

УДК 629.78.

МЕТОД РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИИ ОДНОИМПУЛЬСНОГО ПЕРЕЛЕТА К ГАЛО-ОРБИТЕ ВОКРУГ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ L_2 СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ–ЛУНА

© 2023 г. Чжоу Жуи*

Московский авиационный институт, Москва, Россия

*420790076@qq.com

Поступила в редакцию 18.03.2023 г.

После доработки 28.03.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Рассматривается задача расчета низкоэнергетических импульсных траекторий к гало-орбитам в окрестности точки либрации L_2 системы Земля–Луна. Представлен новый метод расчета траекторий одноимпульсного низкоэнергетического перелета к гало-орбите. Анализируется ограниченная задача четырех тел, в рамках которой учитывается притяжение Земли, Луны и Солнца, а их положение и скорость вычисляются с использованием высокоточного эфемеридного обеспечения. Особое внимание при разработке метода уделено обеспечению его вычислительной устойчивости для расчета траекторий с длительным нахождением космического аппарата в зоне слабой устойчивости вблизи границы сферы Хилла Земли. Приведены результаты расчета одноимпульсных траекторий перелета с низкой околоземной орбиты на гало-орбиты вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна. Проведен анализ зависимости основных характеристик одноимпульсных траекторий от даты полета к гало-орбите.

DOI: 10.31857/S0023420623700152, EDN: PJVLGM

ВВЕДЕНИЕ

Точки либрации и гало-орбиты представляют собой частные решения задачи трех тел [1, 2]. Периодические гало-орбиты в ограниченной круговой задаче трех тел и порожденные ими квазипериодические орбиты в эфемеридной задаче многих тел имеют существенные преимущества перед окололунными орбитами в целом ряде прикладных задач. Космический аппарат (КА) на гало-орбите вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна может использоваться в качестве ретранслятора для обеспечения непрерывной связи с посадочными аппаратами на обратной стороне Луны и с орбитальными лунными КА в зоне отсутствия прямой радиовидимости с Земли. Размещение пилотируемой лунной орбитальной станции на такой гало-орбите позволяет обеспечить расширение окон пуска для обеспечения срочного возврата пилотируемых космических кораблей с этой станции на Землю, срочной посадки в заданные районы поверхности Луны и срочного возвращения из этих районов на лунную орбитальную станцию. В последние годы проведены обширные исследования гало-орбит вокруг коллинеарных точек либрации системы Земля–Луна и траекторий перелета к ним [3–15, 19–21]. В этих исследованиях, в частности, обна-

ружен класс низкоэнергетических слабоустойчивых траекторий, которые позволяют существенно снизить требуемое приращение скорости для перелета с низкой околоземной орбиты на гало-орбиту за счет притяжения Солнца при длительном движении КА вблизи границы сферы Хилла Земли. Найдены низкоэнергетические траектории перелета с низкой околоземной орбиты на гало-орбиты вокруг точек либрации L_1 и L_2 системы Земля–Луна с малыми величинами импульса скорости для выхода на устойчивое инвариантное многообразие к гало-орбите. В предельном случае для реализации таких траекторий необходим единственный импульс скорости для выведения КА с околоземной орбиты на траекторию перелета к гало-орбите, которая принадлежит устойчивому многообразию заданной гало-орбиты. Требуемый отлетный импульс скорости в этом случае близок по величине к импульсу, необходимому для выведения КА на параболическую отлетную от Земли траекторию. Одноимпульсные низкоэнергетические траектории обычно требуют меньшего приращения скорости, чем суммарное приращение скорости на многоимпульсных траекториях и представляют значительный практический интерес. Однако до настоящего времени остается не до конца решенная задача разработки

устойчивого метода расчета таких траекторий с начальной низкой круговой орбиты с заданной высотой и наклоном на заданную гало-орбиту, свойства таких траекторий недостаточно изучены.

Исходя из вышесказанного, цель данного исследования заключается в разработке устойчивого численного метода расчета одноимпульсных низкоэнергетических перелетов между заданными околоземной орбитой и гало-орбитой вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна и применении этого метода для анализа основных свойств таких траекторий. Предлагаемый метод основан на построении семейства траекторий, принадлежащих устойчивому многообразию к заданной гало-орбите, использовании специально введенной метрики для отбора из этого семейства траекторий, проходящих в окрестности заданной начальной низкой околоземной орбиты с близким наклоном, решении трехпараметрической краевой задачи для двухимпульсного перелета с заданной низкой околоземной орбиты в среднюю точку выбранной траектории перелета и использовании полученного решения в качестве начального приближения для решения шестипараметрической краевой задачи вычисления одноимпульсной траектории перелета на заданную гало-орбиту.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГАЛО-ОРБИТ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В разделе приведена методика вычисления гало-орбит и их устойчивых инвариантных многообразий в ограниченной круговой задаче трех тел (ОКЗТТ), рассматривается математическая модель возмущенного движения КА.

Для вычисления номинальных гало-орбит в настоящей работе используется математическая модель ОКЗТТ. В рамках этой математической модели два притягивающихся небесных тела P_1 (Земля) и P_2 (Луна) движутся вокруг общего центра масс (барицентра) по круговым орбитам. Массы тел P_1 и P_2 равны m_1 и m_2 соответственно, масса m_3 третьего тела P_3 (КА) намного меньше m_1 и m_2 , поэтому его влиянием на движение Земли и Луны можно пренебречь. Рассмотрим барицентрическую синодическую систему координат с центром в центре масс системы Земля–Луна, ось X которой направлена от Земли к Луне, ось Z – в направлении вектора кинетического момента системы Земля–Луна, а ось Y дополняет систему до правой. Дифференциальные уравнения движения КА в безразмерных переменных в геоцентрической синодической системе координат в рамках математической модели ОКЗТТ можно записать в следующем виде [1]:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = -U_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = -U_y, \quad \ddot{z} = -U_z, \quad (1)$$

$$\text{где } U = -\frac{1}{2}[(x - \mu)^2 + y^2] - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) -$$

потенциальная функция ОКЗТТ; $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$;

$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – геоцентрическое удаление

КА; $r_2 = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + z^2}$ – селеноцентрическое удаление КА. Здесь в качестве единицы расстояния рассматривается расстояние между Землей и Луной, а в качестве единицы времени – величина, обратная среднему движению Луны.

Для вычисления гало-орбит в настоящей работе проводится дифференциальная коррекция приближенного решения Ричардсона третьего порядка [16, 17], в результате чего гало-орбиты в ОКЗТТ вычисляются с требуемой точностью.

Из-за симметрии математической модели гало-орбиты делятся на северные и южные семейства. Семейство северных гало-орбит абсолютно симметрично семейству южных гало-орбит и отличается только знаком координаты Z . На рис. 1 показано южное семейство гало-орбит вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна.

Для представления положения КА на гало-орбите вводится параметр τ , равный отношению к периоду гало-орбиты длительности движения КА от точки пересечения гало-орбитой плоскости XZ в направлении увеличения Y до заданной точки ($0 \leq \tau \leq 1$). В дальнейшем в этой работе параметр τ условно называется фазой гало-орбиты.

Матрица монодромии гало-орбиты имеет шесть собственных значений со следующими свойствами:

$$\lambda_1 > 1, \quad \lambda_2 = \lambda_1^{-1} < 1, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \quad (2)$$

$$\lambda_5 = \bar{\lambda}_6, \quad |\lambda_5| = |\lambda_6| = 1,$$

где верхняя черта над переменной означает комплексно-сопряженное значение.

Собственный вектор Λ_s матрицы монодромии, соответствующий собственному значению λ_2 , предполагается касательным устойчивому многообразию гало-орбиты. Чтобы определить инвариантное устойчивое многообразие гало-орбиты, необходимо сделать небольшой сдвиг от заданной точки гало-орбиты в направлении этого собственного вектора и проинтегрировать систему в обратном времени. Начальное приближение устойчивого многообразия вблизи периодической орбиты можно получить по следующей формуле:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_s \\ \mathbf{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \pm \varepsilon \Lambda_s, \quad (3)$$

где $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ – координаты и скорость фиксированной точки на гало-орбите; ε – малая величина (в настоящей статье принята раной 10^{-6}).

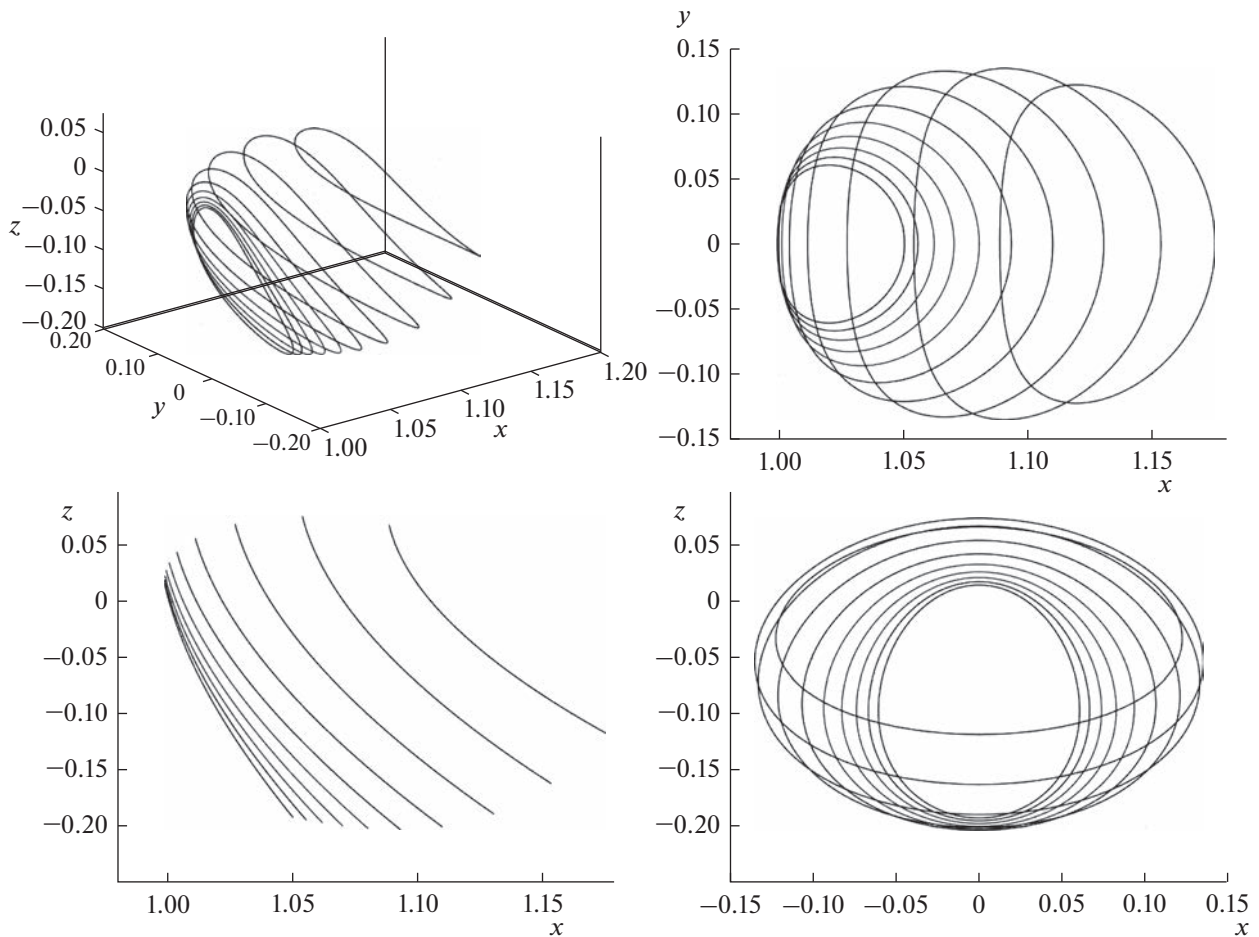


Рис. 1. Семейство южных гало-орбит вокруг точки либрации L_2 в геоцентрической синодической системе координат.

В выражении (3) разные знаки соответствуют разным ветвям устойчивого многообразия. Знак “+” соответствует положительной ветви устойчивого многообразия, а знак “–” — отрицательной. Для анализа слабоустойчивых низкоэнергетических схем перелета мы используем положительную ветвь устойчивого многообразия.

Чтобы применять полученные решения в рамках возмущенной эфемеридной математической модели движения КА, необходимо осуществить переход от синодической системы координат в стандартную инерциальную геоцентрическую экваториальную систему координат J2000 (EME2000). Для этого вычисляются единичные векторы мгновенной синодической системы координат в EME2000 $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ и мгновенная угловая скорость геоцентрического движения Луны ω :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \frac{\mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_M|}, \quad \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M}{|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M|}, \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x, \quad \omega = \frac{|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M|}{|\mathbf{r}_M|^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{r}_M$ — вектор геоцентрического положения Луны, а $\mathbf{v}_M$ — вектор геоцентрической скорости Луны, рассчитанные с использованием эфемерид JPL DE405. После этого векторы положения $\mathbf{r}_{J2000}$ и скорости $\mathbf{v}_{J2000}$ КА относительно Земли в инерциальной геоцентрической экваториальной системе координат J2000 могут быть вычислены по безразмерным векторам положения $\mathbf{r}$ и скорости $\mathbf{v}$ в геоцентрической синодической системе координат следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{J2000} \\ \mathbf{v}_{J2000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z & 0 & 0 & 0 \\ \omega \mathbf{e}_y & -\omega \mathbf{e}_x & 0 & \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_M^* \\ \sqrt{\frac{\mu_E + \mu_M}{r_M^*}} \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где r_M^* — геоцентрическое удаление Луны в момент времени, когда удовлетворяются условия (3); μ_E и μ_M — гравитационные параметры Земли и Луны соответственно.

В возмущенной эфемеридной математической модели в настоящей статье учитываются основные внешние ускорения, включающие в себя ускорения от сил притяжения Земли, Луны и Солнца как материальных точек и ускорение от второй зональной гармоники геопотенциала. В дальнейшем опустим нижний индекс “J2000”, тогда в инерциальной геоцентрической системе координат J2000 уравнения возмущенного движения КА имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ f(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ — вектор геоцентрического положения КА, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ — вектор геоцентрической скорости КА, $\mathbf{x} = (\mathbf{r}^T, \mathbf{v}^T)^T$ — фазовый вектор КА, $a f(\mathbf{r})$ имеет вид:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_E}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a}_M + \mathbf{a}_S + \mathbf{a}_{J_2}, \\ \mathbf{a}_M &= \mu_M \left(\frac{\mathbf{r}_M - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_M}{r_M^3} \right), \\ \mathbf{a}_S &= \mu_S \left(\frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_S}{r_S^3} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mathbf{a}_M$ и $\mathbf{a}_S$ — ускорения от сил притяжения Луны и Солнца как материальных точек; $\mathbf{r}_M$ — вектор геоцентрического положения Луны; $\mathbf{r}_S$ — вектор геоцентрического положения Солнца, $r = |\mathbf{r}|$ — геоцентрическое удаление КА; $r_M = |\mathbf{r}_M|$ — геоцентрическое удаление Луны; $r_S = |\mathbf{r}_S|$ — геоцентрическое удаление Солнца (векторы положения Луны и Солнца рассчитываются с использованием эфемерид JPL DE405); μ_S — гравитационный параметр Солнца, $\mathbf{a}_{J_2}$ — вектор возмущающего ускорения, обусловленного второй зональной гармоникой геопотенциала:

$$\mathbf{a}_{J_2} = \frac{3\mu_E J_2 R_E^2}{2r^5} \begin{pmatrix} \left(5\frac{z^2}{r^2} - 1\right)x \\ \left(5\frac{z^2}{r^2} - 1\right)y \\ \left(5\frac{z^2}{r^2} - 3\right)z \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где J_2 — коэффициент второй зональной гармоники геопотенциала; R_E — экваториальный радиус Земли.

Интегрирование в обратном времени для вычисления устойчивых многообразий проводится с использованием приведенной возмущенной эфемеридной модели (6)–(8) с конечным фазовым вектором (3) в синодической системе координат, который преобразуется в J2000 с использованием выражений (4), (5). Типичный вид полученного та-

ким образом устойчивого многообразия, подходящего для решения поставленной задачи, представлен на рис. 2 (единицей длины на этом рисунке является среднее удаление Луны от Земли — 384400 км).

МЕТОД РЕШЕНИЯ

В разделе приводится описание метода вычисления одноимпульсных траекторий перелета на гало-орбиты. Вводится метрика для отбора траекторий из множества траекторий, принадлежащих устойчивому многообразию заданной гало-орбиты и приводится формулировка задачи для расчета двухимпульсного перелета на выбранную траекторию, принадлежащую устойчивому многообразию. Далее полученная двухимпульсная траектория используется в качестве начального приближения при вычислении одноимпульсного перелета, для чего рассматривается краевая задача расширенной размерности для обеспечения возможности уточнения параметров траектории перелета, обеспечивающих обнуление второго импульса скорости.

Для вычисления одноимпульсной траектории перелета с круговой околоземной орбиты на гало-орбиту с минимальным приращением скорости необходимо, чтобы импульс скорости был направлен вдоль орбитальной скорости КА. В рассматриваемом случае высота и наклонение начальной круговой околоземной орбиты считаются заданными, поэтому направление орбитальной скорости в точке приложения импульса можно регулировать двумя свободными параметрами: долготой восходящего узла этой орбиты Ω_0 и аргументом широты u_0 точки приложения импульса. Для реализации касательного к начальной околоземной орбите импульса скорости необходимо выполнение условий ее касания отлетной траектории. Эти условия состоят из требования равенства высоты перигея и наклонения отлетной траектории высоте и наклонению начальной околоземной орбиты. В конечном итоге для вычисления одноимпульсного низкоэнергетического перелета на гало-орбиту требуется найти траекторию, принадлежащую устойчивому многообразию гало-орбиты, которая проходит на минимальной над Землей высоте, равной заданной высоте начальной околоземной орбиты, имея при этом наклонение, равное наклонению начальной околоземной орбиты. Выбираемыми параметрами при этом будут величина отлетного импульса скорости ΔV_1 , Ω_0 , u_0 , время выведения КА на целевую гало-орбиту t_k , фаза гало-орбиты τ и суммарное время перелета T . Эти шесть параметров должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворить шесть конечных условий формулы (3).

Для решения такой краевой задачи необходимо хорошее начальное приближение. Для выбора

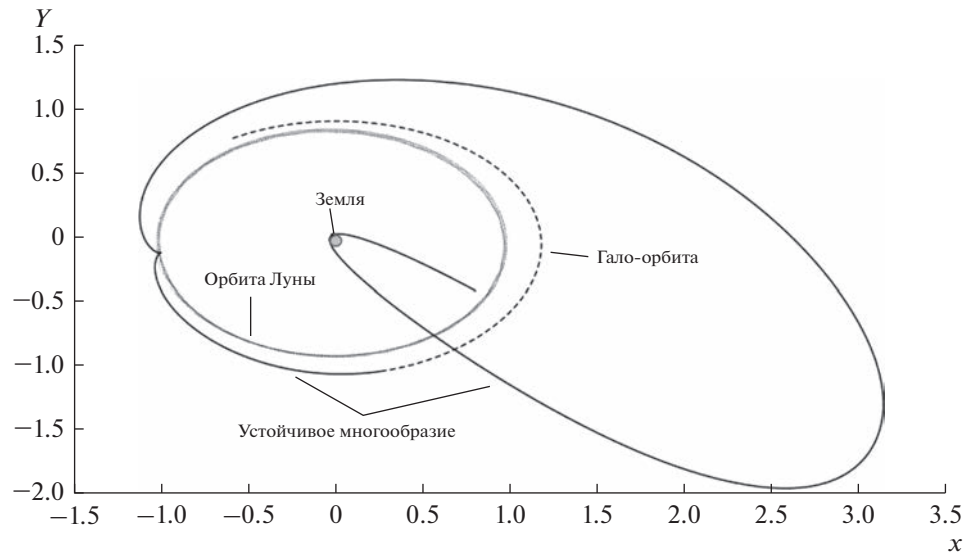


Рис. 2. Вид рассматриваемого устойчивого многообразия в рамках возмущенной эфемеридной модели в системе координат J2000.

начального приближения параметров t_k , τ и T проводится исследование поведения траекторий, принадлежащих устойчивому многообразию гало-орбиты. Для этого система дифференциальных уравнений возмущенного движения (6) интегрируется в обратном направлении по времени от заданного момента времени t_k , при котором выполняются конечные условия выхода на гало-орбиту (3). Для преобразования синодического фазового вектора (3) в систему координат J2000 используется выражение (5). Длительность интегрирования принята равной 120 сут, что гарантированно превышает ожидаемую длительность перелета по одноимпульсной траектории. Интегрирование проводится для различных значений времени t_k и различных фаз гало-орбиты τ в этот момент времени, в результате получается множество траекторий, принадлежащих устойчивому многообразию гало-орбиты. Для определения близости полученных траекторий к тем, которые требуются для одноимпульсного перелета с круговой околоземной орбиты с заданной высотой и наклонением в процессе интегрирования с постоянным шагом по времени (в настоящей работе — 1 сут), вычисляется функционал L , характеризующий отклонение траектории в текущей точке по высоте и наклону от заданной начальной околоземной орбиты. Этот функционал имеет вид

$$L(\tau, \mathbf{r}(t_k - T), \mathbf{v}(t_k - T)) = \sqrt{(|\mathbf{r}(t_k - T)| - r_0)^2 + |\mathbf{r}(t_k - T)|^2 \Delta i^2}, \quad (9)$$

где r_0 — заданный радиус начальной околоземной орбиты; T — длительность перелета от заданной точки до выхода на гало-орбиту; Δi — разница

между наклонением траектории перелета в момент $t_k - T$ и заданным наклонением начальной околоземной орбиты i_0 :

$$\Delta i = \arccos \frac{c_z}{|\mathbf{c}|} - i_0, \quad (10)$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{r}(t_k - T) \times \mathbf{v}(t_k - T) = (c_x, c_y, c_z)^T$. Функционал (9) обращается в нуль при совпадении текущего геоцентрического удаления и оскулирующего наклона перелетной орбиты с заданными радиусом и наклонением начальной околоземной орбиты и монотонно увеличивается при увеличении отклонения этих параметров. Следует отметить, что условие $L = 0$ не означает касания перелетной траектории и начальной околоземной орбиты, так как радиус перигея перелетной траектории может быть меньше r_0 .

По завершении интегрирования каждой траектории, т.е. для каждого набора t_k и τ , вычисляется минимальное значение этого функционала $L_{\min}$ и время перелета T от точки, в которой функционал принимает минимальное значение до гало-орбиты. Таким образом, каждая траектория характеризуется значениями τ , t_k , T и $L_{\min}$.

На следующем этапе из множества полученных траекторий выбираются траектории с малым значением $L_{\min}$, например с $L_{\min} < 40000$ км, фазовый вектор которой можно записать в виде

$$\mathbf{x}_{\text{manifold}}(t_k) = \left(\mathbf{r}_{\text{manifold}}^T(t_k), \mathbf{v}_{\text{manifold}}^T(t_k) \right)^T.$$

В процессе выбора играть роль может не только значение функционала $L_{\min}$, но и значения параметров τ , t_k , T . Выбранная траектория использу-

ется для вычисления двухимпульсной траектории перелета к гало-орбите. Первый импульс скорости выдается в некоторой выбираемой точке начальной околоземной орбиты в момент $t_0 = t_k - T$, а второй — в некоторой точке выбранной траектории, принадлежащей устойчивому многообразию гало-орбиты, в момент t_m : $t_0 < t_m < t_k$. Схема двухимпульсного перелета представлена на рис. 3.

Для расчета двухимпульсной траектории необходимо определить длительность перелета до устойчивого многообразия T_1 ($T_1 = t_m - t_0$) и длительность перелета КА по устойчивому многообразию T_2 ($T_2 = t_k - t_m$). Поскольку целью становится вычисление траектории одноимпульсного перелета, T_1 и T_2 могут быть выбраны произвольно при выполнении ограничения $T_1 + T_2 = T$. Однако для обеспечения хорошей сходимости в последующем процессе вычисления одноимпульсной траектории T_1 и T_2 не должны быть близки к нулю, поэтому в этом исследовании выбрано $T_1 = T_2 = T/2$. При таком выборе на слабоустойчивой траектории второй импульс будет прилагаться на большом геоцентрическом удалении, что позволяет реализовать большое изменение траекторных параметров малым приращением скорости во втором импульсе.

Задача вычисления траектории двухимпульсного перелета сводится к вычислению траектории перелета между околоземной орбитой и заданной точкой входа на устойчивое многообразие. Неизвестными параметрами задачи, которые требуется найти, выступают долгота восходящего узла начальной околоземной орбиты Ω_0 , аргумент широты точки выдачи первого импульса скорости на околоземной орбите u_0 , а также величина отлетного импульса скорости ΔV_1 . Вектор отлетного импульса скорости направляется вдоль вектора орбитальной скорости КА на начальной околоземной орбите в момент t_0 . Параметры ΔV_1 , Ω_0 , u_0 выбираются таким образом, чтобы в момент t_m выполнялись условия:

$$\mathbf{r}(t_m) - \mathbf{r}_{\text{manifold}}(t_m) = 0. \quad (11)$$

Второй импульс скорости в момент t_m рассчитывается как векторная разность между скоростью в заданной точке устойчивого многообразия и скоростью КА в момент подлета к этой точке:

$$\Delta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\text{manifold}}(t_m) - \mathbf{v}(t_m). \quad (12)$$

Подробное описание использованной методики в приложении к задаче расчета двухимпульсных траекторий перелета между околоземной и окололунной орбитами приведено в работе [18].

Таким образом, краевая задача для расчета двухимпульсного перелета свелась к удовлетворению краевых условий (11) за счет выбора параметров $\mathbf{z} = (u_0, \Omega_0, \Delta V_1)$. Чтобы получить одноим-

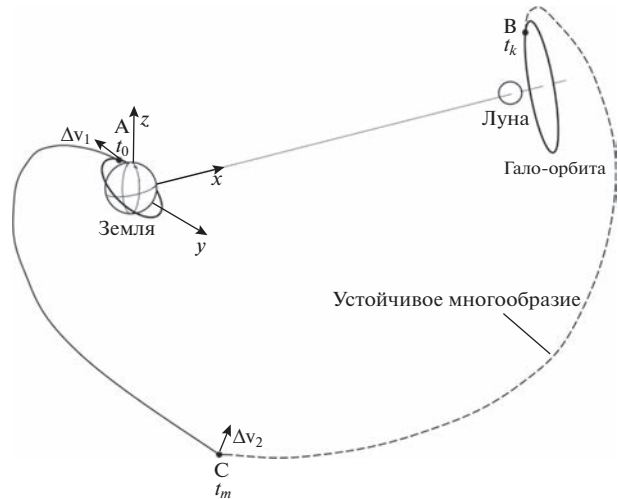


Рис. 3. Схема двухимпульсного перелета между начальной круговой околоземной орбитой и выбираемой точкой устойчивого многообразия гало-орбиты.

пульсную траекторию, необходимо к краевым условиям (11) добавить условия, обеспечивающие равенство нулю второго импульса скорости (12):

$$\mathbf{v}(t_m) - \mathbf{v}_{\text{manifold}}(t_m) = 0. \quad (13)$$

Для удовлетворения этих условий необходимо дополнить вектор выбираемых параметров краевой задачи еще тремя параметрами, которые влияют на траекторию, принадлежащую устойчивому многообразию к целевой гало-орбите. В настоящей статье рассматриваются два варианта выбора параметров этой краевой задачи. Первый соответствует задаче перелета с начальной околоземной орбиты с заданной высотой и наклонением на заданную гало-орбиту, тогда $\mathbf{z} = (u_0, \Omega_0, \Delta V_1, T, t_k, \tau)$. Второй — задаче перелета с начальной околоземной орбиты с заданной высотой на заданную гало-орбиту в заданный момент времени, тогда $\mathbf{z} = (u_0, \Omega_0, \Delta V_1, T, i, \tau)$. В качестве начального приближения для выбираемых параметров используются их значения, полученные при вычислении двухимпульсной траектории.

Системы уравнений (11), (13) в сочетании с упомянутым ранее начальным приближением в обоих вариантах может быть решена с использованием классических методов. В этой статье для ее решения использовался алгоритм Левенберга—Марквардта.

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

В разделе приводятся численные примеры найденных двух- и одноимпульсных траекторий к двум различным гало-орбитам вокруг точки либрации L_2 системы Земля—Луна, включая почти прямолинейную гало-орбиту [8, 22–25], а также

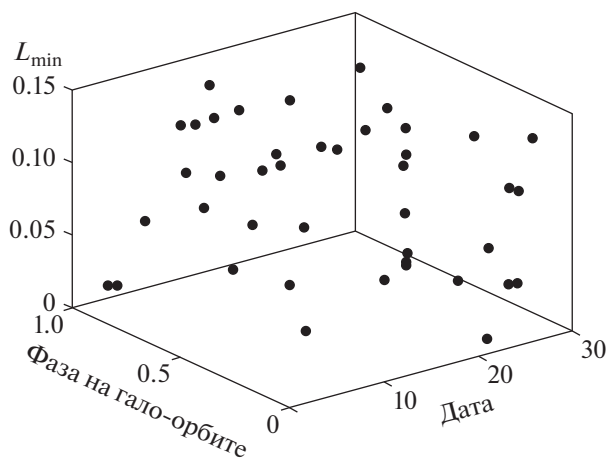


Рис. 4. Зависимость $L_{\min}$ от фазы гало-орбиты и суммарного время перелета.

анализируются свойства полученных траекторий перелета.

Рассмотрим задачу доставки космического аппарата в июне 2026 г. на заданную гало-орбиту вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна. Заданная целевая гало-орбита представляет собой южную гало-орбиту с амплитудой A_z по оси Z равной 20000 км. В синодической системе координат эта гало-орбита определяется безразмерным начальным фазовым вектором (1.117160372, 0, 0.044332712, 0, 0.219723818, 0), ее период равен 14.7635 сут. В начальный момент времени КА находится на низкой круговой околоземной орбите высотой 200 км с наклонением 45° .

Чтобы получить хорошее начальное приближение времени t_k , фазы гало-орбиты τ и суммарного времени перелета T , функционал (9) вычисляется при изменении t_k с 1 июня 2026 г. в 00.00.00 по 1 июля 2026 г. в 00.00.00 UTC с шагом в 1 сут, $0 \leq \tau \leq 1$, $80 \leq T \leq 120$ сут [19]. Зависимость безраз-

мерного значения $L_{\min}$ от фазы гало-орбиты и суммарного времени перелета показана на рис. 4 (за масштаб длины здесь и далее на графиках принято среднее удаление Луны от Земли 384400 км).

Для дальнейшего анализа выбрана траектория с $L_{\min} = 0.043776$, временем прибытия на гало-орбиту 3 июня 2026 г. в 00.00.00 UTC, $\tau = 0.0528$, $T = 93$ сут. Для этого варианта были вычислены двухимпульсная и одноимпульсная траектории, параметры которых показаны в табл. 1 и 2 соответственно.

Вид полученной траектории одноимпульсного перелета в безразмерных координатах приведен на рис. 5.

В случае изменения наклонения начальной околоземной орбиты в пределах определенного диапазона соответствующая траектория одноимпульсного перелета может быть рассчитана с использованием того же начального приближения. Зависимость требуемого импульса скорости от наклонения начальной околоземной орбиты показана на рис. 6. Видно, что при изменении наклонения начальной орбиты от $\sim 35^\circ$ до 55° требуемый импульс скорости изменяется не более чем на 3 м/с.

В табл. 3 приведены результаты расчета одноимпульсных траекторий выведения КА на заданную гало-орбиту в заданный момент времени t_k (второй вариант краевой задачи). Время подлета равно 00.00.00 UTC, а дата подлета перебирается с шагом в одни сутки в течение июня 2026 г. На отсутствующие в табл. 3 даты решения краевой задачи найти не удалось. На некоторые даты (3, 15, 20–27 июня) удалось найти по два решения. Из табл. 3 видно, что величина отлетного импульса скорости на рассматриваемом интервале времени подлета изменяется не более чем на 8.3 м/с.

На рис. 7 представлена зависимость наклонения начальной околоземной орбиты от времени

Таблица 1. Параметры начальной двухимпульсной траектории перелета к гало-орбите

u_0 , град	Ω_0 , град	ΔV_1 , км/с	ΔV_2 , км/с	$\Delta V_1 + \Delta V_2$, км/с
8.5632726	133.6257639	3.1991534	0.1226633	3.3218167

Таблица 2. Параметры одноимпульсной траектории перелета к гало-орбите

u_0 , град	Ω_0 , град	ΔV_1 , км/с	T , сут	t_k	τ
158.2279722	−24.4439507	3.1985209	94.3814972	3.VI. 2026 01:33:07.14	0.0496473
Невязки F					
Δx , м	Δy , м	Δz , м	Δv_x , м/с	Δv_y , м/с	Δv_z , м/с
0.17774810	0.0609830	0.0328266	$-1.22 \cdot 10^{-07}$	$-1.67 \cdot 10^{-08}$	$-6.91 \cdot 10^{-10}$

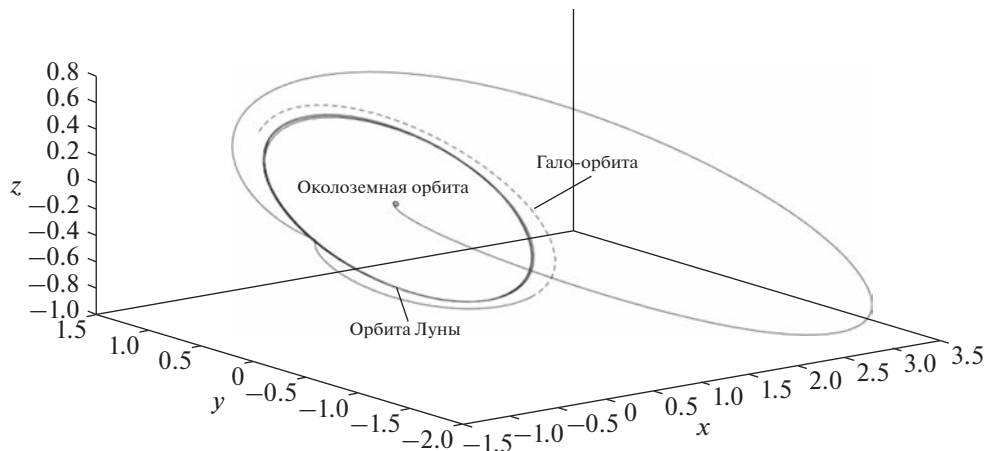


Рис. 5. Траектория одноимпульсного перелета к гало-орбите в системе координат J2000.

Таблица 3. Результаты расчетов траектории одноимпульсного перелета в июне 2026 г.

Дата	u_0 , град	Ω_0 , град	ΔV_1 , км/с	T , сут	i , град	τ
1	147.211802	-10.15784146	3.198662717	91.75891858	30.19644083	0.30541403
3	157.6187739	-23.93553459	3.198684436	94.14318517	43.79220254	0.054957676
3	154.6445865	-45.7376915	3.202419109	97.9432365	61.44824335	0.966002115
4	160.6928459	-33.78171973	3.198626309	96.02442053	65.79036142	0.960543937
7	116.2822029	9.196244849	3.202106311	98.50539511	27.23263114	0.778016654
10	155.8944137	-45.42112063	3.201489757	102.872579	73.51096953	0.366564837
12	88.50715984	22.18613751	3.20618772	113.9768558	26.48203633	0.838800437
13	156.9193554	-35.10896341	3.198790895	104.9769356	73.67469282	0.127412693
15	157.5636041	-41.07058254	3.201105686	107.4125283	64.14402471	0.776318891
15	320.3291654	2.7137075	3.200647023	92.80242547	25.81667537	0.87618438
19	111.6906253	14.71138481	3.20340118	98.6204266	29.58608574	0.052328515
20	157.9374391	-40.82059196	3.212733607	102.8127365	72.50461667	0.331110003
20	143.8307576	-3.077697462	3.205265282	89.34717797	31.44125651	0.015950892
21	151.0048703	-2.352163822	3.203551651	85.40251037	29.76102025	-0.000039769
21	161.1912672	-37.58940231	3.206973184	95.85025372	81.59052775	0.370646886
22	163.6142506	-33.1227754	3.204574188	92.38961206	86.19850868	0.407619136
22	158.3480673	-3.696198025	3.202620428	84.13662775	29.60262929	0.993160011
23	165.1411146	-29.61577084	3.203075402	90.9085509	88.0732667	0.446973382
23	164.2212393	-5.772197799	3.20173613	84.39740942	31.10001174	0.997972829
24	168.2911376	-7.439412711	3.20095334	85.35542145	33.44512069	0.012817471
24	166.2329871	-27.09276287	3.202284701	90.62083926	88.91487205	0.491595072
25	170.6952164	-8.429868031	3.200376261	86.56945978	35.7376638	0.039558524
25	166.8922697	-25.77106113	3.20190512	91.07193555	89.3569737	0.54471078
26	171.5818849	-8.799770062	3.200136547	87.71124503	36.90085879	0.083418699
26	166.9504378	-26.21171698	3.201984007	92.19617061	89.64369815	0.611559384
27	170.3628567	-8.450086485	3.200504774	88.52458305	35.59787838	0.157831945
27	165.4128097	-30.62398467	3.203349503	95.32764966	88.00660166	0.708180104
28	162.72577	-5.730694691	3.202056904	89.6571816	30.88427246	0.300899886

Таблица 4. Параметры двухимпульсной траектории перелета на NRHO

u_0 , град	Ω_0 , град	ΔV_1 , км/с	ΔV_2 , км/с	$\Delta V_1 + \Delta V_2$, км/с
319.2675005	351.3852813	3.2044983	0.1110967	3.3155950

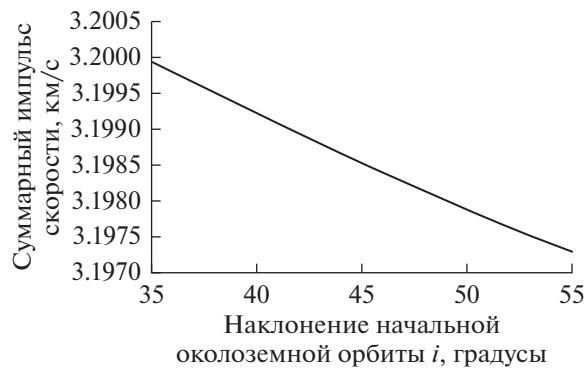


Рис. 6. Зависимость импульса скорости от наклона начальной околоземной орбиты.

подлета к гало-орбите при изменении этого времени в пределах одних суток (от 00.00.00 UTC до 24.00.00 UTC 3 июня 2026 г.). На этом интервале времени подлета существуют два решения. На решении А наклонение начальной околоземной орбиты изменяется от 43.8° до 54.8°, а на решении В — от 61.4° до 65.8°.

В качестве следующего примера рассмотрим задачу перелета на почти прямолинейную гало-орбиту (англ. Near Rectilinear Halo Orbit — NRHO). NRHO — это подмножество гало-орбит, обеспечивающих периодическое сближение с Лунной на расстояние в несколько тысяч километров. NRHO рассматривается как целевая орбита в перспективных лунных программах [22–25], в частности, в пилотируемой лунной программе США Artemis (“Артемида”) [26].

Рассмотрим перелет на NRHO вокруг точки либрации L_2 , которая в синодической системе координат определяется безразмерным начальным фазовым вектором (0.99944790, 0, 0.00987520, 0, 1.53793698, 0) и имеет период 6.75934 сут. Будем рассматривать траектории с подлетом к этой орбите 15 июня 2026 г., время подлета и фаза гало-орбиты в момент подлета должны быть вычислены. Будем считать, что в начальный момент времени КА находится на круговой околоземной орбите высотой 200 км с наклонением 19.33° (север-

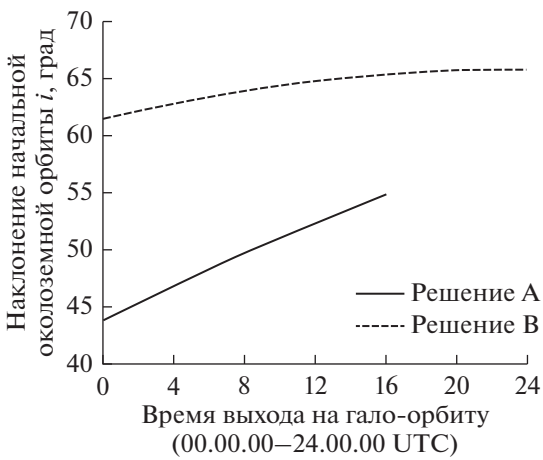


Рис. 7. Зависимость наклона начальной околоземной орбиты от времени подлета к гало-орбите.

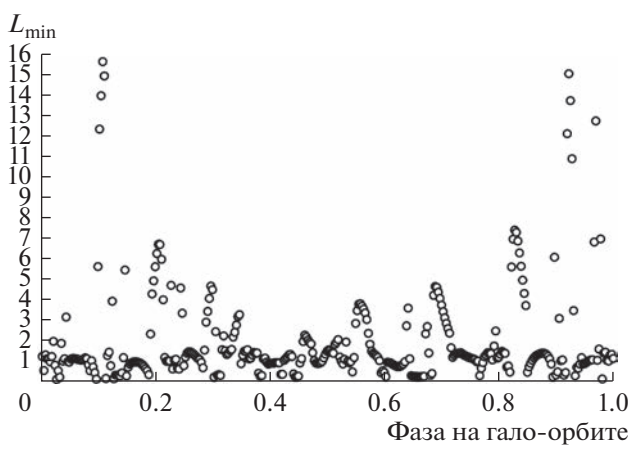


Рис. 8. Зависимость функционала $L_{\min}$ от фазы гало-орбиты τ в момент подлета.

ная широта космодрома Вэнъчан, Китай (англ. China Wenchang Spacecraft Launch Site).

На рис. 8 приведена зависимость минимального безразмерного значения функционала (9) от фазы гало-орбиты τ в момент полета.

В качестве начального приближения выберем траекторию с минимальным значением $L_{\min}$. Па-

Таблица 5. Параметры одноимпульсной траектории перелета к NRHO

u_0 , град	Ω_0 , град	ΔV_1 , км/с	T , сут	t_k	τ
219.0356989	97.8385133	3.203380154	94.79436766	14.VI.2026 22:13:23.53	0.9812228
Невязки F					
Δx , м	Δy , м	Δz , м	Δv_x , м/с	Δv_y , м/с	Δv_z , м/с
–1.8907719	2.5390708	0.2414302	$1.76 \cdot 10^{-06}$	$-2.84 \cdot 10^{-07}$	$-2.73 \cdot 10^{-07}$

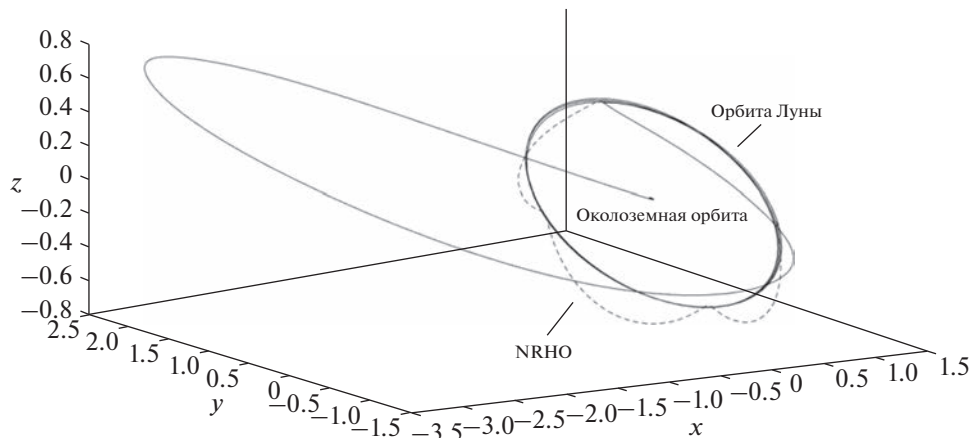


Рис. 9. Одноимпульсная траектория перелета к NRHO в системе координат J2000.

параметры двухимпульсной траектории перелета на NRHO с использованием этого решения представлены в табл. 4.

Параметры одноимпульсной траектории, полученные с использованием этой двухимпульсной траектории в качестве начального приближения, приведены в табл. 5, а внешний вид одноимпульсной траектории представлен на рис. 9.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен новый устойчивый численный метод, позволяющий вычислять одноимпульсные слабоустойчивые траектории перелета с начальной круговой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна.

Для обеспечения вычислительной устойчивости метода решение задачи проводится в три этапа:

1. Вычисляется начальное приближение к траектории перелета интегрированием в обратном времени уравнений возмущенного движения для вычисления множества траекторий, принадлежащих устойчивому многообразию гало-орбиты. При вычислении этого множества перебирается фаза гало-орбиты τ и время подлета к гало орбите t_k . На рассчитываемых траекториях вычисляется функционал $L_{\min}$, характеризующий промах по высоте и наклонению относительно заданных высоты и наклонения начальной околоземной орбиты. Из полученного множества траекторий выбирается траектория с малым значением $L_{\min}$. Время T достижения на этой траектории функционалом (9) значения $L_{\min}$ принимается за начальное приближение для продолжительности перелета.

2. Рассчитывается двухимпульсная траектория перелета в среднюю точку выбранной в п. 1 траектории. Для этого вычисляется геоцентрический

вектор положения такой траектории в момент времени $t_m = t_k - T/2$, и выбором начальных значений долготы восходящего узла Ω_0 , аргумента широты u_0 и величины первого импульса скорости ΔV_1 обеспечивается попадание траектории перелета с начальной околоземной орбиты в момент t_m в заданную точку намеченной траектории, принадлежащей устойчивому многообразию. Первый импульс скорости направляется вдоль вектора орбитальной скорости КА на начальной орбите, а второй импульс скорости вычисляется как разность скоростей движения КА по выбранной траектории устойчивого многообразия и скорости КА при подлете к этой траектории в момент t_m .

3. Рассчитывается одноимпульсная траектория перелета на гало-орбиту с использованием в качестве начального приближения двухимпульсной траектории, полученной в п. 2. Для этого решается краевая задача, в число краевых условий которой, кроме промаха по координатам в момент t_m , добавляется промах по компонентам скорости в этот же момент, а к трем выбираемым параметрам краевой задачи Ω_0 , u_0 , ΔV_1 добавляется либо T , t_k , τ (при заданном наклонении начальной околоземной орбиты), либо T , i , τ (при заданном времени подлета к гало-орбите).

В результате применения разработанного метода удалось получить одноимпульсные траектории перелета к гало-орбитам с низких околоземных орбит различного наклонения в диапазоне от 26° до 90° . Характерной особенностью полученных траекторий представляется слабая зависимость величины импульса скорости от других параметров траектории перелета. Требуемый отлётный импульс скорости близок по величине к импульсу, требуемому для выведения КА на параболическую отлётную траекторию, а его вариация на множестве полученных траекторий не превышает 8.3 м/с (менее 0.4%).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел / пер. с англ.; под ред. Г.Н. Дубошина. М.: Наука, 1982. 657 с.
2. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
3. Folta D.C., Pavlak T.A., Haapala A.F. et al. Earth–Moon libration point orbit stationkeeping: Theory, modeling, and operations // *Acta Astronaut.* 2014. V. 94. Iss. 1. P. 421–433. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.01.022>
4. Shan G., Wenyan Z., Weiguang L. et al. Trajectory analysis and design for relay satellite at Lagrange L_2 point of Earth–Moon system // *J. Deep Space Exploration.* 2017. V. 4. Iss. 2. P. 122–129. <https://doi.org/10.15982/j.issn.2095-7777.2017.02.004>
5. Folta D.C., Pavlak T.A., Haapala A.F. et al. Earth–Moon libration point orbit stationkeeping: Theory, modeling, and operations // *Acta Astronaut.* 2014. V. 94. Iss. 1. P. 421–433. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.01.022>
6. Gordon D.P. Transfers to earth-moon L_2 halo orbits: Master Thesis of Science in Aeronautics and Astronautics. Purdue University West Lafayette, Indiana, 2008. 182 p.
7. Wu W., Tang Y., Zhang L., Qiao D. Design of communication relay mission for supporting lunar-farside soft landing // *J. Science China Information Sciences.* 2018. V. 61. Iss. 4. 14 p. <https://doi.org/10.1007/s11432-017-9202-1>
8. Davis D., Bhatt S., Howell K. et al. Orbit maintenance and navigation of human spacecraft at cislunar near rectilinear halo orbits // 27th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. 5–9 Feb. 2017, San Antonio, Texas. 2017. Art. ID. JSC-CN-38626. 21 p.
9. Starchville T.F., Melton R.G. Optimal low-thrust trajectories to Earth–Moon L_2 Halo orbits (circular problem). // *Advances in the Astronautical Sciences.* 1997. V. 97. P. 1741–1756.
10. Parrish N.L., Parker J.S., Hughes S.P. et al. Low-thrust transfers from distant retrograde orbits to L_2 halo orbits in the Earth–Moon system // 6th Intern. Conf. Astrodynamics Tools and Techniques. 14–17 March 2016, Darmstadt. 2016. Art. ID. GSFC-E-DAA-TN30224. 10 p.
11. An R., Wang M., Liang X.G. Transfer trajectory optimal design for Earth–Moon L_2 based on invariant manifolds // *J. Deep Space Exploration.* 2017. V. 4. Iss. 3. P. 252–257.
12. Ivanyukhin A.V., Petukhov V.G. Low-Energy Sub-Optimal Low-Thrust Trajectories to Libration Points and Halo-Orbits // *Cosmic Research.* 2019. V. 57. Iss. 5. P. 378–388. <https://doi.org/10.1134/S0010952519050022>
13. Lei H., Xu B., Sun Y. Earth–Moon low energy trajectory optimization in the real system // *Advances in Space Research.* 2013. V. 51. Iss. 5. P. 917–929. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2012.10.011>
14. Parker J.S., Born G.H. Modeling a low-energy ballistic lunar transfer using dynamical systems theory // *J. Spacecraft and Rockets.* 2008. V. 45. Iss. 6. P. 1269–1281. <https://doi.org/10.2514/1.35262>
15. Qi Y., Xu S. Earth–Moon transfer with near-optimal lunar capture in the restricted four-body problem // *Aerospace Science and Technology.* 2016. V. 55. P. 282–291.
16. Richardson D.L. Halo orbit formulation for the ISEE-3 mission // *J. Guidance and Control.* 1980. V. 3. Iss. 6. P. 543–548.
17. Richardson D.L. Analytic construction of periodic orbits about the collinear points // *Celestial mechanics.* 1980. V. 22. Iss. 3. P. 241–253.
18. Петухов В.Г., Чжоу Ж. Расчет возмущенной импульсной траектории перелета между околоземной и окололунной орбитами методом продолжения по параметру // *Вестник Московского авиационного университета.* 2019. Т. 26. Iss. 2. P. 155–165.
19. Kokou P., Le Bihan B., Receveur J.B. et al. Computing an optimized trajectory between Earth and an EML2 halo orbit // *Proc. 2014 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conf. (CGNCC).* Yantai, China, 8–10 Aug. 2014. Art. ID. 0450.
20. Belbruno E., Carrico J. Calculation of weak stability boundary ballistic lunar transfer trajectories // *Astrodynamics Specialist Conf.* 2000. Art. ID. AIAA 2000-4142. 11 p. <https://doi.org/10.2514/6.2000-4142>
21. Petukhov V.G., Ivanyukhin A.V. Low-energy trajectories to the Earth–Moon libration points and to halo-orbits // *IAA/AAS SciTech Forum 2019 on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials.* Moscow. V. 174: *Advances in the Astronautical Sciences Series.* 2021. P. 81–94.
22. Guzzetti D., Zimovan E.M., Howell K.C. et al. Station-keeping analysis for spacecraft in lunar near rectilinear halo orbits // 27th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. American Astronautical Society. 5–9 Feb. 2017, San Antonio, TX, USA. 2017. 20 p.
23. Zimovan E.M., Howell K.C., Davis D.C. Near rectilinear halo orbits and their application in cis-lunar space // 3rd IAA Conf. Dynamics and Control of Space Systems. Moscow, Russia. 2017. P. 20–40.
24. Whitley R.J., Davis D.C., Burke L.M. et al. Earth–Moon near rectilinear halo and butterfly orbits for lunar surface exploration // *Proc. AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conf.* 19–23 Aug. 2018, Snowbird, UT, USA.
25. Zimovan-Spreen E.M., Howell K.C., Davis D.C. Near rectilinear halo orbits and nearby higher-period dynamical structures: orbital stability and resonance properties // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 2020. V. 132. Iss. 5. Art. ID. 28. 25 p. <https://doi.org/10.1007/s10569-020-09968-2>
26. Smith M., Craig D., Herrmann N. et al. The Artemis program: an overview of NASA's activities to return humans to the Moon // *Proc. 2020 IEEE Aerospace Conf. Big Sky, MT, USA.* 7–14 Mar. 2020. 10 p.