

УДК 521,62-50

О ТОЧКАХ ЛИБРАЦИИ В СИСТЕМЕ АСТЕРОИД–ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЗОНД

© 2023 г. Э. К. Лавровский*

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*Lavrov.EK@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.07.2022 г.

После доработки 29.11.2022 г.

Принята к публикации 17.12.2022 г.

Работа посвящена исследованию относительного движения в поле однородных сфероидных тел. Считается, что спутник астероида не влияет на его поступательное и вращательное движения по инерции. Это последнее есть вращение в режиме регулярной прецессии. Рассматривается случай, когда астероид — эллипсоид вращения. Строится система условий, которой должны удовлетворять точки либрации; показано, что ее решением являются два типа точек либрации, различающиеся своим расположением по отношению к неизменному вектору кинетического момента вращения и к оси симметрии эллипсоида. Далее численно-аналитическим методом исследуется по первому приближению устойчивость точек либрации.

DOI: 10.31857/S0023420622700042, EDN: ULOUAD

ВВЕДЕНИЕ

В небесной механике, говоря о точках либрации, обычно имеют в виду ситуацию в проблеме трех тел, когда вокруг массивного тела (Солнца) вращается менее массивное (планета). Имеется еще и третье тело с пренебрежимо малой массой (астероид), гравитация которого не оказывает существенного влияния на движение двух других тел. Это ограниченная задача трех тел. Точками либрации в этой задаче называются стационарные точки в подвижной системе осей, связанной с планетой, где за счет действия гравитации со стороны массивного тела и центробежной силы астероид находится в равновесии. Интерес к точкам либрации обусловлен, прежде всего, тем, что не удается построить аналитического решения задачи трех тел даже в ограниченной постановке, поэтому важны и частные решения, которым посвящено большое число работ и монографий, например, [1]. Как известно со времен Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, в плоской, круговой задаче трех тел имеются три коллинеарные точки либрации (они неустойчивы) и две треугольные (иногда, устойчивые), причем последние отличаются тем свойством, что треугольник, вершинами которого служат положения всех трех тел, является равносторонним. В частности, в системе Солнце–Юпитер действительно была отмечена концентрация тел малой массы — троянцев и ахейцев в треугольных точках. Точки либрации часто создают комфортные условия для наблюдения небес-

ных объектов с тела малой массы одновременно с удобством его связи с Землей. В особенности это относится к точкам либрации в системе Земля–Луна. Так, например, в недавнем прошлом при работе китайского исследовательского зонда *Ченъэ-4* на обратной (невидимой) стороне Луны использовалась для связи с Землей одна из треугольных точек в системе Земля–Луна.

Ряд работ посвящен точкам либрации в окрестности вращающихся гравитирующих тел. Так в статьях [2, 3] изучались точки либрации по малой и большой оси трехосного однородного гравитирующего эллипсоида. Другой класс динамически симметричных объектов рассмотрен в работе [4], где исследовались точки либрации гантели, вращающейся в режиме регулярной прецессии. Гантель состоит из двух сферических гравитирующих тел разной массы, соединенных невесомым стержнем. В этой работе, а также в публикациях [5–7] показано, что точки либрации сосредоточены либо в плоскости, перпендикулярной к вектору кинетического момента, либо они принадлежат плоскости оси симметрии гантели и упомянутого кинетического момента.

Настоящая работа в определенном смысле продолжает данное направление, только в качестве гравитирующего астероида здесь рассматривается однородный эллипсоид вращения.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим однородный эллипсоид вращения (астероид) с полуосями $a, b = a, c$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Обозначим $k = c/a$, при $k > 1$ – эллипсоид вытянутый, при $k < 1$ – сплюснутый. Сферический случай не рассматривается. Будучи динамически симметричным телом, астероид вращается по инерции в режиме регулярной прецессии [9], при которой он совершает угловое движение с постоянной скоростью $\omega = \dot{\psi}$ вокруг направления вектора кинетического момента, неизменного по величине и направлению в абсолютном пространстве. Между этим вектором и осью симметрии астероида поддерживается постоянный угол нутации θ . Кроме того, астероид вращается еще и с некоторой постоянной угловой скоростью $\dot{\phi}$, направленной по оси его симметрии. Между этими тремя величинами существует связь

$$\dot{\phi} = \dot{\psi} \cos \theta \frac{A - C}{C},$$

где A, C – соответственно экваториальный и осевой моменты инерции.

Введем в рассмотрение вращающуюся с угловой ω систему координат так, что ось Oz направлена по вектору кинетического момента, ось Ox лежит в плоскости, образованной вектором кинетического момента и осью симметрии эллипсоида, ось Oy дополняет систему $Oxyz$ до правой, точка O есть центр масс эллипсоида. Исследовательский зонд в этой системе – материальная точка с координатами (x, y, z) .

Гравитационное воздействие астероида на зонд описывается решением Дирихле [10] в главных осях эллипсоида $Ox'y'z'$, причем Oz' – его ось симметрии, а $Ox'y'$ – экваториальная плоскость эллипсоида. Если эллипсоид вытянутый и $c > a$, то гравитационные ускорения X', Y', Z' в точке (x', y', z') определяются согласно формулам

$$\frac{X'}{x'} = \frac{Y'}{y'} = \frac{3fM}{2a^3l^3} \left[\ln \left(\sqrt{1+w^2} + w \right) - w\sqrt{1+w^2} \right] \equiv \alpha P,$$

$$\frac{Z'}{z'} = \frac{3fM}{a^3l^3} \left[\frac{w}{\sqrt{1+w^2}} - \ln \left(\sqrt{1+w^2} + w \right) \right] \equiv \alpha Q$$

и

$$\alpha = \frac{3fM}{a^3l^3}, \quad l^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2},$$

$$\frac{z'^2}{1+w^2} + x'^2 + y'^2 = \frac{a^2l^2}{w^2}, \quad w \geq 0.$$

В аналогичном случае сплюснутого эллипсоида $c < a$ следует использовать соотношения

$$\frac{X'}{x'} = \frac{Y'}{y'} = \frac{3fM}{2c^3l^3} \left[\frac{w}{1+w^2} - \arctg(w) \right] \equiv \alpha P,$$

$$\frac{Z'}{z'} = \frac{3fM}{c^3l^3} [\arctg(w) - w] \equiv \alpha Q$$

и

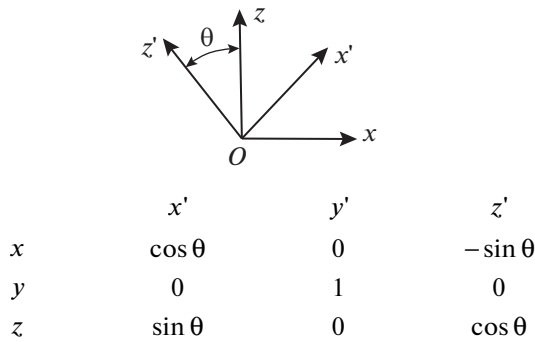
$$\alpha = \frac{3fM}{c^3l^3}, \quad l^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2},$$

$$\frac{x'^2 + y'^2}{1+w^2} + z'^2 = \frac{c^2l^2}{w^2}, \quad w \geq 0.$$

Здесь $M = \frac{4}{3}\pi\sigma abc$ – масса эллипсоида; σ – плотность материала астероида; f – константа тяготения; l, α – параметры; w, P, Q – функции координат, введенные для удобства описания силы притяжения эллипсоида. В случае вытянутого эллипсоида его виду отвечает диапазон изменения функции $w \in [0, \sqrt{k^2 - 1}]$, в случае сжатого эллипсоида аналогичный диапазон – $w \in \left[0, \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k}\right]$. Причем значения $w = 0$ слева отвечают в обоих случаях бесконечно удаленным точкам пространства, а правые границы диапазона – самой поверхности эллипсоида.

Нетрудно заметить, что для внешней точки пространства приведенные выше формулы гарантируют построение одного и того же вектора гравитационных ускорений (в проекциях по оси симметрии и перпендикулярно к ней) независимо от того, каким образом выбирались главные оси Ox', Oy' в экваториальной плоскости астероида. В частности, можно считать, что ось Ox' всегда лежит в плоскости Oxz . Тогда матрица перехода от осей $Oxyz$ к осям $Ox'y'z'$ и взаимное располо-

жение этих осей отвечают изображенным на следующей схеме



Оси Oy и Oy' при этом совпадают. Аналогичным образом связаны в этих осях и гравитационные ускорения X, Y, Z и X', Y', Z' .

Перейдем в подвижную систему осей $Ox'y'z'$. Уравнения движения точки малой массы принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x &= X = X' \cos \theta - Z' \sin \theta, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y &= Y = Y', \\ \ddot{z} &= Z = X' \sin \theta + Z' \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} X &= \alpha[x' P(x', y', z') \cos \theta - z' Q(x', y', z') \sin \theta], \\ Y &= \alpha y P(x', y', z'), \\ Z &= \alpha[x' P(x', y', z') \sin \theta + z' Q(x', y', z') \cos \theta]. \end{aligned}$$

Таким образом, точки либрации должны удовлетворять условиям

$$\left. \begin{aligned} [\alpha P + \omega^2] x' \cos \theta - [\alpha Q + \omega^2] z' \sin \theta &= 0, \\ [\alpha P + \omega^2] y' &= 0, \quad P x' \sin \theta = -Q z' \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Постоянные x, y, z отвечают постоянным x', y', z' и наоборот. Можно просто искать решения с постоянными x', y', z' , от которых в конечном итоге зависят функции P и Q .

Будем считать, что $0 < \theta < \pi/2$. Второе из условий в системе (2) удовлетворяется в двух случаях: а) если $\alpha P + \omega^2 = 0$ или б) $y = 0$. Первое определяет точки либрации, являющиеся аналогом “треугольных”, второе — “псевдоколлинеарных”, как они названы в статье [4]. В других работах, например, в [5], последние называют также “компланарными” точками либрации. Как показано в работе [8], любое однородное осесимметричное тело может иметь только эти два типа точек либрации.

Случай А. Два оставшихся соотношения из (2) образуют систему условий

$$\begin{cases} [\alpha Q + \omega^2] z' \sin \theta = 0, \\ P x' \sin \theta = -Q z' \cos \theta. \end{cases}$$

Если $Q \neq P$, то отсюда вытекает, что $x' = z' = 0$ (т.е. $x = z = 0$). Существование точек либрации возможно только на оси y , перпендикулярной плоскости Oxz . Значение w , при котором выполняется условие $\alpha P(w) + \omega^2 = 0$, связано с единственной ненулевой координатой y точек либрации соотношениями: в случае вытянутого эллипсоида $l^2 = k^2 - 1$, $y^2 = \frac{a^2 l^2}{w^2}$ и $l^2 = \frac{1 - k^2}{k^2}$,

$\frac{y^2}{1 + w^2} = \frac{c^2 l^2}{w^2}$ в случае сплюснутого эллипсоида.

Функция $P(w)$ — монотонно-убывающая, поэтому условие $\alpha P(w) + \omega^2 = 0$ может выполняться только при единственном значении w . В каждом из таких случаев существуют реально ровно две точки либрации по плюс-минус оси y , когда эти точки “интересны”, т.е. принадлежат внешности эллипсоида.

Равенство $Q = P$ невозможно так, как в случае вытянутого эллипсоида

$$\frac{d(Q - P)}{dw} = \frac{w^4}{(1 + w^2)\sqrt{1 + w^2}} \geq 0,$$

причем $Q(w = 0) = P(w = 0) = 0$, т.е. при $w > 0$, имеем неравенство $P < Q < 0$. Если же эллипсоид сплюснутый, то

$$\frac{d(Q - P)}{dw} = -\frac{w^4}{(1 + w^2)^2} \leq 0 \text{ и } Q < P < 0.$$

Случай Б. Из третьего и первого условий (2) заключаем, что

$$\begin{aligned} z' &= -x' \frac{P}{Q} \operatorname{tg} \theta, \\ x' \{ \alpha P Q + \omega^2 (Q \cos^2 \theta + P \sin^2 \theta) \} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Если равенство нулю во втором соотношении (3) реализуется при $x' = 0$, то $x' = z' = 0$. Иными словами, приходим к тривиальному решению $x = y = z = 0$, которое противоречит здравому смыслу. При написании первого из соотношений (3) молчаливо предполагалось, что $Q \neq 0$. Функция $Q(w)$ имеет единственный корень $w = 0$, отвечающий бесконечно удаленной точке пространства (x, y, z) , где $Q = P = 0$.

Пусть

$$\alpha P Q + \omega^2 (Q \cos^2 \theta + P \sin^2 \theta) = 0, \quad (4)$$

при $y = 0$. Точки либрации лежат в плоскости Oxz' ($= Oxz$), образованной вектором кинетического момента и осью симметрии эллипсоида. Иными словами, в случае вытянутого эллипсоида дополнительно возникает система трех соотношений

$$\begin{aligned} z' &= -x' \frac{P(w)}{Q(w)} \operatorname{tg} \theta, \\ \alpha P(w)Q(w) + \omega^2 [Q(w) \cos^2 \theta + P(w) \sin^2 \theta] &= 0, \quad (5) \\ \frac{z'^2}{1+w^2} + x'^2 &= \frac{a^2(k^2-1)}{w^2} \end{aligned}$$

относительно трех неизвестных w, x', z' при заданном угле нутации θ , а также параметрах ω, α и $k > 1$. В случае сплюснутого эллипсоида возникает аналогичная по смыслу система вида

$$\begin{aligned} z' &= -x' \frac{P(w)}{Q(w)} \operatorname{tg} \theta, \\ \alpha P(w)Q(w) + \omega^2 [Q(w) \cos^2 \theta + P(w) \sin^2 \theta] &= 0, \quad (6) \\ \frac{x'^2}{1+w^2} + z'^2 &= \frac{c^2(1-k^2)}{w^2 k^2}, \end{aligned}$$

причем $k < 1$. Как отмечалось выше, функции $P(w), Q(w)$, а также параметр α при рассмотрении двух указанных типов эллипсоидов различные. Очевидный путь построения решений, отвечающих условиям (5), (6), требует сначала решения уравнения (4) при заданных величинах коэффициентов α, ω и нахождения соответствующих значений w . После чего возникают два простых линейных условия относительно x'^2, z'^2 . Соответствие знаков перед решениями x', z' определяется первыми соотношениями в (5) и (6). Каждая из систем условий (5) и (6) имеет пару решений типа $\pm(x', z')$, причем в случае вытянутого эллипсоида это

$$\begin{aligned} x' &= \pm \frac{aQ(w)\sqrt{(k^2-1)(1+w^2)}}{w\sqrt{(1+w^2)Q^2(w) + \operatorname{tg}^2 \theta \cdot P^2(w)}}, \\ z' &= \mp \frac{aP(w)\operatorname{tg} \theta \sqrt{(k^2-1)(1+w^2)}}{w\sqrt{(1+w^2)Q^2(w) + \operatorname{tg}^2 \theta \cdot P^2(w)}}, \end{aligned} \quad (7)$$

а в случае сплюснутого эллипсоида

$$\begin{aligned} x' &= \pm \frac{cQ(w)\operatorname{ctg} \theta \sqrt{(1-k^2)(1+w^2)}}{wk\sqrt{(1+w^2)P^2(w) + Q^2(w)\operatorname{ctg}^2 \theta}}, \\ z' &= \mp \frac{cP(w)\sqrt{(1-k^2)(1+w^2)}}{wk\sqrt{(1+w^2)P^2(w) + Q^2(w)\operatorname{ctg}^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Независимо от того, рассматривается ли вытянутый или сплюснутый эллипсоид, на полуин-

тервале $w > 0$ условие (4) не может иметь более одного корня. Действительно, представим его в форме

$$\frac{P(w)Q(w)}{Q(w) \cos^2 \theta + P(w) \sin^2 \theta} + \frac{\omega^2}{\alpha} = 0 \quad (8)$$

и продифференцируем по w левую часть этого соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \left[\frac{P(w)Q(w)}{Q(w) \cos^2 \theta + P(w) \sin^2 \theta} \right] &= \\ &= \frac{P^2 Q'_w \sin^2 \theta + Q^2 P'_w \cos^2 \theta}{[Q(w) \cos^2 \theta + P(w) \sin^2 \theta]^2}. \end{aligned}$$

Поскольку, как легко видеть $P'_w < 0$, $Q'_w < 0$, получается, что дробная функция переменной w в левой части уравнения (8) монотонно убывает. При этом она равна нулю, когда $w = 0$, и стремится к минус бесконечности при $w \rightarrow \infty$. Тем самым, независимо от выбора величин $\omega, \alpha > 0$ уравнение (8) имеет ровно один корень. Неясно только, отвечают ли ему точки либрации во внешней или во внутренней области эллипсоида.

Ввиду сложного нелинейного характера условий (5), (6) дальнейшее их исследование требует использования численных методов.

Некоторые результаты исследования, позволяющие судить о картине точек либрации, приводятся ниже. Пусть астероид сложен из кремния $\sigma = 2.328 \text{ г см}^{-3}$. В случае вытянутого эллипсоида примем далее, что $c = 150 \text{ м}$, $a = 100 \text{ м}$, $k = c/a = 1.5$. Тогда с учетом задаваемого значения $\omega = 0.0005 \text{ с}^{-1}$ получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3fM}{a^3 I^3} = \frac{3f(4/3)\pi\sigma a^2 c}{a^3 (\sqrt{k^2-1})^3} = \\ &= \frac{k}{(\sqrt{k^2-1})^3} 4\pi(\rho f) = 0.209796 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-2}, \\ \frac{\omega^2}{\alpha} &\approx 0.119. \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько ситуаций. Пусть $\theta \approx 0$, тогда ввиду (4) $P = -\omega^2/\alpha \approx -0.120$ при $w \approx 0.745$. Компланарные точки либрации здесь $x' \approx \pm 150.07 \text{ м}$, $z' = 0$. При $\theta = \pi/4$ имеем $PQ/(P+Q) = -0.5\omega^2/\alpha = -0.5958 \cdot 10^{-1}$, $w \approx 0.787$. Согласно расчетам по приведенным выше формулам получаем такие точки либрации $x' \approx \pm 97.80 \text{ м}$, $z' \approx \mp 131.03 \text{ м}$. Если $\theta \approx \pi/2$, то $Q = -\omega^2/\alpha \approx -0.120$, $w \approx 0.84$. Точки либрации $x' = 0$, $z' \approx \mp 173.83 \text{ м}$. Все эти точки находятся вне тела эллипсоида — в чем можно убедиться либо не-

посредственно, либо в силу того, что все рассмотренные значения переменной w – корней условия (4) – принадлежат диапазону $[0, l = 1.118]$.

При расчетах в аналогичном случае сплюснутого эллипсоида считалось, что $k = c/a = 0.666$, $a = 150$ м, $c = 100$ м, $\omega = 0.611556 \cdot 10^{-3}$ с $^{-1}$. (Значение ω немного изменено, чтобы при новом α сохранить выполнение соотношения $\omega^2/\alpha \approx 0.119$.) Случаям $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ отвечают соответственно следующие значения переменной w : 0.905, 0.84, 0.784. При расчетах по приведенным ранее формулам получаем соответственно следующие координаты точек (x', z') либрации: $x' \approx \pm 176.17$ м, $z' = 0$; $x' \approx \pm 126.09$ м, $z' \approx \mp 91.96$ м; $x' = 0$, $z' \approx \mp 136.70$ м, причем $l = 1.120$.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ

Исследуем устойчивость по первому приближению построенных точек либрации, начиная со случая вытянутого эллипсоида. Основная проблема, которая возникает в связи с этим, состоит в описании вариаций гравитационного ускорения при возникновении отклонений в позиции тела малой массы. Для ее решения требуется выполнить определенные выкладки, приведенные в Приложении. В результате проварьированные уравнения системы (1)

$$\begin{aligned} \delta\ddot{x} &= \delta X + 2\omega\delta\dot{y} + \omega^2\delta x, \\ \delta\ddot{y} &= \delta Y - 2\omega\delta\dot{x} + \omega^2\delta y, \quad \delta\ddot{z} = \delta Z \end{aligned} \quad (9)$$

удается представить в виде

$$\begin{cases} \delta\ddot{x} = a_{xx}\delta x + a_{xy}\delta y + a_{xz}\delta z + 2\omega\delta\dot{y}, \\ \delta\ddot{y} = a_{yx}\delta x + a_{yy}\delta y + a_{yz}\delta z - 2\omega\delta\dot{x}, \\ \delta\ddot{z} = a_{zx}\delta x + a_{zy}\delta y + a_{zz}\delta z \end{cases} \quad (10)$$

с постоянными коэффициентами a . Характеристический определитель системы (10) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - a_{xx} & -2\omega\lambda - a_{xy} & -a_{xz} \\ 2\omega\lambda - a_{yx} & \lambda^2 - a_{yy} & -a_{yz} \\ -a_{zx} & -a_{zy} & \lambda^2 - a_{zz} \end{vmatrix} = 0.$$

В развернутой форме это

$$\begin{aligned} &\lambda^6 + \lambda^4[-a_{xx} - a_{yy} - a_{zz} + 4\omega^2] + \\ &+ \lambda^3 2\omega[a_{xy} - a_{yx}] + \\ &+ \lambda^2[a_{xx}a_{yy} + a_{xx}a_{zz} + a_{yy}a_{zz} - \\ &- a_{xz}a_{zx} - 4\omega^2a_{zz} - a_{xy}a_{yx} - a_{yz}a_{zy}] + \\ &+ 2\omega\lambda[-a_{yz}a_{zx} + a_{xz}a_{zy} + a_{zz}a_{yx} - a_{zz}a_{xy}] + \\ &+ [-a_{xx}a_{yy}a_{zz} - a_{xy}a_{yz}a_{zx} - a_{xz}a_{zy}a_{yx} + \\ &+ a_{yy}a_{xz}a_{zx} + a_{zz}a_{xy}a_{yx} + a_{xx}a_{zy}a_{yz}] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

“Треугольные” точки либрации

В этом случае $x' = z' = 0$, $y \neq 0$, а также $\omega^2 = -\alpha P(w) = -\alpha P(0, y, 0)$. Сказанное влечет за собой равенство $a_{xy} = a_{yx} = a_{yz} = a_{zy} = 0$, которое означает, что в характеристическом полиноме отсутствуют все нечетные степени λ . Полином превращается в бикубический относительно λ с оставшимися ненулевыми коэффициентами a

$$\begin{aligned} a_{xz} &= a_{zx} = \alpha(P - Q)\sin\theta\cos\theta, \\ a_{xx} &= \omega^2 + \alpha(P\cos^2\theta + Q\sin^2\theta), \\ a_{zz} &= \alpha(P\sin^2\theta + Q\cos^2\theta). \end{aligned}$$

Коэффициент $a_{yy} \neq 0$, после некоторых упрощений представим в виде

$$a_{yy} = \frac{\alpha w^3}{\sqrt{1 + w^2}}.$$

Окончательный вид характеристического полинома таков

$$\begin{aligned} &\lambda^6 + \lambda^4[4\omega^2 - a_{xx} - a_{yy} - a_{zz}] + \\ &+ \lambda^2[a_{xx}a_{yy} + a_{xx}a_{zz} + a_{yy}a_{zz} - 4\omega^2a_{zz} - a_{xz}a_{zx}] + \\ &+ a_{yy}[-a_{xx}a_{zz} + a_{xz}a_{zx}] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Характеристический полином далее исследовался численно, в случае $a = 100$ м, $\sigma = 2.328$ г см $^{-3}$. Можно показать, что случай сплюснутого эллипсоида отличается только тем, что здесь возникает другой вид коэффициента a_{yy}

$$a_{yy} = \frac{\alpha w^3}{(1 + w^2)},$$

а также (естественно) другой вид имеют зависимости $P(w)$, $Q(w)$. Он также исследовался численно при той же плотности материала астероида и той же длине наименьшей из осей.

Более удобным представляется, однако, форма учета ненулевых коэффициентов a , когда все они дополнительно поделены на величину α , и в рассмотрение введено безразмерное отношение $\chi = \omega^2/\alpha$. В случае “треугольных” точек либрации

$$\chi = -P(w). \quad (13)$$

Тем самым, все ненулевые коэффициенты a зависят только от угла нутации θ и функции w , Прямым перебором в пространстве (w, θ) можно проанализировать все ситуации.

О результатах исследования устойчивости чуть ниже, сначала остановимся на методе этого численного исследования. Запишем характеристическое уравнение в общем случае как кубическое относительно $r = \lambda^2$ и сделаем замену перемен-

ной r на g , чтобы избавиться от квадратичного члена, тогда

$$\begin{aligned} r^3 + \tilde{a}r^2 + \tilde{b}r + \tilde{c} &= 0, \\ g = r + \tilde{a}/3 &\Rightarrow g^3 + pg + q = 0, \\ p = \tilde{b} - \tilde{a}^2/3, \quad q &= \tilde{c} + 2\tilde{a}^3/27 - \tilde{a}\tilde{b}/3. \end{aligned}$$

Известно, что гарантированное вещественное решение кубического уравнения вида $g^3 + pg + q = 0$ – это

$$g = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

После этого два оставшихся корня – вещественных или комплексно-сопряженных – находятся через решение квадратичного уравнения. В случае устойчивости точек либрации все корни r должны быть вещественными, неположительными величинами – в противном случае возникают корни λ с разными по знаку реальными частями. Поэтому необходимые условия устойчивости можно получить из теоремы Виета

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\tilde{a}, \quad r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \tilde{b}, \quad r_1r_2r_3 = -\tilde{c},$$

они имеют вид $\tilde{a} \geq 0, \tilde{b} \geq 0, \tilde{c} \geq 0$. Известно также, что дискриминант кубического уравнения

$$\Delta = -4\tilde{a}^3\tilde{c} + \tilde{a}^2\tilde{b}^2 - 4\tilde{b}^3 + 18\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} - 27\tilde{c}^2$$

позволяет точно указать количество вещественных и комплексно сопряженных корней: при $\Delta > 0$ уравнение имеет три различных вещественных корня, при $\Delta = 0$ два вещественных корня совпадают, при $\Delta < 0$ есть один вещественный корень и два комплексно сопряженных. Оба этих соображения использовались при численном исследовании для контроля результатов.

“Компланарные” точки либрации

В этом случае $y = 0$. По методу исследования устойчивости ситуация мало чем отличается от только что разобранного случая, так как по-прежнему $a_{xy} = a_{yx} = a_{yz} = a_{zy} = 0$, а значит, характеристическое уравнение имеет тот же вид (12) и оно бикубическое. Это позволяет вести численное исследование по тому же плану.

Основное отличие от предыдущего случая – более громоздкие формулы для остальных ненулевых коэффициентов a . Перечислим их в случае вытянутого эллипсоида (см. Приложение)

$$\eta = (2w^2 + 1)(x'^2 + y'^2) + (z'^2 - a^2l^2)$$

и

$$\begin{aligned} a_{xx} &= \chi + (Q \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta) - \\ &- \frac{w^2}{\sqrt{1+w^2}} \left(\frac{z' \sin \theta}{1+w^2} - x' \cos \theta \right) \frac{\xi x' \cos \theta - w z' \sin \theta}{\eta}, \\ a_{zz} &= (P \sin^2 \theta + Q \cos^2 \theta) + \\ &+ \frac{w^2}{\sqrt{1+w^2}} \left(\frac{z' \cos \theta}{1+w^2} + x' \sin \theta \right) \frac{\xi x' \sin \theta + w z' \cos \theta}{\eta}, \\ a_{yy} &= \chi + P, \quad a_{xz} = (P - Q) \sin \theta \cos \theta - \\ &- \frac{w^2}{\sqrt{1+w^2}} \left(\frac{z' \sin \theta}{1+w^2} - x' \cos \theta \right) \frac{\xi x' \sin \theta + w z' \cos \theta}{\eta}, \\ a_{zx} &= (P - Q) \sin \theta \cos \theta + \\ &+ \frac{w^2}{\sqrt{1+w^2}} \left(\frac{z' \cos \theta}{1+w^2} + x' \sin \theta \right) \frac{\xi x' \cos \theta - w z' \sin \theta}{\eta}. \end{aligned}$$

Безразмерное отношение – функция (w, θ) в силу соотношения

$$\chi = \frac{\omega^2}{\alpha} = - \frac{PQ}{Q \cos^2 \theta + P \sin^2 \theta}.$$

Впрочем, величина χ не оказывает никакого влияния на выбор знаков $\pm$ и выбор самой пары x', z' с помощью соотношений (7). Члены, зависящие от x', z' в правых частях ненулевых коэффициентов a , могут быть представлены также в виде функций (w, θ) за счет взаимного сокращения числителя и знаменателя на величину $a^2 l^2$. Тем самым, в правых частях приведенной выше системы стоят также функции (w, θ) .

В случае сплюснутого эллипсоида ситуация аналогичная, только

$$\eta = (2w^2 + 1)z'^2 + (x'^2 + y'^2 - c^2 l^2)$$

и

$$\begin{aligned} a_{xx} &= \chi + (Q \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta) - \\ &- \frac{w^2}{1+w^2} \left(z' \sin \theta - \frac{x' \cos \theta}{1+w^2} \right) \frac{w x' \cos \theta - \xi z' \sin \theta}{\eta}, \\ a_{zz} &= (P \sin^2 \theta + Q \cos^2 \theta) + \\ &+ \frac{w^2}{1+w^2} \left(z' \cos \theta + \frac{x' \sin \theta}{1+w^2} \right) \frac{w x' \sin \theta + \xi z' \cos \theta}{\eta}, \\ a_{yy} &= \chi + P, \quad a_{xz} = (P - Q) \sin \theta \cos \theta - \\ &- \frac{w^2}{1+w^2} \left(z' \sin \theta - \frac{x' \cos \theta}{1+w^2} \right) \frac{w x' \sin \theta + \xi z' \cos \theta}{\eta}, \\ a_{zx} &= (P - Q) \sin \theta \cos \theta + \\ &+ \frac{w^2}{1+w^2} \left(z' \cos \theta + \frac{x' \sin \theta}{1+w^2} \right) \frac{w x' \cos \theta - \xi z' \sin \theta}{\eta}. \end{aligned}$$

Результаты исследования устойчивости изображены на рисунке, показаны границы областей устойчивости. По горизонтальной оси отложены

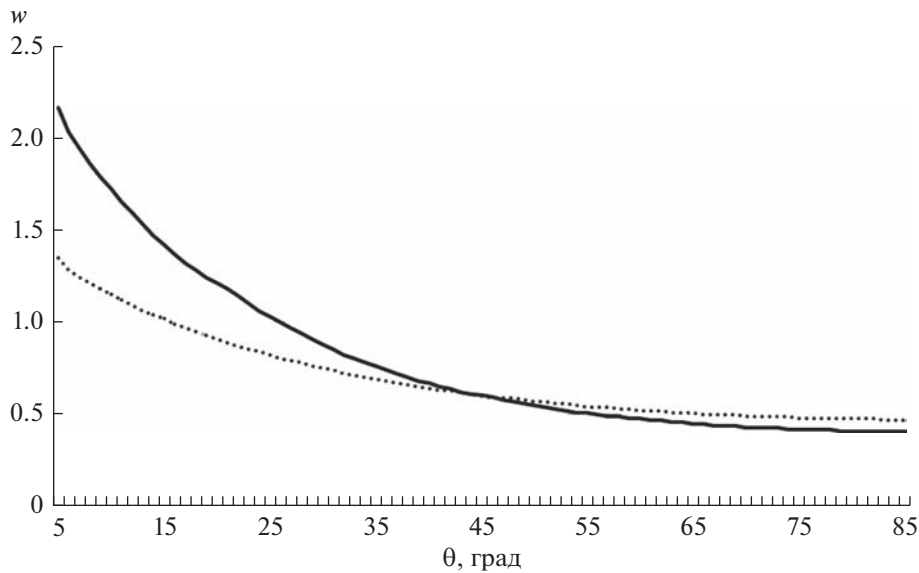


Рис. 1. Результаты исследования устойчивости.

значения (в градусах) угла нутации θ , по вертикальной — значения безразмерной величины w .

Случаю вытянутого эллипсоида отвечает жирная кривая: области устойчивости для “треугольных” точек либрации отвечает вся зона в переменных w, θ , расположенная ниже этой кривой. Все пары x', z' “компланарных” точек либрации неустойчивы. Случаю сплюснутого эллипсоида отвечает пунктирная кривая: ниже данной кривой расположена зона устойчивости “компланарных” точек либрации. Напротив, все “треугольные” точки либрации неустойчивы.

С первого взгляда результаты исследования на устойчивость могут показаться странными ввиду сильного влияния на нее фактора вытянутости-сплюснутости эллипсоида, хотя в смысловом плане они и согласуются с результатами некоторых работ других авторов, например, [7]. Однако следует иметь в виду, что при $k = 1$, когда эллипсоид переходит в сферу, точки либрации образуют окружность определенного радиуса в экваториальной (перпендикулярной угловой скорости) плоскости сферы. Каждая из его точек по существу неустойчивая, но обладает свойством орбитальной устойчивости. Это создает противоречивую ситуацию.

Дополним сказанное результатом некоторого численного исследования. Рассматривается вытянутый по форме эллипсоид с наименьшей осью $a = 100$ м, плотности $\sigma = 2.328$ г см⁻³ закрученный с угловой скоростью $\omega = 5 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹. В диапазоне изменения параметра $k \in (1, 2.5]$ требуется построить “треугольные” точки либрации и уста-

новить, устойчивы ли они. Поскольку коэффициент χ линейно зависит от отношения $(k^2 - 1)^{3/2}/k$, то в силу соотношения (13) каждому k ставится в соответствие некоторое число w , причем диапазон $w \in (0, 1.38]$. Эти числа растут вместе с ростом k , им отвечают координаты y точек либрации строго во вне эллипсоида. Вопрос их устойчивости зависит от величины угла нутации θ . Если $\theta \approx 5^\circ$, то все точки либрации устойчивы ввиду картины на рисунке, поскольку оказалось, что здесь $w < 2$. Если же $\theta > 45^\circ$, то, начиная со значения $k \approx 1.3$, соответствующие величины w превышают условный барьер $w \approx 0.5$ на рисунке для устойчивых режимов. Они неустойчивы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Преобразования начнем с вариации функций $P(w)$, $Q(w)$. Найдем их производные

$$P = \frac{1}{2} \left[\ln(\sqrt{1+w^2} + w) - w\sqrt{1+w^2} \right],$$

$$Q = \frac{w}{\sqrt{1+w^2}} - \ln(\sqrt{1+w^2} + w),$$

$$\frac{dP}{dw} = \frac{-w^2}{\sqrt{1+w^2}}, \quad \frac{dQ}{dw} = \frac{-w^2}{(1+w^2)\sqrt{1+w^2}}.$$

Переменная w зависит от координат (x', y', z') положения точки малой массы следующим явным образом

$$w^4(x'^2 + y'^2) + w^2(x'^2 + y'^2 + z'^2 - a^2 l^2) - a^2 l^2 = 0, \\ l^2 = k^2 - 1.$$

Отсюда имеем

$$4w^3\delta w(x'^2 + y'^2) + w^4 2(x'\delta x' + y'\delta y') + \\ + 2w\delta w(x'^2 + y'^2 + z'^2 - a^2 l^2) + \\ + w^2 2(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') = 0$$

или

$$2w\delta w \{ (2w^2 + 1)(x'^2 + y'^2) + (z'^2 - a^2 l^2) \} = \\ = -2w^2 \{ (w^2 + 1)(x'\delta x' + y'\delta y') + z'\delta z' \}, \\ \delta w = - \frac{w \{ (w^2 + 1)(x'\delta x' + y'\delta y') + z'\delta z' \}}{\{ (2w^2 + 1)(x'^2 + y'^2) + (z'^2 - a^2 l^2) \}} = \\ = -w \frac{(w^2 + 1)x'\delta x' + (w^2 + 1)y'\delta y' + z'\delta z'}{(2w^2 + 1)(x'^2 + y'^2) + (z'^2 - a^2 l^2)}.$$

Ранее было найдено

$$x' = x \cos \theta + z \sin \theta, \\ z' = -x \sin \theta + z \cos \theta, \quad y' = y,$$

отсюда

$$\delta x' = \delta x \cos \theta + \delta z \sin \theta, \\ \delta z' = -\delta x \sin \theta + \delta z \cos \theta, \quad \delta y' = \delta y.$$

Перейдем к пространству переменных $Oxyz$, заменив $\delta x'$ на δx и т.д., а члены типа $x' = x'(x, y, z)$ и им подобные пока оставим в прежнем виде, подразумевая делаемую замену. Тогда, обозначая

$$\xi = w(w^2 + 1), \\ \eta = (2w^2 + 1)(x'^2 + y'^2) + (z'^2 - a^2 l^2)$$

окончательно имеем

$$\delta w = - \frac{\xi x'(\cos \theta \delta x + \sin \theta \delta z) + \xi y' \delta y' + w z'(-\sin \theta \delta x + \cos \theta \delta z)}{\eta} = \\ = - \frac{\delta x(\xi x' \cos \theta - w z' \sin \theta) + \xi y \delta y + \delta z(\xi x' \sin \theta + w z' \cos \theta)}{\eta}. \quad (\text{П.1})$$

Поскольку ускорения $X' = \alpha x' P$, $Y' = \alpha y' P$, $Z' = \alpha z' Q$ (по модели гравитации) переходят в ускорения X, Y, Z по тем же формулам, что и x', y', z' в x, y, z , то

$$X = -Z' \sin \theta + X' \cos \theta, \quad Y = Y', \\ Z = Z' \cos \theta + X' \sin \theta$$

или $X = \alpha \{-z' Q \sin \theta + x' P \cos \theta\}$, $Y = \alpha y' P$, $Z = \alpha \{z' Q \cos \theta + x' P \sin \theta\}$. Отсюда

$$\delta X = \alpha \{ -\delta z' Q \sin \theta - z' \delta Q \sin \theta + \\ + \delta x' P \cos \theta + x' \delta P \cos \theta \} = \\ = \alpha \left\{ \begin{aligned} &(\delta x \sin \theta - \delta z \cos \theta) Q \sin \theta + \\ &+ z' \sin \theta \frac{w^2 \delta w}{(1 + w^2)^{3/2}} + \\ &+ (\delta x \cos \theta + \delta z \sin \theta) P \cos \theta - \\ &- x' \cos \theta \frac{w^2 \delta w}{(1 + w^2)^{1/2}} \end{aligned} \right\},$$

$$\delta Y = \alpha \{ \delta y P + y \delta P \} = \alpha \left\{ \delta y P - y \frac{w^2 \delta w}{(1 + w^2)^{1/2}} \right\},$$

$$\delta Z = \alpha \{ \delta z' Q \cos \theta + z' \delta Q \cos \theta + \\ + \delta x' P \sin \theta + x' \delta P \sin \theta \} = \\ = \alpha \left\{ \begin{aligned} &(\delta z \cos \theta - \delta x \sin \theta) Q \cos \theta - \\ &- z' \cos \theta \frac{w^2 \delta w}{(1 + w^2)^{3/2}} + \\ &+ (\delta x \cos \theta + \delta z \sin \theta) P \sin \theta - \\ &- x' \sin \theta \frac{w^2 \delta w}{(1 + w^2)^{1/2}} \end{aligned} \right\}.$$

Подставим сюда выражение δw через вариации $\delta x, \delta y, \delta z$ согласно (П.1). Как отмечалось выше, проварьированные уравнения системы (1) имеют вид (9)

$$\delta \ddot{x} = \delta X + 2\omega \delta \dot{y} + \omega^2 \delta x, \\ \delta \ddot{y} = \delta Y - 2\omega \delta \dot{x} + \omega^2 \delta y, \quad \delta \ddot{z} = \delta Z.$$

Тем самым, членом при δx в первом из уравнений (10) в его правой части является

$$\omega^2 + \alpha \left\{ (Q \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta) - \frac{w^2}{\sqrt{1 + w^2}} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{z' \sin \theta}{1 + w^2} - x' \cos \theta \right) \frac{\xi x' \cos \theta - w z' \sin \theta}{\eta} \right\} \equiv a_{xx},$$

при δy

$$-\alpha \frac{w^2}{\sqrt{1+w^2}} \left(\frac{z' \sin \theta}{1+w^2} - x' \cos \theta \right) \frac{\xi y'}{\eta} \equiv a_{xy},$$

а при δz

$$\alpha \left\{ (P-Q) \sin \theta \cos \theta - \frac{w^2}{\sqrt{1+w^2}} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{z' \sin \theta}{1+w^2} - x' \cos \theta \right) \frac{\xi x' \sin \theta + w z' \cos \theta}{\eta} \right\} \equiv a_{xz}.$$

Членом при δx во втором уравнении (10) является

$$\alpha y' \frac{w^2}{(1+w^2)^{1/2}} \frac{\xi x' \cos \theta - w z' \sin \theta}{\eta} \equiv a_{yx},$$

при δy

$$\omega^2 + \alpha \left[P + \frac{w^2}{\sqrt{1+w^2}} \frac{\xi y'^2}{\eta} \right] \equiv a_{yy},$$

а при δz

$$\alpha y' \frac{w^2}{(1+w^2)^{1/2}} \frac{\xi x' \sin \theta + w z' \cos \theta}{\eta} \equiv a_{yz}.$$

Членом при δx в третьем уравнении (10) является

$$\alpha \left\{ (P-Q) \sin \theta \cos \theta + \frac{w^2}{\sqrt{1+w^2}} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{z' \cos \theta}{1+w^2} + x' \sin \theta \right) \frac{\xi x' \cos \theta - w z' \sin \theta}{\eta} \right\} \equiv a_{zx},$$

при δy

$$\alpha \frac{w^2}{\sqrt{1+w^2}} \left(\frac{z' \cos \theta}{1+w^2} + x' \sin \theta \right) \frac{\xi y'}{\eta} \equiv a_{zy},$$

а при δz

$$\alpha \left\{ (P \sin^2 \theta + Q \cos^2 \theta) + \frac{w^2}{\sqrt{1+w^2}} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{z' \cos \theta}{1+w^2} + x' \sin \theta \right) \frac{\xi x' \sin \theta + w z' \cos \theta}{\eta} \right\} \equiv a_{zz}.$$

Представленные выше выкладки позволяют судить о виде коэффициентов a .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1978.
2. Батраков Ю.В. Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида // Бюл. ИТА. 1957. Т. 6. № 8. С. 524–542.
3. Абалакин В.К. К вопросу об устойчивости точки либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида // Бюл. ИТА. 1957. Т. 6. № 8. С. 543–549.
4. Белецкий В.В. Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // Косм. исслед. 2007. Т. 45. № 5. С. 435–442.
5. Белецкий В.В., Родников А.В. Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 3. С. 569–576.
6. Белецкий В.В., Родников А.В. Точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае мнимого расстояния между притягивающими центрами // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 5. С. 931–940.
7. Родников А.В. Треугольные точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае комплексно-сопряженных масс притягивающего центра // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 2. С. 213–222.
8. Родников А.В. О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 2. С. 295–311.
9. Анпель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960.
10. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968.