

УДК 629.7.052

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ СПУТНИКА ПРИ ПОМОЩИ МОМЕНТОВ СИЛ ЛОРЕНЦА

© 2024 г. В.И. Каленова¹*, В.М. Морозов¹, М.Г. Рак²

¹Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

* *kalenova44@mail.ru*

Поступила в редакцию 22.03.2023 г.

После доработки 07.04.2023 г.

Принята к публикации 13.04.2023 г.

Рассматривается стабилизация регулярных прецессий спутника на круговой орбите при использовании управляющих моментов, определяемых лоренцевыми силами. Линеаризованная система уравнений движения относится к специальному классу линейных нестационарных систем, приводимых к стационарным. Управляемость исследована как для исходных нестационарных систем, так и на основе приведенных стационарных систем. Построены оптимальные алгоритмы стабилизации. Проведено математическое моделирование предложенных алгоритмов, подтверждающее работоспособность и эффективность предложенной методики.

DOI: 10.31857/S0023420624010087

ВВЕДЕНИЕ

Магнитные системы ориентации и стабилизации, основанные на различных типах электродинамического взаимодействия спутника с магнитным полем Земли, получили широкое распространение. Важным классом движений спутника относительно центра масс выступают стационарные движения (положения относительно равновесия и регулярные прецессии) в том случае, когда центр масс спутника движется по круговой орбите. Устойчивость этих движений при действии гравитационных, аэродинамических и магнитных моментов рассмотрена в исследованиях [1–3]. В отсутствие диссипативных сил характер устойчивости не является асимптотическим, и вопрос о стабилизации этих движений тем или иным способом представляет практический интерес. Стабилизация положений относительно равновесия при помощи магнитных моментов различной природы рассмотрена в работах [4–6], а с учетом аэродинамических сил – в статье [7]. Обзор работ по управлению ориентацией космических аппаратов при помощи магнитных моментов содержится в публикациях [8, 9]. Стабилизация регулярных прецессий при помощи магнитных моментов, формирующихся за счет взаимодействия собственного магнитного момента спутника с геомагнитным полем,

изучена в исследовании [10], там же представлен краткий обзор работ этого направления.

В настоящей работе рассматривается задача стабилизации регулярных прецессий симметричного спутника при помощи моментов лоренцевых сил, действующих на заряженную часть поверхности спутника. В этом случае управляющий момент отличается от управляющего момента, создаваемого магнитными катушками [11–13].

В работе применяется тот же строгий аналитический подход к решению поставленной задачи, что и в предыдущих наших работах [4, 5, 10]. Он заключается в приведении исходной нестационарной системы к стационарной системе большей размерности, для которой проводится анализ управляемости и строится оптимальный алгоритм стабилизации, основанный на LQR-методе (*англ.* Linear quadratic regulator) на бесконечном интервале времени. Этот подход позволяет построить управление в виде обратной связи с постоянными коэффициентами, обеспечивающее асимптотическую устойчивость стационарной системы. Полученное стабилизирующее управление вводится в исходную нестационарную систему при помощи дополнительных переменных, которые выбираются таким образом, чтобы преобразование от

исходных переменных к переменным приведенной стационарной системы было невырожденным и ограниченным.

Работоспособность и эффективность предлагаемого алгоритма стабилизации подтверждается математическим моделированием.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение динамически симметричного спутника около центра масс в гравитационном и магнитных полях Земли. Предполагается, что центр масс спутника движется по круговой орбите.

Системы координат и уравнения движения

Используются две правые системы координат:

- $OXYZ$ – орбитальная система координат с началом в центре масс спутника: ось OZ направлена по радиус-вектору центра масс относительно притягивающего центра (центра Земли); ось OY – по нормали к плоскости орбиты; ось OX дополняет систему до правой тройки;

- $Oxuz$ – полусвязная система координат (не участвующая в собственном вращении): ось Oz направлена по оси динамической симметрии спутника. Положение оси Oz задается двумя углами α, β : α – угол поворота вокруг оси OX , который переводит систему координат $OXYZ$ в систему $OXY'Z'$; β – угол поворота вокруг оси OY' , который переводит систему координат $OXY'Z'$ в систему $Oxuz$. Третий угол φ – угол собственного вращения. Ориентация системы $Oxuz$ относительно орбитальной системы координат $OXYZ$ определяется таблицей направляющих косинусов Θ [14].

	e_τ	e_n	e_r
x	$\cos \beta$	$\sin \alpha \cdot \sin \beta$	$-\cos \alpha \cdot \sin \beta$
y	0	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
z	$\sin \beta$	$-\sin \alpha \cdot \cos \beta$	$\cos \alpha \cdot \cos \beta$

Здесь e_τ, e_n, e_r – единичные векторы по направлениям касательной, нормали и радиус-вектора орбитальной системы координат.

Абсолютная угловая скорость спутника $\omega = \omega_c + \varphi \mathbf{k}$ (где \mathbf{k} – единичный вектор оси симметрии; ω_c – угловая скорость системы координат $Oxuz$) в проекциях на собственные оси имеет вид

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\alpha} \cos \beta + \omega_o \sin \alpha \cdot \sin \beta, \\ \omega_y &= \dot{\beta} + \omega_o \cos \alpha, \\ \omega_z &= \dot{\alpha} \sin \beta - \omega_o \sin \alpha \cdot \cos \beta + \dot{\varphi}.\end{aligned}$$

Здесь ω_o – величина угловой скорости орбитального движения. Динамические уравнения движения спутника около центра масс имеют вид

$$J \dot{\omega} + \omega_c J \omega = M_g + M_u.$$

Здесь $J = \text{diag}(J_1, J_1, J_3), J_j$ – главные центральные моменты инерции спутника; $M_g = 3\omega_o^2(e_r J e_r)$ – гравитационный момент; M_u – управляющий момент, который создается за счет лоренцевых сил, возникающих из-за движения заряженной поверхности спутника в магнитном поле Земли [11–13]; $M_u = q\vec{\rho} \times \Theta^T (\vec{V}_c \times \vec{B}(t))$; q – электростатический заряд; ρ – радиус-вектор центра заряда спутника относительно его центра масс; V_c – скорость центра масс спутника; $B(t)$ – вектор индукции геомагнитного поля, которое аппроксимируется прямым магнитным диполем в орбитальной системе координат [15].

$$B(t) = \frac{\mu_e}{R^3} \begin{pmatrix} \cos \omega_o t \cdot \sin I \\ -\cos I \\ 2 \sin \omega_o t \cdot \sin I \end{pmatrix} = \frac{\mu_e}{R^3} (b_1 e_\tau + b_2 e_n + b_3 e_r),$$

где $b_1 = \cos \omega_o t \cdot \sin I$; $b_2 = -\cos I$; $b_3 = 2 \sin \omega_o t \cdot \sin I$; I – угол наклона плоскости орбиты спутника к плоскости экватора; μ_e – постоянная магнитного поля Земли; R – радиус орбиты центра масс спутника.

В полусвязной системе координат вектор $B(t) = \frac{\mu_e}{R^3} (B_1 \ B_2 \ B_3)$,

$$\begin{aligned}\text{где} \quad B_1 &= b_1 \cos \beta + b_2 \sin \alpha \cdot \sin \beta - b_3 \cos \alpha \cdot \sin \beta, \\ B_2 &= b_2 \cos \alpha + b_3 \sin \alpha, \\ B_3 &= b_1 \sin \beta - b_2 \sin \alpha \cdot \cos \beta + b_3 \cos \alpha \cdot \cos \beta.\end{aligned}$$

Далее будем считать, что центр заряда поверхности спутника расположен на оси симметрии спутника, т.е. $\rho = (0, 0, z_0)^T$.

Компоненты гравитационного M_g и управляющего момента M_u в системе координат $Oxuz$ имеют вид

$$M_{g1} = 3\omega_o^2 (J_3 - J_1) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta,$$

$$M_{g2} = 3\omega_o^2 (J_3 - J_1) \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta,$$

$$M_{g3} = 0,$$

$$M_{u1} = m(2 \cos \alpha \cdot \sin \omega_o t \cdot \sin I + \sin \alpha \cdot \cos I),$$

$$M_{u2} = m(\sin \beta (2 \sin \alpha \cdot \sin \omega_o t \cdot \sin I - \cos \alpha \cdot \cos I)),$$

$$M_{u3} = 0,$$

где $m = \frac{\mu_e \omega_o q z_0}{R^2}$ – управляющее воздействие.

Уравнения движения с учетом полученных выражений для моментов представляются в виде

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\alpha} \cos \beta - 2J_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta + (2J_1 \omega_0 \sin \alpha \cdot \cos \beta + J_3 r_0) \dot{\beta} + J_3 r_0 \omega_0 \cos \alpha + \\ + \omega_0^2 (4J_1 - 3J_3) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta = m(2 \sin \omega_0 t \cdot \sin I \cdot \cos \alpha + \cos I \cdot \sin \alpha), \\ J_1 \ddot{\beta} + J_1 \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cdot \cos \beta - (2J_1 \omega_0 \sin \alpha \cdot \cos^2 \beta + J_3 r_0 \cos \beta) \dot{\alpha} - J_1 \omega_0^2 \sin^2 \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta - \\ - J_3 r_0 \omega_0 \sin \alpha \cdot \sin \beta + 3\omega_0^2 (J_1 - J_3) \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta = \\ = m(-2 \sin \omega_0 t \cdot \sin I \cdot \sin \alpha (\sin \beta + \cos I \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha)). \end{cases}$$

Здесь $r_0 = \dot{\alpha} \sin \beta - \omega_0 \sin \alpha \cdot \cos \beta + \dot{\phi}$.

Переходя в уравнениях к безразмерным переменным, вводя обозначения $\tau = \omega_0 t$, $u = m\omega_0 / R^2$,

$a = r_0 / \omega_0$, $b = J_3 / J_1$ и при этом сохраняя старые обозначения для дифференцирования по τ , получим

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta + (2 \sin \alpha \cdot \cos \beta + ab) \dot{\beta} + ab \cos \alpha + (4 - 3b) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta = \\ = u(2 \sin \tau \cdot \sin I \cdot \cos \alpha + \cos I \cdot \sin \alpha), \\ \ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cdot \cos \beta - (2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \beta + ba \cos \beta) \dot{\alpha} - \sin^2 \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta - ab \sin \alpha \cdot \sin \beta + \\ + 3(1 - b) \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta = u(-2 \sin \tau \cdot \sin I \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos I \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha). \end{cases}$$

Стационарные движения

В отсутствие управляющих моментов ($m = 0$) уравнения движения допускают стационарные решения (регулярные прецессии)

$$\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = 0, \dot{\phi} = \Omega = \text{const.}$$

Уравнения стационарных движений

$$\begin{cases} \cos \alpha_0 (ab + (4 - 3b) \sin \alpha_0 \cdot \cos \beta_0) = 0, \\ \sin \beta_0 (3(b - 1) \cos^2 \alpha_0 \cdot \cos \beta_0 + \\ + ab \sin \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0 \cdot \cos \beta_0) = 0 \end{cases}$$

имеют известные решения, которые называют [16, 17] цилиндрической, гиперболоидальной и конической прецессиями: 1) $\cos \alpha_0 = 0$, $\sin \beta_0 = 0$, ось симметрии перпендикулярна плоскости орбиты; 2) $\cos \alpha_0 = 0$, $\cos \beta_0 = -ab$, ось симметрии перпендикулярна радиус-вектору; 3) $\sin \alpha_0 = \frac{ab}{3b - 4}$, $\sin \beta_0 = 0$, ось симметрии перпендикулярна касательной к орбите.

Стабилизация стационарных движений

Требуется построить управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость стационарных движений. Управляющий момент следует формировать в виде обратной связи по компонентам вектора состояния $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$.

Управление строится для линеаризованных уравнений возмущенного движения, которые являются нестационарными. Эти уравнения приводятся к стационарным системам большего порядка. Управляемость в рассматриваемых задачах исследуется как исходя из нестационарных систем, так и анализируя приведенные стационарные системы. Исследование управляемости

стационарной системы – необходимый этап для построения корректных алгоритмов стабилизации, основанных на этих системах. Если стационарная система управляема, то управляема и исходная система. Однако неуправляемость стационарной системы (в силу ее избыточности) может и не повлечь неуправляемость исходной системы.

Управляемость стационарных систем можно исследовать, выявляя условия существования в системе линейных интегралов, не зависящих от управления. А затем можно проверить управляемость исходных нестационарных систем в полученных критических случаях.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ К СТАЦИОНАРНЫМ СИСТЕМАМ. УПРАВЛЯЕМОСТЬ

Цилиндрическая прецессия. $\alpha_0 = \pi/2$, $\beta_0 = 0$.

В возмущенном движении положим

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + x_1, \beta = x_2.$$

Линеаризованные уравнения управляемого движения являются стационарными и имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + k_1 \dot{x}_2 - k_2 x_1 = u \cos I, \\ \ddot{x}_2 - k_1 \dot{x}_1 - k_3 x_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $k_1 = 2 + ab$, $k_2 = 4 + ab - 3b$, $k_3 = 1 + ab$.

На полярной орбите ($\cos I = 0$) система (1), очевидно, неуправляема.

Используя критерий Калмана, можно показать, что исходная стационарная система (1) неуправляема при $k_1 = 0$ или при $k_3 = 0$. Это озна-

чает, что система неуправляема при выполнении одного из соотношений $2+ab=0$ и $1+ab=0$, т.е. $\Omega = \omega_0(1-2/b)$ или $\Omega = \omega_0(1-1/b)$.

Ранее рассматривалась задача стабилизации при помощи моментов, создаваемых за счет взаимодействия собственного магнитного момента спутника с геомагнитным полем [10]. В этом случае система неуправляема на экваториальной орбите или при одновременном выполнении следующих условий: $b=1$ и $a=-2$.

Гиперболоидальная прецессия. $\alpha_0 = \pi/2$, $\cos\beta_0 = -ab$.

В возмущенном движении положим

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + x_1, \beta = \beta_0 + x_2.$$

Линеаризованные уравнения управляемого движения имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 + kx_1 = ud_1^2, \\ \ddot{x}_2 - \cos^2\beta_0\dot{x}_1 + \sin^2\beta_0x_2 = ud_2^2 \sin\tau. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $k = 3(b-1)$, $d_1^2 = \frac{\cos I}{\cos\beta_0}$ и $d_2^2 = -2\sin\beta_0 \cdot \sin I$.

Согласно [18] введем новые переменные y_j ($j=1, \dots, 6$) по формулам

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \cos\tau + y_3 \sin\tau + y_5, \\ x_2 = y_2 \cos\tau + y_4 \sin\tau + y_6. \end{cases} \quad (3)$$

Новые переменные удовлетворяют стационарной системе

$$\begin{cases} \dot{y}_1 + \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 + ly_1 + y_4 = 0, \\ \dot{y}_2 - \cos^2\beta_0\dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 - \cos^2\beta_0y_2 - \cos^2\beta_0y_3 = 0, \\ \dot{y}_3 - 2\dot{y}_1 + \dot{y}_4 - y_2 + ly_3 = 0, \\ \dot{y}_4 - 2\dot{y}_2 - \cos^2\beta_0\dot{y}_3 + \cos^2\beta_0y_1 - \\ - \cos^2\beta_0y_4 = ud_2^2, \\ \dot{y}_5 + \dot{y}_6 + ky_5 = ud_1^2, \\ \dot{y}_6 - \cos^2\beta_0\dot{y}_5 + \sin^2\beta_0y_6 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $l = k - 1$.

Рассмотрим управляемость нестационарной системы (2) и стационарной системы (4).

Если орбита экваториальная ($\sin I = 0$), то система (2) становится стационарной, и она является управляемой при $\sin\beta_0 \neq 0$.

На экваториальной орбите система (2) является стационарной, и вводить новые переменные не требуется. Система является управляемой при любых параметрах.

Если орбита полярная ($\cos I = 0$), то $d_1^2 = 0$, и вводить переменные y_5, y_6 не требуется. В этом случае условие неуправляемости как для

системы (2), так и для системы (4) примет вид $b=1$, т.е. $J_3 = J_1$ или $\sin\beta_0 = 0$.

Если орбита не является ни экваториальной, ни полярной, то как система (2), так и (4) управляема при $b \neq 1$ и $\sin\beta_0 \neq 0$.

При стабилизации за счет взаимодействия собственного магнитного момента спутника с геомагнитным полем [10] система неуправляема на полярной и экваториальной орбите, только если $b=1$. Если орбита не является ни экваториальной, ни полярной, то система управляема при любых параметрах.

Коническая прецессия. $\sin\alpha_0 = \frac{ab}{3b-4}$, $\beta_0 = 0$.

В возмущенном движении положим

$$\alpha = \alpha_0 + x_1, \beta = x_2.$$

В этом случае линеаризованные уравнения управляемого движения имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + n_1\dot{x}_2 + n_2x_1 = u(d_1 + d_2 \sin\tau), \\ \ddot{x}_2 - n_1\dot{x}_1 + n_3x_2 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $n_1 = (3b-2)\sin\alpha_0$, $n_2 = (4-3b)\cos^2\alpha_0$, $n_3 = 3(1-b)$, $d_1^3 = \sin\alpha_0 \cdot \cos I$, $d_2^3 = 2\cos\alpha_0 \cdot \sin I$.

Как и выше, согласно [18] введем новые переменные y_j ($j=1, \dots, 6$) по формулам (3). Новые переменные удовлетворяют стационарной системе

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + n_1\dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 + \tilde{n}_2y_1 + n_1y_4 = 0, \\ \ddot{y}_2 - n_1\dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 + \tilde{n}_3y_2 - n_1y_3 = 0, \\ \ddot{y}_3 - 2\dot{y}_1 + n_1\dot{y}_4 - n_1y_2 + \tilde{n}_2y_3 = ud_2^3, \\ \ddot{y}_4 - 2\dot{y}_2 - n_1\dot{y}_3 + n_1y_1 + \tilde{n}_3y_4 = 0, \\ \ddot{y}_5 + n_1\dot{y}_6 + n_2y_5 = ud_1^3, \\ \ddot{y}_6 - n_1\dot{y}_5 + n_3y_6 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $\tilde{n}_2 = n_2 - 1$, $\tilde{n}_3 = n_3 - 1$.

Если $\cos\alpha_0 = 0$, или $b=1$, или $b=2/3$, то система (5) неуправляема при любом I .

На экваториальной орбите ($\sin I = 0$) у системы (5) появляется дополнительное условие неуправляемости: $\sin\alpha_0 = 0$.

На полярной орбите ($\cos I = 0$) появляется дополнительное условие неуправляемости системы (5): $\cos\alpha_0 = 0$.

Для расширенной стационарной системы (6) помимо вышеперечисленных существует условие неуправляемости $\sin^2\alpha_0 = 1/2$.

При стабилизации за счет взаимодействия собственного магнитного момента спутника с геомагнитным полем [10] на экваториальной орбите система неуправляема, если $b=2/3$ или

$b = 1$. На полярной орбите система неуправляема, если $b = 2/3$ или $\sin^2 \alpha_0 = 1/2$. Если орбита не является ни экваториальной, ни полярной, то система управляема при любых параметрах.

Построение стабилизирующего управления

Способ построения алгоритма стабилизации

Для гиперболоидальной и конической прецессий поведение вектора $x = (x_1 \ x_2)^T$ исходной системы описывается нестационарными системами (2) и (5) соответственно. Для построения алгоритмов стабилизации эти системы должны быть представлены в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{X} = A_x X + B_x u, X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \\ A_x = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} a_{11}^j & 0 \\ 0 & a_{22}^j \end{pmatrix}, \\ A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & a_{14}^j \\ a_{23}^j & 0 \end{pmatrix}, B_x = \begin{bmatrix} O_{21} \\ B_{21} \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{pmatrix} b_1^j \\ b_2^j \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (7)$$

Одна из основных идей предлагаемого метода состоит в использовании построенных стационарных систем (4) и (6) для выбора стабилизирующего управления. Это алгоритмизированный, устойчивый в работе способ, удобный для применения (см. работы [4, 5, 10, 18]).

Задача стабилизации состоит в том, чтобы построить управление, обеспечивающее при $\tau \rightarrow \infty$ стремление к нулю компонент вектора состояния $Y(2n \times 1)$ системы, полученной из указанных стационарных систем:

$$\dot{Y} = A_y Y + B_y u, Y = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Предполагается, что пара A_y, B_y управляема. Матрицу коэффициентов управления можно выбрать из условия минимума квадратичного функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty Y^T Q Y + \gamma u^2 d\tau,$$

где Q – неотрицательно определенная постоянная матрица соответствующей размерности, $\text{const} > 0$. Оптимальное управление имеет вид [19]

$$u = -K_y Y(\tau), K_y = \frac{1}{\gamma} B_y^T P.$$

Матрица P размерности $2n \times 2n$ является решением матричного уравнения Риккати

$$\dot{P} = -PA_y - A_y P + \frac{1}{\gamma} PB_y B_y^T P - Q. \quad (9)$$

Система (7) стационарна и управляема, поэтому уравнение (9) имеет положительно

определенное стационарное решение, совпадающее с единственным решением алгебраического уравнения Риккати

$$PA_y + A_y P - \frac{1}{\gamma} PB_y B_y^T P + Q = 0.$$

Синтезированное на основе расширенной стационарной системы управляющее воздействие является функцией переменных $Y(\tau)$ стационарной системы более высокого порядка, чем исходная нестационарная система. Для введения управления непосредственно в исходную систему следует выразить вектор Y через вектор x исходной системы, дополненный некоторым вектором x' , и их производные. Вектор $\xi = (x \ x')^T$ и вектор y связаны соотношением

$$\xi = T_Y y, T_Y = \begin{bmatrix} F(\tau) \\ D(\tau) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Дополнительный вектор x' вводится таким образом, чтобы квадратная матрица T_Y была невырожденной. Введем вектор $\eta = (\xi \ \xi)^T$. Тогда управление может быть записано в виде

$$u(\tau) = -K_y T_Y(\tau) \eta(\tau). \quad (11)$$

Уравления для дополнительного вектора $X' = (x' \ \dot{x}')^T$ имеют вид

$$\dot{X}' = A' X' + B(\tau) u. \quad (12)$$

Расширенная нестационарная система для построения алгоритма стабилизации состоит из исходной системы (7) и системы (12), где управление формируется согласно (11) с учетом формул (10).

Решения этой расширенной нестационарной системы, замкнутой управлением (11), стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ в силу выбора матрицы K_y , так как компоненты вектора ξ связаны с компонентами вектора y ограниченным преобразованием (10).

Алгоритм стабилизации регулярных прецессий

1. Цилиндрическая прецессия.

Поскольку система (1) стационарна, то вводить дополнительные переменные не требуется. Процесс стабилизации заключается в нахождении постоянных коэффициентов управления K_x для решения задачи оптимальной стабилизации стационарной системы (на основе алгебраического уравнения Риккати).

2. Гиперболоидальная и коническая прецессии.

Матрицы F, D преобразования (9) имеют вид

$$F = \begin{bmatrix} E_2 \cos \tau & E_2 \sin \tau & E_2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 & O_2 \\ E_2 & O_2 & O_2 \end{bmatrix}.$$

Матрицы расширенной нестационарной системы (7), (12) в этом случае имеют вид

$$A_x = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21}^j & A_{22}^j \end{bmatrix}, B_x = \begin{bmatrix} O_{21} \\ B_{21}^j \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} O_{66} & E_6 \\ A_1' & A_2' \end{bmatrix},$$

$$A_1' = \begin{bmatrix} A_{23}^j & -A_{22}^j & O_{22} \\ A_{22}^j & A_{23}^j & O_{22} \\ O_{22} & O_{22} & A_{21}^j \end{bmatrix}, A_2' = \begin{bmatrix} A_{22}^j & 2E_2 & O_{22} \\ -2E_2 & A_{22}^j & O_{22} \\ O_{22} & O_{22} & A_{22}^j \end{bmatrix},$$

$$B' = \begin{bmatrix} O_{61} \\ \tilde{B}' \end{bmatrix}, \tilde{B}' = \begin{bmatrix} O_{21} \\ B_2^j \\ B_3^j \end{bmatrix}.$$

Для гиперболоидальной прецессии:

$$A_{21}^2 = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -\sin^2 \beta_0 \end{pmatrix}, A_{22}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \cos^2 \beta_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{23}^2 = \begin{pmatrix} -l & 0 \\ 0 & \cos^2 \beta_0 \end{pmatrix}, B_{21}^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \sin \tau \end{pmatrix},$$

$$B_2^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ d_2^2 \end{pmatrix}, B_3^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для конической прецессии:

$$A_{21}^3 = \begin{pmatrix} -n_2 & 0 \\ 0 & -n_3 \end{pmatrix}, A_{22}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -n_1 \\ n_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{23}^3 = \begin{pmatrix} -\tilde{n}_2 & 0 \\ 0 & -\tilde{n}_3 \end{pmatrix}, B_{21}^3 = \begin{pmatrix} d_1^3 + d_2^3 \sin \tau \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2^3 = \begin{pmatrix} d_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}, B_3^3 = \begin{pmatrix} d_1^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, алгоритм стабилизации нестационарных систем для указанных случаев прецессий состоит из трех этапов:

1) нахождение постоянных коэффициентов управления K_y для решения задачи оптимальной стабилизации соответствующей стационарной системы (на основе алгебраического уравнения Риккати);

2) построение управления в виде соотношений (10) с помощью невырожденных преобразований $T(\tau)$;

3) решение расширенной нестационарной системы, содержащей исходную нестационарную систему (6) и уравнения для вспомогательных переменных (11).

Моделирование

Цель приведенных ниже результатов моделирования – показать принципиальную применимость предложенных алгоритмов и продемонстрировать их работоспособность. Моделирование проводилось при помощи стандартного пакета Wolfram mathematica v11.0. Коэффициенты управления выбирались при помощи стандартной программы LQR для стационарных систем (7).

Наклон орбиты движения спутника $I = \pi/6$. Начальные отклонения по углам $x_1(0) = x_2(0) = 0.1$; по скоростям $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

Для цилиндрической прецессии и параметров $a = 5, b = 1.5, \gamma = 1, Q = E$ результаты моделирования представлены на рис. 1а, б.

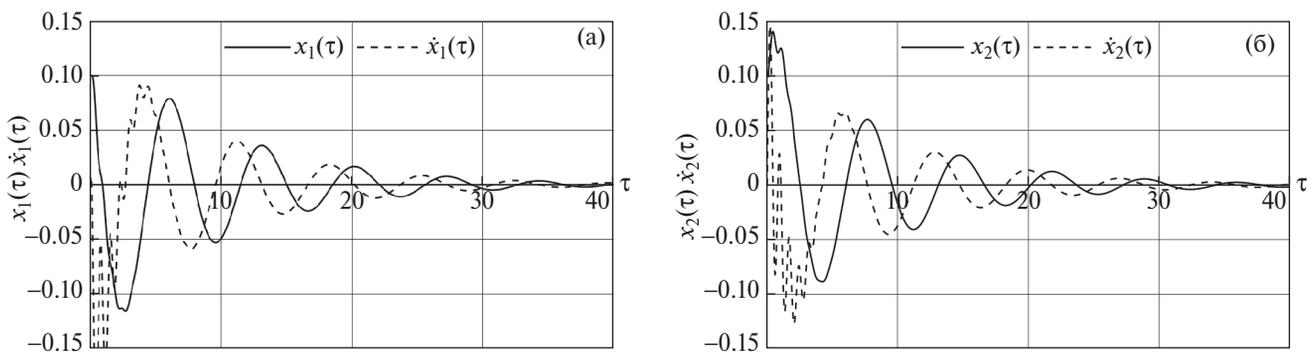


Рис. 1.

Для цилиндрической прецессии и параметров $a = 5, b = 0.5, \gamma = 1, Q = E$ результаты моделирования представлены на рис. 2а, б.

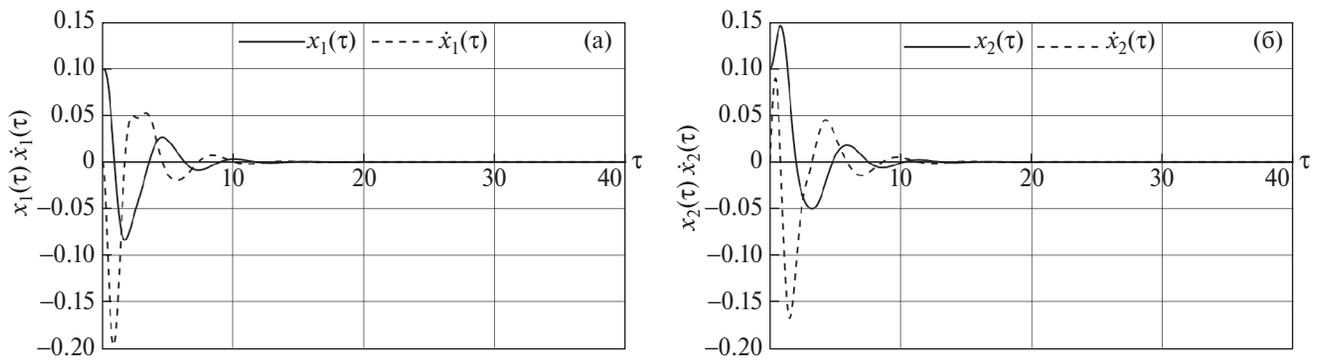


Рис. 2.

Для гиперболической прецессии и параметров $a = 1.5$, $b = 0.5$, $\gamma = 1$, $Q = E$ результаты моделирования представлены на рис. 3а, б.

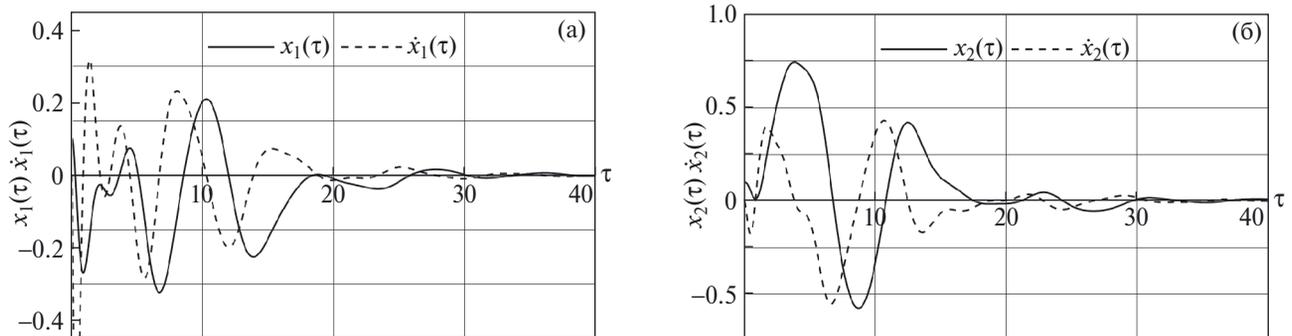


Рис. 3.

Для конической прецессии и параметров $a = -10$, $b = 0.05$, $\gamma = 1$, $Q = E$ результаты моделирования представлены на рис. 4а, б.

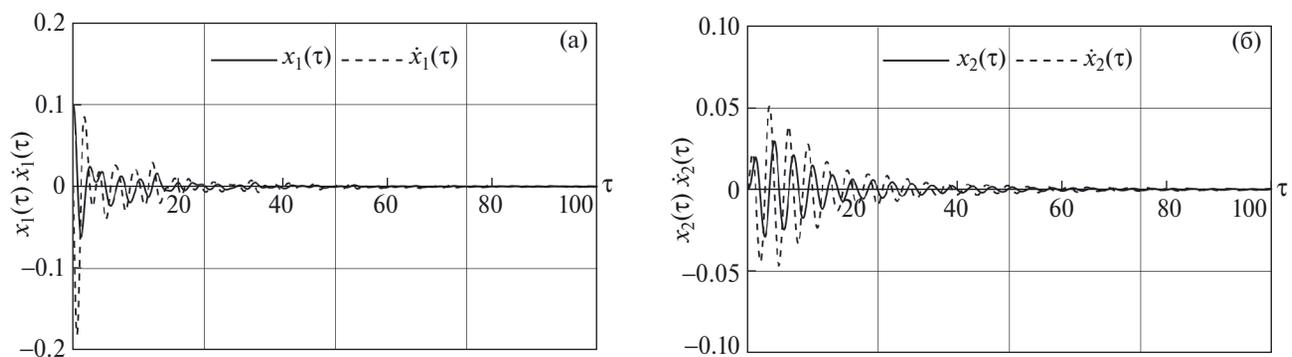


Рис. 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов В. М.* Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационных магнитных и аэродинамических моментов // *Косм. исслед.* 1967. Т. 5. № 5. С. 727–732.
2. *Морозов В. М.* Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов // *Косм. исслед.* 1969. Т. 7. № 3. С. 395–401.
3. *Морозов В. М.* Устойчивость движения космических аппаратов // *Итоги науки и техники. Сер. «Общая механика».* М.: ВИНТИ, 1971. С. 1–83.
4. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации // *Косм. исслед.* 2020. Т. 58. № 3. С. 199–207.
5. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов // *Косм. исслед.* 2021. Т. 59. № 5. С. 393–407.
6. *Kalenova V.I., Morozov V.M.* Novel Approach to Attitude Stabilization of Satellite using Geomagnetic Lorentz forces // *Aerospace Science and Technology.* 2020. V. 106. Art. ID. 106105. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.106105>
7. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил // *Косм. исслед.* 2022. Т. 60. № 3. С. 246–253.
8. *Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С.* Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников // *Космические аппараты и технологии.* 2019. Т. 3. № 2 (28). С. 73–86. <https://doi.org/10.26732/2618-7957-2019-2-73-86>
9. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D.S.* A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites // *Progress in Aerospace Sciences.* 2019. V. 109. Art. ID. 100546. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2019.05.006>
10. *Каленова В. И., Морозов В. М., Рак М. Г.* О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов // *Прикладная математика и механика.* 2021. Т. 85. № 4. С. 436–453. <https://doi.org/10.31857/S003282352104010X>
11. *Тихонов А. А.* Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // *Косм. исслед.* 2003. Т. 41. № 1. С. 69–79.
12. *Antipov K.A., Tikhonov A.A.* On satellite electrodynamic attitude stabilization // *Aerospace Science and Technology.* 2014. V. 33. P. 92–99. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2014.01.004>
13. *Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A.A.* Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system // *Advances in Space Research.* 2018. V. 62. P. 142–151. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.04.006>
14. *Лурье А. А.* Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.
15. *Wertz J.* Spacecraft attitude determination and control. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company, 1978. 876 p.
16. *Likins P.W.* Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame // *J. Astronautical Sciences.* 1965. V. 12 (1). P. 18–24.
17. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Московского ун-та, 1975. 308 с.
18. *Каленова В. И., Морозов В. М.* Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010. 208 с.
19. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.