. Отсюда следует, что в дальнейшем для адекватного математического описания теоретического прогнозируемого (предсказываемого) нелинейного эффекта для отношения потоков заряженных частиц, в частности релятивистских электронов, на ГСО в зависимости от Kp -индекса геомагнитной активности необходимо вместо дифференциального уравнения (7) (первое приближение) использовать дифференциальное уравнение (5), (6) (второе приближение), заменяя для этого дифференциальные потоки на интегральные.

Формула (19) вместе с (20) и $\varphi_{20} = 0.0243$ кВ в (4) позволяют на сутки вперед практически “мгновенно” прогнозировать в будущий полдень максимальный перпендикулярный интегральный (или дифференциальный) поток релятивистских электронов на ГСО, если известен поток в полночь и приблизительно в течение одних суток индекс геомагнитной активности $Kp = \text{const}$ или $Kp \approx \text{const}$. Это важно при очень высоких Kp -индексах геомагнитной активности. Например, при конструировании и проектировании защиты от экстремально больших потоков релятивистских электронов (рис. 2), так как на КА, находящемся на ГСО, используется электронная аппаратура.

Таким образом, получается очень интересная нелинейная зависимость (19), когда приблизительно в течение одних суток $Kp = \text{const}$ или $Kp \approx \text{const}$. Так как правая часть (19) с учетом (20) не зависит от энергии заряженных частиц, эту теоретическую зависимость отношения перпендикулярных (интегральных или по аналогии дифференциальных) потоков заряженных частиц на ГСО от Kp -индекса можно назвать “идеальной” или “универсальной” для прогнозирования.

4. ВЫВОДЫ

Предложена новая, основанная на физике, математическая модель, описывающая аналитически (когда $Kp = \text{const}$ или $Kp \approx \text{const}$) или численно (если $Kp(t) \neq \text{const}$) перпендикулярные дифференциальные или интегральные потоки релятивистских электронов с энергией больше 2 МэВ на геостационарной (геосинхронной) орбите (ГСО), а также на любой круговой орбите в магнитосфере Земли в зависимости от местного времени LT на орбите, Kp -индекса геомагнитной активности, параметра Мак-Илвейна L и перпендикулярного дифференциального потока или интегрального потока релятивистских электронов, взятых для LT = 0 ч.

Использованы наблюдения потоков релятивистских (>2 МэВ) электронов, усредненные по местному часу LT вдоль ГСО с 1995 по 2009 г., собранные КА GOES. Сделано сравнение модельного перпендикулярного (для питч-угла 90°) интегрального потока релятивистских электронов с энергией больше 2 МэВ на ГСО, когда $Kp \approx \text{const}$, например в течение одних суток, с усредненными экспериментальными данными КА GOES. Получено практически идеальное согласие. Для всего диапазона от 00 LT до 24 LT вдоль ГСО величина эффективности предсказания (англ. prediction efficiency) точности предложенной математической модели получена $PE = 0.9989$.

Если используются экспериментальные данные КА GOES 10 для усредненных интегральных потоков релятивистских (>2 МэВ) электронов,

тогда для всего диапазона от 00 LT до 24 LT вдоль ГСО величина эффективности предсказания $PE = 0.9924$.

Предложенные формулы позволяют для всего диапазона от 00 LT до 24 LT вдоль ГСО находить (прогнозировать), например, среднюю величину перпендикулярного интегрального потока релятивистских (>2 МэВ) электронов за сутки, суточный флуенс, а также прогнозировать (предсказывать) на сутки вперед в будущий полдень на ГСО максимальный перпендикулярный интегральный поток релятивистских электронов, если известен поток в полночь.

Необходимы постоянные экспериментальные исследования потенциала электрического поля магнитосферной конвекции φ_2 (4) для уточнения его зависимости от Kp -индекса геомагнитной активности для всего диапазона $0 \leq Kp \leq 9$.

Нелинейный эффект теоретически прогнозируется (предсказывается) в виде нелинейной зависимости отношения максимального перпендикулярного интегрального потока (\sim в полдень) релятивистских (>2 МэВ) электронов к минимальному перпендикулярному интегральному потоку (в полночь) на ГСО от Kp -индекса геомагнитной активности ($0 \leq Kp \leq 9$). Пока сравнение модели с усредненными интегральными потоками релятивистских (>2 МэВ) электронов произведено для диапазона $0 \leq Kp < 6$ с прогнозируемым максимальным отношением потоков в 24.4139 раза при $Kp = 8$ и с эффективностью предсказания точности нелинейного эффекта $PE = 0.8678$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Мяжкова И.Н., Широкий В.Р., Шугай Ю.С., Баринов О.Г., Владимиров Р.Д., Доленко С.А. Краткосрочное и среднесрочное прогнозирование потоков релятивистских электронов внешнего радиационного пояса Земли методами машинного обучения // Метеорология и гидрология. № 3. С. 47–57. 2021.
<https://doi.org/10.52002/0130-2906-2021-3-47-57>
- Смолин С.В. Влияние питч-углового распределения на плазменные процессы в ночной магнитосфере // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 33. № 5. С. 17–25. 1993.
- Смолин С.В. Моделирование питч-угловой диффузии в магнитосфере Земли. Красноярск: редакционно-издательское предприятие “Либра”, 205 с. 1996.
- Смолин С.В. Моделирование питч-углового распределения на дневной стороне магнитосферы Земли // Журн. Сибирского федерального университета. Сер. Математика и физика. Т. 5. № 2. С. 269–275. 2012.
- Смолин С.В. Моделирование потока релятивистских электронов на геостационарной орбите в магнитосфере Земли // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. № 2. С. 75–85. 2018а.
<https://doi.org/10.17238/issn2226-8812.2018.2.75-85>

- *Смолин С.В.* Простое аналитическое описание для потока релятивистских (>2 МэВ) электронов на геосинхронной орбите / Материалы 12-ой Межд. школы-конф. “Проблемы геокосмоса”. Санкт-Петербург, 8–12 октября 2018 г. Ред. Н.Ю. Бобров, Н.В. Золотова, А.А. Костеров, Т.Б. Яновская. СПб.: Издательство ВВМ. С. 372–378. 20186.
- *Смолин С.В.* Аналитическое описание потока протонов кольцевого тока Земли для питч-угла 90 градусов // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. № 2. С. 70–74. 2019.
<https://doi.org/10.17238/issn2226-8812.2019.2.70-74>
- *Baker D.N., McPherron R.L., Cayton T.E., Kebededel R.W.* Linear prediction filter analysis of relativistic electron properties at $6.6 R_E$ // *J. Geophys. Res. – Space*. V. 95. № 9. P. 15 133–15 140. 1990.
<https://doi.org/10.1029/JA095iA09p15133>
- *Borovsky J.E., Friedel R.H.W., Denton M.H.* Statistically measuring the amount of pitch angle scattering that energetic electrons undergo as they drift across the plasmaspheric drainage plume at geosynchronous orbit // *J. Geophys. Res. – Space*. V. 119. № 3. P. 1814–1826. 2014.
<https://doi.org/10.1002/2013JA019310>
- *Borovsky J.E., Cayton T.E., Denton M.H., Belian R.D., Christensen R.A., Ingraham J.C.* The proton and electron radiation belts at geosynchronous orbit: Statistics and behavior during high-speed stream-driven storms // *J. Geophys. Res. – Space*. V. 121. № 6. P. 5449–5488. 2016.
<https://doi.org/10.1002/2016JA022520>
- *Efitorov A.O., Myagkova I.N., Dolenko S.A.* Prediction of maximum daily relativistic electron flux at geostationary orbit by adaptive methods / Proceedings of the 11th International School and Conference “Problems of Geocosmos”. St. Petersburg, October 3–7, 2016. Eds: V.S. Semenov, M.V. Kholeva, S.V. Apatenkov, N.Yu. Bobrov, A.A. Kosterov, A.A. Samsonov, N.A. Smirnova, T.B. Yanovskaya. SPb.: VVM Publishing. P. 206–212. 2016.
- *Fok M.-C., Horne R.B., Meredith N.P., Glauert S.A.* Radiation Belt Environment model: Application to space weather nowcasting // *J. Geophys. Res. – Space*. V. 113. № 3. ID A03S08. 2008.
<https://doi.org/10.1029/2007JA012558>
- *Kalegaev V., Kaportseva K., Myagkova I., Shugay Yu., Vlasova N., Barinova W., Dolenko S., Ereemeev V., Shiryaev A.* Medium-term prediction of the fluence of relativistic electrons in geostationary orbit using solar wind streams forecast based on solar observations // *Adv. Space Res.* V. 70. 2022.
<https://doi.org/10.1016/j.asr.2022.08.033>
- *Khazanov G.V., Gamayunov K.V., Jordanova V.K.* Self-consistent model of magnetospheric ring current and electromagnetic ion cyclotron waves: The 2–7 May 1998 storm // *J. Geophys. Res. – Space*. V. 108. № 12. ID 1419. 2003.
<https://doi.org/10.1029/2003JA009856>
- *Li X., Temerin M., Baker D.N., Reeves G.D., Larson D.* Quantitative prediction of radiation belt electrons at geostationary orbit based on solar wind measurements // *Geophys. Res. Lett.* V. 28. № 9. P. 1887–1890. 2001.
<https://doi.org/10.1029/2000GL012681>
- *Li X.* Variations of 0.7–6.0 MeV electrons at geosynchronous orbit as a function of solar wind // *Space Weather*. V. 2. № 3. ID S03006. 2004.
<https://doi.org/10.1029/2003SW000017>
- *Ling A.G., Ginet G.P., Hilmer R.V., Perry K.L.* A neural network-based geosynchronous relativistic electron flux forecasting model // *Space Weather*. V. 8. № 9. ID S09003. 2010.
<https://doi.org/10.1029/2010SW000576>
- *Lyatsky W., Khazanov G.V.* A predictive model for relativistic electrons at geostationary orbit // *Geophys. Res. Lett.* V. 35. № 15. ID L15108. 2008.
<https://doi.org/10.1029/2008GL034688>
- *Nishida A.* Geomagnetic diagnosis of the magnetosphere. N.Y.: Springer-Verlag, 301 p. 1978.
- *O’Brien T.P.* SEAES-GEO: A spacecraft environmental anomalies expert system for geosynchronous orbit // *Space Weather*. V. 7. № 9. ID S09003. 2009.
<https://doi.org/10.1029/2009SW000473>
- *Pinto V.A., Bortnik J., Moya P.S., Lyons L.R., Sibeck D.G., Kanekal S.G., Spence H.E., Baker D.N.* Radial response of outer radiation belt relativistic electrons during enhancement events at geostationary orbit // *J. Geophys. Res. – Space*. V. 125. № 5. ID e2019JA027660. 2020.
<https://doi.org/10.1029/2019JA027660>
- *Smolin S.V.* Modeling the pitch angle distribution on the nightside of the Earth’s magnetosphere // *Geomagn. Aeronomy*. V. 55. № 2. P. 166–173. 2015.
<https://doi.org/10.1134/S0016793215020152>
- *Smolin S.V.* Ring current proton dynamics driven by wave-particle interactions during a nonstorm period // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* V. 14. № 1. P. 98–104. 2021.
<https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-1-98-104>
- *Su Y.-J., Quinn J.M., Johnston W.R., McCollough J.P., Starks M.J.* Specification of >2 MeV electron flux as a function of local time and geomagnetic activity at geosynchronous orbit // *Space Weather*. V. 12. № 7. P. 470–486. 2014.
<https://doi.org/10.1002/2014SW001069>
- *Turner D.L., Li X.* Quantitative forecast of relativistic electron flux at geosynchronous orbit based on low-energy electron flux // *Space Weather*. V. 6. № 5. ID S05005. 2008.
<https://doi.org/10.1029/2007SW000354>
- *Turner D.L., Li X., Burin des Roziers E., Monk S.* An improved forecast system for relativistic electrons at geosynchronous orbit // *Space Weather*. V. 9. № 6. ID S06003. 2011.
<https://doi.org/10.1029/2010SW000647>
- *Ukhorskiy A.Y., Sitnov M.I., Sharma A.S., Anderson B.J., Ohtani S., Lui A.T.Y.* Data-derived forecasting model for relativistic electron intensity at geosynchronous orbit // *Geophys. Res. Lett.* V. 31. № 9. ID L09806. 2004.
<https://doi.org/10.1029/2004GL019616>