

УДК 541.182.213

ИНЕРЦИОННОЕ ОСАЖДЕНИЕ СУБМИКРОННЫХ АЭРОЗОЛЕЙ В МОДЕЛЬНЫХ ВОЛОКНИСТЫХ ФИЛЬТРАХ ИЗ УЛЬТРАТОНКИХ ВОЛОКОН

© 2023 г. В. А. Кирш*

Институт физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН,
Ленинский просп. 31, корп. 4, Москва, 119071 Россия

*e-mail: va_kirsch@mail.ru

Поступила в редакцию 15.03.2023 г.

После доработки 25.04.2023 г.

Принята к публикации 28.04.2023 г.

Рассмотрено влияние инерции субмикронных частиц на их осаждение в модельных тонковолокнистых фильтрах из стока потока. Методом граничной траектории рассчитаны коэффициенты захвата частиц волокном за счет эффектов инерции и зацепления в ячеечной модели фильтра и в ряду параллельных волокон, перпендикулярных направлению потока газа, в интервалах параметров зацепления $R = 0.01–1$, чисел Стокса $Stk = 0–20$ и Кнудсена $Kn = 0–1$. Расчеты согласуются с экспериментальными данными.

DOI: 10.31857/S0023291223600141, EDN: ZPFKYE

1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость учета инерционного осаждения субмикронных частиц при расчете фильтров для тонкой фильтрации воздуха возникла в связи с созданием аварийных фильтрующих систем для улавливания частиц тяжелых металлов, совершенствованием фильтрующих материалов из субмикронных волокон, и для расчета пылеемких предфильтров, устанавливаемых перед высокоэффективными фильтрами в многоступенчатых системах сверхтонкого обеспыливания воздуха. Основной задачей теории фильтрации всегда был расчет эффективности при наихудших условиях фильтрации (для наиболее проникающих частиц), которые осаждаются за счет двух механизмов – диффузии и зацепления. Инерцию частиц в теории тонкой фильтрации субмикронных аэрозолей обычно не учитывали, поскольку для испытаний фильтров использовали частицы масляного тумана, для которых число Стокса, характеризующее инерционное осаждение, мало, $Stk < 0.1$, и влияния инерции нет (средний диаметр волокон 0.5 мкм, скорость потока перед фильтром $U = 3–5$ см/с). Число Стокса определяется как [1]

$$Stk = \frac{\tau_p}{(a/U)} = \frac{BUm}{a} = \frac{2C_c \rho r_p^2 U}{9\mu a}, \quad (1)$$

где $B = C_c/6\pi\mu r_p$ – подвижность частицы радиуса r_p , $\tau_p = Bm$ – время релаксации частицы, m –

масса частицы с плотностью ρ , $C_c = 1 + (\lambda/r_p) \times [1.257 + 0.4 \exp(-1.1 r_p/\lambda)]$ – эмпирическая поправка Каннингема на скольжение газа на частице, a – радиус волокон фильтра, U – скорость потока перед фильтром, μ – динамическая вязкость воздуха, λ – средняя длина свободного пробега молекул воздуха. В качестве характерных масштабов длины, скорости и времени здесь и далее выбрана a , U и aU^{-1} .

Исследованию осаждения частиц в фильтрах под действием инерции посвящено много работ, в основном для микронных частиц и при большой скорости потока $U > 1$ м/с. Для условий тонкой фильтрации, когда течение газа и осаждение субмикронных частиц не зависят от числа Рейнольдса ($Re < 1$), инерционное осаждение обсуждается в [2–4]. Его учет особенно важен для частиц тяжелых металлов и их оксидов из-за возможности их отскока от тонких волокон при относительно небольших числах Стокса. Этот вопрос был впервые рассмотрен в [5]. Важно уметь рассчитывать инерционное осаждение и для предфильтров, в том числе при малых Stk , поскольку форма осадка частиц на волокне при улавливании инерционных и броуновских частиц разная, из-за чего различается время эксплуатации фильтра, которое определяется как время достижения предельного перепада давления при забивке фильтра частицами [6]. К настоящему времени наиболее подробно разработаны

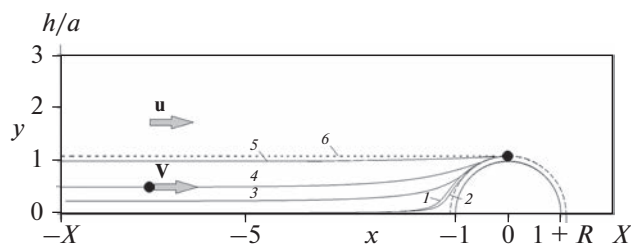


Рис. 1. Граничные траектории инерционных частиц при осаждении из стока поперечного потока на волокно в ряду волокон: $Stk = 0.01$ (1), 0.1 (2), 5 (3), 10 (4), 100 (5), $Stk \rightarrow \infty$, безинерционная частица (6); $b = a/h = 1/3$, $R = 0.1$; расчет по (2), (3).

методы расчета эффективности улавливания субмикронных частиц при одновременном действии основных механизмов осаждения (диффузии и зацепления) для фильтров из субмикронных волокон [4, 7]. Однако влияние инерции на осаждение частиц на субмикронные волокна осталось неизученным. Инерционное осаждение частиц с учетом эффекта скольжения газа на волокнах будет рассмотрено в данной статье.

2. МЕТОД РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ЗАХВАТА ИНЕРЦИОННЫХ ЧАСТИЦ

Будем рассматривать движение невзаимодействующих аэрозольных частиц в потоке газа в модельном фильтре при малых числах Рейнольдса ($Re_p < Re \ll 1$) с учетом взаимного влияния соседних волокон. Здесь Re — число Рейнольдса, определенное по диаметру волокна, Re_p — по диаметру частицы. Символ * относится к размерным величинам. Частицы и волокна в фильтре считаем монодисперсными. Принимаем, что частицы имеют сферическую форму, что внешние силы, действующие на частицу, пренебрежимо малы или отсутствуют, т.е. частицы не несут электростатических зарядов, а их скорость седиментации, обусловленная действием гравитации, пренебрежимо мала (в отличие от случая тяжелых инерционных частиц [8]).

Коэффициент захвата частиц волокном — долю частиц, осевших на волокно из набегающего потока, рассчитываем методом граничной траектории. Уравнение движения частицы имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} + \beta(\mathbf{v}^* - \mathbf{u}^*) = 0, \quad (2)$$

с начальным условием

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{u}_0^* \text{ при } t = 0, \quad x^* = -X^*,$$

где $\mathbf{v}^*$ — вектор средней скорости частиц, $\mathbf{u}^*$ — вектор скорости среды, t^* — время, $\beta = 1/\tau_p$ — ко-

эффициент трения. Здесь принято, что скорость частицы на входе в расчетную ячейку равна входной скорости потока $\mathbf{u}_0^*$, что поток направлен по оси Ox и начало координат расположено в центре волокна кругового сечения. Также принято, что коснувшиеся волокна частицы удерживаются вандерваальсовыми силами, и что сдува частиц не происходит. Для режима тонкой фильтрации при малых скоростях потока эти условия реализуются на практике. В безразмерных переменных уравнение (2) и начальное условие принимают вид [9]

$$Stk \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} - \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{v} = 1 \text{ при } t = 0, \quad x = -X.$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (3) решалось численно с помощью схемы Рунге—Кутты—Фельберга [10] для модельных фильтров с известным полем течения с учетом эффекта скольжения газа на волокнах. В модели фильтра — ряду параллельных волокон — уравнения Стокса [11] решались в терминах функции тока Ψ , следуя алгоритму, предложенному в работе [12]. Бигармоническое уравнение для функции тока

$$\Delta \Delta \Psi = 0 \quad (4)$$

решалось в протяженной расчетной ячейке (рис. 1). Здесь функция тока связана с компонентами скоростей потока следующими формулами:

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{\partial \Psi}{\partial r},$$

где r, θ — безразмерные полярные координаты (угол θ отсчитывается от передней осевой линии и направлен по часовой стрелке). Решение бигармонического уравнения находилось в виде конечного ряда, полученного из общего решения этого уравнения. Часть коэффициентов определялась аналитически из граничного условия прилипания $\mathbf{u} = 0$ при $Kn = 0$ или условия скольжения на поверхности волокна (12) при $Kn > 0$, где $Kn = \lambda/a$ — число Кнудсена. Оставшиеся коэффициенты определялись численно из условий на границе внешней области с помощью метода граничной коллокации [13], который применим к задачам со сложной геометрией и с произвольными граничными условиями и, что существенно, не требует дискретизации всей расчетной области. Метод решения подробно изложен в [12].

Для поля скоростей в ячейечной модели были использованы аналитические и численно-аналитические решения работ [14, 15].

В методе граничной траектории расчет каждой траектории заканчивался в момент осаждения частицы на поверхности волокна $r = 1 + R$ или ее пролета за волокно. Здесь $R = r_p/a$ — параметр зацепления. Выбирая последовательно точки входа в

ячейку $\{-X, y_k\}$, определяли ординату y_0 , которая соответствовала траектории, ограничивающей область, в пределах которой происходит осаждение частиц (траектории с начальными ординатами $y > y_0$ проходят мимо волокна). Безразмерный коэффициент захвата инерционной частицы определялся по формуле [4]

$$\eta = y_0, \quad (5)$$

где y_0 — ордината граничной траектории на входе в расчетную ячейку при $x = -X$. Граничная траектория отделяет область потока, в которой все входящие частицы осаждаются на волокно. На рис. 1 показан пример граничных траекторий инерционных частиц, осаждающихся из поперечного потока на волокно.

Коэффициент проскока частиц через отдельный ряд параллельных волокон, оси которых отстоят друг от друга на расстоянии $2h$, связан с коэффициентом захвата как [7]

$$\frac{n}{n_0} = 1 - \frac{a}{h} \eta, \quad (6)$$

где n_0 и n — концентрации частиц до и за рядом волокон. Коэффициент проскока частиц через модельный фильтр с толщиной H и плотностью упаковки α связан с коэффициентом захвата и эффективностью улавливания частиц E следующей формулой [4]

$$\frac{n}{n_0} = 1 - E = \exp\left(-2 \frac{\alpha H}{\pi a} \eta\right). \quad (7)$$

3. ИНЕРЦИОННОЕ ОСАЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ В РЯДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВОЛОКОН

Модель изолированного ряда параллельных волокон (рис. 1) является наиболее удачной для расчета осаждения инерционных частиц во всем диапазоне чисел Стокса. Расчет инерционного осаждения частиц в стоксовом потоке при обтекании ряда волокон был впервые выполнен в [16]. Были рассчитаны коэффициенты захвата для поля скоростей потока, аналитически выведенного Мияги [17]. В последующих работах (например, в [18]) использовались численные методы для нахождения полей течения и моделирования траекторий частиц в них. Используя численно-аналитическое решение для поля скоростей, предложенное в [12], нами были проведены расчеты коэффициентов захвата для нескольких значений $b = ah^{-1}$ и параметров зацепления R и проведено сравнение с экспериментальными данными для модельных фильтров, составленных из рядов параллельных волокон.

Сравнение теории с экспериментом

Экспериментальная проверка теоретических расчетов осаждения частиц на цилиндрическое волокно в результате инерционного смещения частиц с линий тока в условиях стесненного течения в модельных фильтрах при малых числах Рейнольдса возможна только в случае тонких волокон. Изготовление таких моделей даже в современных условиях довольно сложно. Первая попытка экспериментально исследовать осаждение частиц благодаря инерции на изолированных рядах параллельных волокон, обтекаемых поперечным стоксовым потоком, была предпринята в [19]. В этой работе параллельно натянутые проволоки в модельном фильтре имели слишком большой диаметр $2a = 25$ мкм, в результате чего максимальное значение числа Рейнольдса для сохранения автомодельного режима течения составляло $Re = 0.54$ (т.е. нельзя было увеличивать скорость, чтобы не нарушить симметричное стоксово течение). Параметр Стокса в этих опытах с частицами с $r_p = 0.6$ мкм изменялся в узком диапазоне $Stk = 0.018-0.043$, в котором инерция частиц не проявляется.

Вторая попытка экспериментальной оценки инерционного влияния на осаждение частиц была осуществлена в лаборатории Н.А. Фукса в Карповском институте с модельным фильтром, состоящем из рядов более тонких проволочек и с более крупными моодисперсными частицами [16]. Отличительной особенностью модели было строгое равенство расстояний между осями соседних волокон во всех рядах $2h$. На рис. 2–4 приводится сравнение рассчитанных коэффициентов захвата с данными экспериментов, выполненных при $Re < 1$ на модельном фильтре, составленном из эквидистантных рядов параллельных волокон с $2a = 8.9$ мкм [16]. Небольшое отклонение от расчетных данных связано с тем, что для систем из параллельных волокон невозможно полностью избежать гидродинамического следа после каждого ряда. И, тем не менее, совпадение очень хорошее. Надо отметить, что точность экспериментов в сильной степени зависит от измеряемой величины общей эффективности, которая тем меньше, чем меньше коэффициент захвата, т.е. чем меньше Stk . Поэтому экспериментально не удалось установить величину минимального значения Stk , при котором начинает проявляться инерция. Это будет рассмотрено ниже.

Сравнение инерционных коэффициентов захвата в ряду волокон и в ячейочной модели

В теории фильтрации наиболее популярна ячейочная модель Кувабары [20]. Отметим, что Кувабара полагал, что предложенная им ячейочная модель описывает поле течения в слое параллельных волокон со случайным расположением. Но

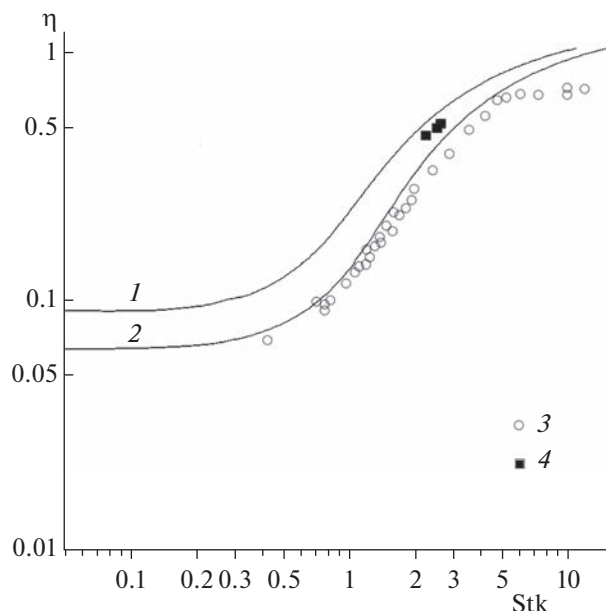


Рис. 2. Зависимости коэффициента захвата частиц волокном в ряду волокон от числа Стокса Stk для $R = 0.38$ (1), 0.3 (2), $t = 0.233$. Сравнение с экспериментом (рис. 2 в [16]): $r_p = 1.37$ (3), 1.7 (4), $2a = 8.9$, $2h = 62.7$ мкм.

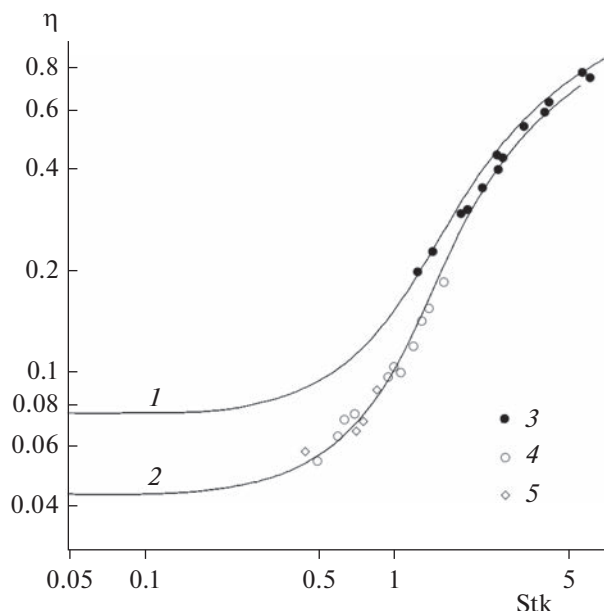


Рис. 3. Зависимости коэффициента захвата частиц за счет инерции и зацепления волокном в ряду от Stk для $R = 0.34$, $r_p = 1.5$ мкм (1) и $r_p = 1.1$ мкм, $R = 0.26$ (2), $t = \pi b/2 = 0.233$, $2a = 8.9$ мкм, $2h = 62.7$ мкм. Сравнение с экспериментом (рис. 3 в [16]): $r_p = 1.5$ (3), 1.18 (4), 1.1 мкм (5).

он не учел, что в этом случае должны появиться боковые силы. В работах [21, 22] было показано экспериментально, что его формула для силы сопротивления описывает сопротивление волокна только в системе волокон с регулярной гексагональной упаковкой. К такому же выводу позже пришли авторы теоретических работ [23, 24]. Ячеечную модель Кувабары часто использовали для оценок коэффициентов захвата частиц, например, в [8, 25–28].

На рис. 5 дано сравнение коэффициентов захвата частиц в ряду с относительным расстоянием между осями волокон $2h/a = 2/b$ и в ячейке Кувабары с плотностью упаковки $\alpha = \pi b^2/4$. Коэффициенты захвата частиц были рассчитаны по методу граничной траектории на основе численного решения уравнения движения частицы (3), записанного в полярных координатах

$$\begin{cases} Stk \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) + v_r - u_r = 0, \\ Stk \left(\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_\theta v_r}{r} \right) + v_\theta - u_\theta = 0, \end{cases} \quad (8)$$

с начальным условием

$$\mathbf{v}(b_c, \theta_0) = \mathbf{u}(b_c, \theta_0) \text{ при } t = 0, \quad (9)$$

где $v_r = dr/dt$, $v_\theta = r d\theta/dt$, $b_c = \alpha^{-1/2}$ — радиус ячейки, θ_0 — угол входа частицы в ячейку. На рис. 5

наглядно продемонстрировано, что совпадение имеет место только при небольших значениях Stk . Очевидно, что использование поля течения в ячейечной модели возможно только для рыхлых модельных фильтров с малой плотностью упаковки α и при небольших Stk . Из рис. 5 видно, что для очень пористых моделей совпадение расчетов для ячейки и ряда сохраняется до более высоких значений Stk . Обратим внимание, что вклад инерционного осаждения для частиц, соизмеримых с толщиной волокна (при $R = 1$) невелик. Более подробно влияние плотности упаковки фильтра на инерционное осаждение частиц проиллюстрировано на рис. 6а, 6б. Здесь представлены зависимости коэффициентов захвата от числа Стокса для ячейечной модели, рассчитанные для $\alpha = 1/36$ ($b_c = 6$) и $\alpha = 1/9$ ($b_c = 3$) для разных параметров зацепления R с интервалом 0.1 до $R = 1$. На рисунках видно, что в пределе малых и больших чисел Стокса коэффициент захвата не зависит от Stk . При малых Stk инерция не смещает частицу с линии тока, и она движется как бы “вмороженной” в поток, $\mathbf{v} = \mathbf{u}$. Граничная траектория совпадает с линией тока, проходящей на минимальном расстоянии от волокна в точке $r = 1 + R$, $\theta = \pi/2$. Осаждение происходит за счет эффекта зацепления (касания), и коэф-

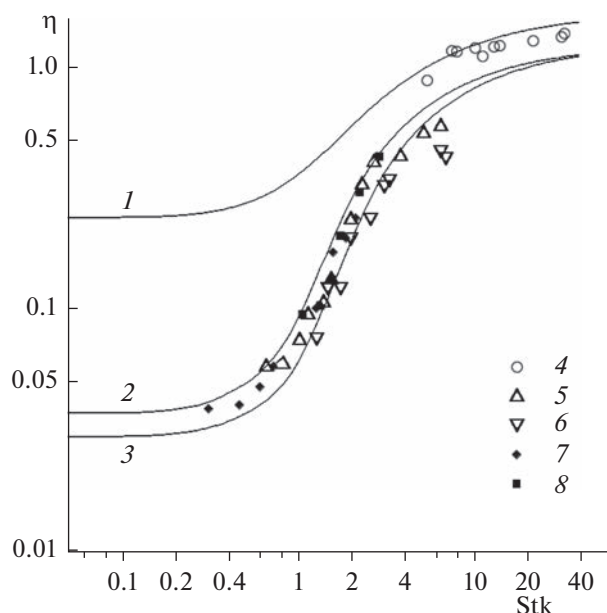


Рис. 4. Зависимости коэффициента захвата частиц за счет инерции и зацепления волокном в ряду от Stk для $R = 0.65, 0.2$; ($t = \pi b/2 = 0.233$, $2a = 8.9$ мкм, $2h = 62.7$ мкм, 4 слоя волокон, $R = 0.2, 0.65$; $t = 0.157$, 44 слоя волокон, $R = 0.2$); кривая (1) $r_p = 2.9$ мкм, $t = 0.223$, (2) $r_p = 1$ мкм, $t = 0.223$; (3) $r_p = 2.9$ мкм, $t = 0.157$. Сравнение с экспериментом (рис. 4 в [16]): $r_p = 0.92$ мкм (7), 1 мкм, $t = 0.223$ (5), 0.94 (8), $r_p = 2.9$ мкм, $t = 0.223$ (4), $r_p = 2.9$ мкм, $t = 0.157$ (6).

коэффициент захвата определяется расходом газа в пределах граничной траектории [4]

$$\eta_R = \int_1^{1+R} u_\theta(r, \pi/2) dr = (2k_0)^{-1} \times \times \left[(1+R)^{-1} - (1+R) + 2(1+R) \ln(1+R) \right], \quad (10)$$

где гидродинамический фактор равен

$$k_0 = -\frac{1}{2} \ln \alpha + \alpha - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \alpha^2.$$

В пределе больших чисел Стокса инерция доминирует, и вклад гидродинамического поля течения мал. При “баллистическом” осаждении частицы движутся по прямым траекториям (рис. 1), а коэффициент захвата в этом случае не зависит от Stk и плотности упаковки и равен $\eta = 1 + R$. По результатам расчетов для фильтров с $\alpha = 1/36, 1/16, 1/9$ построена кусочно-непрерывная аппроксимационная формула, применимая при $Stk = 0.1-20$ и $R = 0.1-1$ (дана в Приложении). Отметим, что при больших числах Стокса расчетные кривые имеют лишь теоретическое значение, т.к. на практике возможен отскок инерционных частиц от поверхности волокна с возвращением их

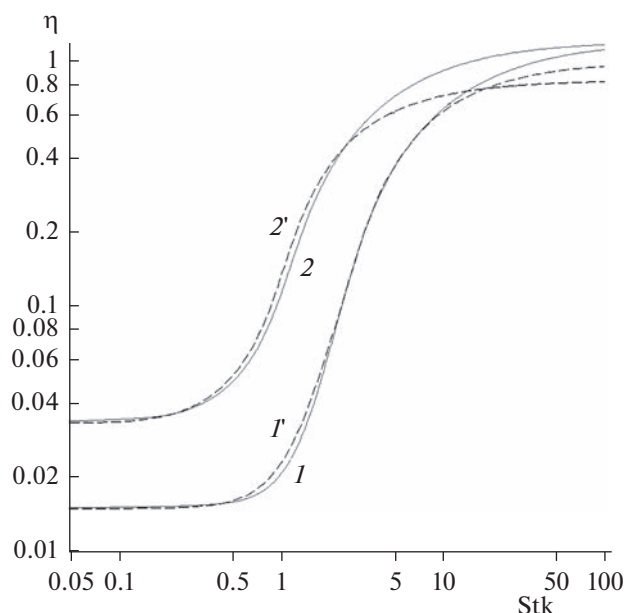


Рис. 5. Зависимости коэффициента захвата частиц с $R = 0.2$ за счет инерции от Stk в ряду параллельных волокон (1–2) и в ячеечной модели с той же плотностью упаковки $\alpha = \pi b^2/4$ (1'–2'): параметр ряда $b = 0.05$ (1, 1'), 0.1 (2, 2').

обратно в поток. Также возможны множественные отскоки частиц от волокон с $a \gg r_p$ с последующим притяжением всех или части отскочивших частиц к волокну в поле вандерваальсовых сил [5]. Эти вопросы в данной статье не рассматриваются. Отметим также, что часто используемая формула для расчета инерционного осаждения, предложенная в [29], по признанию авторов этой работы оказалась неверной, о чем они сразу же сообщили в [30], и в дальнейшем это было отмечено в [4]. Авторы [29] сообщили об ошибке из-за того, что их формула (линейная по Stk) не воспроизводит слабый минимум расчетной зависимости η от числа Стокса при малых Stk (см. рис. 6, 9, 10), и что уже при малых Stk начинается резкий рост η . Это связано с тем, что в [29] при выводе формулы был использован приближенный аналитический метод решения, справедливый в пределе малых параметров зацепления $R \ll 1$ и чисел Стокса $Stk \ll 1$: скорость частицы раскладывалась по малому числу Стокса, после чего авторы ограничились лишь первым членом разложения, при этом поле скоростей потока также было упрощено для случая предельно малой плотности упаковки $\alpha \ll 1$. Следует подчеркнуть, что указанный минимум $\eta(Stk)$ является артефактом, характерным для приближенной ячейной модели, в которой точность поля течения (если сравнивать профили скоростей в этой модели со строго рассчитанными в решетках

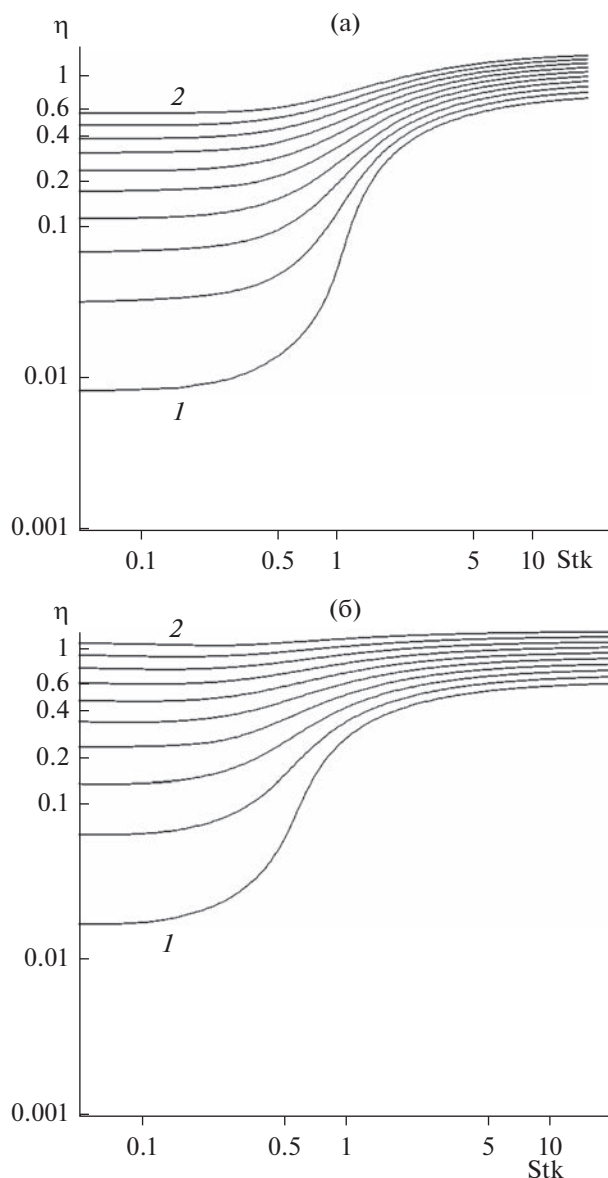


Рис. 6. Зависимости коэффициента захвата частиц за счет инерции и зацепления от Stk для волокна в ячейке Кувабары с плотностью упаковки $\alpha = 1/36$ (а), $1/9$ (б) для параметров зацепления в диапазоне от $R = 0.1$ (1) до 1 (2) с интервалом 0.1; $Kn = 0$.

параллельных волокон) уменьшается при приближении к внешней границе ячейки. Отметим, что здесь минимум $\eta(Stk)$ становится практически незаметным при увеличении радиуса ячейки и в модели ряда волокон не воспроизводится вовсе. Существование минимума $\eta(Stk)$ представляет чисто теоретический интерес, т.к. он находится в области, где инерция не проявляется. Поэтому экспериментальная проверка указанного минимума невозможна.

В области малых Stk следующий вопрос связан с “критическим” числом Стокса Stk_{crit} , начиная с которого инерция частиц влияет на осаждение. Этот вопрос подробно рассматривался в [31], где было показано, что инерция не проявляется при $Stk < 0.1$. Это следовало и из многочисленных экспериментов с реальными фильтрами [32]. Действительно, из рис. 2–6 видно, что инерция заметно проявляется только при числах Стокса $Stk > 0.1$. Отсюда следует, что появляющиеся иногда утверждения о влиянии инерции при меньших значениях Stk не верны. В связи с этим отметим работу [33], в которой в рамках приближенного численно-аналитического метода расчета для ячейечной модели было получено, что увеличение эффективности за счет инерции начинается при $Stk \sim 0.01$.

4. ОСАЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ В СИСТЕМЕ УЛЬТРАТОНКИХ ВОЛОКОН

При расчете осаждения частиц на ультратонкие волокна необходимо учесть эффект скольжения газа на волокнах. На это впервые указал Г.Л. Натансон на примере захвата частиц изолированным волокном [34]. Для моделирования осаждения частиц на субмикронные волокна при небольших числах Стокса мы можем использовать поле течения в ячейечной модели, поскольку, как было показано выше, коэффициент захвата в инерционном режиме осаждения частиц в изолированном ряду и в ячейечной модели при числах Стокса $Stk < 5$ совпадают. В ячейечной модели поле течения с учетом эффекта скольжения газа при малых числах Кнудсена ($Kn \ll 1$) имеет вид [14]:

$$\Psi = f(r) \sin \theta = \frac{g(r)}{4k_1} \sin \theta, \quad (11)$$

где

$$g(r) = (2 - \alpha + 2\alpha\tau Kn) \frac{1}{r} - 2(1 - \alpha)r + 4(1 + 2\tau Kn)r \ln r - (1 + 2\tau Kn)\alpha r^3, \\ k = k_0 + \frac{1}{2}\tau Kn(1 - \alpha^2 + 2\ln \alpha).$$

При выводе (11) было использовано граничное условие скольжения (условие Максвелла)

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \tau Kn \sigma_{r\theta}, \quad (12)$$

где $\sigma_{r\theta}$ — касательное напряжение, $\tau = 1.147$ — коэффициент изотермического скольжения, учитывающий взаимодействие газовых молекул с поверхностью волокна [35], а компоненты скоростей выражаются через функцию тока как:

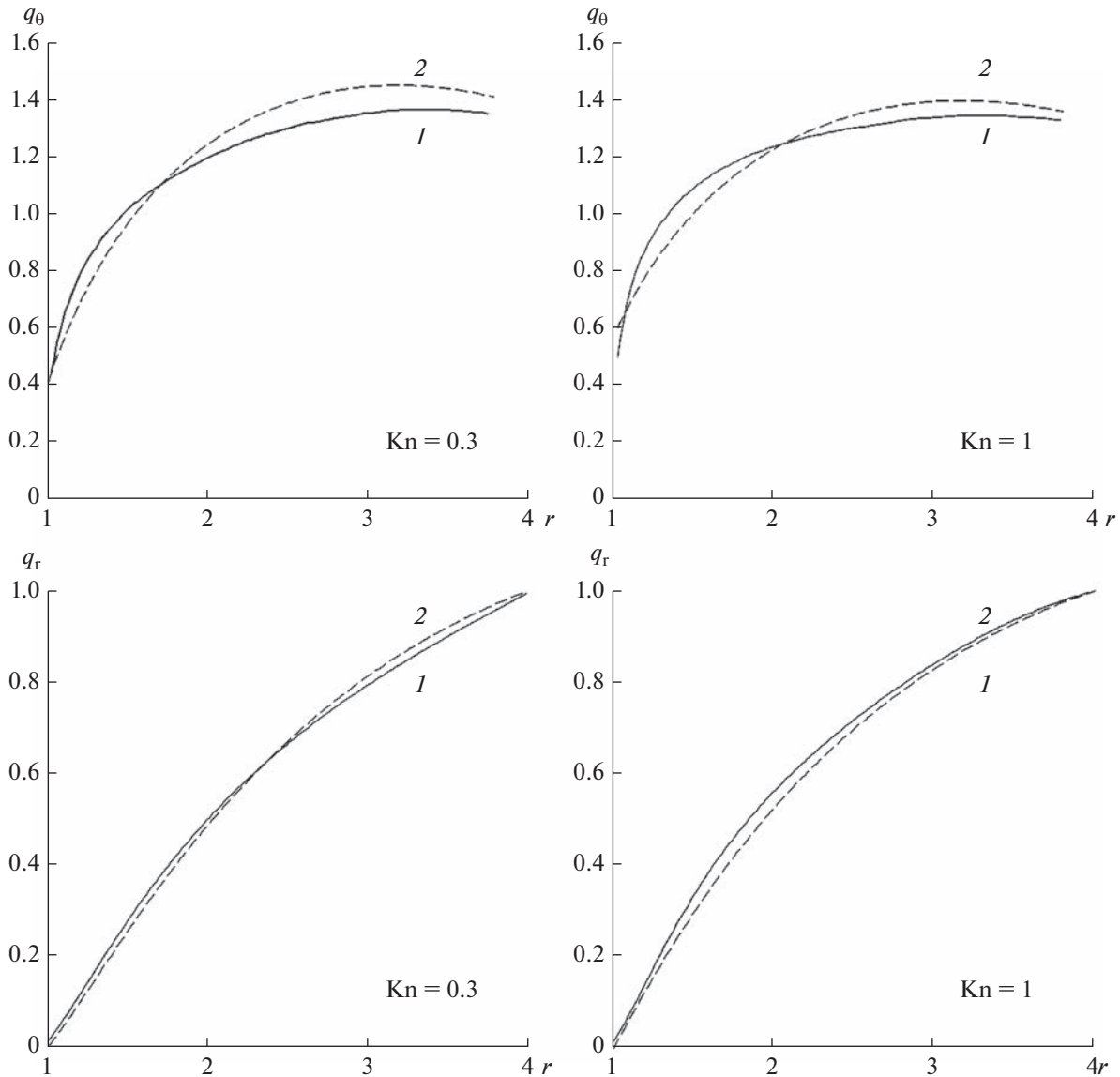


Рис. 7. Зависимости $u_\theta/\sin\theta$ и $-u_r/\cos\theta$ от радиальной координаты в ячейке с ультратонким волокном для разных Kn : 1 – по (16) (кинетическая теория [15]), 2 – по (11) (течение со скольжением [14]), $\alpha = 1/16$.

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -q_r(r) \cos(\theta), \\ u_\theta &= \frac{\partial \Psi}{\partial r} = q_\theta(r) \sin\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

В этих формулах скорости выражены через радиальные функции, графики которых приведены на рис. 7. Из (11), (13) нетрудно найти скорость скольжения на поверхности волокна при $r = 1$. Она равна

$$u_{\text{slip}} = \frac{2\tau Kn}{k} (1 - \alpha) \sin\theta. \quad (14)$$

Из (14) следует, что скорость скольжения газа на волокне увеличивается с ростом числа Кнудсена и с ростом плотности упаковки волокон в фильтре.

Решение для поля течения в ячейечной модели, применимое в широком диапазоне чисел Кнудсена, было впервые получено в [15] численно-аналитическим методом в рамках кинетической теории разреженных газов в приближении Бхатнагара–Гросса–Крукса для плотностей упаковки фильтров, равных $\alpha = 1/36, 1/16, 1/9$. Сравнение зависимостей для компонент скорости потока (13) с найденными в [15] приведено на рис. 7 и 8 для плотности упаковки $\alpha = 1/16$. Здесь и далее рассматриваем пример фильтра с этим значением α , поскольку большинство реальных высокоэффективных фильтров имеет близкую плотность упаковки. Будем использовать уточненные ап-

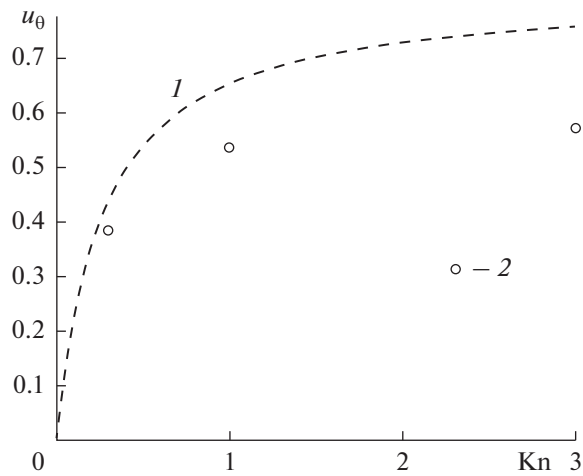


Рис. 8. Сравнение тангенциальных скоростей потока (скоростей скольжения на поверхности волокна) при $\theta = \pi/2$ и $r = 1$ от Kn , 1 – по (11) (течение со скольжением, $Kn \ll 1$) [14], точки 2 – по (16) (численно-аналитическое решение [15], промежуточные и большие Kn), $\alpha = 1/16$.

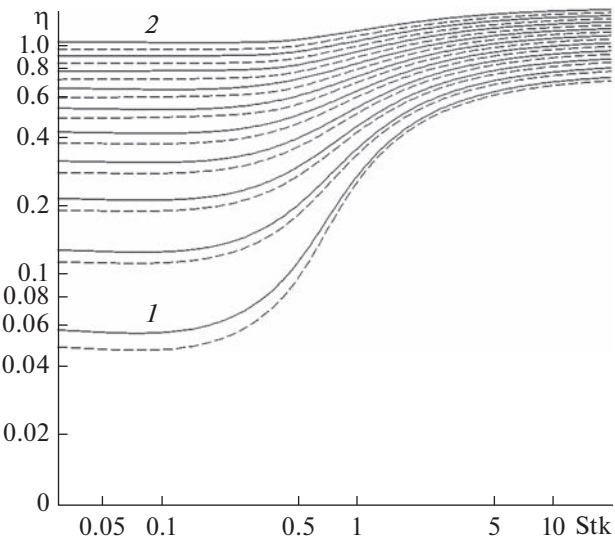


Рис. 9. Зависимости коэффициентов захвата за счет инерции и зацепления от Stk : сплошные линии – с учетом поля скоростей (15), (16) [15], пунктирные – (11), (13) [14], для параметров зацепления в диапазоне $R = 0.1$ (1) до $R = 1$ (2) с интервалом 0.1; ячеечная модель, $\alpha = 1/16$, $Kn = 0.3$.

проксимации для компонент скоростей потока при обтекании ультратонкого волокна в ячейке Кувабары, построенные нами по расчетным данным [15] для $\alpha = 1/16$:

$$q_r = A + Br + Cr^{-1} + Dr^{-2} + Er^2 + F\ln r, \tag{15}$$

$$q_\theta = a + br^{-11} + cr^{-2} + dr^2 + e\ln r, \tag{16}$$

где коэффициенты приведены в табл. 1 (средняя относительная погрешность аппроксимации не превышает 0.1%). Эти же формулы описывают течение разреженного газа вблизи волокна любого радиуса.

Отметим, что для расчета сопротивления фильтра решение (11), полученное с граничным условием скольжения (12), применимо только при $Kn < 0.01$. Важно подчеркнуть, что полученная зависимость силы сопротивления F_{slip} [14] качественно и количественно отличается от экспери-

ментальных данных практически во всем диапазоне чисел Кнудсена при $Kn > 0.01$, совпадая с ними лишь в пределе бесконечно малых значений Kn . Поэтому для расчета силы сопротивления волокна следует либо использовать метод линейной экстраполяции величины $1/F_{slip}$ в область больших чисел Кнудсена [4], либо пользоваться более строгим решением, полученным в [15].

В то же время расчетные профили скоростей разреженного газа в модели со скольжением при $Kn > 0.01$ качественно согласуются (в отличие от F_{slip}) с данными экспериментов и расчетов в рамках кинетической теории. Различие между ними появляется и увеличивается с ростом Kn (при малых Kn скорости почти совпадают). При этом на самой обтекаемой поверхности решение для те-

Таблица 1. Коэффициенты в аппроксимационных формулах (15), (16) для ячейечной модели с $\alpha = 1/16$

Kn	A	B	C	D	E	F
0.3	1.362954	−0.285438	−2.082320	0.988784	0.0287823	0.557373
1	12.282844	4.939722	−22.377315	5.451608	−0.280035	−15.371139
3	5.469471	0.802511	−8.656095	2.419047	−0.029152	−3.751793

Kn	a	b	c	d	e
0.3	1.0148095	−0.283836	−0.320505	−0.0264392	0.648570
1	1.321618	−0.272466	−0.499161	−0.0144089	0.283646
3	1.177181	−0.685839	0.099157	−0.019197	0.351284

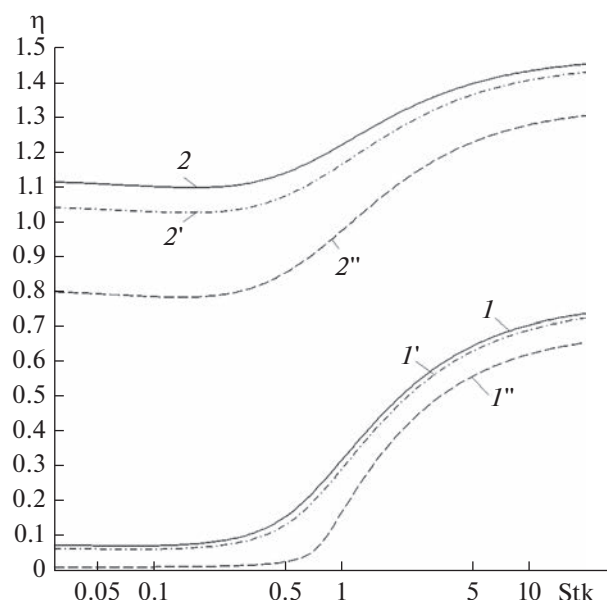


Рис. 10. Зависимости коэффициентов захвата частиц волокном за счет инерции и зацепления для частиц конечного размера при $R = 0.1$ (I, I', I'') и $R = 1$ ($2, 2', 2''$) от Stk с учетом эффекта скольжения газа при $Kn = 1$ ($I, I', 2, 2'$) и $Kn = 0$ ($I'', 2''$): $I, 2$ – расчет для поля скоростей (16) (кинетическая теория, [15]), $I', 2'$ – (15) (течение со скольжением, [14]), $I'', 2''$ – поля скоростей [20]; ячеечная модель Кувабары, $\alpha = 1/16$.

чения со скольжением дает верхнюю оценку тангенциальной скорости (рис. 7, 8). Это согласуется с результатами работ по расчету обтекания разных тел [36] и течения в каналах в рамках кинетической теории. Таким образом, простое решение (11) для поля скоростей может быть использовано для приближенных оценок осаждения частиц на ультратонкие волокна или на волокна любого радиуса в условиях течения разреженного газа при $Kn \sim 0.1$ во всем интервале α . При увеличении числа Кнудсена расхождение расчетов по (11) и (15), (16) становится более заметным.

После уточнения поля течения в окрестности нановолокон в модельном фильтре было рассчитано инерционное осаждение частиц с учетом скольжения газа на волокне. Расчеты коэффициентов инерционного осаждения для полей течения (11) [14] и (15) [15] даны на рис. 9 и 10. Из представленных данных видно, что, чем больше параметр зацепления, тем больше влияние скольжения. В пределе малых чисел Стокса расчетные кривые выходят на плато, соответствующее коэффициенту захвата за счет эффекта зацепления η_R . Величина η_R при $Kn > 0$ дается следующей формулой, полученной из (9) и (16):

$$\eta_R = aR + \frac{b}{10} \left[1 - \frac{1}{(1+R)^{10}} \right] + c \left(\frac{R}{1+R} \right) - \frac{d}{3} [1 - (1+R)^3] + e [(1+R) \ln(1+R) - R]. \quad (17)$$

Отличие расчетов для полей течения работ [14] (течение со скольжением) и [15] (кинетическая теория) заметно лишь при $Kn > 1$. При меньших числах Кнудсена поле скоростей (11), (13) вполне применимо для оценок η . Для расчетных зависимостей коэффициента захвата от Stk и R для $Kn = 0.3$ и $Kn = 1$ при $\alpha = 1/16$ были построены соответствующие аналитические аппроксимации (см. Приложение), позволяющие оценивать влияние эффекта скольжения газа на инерционное осаждение частиц. Например, для фильтра с толщиной $H = 0.5$ мм, плотностью упаковки волокон $\alpha = 1/16 = 0.0625$ и радиусом волокон $a = 0.22$ мкм эффективность улавливания частиц без учета эффекта скольжения ($Kn = 0$) при $R = 0.1$ и $Stk = 0.2$ составит $E = 0.977$ (соответственно, проскок $n/n_0 = 0.023$), а с учетом ($Kn = 0.3$) увеличится до $E = 0.997$ (проскок понизится на порядок $n/n_0 = 0.003$). Таким образом, учет эффекта скольжения газа совершенно необходим при вычислении инерционного осаждения аэрозольных частиц на тонкие волокна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено влияние инерции субмикронных частиц на их осаждение в тонковолокнистых фильтрах при малых числах Рейнольдса в широком диапазоне чисел Стокса Stk при разных значениях чисел Кнудсена Kn и параметров зацепления R . Методом граничной траектории рассчитаны коэффициенты захвата частиц волокном в модельных фильтрах, в качестве которых выбраны ячеечная модель Кувабары и ряд параллельных монодисперсных волокон, перпендикулярных направлению потока газа. Показано, что инерционное осаждение частиц в ячеечной модели фильтра с пористостью, характерной для реальных фильтров, заметно ниже, чем в отдельном ряду волокон, при числах Стокса $Stk > 3$. Показано также сильное влияние эффекта скольжения газа на субмикронных волокнах на осаждение частиц при малых и промежуточных числах Стокса.

ПРИЛОЖЕНИЕ

По результатам расчетов инерционного осаждения частиц конечного размера в ячеечной модели фильтра с разной плотностью упаковки с полем скоростей (13) построена кусочно-непрерывная аппроксимационная формула, применимая при $R = 0.1-1$ и $Stk = 0.1-20$:

Таблица 2. Коэффициенты в аппроксимационной формуле для коэффициента захвата (П.2): $Stk = 0.1-1$, $Kn = 0$

α	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
1/36	-1.1276	1.1533	0.0137	0.5345	1.3074
1/16	0.0902	-0.0901	1.5576	0.720	1.4263
1/9	0.2054	-0.4328	0.80	1.2180	1.5109
α	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4
1/36	10.4482	-9.2319	0.0953	-6.6631	2.4142
1/16	-0.6516	0.3747	-0.90	0.3161	-0.9419
1/9	2.0606	3.3182	12.0940	-8.7507	1.9218

Таблица 3. Коэффициенты в (П.3): $Kn = 0$, $Stk = 1-20$

α	f_0	f_1	f_2	g_0	g_1	g_2
1/36	0.5174	0.2130	0.2539	0.0542	0.4117	0.9383
1/16	0.4316	0.2149	0.70	0.0754	0.5626	0.9517
1/9	0.3116	0.2167	1.0587	0.0817	0.6794	0.9706

$$\eta = \eta_R + \eta_I. \quad (\text{П.1})$$

Здесь часть коэффициента захвата за счет инерции (поправка на инерцию к зацеплению) η_I в диапазоне значений $Stk = 0.1-1$ равна

$$\eta_I = \frac{A}{0.9}(Stk - 0.1)Stk^B, \quad (\text{П.2})$$

где

$$A = c_0 + c_1 R^{c_2} + c_3 \text{Rexp}(-c_4 R),$$

$$B = d_0 + d_1 R^{d_2} + d_3 R^{0.8} \exp(-d_4 R),$$

а в диапазоне $Stk = 1-20$ величина η_I аппроксимирована как

$$\eta_I = A + C(Stk - 1) / [1 + D(Stk - 1)], \quad (\text{П.3})$$

где

$$C = f_0 - f_1 R^{f_2}, \quad D = [g_0 + g_1 (R - 0.1)^{g_2}] / R.$$

Коэффициенты c , d , f , g в (П.2)–(П.3) были рассчитаны при $Kn = 0$ для плотностей упаковки $\alpha = 1/36$, $1/16$, $1/9$. Они приведены в табл. 2, 3. Ве-

личина η_R при $Kn = 0$ рассчитывается по формуле (10). Также с привлечением функций (П.2), (П.3) для того же интервала параметров зацепления были построены аппроксимации для коэффициента захвата с учетом эффекта скольжения газа на волокнах для $Kn = 0.3$ и $Kn = 1$ (см. табл. 4, 5). Здесь мы ограничились плотностью упаковки $\alpha = 1/16$, характерной для высокоэффективных фильтров. Эти аппроксимации имеют разные погрешности в разном интервале параметров. Средняя относительная погрешность формулы наилучшего приближения (П.2) на всем множестве расчетных данных для $\alpha = 1/36$, $1/16$, $1/9$ не превышает 5%, 2% и 0.4% соответственно. Для формул с учетом эффекта скольжения эта величина не превышает 0.3%. Средняя относительная погрешность формул (П.1) лежит в интервале 1–10%. Аппроксимации (П.1) не воспроизводят минимум зависимости коэффициента захвата от числа Стокса, который, как показано в данной работе при расчете инерции в ряду волокон, является артефактом, характерным для приближенной ячеечной модели. Предложенные формулы применимы для ульт-

Таблица 4. Коэффициенты в формулах (П.2): $Stk = 0.1-1$, $\alpha = 1/16$

Kn	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
0.3	0.1911	-0.0715	1.8413	0.2861	2.6467
1	0.2302	-0.1470	1.290	0.2871	2.8971
Kn	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4
0.3	0.9483	-0.2451	0.4067	-1.7133	1.7133
1	0.4535	1.4634	2.2784	-1.0172	0.0985

Таблица 5. Коэффициенты в (П.3): $Stk = 1-20$, $\alpha = 1/16$

Kn	f_0	f_1	f_2	g_0	g_1	g_2
0.3	0.350	-0.1773	0.8939	0.0663	0.5543	0.9540
1	0.0645	0.5507	0.9641	0.3179	-0.1727	0.8689

тратонких волокон, соизмеримых по диаметру со средней длиной свободного пробега молекул воздуха, либо для волокон любого радиуса в условиях течения разреженного газа.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fuchs N.A.* The Mechanics of Aerosols. N.Y.: Dover, 1989.
2. *Davies C.N.* Air Filtration. N.Y.: Academic Press, 1973.
3. *Brown R.C.* Air Filtration. Oxford: Pergamon Press, 1993.
4. *Kirsch A.A., Stechkina I.B.* The theory of aerosol filtration with fibrous filters, Ch. 4, in Fundamentals of Aerosol Science / Ed. by Shaw D.T. N.Y.: Wiley-Interscience. 1978. P. 165–256.
5. *Chernyakov A.L., Kirsch A.A., Kirsch V.A.* Elastic vibrations of a fiber due to impact of an aerosol particle and their influence on the efficiency of fibrous filters // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. № 5. P. 056303. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.056303>
6. *Стечкина И.Б., Курш В.А.* Оптимизация параметров аэрозольных волокнистых фильтров // Коллоид. журн. 2001. Т. 63. № 4. С. 517–522. <https://doi.org/10.1023/A:1016762107083>
7. *Курш В.А., Курш А.А.* Улавливание субмикронных аэрозольных частиц фильтрами из нановолокон // Коллоид. журн. 2023. Т. 85. № 1. С. 38–46. <https://doi.org/10.1134/S1061933X22600476>
8. *Курш В.А.* Инерционное осаждение тяжелых аэрозольных частиц в волокнистых фильтрах // Теор. основы хим. технологии. 2005. Т. 39. № 1. С. 50–55. <https://doi.org/10.1007/s11236-005-0028-1>
9. *Волощук В.М.* Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. Л.: Гидрометеиздат, 1971.
10. *Hairer E., Norsett S., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, 2-nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
11. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955.
12. *Wang C.Y.* Stokes slip flow through a grid of circular cylinders // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 9. P. 3358–3360. <https://doi.org/10.1063/1.1499127>
13. *Kolodziej J.A.* Review of application of boundary collocation methods in mechanics of continuous media // Solid Mechanics Archives. 1987. V. 12. № 4. P. 187–231.
14. *Pich J.* Pressure drop of fibrous filters at small Knudsen numbers // Ann. Occup. Hyg. 1966. V. 9. № 1. P. 23–27. <https://doi.org/10.1093/annhyg/9.1.23>
15. *Ролдугин В.И., Курш А.А., Емельяненко А.М.* Моделирование аэрозольных фильтров при промежуточных числах Кнудсена // Коллоид. журн. 1999. Т. 61. № 4. С. 530–542.
16. *Курш А.А., Стечкина И.Б.* Инерционное осаждение аэрозолей в модельных фильтрах при малых числах Рейнольдса // Коллоид. журн. 1977. Т. 39. № 1. С. 36–43.
17. *Miyagi T.* Viscous flow at low Reynolds numbers past an infinite row of equal circular cylinders // J. Phys. Soc. Japan. 1958. V. 13. № 5. P. 493–496. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.13.493>
18. *Muller T.K., Meyer J., Kasper G.* Low Reynolds number drag and particle collision efficiency of a cylindrical fiber within a parallel array // J. Aerosol Sci. 2014. V. 77. № 11. P. 50–66. <https://doi.org/10.1016/j.jaerosci.2014.07.007>
19. *Gallily I.* On the filtration of aerosols by filter models of various porosities // J. Colloid Sci. 1957. V. 12. № 2. P. 161–172.
20. *Kuwabara S.* The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres in viscous flow at small Reynolds numbers // J. Phys. Soc. Japan. 1959. V. 14. № 4. P. 527–532. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.14.527>
21. *Kirsch A.A., Fuchs N.A.* The fluid flow in a system of parallel cylinders perpendicular to the flow direction at small Reynolds numbers // J. Phys. Soc. Japan. 1967. V. 22. P. 1251–1255. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.22.1251>
22. *Kirsch A.A., Fuchs N.A.* Studies of fibrous aerosol filters – II. Pressure drops in systems of parallel cylinders // Ann. Occup. Hyg. 1967. V. 10. № 1. P. 23–30. <https://doi.org/10.1093/annhyg/10.1.23>
23. *Головин А.М., Лопатин В.А.* Течение вязкой жидкости в двоякопериодических рядах цилиндров // ПМТФ. 1969. Т. 9. № 2. С. 99–105. <https://doi.org/10.1007/BF00913184>
24. *Sangani A.S., Acrivos A.* Slow flow past periodic arrays of cylinders with application to heat transfer // Int. J. Multiphase Flow. 1982. V. 8. № 3. P. 193–206. [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(82\)90029-5](https://doi.org/10.1016/0301-9322(82)90029-5)
25. *Yeh H.-C., Liu B.Y.H.* Aerosol filtration by fibrous filters – I. Theoretical // J. Aerosol Sci. 1974. V. 5. № 2. P. 191–204. [https://doi.org/10.1016/0021-8502\(74\)90049-4](https://doi.org/10.1016/0021-8502(74)90049-4)
26. *Yeh H.-C.* A fundamental study of aerosol filtration by fibrous filters. Ph.D. Thesis. Minneapolis: University of Minnesota, 1972.
27. *Ramarao B.V., Tien C., Mohan S.* Calculation of single fiber efficiencies for interception and impaction with superposed Brownian motion // J. Aerosol Sci. 1994.

- V. 25. № 2. P. 295–313.
[https://doi.org/10.1016/0021-8502\(94\)90081-7](https://doi.org/10.1016/0021-8502(94)90081-7)
28. Кирш В.А. Инерционное осаждение аэрозольных частиц в волокнистых фильтрах // Коллоид. журн. 2004. Т. 66. № 5. С. 613–618.
<https://doi.org/10.1023/B:COLL.0000043835.00525.83>
29. Стечкина И.Б., Кирш А.А., Фукс Н.А. Исследования в области волокнистых аэрозольных фильтров // Коллоид. журн. 1969. Т. 31. № 1. С. 121–126.
30. Стечкина И.Б., Кирш А.А., Фукс Н.А. Влияние инерции на коэффициент захвата аэрозольных частиц на цилиндрах при малых числах Стокса // Коллоид. журн. 1970. Т. 32. № 3. С. 467.
31. Левин Л.М. Исследования по физике грубодисперсных аэрозолей, М.: Изд. АН СССР, 1961.
32. Wong J.B., Ranz W.E., Johnstone H.F. Collection efficiency of aerosol particles and resistance to flow through fiber mats // J. Appl. Phys. 1956. V. 27. № 2. P. 161–170.
<https://doi.org/10.1063/1.1722328>
33. Flagan R.C., Seinfeld J.H. Fundamentals of Air Pollution Engineering, Ch. 7. P. 441. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1988.
34. Натансон Г.Л. Влияние скольжения на эффект касания при захвате амикроскопических частиц цилиндром из потока // Коллоид. журн. 1960. Т. 24. № 1. С. 52–54.
35. Albertoni S., Cereignani C., Gutusso L. Numerical evaluation of the slip coefficient // Phys. Fluids. 1963. V. 6. № 7. P. 993–996.
<https://doi.org/10.1063/1.1706857>
36. Zhao S., Povitsky A. A hybrid molecular and continuum method for low-Reynolds-number flows // Nonlinear Analysis. 2009. V. 71. № 12. P. e2551–e2564.
<https://doi.org/10.1016/j.na.2009.05.069>