КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2023, том 61, № 5, с. 406–419

УДК 629.78

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ С МАЛОЙ ТЯГОЙ МЕЖДУ КОЛЛИНЕАРНЫМИ ТОЧКАМИ ЛИБРАЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ПЛАНЕТ

© 2023 г. В. Г. Петухов[1], *, С. У. Юн[2], **

[1]Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики Московского авиационного института, Москва, Россия

[2]Московский авиационный институт, Москва, Россия

**PetukhovVG@mai.ru*

***YunSU@mai.ru*

Поступила в редакцию 20.03.2023 г.
После доработки 26.03.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Цель исследования заключается в оптимизации межпланетного перелета космического аппарата с малой тягой с использованием коллинеарных точек либрации L_1 и L_2 для стыковки геоцентрического или планетоцентрического участков траектории с гелиоцентрическом участком. Рассматривается задача оптимизации возмущенного гелиоцентрического участка траектории межпланетного перелета с малой тягой в рамках эфемеридной модели четырех тел, включающей Солнце, Землю, планету назначения и космический аппарат. Для оптимизации траекторий используется непрямой подход, основанный на использовании принципа максимума Понтрягина и метода продолжения. Показывается возможность сокращения требуемых затрат характеристической скорости по сравнению с оценками, полученными с применением метода точечных сфер действия.

DOI: 10.31857/S0023420623700127, **EDN:** PJLNXO

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно на начальном этапе проектирования межпланетных траекторий космических аппаратов (КА) используется метод точечных сфер действия (ТСД). В рамках допущений этого метода при расчете гелиоцентрических участков траектории пренебрегается протяженностью сферы действия. При этом точная стыковка планетоцентрических и гелиоцентрических участков траектории не используется. Вектор положения КА в начале и конце гелиоцентрического участка считается совпадающим с вектором положения планеты отправления в начальный момент времени и планеты прибытия в конечный момент времени соответственно, вектор гелиоцентрической скорости КА в начальный момент времени принимается равным сумме вектора гелиоцентрической скорости планеты отправления в этот момент времени и отлетного гиперболического избытка скорости КА, а вектор гелиоцентрической скорости КА в конечный момент времени – сумме гелиоцентрической скорости планеты назначения в этот момент времени и подлетного гиперболического избытка скорости КА. Для расчета гелиоцентрических и планетоцентрических участков траектории используется математическая модель движения КА в центральном ньютоновском поле тяготения. Метод ТСД широко используется при проведении проектно-баллистического анализа межпланетных миссий с большой и малой тягой и во многих случаях дает удовлетворительные оценки основных траекторных параметров. Однако в рамках этого метода не рассчитывается непрерывная траектория межпланетного перелета, а пренебрежение притяжением Солнца на планетоцентрических участках и притяжением планет на гелиоцентрических участках может приводить к существенной методической погрешности, особенно при расчете межпланетных траекторий с малой тягой и малыми величинами отлетного и подлетного гиперболического избытка скорости. Именно такая ситуация возникает при расчете межпланетных траекторий, включающих планетоцентрические участки спиральной раскрутки при отлете с начальной орбиты вокруг планеты отправления и скрутки при выходе на конечную орбиту вокруг планеты назначения.

Поэтому актуальной представляется задача разработки подхода к оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой, который бы позволил, с одной стороны, получить более реалистичные результаты, а с другой стороны, был бы достаточно простым и обеспечивал возможность

Рис. 1. Схема межпланетного перелета КА с малой тягой между точками либрации ESL_2 и JSL_1.

его применения на самых ранних стадиях проектирования космических миссий.

Устранить недостатки метода ТСД позволяет переход к более полной модели движения, учитывающей притяжение Солнца и планет на всех участках траектории. Разумеется, при использовании таких математических моделей возникает большее число вариантов решения, что осложняет проектирование космических миссий с их использованием, но и предоставляет больше возможностей для их оптимизации.

Существует большое количество работ по проектированию схем перелета межпланетных КА с использованием особенностей задачи трех или четырех тел, включая использование инвариантных многообразий точек либрации и орбит вокруг них [1–5]. Применение таких схем полета к межпланетным миссиям привело к новой концепции низкоэнергетических межпланетных перелетов Interplanetary Superhighway (межпланетная магистраль) [6, 7]. Применение таких схем перелета приводит, как правило, к значительному увеличению длительности перелета, а их расчет становится достаточно трудоемким.

В настоящей работе рассматривается другой подход решения задачи оптимизации межпланетной траектории КА с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ) с учетом притяжения Солнца и планет на всех участках траектории. В рамках этого подхода планетоцентрические и гелиоцентрический участки стыкуются в коллинеарных точках либрации у планет отправления и прибытия. Рассматриваемая схема представляет интерес для межпланетных траекторий, включающих планетоцентрические участки раскрутки и скрутки с малой тягой, таких как траектории марсианской пилотируемой экспедиции с использованием ЭРДУ в качестве маршевой двигательной установки марсианского комплекса [8]. Разумеется, стыковка в точках либрации не считается оптимальной, но ее можно использовать в качестве начального приближения для поиска оптимальных точек стыковки планетоцентрических и гелиоцентрических участков траектории с использованием метода, аналогичного методу, представленному в работе [9] для сквозной оптимизации траектории перелета между околоземной и окололунной орбитами. На рис. 1 представлена схема перелета с малой тягой между точкой либрации L_2 системы Солнце–Земля (ESL_2) и точкой либрации L_1 системы Солнце–Юпитер (JSL_1). На этом рисунке, в частности, показаны оскулирующие гелиоцентрические орбиты этих точек либрации на моменты отправления и прибытия. Видно, что радиус афелия оскулирующей орбиты ESL_2 больше радиуса орбиты Земли, а радиус перигелия оскулирующей орбиты JSL_1 существенно меньше радиуса орбиты Юпитера. Это позволяет надеяться, что требуемые затраты характеристической скорости между этими точками либрации окажутся заметно меньше, чем затраты характеристической скорости на гелиоцентрический участок перелета Земля–Юпитер в рамках метода ТСД.

Для оценки перспективности рассматриваемого подхода в настоящей статье ограничимся только оптимизацией гелиоцентрических траекторий перелета с малой тягой между точками либрации у планеты отправления и планеты назначения. Вопросы оптимизации планетоцентрических траекторий и сквозной оптимизации всей межпланетной траектории планируем рассмотреть в последующих работах.

На всех участках траектории учитывается притяжение Солнца, планеты отправления, планеты прибытия и, при необходимости, притяжение других небесных тел. Рассматривается задача оптимизации гелиоцентрического участка траектории с малой тягой между точками либрации планет в рамках математических моделей

идеально-регулируемого двигателя ограниченной мощности и двигателя ограниченной тяги. Для оптимизации траекторий используется непрямой подход, основанный на использовании принципа максимума и метода продолжения по гравитационному параметру. Приводится сравнение полученных оптимальных гелиоцентрических траекторий между точками либрации и траекторий с применением метода ТСД.

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОГО УЧАСТКА МЕЖПЛАНЕТНОЙ ТРАЕКТОРИИ С КОНЕЧНОЙ ТЯГОЙ

Рассмотрим задачу минимизации затрат топлива на перелете между двумя заданными точками либрации за фиксированное время Δt с использованием уравнений движения в декартовых координатах. Уравнения движения КА в инерциальной гелиоцентрической системе координат и краевые условия такой задачи могут быть представлены в виде:

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v},\quad \frac{d\mathbf{v}}{dt}=\Omega_{\mathbf{r}}+\delta\frac{T}{m}\mathbf{e}_T,\quad \frac{dm}{dt}=-\delta\frac{T}{c},\\ \mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}_0,\quad \mathbf{v}(t_0)=\mathbf{v}_0,\quad m(t_0)=m_0,\\ \mathbf{r}(t_f)=\mathbf{r}_f,\quad \mathbf{v}(t_f)=\mathbf{v}_f,\end{gathered}\tag{1}$$

где $\Omega=\Omega_0+\Omega_p$ – силовая функция ($\Omega_0=\mu_s/r$ – основная часть силовой функции, связанная с центральным притягивающим телом (Солнцем), $\Omega_p=\sum_{j=1}^{2}\mu_j\left[\frac{\mathbf{r}_j-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}|^3}-\frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3}\right]$ – возмущающая часть силовой функции, связанная с притяжением удаленных небесных тел (планет); $\mathbf{r}$ – вектор положения КА; $\mathbf{v}$ – вектор скорости КА; μ_s – гравитационный параметр Солнца; $r=|\mathbf{r}|$, $\mathbf{r}_j$, μ_j – векторы положения и гравитационные параметры Земли ($j=1$) и целевой планеты ($j=2$); δ – релейная функция тяги ($\delta=1$ при включенном двигателе и $\delta=0$ при выключенном); T – тяга; $\mathbf{e}_T$ – единичный вектор в направлении тяги; m – масса КА; c – скорость истечения; t – время, нижний индекс “0” означает, что переменная относится к начальной точке траектории, а нижний индекс “f” – что переменная относится к конечной точке траектории, $t_f=t_0+\Delta t$.

Рассмотрим следующий функционал:

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\delta\frac{T}{c}\mathrm{d}t\to\min,\tag{2}$$

соответствующий задаче минимизации затрат топлива. Задачу с таким функционалом будем называть задачей с ограниченной тягой, или ОТ-задачей. Применяя принцип максимума, можно записать функцию Понтрягина в виде:

$$H=-\delta\frac{T}{c}+\mathbf{p}_{\mathbf{r}}^T\mathbf{v}+\mathbf{p}_{\mathbf{v}}^T\Omega_{\mathbf{r}}+\delta\frac{T}{m}\mathbf{p}_{\mathbf{v}}^T\mathbf{e}_T-\delta\frac{T}{c}p_m.\tag{3}$$

Следующее оптимальное управление обеспечивает максимум H по направлению и величине тяги:

$$\mathbf{e}_T=\frac{\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{p_v},\quad \delta=\frac{1+\operatorname{sign}S}{2},\quad S=\frac{p_v}{m}-\frac{p_m+1}{c}.\tag{4}$$

Подстановка этого оптимального управления в функцию Понтрягина приводит к следующему гамильтониану:

$$H=\mathbf{p}_{\mathbf{r}}^T\mathbf{v}+\mathbf{p}_{\mathbf{v}}^T\Omega_{\mathbf{r}}+\delta TS.\tag{5}$$

Уравнения оптимального движения рассматриваемой задачи оптимального управления имеют вид:

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{r}}}=\mathbf{v},\quad \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}=\Omega_{\mathbf{r}}+\delta T\dfrac{\partial S}{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{v}}},\\ \dfrac{dm}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_m}=\delta T\dfrac{\partial S}{\partial p_m},\\ \dfrac{d\mathbf{p}_{\mathbf{r}}}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial\mathbf{r}}=-\Omega_{\mathbf{rr}}\mathbf{p}_{\mathbf{v}},\quad \dfrac{d\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial\mathbf{v}}=-\mathbf{p}_{\mathbf{r}},\\ \dfrac{dp_m}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial m}=-\delta T\dfrac{\partial S}{\partial m}.\end{cases}\tag{6}$$

С учетом условия трансверсальности, граничные условия для задачи перелета между точками либрации на гелиоцентрическом участке траектории можно записать в виде:

$$\begin{cases}\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}(t_0)=\mathbf{v}_0,\ m(t_0)=m_0,\\ \mathbf{r}(t_f)=\mathbf{r}_f,\ \mathbf{v}(t_f)=\mathbf{v}_f,\ p_m(t_f)=0.\end{cases}\tag{7}$$

Задача оптимального управления (1), (2) с использованием принципа максимума сводится к двухточечной краевой задаче (6), (7). Эта краевая задача может быть формально представлена как система нелинейных уравнений для невязок $\mathbf{f}$, для решения которой необходимо вычислить вектор неизвестных начальных значений сопряженных переменных $\mathbf{z}$. Таким образом, необходимо найти такую $\mathbf{z}$, для которой $\mathbf{f}(\mathbf{z})=0$, где

$$\mathbf{f}=\begin{bmatrix}\mathbf{r}(t_f)-\mathbf{r}_f\\ \mathbf{v}(t_f)-\mathbf{v}_f\\ p_m(t_f)\end{bmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}\mathbf{p}_{\mathbf{r}}(t_0)\\ \mathbf{p}_{\mathbf{v}}(t_0)\\ p_m(t_0)\end{bmatrix}.\tag{8}$$

Эффективным методом решения такого класса краевых задач выступает метод продолжения [10–14]. Для обеспечения возможности проведения оптимизации траектории без необходимости задания начального приближения начальных значений сопряженных переменных $\mathbf{p}_{\mathbf{r}0}$, $\mathbf{p}_{\mathbf{v}0}$, p_{m0} требуется последовательность оптимизации траекторий с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности (ОМ-задачи) и с двигателем ограниченной тяги. В работах [10–12] приведены методы решения задачи оптимизации межпланетного перелета ОМ-траекторий при использовании метода продолжения по гравитационному параметру, позволяющего находить экстремали ОМ-задачи с заданной угловой дальностью с нулевым начальным приближением для неизвестных параметров.

Для продолжения решения ОМ-задачи в решения ОТ-задач (гомотопии между ОМ- и ОТ-траекториями), используется следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{0\mathbf{r}} + \tau\Omega_{p\mathbf{r}} + \dfrac{1-\tau+\tau\delta T}{1-\tau+\tau m p_v}\mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \\ \dfrac{d\mathbf{p}_{\mathbf{r}}}{dt} = -\Omega_{0\mathbf{rr}}\mathbf{p}_{\mathbf{v}} - \tau\Omega_{p\mathbf{rr}}\mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \\ \dfrac{d\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{dt} = -\mathbf{p}_{\mathbf{r}}, \\ \dfrac{dm}{dt} = -\tau\delta\dfrac{T}{c}, \quad \dfrac{dp_m}{dt} = \tau\delta\dfrac{T}{m^2}p_v. \end{cases} \tag{9}$$

Эта система при $\tau = 0$ совпадает с системой дифференциальных уравнений для невозмущенного межпланетного перелета с идеально-регулируемым двигателем, а при $\tau = 1$ – с системой (6). При вычислении системы дифференциальных уравнений (9) используется сглаживание функции тяги $\delta(S)$ с применением аналитической аппроксимации функции в виде гиперболического представления [15]:

$$\delta(S) \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{S}{\sqrt{S^2 + c\varepsilon^2(\tau)}}\right), \tag{10}$$

где $c = 2\left(\sqrt{2}+1\right) \approx 4.828427$; $\varepsilon(\tau)$ – положительный регуляризирующий член, регулирующий степень близости аппроксимации к ступенчатой функции: чем меньше ε, тем ближе аппроксимация к ступенчатой функции. При проведении вычислений в этой работе использовалась зависимость $\varepsilon(\tau) = 1 - \tau + \varepsilon_f\tau$, где $\varepsilon_f = 10^{-4}\ldots10^{-5}$.

Метод продолжения сводит краевую задачу к задаче Коши. Для вычисления правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения требуется вычислить частные производные от $\mathbf{f}$ по $\mathbf{z}$ и параметру продолжения τ. Частные производные $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{z}$ и $\partial\mathbf{f}/\partial\tau$ могут быть вычислены с использованием совместного интегрирования дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных с уравнениями для их производных по $\mathbf{z}$ и τ:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{z}} = \dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{z}}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{z}} = \Omega_{0\mathbf{rr}}\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{z}} + \tau\Omega_{p\mathbf{rr}}\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{z}} + \dfrac{\tau\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{1-\tau+\tau m p_v}\times \\ \times\left[\dfrac{\partial\delta}{\partial\mathbf{z}}T - \dfrac{1-\tau+\tau\delta T}{1-\tau+\tau m p_v}\left(p_v\dfrac{\partial m}{\partial\mathbf{z}} + m\dfrac{\partial p_v}{\partial\mathbf{z}}\right)\right] + \\ + \dfrac{1-\tau+\tau\delta T}{1-\tau+\tau m p_v}\dfrac{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{z}}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{z}} = -\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\Omega_{0\mathbf{rr}}\mathbf{p}_{\mathbf{v}})\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{z}} - \Omega_{0\mathbf{rr}}\dfrac{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{z}} - \\ - \tau\left[\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\Omega_{p\mathbf{rr}}\mathbf{p}_{\mathbf{v}})\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{z}} + \Omega_{p\mathbf{rr}}\dfrac{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{z}}\right], \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{z}} = -\dfrac{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{z}}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial m}{\partial\mathbf{z}} = -\tau\dfrac{T}{c}\dfrac{\partial\delta}{\partial S}\dfrac{\partial S}{\partial\mathbf{z}}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial p_m}{\partial\mathbf{z}} = \tau\dfrac{\partial\delta}{\partial S}\dfrac{\partial S}{\partial\mathbf{z}}\dfrac{T}{m^2}p_v + \tau\delta\dfrac{T}{m^2}\left[\dfrac{\partial p_v}{\partial\mathbf{z}} - \dfrac{2p_v}{m}\dfrac{\partial m}{\partial\mathbf{z}}\right]. \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\tau} = \dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial\tau}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial\tau} = \Omega_{0\mathbf{rr}}\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\tau} + \Omega_{p\mathbf{r}} + \tau\Omega_{p\mathbf{rr}}\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\tau} + \dfrac{\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{1-\tau+\tau m p_v}\times \\ \times\left[\begin{array}{l} -1 + \delta T - \dfrac{(-1+mp_v)(1-\tau+\tau\delta T)}{1-\tau+\tau m p_v} + \\ + \tau T\dfrac{\partial\delta}{\partial\tau} - \dfrac{\tau}{1-\tau+\tau m p_v}\left(p_v\dfrac{\partial m}{\partial\tau} + m\dfrac{\partial p_v}{\partial\tau}\right) \end{array}\right] + \\ + \dfrac{1-\tau+\tau\delta T}{1-\tau+\tau m p_v}\dfrac{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial\tau}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{r}}}{\partial\tau} = -\dfrac{\partial}{\partial\tau}(\Omega_{0\mathbf{rr}}\mathbf{p}_{\mathbf{v}})\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\tau} - \Omega_{0\mathbf{rr}}\dfrac{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial\tau} - \Omega_{p\mathbf{rr}}\mathbf{p}_{\mathbf{v}} - \\ - \tau\left[\dfrac{\partial}{\partial\tau}(\Omega_{p\mathbf{rr}}\mathbf{p}_{\mathbf{v}})\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\tau} + \Omega_{p\mathbf{rr}}\dfrac{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial\tau}\right], \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial\tau} = -\dfrac{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{r}}}{\partial\tau}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial m}{\partial\tau} = -\delta\dfrac{T}{c} - \tau\dfrac{T}{c}\dfrac{\partial\delta}{\partial S}\dfrac{\partial S}{\partial\tau}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial p_m}{\partial\tau} = \delta\dfrac{T}{m^2}p_v + \tau\dfrac{\partial\delta}{\partial S}\dfrac{\partial S}{\partial\tau}\dfrac{T}{m^2}p_v + \\ + \tau\delta\dfrac{T}{m^2}\left[\dfrac{\partial p_v}{\partial\tau} - \dfrac{2p_v}{m}\dfrac{\partial m}{\partial\tau}\right]. \end{cases} \tag{12}$$

со следующими начальными условиями:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{r}0}}\right|_{t=t_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}}\right|_{t=t_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{r}0}}\right|_{t=t_0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}}\right|_{t=t_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{r}0}}\right|_{t=t_0} = \mathbf{E}, \ \left.\dfrac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}}\right|_{t=t_0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{r}0}}\right|_{t=t_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}}\right|_{t=t_0} = \mathbf{E}, \ \left.\dfrac{\partial m}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{r}0}}\right|_{t=t_0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial m}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}}\right|_{t=t_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{r}0}}\right|_{t=t_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}}\right|_{t=t_0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_{m0}}\right|_{t=t_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial p_{m0}}\right|_{t=t_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{r}}}{\partial p_{m0}}\right|_{t=t_0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial p_{m0}}\right|_{t=t_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial p_m}{\partial p_{m0}}\right|_{t=t_0} = 1, \\ \left.\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau}\right|_{t=t_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}\right|_{t=t_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{r}}}{\partial \tau}\right|_{t=t_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \tau}\right|_{t=t_0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial m}{\partial \tau}\right|_{t=t_0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial p_m}{\partial \tau}\right|_{t=t_0} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Конечные условия, как и раньше, следующие:

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \quad \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, \quad p_m(t_f) = 0.$$

Матрица $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{z}$ может быть вычислена с использованием конечных значений производных от фазовых и сопряженных переменных следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} = \left[\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{r}0}} & \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} & \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_{m0}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{r}0}} & \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} & \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial p_{m0}} \\ \dfrac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{r}0}} & \dfrac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} & \dfrac{\partial p_m}{\partial p_{m0}} \end{array}\right]_{t=t_f}.$$

Вектор $\partial\mathbf{f}/\partial\tau$ вычисляется аналогично:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} = \left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial p_m}{\partial \tau} \end{array}\right]_{t=t_f}.$$

Отметим, что правые части дифференциальных уравнений для сопряженных переменных содержат производные от силовой функции по фазовым переменным, другими словами, производные от возмущающей части функции по фазовым переменным. В рассматриваемой математической модели задачи многих тел эти производные ($\Omega_{0\mathbf{r}}$, $\Omega_{0\mathbf{rr}}$, $\Omega_{0\mathbf{rrr}}$, $\Omega_{p\mathbf{r}}$, $\Omega_{p\mathbf{rr}}$ и $\Omega_{p\mathbf{rrr}}$) достаточно просто представляются в аналитическом виде, поэтому в рассматриваемой задаче, в отличие от исследования [16], не требуется специализированный алгоритм высокоточного вычисления производных от возмущающих ускорений по фазовым координатам.

Вычислительная схема оптимизации гелиоцентрического участка ОТ-траектории между точками либрации следующая:

1. Задается время прохождения точки либрации L_2 системы Земля–Солнце t_{L_2} и длительность перелета Δt. Тогда момент прохождения точки либрации L_1 системы планета–Солнце $t_{L_1} = t_{L_2} + \Delta t$. Вычисляются векторы положения и скорости двух точек либрации $\mathbf{r}_{L_2}$, $\mathbf{v}_{L_2}$, $\mathbf{r}_{L_1}$ и $\mathbf{v}_{L_1}$, для заданных дат пролета.

2. Методом продолжения по гравитационному параметру вычисляется оптимальная невозмущенная ОМ-траектория. При решении ОМ-задачи задается число целых витков вокруг Солнца.

3. Методом продолжения решается краевая задача (6), (7) для вычисления оптимальной возмущенной ОТ-траектории. При этом используются системы дифференциальных уравнений (9), (11), (12) с дополнительными начальными условиями (13). В качестве начального приближения для начальных значений сопряженных переменных используются значения из решения ОМ-задачи.

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Верификация численных результатов

Для проверки корректности используемого подхода была проведена верификация полученных с его помощью численных результатов с результатами других авторов.

В публикации [17], представлено решение задачи оптимизации возмущенной траектории межпланетного перелета с конечной тягой с использованием программного обеспечения T_3D. В исследовании [17] была рассмотрена оптимальная траектория перелета КА от Земли с начальным гиперболическим избытком скорости 2000 м/с до Марса с нулевым гиперболическим избытком скорости. Дата старта принималась равной 25.XII.2010, 00.00.00, длительность перелета к Марсу – 877 сут, начальная масса КА – 1000 кг, тяга ЭРДУ – 100 мН, удельный импульс ЭРДУ – 1630 с. В работе [17] учитывались возмущающие ускорения от светового давления и притяжения Земли. Однако влияние возмущения от светового давления оказалось незначительным, поэтому в процессе верификации учитывалось только возмущающее ускорение от притяжения Земли. Конечная масса КА, полученная в исследовании [17], равна 763.21 кг для невозмущенной задачи и 760.276 кг для возмущенной, а с помощью представленной в настоя-

щей статье методики – 763.213 кг для невозмущенной задачи и 760.251 кг для возмущенной. Относительная разница в конечной массе КА составляет 0.0004 и 0.0033% для невозмущенной и возмущенной задач соответственно. На рис. 2 представлены зависимости функций тяги δ (толстые линии) и переключения S (тонкие линии) от времени для невозмущенной (сплошные линии) и возмущенной (пунктирные линии) траектории.

В публикациях [18, 19] были приведены оптимальные траектории перелета к Юпитеру с конечной тягой с использованием метода ТСД с нулевым гиперболическим избытком скорости. Дата старта принималась равной 12.XII.2008, 00.00.00, длительность перелета к Юпитеру – 1965 сут, начальная масса КА – 1500 кг, тяга ЭРДУ – 330 мН, удельный импульс ЭРДУ – 3801.29 с. Для этой задачи в работе [18] были получены затраты топлива 508.04 кг, в работе [19] – 508.7 кг. При использовании приведенной в настоящей работе методики получены затраты топлива 508.06 кг, что близко к решению из работы [18]. По сравнению с результатом в публикации [19], ЭРДУ выключается на конечном участке траектории в выводах работы [18] и нашем исследовании. На рис. 3 представлены зависимости функций тяги δ (толстые линии) и переключения S (тонкие линии) от времени для рассматриваемой траектории.

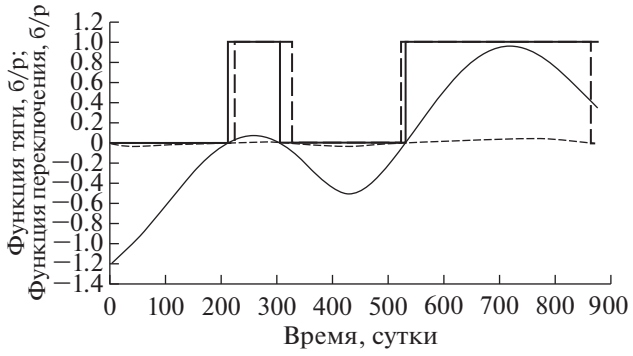

Рис. 2. Зависимости функции тяги и переключения от времени для оптимальных невозмущенной и возмущенной траекторий перелета к Марсу.

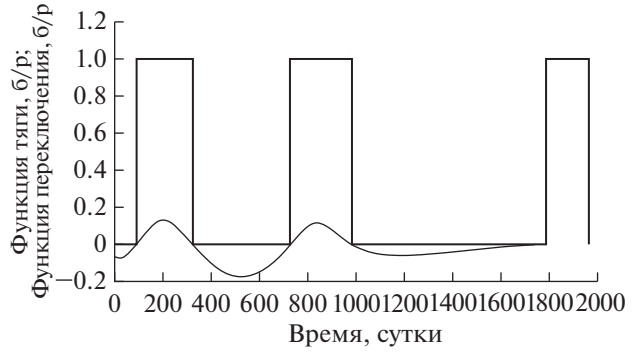

Рис. 3. Зависимости функции тяги и переключения от времени для оптимальных траекторий перелета к Юпитеру с использованием метода ТСД.

Определение оптимальной даты отлета КА с использованием метода точечных сфер действия

Характеристики оптимальных гелиоцентрических участков межпланетных траекторий КА с малой тягой сильно зависят от даты отправления и длительности перелета. Поэтому для сравнения гелиоцентрических траекторий, рассчитанных методом ТСД и рассматриваемым в этом статье методом, целесообразно использовать оптимальные даты старта для фиксированной длительности перелета.

Рассмотрим задачу оптимизации гелиоцентрических траекторий с малой тягой к Марсу, Юпитеру и Сатурну. Для поиска оптимальных дат старта проварьируем их с шагом в один день в течение синодического периода целевой планеты по отношению к Земле (2.135 г. для перелета к Марсу, 1.092 г. для перелета к Юпитеру и 1.035 г. для перелета к Сатурну). В результате определяется ОМ-траектория с минимальным значением функционала $J_{LP} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} a^2 \mathrm{d}t$ [10–12], а ОТ-траектория – с минимальном значением затрат характеристической скорости в рассматриваемом диапазоне периода даты отлета. В табл. 1 представлены основные исходные данные решаемых задач: диапазон рассматриваемых дат отлета КА от Земли, длительность перелета КА, число целых витков гелиоцентрической траектории, начальная масса КА и характеристики ЭРДУ для рассматриваемых вариантов перелета.

Сначала найдем оптимальные даты отлета для оптимальных гелиоцентрических траекторий с использованием метода ТСД. Для перелета к Юпитеру рассмотрим оптимальные ОМ-траектории продолжительностью 2200 сут с угловой дальностью от 360° до 1080°. Зависимости функционала для таких ОМ-траекторий от даты отлета КА представлены на рис. 4. Решения с двумя целыми витками ($N_{\mathrm{rev}} = 2$) обозначены черными квадратами, а решения с $N_{\mathrm{rev}} = 1$ – серыми кружками.

В результате применения метода ТСД вычислена оптимальная дата отлета – 4.III.2022, которой соответствует минимальное значение функционала $J_{LP} = 1.93462$ м^2 с$^{-3}$. Видно, что, могут существовать четыре разные даты отлета при одинаковом значении функционала, превышающем это минимальное значение (см. пересечения пунктирной линии с кривой на рис. 4).

Колебания функционала при изменении даты старта связаны с движением Земли вокруг барицентра системы Земля–Луна в эфемеридной модели

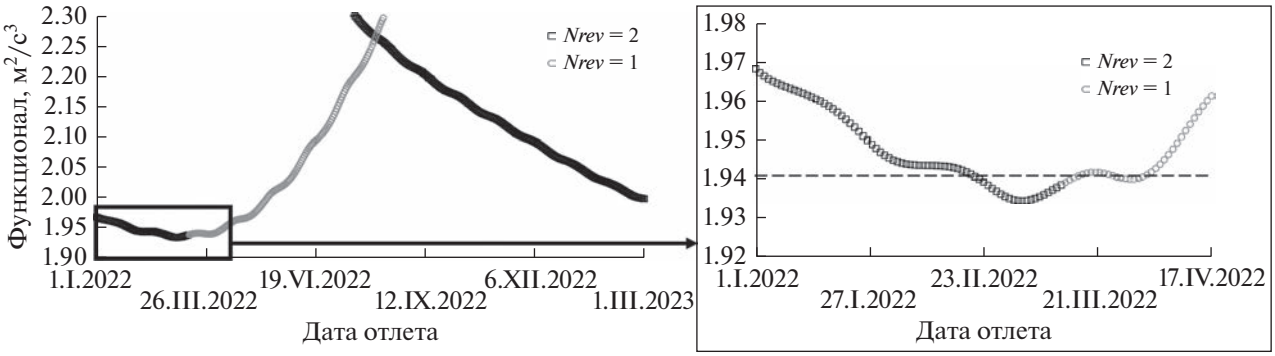

Рис. 4. Зависимости функционала от даты отлета для оптимальных ОМ-траекторий перелета Земля–Юпитера, рассчитанных с использованием метода ТСД.

Рис. 5. Зависимости функционала от даты отлета для оптимальных ОМ-траекторий перелета от барицентра системы Земля–Луна до Юпитера, рассчитанных с использованием метода ТСД.

движения. На рис. 5 представлен график зависимости функционала от даты отлета для этой же задачи при использовании в методе ТСД в качестве точки отлета барицентра системы Земля–Луна вместо центра Земли. На этом графике колебания функционала отсутствуют.

Рассмотрим оптимальные ОТ-траектории перелета к Юпитеру на основе использования исходных данных из табл. 1. На рис. 6 представлены зависимости затрат характеристической скорости перелета V_{ch} к Юпитеру от даты отлета.

В рассматриваемом синодическом периоде оптимальная дата отлета, обеспечивающая минимум характеристической скорости V_{ch} – 3.III.2022. Таким образом, при использовании метода ТСД, оптимальная дата отлета для ОМ- и ОТ-траекторий отличается всего на одни сутки.

В качестве следующих примеров рассмотрим оптимальные траектории перелета от Земли к Марсу с длительностью перелета 350 сут и от Земли к Сатурну с длительностью перелета 3500 сут. Рассматриваемая угловая дальность траектории Земля–Марс – менее 360°, а траектории Земля–Сатурн – от 720° до 1080°.

На рис. 7 представлены зависимости функционала ОМ-задачи от даты отлета для оптималь-

Таблица 1. Исходные данные для решения задачи оптимизации гелиоцентрических траекторий КА с ЭРДУ

Параметры	Земля–Марс	Земля–Юпитер	Земля–Сатурн
Диапазон дат отлета	1.I.2025–1.III.2027	1.I.2022–1.III.2023	1.III.2038–31.III.2039
Время перелета, сут	350	2200	3500
Число целых витков	0	1–2	2
Начальная масса КА, кг	1000	2000	20000
Тяга, мН	350	220	2000
Удельный импульс, с	2000	3000	5000

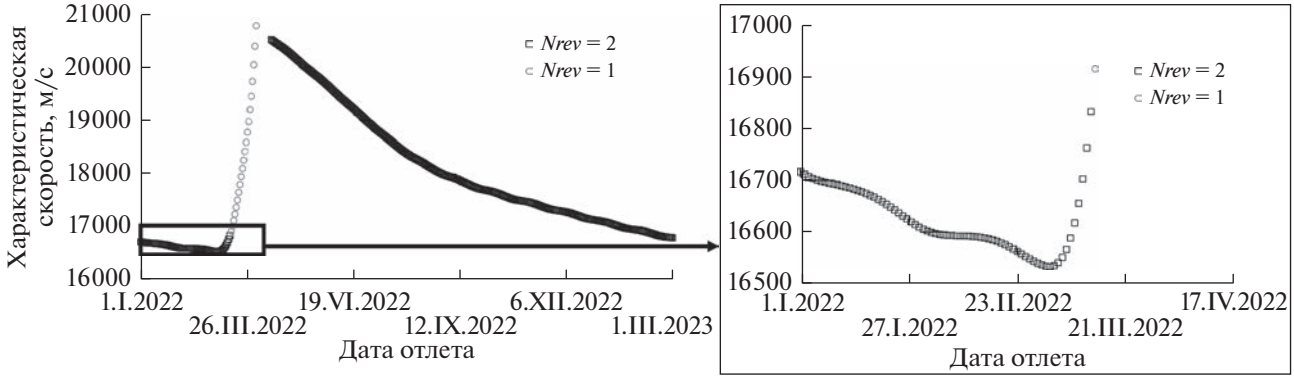

Рис. 6. Зависимости характеристической скорости V_{ch} для оптимальных ОТ-траекторий перелета Земля–Юпитера с методом ТСД от даты отлета.

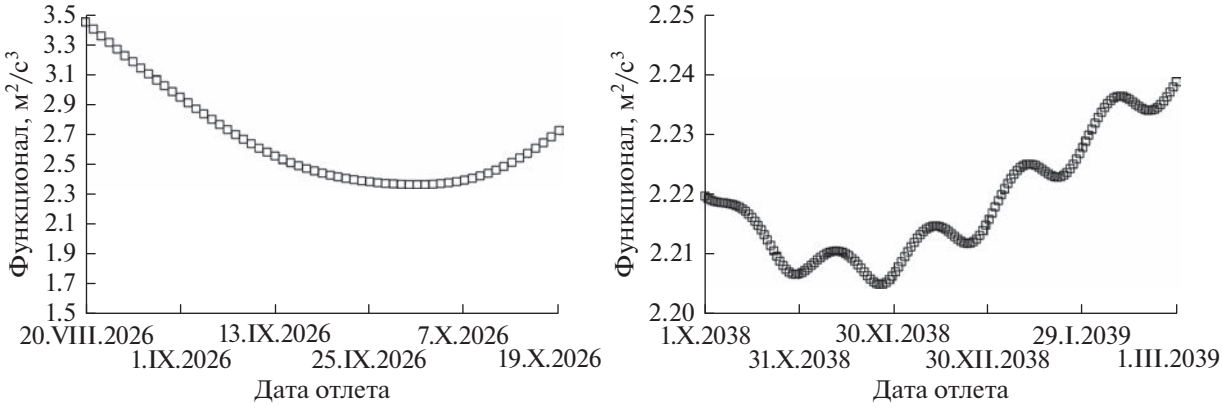

Рис. 7. Зависимости функционала от даты отлета для оптимальных ОМ-траекторий перелета Земля–Марс (слева) и Земля–Сатурн (справа) при использовании метода ТСД.

ных траекторий перелета КА к Марсу и Сатурну при использовании метода ТСД. На представленных графиках показаны результаты в окрестности их оптимальных значений, а не всего рассматриваемого синодического периода.

Для гелиоцентрической траектории перелета к Марсу оптимальная дата отлета – 1.X.2026, а функционал, соответствующий этой дате: $J_{LP} = 2.36546$ м^2 с$^{-3}$. Для перелета к Сатурну оптимальная дата отлета – 26.XI.2038 г., а соответствующий этой дате функционал равен 2.20484 м^2 с$^{-3}$.

На левом графике рис. 7 не очень хорошо виден колебательный характер зависимости функционала от даты отлета из-за большого диапазона изменения функционала на этом графике. При увеличении длительности перелета и количества витков колебательный характер изменения функционала снова становится хорошо заметным. В качестве примера на рис. 8 представлены зависимости функционала ОМ-задачи от даты отлета для перелета Земля–Марс продолжительностью 1300 сут с угловой дальностью от двух до трех витков.

Рассмотрим оптимальные ОТ-траектории перелета к Марсу при заданных удельном импульсе $I_{sp} = 2000$ с и тяге $T = 350$ мН и к Сатурну при $I_{sp} = 5000$ с и тяге $T = 2000$ мН. Начальная масса КА на отлетной от Земли траектории принята равной 1000 кг для перелета к Марсу и 20000 кг для перелета к Сатурну.

На рис. 9 представлены зависимости характеристической скорости перелета V_{ch} от даты отлета для рассматриваемых ОТ-траекторий. Интересно, что значение характеристической скорости перелета КА быстро возрастает после прохождения минимального значения, как и для случая перелета к Юпитеру (рис. 6).

Оптимальная дата отлета к Марсу для ОТ-траектории – 22.IX.2026 г., а для перелета к Сатурну – 19.II.2039 г. В отличие от перелета к Юпитеру, разница между оптимальными датами отлета для ОМ- и ОТ-траекторий получается существенно больше и составляет девять суток для перелета Земля–Марс и 85 сут для перелета Земля–Сатурн.

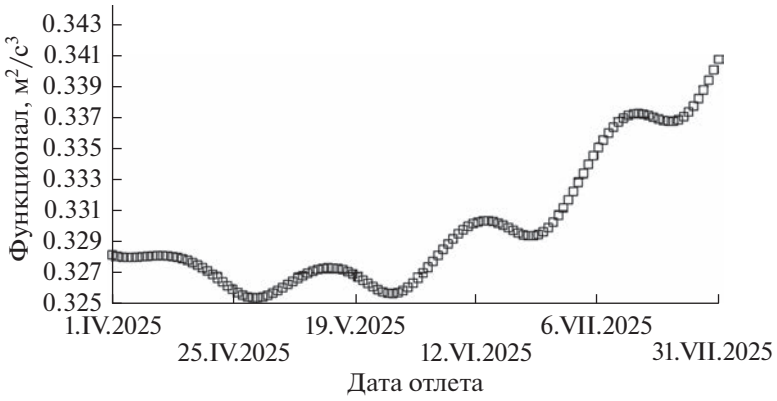

Рис. 8. Зависимость функционала от даты отлета для оптимальных ОМ-траекторий перелета к Марсу продолжительностью 1300 сут с угловой дальностью от двух до трех витков.

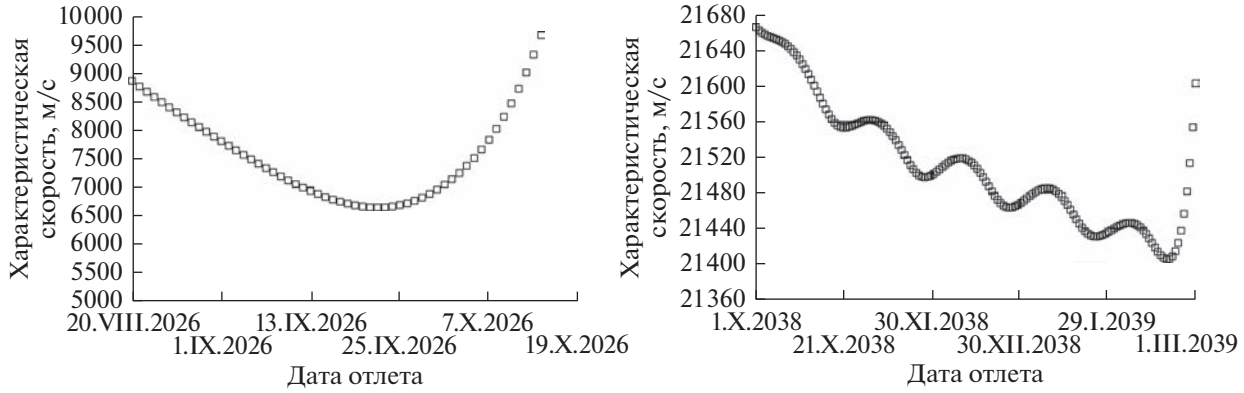

Рис. 9. Зависимости характеристической скорости V_{ch} от даты отлета для оптимальных ОТ-траекторий Земля–Марс (слева) и Земля–Сатурн (справа) при использовании метода ТСД.

Сравнение оптимальных гелиоцентрических траекторий между точками либрации с результатами оптимизации траекторий с использованием метода точечных сфер действия

Рассмотрим численные результаты решения задачи оптимизации гелиоцентрического участка межпланетного перелета между точками либрации ESL_2 системы Земля–Солнце и L_1 системы планета–Солнце с учетом притяжения Солнца, Земли и планеты назначения. В табл. 2 представлены принятые значения гравитационных параметров планет и положения точек либрации L_1 и L_2 системы планета –Солнце в мгновенной синодической системе координат, в которой за единицу расстояния принято текущее гелиоцентрическое удаление планеты. Гравитационный параметр Солнца принят равным 132 712 440 018 км^3/с^2.

Рассмотрим три типа оптимальных траекторий перелета между точками либрации, начинающихся от точки либрации L_2 системы Земля–Солнце (ESL_2): 1) траектории перелета к точке либрации L_1 системы Юпитер–Солнце (JSL_1), 2) траектории перелета к точке либрации L_1 системы Марс–Солнце (MSL_1), 3) траектории перелета к точке либрации L_1 системы Сатурн–Солнце (SSL_1). При вычислении оптимальных траекторий перелета между точками либрации используются даты отлета КА, определенные с помощью метода ТСД при той же длительности перелета.

В результате решения задачи оптимизации возмущенной ОМ-траектории межпланетного перелета с использованием в качестве граничных условий точек либрации получены следующие величины функционала: 1.56095 м^2 с$^{-3}$ для перелета ESL_2–JSL_1, 1.83791 м^2 с$^{-3}$ для перелета ESL_2–MSL_1 и 1.9153 м^2 с$^{-3}$ для перелета ESL_2–SSL_1.

Можно сделать вывод, что полученные значения функционала ОМ-траектории перелета между точками либрации уменьшаются по сравнению с траекториями, рассчитанными с использование метода ТСД во всех рассмотренных случаях перелета (на 19.315% для перелета Земля–Юпитер, на 22.302% для перелета Земля–Марс и на 13.132% для перелета Земля–Сатурн).

На рис. 10 показаны рассматриваемые траектории перелета к Юпитеру в проекции на плоскость *xy* в эклиптической гелиоцентрической системе координат. На левом рисунке представлена

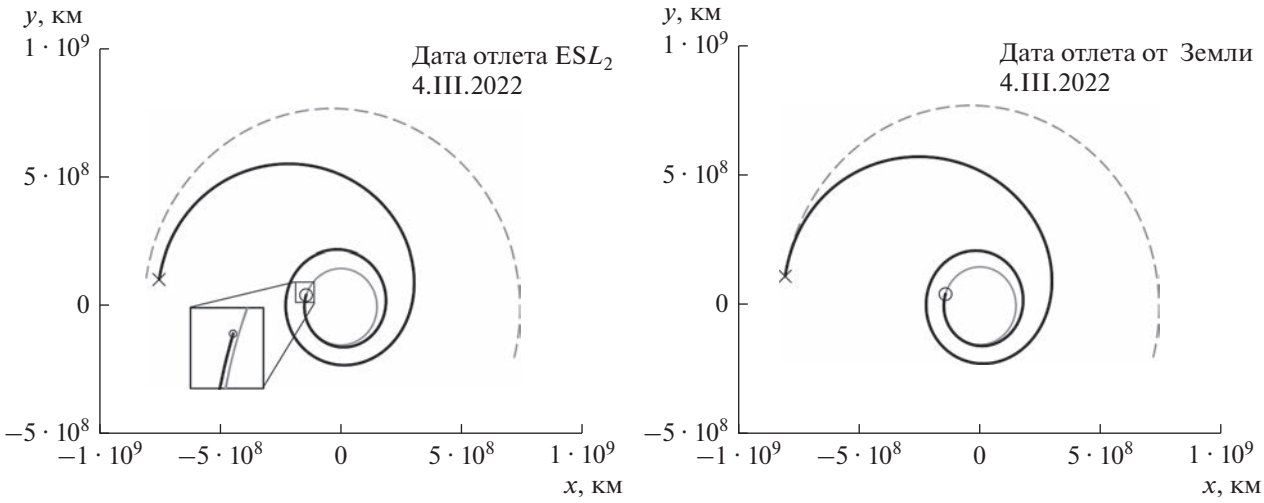

Рис. 10. Сравнение ОМ-траекторий межпланетного перелета КА к Юпитеру (слева – возмущенная траектория перелета между точками либрации, справа – траектория, полученная с использованием метода ТСД).

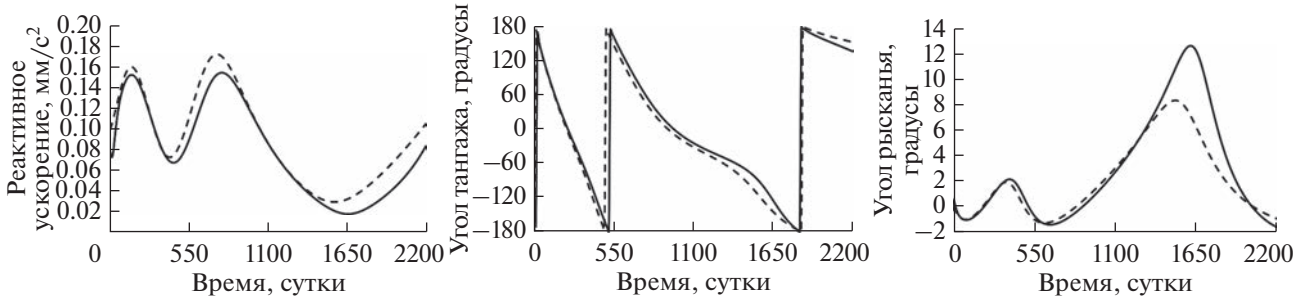

Рис. 11. Сравнение программ управления на ОМ-траекториях перелета КА к Юпитеру: пунктирная линия – траектория, рассчитанная с использованием метода ТСД, сплошная линия – возмущенная траектория между точками либрации ESL_2–JSL_1.

оптимальная траектория между точками либрации ESL_2–JSL_1, а на правом – траектория перелета Земля–Юпитер с минимальным значением функционала при использовании метода ТСД. Начальное и конечное положение КА помечены черными знаками “○” и “×”, орбита Земли обозначена серой сплошной линией, а орбита Юпитера – серой пунктирной линией. На рис. 11 представлены зависимости реактивного ускорения и углов ориентации реактивного ускорения от времени перелета для обоих решений.

Для перелета к Юпитеру проводились тестовые расчеты ОМ-траектории межпланетного перелета ESL_2–JSL_1 с дополнительным учетом притяжения Луны и Марса. Для рассматриваемого варианта учет этих дополнительных возмущений привел к очень малому изменению величины функционала (с 1.56095 до 1.56119 м^2 с$^{-3}$). В связи с этим можно утверждать, что рассматриваемая модель возмущений (притяжение Земли и Юпитера) дает достаточно точные результаты для оценки эффективности предложенной схемы межпланетного полета КА с малой тягой.

Таблица 2. Гелиоцентрическое положение точек либрации системы планета–Солнце

Система	μ, км^3 с$^{-2}$	x_{L_1}	x_{L_2}
Земля–Солнце	398600.435507	0.9900295973	1.010037119
Марс–Солнце	42828.375816	0.9952516495	1.004763429
Юпитер–Солнце	126712764.1	0.9333193308	1.069784541
Сатурн–Солнце	37940584.8418	0.9550308982	1.046359330

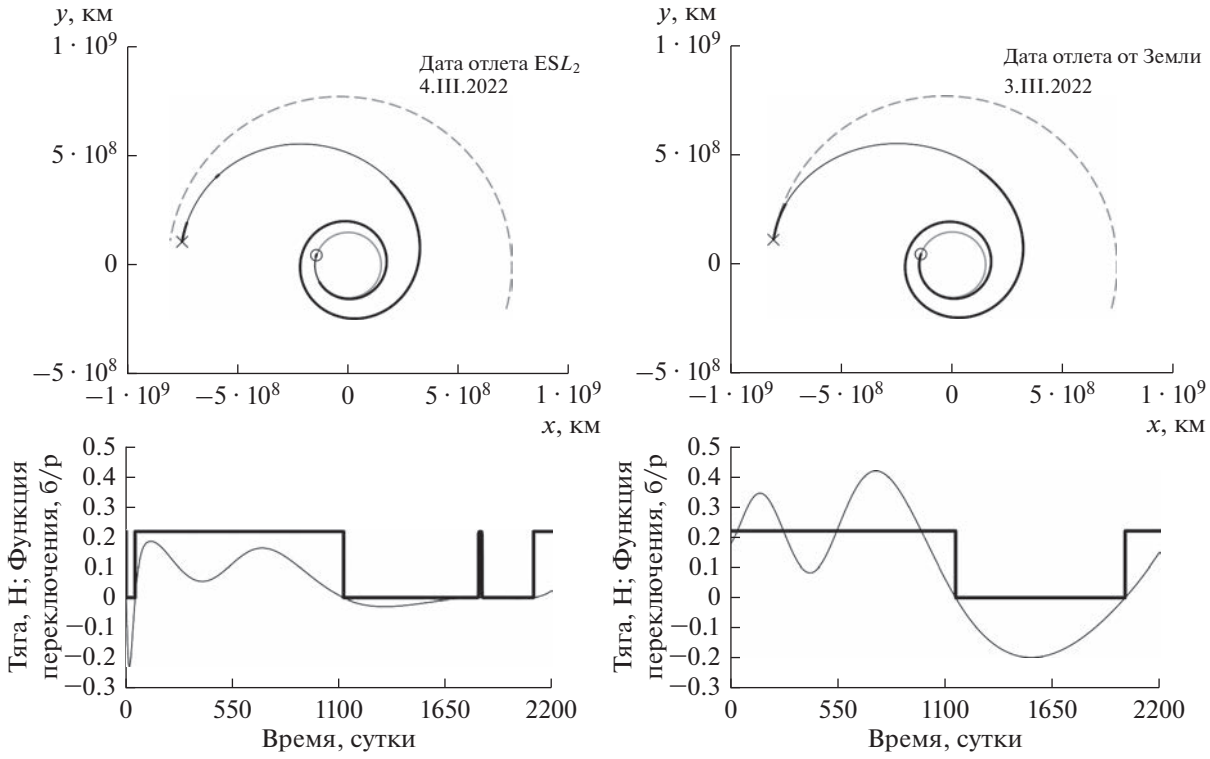

Рис. 12. Функции тяги (толстые линии) и переключения (тонкие линии) от времени полета и оптимальные ОТ-траектория для перелета между ESL_2–JSL_1 (слева) и для перелета к Юпитеру с методом ТСД (справа).

Рассмотрим оптимальные ОТ-траектории перелета от точки либрации ESL_2 системы Земля–Солнце до точки L_1 системы планета–Солнце. В табл. 3 приведены результаты оптимизации возмущенных ОТ-траекторий перелета между точками либрации и невозмущенных траекторий перелета к целевой планете, рассчитанных с использованием метода ТСД, для даты отлета, соответствующей минимальному значению характеристической скорости при расчете с помощью метода ТСД. В табл. 3 используются следующие обозначения: n_b – число включений ЭРДУ; T_b – моторное время; m_{fuel} – затраты топлива; V_{ch} – характеристическая скорость перелета.

Таблица 3. Результаты оптимизации ОТ-траекторий перелета к Юпитеру, Марсу и Сатурну

Тип перелета	Дата отлета	Дата прибытия	Параметры	Перелет между точками либрации	Перелет, рассчитанный с использованием метода ТСД
Земля–Юпитер	3.III.2022 г.	11.III.2028 г.	n_b	4	2
			T_b, сут	1190.4014	1330.7285
			m_{fuel}, кг	769.109	859.7733
			V_{ch}, м/с	14280.706	16531.661
Земля–Марс	22.IX.2026 г.	7.IX.2027 г.	n_b	2	2
			T_b, сут	163.5282	186.2947
			m_{fuel}, кг	252.1295	287.2312
			V_{ch}, м/с	5698.164	6641.029
Земля–Сатурн	19.II.2039 г.	25.IX.2048 г.	n_b	3	2
			T_b, сут	1863.8517	2007.495
			m_{fuel}, кг	6568.473	7074.691
			V_{ch}, м/с	19521.489	21405.217

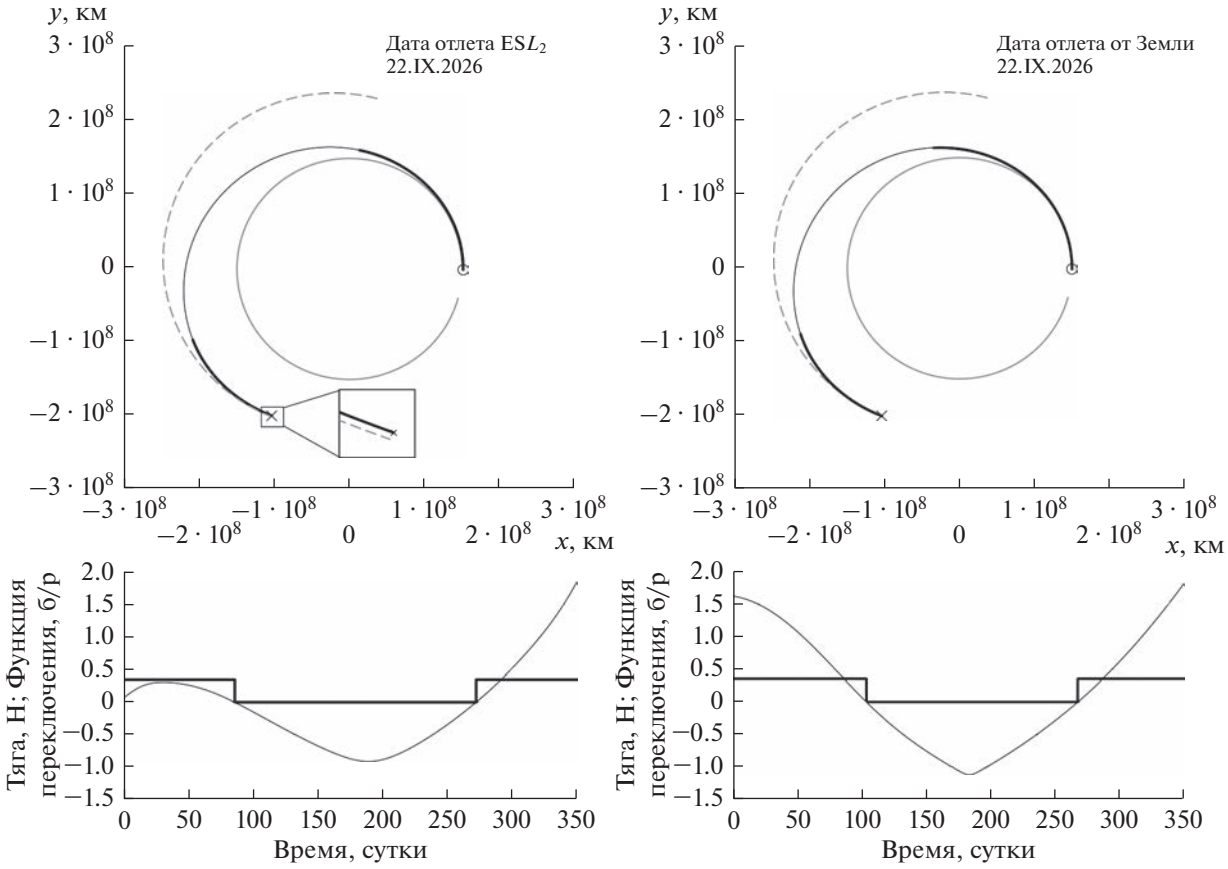

Рис. 13. Функции тяги (толстые линии) и переключения (тонкие линии) от времени полета и оптимальные ОТ-траектория для перелета между ESL_2–MSL_1 (слева) и для перелета к Марсу с методом ТСД (справа).

На рис. 12–14 представлены проекции на плоскость *xy* эклиптической гелиоцентрической системы координат приведенных в табл. 3 возмущенных траекторий перелета между точками либрации, невозмущенных траекторий, рассчитанных методом ТСД, а также зависимости от времени функций переключения (тонкая линия) и тяги (толстая линия) для этих траекторий. Активные участки траектории на этих рисунках обозначены толстыми сплошными линиями, пассивные – тонкими сплошными черными линиями, орбиты планет – серой сплошной и серой пунктирной линией. Во всех случаях длительность работы ЭРДУ на перелетах между точками либрации уменьшается по сравнению с длительностью работы ЭРДУ на траекториях, рассчитанных методом ТСД. Видно, что для типа перелета между точками либрации ESL_2–JSL_1 длительность работы двигательной установки существенно уменьшается. Соответственно, характеристическая скорость перелета уменьшается на 13.616% при перелете к Юпитеру, 14.198% при перелете к Марсу и 8.800% при перелете к Сатурну. Следует отметить существенную разницу в зависимостях функции переключения от времени на траекториях перелета между точками либрации и на траекториях, рассчитанных методом ТСД, приводящую к изменению числа включения ЭРДУ для перелетов к Юпитеру и Сатурну.

Оптимизация даты отлета при расчете возмущенной траектории перелета между точками либрации приводит к дальнейшему сокращению затрат характеристической скорости. Зависимость характеристической скорости от даты отлета для траектории перелета к Марсу (от ESL_2 до MSL_1) приведена на рис. 15. Оптимальная дата отлета для такого перелета – 1.X.2026 г., при этом затраты характеристической скорости составляют 5475.456 м/с. При расчете методом ТСД траектории перелета к Марсу с этой датой отлета затраты характеристической скорости составляют 7040.032 м/с, т.е. затраты характеристической скорости на возмущенной траектории перелета между точками либрации меньше на 22.224% по сравнению с затратами характеристической скорости на невозмущенной траектории перелета к Марсу, рассчитанной с использованием метода ТСД. Если сравнивать траектории с оптимальными датами старта (1.X.2026 г., V_{ch} = = 5475.456 м/с для перелета между точками либрации и 22.IX.2026 г., V_{ch} = 6641.029 м/с для перелета,

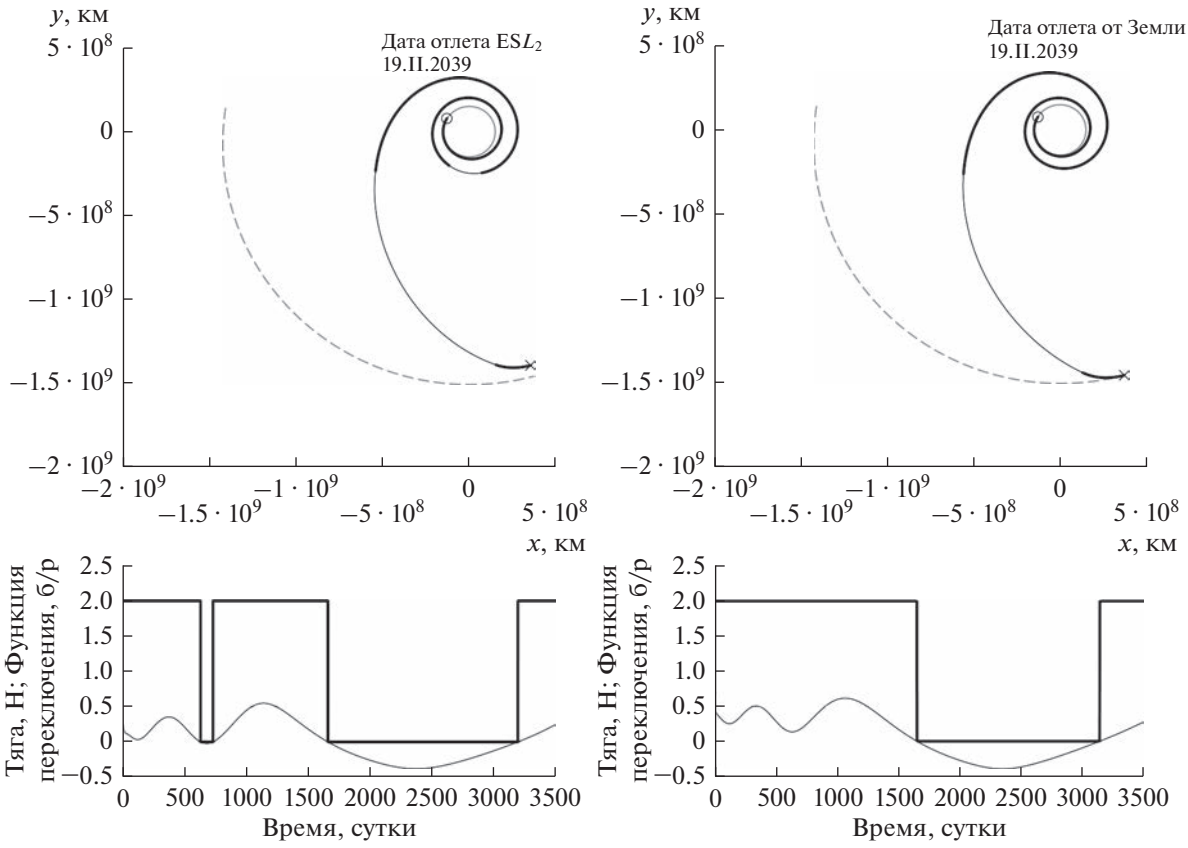

Рис. 14. Функции тяги (толстые линии) и переключения (тонкие линии) от времени полета и оптимальные ОТ-траектория для перелета между ESL_2–SSL_1 (слева) и для перелета к Сатурну с методом ТСД (справа).

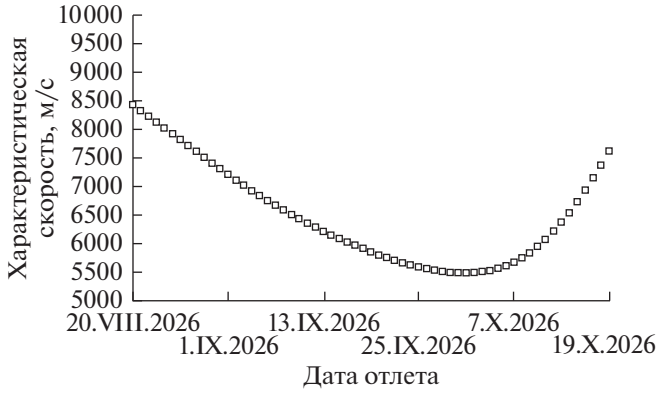

Рис. 15. Зависимость характеристической скорости V_{ch} от даты отлета для оптимальных возмущенных ОТ-траекторий перелета между точками либрации ESL_2 и MSL_1.

рассчитанного с использованием метода ТСД), то выигрыш перелета между точками либрации в характеристической скорости составит 17.551%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача оптимизации гелиоцентрического участка траектории межпланетного перелета при использовании схемы полета со стыковкой планетоцентрических и гелиоцентрического участков траектории в точках либрации L_2 системы Земля–Солнце и L_1 системы планета назначения – Солнце с учетом притяжения Солнца, Земли и планеты назначения. Представлен метод оптимизации возмущенной гелиоцентрической траектории с конечной тягой с использованием эфемеридной модели движения небесных тел для вычисления возмущающих ускорений.

Представлены численные примеры оптимальных траекторий между точкой либрации L_2 системы Земля–Солнце и точками либрации L_1 систем Марс–Солнце, Юпитер–Солнце, Сатурн–Солнце. Проведено сравнение полученных результатов с оптимальными решениями, полученными с использованием метода точечных сфер действия. В рассмотренных случаях оказалось, что затраты характеристической скорости на перелет между точками либрации существенно (на 8...22%) меньше оценки характеристической скорости перелета, которую можно получить с использованием метода ТСД, причем чем ближе орбита планеты к орбите Земли, тем больше относительная разница в затратах характеристической скорости.

Для окончательной оценки эффективности предложенной схемы межпланетного перелета с малой тягой необходимо провести оптимизацию планетоцентрических участков между начальной околоземной орбитой и точкой либрации L_2 системы Земля–Солнце, а также между точкой либрации L_1 системы планета назначения – Солнце и конечной орбитой вокруг планеты. После этого необходимо сравнить полученные результаты с теми, что вычислены с использованием метода точечных сфер действия. Для сквозной оптимизации траектории перелета между начальной орбитой вокруг Земли и конечной орбитой вокруг планеты назначения можно использовать метод, аналогичный представленному в исследовании [9], который использует траекторию со стыковкой в точке либрации в качестве начального приближения для траектории с оптимальной точкой стыковки отдельных участков.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда “Развитие теории и методов проектирования траекторий космических аппаратов с двигательными установками большой и малой тяги” № 22-19-00329, https://rscf.ru/project/22-19-00329/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Topputo F., Belbruno E.* Earth–Mars transfers with ballistic capture // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2015. V. 121. Iss. 4. P. 329–346. https://doi.org/10.1007/s10569-015-9605-8
2. *Mingotti G., Topputo F., Bernelli-Zazzera F.* Earth – Mars transfers with ballistic escape and low-thrust capture // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2011. V. 110. Iss. 2. P. 169–188. https://doi.org/10.1007/s10569-011-9343-5
3. *Mingotti G., Gurfil P.* Mixed low-thrust invariant-manifold transfers to distant prograde orbits around Mars // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2010. V. 33. Iss. 6. P. 1753–1764. https://doi.org/10.2514/1.49810
4. *Topputo F., Vasile M., Bernelli-Zazzera F.* Low Energy Interplanetary Transfers Exploiting Invariant Manifolds of the Restricted Three-Body Problem // The J. Astronautical Sciences. 2005. V. 53. Iss. 4. P. 353–372. https://doi.org/10.1007/BF03546358
5. *Ovchinnikov M.* Interplanetary Small-Satellite Missions: Ballistic Problems and Their Solutions // Gyroscopy and Navigation. 2021. V. 12. Iss. 4. P. 281–293. https://doi.org/10.1134/S2075108721040064
6. *Lo M., Ross S.* The Lunar L_1 Gateway: Portal to the Stars and Beyond // AIAA Space 2001 Conference. 28–30 Aug. 2001, Albuquerque, New Mexico. https://doi.org/10.2514/6.2001-4768
7. *Ross S., Koon W., M.W. Lo et al.* Design of a Multi-Moon Orbiter // 13th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. 9–13 Feb. 2003, Ponce, Puerto Rico. Art. ID. AAS 03-143. P. 669.
8. *Loeb H., Petukhov V., Popov G.A. et al.* A Realistic concept of a manned Mars mission with nuclear-electric propulsion // Acta Astronautica. 2015. V. 116. P. 299–306. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.07.019
9. *Petukhov V., Yoon S.W.* End-to-End Optimization of Power-Limited Earth – Moon Trajectories // Aerospace. 2023. V. 10. Iss. 3. Art. ID. 231. 21 p. https://doi.org/10.3390/aerospace10030231
10. *Petukhov V.G.* One numerical method to calculate optimal power-limited trajectories // Intern. Electric Propulsion Conf. IEPC-95-221. Moscow, 1995. P. 1474–1480.
11. *Petukhov V.G.* Optimization of Interplanetary Trajectories for Spacecraft with Ideally Regulated Engines Using the Continuation Method // Cosmic Research. 2008. V. 46. Iss. 3. P. 219–232. https://doi.org/10.1134/S0010952508030052
12. *Petukhov V.G.* Method of continuation for optimization of interplanetary low-thrust trajectories // Cosmic Research. 2012. V. 50. Iss. 3. P. 249–261. https://doi.org/10.1134/S0010952512030069
13. *Haberkorn T., Martinon P., Gergaud J.* Low thrust minimum-fuel orbital transfer: a homotopic approach // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2004. V. 27. Iss. 6. P. 1046–1060. https://doi.org/10.2514/1.4022
14. *Jiang F., Baoyin H., Li J.* Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach // J.Guidance, Control, and Dynamics. 2012. V. 35. Iss. 1. P. 245–258. https://doi.org/10.2514/1.52476
15. *Petukhov V., Ivanyukhin A., Popov G. et al.* Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance // Acta Astronautica. 2022. V. 197. P. 354–367. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.03.012
16. *Petukhov V.G., Yoon S.W.* Optimization of perturbed spacecraft trajectories using complex dual numbers. Part. 1: Theory and method // Cosmic Research. 2021. V. 59. Iss. 5. P. 401–413. https://doi.org/10.1134/S0010952521050099
17. *Dargent T.* Automatic Minimum Principle Formulation for Low Thrust Optimal Control in Orbit Transfers using Complex Numbers // Proc. 21st Intern. Symp. Space flights Dynamics. 28 Sep.–2 Oct. 2009, Toulouse, France. 2009. 9 p.
18. *Dargent T.* An integrated tool for low thrust optimal control orbit transfers in interplanetary trajectories // Proc. 18th Intern. Symp. Space Flight Dynamics. 11–15 Oct. 2004, Munich, Germany. 2004. ESA SP-548. P. 143.
19. *Bertrand R., Epenoy R.* CNES Technical note n°147. December 2002. P. 36.