ПРИЛОЖЕНИЕ А

Обсудим теперь переход пары моментов из долины I на рис. 2 в долину II. В первом приближении по отношению к малому отношению λ/σ точка минимума потенциального барьера, разделяющего эти долины, соответствует углам $\theta_1 = \pi/2;\ \theta_2 = 0$ с энергией

$$u_{bI} = u\left(\frac{\pi}{2},0\right) = -\sigma - 3\lambda\frac{\rho z}{r^5}\cos\varphi_1 - h. \qquad (A1)$$

Нижний индекс b означает “барьер”. Отметим, что в силу симметрии минимальная энергия барьера, разделяющего долины I и III, равна (A1) с заменой угла φ_1 на φ_2.

Минимум потенциального барьера между долинами II и IV в том же приближении соответствует углам $\theta_1 = \pi; \theta_2 = \pi/2$ и равен

$$u_{bII} = u\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right) = -\sigma + 3\lambda\frac{\rho z}{r^5}\cos\varphi_2 + h. \qquad (A2)$$

То же для перехода из долины III в IV с заменой φ_2 на φ_1.

Для дальнейшего удобно ввести вероятность:

$$P_I = \int\limits_I W\sin\theta_1\sin\theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\varphi_1 d\varphi_2 \qquad (A3)$$

того, что ориентации магнитных моментов частиц соответствуют потенциальной долине.

I. Интегрирование здесь идет по площади этой долины. Интегрируя обе части уравнения (5) по долине I, учитывая, что все физические величины периодичны по углам $\varphi_{1,2}$ с периодом 2π, получаем

$$\tau_D\frac{\partial P_I}{\partial t} = -\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\Theta}\sin\theta_2\sin\theta_{bI}j_{bI}d\theta_2 d\varphi_1 d\varphi_2. \qquad (A4)$$

Здесь j_{bI} – плотность потока вероятности $j_{\theta 1}$ через потенциальный барьер между долинами I и II; $\theta_{bI} = \theta_{bI}(\theta_2)$ – угол θ_1, соответствующий барьеру между долинами; $\Theta \sim \pi/2$ – верхний предел угла θ_2 в области I. Его точное значение в дальнейшем не будет играть роли, потому мы его не определяем. Тот факт, что в силу симметрии, поток между долинами I и II равен потоку между I и III, здесь учтен.

Для того чтобы оценить интегралы в (A4), мы будем учитывать сильное неравенство $\sigma \gg 1$ и использовать идеи классической теории Крамерса диффузии частицы через высокий потенциальный барьер. Отметим, что для решения задачи о кинетике перемагничивания одиночной однодоменной частицы впервые эта теория была применена в работе [48]. Обзор работ, где идеи метода Крамерса использовались для описания перемагничивания одиночной ферромагнитной частицы, можно найти в [25].

С этой целью мы перепишем первое соотношение в (6) для $i = 1$ следующим образом:

$$j_{\theta 1}e^{u} = -\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(e^{u}W\right) \qquad (A5)$$

и проинтегрируем обе части (A5) по θ_1 от 0 до π:

$$\int_0^{\pi} j_{\theta 1}(\theta_1,\theta_2)e^{u(\theta_1,\theta_2)}d\theta_1 = \\ = -\left[e^{u(\pi,\theta_2)}W(\pi,\theta_2) - e^{u(0,,2)}W(0,\theta_2)\right]. \qquad (A6)$$

Потенциал $u(\theta_1,\theta_2)$, как функция от θ_1, имеет острый максимум u_{Ib} при $\theta_1 = \theta_{Ib}(\theta_2)$, который приближенно удовлетворяет соотношению:

$$\sin\theta_{bI} \approx 1, \qquad (A7)$$

$$\cos\theta_{bI} \approx -\frac{\lambda}{\sigma}f(\theta_2,\varphi_2,z,\rho),$$

$$f(\theta_2,\varphi_2,z,\rho) = \frac{1}{2r^5}\begin{bmatrix}3z(z\cos\theta_2 + \rho\sin\theta_2\cos\varphi_2) - \\ -r^2\cos\theta_2\end{bmatrix}.$$

В первом приближении по малому отношению λ/σ потенциал $u_{bI}(\theta_2) = u(\theta_{bI},\theta_2)$ может быть оценен так:

$$u_{bI} = -\sigma\cos^2\theta_2 - \lambda\frac{(z\cos\theta_2 + \rho\sin\theta_2\cos\varphi_2)\rho\cos\varphi_1}{r^5} - \\ -\lambda\frac{\lambda}{\sigma}f\left[f - \frac{(2z^2-\rho^2)\cos\theta_2 + 3z\rho\sin\theta_2\cos\varphi_2}{r^5}\right] - \\ -h\left(-\frac{\lambda}{\sigma}f + \cos\theta_2\right). \qquad (A8)$$

Здесь f – функция, определенная в (A7).

Используя стандартные соображения метода перевала, мы можем оценить интеграл в левой части (A6) следующим образом:

$$\int_0^{\pi} j_{\theta 1}(\theta_1,\theta_2)e^{u(\theta_1,\theta_2)}d\theta_1 \approx j_{bI}e^{u_{Ib}(\theta_2)}\sqrt{\frac{\pi}{\omega_I(\theta_2)}}, \qquad (A9)$$

$$\omega_I(\theta_2) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta_1^2}\Big|_{\theta_1=\theta_{Ib}} \approx \sigma.$$

Следуя идеям метода Крамерса, мы будем учитывать, что характерное время перехода через высокий потенциальный барьер много больше времени τ_D релаксации о состояния системы внутри потенциальной ямы (долины) к равновесию. Поэтому мы можем считать, что между двумя переходами через барьер, состояние системы в каждой долине практически равновесно. Следовательно, функция распределения W внутри каждой ямы удовлетворяет соотношению Больцмана, и мы можем представить правую часть (A6) в виде

$$
\begin{aligned}
&e^{\mathrm{u}(\pi,\theta_2)}W(\pi,\theta_2) - e^{\mathrm{u}(0,\theta_2)}W(0,\theta_2) \approx \\
&e^{u(\pi,0)}W(\pi,0) - e^{\mathrm{u}(0,0)}W(0,0).
\end{aligned} \tag{A10}
$$

Напомним, что сейчас мы рассматриваем переход системы из долины I, содержащей точку $(\theta_1 = 0, \theta_2 = 0)$, в долину II с $(\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0)$. Необходимо подчеркнуть, что равновесное состояние внутри потенциальной долины не означает равновесия между долинами.

Используя соотношения (A9) и (A10) в уравнении (A6), получаем:

$$
j_{\mathrm{bI}} \approx e^{-\mathrm{u}_{\mathrm{Ib}}(\theta_2)}\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\left[e^{\mathrm{u}(\pi,0)}W(\pi,0) - e^{\mathrm{u}(0,0)}W(0,0)\right]. \tag{A11}
$$

Подставляя (A11) в правую часть (A4), приходим к соотношению

$$
\tau_{\mathrm{D}}\frac{\partial P_{\mathrm{I}}}{\partial t} = q_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\left[e^{\mathrm{u}(\pi,0)}W(\pi,0) - e^{\mathrm{u}(0,0)}W(0,0)\right], \tag{A12}
$$

$$
q_{\mathrm{I}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta_2 e^{-\mathrm{u}_{\mathrm{bI}}(\theta_2)} d\theta_2 d\varphi_1 d\varphi_2.
$$

Приближенное равенство $\sin\theta_{\mathrm{bI}} \approx 1$ здесь учтено.

Чтобы оценить параметр q_{I}, мы используем метод перевала. Учитывая неравенства (7), а также соотношения (A8), в рамках первого приближения по малому отношению λ / σ, справедливо равенство:

$$
\begin{aligned}
&\exp(-u_{\mathrm{bI}}) = \\
&= \exp(\sigma\cos^2\theta_2)\exp(\lambda\frac{(z\cos\theta_2 + \rho\sin\theta_2\cos\varphi_2)\rho\cos\varphi_1}{r^5} + \\
&+\lambda\frac{\lambda}{\sigma}f\left[f - \frac{(2z^2 - \rho^2)\cos\theta_2 + 3z\rho\sin\theta_2\cos\varphi_2}{r^5}\right] + \\
&+h\left(-\frac{\lambda}{\sigma}f + \cos\theta_2\right)).
\end{aligned} \tag{A13}
$$

Первая экспонента в правой части (A13) изменяется с θ_2 намного быстрее, чем вторая. Следовательно, используя стандартные соображения метода перевала, при вычислении интеграла по θ_2 в выражении для q_{I} мы можем положить $\theta_2 = 0$ во второй экспоненте (A13). В результате в старшем приближении по λ / σ получаем:

$$
\begin{aligned}
q_{\mathrm{I}} &\approx 2\pi\exp(\psi_{\mathrm{I}})\int_0^{2\pi}\exp\left(\lambda\frac{z\rho\cos\varphi_1}{r^5}\right)\times \\
&\times d\varphi_1\int_0^{\Theta}\sin\theta_2\exp(\sigma\cos^2\theta_2)d\theta_2,
\end{aligned} \tag{A14}
$$

$$
\psi_{\mathrm{I}} = h - (\lambda + h)\frac{\lambda}{\sigma}f_0,
$$

$$
f_0 = f(0,0,z,\rho) = \frac{2z^2 - \rho^2}{2r^5}.
$$

Поскольку функция $\sigma\cos^2\theta_2$ имеет острый максимум при $\theta_2 = 0$, используя общие идеи метода перевала, интеграл по θ_2 можно оценить так:

$$
\int_0^{\Theta}\sin\theta_2\exp(\sigma\cos^2\theta_2)d\theta_2 \approx \int_0^{\Theta}{,}\,{}_2\exp(\sigma(1 - \theta_2{}^2))d\theta_2 \approx
$$

$$
\approx \frac{1}{2\sigma}\exp(\sigma).
$$

Следовательно:

$$
q_{\mathrm{I}} \approx \frac{\pi}{\sigma}\exp(\psi_{\mathrm{I}})\exp(\sigma)\int_0^{2\pi}\exp\left(\lambda\frac{z\rho\cos\varphi}{r^5}\right)d\varphi. \tag{A15}
$$

Эта оценка q_{I} может быть использована в (A13). Нижний индекс 1 у угла φ здесь для краткости опущен.

Используя подобные рассуждения, приходим к следующему уравнению для вероятности P_{IV} того, что частица находится в долине IV:

$$
\tau_{\mathrm{D}}\frac{\partial P_{\mathrm{IV}}}{\partial t} = q_{\mathrm{IV}}\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\left[e^{\mathrm{u}(\pi,0)}W(\pi,0) - e^{\mathrm{u}(\pi,\pi)}W(\pi,\pi)\right], \tag{A16}
$$

$$
q_{\mathrm{IV}} \approx \frac{\pi}{\sigma}\exp(\psi_{\mathrm{IV}})\exp(\sigma)\int_0^{2\pi}\exp\left(\lambda\frac{z\rho\cos\varphi}{r^5}\right)d\varphi,
$$

$$
\psi_{\mathrm{IV}} = -h - (\lambda - h)\frac{\lambda}{\sigma}f_0.
$$

Аналогично получаем уравнение для вероятности P_{II} того, что система находится в долине II:

$$
\begin{aligned}
\tau_{\mathrm{D}}\frac{\partial P_{\mathrm{II}}}{\partial t} &= -\frac{1}{2}q_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\left[e^{\mathrm{u}(\pi,0)}W(\pi,0) - e^{\mathrm{u}(0,0)}W(0,0)\right] - \\
&-\frac{1}{2}q_{\mathrm{IV}}\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\left[e^{\mathrm{u}(\pi,0)}W(\pi,0) - -e^{\mathrm{u}(\pi,\pi)}W(\pi,\pi)\right].
\end{aligned} \tag{A15}
$$

Отметим, что в силу симметрии выполняется условие $P_{\mathrm{III}} = P_{\mathrm{II}}$, где P_{III} – вероятность нахождения системы в долине III.

Обсудим теперь соотношение между вероятностью P_{I} и плотностью вероятности $W(0,0)$.

Поскольку внутри потенциальной ямы распределение моментов практически равновесно, т. е. выполняется приближенное равенство:

$$e^{\mathrm{u}(\theta_1,\theta_2)}W(\theta_1,\theta_2) \approx e^{\mathrm{u}(0,0)}W(0,0)$$

мы можем переписать уравнение (A3) так:

$$P_{\mathrm{I}} = W(0,0)\int\limits_{\mathrm{I}} \exp\left(u(0,0) - u(\theta_1,\theta_2)\right) \times \\ \times \sin\theta_1 \sin\theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\varphi_1 d\varphi_2 \qquad \text{(A18)}$$

Экспонента в интеграле (A18) может быть представлена в виде:

$$\exp\left(u(0,0) - u(\theta_1,\theta_2)\right) = \\ = \exp\left(-\sigma\left(2 - \cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2\right)\right) \\ \exp\begin{pmatrix} u_{\mathrm{dd}}(0,0) - u_{\mathrm{dd}}(\theta_1,\theta_2) - \\ -h\left(2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2\right) \end{pmatrix}, \qquad \text{(A19)}$$

где потенциал u_{dd} диполь-дипольного взаимодействия частиц определен в уравнении (3). В силу неравенств (7) первая экспонента в (A19) имеет острый максимум при $\theta_1 = \theta_2 = 0$ и изменяется с увеличением θ_1, θ_2 гораздо быстрее, чем вторая экспонента. Используя стандартные соображения метода перевала, мы можем следующим образом оценить сомножители в (A18, A19):

$$\exp\left(-\sigma\left(2 - \cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2\right)\right) \approx \exp\left(-\sigma\theta_1^2 - \sigma\theta_2^2\right),$$

$$\exp\left(u_{\mathrm{dd}}(0,0) - u_{\mathrm{dd}}(\theta_1,\theta_2)\right) \times \\ \times \exp\left(-h\left(2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)\right) \approx 1,$$

$$\sin\theta_{1,2} \approx \theta_{1,2}$$

и расширить пределы интегрирования по θ_1, θ_2 от 0 до ∞. В нулевом приближении по малому отношению λ / σ получаем:

$$P_I = W(0,0)\eta, \; \eta = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2 \qquad \text{(A20)}$$

и, аналогично

$$P_{\mathrm{II}} = W(0,\pi)\eta; P_{\mathrm{III}} = W(\pi,0)\eta; P_{\mathrm{IV}} = W(\pi,\pi)\eta. \qquad \text{(A21)}$$