

Том 62, Номер 3

ISSN 0023-4206

Май–Июнь



КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 62, номер 3, 2024

Модель потоков высокоэнергичных электронов на орбитах ГЛОНАСС <i>П. И. Шустов, А. А. Петрукович, А. В. Артемьев</i>	239
Радиационная стойкость покрытия для космических аппаратов, полученного принтерной печатью <i>М. М. Михайлов, С. А. Артищев, А. Н. Лапин, С. А. Юрьев, В. А. Горончко, Н. С. Труфанова, О. А. Михайлова, Д. С. Федосов</i>	249
О температурах аэродинамического нагрева сферических микрочастиц, моделирующих микробиологические объекты, входящие в атмосферу Земли с космическими скоростями <i>Е. К. Колесников, С. В. Чернов</i>	254
Оптимизация траекторий с малой тягой в переменных Кустаанхеймо–Штифеля <i>К. Р. Корнеев, С. П. Трофимов</i>	264
Об асимптотических свойствах вековой части пертурбационной функции в ограниченной круговой задаче трех тел <i>П. С. Красильников, А. В. Доброславский</i>	275
Управление процессом сближения тросовой системы с пассивным космическим объектом на околокруговой орбите <i>Ю. М. Заболотнов, Чанцин Ван, Чжэн Минь</i>	285
Мультипольное представление поля притяжения астероида (433) Эрос <i>А. А. Буров, В. И. Никонов</i>	295
Модельная задача о движении по леерной связи под солнечным парусом <i>В. С. Васькова, А. В. Родников</i>	302
О движениях гантели в обобщенной круговой задаче Ситникова <i>П. С. Красильников, А. Е. Байков</i>	311

УДК: 533.9

МОДЕЛЬ ПОТОКОВ ВЫСОКОЭНЕРГИЧНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ НА ОРБИТАХ ГЛОНАСС

© 2024 г. П. И. Шустов*, А. А. Петрукович, А. В. Артемьев

Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

*p.shustov@gmail.com

Поступила в редакцию 25.12.2022

Переработанный вариант 02.07.2023

Принята к публикации 01.08.2023

Моделирование динамики потоков энергичных электронов во внутренней магнитосфере Земли представляет собой актуальную задачу изучения “космической погоды”, учитывая роль, которую энергичные электроны играют в сбоях аппаратуры космических аппаратов. В настоящей работе исследуется возможность построения эмпирической модели потоков электронов на средневысотной круговой орбите спутников ГЛОНАСС. В качестве основной базы данных потоков использованы измерения спутниковой миссии *Radiation Belt Storm Probes* за 2012–2019 гг. Околоэкваториальные измерения *Radiation Belt Storm Probes* спроецированы на высоты орбит спутников ГЛОНАСС с использованием эмпирической модели магнитного поля. Главной особенностью представляемой модели потоков энергичных электронов является тот факт, что вместо среднего потока модель восстанавливает функцию распределения вероятностей амплитуд потоков в зависимости от энергии электронов и геомагнитных условий.

DOI: 10.31857/S0023420624030019, EDN: JKPVMJ

ВВЕДЕНИЕ

Динамика потоков высокоэнергичных электронов во внешнем радиационном поясе земной магнитосферы контролируется широким спектром разномасштабных процессов, ответственных как за потери электронов, так и за их ускорение [1, 2]. Основные причины потерь электронов — это различные эффекты резонансного взаимодействия волна — частица, приводящие к высыпанию электронов в ионосферу [3], а также эффекты радиального транспорта электронов, включающие транспорт к границе магнитосферы, магнитопаузы, и потери электронов за счет их ухода в магнитослой [4, 5]. Основными процессами, влияющими на ускорение электронов и рост их потоков, являются процессы локального ускорения за счет резонансного взаимодействия с волнами [6, 7] и процессы нагрева при радиальном транспорте [8–10]. Современные модели радиационных поясов включают детальное описание существенной части данных процессов [11–15], эффективность которых, как правило, определяется из статистических моделей волновой активности [16–19] и характеризуется индексами геомагнитной активности [20–22]. При этом несмотря на то, что точность расчетов и перечень рассматриваемых физических процессов в таких моделях постоянно растет, использование рассчитанных распределений потоков энергичных электронов все еще уступает по точности прогноза использованию эмпирических моделей таких потоков [23–26].

Важность разработки, верификации и совершенствования эмпирических моделей обусловлена, в первую очередь, необходимостью аккуратно предсказывать динамические диапазоны потоков энергичных электронов на орбитах спутников [27–31]. Существенные вариации таких потоков в ходе крупномасштабных геомагнитных возмущений (мощных суббурь и бурь) могут нанести значительный ущерб чувствительной электронике спутников [32]. Наибольший риск для спутниковой электроники представляет общая ионизирующая доза радиации (total ionizing dose), которая определяет ионизацию в полупроводниковых элементах, взаимодействующих с релятивистскими электронами радиационных поясов Земли [33, 34]. Эффект ионизации приводит к сбоям в работе спутниковой электроники и, в отдельных случаях, к потере аппаратов [35, 36, 28]. При этом следует отметить, что общая доза ионизации и поглощенная доза радиации определяются интегральным (во времени) эффектом взаимодействия электроники и релятивистских электронов, приводящим к постепенной деградации полупроводниковых элементов [35, 37, 34]. Как правило, спутниковая электроника защищена от ионизации алюминиевым покрытием толщиной в несколько миллиметров, которое существенно образом уменьшает потоки электронов с энергиями менее 1 МэВ [35, 37]. Таким образом, наибольшую опасность представляют длительные интервалы повышенных потоков с энергиями выше 1 МэВ [35], а модели потоков электронов

должны хорошо воспроизводить статистику таких редких временных интервалов. При этом потоки релятивистских электронов представляют наибольшую опасность для спутников с орбитами на высотах от 20000 до 40000 км, пересекающими внешний радиационный пояс Земли, в котором в ходе геомагнитных бурь на длительных интервалах фиксируются повышенные потоки электронов с энергией 1...2 МэВ [38, 39, 28, 24, 40, 41].

Основным подходом к построению эмпирических моделей потоков энергичных электронов является сбор больших статистических баз данных спутниковых измерений, в которых амплитуда потока для заданного диапазона энергии распределяется в параметрическом пространстве координат (как правило, заданных L -оболочкой и магнитной широтой) и пространстве геомагнитных индексов и параметров солнечного ветра [42, 43]. Такие базы данных могут использоваться как для построения аппроксимаций потоков, как функций геомагнитных индексов и пространственных координат [44, 45], так и для построения более сложных статистических моделей, использующих методы машинного обучения [46–50]. И в том, и в другом случае вариабельность конфигурации магнитного поля в ходе геомагнитных возмущений учитывается при нахождении пространственных координат (L -оболочки), а основным результатом модели становится значение потока в соответствующем диапазоне модельных параметров. Очевидным неустранимым недостатком такого подхода является однозначность сопоставления величины потока и ограниченного набора параметров системы, в то время как из-за невозможности учета всех факторов, определяющих динамику потоков, для любого заданного диапазона параметров спутниковые измерения выдают некоторое распределение амплитуды потоков. Характеризовать такое распределение средними (или средними взвешенными) значениями удобно с точки зрения аппроксимаций модели, но при этом теряется информация о динамическом диапазоне вариаций потоков в каждом из модельных диапазонов параметров системы.

Основная идея настоящей работы состоит в создании статистической модели потоков энергичных электронов, которая для заданных характеристик энергии и параметров геомагнитной активности предоставляет распределение вероятностей наблюдения потоков различной амплитуды. В качестве пространственной области, для которой создается данная модель, выбрана область средневысотной круговой орбиты спутников ГЛОНАСС с высотой порядка 19400 км ($\sim 3R_E$, три радиуса Земли). Создаваемая модель основана на данных измерений спутников *Van Allen Probes*, ранее носивших название *Radiation Belt Storm Probes (RBSP)* [51], и проекции этих измерений вдоль силовых линий магнитного поля, восстановленных по эмпирической модели магнитного поля [52].

Спутниковые данные

В представленной работе используются данные со спутниковой миссии *Van Allen Probes (RBSP)* [53]. Данная спутниковая миссия состоит из двух слабо разнесенных космических аппаратов, вращающихся по одинаковой экваториальной (наклонение 10°) сильно эллиптической орбите с высотами перигея ~ 620 км ($1.1R_E$) и апогея ~ 30000 км ($5.8R_E$), проработавших с октября 2012 по октябрь 2019 г. В работе используются данные прибора The Magnetic Electron Ion Spectrometer (MagEIS) [54]. Прибор представляет собой набор из четырех магнитных спектрометров, которые охватывают три различных диапазона энергии. MagEIS измеряет электроны от ~ 20 кэВ до 4 МэВ с разрешением в 23 энергетических диапазона и 11 питч-угловых интервалов. Кроме того, спектрометр MagEIS содержит твердотельный телескоп, регистрирующий протоны с энергиями от ~ 60 кэВ до ~ 1.3 МэВ.

Обработка данных

Для проекции значений потоков энергичных заряженных частиц на конкретную орбиту (в случае представленной работы — на орбиту спутников ГЛОНАСС) используются существующие модели магнитного поля в качестве “промежуточной ступени” между входными параметрами геомагнитной активности (Kp , D_{st} , $SymH$) и самими значениями предсказываемых потоков. Такая промежуточная ступень необходима для учета изменения в амплитудах потоков на заданной высоте при изменении конфигурации магнитного поля и, как следствие, смещении проекций околоэкваториальных измеряемых потоков.

Проецирование потоков заряженных частиц

Для каждого момента времени, когда доступно измерение потоков электронов, на спутниках *RBSP* используется трассировка положения спутника вдоль силовых линий магнитного поля в исследуемую область — на высоту $H_G = 3R_E$ от поверхности Земли (соответствует высоте орбиты ГЛОНАСС). Для трассировки используется эмпирическая модель магнитного поля T96 [55]. В силу экваториальности орбиты спутников *RBSP*, в большинстве случаев их траектории оказываются в непосредственной близости от самой удаленной от Земли точки пересекаемой силовой линии (рис. 1). Силовая линия может пересекать исследуемую высоту H_G в двух точках или не пересекать вовсе (за исключением вырожденного случая одного пересечения). Таким образом, каждому моменту времени наблюдений спутниковой миссии *RBSP* ставится в соответствие две координаты пересечения исследуемой поверхности, если такие пересечения есть. В итоговой статистике для каждого момента времени наблюдений записывается поток электронов, равный среднему значению от рассчитанных потоков

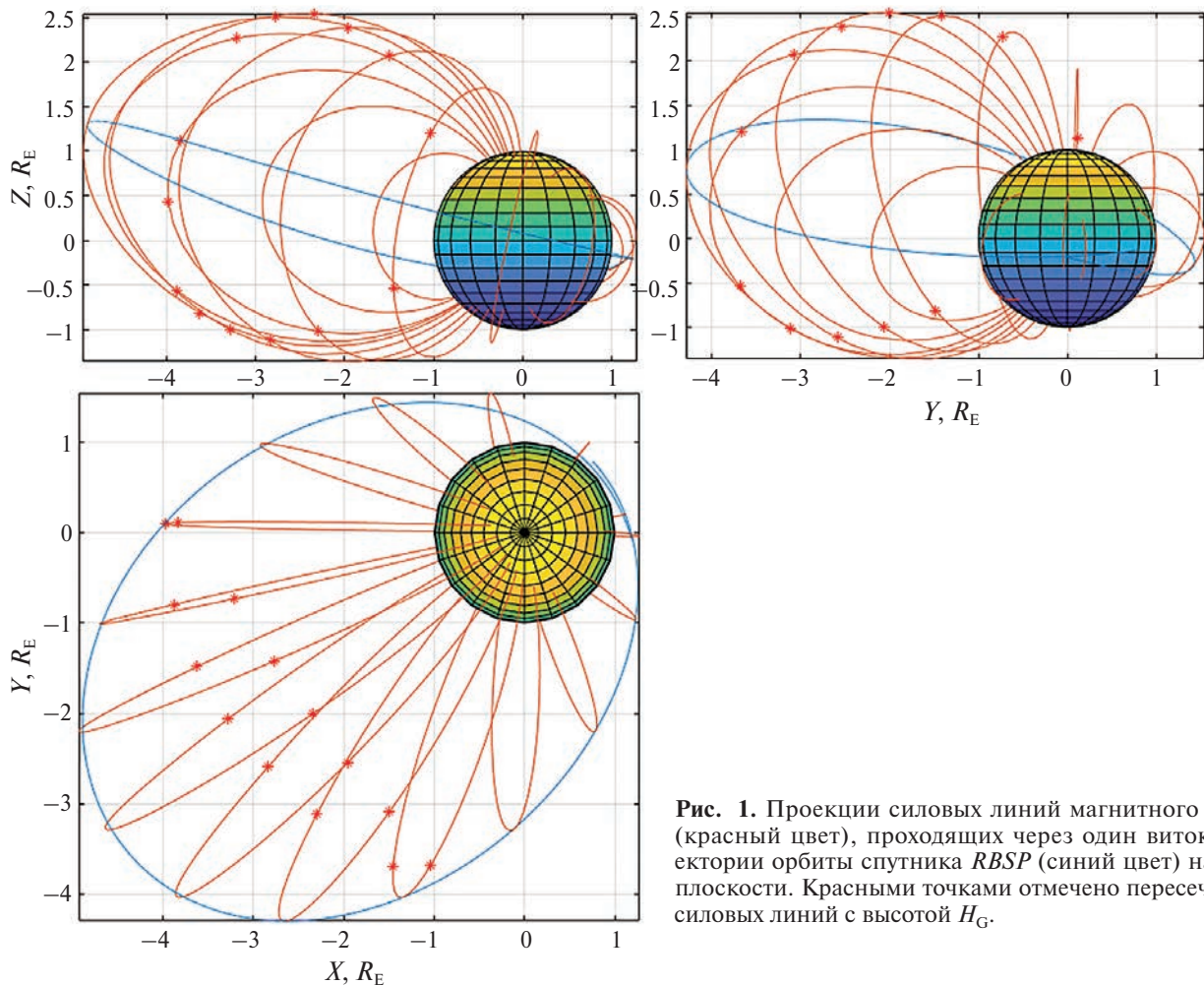


Рис. 1. Проекция силовых линий магнитного поля (красный цвет), проходящих через один виток траектории орбиты спутника *RBSP* (синий цвет) на три плоскости. Красными точками отмечено пересечение силовых линий с высотой H_G .

в Северном и Южном полушариях. Такое усреднение необходимо, чтобы избежать искусственного удвоения статистики спутниковых измерений за счет проекций в два полушария.

Для расчета полного потока заряженных частиц на исследуемой высоте H_G вводится сетка с малым шагом ($d\theta = 0.1^\circ$) по питч-углам (угол между направлением магнитного поля и скоростью электронов), и для каждой ячейки данной сетки ставится в соответствие поток $dF = f dS$, где f — дифференциальный поток в единичном телесном угле по данным со спутника *RBSP*, dS — площадь сферического сегмента питч-угловой ячейки. Далее, с использованием модельного магнитного поля, восстановленного по значениям геомагнитных индексов для каждого момента времени измерения потоков электронов, вычисляется вариация питч-угла при движении электронов вдоль силовой линии от точки наблюдения на спутнике к точке на исследуемой высоте H_G (данная вариация рассчитывается из предположения сохранения магнитного момента заряженных частиц). На этой основе определяются питч-угловые ячейки, частицы в которых доходят до исследуемой точки H_G . Сумма

потоков в данных питч-угловых ячейках и будет давать интегральный поток заряженных частиц на исследуемой высоте H_G . Рисунок 2 демонстрирует соотношение интегральных потоков энергичных электронов, измеренных спутниками *RBSP*, и интегральных потоков, спроектированных на исследуемую высоту H_G . Диагональ занята наблюдениями в непосредственной близости от исследуемой высоты H_G либо наблюдениями изотропных питч-угловых распределений: в обоих случаях геомагнитная проекция не меняет измеряемого потока. Ниже диагонали лежит основное количество наблюдений, для которых проекция вдоль силовых линий магнитного поля на исследуемую высоту H_G приводит к уменьшению потоков энергичных электронов. Как следствие, комбинация спутниковых измерений и эмпирической модели магнитного поля позволяет создать базу данных модельных измерений потоков электронов на поверхности заданной высоты в зависимости от энергии электронов и геомагнитных условий (в случае с T96 это геомагнитные индексы *Dst* или *SymH*).

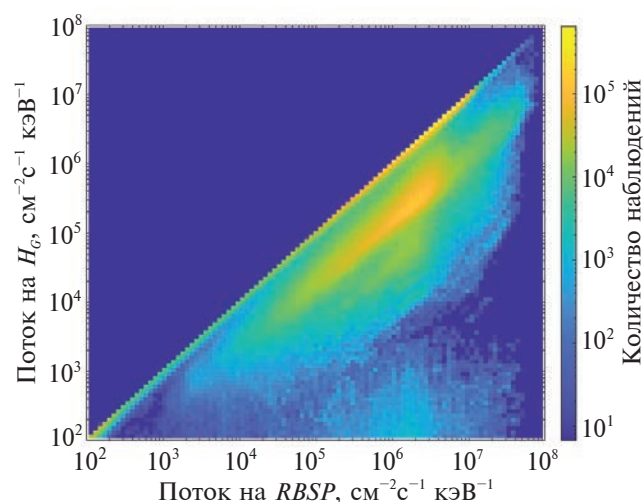


Рис. 2. Распределение потоков энергичных электронов с энергиями 33–4096 кэВ, измеренных на *RBSP*, и потоков на исследуемой высоте орбиты ГЛОНАСС, цветом показано количество измерений, попавших в диапазон параметров.

Анализ потоков заряженных частиц

В результате проекции измеряемых потоков энергичных электронов вдоль силовых линий магнитного поля на исследуемую высоту H_G получается база данных, которая состоит из амплитуды потоков, зависящих от энергии электронов и от геомагнитного индекса $SymH$ [56]. Распределение $SymH$ для всех доступных наблюдений *RBSP* представлено на рис. 3. Значениям $SymH > 20$ нТ соответствуют периоды сильного сжатия дневной магнитосферы под действием усиленного потока солнечного ветра, как правило, такие интервалы предвещают начало геомагнитных бурь. Сами бури соответствуют $SymH < -50$ нТ, когда сильный кольцевой ток горячих ионов существенно уменьшает экваториальное поле на близких к Земле расстояниях. При этом диапазон $SymH < -100$ нТ соответствует сильным бурям, для которых будет характерно существенное увеличение потоков релятивистских электронов. Для анализа зависимости потоков энергичных электронов от геомагнитного индекса $SymH$ диапазон всех значений $SymH$ разбивается на 80 равных интервалов, и выполняется отсечка в 1000 событий на интервал, что оставляет 50 интервалов в диапазоне $SymH$ от -150 до 50 нТ. Для каждого диапазона значений $SymH$ и энергии из доступного диапазона измерений выполняется сбор статистики потоков и статистики проекций потоков на исследуемую высоту $H_G = 3R_E$. Именно эти данные будут составлять эмпирическую основу модели.

На рис. 4 (левый столбец) приведены гистограммы числа наблюдений различной амплитуды потоков (в проекции на исследуемую высоту H_G для нескольких значений энергии (суммарно по всем значениям $SymH$)). Для анализа потоков

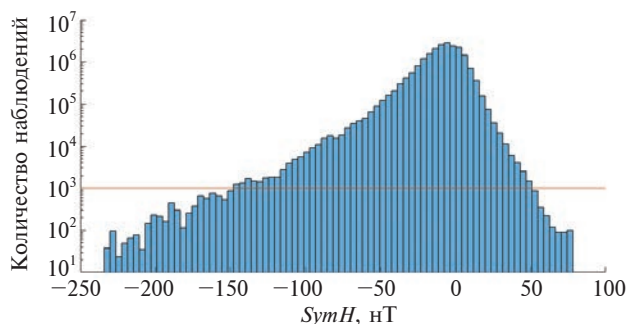


Рис. 3. Гистограмма количества наблюдений по данным *RBSP* от значения геомагнитного индекса $SymH$ в соответствующий момент времени. Горизонтальная линия соответствует 1000 наблюдениям, по которой выполняется отсечка.

энергичных электронов удобнее работать с плотностью вероятности наблюдения потоков в проекции на рассматриваемую высоту H_G , которая представлена на рис. 4 (правый столбец).

Для практического использования функций плотности вероятности наблюдения потоков удобно провести их аппроксимацию аналитическими функциями, которые будут описывать вероятность наблюдения потока заданной амплитуды при фиксированной энергии и геомагнитной активности ($SymH$). На рис. 5 представлены аппроксимации потоков электронов, спроецированных на высоту $H_G = 3R_E$, для нескольких значений энергии и геомагнитного индекса. Для аналитической аппроксимации плотности вероятности потока используется следующее выражение:

$$f(x; b, x_0) = \frac{1}{\Gamma(1-b)x_0^{1-b}} x^{-b} e^{-x/x_0}, \quad (1)$$

где x — значение потока; b и x_0 — параметры аппроксимации, отвечающие за наклон показательной части функции и точку “обрезания” потока на больших значениях (размерность потока: $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}\text{кэВ}^{-1}$); Γ — гамма-функция. Множитель в функции выбран для равенства единице интеграла по всем значениям потока. Ограничения на значения параметров: $0 < b < 1$ и $x_0 > 0$.

Процедура нахождения функциональных зависимостей значений x_0 и b от энергии и геомагнитного индекса $SymH$ состоит из двух этапов. На первом вычисляются значения параметров $x_0^{E, SymH}$ и $b^{E, SymH}$, которые наилучшим образом аппроксимируют плотность вероятности для каждой пары энергия/геомагнитный индекс в отдельности. Для простоты аппроксимации используется фиксация среднего значения потока для искомой функции плотности вероятности. Для приведенной выше формулы среднее значение $\bar{x} = x_0(1-b)$. Отсюда, приравнявая данное выражение к оценке среднего по выборке, можно исключить вариацию параметра x_0 , и рассмотреть однопараметрическую

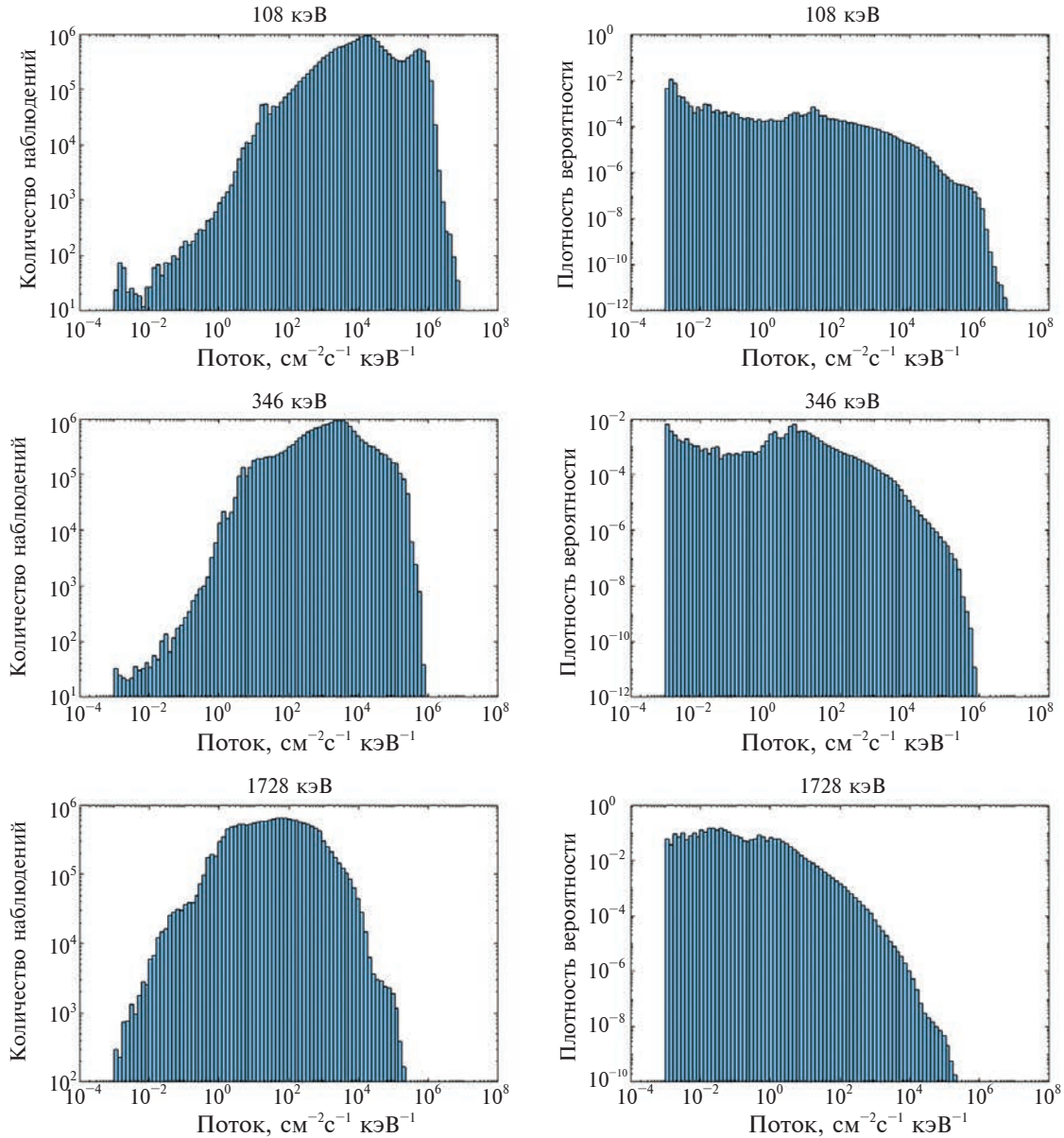


Рис. 4. Примеры гистограмм наблюдений различных значений потоков (слева) и соответствующей плотности вероятности потоков электронов для трех различных энергий (справа).

задачу оптимизации. Результаты аппроксимации представлены на рис. 6 синими точками, на левом графике — параметр $b^{E, SymH}$, на правом — параметр $x_0^{E, SymH}$, которые рассчитываются через среднее значение потока на выборке значений потоков.

Второй этап получения выражений $x_0(E, SymH)$ и $b(E, SymH)$ — аппроксимация набора значений $x_0^{E, SymH}$ и $b^{E, SymH}$ как функциональных зависимостей энергии E и геомагнитного индекса $SymH$. Данная функциональная зависимость представлена на рис. 6 в виде гладких поверхностей и является аппроксимацией значений параметров полиномиальными (лог-полиномиальными) функциями. Аппроксимация зависимости обоих параметров от

энергии выбрана логарифмически-линейной. Для аппроксимации зависимости от геомагнитного индекса $SymH$ для параметра b используется функция четвертого порядка, для параметра x_0 — второго порядка. Вид формул и значения коэффициентов (со среднеквадратическим отклонением) данных аппроксимаций — табл. 1, 2, приведены ниже:

$$b = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^4 b_{ij} \left(\ln \frac{E}{1 \text{ кэВ}} \right)^i (SymH)^j, \quad (2)$$

$$x_0 = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 x_{ij} \left(\ln \frac{E}{1 \text{ кэВ}} \right)^i (SymH)^j. \quad (3)$$

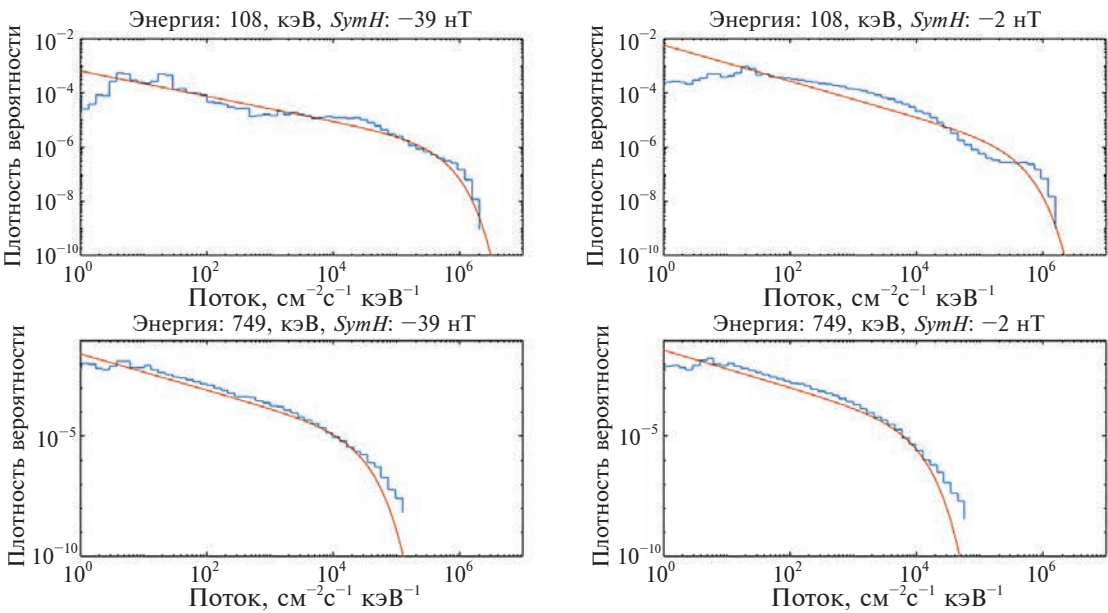


Рис. 5. Пример аппроксимации функций распределения для разных значений энергии и геомагнитного индекса. Синий цвет — плотность вероятности, получаемая по данным измерений потоков на спутниках *RBSP*, красный — аппроксимация представленной плотности вероятности.

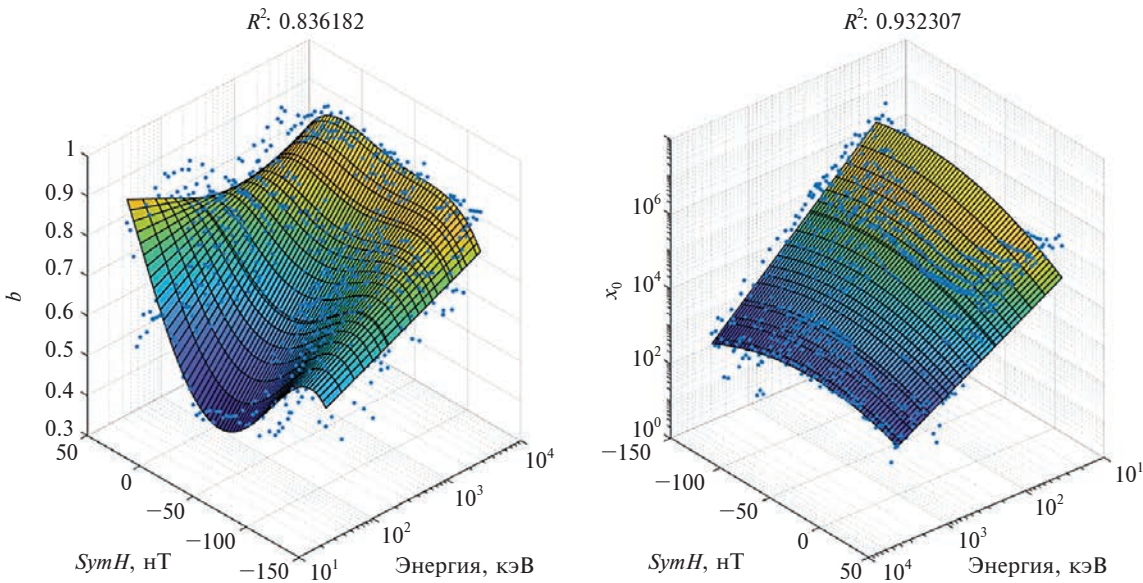


Рис. 6. Зависимости параметров аппроксимации от энергии и геомагнитного индекса. Параметр R — коэффициент корреляции модели (поверхность) и значений параметров при аппроксимации данных (синие точки).

Таблица 1. Значения аппроксимаций для b_{ij}

b_{ij}	0	1	2	3	4
0	0.206 ± 0.012	0.00976 ± 0.0003	$1.404 \cdot 10^{-4} \pm 0.081 \cdot 10^{-4}$	$-4.167 \cdot 10^{-8} \pm 7.369 \cdot 10^{-8}$	$-3.224 \cdot 10^{-9} \pm 0.262 \cdot 10^{-9}$
1	0.0861 ± 0.0018	-0.00128 ± 0.00004	$-2.351 \cdot 10^{-5} \pm 0.125 \cdot 10^{-5}$	$-8.534 \cdot 10^{-4} \pm 0.874 \cdot 10^{-4}$	

Таблица 2. Значения аппроксимаций для X_{ij}

X_{ij}	0	1	2
0	$18.85 \pm \pm 0.14$	$-0.0409 \pm \pm 0.0021$	$-1.5415 \cdot 10^{-4} \pm \pm 0.0429 \cdot 10^{-4}$
1	$-1.440 \pm \pm 0.018$	$0.00361 \pm \pm 0.00027$	

Таким образом, функция плотности вероятности потока электронов определяется выражением $f(x; b, x_0)$ из уравнения (1) (x — поток), а параметры b и x_0 представляют собой функции энергии и геомагнитного индекса, которые определены уравнениями (2)—(3) и табл. 1, 2. Данная модель рассчитана для использования на высотах орбит ГЛОНАСС, однако аналогичные выражения при необходимости можно построить для любых других высот, лежащих ниже перигея орбиты спутника, с которого берутся данные о потоках энергичных электронов. Рабочий диапазон модели по энергиям находится в пределах доступных на приборе Magies (RBSP) измерений: от 20 кэВ до 4 МэВ. Диапазон используемых значений $\text{Sum}H$: от -150 до 50 нТ.

Применение эмпирической модели

Представленная в настоящей работе модель описывается системой уравнений (1)—(3) и данными, приведенными в табл. 1, 2. Модель позволяет получить функцию плотности вероятности потока электронов конкретной энергии при различной геомагнитной активности, характеризуемой индексом $\text{Sum}H$. Получаемая плотность вероятности характеризует усредненные по сферическим угловым координатам (широта — долгота) значения потоков электронов на заданной высоте (в данной работе приведены для высоты 19400 км).

Как обсуждалось, существуют различные факторы, влияющие на работоспособность спутников. Среди них — редкие, но интенсивные всплески потоков высокоэнергичных заряженных частиц, которые способны преодолеть защиту космического аппарата и вывести из строя чувствительную электронику. Приведем пример использования представленной модели для оценки эффекта подобных событий. Для частиц с энергией E_i при геомагнитной обстановке, характеризующейся значением S геомагнитного индекса $\text{Sum}H$, вероятность потока электронов, превышающего критическое значение Φ (индивидуальное для каждого космического аппарата) будет определяться интегралом от плотности вероятности (1) в пределах от значения критического потока Φ до бесконечности:

$$P_{\Phi} = \int_{\Phi}^{\infty} f(x; b, x_0) dx = \frac{\Gamma_i(1-b, \Phi/x_0)}{\Gamma(1-b)},$$

где $\Gamma(\eta)$ и $\Gamma_i(\eta, z)$ — гамма-функция и верхняя неполная гамма-функция, соответственно. Параметры b и x_0 вычисляются согласно выражениям (2)—(3) представленной работы, где в качестве энергии и геомагнитного индекса используются рассматриваемые значения E_i и S в пределах ограничения модели (20...4000 кеВ; -150 ...50 нТ).

Другим важным параметром, непосредственно влияющим на работоспособность аппаратуры космического аппарата, является суммарная ионизирующая доза радиации. Используя индивидуальные для каждого космического аппарата коэффициенты (характеризующие степень его чувствительности к различным диапазонам энергии и потока заряженных частиц) совместно с представленной функцией плотности вероятности потоков электронов (на основе которых рассчитывается флюенс (англ. fluence) — количество прошедших частиц через единицу площади), можно получать прогнозы на поглощенные дозы радиации для различных геомагнитных условий. На рис. 7 приведены примеры расчета флюенса на основе построенной модели и его сравнение с данными спутниковых наблюдений. Для получения модельного значения флюенса используется интегрирование потока, полученного из модели при заданном временном ряде $\text{Sum}H$ (пунктирная линия, рис. 7). Для сравнения приведены значения флюенса по данным спутниковой миссии RBSP, спроецированных на высоту орбиты ГЛОНАСС (сплошным синим цветом), на основе которых и была построена модель. Также приведены значения флюенса, полученные по данным спутников GPS (красная сплошная линия, рис. 7). Данные GPS используются для независимой проверки, так как этот набор данных не применялся при построении модели. Диапазон интегрирования по энергии: 0.5...3 МэВ, выбран таким образом, чтобы покрывать центральную область доступных энергетических каналов одновременно на обоих спутниках миссий (RBSP: 33...4000 кэВ и GPS: 120...10000 кэВ). Из рисунков видно, что модельные значения флюенса хорошо предсказывают средние значения реально наблюдаемых значений флюенса.

Также представленную модель можно использовать для моделирования потоков высокоэнергичных электронов с помощью полученной функции плотности вероятности. Для генерации случайных чисел (значения потоков) с заданной плотностью вероятности необходимо использовать обратные функции (по отношению к задаваемой функции распределения). Поскольку реализации обратной гамма-функции широко представлены в различных программных пакетах, использование описанного в настоящей работе выражения для моделирования потоков заряженных частиц, уравнение (1), является крайне удобным и простым в исполнении.

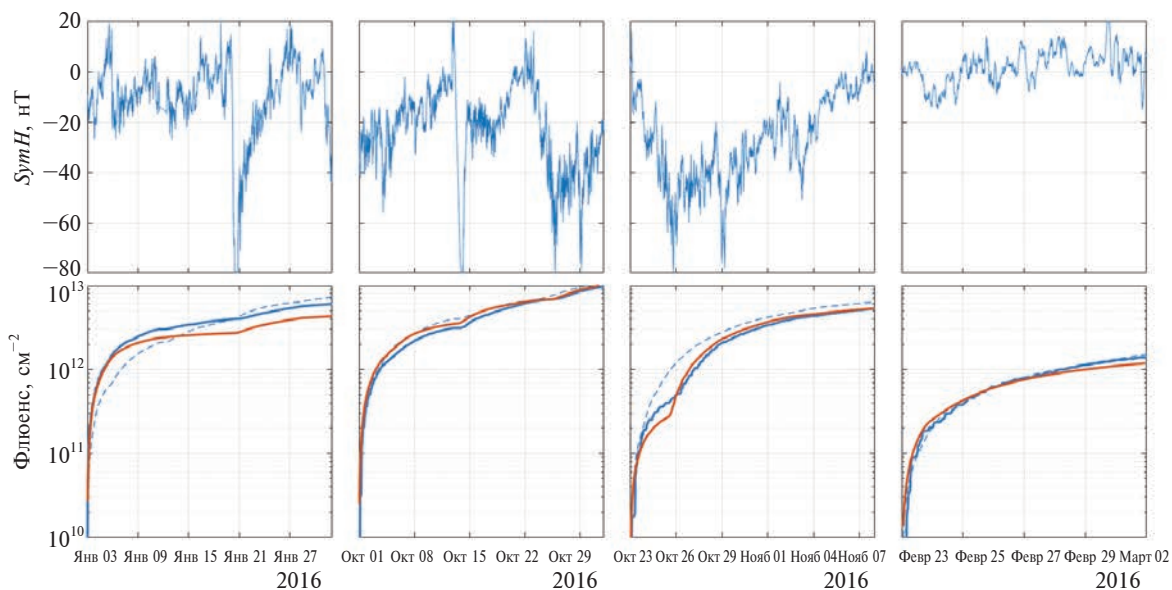


Рис. 7. Геомагнитный индекс $SymH$ (вверху) и флюенс (внизу) для четырех интервалов времени в диапазоне энергии 0.5...3.0 МэВ. Синими сплошными линиями показан флюенс на основе данных с *RBSP*, спроецированных на высоты ГЛОНАСС; синим пунктиром — флюенс на основе построенной в данной работе модели; красными сплошными линиями — флюенс на основе открытых данных со спутника *GPS*.

ВЫВОДЫ

В данной работе представлена модель функций плотности вероятности наблюдения потоков энергичных электронов для высот, соответствующих высотам орбит группировки спутников ГЛОНАСС. Модель двухпараметрическая: плотность вероятности потоков зависит от энергии электронов и геомагнитных условий, характеризуемых индексом $SymH$. Главной особенностью построенной модели является сохранение информации о диапазоне вариации потоков и вероятности различных амплитуд при фиксированной энергии и геомагнитном индексе. Таким образом модель уходит от привычных аппроксимаций средних значений потоков и предоставляет больший объем информации, позволяющий как рассчитать средний поток, так и оценить вероятность наблюдения потоков выше заданного предела. Как раз вторая возможность представляется наиболее актуальной для задач влияния потоков энергичных электронов на функционирование космических спутников. Модель предоставляет возможность задать минимальную амплитуду потока (как дифференциального, так и интегрального для всего диапазона энергий от 30 кэВ до 4 МэВ) и рассчитать интегральный по времени поток на орбите с фиксированной высотой. Представляется, что столь гибкая в плане выдаваемой информации модель окажется полезной при прогнозировании интегральных потоков энергичных электронов на орбитах спутников связи.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны сотрудникам НАСА миссий Van Allen Probes и Bern Blake за использование данных прибора MagEIS инструментария ECT на спутнике *Van Allen Probes (RBSP)*. Все данные RBSP-ECT находятся в открытом доступе на веб-сайте <http://www.RBSP-ect.lanl.gov/>.

В работе используются открытые данные GPS CXD версии 1.09 доступные по адресу <https://www.ngdc.noaa.gov/stp/space-weather/satellite-data/satellite-systems/gps/data/>.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа П. И. Шустова выполнена при поддержке «Совета по грантам Президента Российской Федерации», СП-1757.2021.3.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shprits Y. Y., Elkington S. R., Meredith N. P. et al. Review of modeling of losses and sources of relativistic electrons in the outer radiation belt I: Radial transport // J. Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2008. V. 70. P. 1679–1693.
2. Shprits Y. Y., Subbotin D. A., Meredith N. P. et al. Review of modeling of losses and sources of relativistic electrons in the outer radiation belt II: Local acceleration and loss // J. Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2008. V. 70. P. 1694–1713.

3. Millan R.M., Thorne R. M. Review of radiation belt relativistic electron losses // J. Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2007. V. 69. P. 362–377.
4. Turner D.L., Shprits Y., Hartinger M. et al. Explaining sudden losses of outer radiation belt electrons during geomagnetic storms // Nature Physics. 2012. V. 8. P. 208–212.
<https://doi.org/10.1038/nphys2185>.
5. Sorathia K.A., Merkin V.G., Ukhorskiy A. Y. et al. Energetic particle loss through the magnetopause: A combined global MHD and test-particle study // J. Geophysical Research: Space Physics. 2017. V. 122. P. 9329–9343.
DOI: 10.1002/2017ja024268.
6. Li W., Hudson M. K. Earth's Van Allen Radiation Belts: From Discovery to the Van Allen Probes Era // J. Geophysical Research (Space Physics). 2019. V. 124. P. 8319–8351.
DOI: 10.1029/2018JA025940.
7. Thorne R. M., Bortnik J., Li W. et al. Wave–Particle Interactions in the Earth's Magnetosphere // Magnetospheres in the Solar System. American Geophysical Union (AGU), 2021. P. 93–108.
DOI: 10.1002/9781119815624.ch6.
8. Sorathia K. A., Ukhorskiy A. Y., Merkin V. G. et al. Modeling the Depletion and Recovery of the Outer Radiation Belt During a Geomagnetic Storm: Combined MHD and Test Particle Simulations // J. Geophysical Research (Space Physics). 2018. V. 123. P. 5590–5609.
DOI: 10.1029/2018JA025506.
9. Hudson M.K., Kress B. T., Mueller H.-R. et al. Relationship of the Van Allen radiation belts to solar wind drivers // J. Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2008. V. 70. P. 708–729.
10. Hudson M. K., Paral J., Kress B. T. et al. Modeling CME-shock-driven storms in 2012–2013: MHD test particle simulations // J. Geophysical Research. 2015. V. 120. P. 1168–1181. DOI: 10.1002/2014JA020833
11. Thorne R.M., Li W., Ni B. et al. Rapid local acceleration of relativistic radiation-belt electrons by magnetospheric chorus // Nature. 2013. V. 504. P. 411–414.
12. Ma Q., Li W., Bortnik J. et al. Quantitative Evaluation of Radial Diffusion and Local Acceleration Processes During GEM Challenge Events // J. Geophysical Research (Space Physics). 2018. V. 123. P. 1938–1952. DOI: 10.1002/2017JA025114.
13. Allison H.J., Shprits Y. Y., Zhelavskaya I. S. et al. Gyroresonant wave-particle interactions with chorus waves during extreme depletions of plasma density in the Van Allen radiation belts // Science Advances. 2021. V. 7. Art. ID. eabc0380.
DOI: 10.1126/sciadv.abc0380.
14. Drozdov A. Y., Shprits Y. Y., Orlova K. G. et al. Energetic, relativistic, and ultrarelativistic electrons: Comparison of long-term VERB code simulations with Van Allen Probes measurements // J. Geophysical Research. 2015. V. 120. P. 3574–3587.
DOI: 10.1002/2014JA020637.
15. Mann I. R., Ozeke L. G., Murphy K. R. et al. Explaining the dynamics of the ultra-relativistic third Van Allen radiation belt // Nature Physics. 2016. V. 12. P. 978–983.
<https://doi.org/10.1038/nphys3799>.
16. Meredith N. P., Horne R. B., Sicard-Piet A. et al. Global model of lower band and upper band chorus from multiple satellite observations // J. Geophysical Research. 2012. V. 117. Art. ID. 10225.
17. Meredith N. P., Horne R. B., Kersten T. et al. Global morphology and spectral properties of EMIC waves derived from CRRES observations // J. Geophysical Research. 2014. V. 119. P. 5328–5342.
18. Agapitov O. V., Artemyev A., Krasnoselskikh V. et al. Statistics of whistler mode waves in the outer radiation belt: Cluster STAFF-SA measurements // J. Geophysical Research. 2013. V. 118. P. 3407–3420.
19. Agapitov O.V., Artemyev A. V., Mourenas D. et al. Empirical model of lower band chorus wave distribution in the outer radiation belt // J. Geophysical Research. 2015. V. 120. P. 425–442.
<https://doi.org/10.1002/2015JA021829>.
20. Agapitov O. V., Mourenas D., Artemyev A. V. et al. Synthetic Empirical Chorus Wave Model from Combined Van Allen Probes and Cluster Statistics // J. Geophysical Research (Space Physics). 2018. V. 123. P. 297–314.
DOI: 10.1002/2017JA024843.
21. Wang D., Shprits Y. Y., Zhelavskaya I. S. et al. Analytical Chorus Wave Model Derived from Van Allen Probe Observations // J. Geophysical Research (Space Physics). 2019. V. 124. P. 1063–1084.
DOI: 10.1029/2018JA026183.
22. Zhang X.-J., Li W., Thorne R. M. et al. Statistical distribution of EMIC wave spectra: Observations from Van Allen Probes // Geophysical Research Letters. 2016. V. 43. P. 348–355.
DOI: 10.1002/2016GL071158.
23. Forsyth C., Watt C. E.J., Mooney M. K. et al. Forecasting GOES15 >2 MeV Electron Fluxes From Solar Wind Data and Geomagnetic Indices // Space Weather. 2020. V. 18. Art. ID. e2019SW002416.
DOI: 10.1029/2019SW002416.
24. Mourenas D., Artemyev A. V., Zhang X.-J. Impact of Significant Time-Integrated Geomagnetic Activity on 2-MeV Electron Flux // J. Geophysical Research: Space Physics. 2019. V. 124. P. 4445–4461.
DOI: 10.1029/2019JA026659.
25. Chen Y., Reeves G. D., Fu X. et al. PreMevE: New Predictive Model for Megaelectron-Volt Electrons inside Earth's Outer Radiation Belt // Space Weather. 2019. V. 17. P. 438–454.
<https://doi.org/10.1029/2018SW002095>.
26. Balikhin M. A., Rodriguez J. V., Boynton R. J. et al. Comparative analysis of NOAA REFM and SNB³GEO tools for the forecast of the fluxes of high-energy electrons at GEO // Space Weather. 2016. V. 14. P. 22–31.
DOI: 10.1002/2015SW001303.
27. Horne R. B., Glauert S. A., Meredith N. P. et al. Space weather impacts on satellites and forecasting the Earth's electron radiation belts with SPACECAST // Space Weather. 2013. V. 11. P. 169–186.
28. Iucci N., Levitin A. E., Belov A. V. et al. Space weather conditions and spacecraft anomalies in different orbits // Space Weather. 2005. V. 3. Art. ID1001.
DOI: 10.1029/2003SW000056.
29. Horne R. B., Phillips M. W., Glauert S. A. et al. Realistic Worst Case for a Severe Space Weather Event Driven by

- a Fast Solar Wind Stream // *Space Weather*. 2018. V. 16. P. 1202–1215.
DOI: 10.1029/2018SW001948.
30. Green J. C., Likar J., Shprits Y. Impact of space weather on the satellite industry // *Space Weather*. 2017. V. 15. P. 804–818.
DOI: 10.1002/2017SW001646.
31. Welling D. T. The long-term effects of space weather on satellite operations // *Annales Geophysicae*. 2010. V. 28. P. 1361–1367.
32. Xapsos M. A., O'Neill P. M., O'Brien T. P. Near-Earth Space Radiation Models // *IEEE Trans. Nuclear Science*. 2013. V. 60. P. 1691–1705.
33. Cochran D. J., Buchner S. P., Chen D. et al. Total Ionizing Dose and Displacement Damage Compendium of Candidate Spacecraft Electronics for NASA // *Proc. IEEE Radiation Effects Data Workshop*. 2009. P. 25–31.
DOI: 10.1109/REDW.2009.5336318.
34. Zheng Y., Ganushkina N. Y., Jiggins P. et al. Space Radiation and Plasma Effects on Satellites and Aviation: Quantities and Metrics for Tracking Performance of Space Weather Environment Models // *Space Weather*. 2019. V. 17. P. 1384–1403.
DOI: 10.1029/2018SW002042.
35. Chen Y., Carver M. R., Morley S. K. et al. Determining Ionizing Doses in Medium Earth Orbits Using Long-Term GPS Particle Measurements // *Proc. IEEE Aerospace Conference*. 2021. Big Sky, MT, USA. Art. ID. 50100.
DOI: 10.1109/AERO50100.2021.9438516.
36. Ecoffet R. Overview of In-Orbit Radiation Induced Spacecraft Anomalies // *IEEE Trans. Nuclear Science*. 2013. V. 60. P. 1791–1815.
37. Stassinopoulos E. G., Raymond J. P. The space radiation environment for electronics // *Proc. IEEE*. 1988. V. 76. P. 1423–1442.
DOI: 10.1109/5.90113.
38. Baker D. N., McPherron R. L., Cayton T. E. et al. Linear prediction filter analysis of relativistic electron properties at $6.6R_E$ // *J. Geophysical Research: Space Physics*. 1990. V. 95. P. 15133–15140.
39. Glauert S. A., Horne R. B., Meredith N. P. A 30-Year Simulation of the Outer Electron Radiation Belt // *Space Weather*. 2018. V. 16. P. 1498–1522.
DOI: 10.1029/2018SW001981.
40. Murphy K. R., Watt C. E. J., Mann I. R. et al. The Global Statistical Response of the Outer Radiation Belt during Geomagnetic Storms // *Geophysical Research Letters*. 2018. V. 45. P. 3783–3792.
DOI: 10.1002/2017gl076674.
41. Ozeke L. G., Mann I. R., Olifer L. et al. Rapid Outer Radiation Belt Flux Dropouts and Fast Acceleration During the March 2015 and 2013 Storms: The Role of Ultra-Low Frequency Wave Transport From a Dynamic Outer Boundary // *J. Geophysical Research: Space Physics*. 2020. V. 125. Art. ID. e2019JA027179. DOI: 10.1029/2019JA027179.
42. Claudepierre S. G., O'Brien T. P., Looper M. D. et al. A Revised Look at Relativistic Electrons in the Earth's Inner Radiation Zone and Slot Region // *J. Geophysical Research: Space Physics*. 2019. V. 124. P. 934–951.
DOI: 10.1029/2018JA026349.
43. Piet A. S., Bourdarie S., Boscher D. et al. A Model for the Geostationary Electron Environment: POLE, From 30 keV to 5.2 MeV // *IEEE Trans. Nuclear Science*. 2006. V. 53. P. 1844–1850.
44. Allison H. J., Horne R. B., Glauert S. A. et al. The magnetic local time distribution of energetic electrons in the radiation belt region // *J. Geophysical Research: Space Physics*. 2017. V. 122. P. 8108–8123.
DOI: 10.1002/2017JA024084.
45. Sicard-Piet A., Bourdarie S., Boscher D. et al. A new international geostationary electron model: IGE-2006, from 1 keV to 5.2 MeV // *Space Weather*. 2008. V. 6. DOI: 10.1029/2007SW000368.
46. Balikhin M. A., Boynton R. J., Walker S. N. et al. Using the NARMAX approach to model the evolution of energetic electrons fluxes at geostationary orbit // *Geophysical Research Letters*. 2011. V. 38. Art. ID. 18105.
47. Claudepierre S. G., O'Brien T. P. Specifying High-Altitude Electrons Using Low-Altitude LEO Systems: The SHELLS Model // *Space Weather*. 2020. V. 18. Art. ID. e2019SW002402.
DOI: 10.1029/2019sw002402.
48. Pires de Lima R., Chen Y., Lin Y. Forecasting Mega-electron-Volt Electrons inside Earth's Outer Radiation Belt: PreMevE2.0 Based on Supervised Machine Learning Algorithms // *Space Weather*. 2020. V. 18. Art. ID. e2019SW002399.
DOI: 10.1029/2019SW002399.
49. Smirnov A. G., Berrendorf M., Shprits Y. Y. et al. Medium Energy Electron Flux in Earth's Outer Radiation Belt (MERLIN): A Machine Learning Model // *Space Weather*. 2020. V. 18. Art. ID. e2020SW002532. DOI: 10.1029/2020SW002532.
50. Ma D., Chu X., Bortnik J. et al. Modeling the dynamic variability of sub-relativistic outer radiation belt electron fluxes using machine learning // *Space Weather*. 2022. V. 20. Art. ID. e2022SW003079. DOI: 10.1029/2022SW003079.
51. Mauk B. H., Fox N. J., Kanekal S. G. et al. Science Objectives and Rationale for the Radiation Belt Storm Probes Mission // *Space Science Reviews*. 2013. V. 179. P. 3–27.
52. Tsyganenko N. A., Sitnov M. I. Modeling the dynamics of the inner magnetosphere during strong geomagnetic storms // *J. Geophysical Research*. 2005. V. 110. Art. ID. A03208.
53. Kessel R. L., Fox N. J., Weiss M. The Radiation Belt Storm Probes (RBSP) and Space Weather // *Space Science Reviews*. 2013. V. 179. P. 531–543.
54. Blake J. B., Carranza P. A., Claudepierre S. G. et al. The Magnetic Electron Ion Spectrometer (MagEIS) Instruments aboard the Radiation Belt Storm Probes (RBSP) Spacecraft // *Space Science Reviews*. 2013. P. 179. DOI: 10.1007/s11214-013-9991-8.
55. Tsyganenko N. A. Modeling the Earth's magnetospheric magnetic field confined within a realistic magnetopause // *J. Geophysical Research*. 1995. V. 100. P. 5599–5612.
56. Kletzing C. A., Kurth W. S., Acuna M. et al. The Electric and Magnetic Field Instrument Suite and Integrated Science (EMFISIS) on RBSP // *Space Science Reviews*. 2013. V. 179. P. 127–181.

УДК 629.7.023.222

РАДИАЦИОННАЯ СТОЙКОСТЬ ПОКРЫТИЯ ДЛЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ, ПОЛУЧЕННОГО ПРИНТЕРНОЙ ПЕЧАТЬЮ

© 2024 г. М. М. Михайлов, С. А. Артищев, А. Н. Лапин, С. А. Юрьев*, В. А. Горончко, Н. С. Труфанова, О. А. Михайлова, Д. С. Федосов

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, Россия

*yusalek@gmail.com

Поступила в редакцию 01.06.2023

Переработанный вариант 17.06.2023

Принята к публикации 01.08.2023

Представлены результаты исследований изменений спектров диффузного отражения и интегрального коэффициента поглощения солнечной радиации (a_s) терморегулирующего покрытия класса “Оптические солнечные отражатели” для космических аппаратов при облучении электронами. Диэлектрическую керамическую пасту, состоящую из наполнителя — измельченного поликора (Al_2O_3) и растворителя с загустителем (терпинеол с этилцеллюлозой), наносили 3D-принтером на подложку. Затем осуществляли прогрев при 150 °С и отжиг при 850 °С, получали “белое” покрытие с высоким коэффициентом отражения и малым коэффициентом поглощения a_s , удовлетворяющим требованиям и стандартам терморегулирующего покрытия рассматриваемого класса. Радиационная стойкость полученного покрытия на основе диэлектрической керамической пасты сравнима со стойкостью высокостабильного покрытия на основе пигмента ZnO с жидким литиевым стеклом и значительно выше стойкости плазменнонапыленного покрытия — шпинели $MgAl_2O_4$.

DOI: 10.31857/S0023420624030023, EDN: JKKZAW

ВВЕДЕНИЕ

Космическая отрасль на протяжении более 60 лет нуждалась и в настоящее время нуждается в высокостабильных к действию излучений космического пространства (КП) терморегулирующих покрытиях. Такое положение не указывает на плохое качество разработанных за эти годы терморегулирующих покрытий (ТРП) — такие ТРП были и в настоящее время существуют [1, 2], но требования к ним повышаются. Если в первые десятилетия освоения КП значение коэффициента поглощения a_s — основной рабочей характеристики ТРП класса “Оптические солнечные отражатели” (ОСО), при $a_s = 0.2$, являлось вполне удовлетворительным, то в 20–30-х гг. XXI века оно должно быть меньше [3]. Это связано как с уменьшением размеров и веса радиаторов терморегулирования в космических аппаратах (КА), так и с увеличением сроков их орбитальных полетов. Вторым требованием является высокая фото- и радиационная стойкость таких ТРП и малое изменение коэффициента поглощения a_s при все увеличивающихся сроках активного существования КА.

В настоящее время существует отдельная проблема обеспечения нормального теплового режима приборов и устройств малых космических аппаратов. Проблема вызвана их малыми размерами

и весом и возросшими требованиями к системе пассивного терморегулирования.

Целью настоящей работы является исследование радиационной стойкости ТРП для космических аппаратов класса ОСО, полученного из пасты, нанесенной на подложку 3D-принтером.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Диэлектрическая керамическая паста (ДКП) была изготовлена на основе порошка Al_2O_3 . Его измельчение происходило в планетарной микромельнице PULVERISETTE7 Premium Line в две стадии: сначала 6 мин со скоростью 850 об/мин, затем 4 минуты со скоростью 1000 об/мин. В состав пасты было добавлено стекло C52–1 для обеспечения адгезии пленки к подложке. В качестве органического связующего использовалась этилцеллюлоза в терпинеоле. Процентное соотношение компонентов в пасте (порошок Al_2O_3 : стекло C52–1: этилцеллюлоза в терпинеоле) составляло 68:2:30. Смешивание компонентов пасты осуществлялось в мельнице Fritsch PULVERISETTE7 Premium Line. Сначала в течение 5 мин со скоростью 850 об/мин смешивались порошки Al_2O_3 и C52–1. Затем после добавления органического связующего смесь перемешивалась 60 мин с такой же скоростью.

Образцы печатали на 3D-принтере для печатных плат Voltera V-One. После печати их для

сглаживания рельефа выдерживали при температуре 22 °С в течение 10 мин, затем сушили при температуре 150 °С в течение 15 мин. Отжиг паст проходил в течение 60 мин, время выдержки при максимальной температуре 850 °С составляло 10 мин.

Гранулометрический состав порошка поликора исследовали в диапазоне 0.1–40 мкм лазерным анализатором частиц. Зарегистрировано четыре максимума распределения при 0.39, 0.76, 1.9 и 11 мкм. С увеличением размера частиц интенсивность пиков возрастала. Средний размер частиц составил 4.82 мкм. Спектры диффузного отражения регистрировались в вакууме, на месте облучения образцов (*in situ*) в имитаторе условий КП “Спектр” [4]. Интегральный коэффициент поглощения солнечного излучения рассчитывался по спектрам диффузного отражения с использованием международных стандартов [5, 6].

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Исследования инфракрасных спектров поглощения

Исследование ИК-спектров сырой пасты показали (рис. 1) наличие полос поглощения при 470, 690, 800, 1070, 1285, 1460, 1730, 2355 и 2915 см^{-1} . Наиболее интенсивными являются полосы при 470, 690, 800, 1070 см^{-1} . Полосы при 470 и 1070 могут быть отнесены к характеристическим полосам поглощения связи Al — O в $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ [7, 8]. В области от 600 см^{-1} до 800 см^{-1} полосы поглощения соответствуют деформационным и валентным колебаниям Al_2O_3 [9]. Полоса при 2355 см^{-1} относится к колебаниям CO_2 [10], полосы при 1285 и 1460 см^{-1} соответствуют деформационным колебаниям H_2O [11]. Прогрев и дальнейший отжиг пасты приводят к уменьшению интенсивности и исчезновению полос поглощения, обусловленных колебаниями молекул воды и диоксида углерода. В спектрах остаются только полосы, обусловленные колебаниями молекул Al_2O_3 . Поэтому можно заключить, что нанесенная на подложку паста ДКП после ее прогрева и отжига представляет собой ТРП, состоящее только из оксида алюминия.

Исследование спектра диффузного отражения и его изменение при облучении

Из спектра диффузного отражения исходного порошка Al_2O_3 следует, что край основного поглощения имеет два значения при 168 и 195 нм (рис. 2). С увеличением длины волны коэффициент отражения увеличивается до 82 %. Затем регистрируется провал при 412 нм. Предположительно, он может быть связан с термической ионизацией междоузельных атомов при прогреве пасты с образованием ионов алюминия, полоса поглощения которых находится в этой области. Аналогичный

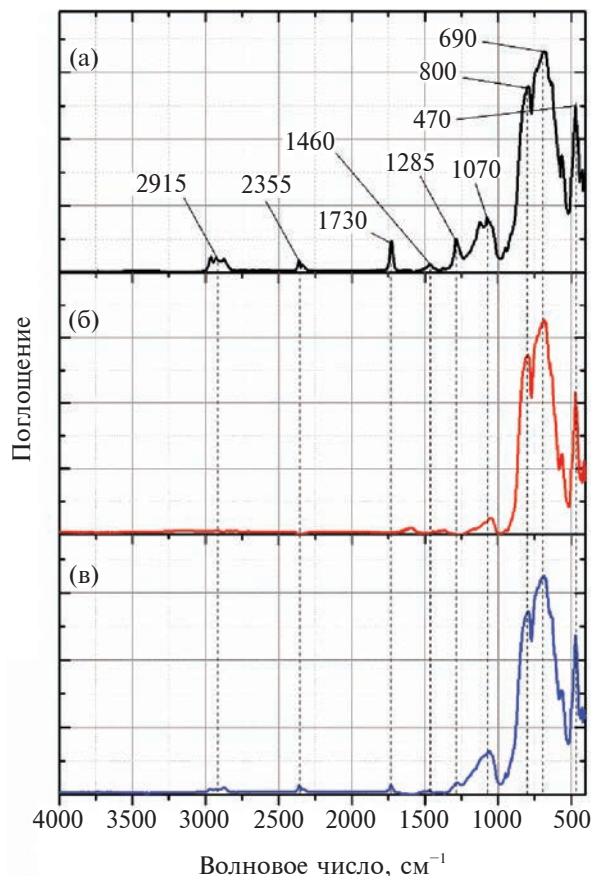


Рис. 1. ИК-спектры поглощения диэлектрической пасты: сырой (а); после 15 мин высушивания при 150 °С (б); после отжига в течение 10 мин при 850 °С (в).

процесс ранее регистрировали при прогреве порошка оксида цинка [12]. В области 500–800 нм коэффициент отражения достигает максимального значения, равного 89 %. С увеличением длины волны он не значительно уменьшается и при $\lambda = 2500$ нм составляет 80 %.

После облучения электронами с энергией 30 кэВ коэффициент отражения уменьшается в области от края основного поглощения и до 800 нм. В более длинноволновой области он не изменяется.

В разностных спектрах диффузного отражения ($\Delta\rho_\lambda$), получаемых вычитанием из спектра до облучения ($\rho_{\lambda,0}$) спектров после облучения образцов ($\rho_{\lambda,\text{ф}}$) регистрируются полосы при 254, 303, 346 и 452 нм (рис. 3). Эти полосы являются полосами поглощения, наведенного облучением. Они определяются собственными радиационными дефектами, образованными в покрытии из Al_2O_3 при облучении. Такими дефектами могут быть: F_2^{2+} -центры (452 нм — 2.74 эВ), V_{Al} (346 нм — 3.58 эВ), V_O (303 нм — 4.09 эВ), Al_i (254 нм — 4.88 эВ), описанные в работах [13–17]. При ионизационном механизме [18] при облучении электронами с энергией 30 кэВ в обеих подрешетках оксида алюминия образуются вакансии алюминия и кислорода и междоузельные

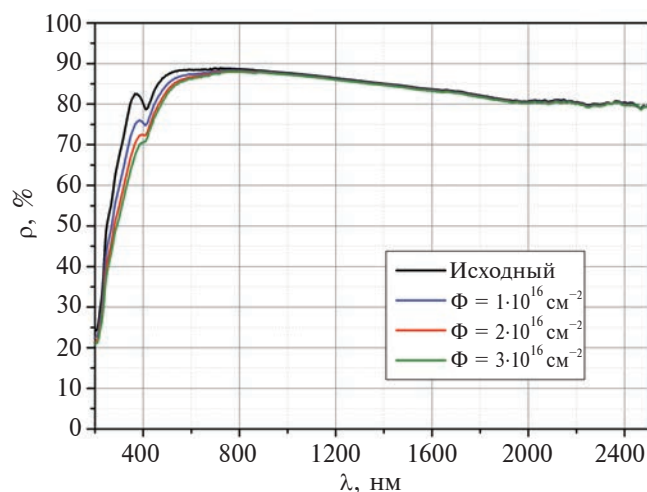


Рис. 2. Спектры диффузного отражения ТРП, изготовленного из диэлектрической пасты до и после облучения электронами.

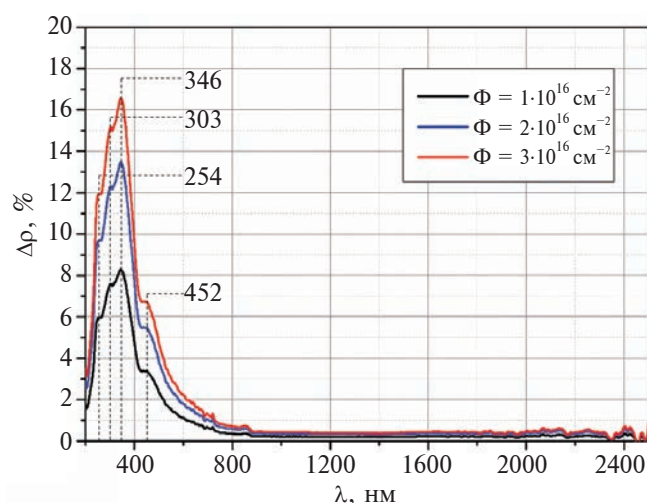


Рис. 3. Разностные спектры диффузного отражения ТРП, изготовленного из диэлектрической пасты ДКП после облучения электронами.

ионы в различном зарядовом состоянии. Наиболее интенсивными являются полосы поглощения вакансий алюминия и кислорода.

Исследование интегрального коэффициента поглощения

Интегральный коэффициент поглощения солнечного излучения a_s показывает, какую долю энергии солнечного потока поглощает данный материал, данное покрытие. И если ТРП предназначено для отражения этого потока, т.е. оно относится к классу ОСО, то задачей разработчиков является уменьшение значения a_s . В процессе орбитального полета КА на ТРП действуют различные виды излучений, что приводит к образованию дефектов, появлению полос поглощения

Таблица. Зависимость коэффициента поглощения a_s и его изменений Δa_s после облучения электронами различных терморегулирующих покрытий от флюенса электронов

Покрытие	Коэффициент	$\Phi, \times 10^{16} \text{ см}^{-2}$			
		Исходный	1	2	3
Диэлектрическая керамическая паста	a_s	0.143	0.158	0.167	0.173
	Δa_s	0	0.015	0.024	0.03
$\text{Li}_2\text{SiO}_3 + \text{ZnO}$	a_s	0.136	0.152	0.159	0.162
	Δa_s	0	0.016	0.023	0.026
MgAl_2O_4	a_s	0.16	0.217	0.235	0.248
	Δa_s	0	0.057	0.075	0.088

и уменьшению коэффициента отражения в различных областях спектра.

Интегральный коэффициент поглощения включает в себя все эти полосы поглощения, нормированные на спектр излучения Солнца, поэтому он является рабочей характеристикой ТРП.

Для исходного покрытия его значение равно 0.143, что является удовлетворительным значением для ТРП класса ОСО. После облучения флюенсом электронов $(1, 2 \text{ и } 3) \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ с энергией 30 кэВ он увеличивается до 0.158, 0.167 и 0.173 соответственно (рис. 4).

Увеличение коэффициента поглощения составляет 0.015, 0.024 и 0.03 для флюенса электронов $(1, 2 \text{ и } 3) \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ соответственно. Эти величины показывают высокую радиационную стойкость разрабатываемого покрытия. Их сравнение проводили со значениями, полученными ранее для современного перспективного ТРП на основе пигмента ZnO и неорганического связующего — литиевого жидкого стекла Li_2SiO_3 [19]. При одинаковых

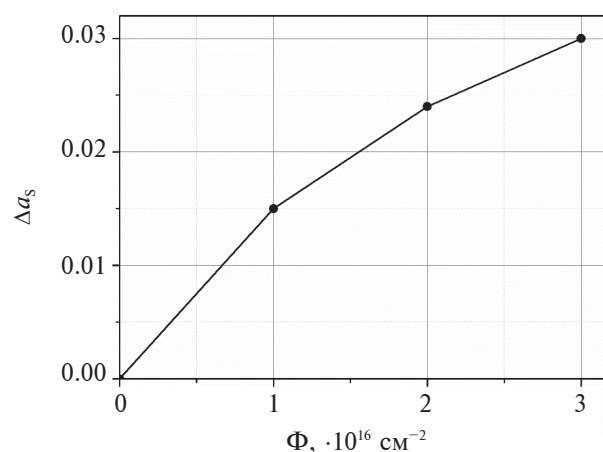


Рис. 4. Зависимость изменений коэффициента поглощения (Δa_s) ТРП, изготовленного из пасты ДКП, от флюенса при облучении электронами с энергией 30 кэВ.

условиях облучения ($P = 1 \cdot 10^{-6}$ торр, $T = 300$ °С, $\Phi = 5 \cdot 10^{12}$ см $^{-2}$ с $^{-1}$) значения Δa_s отличаются незначительно (табл. 1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлены результаты исследований, направленные на получение терморегулирующего покрытия класса “оптические солнечные отражатели” новым методом с использованием 3D-принтера. Приведены результаты исследования оптических свойств и радиационной стойкости ТРП, полученного из приготовленной диэлектрической керамической пасты.

Установлено, что и по исходному значению основной рабочей характеристики — интегрального коэффициента поглощения солнечного излучения, и его изменению при облучении, данное покрытие отвечает требованиям ТРП класса “Оптические солнечные отражатели”. Сравнение по этим характеристикам с их параметрами для перспективного ТРП на основе пигмента оксида цинка и связующего литиевого жидкого стекла показало их близкие значения. Сравнение с этими характеристиками шпинели $MgAl_2O_4$, напыленной на подложку плазменным способом и облученной электронами в таких же условиях [20], показывает более высокую радиационную стойкость оптических свойств разрабатываемого покрытия из пасты ДКП.

Можно заключить, что разрабатываемое ТРП, созданное путем нанесения 3D-принтером на подложку диэлектрической пасты ДКП и последующего ее прогрева и отжига, обладает значениями исходного интегрального коэффициента поглощения a_s и его радиационной стойкости, соответствующими требованиям, предъявляемым в настоящее время к таким покрытиям. С учетом широких возможностей нанесения такой пасты 3D-принтером на поверхности различной конфигурации и различных размеров, можно ожидать практическое использование такой ТРП в космической отрасли.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта FEWM-2022–0005.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kauder L.* Spacecraft Thermal Control Coatings References. 2005. NASA Technical Publication 20070014757. <https://ntrs.nasa.gov/citations/20070014757>
2. *Мухайлов М. М.* Спектры отражения терморегулирующих покрытий космических аппаратов. Т. 1. Томск: Изд-во Томского ун-та, 2007. 314 с.
3. *Yanchao X., Hong G., Ming W. et al.* Review of Spacecraft Thermal Control Materials and Applications // Materials Reports. 2022. V. 36. Iss. 22. Art. ID. 22050193–6.
4. *Kositsyn L. G., Mikhailov M. M., Kuznetsov N. Y. et al.* Apparatus for study of Diffuse — Reflection and Luminescence Spectra of Solids in Vacuum // Instruments and Experimental Techniques. 1985. V. 28. P. 929–932.
5. ASTM E490–00a(2019) Standard Solar Constant and Zero Air Mass Solar Spectral Irradiance Tables, 2022. <https://www.astm.org/e0490–00ar19.html>.
6. ASTM E903–12 Standard Test Method for Solar Absorptance, Reflectance, and Transmittance of Materials Using Integrating Spheres, 2012.
7. *Boumaza A., Djelloul A., Guerrab F.* Specific signatures of α -alumina powders prepared by calcination of boehmite or gibbsite // Powder Technology. 2010. V. 201. P. 177–180. DOI: 10.1016/j.powtec.2010.03.036.
8. *Hosseini S. A., Niaei A., Salari D.* Production of γ - Al_2O_3 from Kaolin // Open J. Physical Chemistry. 2011. V. 1. P. 23–27. DOI: 10.4236/OJPC.2011.12004.
9. *Roscoe J. M., Abbott J. P. D.* Diffuse Reflectance FTIR Study of the Interaction of Alumina Surfaces with Ozone and Water Vapor // J. Physical Chemistry A. 2005. V. 109. P. 9028–9034. DOI: 10.1021/jp050766r.
10. *Clament Sagaya Selvam N., Thinesh Kumar R., John Kennedy L. et al.* Comparative Study of Microwave and Conventional Methods for the Preparation and Optical Properties of Novel MgO-Micro and Nano-Structures // J. Alloys and Compounds. 2011. V. 509. P. 9809–9815. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2011.08.032>.
11. *Stomp M., Huisman J., Stal L. J. et al.* Colorful niches of phototrophic microorganisms shaped by vibrations of the water molecule // The ISME Journal. 2007. V. 1. P. 271–282.
12. *Mikhailov M. M.* Change in activation energy of surface conduction in polycrystalline zinc oxide upon irradiation by electrons // Soviet Physics J. 1984. V. 27. P. 624–627.
13. *Kristianpoller N., Rehavi A., Shmlevich A. et al.* Radiation effects in pure and doped Al_2O_3 crystals // Nuclear Instruments and methods in Physics Research. Section B. 1998. V. 141. P. 343–346. DOI: 10.1016/S0168-583X(98)00096-2.

14. *Evans B. D., Pogatshnik G. J., Chen Y.* Optical properties of lattice defects in $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section B. 1994. V. 91. P. 258–262.
15. *Watcharatharapong T., T-Thienprasert J., Limpijumnong S.* Theoretical Study of Optical Properties of Native Point Defects in $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ // Integrated Ferroelectrics. 2014. V. 156. P. 79–85.
DOI: 10.1080/10584587.2014.906290.
16. *Levy P.* Color Centers and Radiation-Induced Defects in Al_2O_3 // Physical Review. 1961. V. 123. P. 1226–1233.
17. *Aluker E. D., Gavrilov V. V., Chernov S. A.* Short-lived Frenkel defects in $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ // Physica Status Solidi. Section B. 1992. V. 171. P. 283–288.
18. *Mikhailov M. M.* Optical properties and radiation stability of Metal Oxide Powders modified with Nanoparticles. V. 6. Tomsk: Publ. House TUSUR, 2019. 312 p.
19. *Mikhailov M. M., Yuryev S. A., Lapin A. N. et al.* Reflective thermal control coating for spacecraft based on ZnO pigment and Li_2SiO_3 silicate modified by SiO_2 nanoparticles // Ceramics International. 2023. V. 49. P. 20817–20821. DOI: 10.1016/j.ceramint.2023.03.214.
20. *Мухайлов М. М.* Спектры отражения терморегулирующих покрытий космических аппаратов. Т. 1. Томск: Изд-во Томского ун-та, 2010. 322 с.

УДК 620.76/78.004

О ТЕМПЕРАТУРАХ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО НАГРЕВА СФЕРИЧЕСКИХ МИКРОЧАСТИЦ, МОДЕЛИРУЮЩИХ МИКРОБИОЛОГИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ, ВХОДЯЩИЕ В АТМОСФЕРУ ЗЕМЛИ С КОСМИЧЕСКИМИ СКОРОСТЯМИ

© 2024 г. Е. К. Колесников*, С. В. Чернов

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

*email: e.kolesnikov@spbu.ru

Поступила в редакцию 16.06.2023

Переработанный вариант 07.08.2023

Принята к публикации 15.08.2023

Разработана математическая модель, описывающая движение в околоземном космическом пространстве (ОКП) и аэродинамический нагрев при входе в атмосферу сферических микрочастиц из углерода (графита) радиусами от 0.5 до 3 мкм, моделирующих споры земных бактерий, а также споры гипотетических бактерий внеземного происхождения. Модель основана на совместном численном решении уравнений движения в ОКП указанного модельного микробиологического объекта (МБО) и уравнения теплового баланса, описывающего изменение внутренней энергии МБО. Полученные расчетные данные показывают, что максимальные температуры аэродинамического нагрева спор земных бактерий, отделяющихся от поверхностей крупных низкоорбитальных объектов искусственного происхождения, оказываются существенно меньшими предельной температуры выживания спор земных бактерий при импульсном нагреве. Кроме того, результаты численных экспериментов дают основания для предположения, что споры гипотетических внеземных бактерий размером не более 1 мкм способны выдерживать аэродинамический нагрев при входе в атмосферу Земли со скоростями большими, чем вторая и третья космическая скорость.

DOI: 10.31857/S0023420624030038, EDN: JKIMGU

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что все возрастающее загрязнение околоземного космического пространства микробиологическими продуктами техногенной деятельности в космосе представляет угрозу не только для орбитальных космических аппаратов (КА), но и создает серьезные проблемы для экологии Земли. Это связано с тем, что, как показывают результаты проведенных к настоящему времени исследований, (см., например, работу [1]), входящие в плотные слои атмосферы техногенные микрочастицы (МЧ) с размерами $\lesssim 100$ мкм могут выдерживать аэродинамический нагрев и, сохраняя свои свойства, опускаются в приземные слои атмосферы и на земную поверхность. В определенных случаях, например, когда мы имеем дело с МЧ из радиоактивных материалов, а также из материалов, способных оказывать негативное воздействие на состояние озонового слоя стратосферы, указанные частицы представляют очевидную опасность для биосферы Земли.

Исследования последних лет показывают, что к числу потенциально опасных для экологии Земли микрообъектов относятся и возвращающиеся из космоса на Землю микробиологические объекты (МБО) земного происхождения. Последние

объекты могут выноситься с Земли в космос как в результате техногенной деятельности (на поверхностях КА и ракет-носителей (РН)), так и вследствие действия возможного “ионосферного лифта”, осуществляющего перенос тропосферного аэрозоля с поверхности Земли в верхнюю ионосферу, на существование которого косвенно указывают данные натурального эксперимента “Тест” [2].

Результаты натурных экспериментов в космосе, и, в частности, российского эксперимента “Биориск”, подготовленного и проведенного на МКС специалистами Института медико-биологических проблем РАН [3], показали, что споры некоторых земных микроорганизмов и грибов способны выжить даже при длительном (более 1.5 лет) нахождении в открытом космосе. При этом, они могут *мутировать*, приобретая новые свойства. Такие микробиологические объекты могут представлять опасность для земной биосферы, если их аэродинамический нагрев при входе в атмосферу недостаточен для стерилизации.

Для ответа на вопрос о возможности выживания входящих в атмосферу из космоса спор земных бактерий в настоящей работе проведен расчет зависимости от времени температуры

аэродинамического нагрева сферических МЧ из углерода соответствующих радиусов, моделирующих споры земных бактерий. Предполагалось, что указанные микрообъекты инжестируются в ОКП, покидая поверхность “материнского тела” (МТ), движущегося по низкой круговой орбите.

Кроме того, разработанные программы были использованы для расчета аэродинамического нагрева аналогичных микрообъектов, моделирующих споры гипотетических бактерий внеземного происхождения, полого входящих в атмосферу со скоростями большими второй и третьей космической скорости. Заметим, что в отличие от известной работы [4], в которой сделана приближенная теоретическая оценка максимальной температуры и длительности аэродинамического нагрева бактерий *E.coli*, входящих в атмосферу со скоростью, значительно превышающей вторую космическую, результаты настоящей работы получены с использованием достаточно близкой к реальной математической модели и могут представлять интерес для исследователей, работающих над обоснованием известной концепции “панспермии”.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ И АЭРОДИНАМИЧЕСКИЙ НАГРЕВ МИКРОБИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЕ

Для определения возможных температур аэродинамического нагрева микробиологических объектов, входящих в атмосферу с космическими скоростями, как и в отмеченной выше работе [1], будем использовать математическую модель, основанную на совместном численном решении уравнений движения и уравнения внутренней энергии МБО. В качестве модели МБО, аналогично работе [4], будем рассматривать сферические частицы из углерода (графита), радиусом R от 0.5 до 3 мкм (что соответствует возможным размерам спор земных бактерий). Предполагается, что в начальный момент $t = 0$ МБО находится на заданной высоте H над земной поверхностью и движется со скоростью v_0 .

Как показывают оценки [5], для рассматриваемых значений радиуса МБО и начальной высоты H , можно пренебречь влиянием на динамику МБО электродинамических сил, обусловленных взаимодействием наводимого на МБО заряда с геомагнитным и геоэлектрическим полями на основных стадиях движения МБО в верхней и нижней атмосфере: стадии орбитального движения в ОКП; стадии сильного аэродинамического торможения, на которой и достигаются максимальные температуры аэродинамического нагрева МБО (реализуется на высотах >100 км); а также — на стадии спуска “заторможенных” МБО в плотные слои атмосферы. В этих условиях основными силами, действующими

на МБО, являются: гравитационные силы; сила солнечного давления и сила сопротивления нейтральной компоненты фонового газа. Соответственно движение сферического МБО массой m и радиусом R в геоцентрической экваториальной инерциальной системе отсчета (Geocentric Equatorial Inertial; GEI) будет описываться уравнением:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_G^{dst} + \mathbf{F}_{pr} + \mathbf{F}_{drag}, \quad (1)$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — скорость МБО в указанной системе отсчета; $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор МБО в декартовой системе координат, ось X которой направлена в точку весеннего равноденствия, ось Z направлена на северный географический полюс, а ось Y дополняет систему до правой.

В уравнении (1) сила

$$\mathbf{F}_G = -G \frac{mM_E}{r^3} \mathbf{r}$$

представляет собой гравитационную силу, действующую на МБО со стороны центрального гравитационного поля Земли (G — гравитационная постоянная; M_E — масса Земли), а сила

$$\mathbf{F}_G^{dst} = -m \nabla \left\{ \frac{GM_E J_2 R_E^2}{2r^3} (3 \sin^2 \phi - 1) \right\}$$

— возмущение силы $\mathbf{F}_G$, обусловленное полярным сжатием Земли (J_2 — второй зональный гармонический коэффициент; ϕ — географическая широта МБО; R_E — радиус Земли).

Сила солнечного давления $\mathbf{F}_{pr}$ на МБО определяется формулой:

$$\mathbf{F}_{pr} = Q_{pr} \frac{N\pi R^2}{c} P(\mathbf{r}) \mathbf{s},$$

где N — плотность потока энергии солнечного излучения, равная на орбите Земли $1.3533 \cdot 10^6$ эрг/см²с (т.н. солнечная постоянная); $Q_{pr} = Q_{pr}(R)$ — эффективность давления света на сферический МБО радиусом R , усредненная по солнечному спектру; $P(\mathbf{r})$ — т.н. “функция тени”, равная 1 на освещенном участке траектории и 0 — на теневом. Значения Q_{pr} определялись с использованием зависимости $Q_{pr} = Q_{pr}(R)$ для сферических однородных частиц из графита, рассчитанной в работе [6] с применением методов теории Ми [7]. При проведении численных расчетов разрывная теневая функция цилиндрической тени Земли аппроксимировалась непрерывной функцией

$$\begin{aligned} P(x_{GSE}, y_{GSE}, z_{GSE}) = \\ = \frac{1}{1 + \exp(\kappa x_{GSE})} \frac{1}{1 + \exp \left[-\kappa \left(\sqrt{y_{GSE}^2 + z_{GSE}^2} - R_E \right) \right]} + \\ + \frac{1}{1 + \exp(-\kappa x_{GSE})}, \end{aligned}$$

где постоянная $\kappa = 20000/R_E$, $x_{GSE}, y_{GSE}, z_{GSE}$ — координаты в геоцентрической солнечно-эклиптической системе (GSE), ось X_{GSE} которой направлена на Солнце, ось Z_{GSE} перпендикулярна плоскости эклиптики, а ось Y_{GSE} дополняет систему координат до правой.

Сила сопротивления F_{drag} для сферического МБО определяется формулой:

$$F_{drag} = -C_x \frac{\pi R^2}{2} \rho_a \tilde{v}^2 \frac{\tilde{v}}{v},$$

где $\tilde{v} = v - [\Omega, r]$ — скорость МБО в Гринвичской системе координат, вращающейся с угловой скоростью вращения Земли Ω (в которой покоится атмосферный газ); ρ_a — плотность газа верхней атмосферы; C_x — коэффициент сопротивления. Значение C_x в расчетах полагалось равным 2, что соответствует полной передаче МБО импульса молекул атмосферы при их столкновениях с МБО в свободномолекулярном режиме обтекания [8], когда длина свободного пробега молекул воздуха гораздо больше характерного размера МБО. Для рассмотренных радиусов МБО свободномолекулярный режим обтекания имеет место на высотах более 50 км. При численном моделировании движения в ОКП для задания плотности атмосферы в точке нахождения МБО использовалась кусочно-экспоненциальная аппроксимация высотного хода плотности верхней атмосферы, усредненного по суточным и сезонно-широтным вариациям для трех уровней солнечной и геомагнитной активности: низкой, средней и высокой, основанная на данных модели NRLMSISE-00 [9].

Уравнение теплового баланса, описывающее изменение внутренней энергии МБО (в расчете на единицу площади миделя МБО) имеет вид:

$$\frac{4}{3} R \rho C \frac{dT}{dt} = \frac{\rho_a \tilde{v}^3}{2} - 4\epsilon_c \sigma T^4 + \alpha N_{sun} P(r). \quad (2)$$

Выражение в левой части (2) представляет собой скорость изменения внутренней энергии МБО. В этом выражении: T — абсолютная температура МБО, а ρ и $C = C(T)$ — соответственно плотность и удельная теплоемкость его материала. Зависимость $C = C(T)$ находилась путем сплайн-интерполяции табличных значений из справочника [10]. Первым слагаемым в правой части (2) задается поток энергии, приносимой сталкивающимися с МБО молекулами атмосферного газа. Вторым слагаемым в правой части (2) определяется скорость потерь энергии МБО на лучеиспускание. В этом слагаемом: σ — постоянная Стефана — Больцмана, а $\epsilon_c = \epsilon_c(R, T, \eta)$ — т.н. “степень черноты”, которая представляет собой отношение плотности потока собственного излучения моделирующего МБО сферического микрообъекта из графита радиусом R , удельной электрической проводимостью η при температуре T , к плотности потока интегрального излучения абсолютно черного тела того же радиуса

при той же температуре. В расчетах для задания функции $\epsilon_c(R, T, \eta)$ мы воспользовались аналитическими выражениями, приведенными в работе [11]. Зависимость $\eta = \eta(T)$ находилась путем аппроксимации ортогональным полиномом табличных значений из справочника [12].

Наконец, последним слагаемым в правой части (2) задается вклад в скорость нагрева МБО потока энергии солнечного излучения, поглощаемого веществом МБО. В этом слагаемом: α — интегральный коэффициент поглощения излучения сферической частицей из графита, который определялся в приближении геометрической оптики; N_{sun} и $P(r)$ — определенные выше солнечная постоянная и функция тени.

В конкретных случаях зависимость температуры МБО от времени определялась на основе численного интегрирования уравнений (1) и (2), записанных в виде системы из семи обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для координат, компонент скорости и температуры МБО.

В заключение этого раздела отметим, что для корректного описания временной эволюции температуры входящих в атмосферу более мелких микробиологических объектов, например, вирусов с радиусами $\sim (10...150)$ нм предлагаемая математическая модель требует существенной модификации. В частности, как показывают оценки [5], для МБО указанных размеров на орбитальной стадии движения, а также на стадии сильного аэродинамического торможения, основным эффектом электризации является воздействие на динамику МБО электродинамических сил, обусловленных взаимодействием наводимого на МБО заряда с магнитным и электрическим полями ОКП. Для учета этого эффекта уравнения движения и уравнения теплового баланса МБО должны решаться совместно с уравнением зарядки МБО в фоновой плазме (см., например, публикацию [13]). Вопрос о возможном влиянии эффекта электризации МБО на динамику “заторможенных” МБО, опускающихся в плотные слои атмосферы, требует дальнейшего исследования. Но определенные предположения по этому поводу можно высказать уже сейчас. Как следует из приведенных в работах [14, 15] расчетных данных, в полярной мезосфере электрический заряд наночастицы (НЧ) из материала с работой выхода ~ 4 эВ (близкой к работе выхода графита $\sim 4,7$ эВ) при размере НЧ порядка 100 нм, даже при умеренных потоках солнечного излучения, может достигать положительных значений порядка $10 |e|$, где e — заряд электрона. В нашем случае этот заряд соизмерим с зарядом моделирующей МБО сферической НЧ из углерода (графита) того же размера на орбитальном участке траектории, на котором в соответствии с данными работы [5] магнитная составляющая силы Лоренца будет давать

существенный вклад в полную силу, возмущающую движение НЧ в центральном гравитационном поле Земли. Тем не менее, прямой динамический эффект электризации МБО на мезосферных высотах будет, по-видимому, незначительным, поскольку скорость “заторможенного” МБО, опускающегося в плотные слои атмосферы, а, соответственно, и магнитная составляющая силы Лоренца, будут на порядки меньшими значений этих величин на орбитальном участке траектории МБО. Более вероятным представляется влияние на динамику спуска МБО в плотные слои атмосферы явления нуклеации МБО, вызываемой конденсацией на ней перенасыщенного водяного пара, присутствующего на высотах движения МБО. Возможность реализации условий перенасыщенности водяного пара в летней полярной мезосфере на высотах $\sim 80\ldots 90$ км показана в работе [16].

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Первая серия проведенных нами численных экспериментов была направлена на выяснение способности спор земных бактерий, отделяющихся от поверхности крупного низкоорбитального объекта искусственного происхождения, выдержать аэродинамический нагрев при входе в плотные слои атмосферы. С этой целью были произведены расчеты зависимостей от времени температуры, моделирующих указанные МБО сферических микрочастиц из углерода радиусом 0.5, 1, 2 и 3 мкм. Расчет температуры производился с момента отделения от материнского тела, который принимался за начальный момент $t = 0$, до момента достижения МБО высоты 50 км, ниже которой для указанных значений радиуса МБО предположение о свободномолекулярном режиме обтекания становится некорректным. Во всех рассмотренных случаях предполагалось, что орбита МТ представляет собой круговую орбиту высотой 400 км, лежащую в плоскости земного экватора. Скорость МБО v_0 в начальный момент $t = 0$ полагалась равной скорости МТ. В этом случае начальная скорость МБО равна по величине 7.67 км/с (первая космическая скорость на высоте 400 км), лежит в плоскости земного экватора и составляет угол $i = 90^\circ$ с местной вертикалью. Начальная температура МБО в момент отделения полагалась равной равновесной температуре МБО, которая определялась из условия баланса поглощаемых и испускаемых МБО энергетических потоков. Расчеты проводились для различных значений долготы точки отделения λ , отсчитываемой от направления на точку весеннего равноденствия. Предполагалось, что во всех рассмотренных случаях момент отделения МБО от МТ соответствует моменту 12:00 UT 18.V.1996, в котором верхняя атмосфера находилась в условиях низкой солнечной и геомагнитной активности.

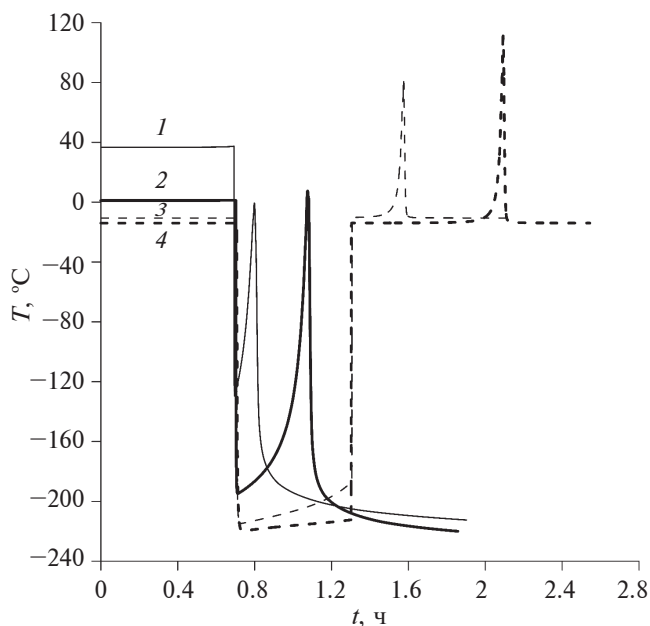


Рис. 1. Временной ход температуры МБО различного радиуса для значения долготы точки отделения $\lambda = 0^\circ$ при скорости 7.67 км/с: кривая 1 – 0.5 мкм; 2 – 1 мкм; 3 – 2 мкм; 4 – 3 мкм.

Проведем анализ полученных расчетных данных о временном ходе температур МБО различного радиуса для двух конкретных значений долготы точки отделения: $\lambda = 0^\circ$ и $\lambda = 310^\circ$.

Результаты расчетов для случая $\lambda = 0^\circ$ представлены на рис. 1.

Как видно из данных рис. 1, для МБО радиусом 0.5 мкм температура МБО, отделяющегося от материнского тела на освещенном участке орбиты МТ, сначала остается близкой к начальной равновесной температуре 37°C . Затем, после входа в тень Земли, в результате прекращения нагрева МБО потоком солнечного излучения, имеет место быстрое падение температуры, которое сменяется резким ростом температуры в результате вхождения МБО в более плотные слои атмосферы, приводящего к его интенсивному нагреву потоком энергии, приносимой сталкивающимися с МБО молекулами атмосферного газа. При этом, вследствие торможения МБО, его скорость $\dot{v}$ относительно атмосферного газа быстро уменьшается, что приводит к ослаблению аэродинамического нагрева МБО. В результате, достигнув локального максимума -1°C , температура МБО, прекращающего движение по орбите и не выходящего более из тени Земли, начинает монотонно снижаться, достигая весьма низкого значения -212°C к моменту достижения минимальной высоты моделирования. Отметим, что температура МБО в локальном максимуме в этом случае оказывается меньшей его температуры на освещенном участке орбиты.

Аналогичный характер имеет и зависимость от времени температуры МБО радиусом 1 мкм. При этом температура МБО на освещенном участке орбиты близка к начальной равновесной температуре 1°C , а температура в локальном максимуме увеличивается до 8°C , становясь, таким образом, немного большей температуры МБО на освещенном участке орбиты.

Существенно иной характер имеют зависимости от времени температуры МБО радиусами 2 и 3 мкм. Как видно из данных рис. 1, температура МБО радиусом 2 мкм на освещенном участке орбиты, как и в рассмотренных выше случаях, сначала остается близкой к начальной равновесной температуре -11°C . Затем, после входа в тень Земли, в результате прекращения нагрева МБО потоком солнечного излучения, имеет место быстрое падение температуры до минимального значения -215°C , после достижения которого начинается медленный рост температуры МБО, обусловленный сравнительно слабым на этой стадии орбитального движения нагревом МБО потоком сталкивающихся с МБО молекул атмосферного газа. После выхода МБО на освещенный участок орбиты, в результате возобновления нагрева МБО потоком солнечного излучения, происходит резкий скачок температуры МБО до значения близкого к начальному равновесному значению. Дальнейшее орбитальное движение, вследствие все возрастающего воздействия силы сопротивления, приводит к уменьшению высоты МБО над поверхностью Земли и попаданию МБО в более плотные слои атмосферы, что приводит к интенсивному нагреву МБО потоком энергии, приносимой на МБО молекулами атмосферного газа до максимальной температуры 82°C , после чего, температура МБО, прекратившего орбитальное существование и опускающегося в плотные слои атмосферы на освещенной стороне Земли, быстро уменьшается до температуры близкой к начальному равновесному значению, оставаясь практически постоянной вплоть до момента достижения минимальной высоты моделирования.

Как видно из данных рис. 1, аналогичный характер имеет и зависимость от времени температуры МБО радиусом 3 мкм. При этом температура МБО на освещенном участке орбиты близка к начальной равновесной температуре равной -14°C , а температура в локальном максимуме, который, как и в рассмотренном выше случае, достигается после прохождения МБО через тень Земли на освещенном участке траектории, увеличивается до 111°C .

Рассмотрим теперь результаты расчетов для случая $\lambda = 310^{\circ}$, представленные на рис. 2.

Из данных рис. 2 видно, что в этом случае отделение МБО от МТ происходит на освещенном участке орбиты МТ, и на начальном участке движения МБО в ОКП для всех рассмотренных значений радиуса температура МБО является практически

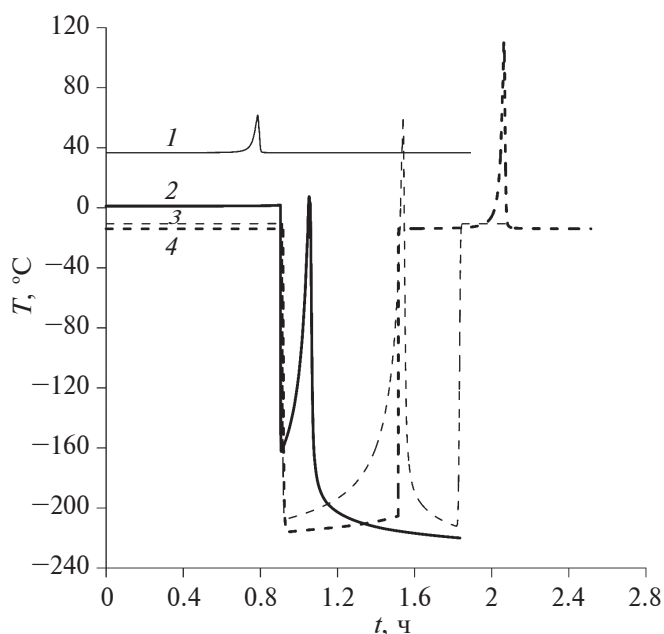


Рис. 2. Временной ход температуры МБО различного радиуса для значения долготы точки отделения $\lambda = 310^{\circ}$ при скорости 7.67 км/с: 1— 0.5 мкм; 2— 1 мкм; 3— 2 мкм; 4— 3 мкм.

постоянной, близкой к начальной равновесной температуре МБО на освещенном участке орбиты. Однако дальнейший ход температуры существенно зависит от радиуса МБО. В случае МБО радиусом 0.5 мкм на освещенном участке орбиты имеет место всплеск температуры МБО до максимального значения 62°C , обусловленный его нагревом в результате сильного аэродинамического торможения, после чего температура МБО, прекращающего орбитальное существование и, в дальнейшем, опускающегося в плотные слои атмосферы на дневной стороне Земли, возвращается к близкому к начальному равновесному значению 37°C и остается практически постоянной до момента достижения минимальной высоты моделирования. Изменение со временем температуры МБО радиусом 1 мкм происходит также, как и в рассмотренном выше случае отделения МБО того же радиуса в точке орбиты МТ с долготой $\lambda = 0^{\circ}$. При этом температура МБО в максимуме, который достигается после входа в тень Земли, такая же, как и в случае $\lambda = 0^{\circ}$, и равна 7°C . Локальный максимум температуры МБО радиусом 2 мкм равный 59°C , обусловленный ее нагревом в результате аэродинамического торможения, также имеет место при нахождении МБО в тени Земли. Как видно из данных рис. 2, после достижения локального максимума, температура МБО сначала падает до низкого значения -212°C , а затем, в результате выхода МБО, затормозившегося в атмосфере и вращающегося вместе с ней, из тени Земли, быстро возрастает до значения близкого к начальному равновесному

и остается практически постоянной вплоть до момента достижения минимальной высоты моделирования. Наконец, временной ход температуры МБО радиусом 3 мкм происходит также, как и в рассмотренном выше случае отделения МБО того же радиуса в точке орбиты МТ с долготой $\lambda = 0^\circ$. При этом, температура МБО в максимуме, который достигается на освещенном участке траектории после прохождения через тень Земли, такая же, как и в случае $\lambda = 0^\circ$, и равна 111°C .

Сравнение результатов расчета временного хода температур МБО в случаях $\lambda = 0^\circ$ и $\lambda = 310^\circ$ показывает, что для одинаковых значений радиуса МБО имеет место совпадение моментов t_{max} , в которые достигаются локальные максимумы температуры, обусловленные аэродинамическим нагревом в верхней атмосфере. Кроме того, имеет место совпадение значений температуры в локальных максимумах, если в обоих случаях они достигаются либо на освещенном, либо на теневом участке орбиты. Если же в одном случае максимум температуры достигается на освещенном участке орбиты, а в другом случае — на теневом, наибольшее значение имеет температура в максимуме, который достигается на освещенном участке орбиты.

Результаты проведенных нами расчетов временного хода температур МБО с рассматриваемыми значениями радиуса для других долгот точки отделения λ показывают, что положение моментов достижения локальных максимумов температуры на временной оси в общем случае не зависит от λ . Одинаковыми являются и значения температуры в максимумах, достигаемых на освещенных и теневых участках орбит, равных, таким образом, максимальной и минимальной температуре аэродинамического нагрева МБО, отделяющихся от МТ на рассматриваемой орбите.

Как следует из вышеизложенного, в рассматриваемом случае максимальная температура аэродинамического нагрева модельного МБО из углерода достигается при радиусе МБО в 3 мкм и равна 111°C . При этом промежуток времени существенного аэродинамического нагрева, в течение которого температура МБО превышает 100°C , равен всего 20 с.

В соответствии с приведенными в работе [17] данными в случае импульсного нагрева продолжительностью ~ 20 с при температурах больших 250°C погибают споры любых земных бактерий. В дальнейшем температуру в 250°C будем рассматривать как предельную температуру выживания спор $T_{\text{кр}}$ при импульсном нагреве. Приведенные выше расчетные данные показывают, что максимальные температуры аэродинамического нагрева спор земных бактерий, отделяющихся от поверхностей крупных низкоорбитальных объектов искусственного происхождения, оказываются существенно меньшими $T_{\text{кр}}$. Таким образом, имеются

основания предполагать, что многие из спор земных бактерий, выносимых в ближний космос на нестерилизованных поверхностях космических аппаратов и последних ступеней ракет-носителей и выдерживающих воздействие факторов космической среды, в конце концов возвращаются на Землю, сохраняя свою жизнеспособность.

Вторая серия численных экспериментов была направлена на выяснение способности спор гипотетических бактерий внеземного происхождения выдержать аэродинамический нагрев при пологом входе в атмосферу Земли со скоростью большей второй космической скорости. Потенциальными источниками такого рода микробиологических объектов могут выступать некоторые небесные тела Солнечной системы. В качестве моделей спор внеземных бактерий, как и в первой серии численных экспериментов, рассматривались сферические микрочастицы из углерода (графита) радиусом 0.5, 1, 2 и 3 мкм. Расчеты проводились для конкретного случая, когда в начальный момент $t = 0$ МБО, достигший ближайшей окрестности Земли, находится в плоскости земного экватора на высоте 400 км над земной поверхностью и движется со скоростью v_0 , которая лежит в экваториальной плоскости, равна по величине 11.20 км/с (т.е. больше второй космической скорости на высоте 400 км, равной 10.85 км/с) и составляет угол $i = 105^\circ$ с местной вертикалью. Заметим, что указанное значение угла i находится внутри узкого “коридора”, нижняя граница которого определяется условием “захвата” МБО рассматриваемых радиусов атмосферой Земли, а верхняя граница — необходимостью реализации таких режимов входа МБО в атмосферу, при которых максимальные температуры аэродинамического нагрева МБО, по крайней мере для некоторых из рассматриваемых значений радиуса, не превышают критического значения $T_{\text{кр}}$ для спор внеземных бактерий, которое, как и для спор земных бактерий, полагалось равным 250°C . Расчеты проводились для различных значений долготы начальной точки λ . Предполагалось, что во всех рассмотренных случаях начальный момент соответствует моменту 12:00 UT 18.V.1996.

В качестве примера на рис. 3 и 4 приведены результаты расчета зависимостей от времени температур МБО с рассматриваемыми значениями радиуса для двух конкретных значений долготы начальной точки: $\lambda = 0^\circ$ и $\lambda = 173^\circ$. Отметим, что в случае $\lambda = 0^\circ$ начальная точка освещена Солнцем, а при $\lambda = 173^\circ$ находится в тени Земли.

Сравнение результатов расчета временного хода температур МБО в случаях $\lambda = 0^\circ$ и $\lambda = 173^\circ$ показывает, что для одинаковых значений радиуса МБО имеет место совпадение временных моментов t_{max} , в которые достигаются локальные максимумы температуры МБО, обусловленные их аэродинамическим нагревом в верхней атмосфере, причем

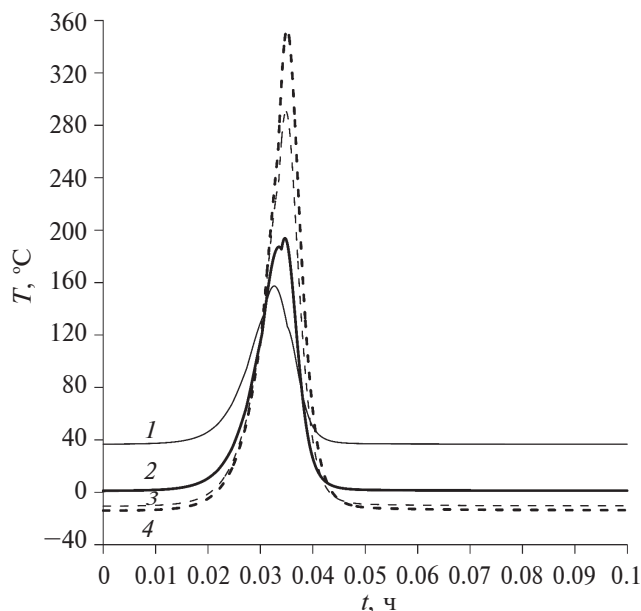


Рис. 3. Временной ход температуры МБО различного радиуса для значения долготы точки отделения $\lambda = 0^\circ$ при скорости 11.20 км/с: кривая 1 – 0.5 мкм; 2 – 1 мкм; 3 – 2 мкм; 4 – 3 мкм.

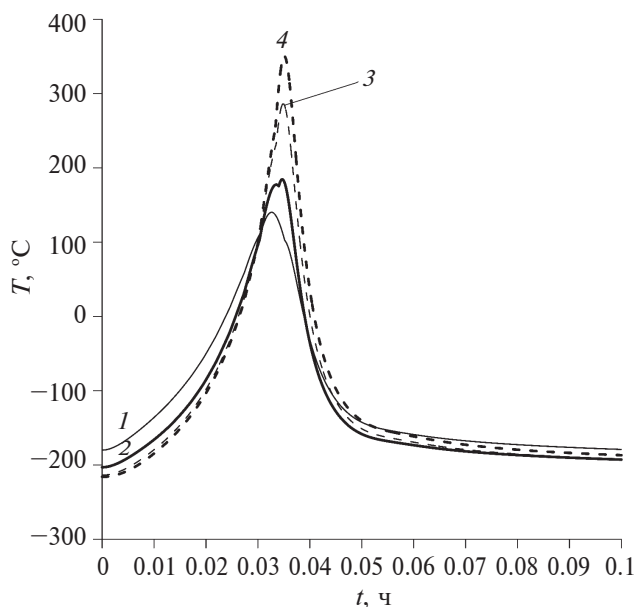


Рис. 4. Временной ход температуры МБО различного радиуса для значения долготы точки отделения $\lambda = 173^\circ$ при скорости 11.20 км/с: кривая 1 – 0.5 мкм; 2 – 1 мкм; 3 – 2 мкм; 4 – 3 мкм.

значения $t_{\max}$ для МБО различного радиуса находятся в узком промежутке от 1.96 до 2.11 мин. Как видно из данных рис. 3 и 4, наибольшую величину имеют температуры в максимумах, которые достигаются в случае $\lambda = 0^\circ$, когда начальная точка освещена Солнцем. Указанные температуры для МБО радиусами 0.5, 1, 2 и 3 мкм равны соответственно 157°C, 194°C, 291°C и 353°C. В тоже время, наименьшую величину имеют температуры в максимумах, которые достигаются в случае $\lambda = 173^\circ$, когда начальная точка находится в тени. Указанные температуры для МБО радиусами 0.5, 1, 2 и 3 мкм равны соответственно 140°C, 185°C, 286°C и 350°C.

Результаты расчетов временного хода температур МБО с заданными значениями радиуса для других значений долготы начальной точки λ показывают, что положение моментов достижения локальных максимумов температуры на временной оси в общем случае не зависит от λ . Одинаковыми являются и значения температуры в максимумах, достигаемых в случаях, когда начальная точка освещена Солнцем, а также в случаях, когда начальная точка находится в тени Земли.

Как следует из вышеизложенного, в рассматриваемом примере максимальные температуры аэродинамического нагрева модельных МБО из углерода радиусами 0.5 и 1 мкм равны соответственно 157°C и 194°C. Указанные температуры меньше критической температуры 250°C, и, таким образом, имеются основания предполагать, что споры не крупных внеземных бактерий размером $\lesssim 1$ мкм

способны выдержать аэродинамический нагрев при входе в атмосферу Земли со скоростью большей второй космической. В тоже время **минимальные** температуры аэродинамического нагрева модельных МБО из углерода радиусами 2 и 3 мкм, равные соответственно 286°C и 350°C оказываются большими критической температуры 250°C, и, следовательно, способность выживания спор внеземных бактерий размером $\gtrsim 2$ мкм при входе в атмосферу Земли со скоростью большей второй космической является сомнительной.

Наконец, третья серия численных экспериментов была направлена на выяснение способности спор гипотетических внеземных бактерий, приходящих из межзвездного пространства, выдерживать аэродинамический нагрев при пологом входе в атмосферу Земли со скоростью большей третьей космической скорости. В качестве моделей такого рода МБО, как и ранее, рассматривались сферические микрочастицы из углерода (графита) радиусом 0.5, 1, 2 и 3 мкм. Предполагалось, что в начальный момент $t = 0$ МБО находится в плоскости земного экватора на высоте 400 км над земной поверхностью и движется со скоростью v_0 , которая лежит в экваториальной плоскости, равна по величине 16.65 км/с (т.е. больше третьей космической скорости на высоте 400 км, равной 16.43 км/с) и составляет угол $i = 105^\circ$ с местной вертикалью. Расчеты проводились для различных значений долготы начальной точки λ . Предполагалось, что во всех рассмотренных случаях начальный момент соответствует моменту 12:00 UT 18.V.1996.

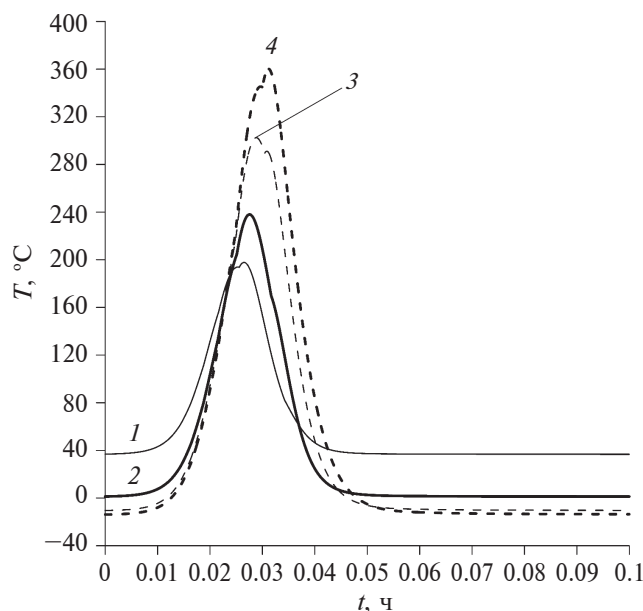


Рис. 5. Временной ход температуры МБО различного радиуса для значения долготы точки отделения $\lambda = 0^\circ$ при скорости 16.65 км/с: кривая 1 — 0.5 мкм; 2 — 1 мкм; 3 — 2 мкм; 4 — 3 мкм.

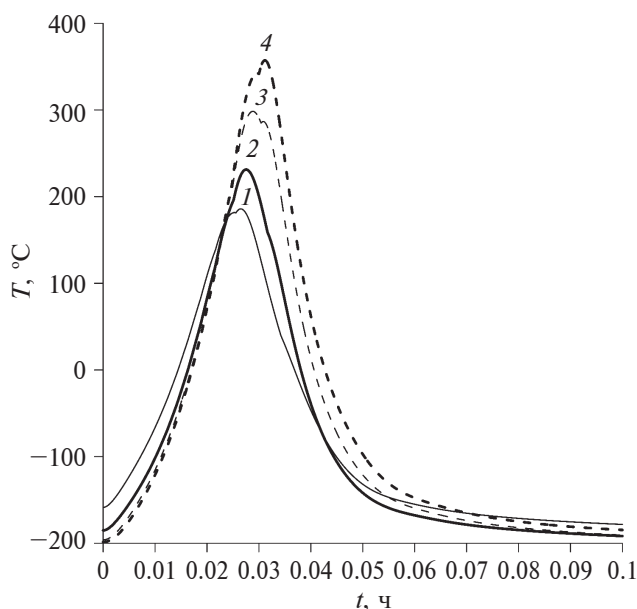


Рис. 6. Временной ход температуры МБО различного радиуса для значения долготы точки отделения $\lambda = 173^\circ$ при скорости 16.65 км/с: кривая 1 — 0.5 мкм; 2 — 1 мкм; 3 — 2 мкм; 4 — 3 мкм.

В качестве примера на рис. 5 и 6 приведены результаты расчета зависимостей от времени температур МБО с рассматриваемыми значениями радиуса для двух значений долготы начальной точки: $\lambda = 0^\circ$ (начальная точка освещена Солнцем) и $\lambda = 173^\circ$ (начальная точка в тени).

Сравнение результатов расчета временного хода температур МБО в случаях $\lambda = 0^\circ$ и $\lambda = 173^\circ$ показывает, что для одинаковых значений радиуса МБО имеет место совпадение временных моментов $t_{\max}$, в которые достигаются локальные максимумы температуры МБО, обусловленные их аэродинамическим нагревом в верхней атмосфере, причем значения $t_{\max}$ для МБО различного радиуса находятся в узком промежутке от 1.59 до 1.87 мин. Как видно из данных рис. 5 и 6, наибольшую величину имеют температуры в максимумах, которые достигаются в случае $\lambda = 0^\circ$. Указанные температуры для МБО радиусами 0.5, 1, 2 и 3 мкм равны соответственно 198°C, 238°C, 302°C и 360°C. В то же время, наименьшую величину имеют температуры в максимумах, которые достигаются в случае $\lambda = 173^\circ$, когда начальная точка находится в тени. Указанные температуры для МБО радиусами 0.5, 1, 2 и 3 мкм равны соответственно 186°C, 231°C, 298°C и 357°C.

Результаты расчетов временного хода температур МБО с заданными значениями радиуса для других значений долготы начальной точки λ показывают, что положение моментов достижения локальных максимумов температуры на временной оси в общем случае не зависит от λ . Одинаковыми являются и значения температуры в максимумах,

достигаемых в случаях, когда начальная точка освещена Солнцем, а также в случаях, когда начальная точка находится в тени Земли.

Как следует из вышеизложенного, в рассматриваемом случае **максимальные** температуры аэродинамического нагрева модельных МБО из углерода радиусами 0.5 и 1 мкм равны соответственно 198°C и 238°C. Указанные температуры меньше критической температуры 250°C, и, таким образом, имеются основания предполагать, что споры не крупных внеземных бактерий размером $\lesssim 1$ мкм способны выдержать аэродинамический нагрев при входе в атмосферу Земли со скоростью большей третьей космической. В то же время даже **минимальные** температуры аэродинамического нагрева модельных МБО из углерода радиусами 2 и 3 мкм, равные соответственно 298°C и 357°C оказываются большими критической температуры 250°C, и, следовательно, способность выживания спор внеземных бактерий размером $\gtrsim 2$ мкм при входе в атмосферу Земли со скоростью большей третьей космической является сомнительной.

ВЫВОДЫ

1. Разработана и реализована в расчетной программе математическая модель, описывающая движение в ОКП и аэродинамический нагрев при входе в атмосферу сферических микрочастиц из углерода (графита) радиусами от 0.5 до 3 мкм, моделирующих споры бактерий. Модель основана на совместном численном решении уравнений

движения в ОКП указанного модельного микробиологического объекта (МБО) и уравнения теплового баланса, описывающего изменение внутренней энергии МБО.

2. На основе результатов численных экспериментов показано, что максимальные температуры аэродинамического нагрева модельных МБО, отделяющихся от поверхности крупного низкоорбитального объекта искусственного происхождения, движущегося по низкой круговой орбите высотой 400 км, оказываются *существенно* меньшими предельной температуры выживания спор земных бактерий $T_{кр} = 250^\circ\text{C}$ при импульсном нагреве. Таким образом, имеются основания предполагать, что многие из спор земных бактерий, выносимых в ближний космос на не стерилизованных поверхностях космических аппаратов и последних ступеней ракет-носителей и выдерживающих воздействие факторов космической среды, в конце концов возвращаются на Землю, сохраняя свою жизнеспособность.

3. На основе результатов численных экспериментов определены максимальные температуры аэродинамического нагрева сферических микрочастиц из углерода (графита) с радиусами 0,5, 1, 2 и 3 мкм, рассматриваемых как модели спор гипотетических бактерий внеземного происхождения, входящих в атмосферу со скоростями: а) большими второй космической скорости, б) большими третьей космической скорости. В первом случае фактически моделируется нагрев при входе в атмосферу Земли спор бактерий, рождающихся в пределах Солнечной системы, а, во втором, — приходящих из межзвездного пространства. В обоих случаях предполагалось, что модельный МБО в начальный момент находится в точке экваториальной плоскости на высоте 400 км над поверхностью Земли и движется со скоростью, вектор которой лежит в плоскости земного экватора и составляет угол 105° с местной вертикалью. Как следует из полученных расчетных данных, в указанных случаях максимальные температуры аэродинамического нагрева модельных МБО радиусами 0,5 и 1 мкм оказываются меньшими предельной температуры выживания спор земных бактерий $T_{кр} = 250^\circ\text{C}$. В тоже время даже минимальные температуры аэродинамического нагрева более крупных модельных МБО радиусами 2 и 3 мкм оказываются большими $T_{кр}$. Таким образом, если споры гипотетических бактерий внеземного происхождения обладают устойчивостью к импульсному нагреву близкой к термической устойчивости спор земных бактерий, полученный результат дает основание для предположения о том, что споры гипотетических внеземных бактерий размером $\lesssim 1$ мкм способны выдерживать аэродинамический нагрев при входе в атмосферу Земли со скоростями большими как второй, так и третьей космической скорости.

Этот результат является определенным аргументом в пользу известной теории панспермии.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–21–00038, <https://rscf.ru/project/23-21-00038/>.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесников Е. К., Чернов С. В. О времени существования микрочастиц на низких круговых околоземных орбитах // Косм. исслед. 1997. Т. 35. № 2. С. 221–222.
2. Цыганков О. С., Гребенникова Т. В., Дешевая Е. А. и др. Исследования мелкодисперсной среды на внешней поверхности международной космической станции в эксперименте “Тест”: обнаружены жизнеспособные микробиологические объекты // Косм. техника и технологии. 2015. № 1(8). С. 32–41.
3. Баранов В. М., Поликарпов Н. А., Свистунова Ю. В. и др. Основные результаты эксперимента “Биориск” на Международной космической станции // Авиакосм. и эколог. медицина. 2006. Т. 40. № 3. С. 3–9.
4. Hoyle F., Wickramasinghe N. C., Al-Mufti S. The Viability with Respect to Temperature of Micro-Organisms Incident on The Earth’s Atmosphere // Astrophysics and Space Science. 1999. V. 268. P. 45–50. <https://doi.org/10.1023/A:1002484300533>.
5. Колесников Е. К. Динамические модели процессов распространения потоков заряженных частиц в космической плазме: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 1998. 481 с.
6. Burns J. A., Philippe L. L., Soter S. Radiation Forces on Small Particles in the Solar System // Icarus. 1979. V. 40. P. 1–48.
7. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.
8. Бронштэн В. А. Физика метеорных явлений. М.: Наука. 1981.
9. Picone J. M., Hedin A. E., Drob D. P. et al. NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: Statistical comparisons and scientific issues // J. Geophysical Research. 2002. V. 107. No. A12. P. SIA 15–1–SIA 15–16.
10. Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М. и др. Физические величины: справ. / под. ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат. 1991.

11. Мартыненко Ю.В., Огнев Л.И. Тепловое излучение наночастиц // Журн. техн. физики. 2005. Т. 75. Вып. 11. С. 130–132.
12. Свойства элементов: в 2-х ч. Ч. 1. Физические свойства: справ. 2-е изд. М.: Металлургия, 1976.
13. Колесников Е.К., Чернов С.В. Времена жизни техногенных микрочастиц, инжектируемых в околоземное космическое пространство на геостационарной орбите // Косм. исслед. 2022. Т. 60. № 4. С. 307–314. DOI: 10.31857/S0023420622040057
14. Klumov B. A., Popel S. I., Bingham R. Dust particle charging and formation of dust structures in the upper atmosphere // Pis'ma v ZhETF. 2000. V. 72. Iss. 7. P. 524–529.
15. Клумов Б.А., Морфилл Г.Е., Попель С.И. Формирование структур в запыленной ионосфере // Журн. эксперим. и теорет. физики. 2005. Т. 127. Вып. 1. С. 171–185.
16. Gadsden M., Schroder W. Noctilucent clouds. Springer-Verlag. Berlin. 1989.
17. Базикян Э.А., Волчкова Л.В., Лукина Г.И. и др. Особенности дезинфекции и стерилизации в стоматологии: учеб. пособие. М.: ГЭОТАР-Медиа. 2016.

УДК 629.78

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ С МАЛОЙ ТЯГОЙ В ПЕРЕМЕННЫХ КУСТААНХЕЙМО-ШТИФЕЛЯ

© 2024 г. К. Р. Корнеев*, С. П. Трофимов

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

* kirill_rnd@mail.ru

Поступила в редакцию 22.05.2023

Переработанный вариант 04.07.2023

Принята к публикации 04.09.2023

В работе рассматривается регуляризация уравнений движения космического аппарата преобразованием Кустаанхеймо — Штифеля для координат и Сундмана для времени в задаче поиска оптимальной траектории межпланетного перелета с двигателем малой тяги. Из принципа максимума Понтрягина находится оптимальное управление вектором тяги при условии ограниченной мощности двигателя. Задача перелета Земля — Марс решается в регулярных переменных. Проводится сравнение найденных траекторий с траекториями, полученными методом продолжения по параметру, а также исследуется чувствительность решений краевой задачи принципа максимума в декартовых и регулярных переменных.

DOI: 10.31857/S0023420624030045, EDN: JKFZEX

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время задача уменьшения расхода топлива при перелетах космических аппаратов (КА) может быть решена переходом к более экономичным электрореактивным двигателям, которые характеризуются высоким удельным импульсом и небольшим уровнем тяги. Космические аппараты с такими двигателями малой тяги способны совершать перелеты не только в околоземном, но и в межпланетном пространстве. Для построения оптимальных траекторий КА с малой тягой традиционно используются прямые и не прямые методы. Прямые методы подразумевают дискретизацию траектории и функции управления — представление в виде конечномерных векторов значений в узлах временной сетки. Далее получаемая задача нелинейного программирования решается численно. Альтернативный подход — это использование не прямых методов, которые сводят задачу к краевой при помощи необходимых условий оптимальности — принципа максимума Понтрягина или принципа Беллмана.

К прямым методам относятся, например, метод псевдоимпульсов [1] и метод пристрелки, комбинированный с гомотопией [2, 3]. Использование прямых методов в задаче перелета Земля — Луна с малой тягой и баллистическим захватом рассматривается в работе [4]. Одним из популярных не прямых методов является принцип максимума Понтрягина [5] в сочетании с методами гомотопии. Такой подход представлен в работах В. Г. Петухова [6–9] и Д. Переза-Палау [10]. Метод гомотопического

продолжения погружает краевую задачу в однопараметрическое семейство и непрерывно трансформирует начальное приближение в решение краевой задачи. Продвинутое методы гомотопии и двойной гомотопии рассматриваются в работах Б. Пана [11, 12], Ф. Джанга [13] и Ч. Джанга [14].

Для увеличения устойчивости не прямых методов особое внимание стоит уделить выбору фазового вектора. Возможные способы выбора переменных состояния рассматриваются в работах Э. Тахери [15–18]. Сравнительное исследование различных вариантов выполняется в работах Дж. Джанкинса [19] и С. Жефруа [20]. Зачастую замена вектора состояния сопровождается репараметризацией траектории, то есть заменой физического времени фиктивным. Первым, кто предложил такой подход был К. Ф. Сундман [21]. В случае репараметризации физическое время может стать компонентой вектора состояния или может быть заменено на временную компоненту. Временные компоненты изучаются в работах П. Накози [22] и Е. Брумберга [23].

Уравнения орбитального движения в декартовых переменных не являются регулярными: правая часть уравнений содержит сингулярность в начале координат. Приведение системы к регулярному виду называется регуляризацией. Один из методов регуляризации — преобразование Кустаанхеймо — Штифеля (KS) [24]. KS-преобразование осуществляет переход от трехмерного пространства к четырехмерному и представляет собой обобщение преобразования Леви — Чивиты [25]. Такое преобразование обсуждается в статье [26]. Стоит

учитывать, что условие на физическое существование траекторий в пространстве KS-переменных выражается через билинейное соотношение. Использование KS-переменных вместе с преобразованием Сундмана для задачи оптимального перелета рассматривается в публикации [27], где метод продолжения по параметру применяется следующим образом: сначала траектория в KS-переменных рассчитывается без соблюдения билинейного соотношения, после чего методом продолжения приводится к решению с его соблюдением.

Свойство KS-переменных regularизировать уравнения движения оказывается полезно в различных задачах небесной механики и астродинамики, где наблюдается высокая чувствительность траекторий. Скажем, в настоящее время KS-переменные находят применение в области предсказания и коррекции движения КА [28] и в моделировании методом Монте-Карло траекторий небесных тел в задачах планетарной защиты [29]. Эти переменные также используются при исследовании топологической устойчивости в задаче N тел [30].

Целью настоящего исследования является изучение потенциальной выгоды от применения KS-преобразования совместно с преобразованием Сундмана к задаче оптимального межпланетного перелета с малой тягой. Этот подход будет сравниваться с гомотопическим методом продолжения по параметру в декартовых переменных. Особое внимание уделяется анализу обусловленности матрицы чувствительности. Билинейное соотношение, выражающее физичность траектории в KS-пространстве, будет учтено в качестве смешанного ограничения в функции Гамильтона — Понтрягина. Терминальные многообразия в KS-переменных выписываются явным образом.

В работе формулируется задача оптимального перелета с ограниченным по мощности идеально регулируемым двигателем малой тяги. После этого вводятся KS-преобразование и преобразование Сундмана. Далее описывается применение принципа максимума Понтрягина в KS-переменных для сведения задачи к двухточечной краевой, которая затем сводится к задаче оптимизации и решается с помощью метода внутренней точки [31]. В качестве модельной задачи рассматривается перелет Земля — Марс. Сравняются оптимальные решения этой задачи в KS-переменных и в декартовых переменных.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Дифференциальные уравнения орбитального движения КА в центральном гравитационном поле в декартовых координатах записываются как

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a},\end{aligned}\quad (1)$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — это векторы положения и скорости; $\mathbf{a}$ — вектор реактивного ускорения и μ — гравитационный параметр центрального тела. Реактивное ускорение выражается как

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_T}{m(t)} = \frac{\dot{m}_s u}{m(t)} \mathbf{e}, \quad (2)$$

где $\dot{m}_s$ — массовый расход (масса рабочего тела, затрачиваемого в единицу времени); m — масса космического аппарата в момент времени t ; $\mathbf{e}$ — вектор направления тяги; и u — скорость истечения рабочего тела. Если мощность двигателя ограничена доступной электрической мощностью $N_{\max}$ с известным КПД η , тогда

$$\frac{\dot{m} u^2}{2} \leq \eta N_{\max}. \quad (3)$$

Предполагается, что двигатель идеально регулируемый: можно выбрать u и $\dot{m}_s$ произвольным образом, лишь бы выполнялось условие. Очевидно, что при этом величина тяги может принимать любые значения. Выражая из равенства u через $\mathbf{a}$, m , $\dot{m}_s$ и подставляя это выражение в формулу, получим

$$\frac{\mathbf{a}^2(t) m^2(t)}{2 \dot{m}} \leq \eta N_{\max}. \quad (4)$$

После интегрирования неравенство принимает вид

$$\frac{1}{m_0 - m(t)} - \frac{1}{m_0} \leq \int_0^t \frac{\mathbf{a}^2(\tau) d\tau}{2 \eta N_{\max}}. \quad (5)$$

Минимум потребления рабочего тела достигается при использовании всей доступной электрической мощности, то есть превращении неравенства (5) в равенство. Предполагается, что доступная мощность не меняется со временем, что соответствует, например, случаю использования ядерных бортовых источников энергии постоянной мощности. Минимальное потребление топлива требует минимизации функционала

$$J = \frac{1}{2 \eta N_{\max}} \int_0^f \mathbf{a}^2(t) dt. \quad (6)$$

Преобразование времени Сундмана

Одним из важных методов regularизации является замена независимой переменной [32]. В этом случае траектория репараметризуется: вместо физического времени t вводится новая переменная s , называемая фиктивным временем. Репараметризация записывается как

$$dt = c(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) ds. \quad (7)$$

Можно задать масштабирующий множитель c так, чтобы правая часть уравнений движения менялась практически равномерно. Сундман предложил

выбирать масштабирующий множитель в виде $dt = rds$. Если поставить требование для фиктивного времени, чтобы оно менялось на 2π за орбитальный период, масштабирующий множитель немного модифицируется:

$$dt = \frac{r}{\sqrt{-2h}} ds. \quad (8)$$

Здесь r — расстояние до центрального тела, а h — кеплерова энергия. Можно показать, что в этой нормированной версии преобразования Сундмана роль фиктивного времени s играет эксцентрическая аномалия E . Для отслеживания физического времени необходимо добавить к системе временное уравнение

$$t' = \frac{r}{\sqrt{-2h}}, \quad (9)$$

где штрих обозначает производную по фиктивному времени. Однако временное уравнение уменьшает эффект регуляризации из-за короткопериодических колебаний масштабирующего множителя. Решением этой проблемы будет использование временного элемента — переменной, которая растет линейно по отношению к фиктивному времени в невозмущенном случае, но в то же время явным образом связана с физическим временем. Временной элемент определяется как

$$\tau = t_0 + \sqrt{\frac{\mu^2}{8h^3}} E. \quad (10)$$

Как видно, временной элемент τ линеен по отношению к эксцентрической аномалии E .

Преобразование Кустаанхеймо — Штифеля

Преобразование Кустаанхеймо — Штифеля — это гладкое вложение трехмерного конфигурационного пространства $(x, y, z)^T$ в четырехмерное параметрическое пространство $(u_1, u_2, u_3, u_4)^T$. Это отображение записывается в матричной форме как

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u})\mathbf{u}, \quad (11)$$

или же, в краткой форме,

$$\mathbf{r} = L(\mathbf{u})\mathbf{u}. \quad (12)$$

Четвертая компонента радиус-вектора обнуляется при условии

$$\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (13)$$

где $\mathbf{u}_b$ — это четвертая строка матрицы L . Для того, чтобы движение в параметрическом пространстве

было физическим (соответствующим движению в физическом пространстве), требуется выполнение билинейного соотношения

$$\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (14)$$

в каждый момент времени. Четырехмерное параметрическое пространство расслаивается: каждый слой

$$\hat{\mathbf{u}} = \{ \mathbf{u} : L(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{r}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \} \quad (15)$$

представляет собой одномерное многообразие точек KS-пространства, которые отображаются в одну точку в физическом пространстве.

Уравнения движения в KS-переменных

Преобразование Сундмана в KS-переменных принимает вид

$$t' = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{-2h}}, \quad (16)$$

где кеплерова энергия выражается как

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 4(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w})}. \quad (17)$$

В этом уравнении $\mathbf{w}$ — параметрическая скорость. После применения преобразования Сундмана и KS-преобразования уравнения движения могут быть записаны как

$$\mathbf{u}'' + \frac{\mathbf{u}}{4} = -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{4h} L^T(\mathbf{u})\mathbf{a} - \frac{h'}{2h} \mathbf{u}', \quad (18)$$

где производная кеплеровой энергии по фиктивному времени имеет вид

$$h' = 2\mathbf{w} \cdot L^T \mathbf{a}. \quad (19)$$

Для использования KS-переменных расширим вектор реактивного ускорения до четырехмерного $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^4$. Позже будет наложено ограничение для его физической осуществимости. Также обратим внимание, что дифференциальные уравнения задачи двух тел принимают форму регулярных уравнений возмущенного осциллятора. В отсутствие возмущений существует точное решение: гармонические колебания с частотой $1/2$. Вывод уравнения (18) детально представлен в работе [24].

Для заданной точки в KS-пространстве параметрическая скорость $\mathbf{w}$ связана с производной радиус-вектора по фиктивному времени $\mathbf{r}' = \mathbf{v}t'$ согласно формуле

$$\mathbf{w} = \frac{L^T(\mathbf{u})\mathbf{r}'}{2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}. \quad (20)$$

Это выражение позволяет вычислять начальное значение скорости, необходимое для численного интегрирования. Многообразие параметрических

скоростей, которые соответствуют некоторой физической скорости, выражается схожим с формулой (15) образом:

$$\hat{\mathbf{w}} = \left\{ \mathbf{w} : \frac{2\sqrt{-2h}L(\mathbf{u})\mathbf{w}}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})} = \mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \right\}. \quad (21)$$

Наконец, выражение для временного элемента τ в параметрическом пространстве записывается как

$$\tau = t_0 + 2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\sqrt{-2h}}. \quad (22)$$

Дифференциальное уравнение на τ принимает вид

$$\tau' = \frac{\mu + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})h' + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \cdot L^T \mathbf{a}}{(-2h)^{3/2}}. \quad (23)$$

Итого для описания движения КА в параметрическом пространстве требуется 9 скалярных дифференциальных уравнений: к уравнению (23) добавляются еще восемь из векторного уравнения второго порядка (18).

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ В РЕГУЛЯРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этом разделе задача оптимального управления в KS-переменных решается с помощью принципа максимума Понтрягина. Условия трансверсальности выражаются в параметрическом пространстве. Получившаяся двухточечная краевая задача преобразуется в задачу нелинейного программирования с граничными условиями и затем решается с помощью метода внутренней точки.

Функционал стоимости, дифференциальные и смешанные ограничения

Система дифференциальных уравнений орбитального движения в KS-переменных записывается как

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{w}, \\ \mathbf{w}' &= -\frac{\mathbf{u}}{4} - \frac{\mathbf{u}^2}{4h} L^T \mathbf{a} - \frac{2\mathbf{w} \cdot L^T \mathbf{a}}{2h} \mathbf{w}, \\ \tau' &= \frac{\mu + (8(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}) \cdot L^T \mathbf{a}}{(-2h)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Функционал стоимости также должен быть выражен через KS-переменные и фиктивное время:

$$J = \frac{1}{2\eta N_{max}} \int_{s_0}^{s_f} \mathbf{a}^2(t) \frac{\mathbf{u}^2(s)}{\sqrt{-2h(s)}} ds. \quad (25)$$

Физическая осуществимость управления требует, чтобы четвертая компонента вектора управления тождественно равнялась нулю:

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = \mathbf{u}_b \cdot L^T \mathbf{a} = 0. \quad (26)$$

Этот тип ограничений называется смешанным, так как включает в себя и вектор состояния, и вектор управления. Несложно показать, что в силу

$$(\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{u}') = \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{u}'' + \mathbf{u}_b' \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{w}' \quad (27)$$

функция g пропорциональна производной билинейного соотношения:

$$\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{w}' = -\frac{\mathbf{u}^2}{4h} g(\mathbf{u}, \mathbf{a}). \quad (28)$$

В общем случае в условиях возмущенной динамики при численном интегрировании траектории часто проявляется топологическая неустойчивость [30], что может привести к нарушению ее физической осуществимости. Явное добавление в систему смешанного ограничения, в котором вектор-функция g пропорциональна скорости изменения билинейного параметра, представляет собой, по сути, способ контроля локальной точности интегрирования. Такой подход к стабилизации системы с помощью добавления в нее производных от интегральных соотношений был предложен еще Штифелем [24].

Принцип максимума в регулярных переменных

Теперь возможно применить принцип максимума Понтрягина к автономной системе (24) с функционалом стоимости (25) и смешанным ограничением (26). Процедура учета смешанного ограничения описана, к примеру, в работе [33]: оно должно быть добавлено в функцию Гамильтона — Понтрягина с множителем Лагранжа β :

$$H = -\phi(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{x}) - \beta g(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \mathbf{a}). \quad (29)$$

Здесь ϕ — это подынтегральная функция в функционале стоимости; $\mathbf{p}$ — это вектор сопряженных переменных; и $\mathbf{f}$ — функция правых частей системы. Значения β и $\mathbf{a}$ могут быть определены из условия стационарности гамильтониана и смешанного ограничения:

$$\begin{aligned} H_a(\mathbf{x}, \mathbf{a}) &= 0, \\ g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь введено обозначение $H_a = \partial H / \partial \mathbf{a}$. Подстановка подынтегральной функции и функции правых частей системы в гамильтониан дает

$$\begin{aligned} H = & -\frac{\mathbf{u}^2}{\sqrt{-2h}} \frac{\mathbf{a}^2}{2} + \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{w} + \mathbf{p}_w \cdot \left(-\frac{\mathbf{u}}{4} - \frac{\mathbf{u}^2}{4h} L^T \mathbf{a} - \frac{\mathbf{w}}{h} \mathbf{w} \cdot L^T \mathbf{a} \right) + \\ & + p_\tau \tau' - \beta \mathbf{u}_b \cdot L^T \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (31)$$

Введем вспомогательный вектор

$$\Lambda = L \left(-\frac{\mathbf{u}^2}{4h} \mathbf{p}_w - \frac{\mathbf{w}}{h} \mathbf{p}_w \cdot \mathbf{w} \right), \quad (32)$$

который упрощает выражение до

$$H = -\frac{\mathbf{u}^2}{\sqrt{-2h}} \frac{\mathbf{a}^2}{2} + \Lambda \cdot \mathbf{a} + \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{w} - \frac{\mathbf{p}_w \cdot \mathbf{u}}{4} + p_\tau \tau' - \beta \mathbf{u}_b \cdot L^T \mathbf{a}. \quad (33)$$

Также учтем тот факт, что система (24) не зависит от временного элемента τ . Это приводит к тому, что сопряженная переменная p_τ является константой вследствие выполнения $p'_\tau = 0$. Забегая немного вперед, отметим, что ограничений на τ в конечный момент времени s_f не накладывается, а значит, из условий трансверсальности следует $p_\tau(s_f) = 0$, что позволяет исключить слагаемое $p_\tau \tau'$ из рассмотрения. Условие стационарности, также известное как уравнение Эйлера–Лагранжа, записывается как

$$H_a = -\frac{\mathbf{u}^2}{\sqrt{-2h}} \mathbf{a} + \Lambda - \beta L \mathbf{u}_b = 0. \quad (34)$$

Если уравнение (34) умножить на $\mathbf{u}_b L^T$ слева, а потом использовать условие (26) для сокращения первого слагаемого, то можно выразить множитель Лагранжа:

$$\beta = \frac{\Lambda_4}{\mathbf{u}^2}. \quad (35)$$

После подстановки в (34) удобно ввести обозначение

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda - \frac{\Lambda_4}{\mathbf{u}^2} L \mathbf{u}_b. \quad (36)$$

Тогда для оптимального управления имеем:

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{-2h}}{\mathbf{u}^2} \tilde{\Lambda}. \quad (37)$$

Фактически это выражение влечет выполнение смешанного ограничения (26): четвертая компонента вектора управления всегда будет равна нулю. Подстановка оптимального управления в гамильтониан дает

$$H^* = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-2h}}{\mathbf{u}^2} \tilde{\Lambda}^2 + \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{w} - \frac{\mathbf{p}_w \cdot \mathbf{u}}{4}. \quad (38)$$

Система дифференциальных уравнений для вектора состояния и вектора сопряженных переменных с учетом появляющихся производных dt/ds и ds/dt может быть получена с использованием оптимального гамильтониана:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \frac{dt}{ds} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_u} \left(\frac{ds}{dt} H^* \right), \\ \mathbf{w}' &= \frac{dt}{ds} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_w} \left(\frac{ds}{dt} H^* \right), \\ \mathbf{p}'_u &= -\frac{dt}{ds} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{ds}{dt} H^* \right), \\ \mathbf{p}'_w &= -\frac{dt}{ds} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left(\frac{ds}{dt} H^* \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь выражение $H^* ds/dt$ представляет собой, с точностью до константы, гамильтониан в физическом времени $\tilde{H}$ [34], а множитель dt/ds появляется при переходе от производных по физическому времени к производным по фиктивному времени. Другими словами, в физическом времени уравнения (39) имели бы следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{p}_u}, \\ \dot{\mathbf{w}} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{p}_w}, \\ \dot{\mathbf{p}}_u &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{u}}, \\ \dot{\mathbf{p}}_w &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{w}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Условия трансверсальности

Чтобы определить двухточечную краевую задачу, нужно записать условия трансверсальности. В общем случае они имеют вид

$$\mathbf{p}(s_\alpha) = \left(\frac{\partial \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}(s_\alpha))}{\partial \mathbf{x}(s_\alpha)} \right)^T \cdot \mathbf{C}, \quad (41)$$

где индекс α принимает значения 0 или f ; $\mathbf{g}_\alpha$ определяет соответствующее терминальное многообразие; $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})^T$ — это параметрический вектор состояния; $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_w)^T$ — сопряженный вектор и $\mathbf{C}$ — вектор произвольных постоянных.

Будем рассматривать задачу встречи, когда КА должен достичь требуемых положения $\mathbf{r}(s_f)$ и скорости $\mathbf{v}(s_f)$ в конечный момент времени. Для этой задачи в KS-переменных терминальное многообразие в точке s_f выражается как $\mathbf{u}_f \in \hat{\mathbf{u}}(s_f)$ и $\mathbf{w}_f \in \hat{\mathbf{w}}(s_f)$. Это дает шесть уравнений для $\mathbf{g}_f$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s_f) - \tilde{L}(\mathbf{u}_f) \mathbf{u}_f &= 0, \\ \mathbf{v}(s_f) - \frac{2\sqrt{-2h_f} \tilde{L}(\mathbf{u}_f) \mathbf{w}_f}{\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_f} &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь $\tilde{L}$ — это первые три строки L . Вектор $\mathbf{x}_0$ известен на определенную дату старта $t(s_0)$. Он должен удовлетворять условиям $\mathbf{u}_0 \in \hat{\mathbf{u}}(s_0)$ и $\mathbf{w}_0 \in \hat{\mathbf{w}}(s_0)$, но в остальном может быть выбран произвольным образом и зафиксирован для дальнейших вычислений. Дополнительные ограничения для $\mathbf{u}(s_f)$ не требуются, потому что условие (13) выполняется в каждой точке траектории, если оно выполняется в момент s_0 . Значения $\mathbf{r}(s_f)$ и $\mathbf{v}(s_f)$ определяются как положение и скорость небесного тела в момент времени $t_f = t(\tau_f, \mathbf{x}_f) = t(s_f, \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$, где конкретное значение t_f зависит не только от конечного фиктивного времени, но и от самой траектории КА.

Дифференцирование выражений (42) по $\mathbf{x}$ дает матрицу 6×8 . Следовательно, размер вектора $\mathbf{C}$ равен 6. Это значит, что вектор $\mathbf{p}$ на концах траектории должен принадлежать шестимерному линейному подпространству восьмимерного пространства сопряженных переменных. Двумерное ортогональное дополнение этого подпространства — это линейная оболочка двух векторов, которые могут быть записаны в виде матрицы

$$\mathbf{K}(s_\alpha) = \begin{pmatrix} u_1 u_4 & u_2 u_4 \\ -u_1 u_3 & -u_2 u_3 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \\ -u_1^2 & -u_1 u_2 \\ u_1 w_4 - u_4 w_1 & u_2 w_4 - u_4 w_2 \\ u_3 w_1 - u_1 w_3 & u_3 w_2 - u_2 w_3 \\ u_1 w_2 - u_2 w_1 & 0 \\ 0 & u_1 w_2 - u_2 w_1 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Эти векторы могут быть найдены как фундаментальные решения линейной системы

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{x}(s_\alpha))}{\partial \mathbf{x}(s_\alpha)} \right)^T \cdot \mathbf{C} = 0. \quad (44)$$

Суммируя вышесказанное, условия трансверсальности в случае задачи встречи могут быть записаны как

$$\mathbf{K}^T(s_\alpha) \mathbf{p}(s_\alpha) = 0. \quad (45)$$

Между граничными условиями в начальной и конечной точке существует разница. В начальной точке $t = t_0$, декартовы положение $\mathbf{r}_0$ и скорость $\mathbf{v}_0$ известны. Например, они могут быть равны положению и скорости небесного тела в точке вылета, которые могут быть взяты из эфемерид. Точное значение $\mathbf{u}_0$ неважно, оно может быть выбрано из $\hat{\mathbf{u}}_0$ произвольно. После этого параметрическая скорость $\mathbf{w}_0$ вычисляется согласно уравнению (20). Наконец, условия на сопряженные переменные выражаются как.

Граничные условия в конечной точке более сложны: в случае фиксирования фиктивного времени продолжительность полета в физическом времени становится функцией от всей траектории. Тогда, параметрические векторы положения и скорости $\mathbf{u}_f$ и $\mathbf{w}_f$ каждый принадлежат двумерному тору — семейству одномерных слоев, которое параметризуется длительностью перелета в физическом времени.

Постановка задачи оптимизации

Краевая задача может быть преобразована в задачу оптимизации. Во-первых, необходимо записать усеченное KS-преобразование:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s_f) &= \tilde{L}(\mathbf{u}_f) \mathbf{u}_f, \\ \mathbf{v}(s_f) &= \frac{2\sqrt{-2h_f} \tilde{L} \mathbf{w}_f}{\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_f}. \end{aligned} \quad (46)$$

Вектор физического положения в конечной точке зависит от начального состояния и сопряженных переменных $\mathbf{r}_f = \mathbf{r}(t_f(s_f, \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0))$. Аналогичные зависимости будут соблюдаться для физической скорости: $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}(t_f(s_f, \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0))$. В задаче встречи вектор-функция невязки принимает вид

$$\delta = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(s_f) - \tilde{L}(\mathbf{u}_f) \mathbf{u}_f \\ \mathbf{v}(s_f) - \frac{2\sqrt{-2h_f} \tilde{L}(\mathbf{u}_f) \mathbf{w}_f}{(\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_f)} \\ \mathbf{K}^T(s_0) \mathbf{p}(s_0) \end{pmatrix}, \quad (47)$$

где начальные значения $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ уже известны. Значение функции невязки δ — это восьмимерный вектор. Требования $\delta_i = 0, i = 1 \dots 8$ можно трактовать как ограничения типа равенства в задаче оптимизации с тождественно постоянным функционалом стоимости. Такой формальный трюк позволяет свести нашу краевую задачу к задаче конечномерной оптимизации и применить эффективные оптимизационные методы. В частности, в данной работе использовался метод внутренней точки [31]. Этот метод сводит исходную задачу к задаче выпуклой оптимизации, сначала линеаризуя ограничения типа равенства, а потом преобразуя их в выпуклую барьерную функцию. В случае тождественно постоянного функционала минимизируется только барьерная функция, что в свою очередь приводит к минимизации невязки (47). В данной задаче метод внутренней точки оказался более эффективен, чем метод последовательного квадратичного программирования [31] или метод Левенберга — Марквардта [31].

Функция невязки зависит от вектора сопряженных переменных в начальной точке и времени интегрирования s_f , то есть $\delta = \delta(s_f, \mathbf{p}_0)$. Также, метод внутренней точки требует наложить ограничения

на сопряженный вектор $\mathbf{p}_0 \in [\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b]$, то есть задать область поиска решений. Начальное приближение для вектора сопряженных переменных выбирается равным нулю.

Определение параметра s_f является ключевым для успешного решения задачи. Для рассматриваемых траекторий можно записать выражение $n + \Delta E - s_f = \varepsilon(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$, где n — число витков траектории; ΔE — изменение эксцентрисической аномалии в результате перелета, а $\varepsilon(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ — некое малое отклонение, которое зависит от траектории КА. Выбирая параметры n и ΔE , можно контролировать угловую дальность перелета напрямую. При отсутствии априорного знания о функции $\varepsilon(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ рекомендуется использовать значение $s_f = n + \Delta E$.

Улучшение сходимости может быть достигнуто при помощи преобразования терминального многообразия в задачу со свободным концом

$$s_f \in [s_a, s_b], \quad (48)$$

где $s_a, s_b = s_f^0 \pm C$. Константа $C \in \mathbb{R}$, $C \geq 0$ может быть выбрана в широком диапазоне значений, но рекомендуется использовать $C \leq \pi/2$. Эта модификация позволяет методу сходиться быстрее, что дает начальное приближение для $\mathbf{p}_0$. Имея некоторую дополнительную информацию об оптимальных траекториях, можно сузить диапазон значений фиктивного времени. Например, для задач перелета к внешним планетам Солнечной системы (более удаленным от Солнца, чем Земля) рекомендуется брать $s_a = s_f^0$, $s_b > s_f^0$.

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА: ПЕРЕЛЁТ ЗЕМЛЯ — МАРС

Этот раздел описывает численные эксперименты с предложенным подходом и его параметрами. Кроме того, проведено сравнение с методом продолжения по параметру [8]. Сравнимаемыми характеристиками являются сходимость и численная устойчивость методов.

Параметры численных расчетов

Алгоритм реализован в среде MATLAB, и запусклся на ноутбуке со следующими характеристиками: 12 виртуальных ядер с частотой 2.6 ГГц и объемом RAM 32 Гб. Выражения для правых частей уравнений, так же, как и их частные производные, вычислены символьно и затем оптимизированы для уменьшения времени вычислений метода. Для решения оптимизационной задачи использовалась функция *fmincon*, которая реализует метод внутренней точки [35]. Это метод распараллеливается на 6 процессов, одновременно вычисляя барьерную функцию в нескольких пробных точках. Точность выполнения условий оптимальности составляла 10^{-10} , точность соблюдения граничных

условий 10^{-12} , максимальное число вызовов функции взято равным 10^{10} , размер шага был ограничен снизу величиной 10^{-10} , а максимальное число шагов оптимизации равнялось 250. Дополнительно добавлено условие $\tau' \geq 0$.

Для нахождения положений и скоростей Земли и Марса в начальный и конечный момент времени использовалась эфемеридная модель DE430 [36]. Начальный момент времени соответствует 00:00 UTC1.I.2022.

Решение оптимизационной задачи состоит из двух этапов. Для получения решения время интегрирования s_f принадлежит определенному диапазону во время первого этапа и фиксируется во время второго этапа. При этом физическое время t_f вычисляется как функция от s_f и траектории КА. Стоит заметить, что все переменные предварительно обесразмериваются, а после нахождения решений их размерность восстанавливается. Кроме того, для вектора $\mathbf{p}_0$ установлены граничные условия

вида $|p_{i,0}| \leq 1$. Также вектор $\mathbf{p}_0$ масштабируется путем домножения на гиперпараметр $C_p = 10^{-4 - \sqrt{s_f}}$, который явно зависит от времени интегрирования s_f . Это масштабирование выполняется при подаче $\mathbf{p}_0$ в оптимизатор, чтобы избежать слишком малых значений, однако при интегрировании траекторий КА используется не отмасштабированное значение. Здесь и далее под гиперпараметрами будем иметь в виду некоторые параметры настройки метода, выбираемые исследователем, например, точность интегрирования. Параметр C_p был подобран, исходя из типичных величин вектора сопряженных переменных $\mathbf{p}_0$ для выбранного фиктивного времени.

Рассматривалась задача встречи. На первом этапе минимизировалась невязка (47) на области поиска $[s_f, s_f + \pi/8]$ с нулевым начальным приближением $\mathbf{p}_0$. Полученные решения на этом этапе могут являться как локально оптимальными, так и глобально оптимальными. Для определения глобальной оптимальности необходимо выяснить, принадлежит ли данное решение Парето-фронт. На втором этапе в качестве начальных приближений использовались $\mathbf{p}_0$ из первого этапа, а область поиска сужалась до точки $[s_f, s_f]$. Выбирались минимальные по расходу топлива части семейств, а потом проводилась оптимизация вдоль этих семейств влево и вправо. В обоих случаях невязка домножалась на гиперпараметр $C_8 = 10^{10}$. Помимо этого, точность интегрирования контролировалась третьим гиперпараметром: $C_{tol} = 10^{-10}$ на первом этапе и $C_{tol} = 10^{-12}$ на втором.

После получения оптимального решения находится t_f . Далее применялся метод продолжения с модификацией гравитационного параметра в физических координатах для нахождения решения, которое будем называть эталонным. Затем оба

подхода сравнивались с точки зрения затрат рабочего тела и геометрии оптимальных решений. Отличие между ними оценивалось по формуле

$$d = \max_{r_0 \in \gamma_0} (\min_{r_1 \in \gamma_1} \|r_0 - r_1\|), \quad (49)$$

где γ_0 и γ_1 — две траектории, полученные разными подходами.

В рамках численного эксперимента были выбраны точки $s_f = (3/4 + k/16)\pi$, где $k = 0 \dots 168$. Другими словами, рассматривались перелеты с угловой дальностью от трех четвертей витка до шести витков.

Были выбраны следующие параметры КА и двигательной установки, аналогичные параметрам аппарата Европейского космического агентства SMART-1 (запущен к Луне в 2003 г.) и его двигателя PPS-1350 [37]. Начальная масса КА составляла $m_0 = 367$ кг, а максимальная мощность, доступная двигательной установке, равнялась $N = 1350$ Вт. Для этого двигателя были получены оценки уровня тяги 73 мН и скорости истечения 16.4 км/с. Судя по этим значениям, эффективный КПД ЭРДУ достигал $\eta = 0.45$.

Сравнение двух методов

Части нескольких семейств решений, обеспечивающие для фиксированного времени полета минимум затрат топлива, можно объединить в Парето-фронт в координатах фиктивное время — затраты топлива. Вместо фиктивного времени более наглядно ввести угловую дальность перелета, скажем, в терминах изменения эксцентрической аномалии. На рис. 1 представлено сравнение решений, получаемых двумя подходами, в координатах угловая дальность — затраты топлива. Для сохранения представления о поведении семейств решений на графике оставлены и те их участки, которые не принадлежат Парето-фронту; они показаны штриховыми линиями. Сплошной линией обозначены решения, полученные методом внутренней точки и образующие Парето-фронт, а крестиками — решения, полученные стандартным методом продолжения в декартовых координатах.

Среднее значение разницы в затратах топлива составляет 10^{-6} кг, а среднее расстояние между траекториями равно 90 км. Такой результат показывает хорошее совпадение между решениями, полученными разными методами. Заметим, что значения угловой дальности перелета (изменения эксцентрической аномалии) оказываются очень близкими к значениям длительности перелета в фиктивном времени. На рис. 2 показана их разность в точках Парето-фронта.

На рис. 3 представлено время вычисления решений с разной угловой дальностью двумя рассмотренными методами. Среднее время поиска

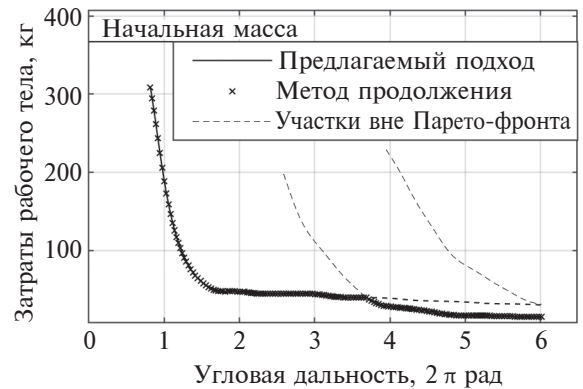


Рис. 1. Разные семейства решений и Парето-фронт, восстановленный двумя разными подходами.

решения составляет 16 с для метода продолжения и 3 с для метода внутренней точки.

Сходимость и гиперпараметры

Для любой выбранной угловой дальности метод продолжения способен достигнуть той же самой точки, что и предложенный метод. Это выполняется и в случае локально-оптимальных частей семейств решений, которые удовлетворяют условиям

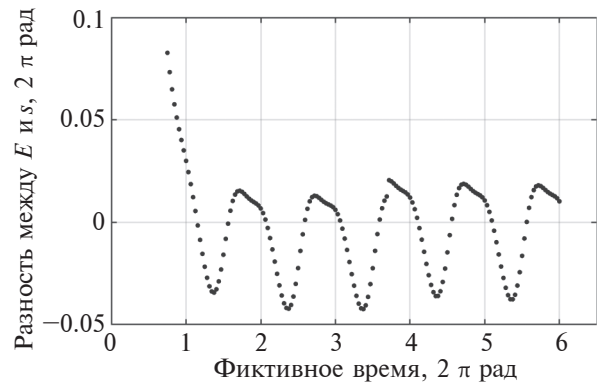


Рис. 2. Разница между фиктивным временем перелета и изменением эксцентрической аномалии для различных Парето-оптимальных решений.

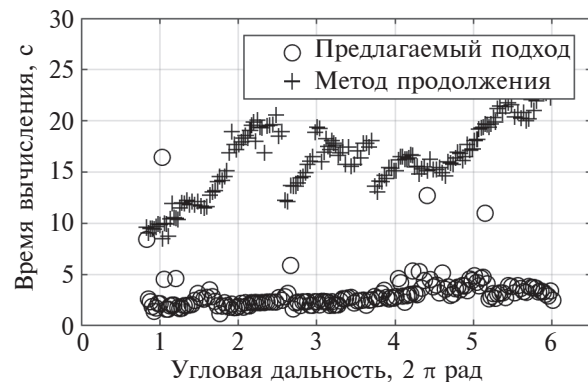


Рис. 3. Время вычисления локально оптимальных решений разными подходами.

принципа максимума Понтрягина, но не являются глобально оптимальными. Для одной и той же угловой дальности может существовать несколько локально-оптимальных решений в декартовых координатах. Такие траектории отличаются разным физическим временем перелета.

Теперь перейдем к смыслу и проблеме выбора значений гиперпараметров. Множитель невязки C_δ позволяет избежать слишком малых ее значений, которые могут достигать машинного нуля, что приводит к ранней остановке оптимизации. На основе ряда численных экспериментов было выбрано значение 10^{10} .

Точность интегрирования C_{tol} особенно важна на первом этапе поиска решения и в меньшей степени на втором. При необходимости ее можно уменьшать до 10^{-10} на первом этапе, и это повлияет на близость начального приближения второй стадии к оптимальному.

Третий гиперпараметр C_p — это множитель начальных значений сопряженных переменных, к значению которого задача оказывается наиболее чувствительна. Несмотря на отсутствие влияния на получающиеся траектории, этот параметр влияет на процедуру оптимизации. Меньшие его значения будут неявным образом уменьшать шаг оптимизатора, но увеличивать время сходимости. В идеальном случае он должен быть таким, чтобы отмасштабированные значения $\mathbf{p}_0$, подаваемые в качестве аргумента оптимизатора *fmincon*, были близки к единице.

Устойчивость траекторий

Матрица чувствительности

$$A = \frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{p}_0} \quad (50)$$

может быть использована для оценки устойчивости решений. Это матрица вычисляется с помощью центральной разности при интегрировании траектории. Точность вычисления матрицы чувствительности приблизительно равна 10^{-7} . Это значение также было определено численно. Чувствительность решений к начальным условиям характеризуется числом обусловленности матрицы чувствительности. Для квадратных матриц это число определяется как

$$\text{cond}(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2. \quad (51)$$

Оно равно соотношению между максимальным и минимальным сингулярными значениями матрицы A . На рис. 4 показаны числа обусловленности для семейства оптимальных траекторий перелета с различной угловой дальностью, полученных двумя подходами. Среднее значение чисел обусловленности для решений, найденных методом продолжения в декартовых координатах, равно

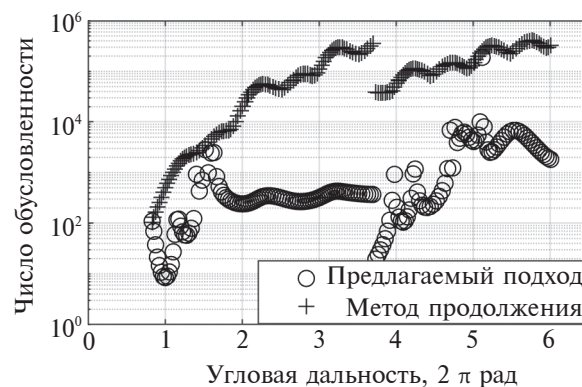


Рис. 4. Числа обусловленности матрицы чувствительности для двух разных подходов.

$1.3 \cdot 10^5$, в то время как для решений, полученных методом внутренней точки в KS-переменных, число обусловленности в среднем составляет $4.3 \cdot 10^3$, что означает лучшую обусловленность матрицы чувствительности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализованный подход к оптимизации перелетов с малой тягой в регулярных переменных уменьшает числа обусловленности краевых задач принципа максимума Понтрягина, что делает возможным использование стандартных методов оптимизации, таких как метод внутренней точки и получение оптимальных траекторий без помощи метода продолжения по параметру. Это упрощает этап предварительного проектирования траекторий. Также низкие числа обусловленности означают меньшую чувствительность решений, что ускоряет численное интегрирование траекторий и повышает его устойчивость. Среди преимуществ подхода стоит упомянуть и простой контроль над угловой дальностью перелета, что позволяет получить многовитковую траекторию с определенным числом витков.

В задаче перелета с идеально регулируемым двигателем ограниченной мощности оптимизация в KS-переменных дает решения, которые близки к решениям, получаемым в декартовых переменных методом продолжения, и имеют практически одинаковые затраты топлива. Это подтверждает корректность вычислений.

Метод внутренней точки, используемый для решения задачи оптимизации, к которой сводится краевая задача принципа максимума Понтрягина в KS-переменных, хорошо распараллеливается. Это помогает уменьшить время вычислений на поиск оптимальных траекторий.

В дальнейшем планируется протестировать эффективность разработанного подхода в случае более реалистичных моделей среды и двигателя

(то есть, с другими видами функционала стоимости и в присутствии внешних возмущений). Целесообразно провести сравнение KS-переменных с другими наборами фазовых переменных в смысле численных свойств получающихся краевых и оптимизационных задач.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00256).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Улыбышев Ю. П.* Обзор методов оптимизации траекторий космических аппаратов с использованием дискретных множеств псевдоимпульсов // Космическая техника и технологии. 2016. Т. 15. № 4. С. 67–79.
2. *Gergaud J., Haberkorn T.* Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2006. V. 12. Iss. 2. P. 294–310.
3. *Haberkorn T., Martinon P., Gergaud J.* Low thrust minimum-fuel orbital transfer: a homotopic approach // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2004. V. 27. Iss. 6. P. 1046–1060.
4. *Mingotti G., Topputo F., Bernelli-Zazzera F.* A method to design sun-perturbed earth-to-moon low-thrust transfers with ballistic capture // Proc. XIX Congresso nazionale AIDAA. 2007. V. 17. Art.ID. 21.
5. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V. et al.* Mathematical theory of optimal processes. New York–London: Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., 1962. 360 p.
6. *Petukhov V.G.* Optimal multi-orbit trajectories for inserting a low-thrust spacecraft to a high elliptic orbit // Cosmic Research. 2009. V. 47. Iss. 3. P. 243–250.
7. *Petukhov V.G.* Optimization of multi-orbit transfers between noncoplanar elliptic orbits // Cosmic Research. 2004. V. 42. Iss. 3. P. 250–268.
8. *Petukhov V.G.* Method of continuation for optimization of interplanetary low-thrust trajectories // Cosmic Research. 2012. V. 50. Iss. 3. P. 249–261.
9. *Petukhov V.G.* Optimization of interplanetary trajectories for spacecraft with ideally regulated engines using the continuation method // Cosmic Research. 2008. V. 46. Iss. 3. P. 219–232.
10. *Pérez-Palau D., Epenoy R.* Fuel optimization for low-thrust Earth–Moon transfer via indirect optimal control // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2018. V. 130. Iss. 2. Art.ID. 21.
11. *Pan B., Pan X., Zhang S.* A new probability-one homotopy method for solving minimum-time low-thrust orbital transfer problems // Astrophysics and Space Science. 2018. V. 363. Iss. 9.
12. *Pan B., Lu P., Pan X. et al.* Double-homotopy method for solving optimal control problems // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. American Institute of Aeronautics and Astronautics. 2016. V. 39. Iss. 8. P. 1706–1720.
13. *Jiang F., Baoyin H., Li J.* Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2012. V. 35. Iss. 1. P. 245–258.
14. *Zhang C., Topputo F., Bernelli-Zazzera F. et al.* Low-thrust minimum-fuel optimization in the circular restricted three-body problem // J. Guidance, Control, and Dynamics. American Institute of Aeronautics and Astronautics. 2015. V. 38. Iss. 8. P. 1501–1510.
15. *Taheri E., Kolmanovsky I., Atkins E.* Enhanced smoothing technique for indirect optimization of minimum-fuel low-thrust trajectories // J. Guidance, Control, and Dynamics. American Institute of Aeronautics and Astronautics. 2016. V. 39. Iss. 11. P. 2500–2511.
16. *Taheri E., Junkins J.L.* Generic smoothing for optimal bang-off-bang spacecraft maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. American Institute of Aeronautics and Astronautics. 2018. V. 41. Iss. 11. P. 2470–2475.
17. *Taheri E., Junkins J., Kolmanovsky I. et al.* A novel approach for optimal trajectory design with multiple operation modes of propulsion system, part 1 // Acta Astronautica. 2020. V. 172. P. 151–165.
18. *Taheri E., Junkins J., Kolmanovsky I. et al.* A novel approach for optimal trajectory design with multiple operation modes of propulsion system, part 2 // Acta Astronautica. 2020. V. 172. P. 166–179.
19. *Junkins J.L., Taheri E.* Exploration of alternative state vector choices for low-thrust trajectory optimization // J. Guidance, Control, and Dynamics. American Institute of Aeronautics and Astronautics. 2019. V. 42. Iss. 1. P. 47–64.
20. *Geffroy S., Epenoy R.* Optimal low-thrust transfers with constraints-generalization of averaging techniques // Acta Astronautica. 1997. V. 41. Iss. 3. P. 133–149.
21. *Sundman K.F.* Mémoire sur le problème des trois corps // Acta mathematica. Institut Mittag-Leffler. 1913. V. 36. P. 105–179.
22. *Nacozy P.E.* Time elements in Keplerian orbital elements // Celestial mechanics. 1981. V. 23. Iss. 2. P. 173–198.
23. *Brumberg E.V.* Length of arc as independent argument for highly eccentric orbits // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1992. V. 53. P. 323–328.
24. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1971. 306 p.
25. *Levi-Civita T.* Sur la régularisation du problème des trois corps // Acta mathematica. Institut Mittag-Leffler. 1920. V. 42. P. 99–144.

26. *Иванов Д.С., Трофимов С.П., Ширококов М.Г.* Численное моделирование орбитального и углового движения космических аппаратов / под ред. М. Ю. Овчинникова. М: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2016. 118 с.
27. *Иванюхин А. В.* Оптимизация траектории космического аппарата с идеально регулируемым двигателем в переменных Кустаанхеймо — Штифеля // Труды МАИ. 2014. № 75.
28. *Chelnokov Yu.N., Loginov M. Yu.* Prediction and Correction of Spacecraft Motion Based on the Solutions of Regular Quaternion Equations in KS-Variables and Isochronous Derivatives // Proc. 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). Saint Petersburg, Russia. IEEE, 2022.
29. *Masat A., Romano M., Colombo C.* Kustaanheimo — Stiefel Variables for Planetary Protection Compliance Analysis // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2022. V. 45. Iss. 7. P. 1286–1298.
30. *Roa J., Urrutxua H., Peláez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo — Stiefel space induced by the Hopf fibration // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2016. V. 459. Iss. 3. P. 2444–2454.
31. *Nocedal J., Wright S. J.* Numerical Optimization. Springer New York, 2006.
32. *Roa J.* Regularization in Orbital Mechanics. Berlin, Boston: De Gruyter, 2017. 403 p.
33. *Милютин А.А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П.* Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Центр прикладных исследований мехмата МГУ, 2004. 168 p.
34. *Powers W.F., Tapley B. D.* Canonical transformation applications to optimal trajectory analysis. // AIAA Journal. 1969. V. 7. Iss. 3. P. 394–399.
35. *Byrd R.H., Hribar M.E., Nocedal J.* An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming // SIAM J. Optim. 1999. V. 9. Iss. 4. P. 877–900.
36. *Folkner W.M., Williams J. G., Boggs D. et al.* The planetary and lunar ephemerides DE430 and DE431 // Interplanetary Network Progress Report. 2014. V. 196. Iss. 1. P. 42–196.
37. *Schoenmaekers J.* Post-launch Optimisation of the SMART-1 Low-thrust Trajectory to the Moon // Proc. 18th International Symposium on Space Flight Dynamics. 2004. P. 505–510.

УДК 521.135

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ВЕКОВОЙ ЧАСТИ ПЕРТУРБАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ В ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

© 2024 г. П. С. Красильников, А. В. Доброславский*

Московский авиационный институт (национальный технический университет), Москва, Россия

*a.dobroslavskiy@gmail.com

Поступила в редакцию 10.05.2023

Переработанный вариант 30.11.2023

Принята к публикации 01.12.2023

Исследованы асимптотические свойства вековой части пертурбационной функции в ограниченной пространственной круговой задаче трех тел, когда вековая часть представлена в виде степенного ряда по малому параметру μ , равному отношению большой полуоси невозмущенной орбиты точки нулевой массы к радиусу круговой орбиты внешнего тела (Юпитера). Предполагается, что $\mu < 1$ (внутренний вариант). Описан новый вывод вековой части на основе применения формулы Парсевала с последующим представлением коэффициентов ряда через функции Гаусса и Клаузена. Исследован — в плоскости оскулирующих элементов e , ω — радиус сходимости редуцированного ряда для разных значений μ при фиксированных значениях константы Лидова–Козаи, построены области сходимости и расходимости ряда. Показано, что в областях расходимости степенной ряд является асимптотическим по Пуанкаре, при этом степень аппроксимации ряда его частичной суммой сохраняет высокие значения вплоть до семидесяти членов ряда. Показано, что асимптотические свойства ряда ухудшаются на кривых неаналитичности ряда и полностью пропадают в малой окрестности $\mu = 1$. Асимптотичность ряда позволяет, используя традиционные методы теории возмущений, исследовать эволюцию кеплеровских элементов орбиты для всех значений μ из интервала $[0, 1)$, исключая случай $\mu \approx 1$.

DOI: 10.31857/S0023420624030058, EDN: JJYWGK

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, вычисление вековой части пертурбационной функции в ограниченной задаче трех тел — одна из классических задач небесной механики. Первые результаты принадлежат Лапласу и Леверье [1, 2]: главная часть f_{m_j}/Δ пертурбационной функции раскладывалась в ряд по степеням эксцентриситета и наклона с использованием коэффициентов Лапласа. Этот подход эффективно используется для изучения движений планет Солнечной системы.

Представление главной части пертурбационной функции в виде ряда по полиномам Лежандра при любых значениях эксцентриситетов и наклонностей орбит (эксцентриситеты и углы наклонов входят в виде конечных выражений в коэффициенты ряда) впервые получены в работах [3–5]. Развитие космической техники возродило интерес к разложению по полиномам Лежандра, которое было использовано для построения теории движений спутников вблизи Земли. Наиболее значимые результаты описаны в публикациях [6–8]. Статья [9] посвящена астероидному варианту круговой ограниченной задачи трех тел, получено выражение для дважды усредненной по Гауссу пертурбационной функции в виде

степенного ряда, коэффициенты которого выражены через функции Гаусса и Ганзена (см. формулы (72)–(74) в статье [9]). Работа [10] содержит описание некоторой модификации традиционной техники вычисления вековой части пертурбационной функции для эллиптической задачи в виде ряда по степеням μ , равному отношению большой полуоси невозмущенной орбиты точки нулевой массы к радиусу круговой орбиты внешнего тела (Юпитера). В статье [11] представлены разложения вековой части пертурбационной функции в круговой задаче до членов четырнадцатого порядка по μ (внутренний вариант) и до членов пятнадцатого порядка для внешнего варианта задачи. Отметим, что явные формулы для общего члена ряда содержатся только в статьях [8, 9].

В работе [12] получен ряд Фурье по аргументу перицентра ω для дважды усредненной пертурбационной функции, когда усреднение проводилось по долоте внешнего тела и истинной аномалии в оскулирующем движении малой частицы.

В данной работе дано описание нового вывода степенного ряда для вековой части пертурбационной функции на основе равенства Парсевала, при этом коэффициенты ряда получают новое представление через функции Гаусса и Клаузена.

Основная цель статьи — исследовать области сходимости и расходимости ряда через построение его радиуса сходимости в плоскости оскулирующих элементов e , ω , доказать асимптотичность ряда в областях его расходимости, что позволит применять классические методы теории возмущений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим круговую пространственную ограниченную задачу трех тел. Предположим, что пассивно гравитирующее тело P (спутник) находится в гравитационном поле двух массивных тел, движущихся друг относительно друга по круговой орбите радиуса r_J ; центральное тело S (Солнце) имеет массу m_S и воздействует на спутник с силой F_S ; второе тело J (Юпитер) массы m_J оказывает возмущающее действие с силой F_J . Считаем, что невозмущенная траектория точки P есть кеплеровский эллипс с фокусом в S , плоскость которого Π образует с плоскостью движения Π_0 притягивающих тел угол i (рис. 1).

Введем неинерциальную гелиоцентрическую систему координат с центром в S . Ось Sx направим в точку весеннего равноденствия, SN — линия узлов орбиты спутника, остальные оси, образующие правую систему координат, на рис. 1 не указаны. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор тела P , $\mathbf{r}_J$ — радиус-вектор тела J .

Пусть Ω — долгота восходящего узла невозмущенной орбиты точки P на плоскости Π_0 , e , ω — эксцентриситет и аргумент перицентра этой орбиты, λ_J — долгота тела J , а λ — долгота тела P в плоскости Π_0 .

Рассмотрим “внутренний” вариант задачи трех тел, когда параметры движения тела P удовлетворяют условию: $a < r_J$. Здесь a — большая полуось невозмущенной орбиты P .

Запишем выражение для пертурбационной функции задачи:

$$R = fm_J \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{(\mathbf{r}_J, \mathbf{r})}{r_J^3} \right),$$

$$\Delta = r_J \sqrt{1 - 2 \left(\frac{r}{r_J} \right) \cos \gamma + \left(\frac{r}{r_J} \right)^2}, \quad (1)$$

где f — постоянная тяготения; γ — угол между $\mathbf{r}_J$ и $\mathbf{r}$,

$$\cos \gamma = \cos(\lambda_J - \Omega) \cdot \cos(\omega + v) + \sin(\lambda_J - \Omega) \cdot \sin(\omega + v) \cdot \cos i, \quad (2)$$

v — истинная аномалия движения тела P вдоль невозмущенной орбиты.

Функция (1) может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра с точностью до членов, не зависящих от координат тела P :

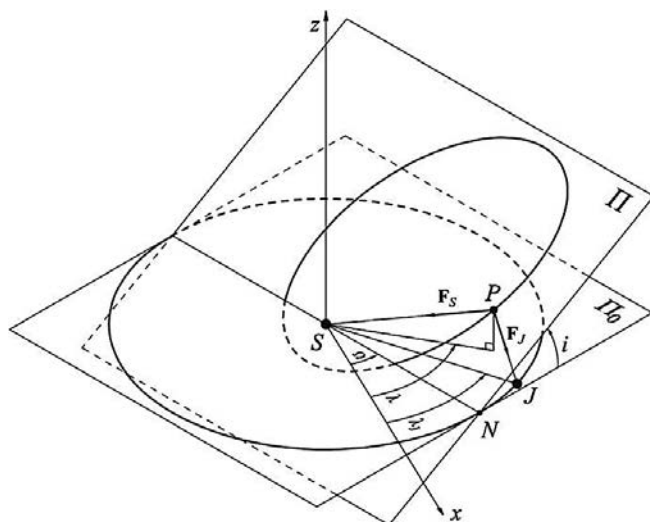


Рис. 1. Системы координат, переменные задачи.

$$R = \frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma). \quad (3)$$

Отметим, что ряд (3) сходится тогда и только тогда, когда $r/r_J < 1$. Действительно, этот ряд совпадает, с точностью до первых двух отброшенных членов, с выражением $fm_J \Delta^{-1}$, зависящим от $\alpha = r/r_J$. Особые точки этой функции (точки ветвления) имеют вид $\cos \gamma \pm j\sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$, ($j^2 = -1$).

Они принадлежат единичной окружности, поэтому радиус сходимости ряда (3) в комплексной плоскости равен единице.

УСРЕДНЕНИЕ ПЕРТУРБАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Как видно из рис. 1, долгота λ малого тела P в плоскости орбиты внешней планеты можно представить в виде $\lambda = \Omega + w$, где w — угол между линией узлов SN и проекцией радиус-вектора точки P на указанную плоскость. Угол w описывается формулами [12]

$$\cos w = \frac{\cos(v + \omega)}{\sqrt{1 - \sin^2 i \cdot \sin^2(v + \omega)}},$$

$$\sin w = \frac{\sin(v + \omega) \cdot \cos i}{\sqrt{1 - \sin^2 i \cdot \sin^2(v + \omega)}}.$$

Тогда уравнение (2) можно переписать в виде

$$\cos \gamma = \cos(\lambda_J - \lambda) \sqrt{1 - \sin^2 i \cdot \sin^2(v + \omega)}. \quad (4)$$

Для преобразования выражения (3) к удобному для усреднения виду воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра. С учетом равенства (4), будем иметь

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(0)P_n(\sin i \cdot \sin(v + \omega)) + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(0) P_n^{(k)}(\sin i \cdot \sin(v + \omega)) \cos k(\lambda_J - \lambda). \quad (5)$$

Здесь $P_n^{(k)}$ — присоединенные функции Лежандра. Далее считаем, что частота $\lambda_J = n_J$ не резонирует со средним движением n невозмущенного движения точки P . Проводя усреднение выражения (3) по долготе λ_J тела J , получим (с учетом формул (2), (5) и равенства $P_{2n+1}(0) = 0$) однократно усредненную пертурбационную функцию задачи:

$$R^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma) \right] d\lambda_J = \frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^{2n} P_{2n}(0) P_{2n}(\sin i \cdot \sin(v + \omega)). \quad (6)$$

Выражение (6) совпадает с пертурбационной функцией кольца Гаусса в случае $r < r_J$, что было впервые установлено в работе Аксенова [12], с учетом ссылки на книгу [13].

Функция R^* не зависит от λ , но зависит от истинной аномалии v как быстрой переменной задачи. Для того чтобы повторное усреднение пертурбационной функции соответствовало усреднению по Гауссу, необходимо провести усреднение по средней долготе l пробной частицы P . Имеем:

$$R^{**} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^* dl = \frac{1}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} r^2 R^* dv. \quad (7)$$

Вычисления показывают, что функция R^* содержит под знаком суммы произведение двух периодических по v функций: $(1 + e \cos v)^{-2n-2}$ и $P_{2n}(\sin i \cdot \cos \theta)$, $\theta = v + \omega - \pi/2$. Основная техническая проблема исследований — подсчитать среднее от этого произведения. Современные программные комплексы, такие как Wolfram Mathematica и Maple, с этой задачей не справляются. Для этого воспользуемся формулой Парсеваля, описывающей главный (вековой) член произведения двух рядов Фурье:

$$I_{2n} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos v)^{-2n-2} P_{2n}(\sin i \cdot \cos \theta) dv = \frac{a_0 \alpha_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \alpha_m + b_m \beta_m). \quad (8)$$

Здесь $\{a_0, a_m, b_m\}$ — коэффициенты Фурье функции $(1 + e \cos v)^{-2n-2}$, а $\{\alpha_0, \alpha_m, \beta_m\}$ — коэффициенты Фурье функции $P_{2n}(\sin i \cdot \cos \theta)$. Выражения для этих коэффициентов имеют вид:

$$a_0 = \frac{2}{(1-e)^{2n+2}} F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right),$$

$$a_m = \frac{2}{(1-e)^{2n+2}} F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 2n+2; 1-m, 1+m; \frac{2e}{e-1} \right),$$

$$b_m = 0.$$

Здесь $F_{2,1}$ — гипергеометрическая функция Гаусса, а $F_{3,2}^{reg}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \beta_1, \beta_2; z)$ — комплексное число, есть регуляризованная обобщенная гипергеометрическая функция Клаузена,

$$\alpha_0 = 2P_{2n}(0)P_{2n}(\cos i), \quad \beta_m = 0,$$

$$\alpha_m = \begin{cases} 2 \cos \left(\frac{m\pi}{2} - m\omega \right) \frac{(2n-k)!}{(2n+k)!} P_{2n}^{(m)}(0) P_{2n}^{(m)}(\cos i), & m \leq 2n, \\ 0, & m > 2n. \end{cases}$$

Отметим, что функция $F_{3,2}^{reg}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \beta_1, \beta_2; z)$ является аналитическим продолжением обобщенного гипергеометрического ряда, описывающим эту функцию в области сходимости $|z| < 1$:

$$F_{3,2}^{reg}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \beta_1, \beta_2; z) = \frac{1}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n (\gamma_3)_n}{(\beta_1)_n (\beta_2)_n} \right) \frac{z^n}{n!}.$$

Здесь $(\cdot)_n$ — символ Похгаммера; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Функция Клаузена является решением линейного уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами

$$z^2(1-z)u''' + (1 + \beta_1 + \beta_2 - (3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)z)zu'' + \left(\beta_1\beta_2 - (1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)z \right)u' - \alpha_1\alpha_2\alpha_3u = 0,$$

имеет особенности в точках $z = 0, 1, \infty$.

В итоге дважды усредненная пертурбационная функция принимает вид:

$$R^{**} = \frac{fm_J}{r_J a^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a(1-e^2))^{2n+2}}{r_J^{2n}} P_{2n}(0) I_{2n}. \quad (9)$$

Здесь

$$I_{2n} = \frac{1}{(1-e)^{2n+2}} \left[P_{2n}(0)P_{2n}(\cos i)F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + 2 \sum_{m=1}^{2n} A_m^{(2n)} \cos \left(\frac{m\pi}{2} - m\omega \right) \right], \quad (10)$$

$$A_m^{(2n)} = F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 2n+2; 1-m, 1+m; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{(2n-m)!}{(2n+m)!} P_{2n}^{(m)}(0) P_{2n}^{(m)}(\cos i),$$

$$(m \leq 2n).$$

Достоверность формулы (10) была подтверждена численными расчетами формул (8), (10): результаты вычислений совпадают по всем значащим цифрам для следующего декартового произведения значений параметров: e от 0 до 1 с шагом 0.1, ω от 0 до 2π с шагом $\pi/6$, i от $-\pi/2$ до $\pi/2$ с шагом $\pi/6$ и n от 1 до 15 с шагом 1.

Выражение для усредненной пертурбационной функции (9), (10) можно разложить в ряд Фурье по ω . Представляя конечную сумму в формуле (10) в виде тригонометрического полинома, получим

$$R^{**} = \frac{fm_J}{r_J \sqrt{1-e^2}} \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \left[P_{2n}(0) P_{2n}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k A_{2k}^{(2n)} \cos 2k\omega + 2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A_{2k+1}^{(2n)} \sin(2k+1)\omega \right],$$

$$B_{2n} = \left(\frac{a}{r_J} \right)^{2n} (1+e)^{2n+2} P_{2n}(0).$$

Гармоники с $\sin(2k+1)\omega$ пропадают в силу равенства $P_{2n}^{2k+1}(0) = 0$. Используя равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \sum_{k=1}^n (-1)^k A_{2k}^{(2n)} \cos 2k\omega = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} B_{2k} A_{2n}^{(2k)} \right) \cos 2n\omega,$$

можем представить выражение для R^{**} в виде ряда Фурье по косинусам:

$$R^{**} = \frac{fm_J}{r_J \sqrt{1-e^2}} \left[g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos 2n\omega \right],$$

$$g_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} P_{2n}(0) P_{2n}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right), \quad (11)$$

$$g_n = (-1)^n \left(2 \sum_{k=n}^{\infty} B_{2k} A_{2n}^{(2k)} \right).$$

Здесь следует отметить, что аналитическое представление дважды усредненной пертурбационной функции задачи в виде ряда Фурье по ω было получено в работе [12], в которой повторное усреднение проводилось по истинной аномалии, поэтому результат усреднения отличается от усреднения по Гауссу. Коэффициенты этого ряда автор статьи выразил через вновь введенные специальные функции, имеющие вид квадратур. Поэтому использовать результаты статьи [12] в аналитических исследованиях затруднительно.

Преобразуем ряд Фурье (11), группируя члены при $(a/r_J)^{2k}$

$$R^{**} = \frac{fm_J}{r_J \sqrt{1-e^2}} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left(\frac{a}{r_J} \right)^{2k}, \quad (12)$$

$$D_k = \left(P_{2k}(0) P_{2k}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2k+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + \right. \\ \left. + (1+e)^{2k+2} P_{2k}(0) \left(2 \sum_{n=1}^k (-1)^n A_{2n}^{(2k)} \cos 2n\omega \right) \right).$$

Полученные разложения удобны с аналитической и вычислительной точки зрения. Более того, с каждым из этих разложений можно работать как с единой однозначной аналитической функцией: вычислять производные любого порядка по аргументам e , ω , i , μ , раскладывать R^{**} в ряды по кеплеровским элементам, проводить усечение этих рядов до членов любого порядка малости, если использовать Wolfram Mathematica.

Отметим, что иное представление степенного ряда (12) через специальные функции Ганзена $X_0^{k,-2p}(e)$ и функции наклона $F_{k,0,p}(i)$ содержится в статье [8] (см. также работу [14]):

$$W = \frac{fm_J}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{2k} \left(\frac{a}{r_J} \right)^{2k+1} F_{2k,0,p}(i) F_{2k,0,k}(0) X_0^{2k,2k-2p}(e) X_0^{2k,0}(0) \cos[(2k-2p)\omega]. \quad (13)$$

Здесь

$$X_0^{n,m}(e) = \begin{cases} (-1)^{|m|} \frac{(n+2)_{|m|}}{(1)_{|m|}} \left(\frac{e}{2} \right)^{|m|} (1-e^2)^{n+\frac{3}{2}} F_{2,1} \left(\frac{n+|m|+2}{2}, \frac{n+|m|+3}{2}; 1+|m|; e^2 \right), & n < -1, \\ (-1)^{|m|} \frac{(n+2)_{|m|}}{(1)_{|m|}} \beta(e)^{|m|} (1+\beta(e)^2)^{-n-1} F_{2,1}(-n-1, -n+|m|-1; 1+|m|; \beta(e)^2), & n \geq -1, \end{cases}$$

$$F_{k,m,p} = \sum_{t=0}^{\min(p, E_{km})} \frac{(2k-2t)!}{t!(k-t)!(k-m-2t)!2^{2k-2t}} \sin^{k-m-2t} i \times \\ \times \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \cos^s i \sum_c \binom{k-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-E_{km}}, \quad \beta(e) = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},$$

E_{km} — целая часть выражения $(k-m)/2$, а суммирование выполняется по всем значениям c , при которых биномиальные коэффициенты отличны от нуля, $(\alpha)_m$ — символ Похгаммера.

Было показано аналитически, что ряды (13), (12) совпадают, по крайней мере, для усечений этих рядов со второго по восьмой порядок малости включительно (сравнение усечений проводилось с помощью операторов Simplify и Reduce программы Wolfram Mathematica).

ВЕРИФИКАЦИЯ ДВУКРАТНО УСРЕДНЕННОЙ ПЕРТУРБАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Сравним формулу (11) пертурбационной функции задачи с результатами численных расчетов интеграла $R^{(\text{int})}$, где

$$R^{(\text{int})} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma) \right] d\lambda_J dl. \quad (14)$$

$$R_h^{**} = \frac{fm_J a^2}{r_J^3 \sqrt{1-e^2}} (1+e)^4 P_2(0) \left[P_2(0) P_2(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 4; 1; \frac{2e}{e-1} \right) - A_2^{(2)} \cos 2\omega \right].$$

Здесь

$$A_2^{(2)} = 2F_{3,2}^{\text{reg}} \left(\frac{1}{2}, 1, 4; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{0!}{4!} P_2^{(2)}(0) P_2^{(2)}(\cos i), \\ P_2(0) = -\frac{1}{2}, \quad P_2^{(2)}(0) = 3, \quad P_2(\cos i) = \frac{1}{2}(3\cos^2 i - 1), \quad P_2^{(2)}(\cos i) = -3(\cos^2 i - 1), \\ F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 4; 1; \frac{2e}{e-1} \right) = \frac{(2+3e^2) \cdot (1-e)^{1/2}}{2(1+e)^{7/2}}, \quad F_{3,2}^{\text{reg}} \left(\frac{1}{2}, 1, 4; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) = \frac{5}{2} e^2 \frac{(1-e)^{1/2}}{(1+e)^{7/2}}.$$

Подставляя вышеперечисленное в выражение для R_h^{**} и упрощая, получим:

$$R_h^{**} = \frac{fm_J a^2}{16r_J^3} \cdot \frac{(1+e)^4 (1-e)^{1/2}}{(1-e^2)^{1/2} (1+e)^{7/2}} \left[(3\cos^2 i - 1) \cdot (2+3e^2) - 15e^2 (\cos^2 i - 1) \cos 2\omega \right] = \\ = \frac{3fm_J a^2}{16r_J^3} \left(\frac{4}{3} + 2e^2 - (2+3e^2) \sin^2 i + 5e^2 \cos 2\omega \cdot \sin^2 i \right). \quad (15)$$

Это выражение тождественно совпадает с хилловским приближением усредненной пертурбационной функции, представленным, например, в монографии [14] (оригинальные результаты, записанные в гамильтоновых переменных, содержатся

Фиксируем следующие параметры: $e = 0.2$, $i = -\pi/6$, $\omega = 0$, $a/r_J = 0.85$, $\Omega = \pi/12$.

Из рис. 2 видно, что функция R^{**} выходит на свое значение в фиксированной точке, начиная с частичной суммы, содержащей 12 членов ряда (коричневая кривая), в то время как результат численного интегрирования представлен в виде колебаний вплоть до $n = 20$ (синяя кривая), с последующим выходом кривой на значение функции в той же точке. Показано, что при $n \geq 20$ результаты расчетов по формуле (11) совпадают с результатами численного интегрирования $R^{(\text{int})}$ на сетке значений $e \in [0, 0.9]$ с шагом 0.1, $(a/r_J) \in [0.5, 0.95]$ с шагом 0.05, $\omega \in [0, \pi]$ с шагом $\pi/6$, $i \in [-\pi/2, \pi/2]$ с шагом $\pi/6$.

Для верификации ряда (12) запишем его хилловское приближение, в котором удерживается только первый член ряда:

в статьях [15, 16]). Заметим также, что этот результат получается также путем выделения вековых слагаемых пертурбационной функции из ее полного выражения.

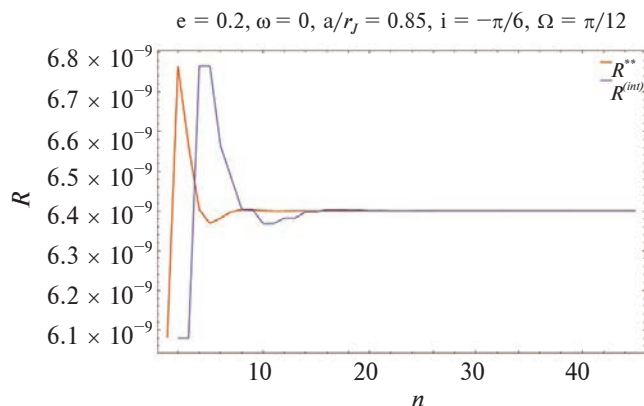


Рис. 2. Сравнение ряда Фурье (11) с (14).

УСЛОВИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ОРБИТ. СХОДИМОСТЬ РЯДА ДЛЯ УСРЕДНЕННОЙ ПЕРТУРБАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ЗАДАЧИ

Одна из возможных причин расходимости ряда (12) — расходимость исходного ряда (3) в области $r > r_J$. Выполнение неравенства $r > r_J$ ($a < r_J$) возможно — на некотором участке траектории — тогда и только тогда, когда оскулирующий эллипс удовлетворяет условию $r_a > r_J$, где $r_a = a(1 + e)$ — расстояние до апоцентра орбиты. Положим $\mu = a/r_J$. Тогда, при

$$(\mu^{-1} - 1) \leq e < 1 \quad (16)$$

тело P выходит за пределы сферы радиуса r_J . Очевидно, неравенство (16) имеет место только при $\mu > 1/2$, учитывая, что $\mu < 1$ по условию. Ниже будет показано, что одной из причин такого поведения тела P является пересечение орбиты частицы P с круговой орбитой внешнего тела. Поэтому приведем геометрическое описание условий пересечения орбит, следуя работе Цейпеля [9]. Будем считать, что изменение оскулирующих элементов a , e во времени описывается первым приближением метода усреднения. Тогда оскулирующие элементы подчиняются трем законам сохранения [9, 16, 17]: $a = \text{const}$, $(1 - e^2)\cos^2 i = c_1$, $R^{**} = h$. Отсюда следует, в частности, что $0 \leq e \leq e_*$, $e_* = \sqrt{1 - c_1}$ ($0 \leq c_1 < 1$).

Условия пересечения орбит имеют вид

$$\frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \cos \omega} = r_J, \quad (17)$$

поскольку точки пересечения должны совпадать с узлами оскулирующего эллипса на плоскости S_{xy} (узлам соответствуют точки орбиты при $v = -\omega$, $v = \pi - \omega$, $i \neq 0$). Положим $x = e \cos \omega$, $y = e \sin \omega$.

Равенство (17) можно представить в виде

$$\left(x \pm \frac{1}{2\mu}\right)^2 + y^2 = \left(1 - \frac{1}{2\mu}\right)^2, \quad \mu = \frac{a}{r_J} < 1. \quad (18)$$

Его следует дополнить условием полосы $0 \leq e \leq e_*$, $0 \leq \omega < 2\pi$, которое запишем в виде

$$x^2 + y^2 \leq e_*^2. \quad (19)$$

Точки пересечения орбит лежат на дугах окружностей (18), принадлежащих кругу (19).

Эти рассуждения Цейпеля можно дополнить следующими выводами. При $\mu \leq 1/2$ две окружности (18) не имеют пересечений с кругом (19) для любых значений $c_1 \in [0, 1]$. При $\mu > 1/2$ в области $e_* \geq (\mu^{-1} - 1)$ возможны пересечения орбит: круг (19) содержит две симметричные дуги окружностей (18) (рис. 3).

Орбиты пересекаются тогда и только тогда, когда $(e \cos \omega, 0)$ является внутренней точкой сегмента правого (левого) круга, дуга которого принадлежит центральному кругу (19). Аналитически это условие можно записать в виде неравенств на параметры задачи:

$$(\mu^{-1} - 1) \leq e |\cos \omega| \leq |x_*| < e_*, \quad \frac{1}{2} < \mu < 1. \quad (20)$$

Здесь $(x_*, 0)$ — координата центра хорды сегмента. Неравенства (20) гарантируют выполнение условий (16), поэтому пересечение орбит ведет к тому, что апоцентр оскулирующего эллипса находится за пределами сферы радиуса r_J . Если нет пересечения орбит, то апоцентр оскулирующей орбиты может находиться как за пределами сферы радиуса r_J , так и внутри нее.

Итак, в случае пересечения орбит точка P выходит за пределы сферы радиуса r_J .

Возможны три разных случая взаимного расположения орбит, вызванных пересечением орбит. В первом случае два узла оскулирующего эллипса расположены внутри орбиты внешнего тела, во втором случае один узел находится внутри,

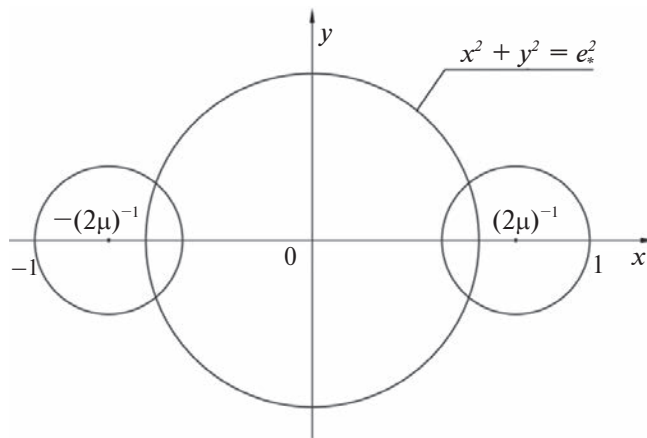


Рис. 3. Кривые пересечения орбит.

другой — с наружи этой орбиты, третий случай — оба узла расположены за пределами орбиты внешнего тела. Во втором случае имеем зацепление орбит подобно кольцам цепи.

Теперь исследуем сходимость ряда (12) с помощью теоремы Коши–Адамара. Как известно, формула

$$\rho = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|D_n|} \right)^{-1}$$

задает радиус сходимости ρ степенного ряда с коэффициентами D_n . Коэффициенты ряда (12) громоздки, поэтому его радиус сходимости строим численно. Учитывая, что коэффициенты D_n зависят от параметров e, ω , область изменения этих параметров $0 \leq e \leq \sqrt{1-c_1}$, $0 \leq \omega < \pi$ покрываем сеткой с шагом $\sqrt{1-c_1}/100$ по e и $\pi/100$ по ω . Расчеты проводили в Wolfram Mathematica, когда

радиус сходимости ρ аппроксимировался выраже-

нием $\left(\sqrt[100]{|D_{100}|} \right)^{-1}$. Поверхность $\rho = \rho(e, \omega, c_1)$ имеет сложный вид, поэтому строим изолинии этой поверхности в плоскости ее аргументов при фиксированных значениях константы $c_1 = 0.1; 0.4$ (рис. 4):

Каждая изолиния отвечает фиксированному уровню функции $\rho(e, \omega, c_1) = \varphi$, $\varphi = \text{const}$ совпадающему с радиусом сходимости ряда (12) по μ . Уменьшение φ ведет к сдвигу изолинии как целого вдоль оси e вверх, увеличение φ — к сдвигу вниз. Поэтому, при фиксированном μ ряд (12) расходится в области, расположенной выше изолинии

$\rho(e, \omega, c_1) = \mu$, сходится при всех e, ω из области, находящейся ниже этой изолинии. Области расходимости обширны: при “больших” μ ($0.6 \leq \mu < 1$) эти области захватывают значения $e \geq 0.45$, где ω — любое.

Отметим, что для разных изолиний имеем один и тот же эффект: при малых ω радиус сходимости практически не зависит от ω , за исключением окрестности $\omega = \pi/2$ в которой изолиния изгибается, образуя впадину. Наблюдаются области при малых e , в которых радиус сходимости больше единицы. Однако эти результаты недостоверны, так как при $\mu \rightarrow 1$ радиус сходимости $\rho \approx \left(\sqrt[n]{|D_n|} \right)^{-1}$ следует вычислять при n значительно превосходящим $n = 100$. Здесь мы ограничены возможностями Wolfram Mathematica, которая воспринимает значения коэффициентов D_n ряда (12) равными нулю при $n > 101$ (минимальные значения чисел с плавающей точкой, с которыми работает система — 10^{-318}).

Заметим также, что ряд (3) расходится при $\mu < 1$, если апоцентр оскулирующего эллипса выходит за пределы сферы радиуса r_J (см. неравенство (16)). Но в этом случае ряд (12), может, как следует из рис. 4, как сходится, так и расходится. Поэтому корреляция между расходимостью рядов (3), (12), предполагаемая априори существенной, является, в действительности, слабой.

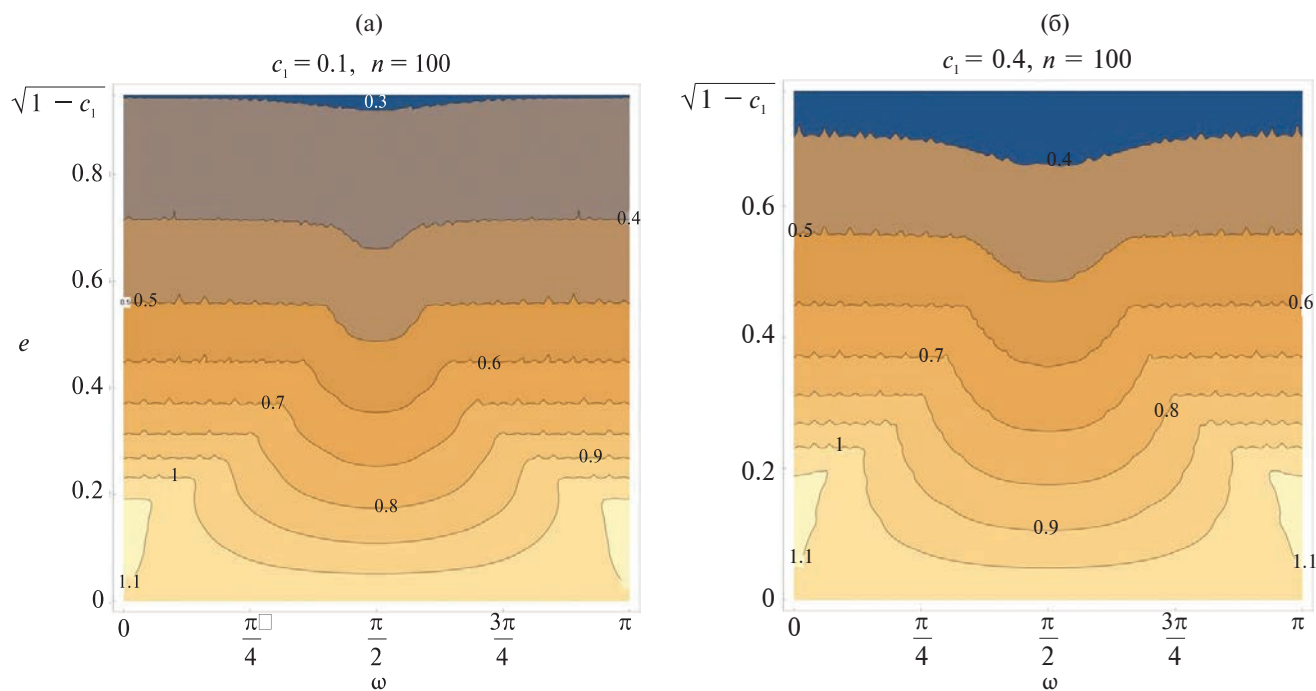


Рис. 4. Изолинии поверхности $\rho = \rho(e, \omega, c_1)$ при $c_1 = 0.1$ (а) и $c_1 = 0.4$ (б).

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ УСРЕДНЕННОЙ ПЕРТУРБАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ R^{**} В ОБЛАСТЯХ РАСХОДИМОСТИ. КРИВЫЕ НЕАНАЛИТИЧНОСТИ.

Рассмотрим поведение функции R^{**} областях ее расходимости. Положим $\mu = 0.6$, $c_1 = 0.1$ и фиксируем точку $e = 0.885$, $\omega = \pi/2$ из области расходимости. На рис. 5 изображен график поведения функции R^{**} в указанной точке в зависимости от числа удерживаемых членов ряда (до 100 включительно).

Сумма первых 70 членов ряда хорошо приближает значение усредненной пертурбационной функции R^{**} с точностью порядка 10^{-8} и только удержание большего числа членов ряда приводит к его расходимости. Аналогичное поведение функции имеет место и в остальных точках области расходимости. Это говорит о том, что ряд (12) является асимптотическим по Пуанкаре в области расходимости, при этом расходимость ряда сопровождается осциллирующим нарастанием амплитуды колебаний.

Напомним, что степенной по μ ряд R^{**} называют асимптотическим по Пуанкаре ([18], с. 335), если при любом N и малом μ имеет место равенство $R^{**} = R_N^{**} + o(\mu^N)$.

Другими словами, при любом N существует $\alpha > 0$ такое, что при достаточно малом μ частичная сумма R_N^{**} приближает ряд R^{**} с точностью порядка $\mu^{N+\alpha}$ на конечном промежутке времени, т.е. $\|R^{**} - R_N^{**}\| \sim \mu^{N+\alpha}$. При фиксированном μ норма разности $\|R^{**} - R_N^{**}\|$ будет стремиться к бесконечности при $N \rightarrow \infty$ в силу расходимости ряда. Однако при заданном N мы всегда можем добиться выполнения условия $\|R^{**} - R_N^{**}\| \sim \mu^{N+\alpha}$,

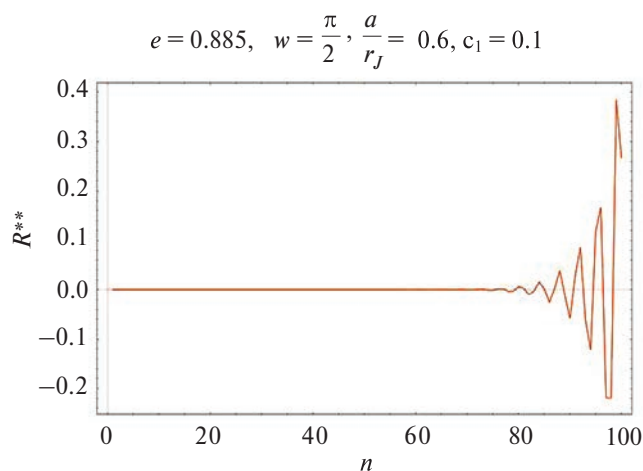


Рис. 5. График поведения функции R^{**} .

уменьшая μ . Итак, частичная сумма ряда дает хорошее приближение, что позволяет использовать традиционные методы теории возмущений, основанные на идее укорочения усредненной пертурбационной функции, в областях расходимости ряда (12).

Отметим, что асимптотические свойства ряда (12) ухудшаются при стремлении μ к единице. Так, при $\mu = 0.999$ и $e \approx e_*$ имеем расхождение по экспоненциальному типу уже в первых членах ряда ($N = 0$); в случае $0 < e < e_*$ наблюдается тот же самый эффект, но расходимость имеет осцилляционный тип. Исключение составляет малая окрестность $e = 0$, в которой ряд сходится. Итак, в случае $\mu \approx 1$, $0 < e < e_*$ необходимо пользоваться разложением, отличным от (12), рассмотренным в работе [19].

Исследуем поведение ряда (12) на кривых (17), которым отвечают пересечения орбит точек P и J . Представим их в виде

$$\begin{aligned} f_1(a, e, \omega) &= \frac{a}{r_j} (1 - e^2) - 1 + e \cos \omega = 0, \\ f_2(a, e, \omega) &= \frac{a}{r_j} (1 - e^2) - 1 - e \cos \omega = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Кривые (21) часто называют “сепаратрисами” [19, 20], название условное, так как эти кривые не являются интегральными для усредненных уравнений.

Результат первого усреднения пертурбационной функции R по λ_J имеет вид [20]

$$R^* = (1 + r^2)^{-1/2}, \quad F_{2,1} \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1; z \right), \quad z = \frac{4r^2 \cos^2 \varphi}{(1 + r^2)^2},$$

где φ — широта точки P относительно плоскости орбиты внешнего тела; F — гипергеометрическая функция Гаусса. В точках пересечения орбиты P с орбитой внешнего тела имеем $r = 1$, $\varphi = 0$ (в статье [20] характерная единица длины — радиус орбиты возмущающего тела), поэтому $z = 1$. Точка $z = 1$ является полюсом для F , поэтому R^* неаналитична на кривых (21).

Неаналитичность вдоль указанных кривых сохраняется и для двукратно усредненной пертурбационной функции R^{**} ([9], с. 369–375). Действительно, после интегрирования R^* по l в окрестности кривых (21) имеем ([9], формула (66)):

$$R^{**} = \pi |H_2| H_3 + H_5.$$

Здесь H_j — аналитические по e , ω , μ , c_1 функции, при этом H_2 обращается в ноль на кривых (21) и меняет знак при их пересечении. Таким образом, R^{**} непрерывна в окрестности кривых (21), но ее производные терпят разрыв на (21). Разрыв производных по e , ω подтвержден численным счетом [20].

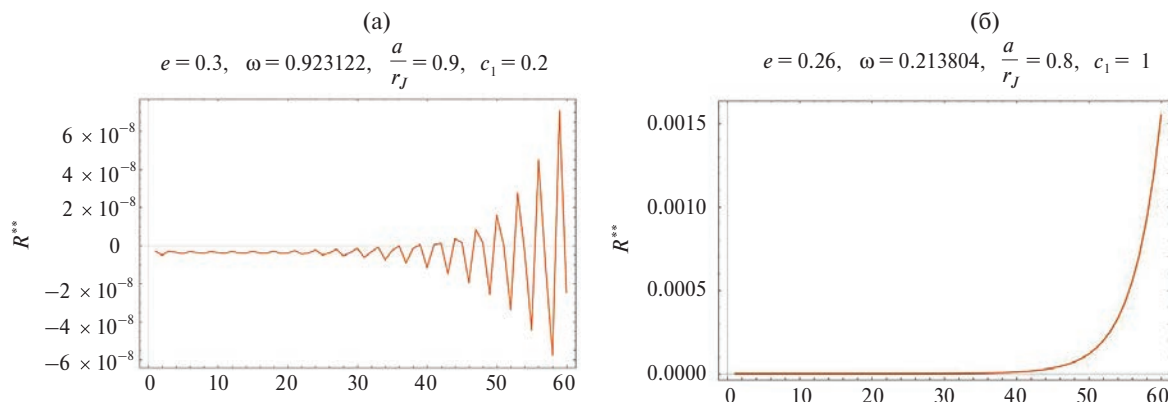


Рис. 6. (а) — расходимость по осцилляционному типу; (б) — расходимость по вековому типу.

На рис. 6а представлено значение пертурбационной функции (12) в точке e, ω , удовлетворяющей условию $f_1 = 0, i \neq 0$. Частичная сумма первых сорока членов ряда (12) хорошо приближает усредненную пертурбационную функцию R^{**} задачи, и только удержание большего количества членов ряда приводит к его расходимости. Таким образом, ряд (12) является асимптотическим по Пуанкаре, при этом расходимость ряда сопровождается осциллирующим нарастанием амплитуды колебаний. На рис. 6б имеем вековой уход значений пертурбационной функции с ростом числа удерживаемых членов ряда (случай $i = 0$).

Таким образом, ряд (12) удовлетворяет условию асимптотичности по Пуанкаре вдоль кривых неаналитичности (21). Отметим только, что асимптотические свойства ряда (12) ухудшаются в сравнении с тем, как ведет себя этот же ряд вне кривых (21) в области расходимости: число первых членов ряда, сумма которых аппроксимирует функцию R^{**} с точностью порядка $\mu^{N+\alpha}$, уменьшается.

Обозначим также существенную особенность кривых неаналитичности: в их окрестности нарушаются условия существования среднего. Действительно, производная $\partial R^{**}/\partial \omega$ меняется скачком, поэтому нарушается условие существования пространственного среднего от функции $\partial R/\partial \omega$, входящей в эволюционные уравнения по переменным i и e .

Отметим, что впервые на это обстоятельство обратили внимание авторы статей [21, 22], предложившие свою схему усреднения в окрестности этих кривых.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описано представление вековой части пертурбационной функции в ограниченной круговой задаче трех тел в виде степенного ряда, коэффициенты которого выражаются через функции Гаусса и Клаузена. Валидация ряда проведена численно, путем сравнения его с интегральным

представлением ряда, и аналитически — с рядом Брумберга и с предельным Хилловским случаем. Получены необходимые и достаточные условия появления кривых неаналитичности ряда (кривых пересечения орбит) в виде неравенств на кеплеровские элементы оскулирующей орбиты.

Исследованы — в плоскости оскулирующих элементов e, ω — радиусы сходимости степенного ряда при разных значениях параметра μ и константы Лидова — Козаи c_1 , построены области сходимости и расходимости ряда. Показано, в частности, что при “больших” μ ($0.6 \leq \mu < 1$) области расходимости обширны, захватывают значения $e \geq 0.45$ для произвольных ω . Показано, что в областях расходимости ряд является асимптотическим по Пуанкаре, при этом степень аппроксимации ряда его частичной суммой сохраняет высокие значения вплоть до первых семидесяти членов ряда. Асимптотические свойства ряда сохраняются и на кривых неаналитичности, но ухудшаются в сравнении с тем, как ведет себя ряд вне кривых неаналитичности в областях расходимости ряда. Асимптотические свойства исчезают в предельном случае $\mu \rightarrow 1$.

Асимптотичность ряда позволяет использовать традиционные методы теории возмущений при значениях μ из интервала $[0,1)$, исключая случай $\mu \approx 1$.

АВТОРСКИЙ ВКЛАД

Постановка задачи, идея применения формулы Парсевалья, представление усредненной пертурбационной функции в виде рядов, анализ кривых пересечения орбит, описание свойств асимптотичности рядов принадлежат П. С. Красильникову.

Громоздкие аналитические и численные вычисления, требующие использования программных продуктов, написание кодов численной верификации пертурбационной функции, численное построение областей расходимости и сходимости степенного ряда, численное

исследование поведение ряда в областях расхо-
мости выполнены А. В. Доброславским.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено в Московском ави-
ационном институте при финансовой поддержке
РНФ, проект № 22-21-00560.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет
конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Laplace P.* Traité de mécanique céleste. V. 1. Paris: Charles Crapelet, 1799.
2. *Le Verrier U.-J.* Annales de l'Observatoire de Paris. V. 1. Chapitre IV. Développement de la fonction qui sert de base au calcul des perturbations des mouvements des planètes. Recherches astronomiques. Paris: Mallet-Bachelier, 1855. P. 258–342.
3. *Hansen P. A.* Entwicklung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen. Leipzig, 1852. P. 181–281.
4. *Hill G. W.* On the development of the perturbative function in periodic series // The Analyst. 1875. V. 2. Iss. 6. P. 161–180.
5. *Tisserand F.* Traité de Mécanique Céleste. Paris: Gauthier-Villars, 1889.
6. *Kozai Y.* The motion of a close earth satellite // Astronomical J. 1959. V. 64. P. 367–377. DOI: 10.1086/107957.
7. *Kaula W. M.* Development of the Lunar and Solar Disturbing Functions for a Close Satellite // Astronomical J. 1962. V. 67. DOI: 10.1086/108729.
8. *Брумберг В. А.* Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах // Бюл. Ин-та теорет. астрономии. 1967. Т. 11 № 2. С. 73–83.
9. *von Zeipel H.* Sur l'application des séries de M. Lindstedt à l'étude du mouvement des comètes périodiques // Astronomische Nachrichten. 1910. V. 183. P. 345–418.
10. *Laskar J., Boué G.* Explicit expansion of the three-body disturbing function for arbitrary eccentricities and inclinations // Astronomy and Astrophysics. 2010. V. 522. Art. ID. A60.
11. *Ito T.* High-Order Analytic Expansion of Disturbing Function for Doubly Averaged Circular Restricted Three-Body Problem // Advances in Astronomy. 2016. Art. ID8945090. DOI: 10.1155/2016/8945090.
12. *Аксенов Е. П.* Осредненная ограниченная круговая задача трех тел // Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы. 1967. Т. 21. С. 184–202.
13. *Дубошин Г. Н.* Теория притяжения. М.: ГИФМЛ, 1961.
14. *Емельянов Н. В.* Динамика естественных спутников планет на основе наблюдений. Фрязино: Век 2, 2019. 575 с.
15. *Lidov M. L., Ziglin S. L.* Non-restricted double-averaged three body problem in Hill's case // Celestial Mechanics. 1976. V. 13. P. 471–489.
16. *Kozai Y.* Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. // Astronomical J. 1962. V. 67. P. 591–598.
17. *Лидов М. Л.* Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли. 1961. Т. 8. С. 5–45.
18. *Пуанкаре А.* Избранные труды в трех томах. Т. 1. М.: Наука, 1971. 772 с.
19. *Lidov M. L., Ziglin S. L.* The analysis of restricted circular twice-averaged three body problem in the case of close orbits // Celestial Mechanics. 1974. V. 9. Iss. 2. P. 151–173.
20. *Вашковьяк М. А.* Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел. I. Качественное исследование // Косм. исслед. 1981. Т. 19. № 1. С. 5–18. (Cosmic Research. 1981. V. 19. P. 1–10.)
21. *Gronchi G. F.* Generalized averaging principle and the secular evolution of planet crossing orbits // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2002. V. 83. P. 97–120.
22. *Gronchi G. F., Milani A.* The stable Kozai state for asteroids and comets with arbitrary semimajor axis and inclination // Astronomy and Astrophysics. 1999. V. 341. P. 928–935.

УДК 629.7.087

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ СБЛИЖЕНИЯ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ С ПАССИВНЫМ КОСМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ НА ОКОЛОКРУГОВОЙ ОРБИТЕ

© 2024 г. Ю. М. Заболотнов¹, *, Чанцин Ван², Чжэн Минь¹¹Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Самара, Россия²Северо-западный политехнический университет, Сиань, КНР

*email: yumz@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.06.2023

Переработанный вариант 07.08.2023

Принята к публикации 10.08.2023

В работе рассмотрено управление процессом сближения тросовой системы с пассивным космическим объектом (грузом, космическим мусором и т.д.) на почти круговой околоземной орбите. Предполагается, что активный космический аппарат, имеющий в составе тросовую систему с устройством захвата (не развернутую), находится на близкой (по отношению к орбите груза) орбите, которая была сформирована с помощью некоторого известного алгоритма дальнего наведения. Управление процессом сближения начинается в переводе космического аппарата на промежуточную орбиту, точнее в сближении с некоторой фиктивной точкой, перемещающейся по этой орбите. Положение фиктивной точки выбирается так, чтобы после развертывания тросовой системы устройство захвата оказалось в окрестности груза сразу или после некоторого небольшого участка пассивного движения по орбите. Управление процессом сближения космического аппарата с фиктивной точкой в пространственном случае строится с использованием принципа динамического программирования Беллмана с применением линеаризованной системы. Используется непрерывное управление с помощью реактивных двигателей с конечной тягой. Компоненты реактивных сил, для которых строится управление, направлены по трансверсали и бинормали в орбитальной системе координат. Предполагается, что неизбежно возникающие ошибки наведения могут быть скорректированы с помощью изменения длины троса или каким-либо другим способом. Приводится численный пример моделирования рассматриваемых процессов по нелинейным уравнениям движения, иллюстрирующий предлагаемую схему управления.

DOI: 10.31857/S0023420624030069, EDN: JJVLMJ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание в разных странах мира уделяется процессам сближения на околоземной орбите с пассивным некооперируемым или неуправляемым космическим объектом (грузом, космическим мусором и т.д.). В частности, для захвата груза во многих случаях предлагается использовать тросовую систему, состоящую из базового космического аппарата (КА) с механизмом выпуска троса, на котором расположено устройство захвата груза [1–9]. Устройство захвата груза может использовать различные принципы стыковки с грузом (магнитные системы, штыри, сети и др.). Проблемы, которые возникают при сближении и стыковке космической тросовой системы (КТС) с неуправляемым космическим объектом (НКО), анализируются в работе [1]. Как известно, традиционный метод сближения КА с любым космическим объектом включает в себя несколько характерных участков: дальнее наведение, ближнее наведение и стыковка [10, 11]. Особенность процесса ближнего наведения КТС с целью стыковки с НКО

заключается в неизбежном наличии этапа ее развертывания, который должен предшествовать стыковке. Поэтому, естественно, возникает задача выбора момента начала развертывания КТС. Причем для того, чтобы устройство захвата после окончания выпуска троса оказалась в небольшой окрестности НКО, необходимо провести предварительную коррекцию орбиты сближения с точки зрения согласования ее параметров с орбитальными параметрами орбиты НКО. Этот маневр очевидно должен учитывать длину троса после его выпуска из базового КА. Обычно на участках дальнего и ближнего наведения для предварительного проектирования траекторий сближения космические аппараты рассматриваются как материальные точки, причем учитываются законы орбитального движения КА и НКО [12, 13]. На участке, обеспечивающем захват НКО, необходимо строить управление с учетом угловых движений тел, участвующих в стыковке [14], однако законы орбитального движения на малых расстояниях между ними можно не учитывать, что существенно упрощает построение программ управления.

В настоящей работе рассматривается управление при сближении КТС с неуправляемым НКО на этапе ближнего наведения без анализа участка, обеспечивающего стыковку космических объектов. Предлагается схема приведения устройства захвата к неуправляемому НКО, которая включает нескольких характерных участков: 1) коррекция орбитальных параметров активного КА (трос не развернут) с учетом длины троса, который предполагается использовать, с целью перевода КА на промежуточную орбиту; 2) развертывание троса с устройством захвата в радиальном направлении с использованием известного закона управления [15]; 3) пассивный участок движения развернутой КТС, который обеспечивает сближение устройства захвата с НКО в соответствии с законами орбитального движения; 4) в случае необходимости изменение длины троса для компенсации неизбежно возникающих ошибок управления на предыдущих участках движения системы. На последнем участке, естественно, могут быть использованы и другие способы управления, дополняющие изменение длины троса, например, применяться автономный управляемый стыковочный модуль [16], имеющий возможность корректировать свое положение и скорость, что не изменяет предлагаемой общей схемы сближения. Понятно, что от длины троса и от отношения масс КА и устройства захвата, т.е. от положения центра масс КТС после ее развертывания, будет зависеть относительная скорость сближения КТС с НКО, влияющая на дальнейшее движение КТС после захвата НКО. Данная схема сближения может также использоваться совместно с сетью в виде “сочка” (англ. tethered sweep-net) [5], когда развернутая сеть подводится к НКО снизу или сверху. После неидеального захвата НКО, когда относительные скорости космических объектов не совпадают, могут быть использованы методы гашения колебаний в КТС, например, разработанные в исследованиях [6, 17].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Принципиальная схема сближения КТС с НКО изображена на рис. 1, где f_0 — начальное положение фиктивной точки на промежуточной орбите; f — конечное положением фиктивной точки в момент совмещения с ней КА для последующего развертывания КТС; Δu_0 — относительное угловое положение КА и фиктивной точки, которое выбирается в процессе решения задачи. После окончания процесса выпуска троса КТС, который начинается в точке f , КТС сближается с НКО в соответствии с законами орбитального движения. Использование законов орбитального движения при сближении рассматриваемых объектов позволяет строить более экономичные схемы сближения КТС с НКО.

Предполагается, что активный КА (трос не развернут) после этапа дальнего наведения совершает движение по почти круговой орбите, имеющей

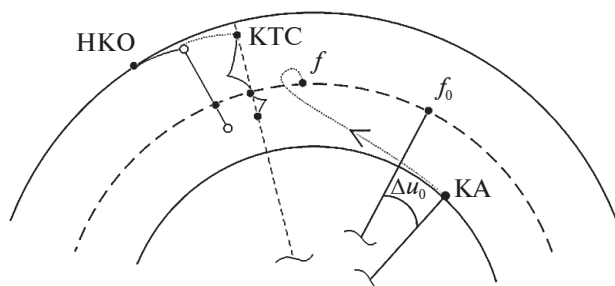


Рис. 1. Схема сближения активного КА с неуправляемым космическим объектом.

параметры, близкие к параметрам орбиты НКО, за исключением их углового относительного положения, на которое не накладывается ограничений. Последнее обстоятельство влияет только на продолжительность пассивного участка движения КТС после ее развертывания, а значит на полное время сближения КТС с НКО. Пусть НКО имеет известные параметры орбиты: A_d — большую полуось; e_d — эксцентриситет; ω_{pd} — аргумент перигея; i_d — наклонение; Ω_d — долготу восходящего узла; ϑ_d — истинную аномалию. Предположим, что длина троса по окончании его выпуска с КА равна L_k . Необходимо перевести КА на промежуточную орбиту такую, чтобы после развертывания троса концевое тело (устройство захвата), совершая вместе с КТС пассивное движение по этой орбите, через некоторое время оказалось в достаточно малой окрестности НКО. В данном случае пассивный участок движения КТС необходим, чтобы после развертывания троса было время для оценки вектора состояния системы и, следовательно, возможность коррекции движения устройства захвата, например, с помощью изменения длины троса. Предполагается, что равнодействующая реактивных сил имеет две составляющие: трансверсальную относительно радиус-вектора КА в плоскости его движения и бинормальную, перпендикулярную плоскости орбиты КА. Наличие последней составляющей обуславливается необходимостью совмещения плоскостей движения КА и НКО перед выпуском троса. Задачи ориентации и стабилизации движения КА с целью обеспечения заданного направления вектора тяги здесь не рассматриваются. Предполагается, что применяется непрерывное управление составляющими тяги, например, с помощью изменения секундного расхода массы топлива. Программа перевода устройства захвата в достаточную малую окрестность НКО строится с учетом минимизации затрат на управление. Минимизация затрат осуществляется, во-первых, за счет выбора положения фиктивной точки, перемещающейся по промежуточной орбите; во-вторых, с помощью применения соответствующего критерия оптимальности при построении программ управления для составляющих тяги

при совмещении КА с фиктивной точкой. Участок развертывания КТС практически не увеличивает затрат на управление, так как регулирование при выпуске троса осуществляется управляющим механизмом, который работает только на торможение с помощью изменения в нем силы трения троса (количества витков) на тормозном цилиндре [18]. Понятно, что затраты на управления существенно зависят от начального относительного положения КА и НКО, точнее от значения их параметров орбит, в частности, от орбиты, по которой совершает движение КА после окончания этапа дальнего наведения. Особенно это касается случая, когда плоскости орбит КА и КО не совпадают, что, как известно, приводит к увеличенным затратам на управление для обеспечения стыковки космических объектов на орбите [19]. Однако, если в результате навигационных измерений известно взаимное положение КА и НКО и их параметры орбит, управление должно строиться в соответствии с этой информацией и обеспечивать оптимальный перевод устройства захвата в положение, близкое к положению неуправляемого НКО.

Все космические объекты рассматриваются здесь как материальные точки. Для построения алгоритмов управления при переходе КА на промежуточную орбиту используются линеаризованные уравнения, записанные относительно характеристик движения фиктивной точки. Для сквозного моделирования движения системы на всех перечисленных участках применяются нелинейные уравнения движения, записанные в геоцентрической системе координат, которая здесь рассматривается как инерциальная система.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ИХ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Уравнения движения для всех рассматриваемых здесь космических объектов записываются в правой геоцентрической системе координат $OXYZ$, где O — геометрический центр Земли, ось OX направлена в восходящий узел орбиты, а ось OZ — перпендикулярно плоскости орбиты НКО, которая считается неподвижной. Так, например, уравнения движения активного КА в этом случае имеют вид

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\mu\mathbf{R}/R^3 + \mathbf{F}/m, \quad (1)$$

где $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — радиус-вектор центра масс КА; μ — гравитационная постоянная; $\mathbf{F}$ — вектор равнодействующей реактивных сил; m — масса активного КА до развертывания КТС; $\ddot{\mathbf{R}} = d^2\mathbf{R}/dt^2$; t — время. Уравнения движения для НКО записываются аналогично (отсутствуют только реактивные силы).

Пусть выбраны орбитальные параметры фиктивной точки (используются аналогичные

обозначения): $A_f, e_f, \omega_{pf}, i_f, \Omega_f, \vartheta_f$. Связь между параметрами орбиты материальной точки и ее компонентами (координатами и скоростью $x_f, V_{xf}, y_f, V_{yf}, z_f, V_{zf}$) в системе координат $OXYZ$ определяется известными формулами [10]. С использованием стандартной матрицы частных производных запишем линеаризованную систему, описывающую движение активного КА относительно фиктивной точки

$$\dot{\xi} = \mathbf{B}\xi + \mathbf{U}_\xi, \quad (2)$$

где $\xi = (\Delta x \Delta V_x \Delta y \Delta V_y \Delta z \Delta V_z)^T$; $\Delta x = x - x_f$; $\Delta V_x = V_x - V_{xf}$; $\Delta y = y - y_f$; $\Delta V_y = V_y - V_{yf}$; $\Delta z = z - z_f$; $\Delta V_z = V_z - V_{zf}$.

Матрица $\mathbf{B}$ и вектор $\mathbf{U}_\xi$ имеют вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & 0 & B_{23} & 0 & B_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B_{41} & 0 & B_{43} & 0 & B_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ B_{61} & 0 & B_{63} & 0 & B_{65} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{U}_\xi = m^{-1}(0 \ F_x \ 0 \ F_y \ 0 \ F_z)^T, \quad (4)$$

где $B_{21} = -\mu(1 - 3\bar{x}_f)/R_f^3$; $B_{43} = -\mu(1 - 3\bar{y}_f)/R_f^3$;

$$B_{65} = -\mu(1 - 3\bar{z}_f)/R_f^3; \quad B_{21} = B_{41} = 3\mu\bar{x}_f\bar{y}_f/R_f^3;$$

$$B_{25} = B_{61} = 3\mu\bar{x}_f\bar{z}_f/R_f^3; \quad B_{45} = B_{63} = 3\mu\bar{y}_f\bar{z}_f/R_f^3;$$

$$\bar{x}_f = x_f/R_f; \quad \bar{y}_f = y_f/R_f; \quad \bar{z}_f = z_f/R_f;$$

$R_f = (x_f^2 + y_f^2 + z_f^2)^{0.5}$; $F_{x,y,z}$ — проекции равнодействующей реактивных сил на оси системы координат $OXYZ$.

Линеаризованная система (2) интегрируется с учетом закона движения фиктивной точки, поэтому компоненты матрицы $\mathbf{B}$, отличные от нуля и единицы, зависят от времени.

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ АКТИВНОГО КА ПРИ ПЕРЕХОДЕ НА ПРОМЕЖУТОЧНУЮ ОРБИТУ

Прежде чем строить программу управления движением КА при переходе на промежуточную орбиту необходимо определить ее параметры и положение на орбите фиктивной точки, с которой должен быть совмещен центр масс КА перед выпуском троса с устройством захвата. Предлагается осуществить выбор параметров промежуточной орбиты из следующих условий: $e_f = e_d$, $\omega_{pf} = \omega_{pd}$,

$i_f = i_d$, $\Omega_f = \Omega_d$, где $e_d, \omega_{pd}, i_d, \Omega_d$ — известные параметры орбиты НКО. Равенство перечисленных параметров приводит к совмещению плоскостей и линий апсид орбит КА и НКО. С другой стороны, выбор величины большой полуоси A_f предлагается осуществлять исходя из длины троса L_k , которая используется в КТС. Поэтому $A_f = A_d + \Delta A$, где A_d — большая полуось пассивного КА, $|\Delta A| = m_1 L_k / m$; m_1 — масса активного КА после отделения от него устройства захвата (трос считается невесомым). Величина ΔA фактически определяет орбиту центра масс КТС после ее развертывания. Сближение устройства захвата с НКО осуществляется в зависимости от исходных параметров орбиты активного КА: с более низкой ($\Delta A < 0$) или с более высокой орбиты ($\Delta A > 0$). Если $\Delta A < 0$, то выпуск троса с устройством захвата осуществляется вверх, центр масс КТС после ее формирования находится на более низкой орбите и на пассивном участке движения КТС “догоняет” НКА. Если $\Delta A > 0$, то имеет место противоположный случай. Если предполагается, что механизм управления развертыванием троса не предназначен для втягивания троса обратно [15, 18], то можно принять $|\Delta A| < m_1 L_k / m$, что представляется вполне логичным. Кроме того, имеет место удлинение троса за счет его растяжения, что также необходимо учитывать при выборе $|\Delta A|$.

Управление при переходе активного КА на промежуточную орбиту с параметрами $A_f, e_f, \omega_{pf}, i_f, \Omega_f$, на которой происходит развертывание КТС, осуществляется с использованием принципа Беллмана [20] и процедуры АКОР (аналитическое конструирование оптимальных регуляторов) [21]. Используется квадратичный критерий оптимальности

$$J = \int_0^{t_f} (h_1 u_1^2 + h_2 u_2^2 + \xi^T D \xi) dt, \quad (5)$$

где $h_{1,2} > 0$ — весовые коэффициенты, определяющие затраты на управление; D — диагональная положительно определенная матрица весовых коэффициентов, соответствующая ошибкам управления; $u_{1,2}$ — компоненты реактивных сил, заданные в орбитальной системе координат (по трансверсали и бинормали).

С теоретической точки зрения $t_f = \infty$ и после построения управления методом АКОР имеем асимптотическую устойчивость $\xi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Естественно, в прикладных задачах ограничиваются случаем $t_f < \infty$, где момент времени t_f зависит от заданной погрешности выполнения конечных условий движения системы.

Линеаризованную систему (2) можно переписать в стандартном виде для применения процедуры АКОР

$$\dot{\xi} = B \xi + M u,$$

где $M = \begin{pmatrix} N_{11} & 0 & N_{21} & 0 & N_{31} & 0 \\ N_{12} & 0 & N_{22} & 0 & N_{32} & 0 \end{pmatrix}^T$, $N_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ —

компоненты матрицы $N = m^{-1} K \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, K —

матрица перехода от орбитальной подвижной системы координат (оси — радиус-вектор, трансверсаль, бинормаль) к системе координат $OXYZ$, $u = (u_1, u_2)^T$. При этом компоненты матрицы K выражаются через координаты фиктивной точки в системе координат $OXYZ$ и зависят от времени.

Оптимальный регулятор с точки зрения минимума критерия (5) имеет вид [21, 22]

$$u = q^T \xi, \quad (6)$$

где $q = -A M h^{-1}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$. Причем матрица A

удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению Риккати

$$\frac{dA}{dt} = -D - AB - B^T A + A M h^{-1} M^T A. \quad (7)$$

При решении уравнения Риккати (7) используется прием, связанный с обратным интегрированием [21]. В этом случае полагается $A(t_f) = 0$, при этом $q(t_f) = 0$ и $u(t_f) = 0$, и проводится интегрирование с отрицательным шагом до момента времени $t = 0$. Момент времени t_f выбирается в процессе решения задачи и должен быть согласован с весовыми коэффициентами критерия оптимальности (5), так как они определяют время окончания переходных процессов в системе и соответственно затраты на управление. Здесь следует отметить, что матрица A будет в каждый момент времени положительно определенной и обращаться в ноль только в момент времени t_f . Это определяется видом правой части уравнения (7) и имеет теоретическое обоснование, так как известно [23], что при $t \rightarrow -\infty$ решение матричного дифференциального уравнения Риккати (7) при условии положительно определенности подынтегральной функции (5) есть положительно определенная матрица. Матрица A определяется функцией Беллмана $W = \xi^T A \xi$, которая в этом случае будет положительно определенной, и функцией Ляпунова для рассматриваемой задачи [20, 21], что обеспечит совмещение активного КА с фиктивной точкой на промежуточной орбите. В конечном итоге результатом описанных выше вычислений будет вектор коэффициентов регулирования $q(t)$, который можно задать, например, в виде таблицы с некоторой дискретностью по времени и разместить в запоминающем устройстве в системе управления движением КА. Вектор $q(t)$ однозначно определяется выбранными параметрами промежуточной орбиты, весовыми коэффициентами критерия (5) и угловым положением на ней фиктивной точки,

Таблица. Данные для численного моделирования перехода активного КА на промежуточную орбиту

Обозначение	Название	Величина
$m, m - m_1$	Масса КА, масса устройства захвата	1200 кг, 200 кг
A_d, e_d	Большая полуось, эксцентриситет НКО	6878 км, 0.001
A, e	Большая полуось, эксцентриситет КА	6868 км, 0.002
$\Delta A = A_f - A$	Разница больших полуосей промежуточной орбиты и орбиты НКО	1.566 км
$\Delta i, \Delta \Omega$	Разница наклонений, разница долготы восходящих узлов КА и НКО	0.1, -0.1°
$\Delta \omega_\pi$	Разница значений долготы перицентров КА и НКО	5°
$h_{1,2}$	Весовые коэффициенты критерия (5) для управления	$0.25 \cdot 10^5$
$\overline{D_{11}}, D_{44}$	Весовые коэффициенты для ошибок в управлении в плоскости орбиты	0.05
D_{55}, D_{66}	Весовые коэффициенты для ошибок в управлении вне плоскости орбиты	0.4

определенной относительно положения КА. Предполагается, что при переходе КА на промежуточную орбиту используется так называемое декартовое непрерывное управление [11], когда, например, два реактивных двигателя располагаются вдоль продольной оси КА (они обеспечивают управляемую тягу по трансверсали), а два других двигателя имеют тягу, направленную перпендикулярно продольной оси (по бинормали). Вопросы стабилизации движения КА относительно орбитальной подвижной системы координат, необходимой для рассматриваемой задачи, и решение навигационной задачи для определения отклонений координат центра масс КА от координат фиктивной точки в настоящей работе не рассматриваются.

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР ПЕРЕХОДА АКТИВНОГО КА НА ПРОМЕЖУТОЧНУЮ ОРБИТУ

В качестве численного примера рассматривается переход между эллиптическими орбитами, причем плоскости орбит активного и пассивного КА не совпадают, что обуславливается различием их наклонений $\Delta i = i - i_d$ и значений долготы восходящих узлов $\Delta \Omega = \Omega - \Omega_d$. Отличаются также положения линий апсид $\Delta \omega = \omega - \omega_{pd}$. Исходные данные для численного моделирования перехода активного КА на промежуточную орбиту приводятся в таблице. Все параметры промежуточной орбиты совпадают с параметрами орбиты пассивного КА, кроме большой полуоси, которая на $\Delta A < 0$, т.е. начальная орбита активного КА является более низкой по сравнению с орбитой НКО. Весовые коэффициенты для управления были приняты $h_{1,2} \gg D_{ii}$ ($i = \overline{1,6}$) (табл.), т.е. критерий оптимальности (5) в этом случае близок критерию, который доставляет минимум затрат на управление. Поэтому переход на промежуточную орбиту занимает достаточно большое время $t_f = 1.7T_d$, где T_d — орбитальный период НКО. Здесь необходимо

отметить, что если положить $D = 0$, то решение уравнения Риккати (7) при $A(t_f) = 0$ тривиально $A = 0$ и, естественно, не может быть использовано для построения управления. Что же касается соотношения для весовых коэффициентов, определяющих величину ошибок в управлении в плоскости и вне плоскости орбиты ($D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{44} = 0.05$ и $D_{55}, D_{66} = 0.4$), то увеличенные коэффициенты для отклонений от плоскости орбиты НКО $\Delta z, \Delta V_z$ объясняются тем, что необходимо особенно точно (с малой погрешностью) обеспечить совмещение орбитальных плоскостей КА и НКО. Развертывание КТС в плоскости орбиты позволяет иметь дополнительную возможность с помощью изменения длины троса компенсировать неизбежно возникающие ошибки (в плоскости орбиты НКО), появившиеся на предыдущем участке движения КА, так как оценка $|\Delta A|$, полученная ранее и зависящая от длины троса L_k , является приближенной. На рис. 2 приводятся переходные процессы, характеризующие сближение КА с фиктивной точкой, перемещающейся по выбранной промежуточной орбите,

где показано изменение всех компонент вектора $\xi = (\Delta x \ \Delta V_x \ \Delta y \ \Delta V_y \ \Delta z \ \Delta V_z)^T$ от безразмерного времени $\tau = t/T_d$. Здесь следует отметить, что конечные значения параметров, характеризующих отклонения от плоскости орбиты НКО, в данном случае являются малыми: $|\Delta z| \leq 0.7$ м, $|\Delta V_z| \leq 10^{-3}$ м/с, что представляется необходимым условием дальнейшего движения КТС в плоскости орбиты при ее развертывании. Переходные процессы, представленные на рис. 2, определенные по линеаризованной и исходной нелинейной системе уравнений, в данном случае практически совпадают. Изменение управлений u_1, u_2 , которые представляют собой реактивные силы в направлении трансверсали и бинормали, показано на рис. 3а, б. Так как в начальный момент сразу после включения двигателей имеет место кратковременное увеличение значений тяги ($\max u_1 = 45$ Н, $\max u_2 = 57$ Н), представляется

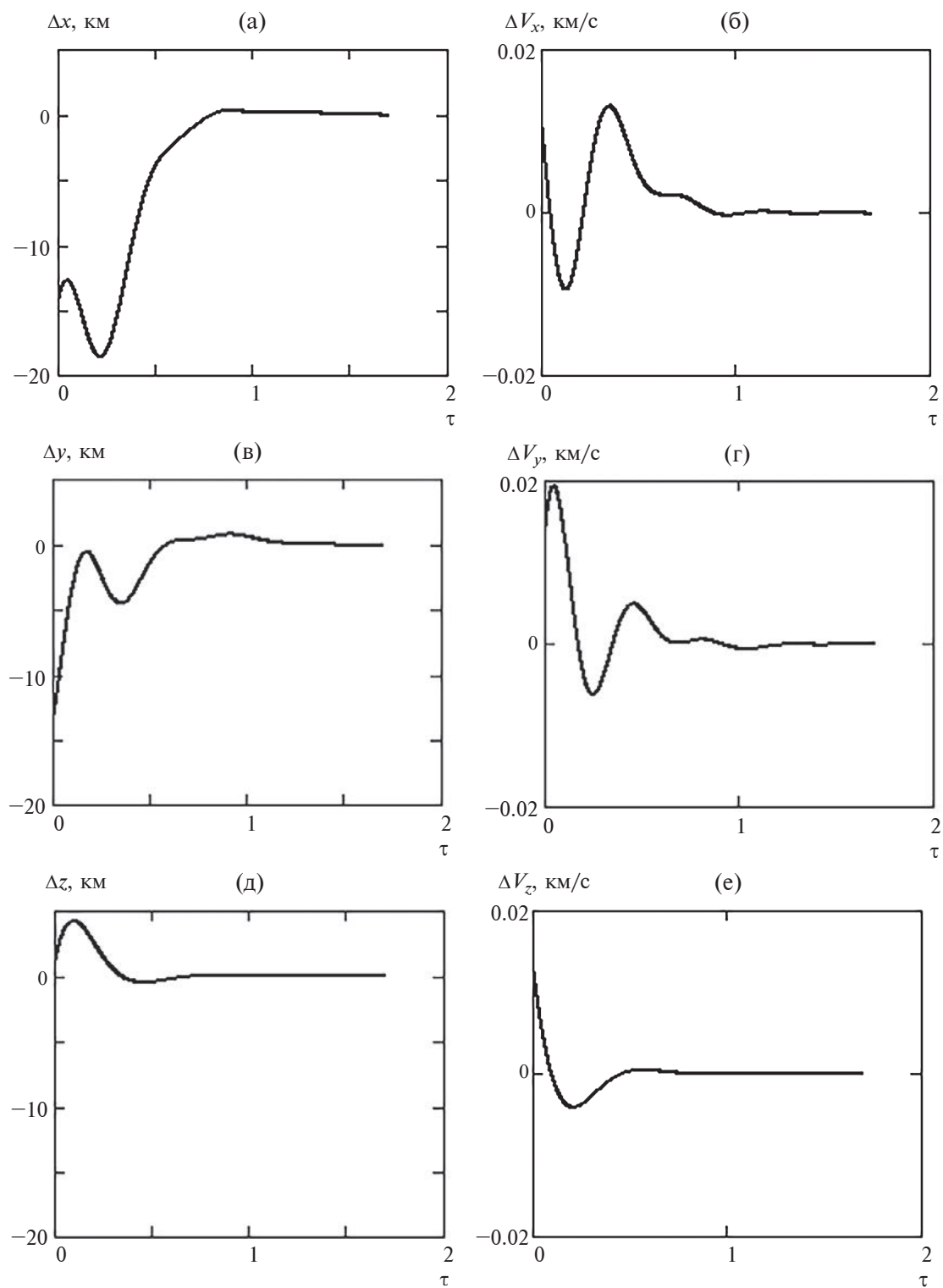


Рис. 2. Переходные процессы управления в геоцентрической системе координат.

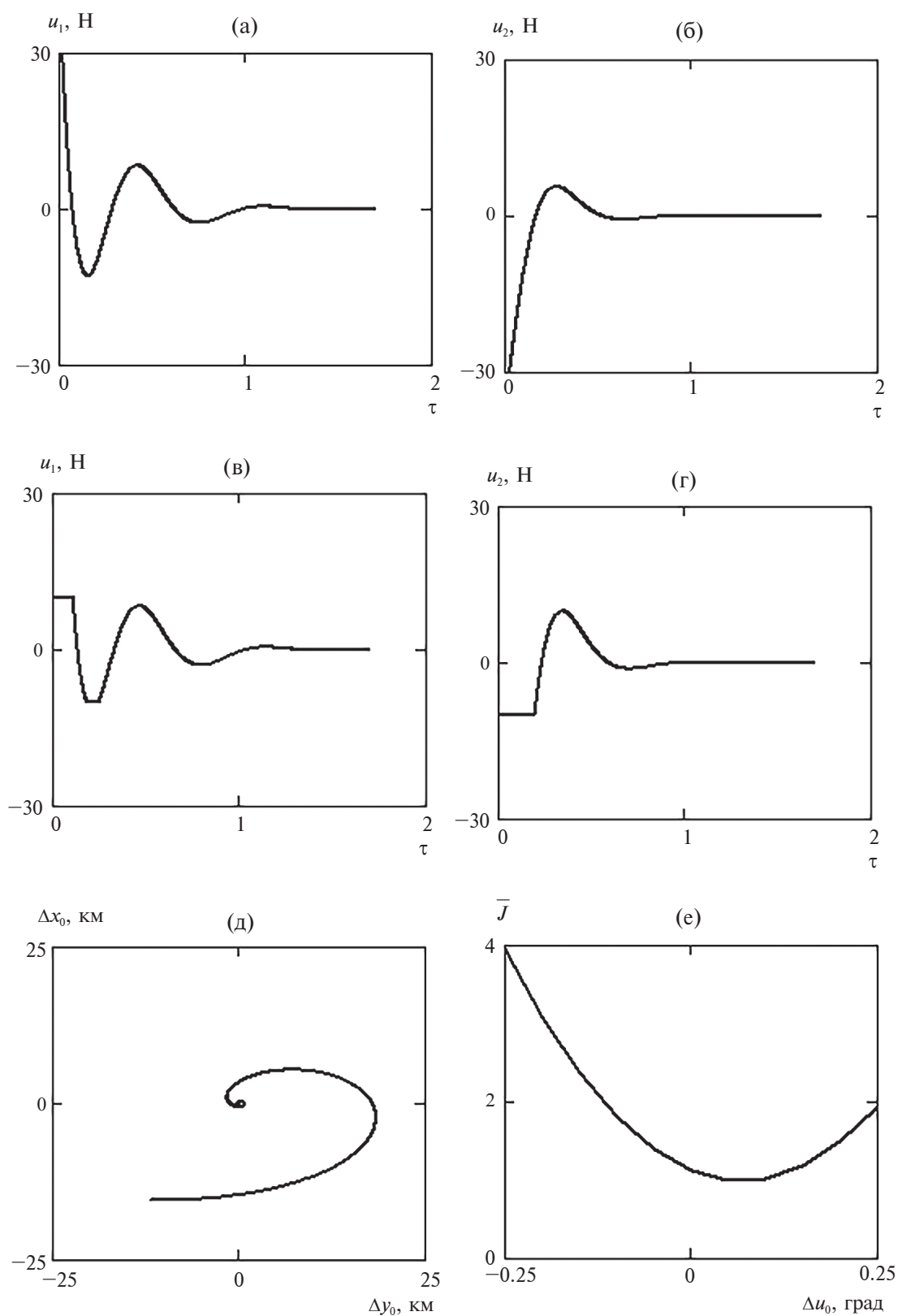


Рис. 3. Зависимости, характеризующие процесс сближения активного КА с неуправляемым космическим объектом до развертывания тросовой системы.

возможным ввести соответствующее ограничение. На рис. 3в, г приводятся те же управления, но с учетом ограничений $|u_1|, |u_2| < 10$ Н, при этом свойство асимптотической устойчивости конечного состояния системы сохраняется. На рис. 3д показана проекция траектории активного КА на плоскость переходной орбиты. Траектория построена в орбитальной подвижной системе координат (отклонения $\Delta x_0, \Delta y_0$) относительно выбранной фиктивной точки (0, 0) на промежуточной орбите. Как было установлено, затраты на управление и соответственно значения критерия оптимальности (5) существенно зависят при прочих равных условиях от относительного углового положения активного КА и выбираемой фиктивной точки, с которой происходит сближение КА. Это относительное угловое положение характеризуется разностью значений их аргументов широты Δu_0 в момент начала сближения. Фактически величина Δu_0 становится внешним параметром при решении оптимальной задачи управления, соответствующей критерию (5). Для рассматриваемого численного примера минимум критерия (5) при изменении значения параметра Δu_0 (после решения задачи оптимального управления) достигается вблизи значения $\Delta u_0 = 0$. Однако имеется небольшая асимметрия, так как значение, соответствующее минимуму критерия (5) $\Delta u_0 = 0.05^\circ$, т.е. в момент начала сближения фиктивная точка должна находиться немного впереди активного КА. Зависимость $\bar{J} = J(\Delta u_0) / \min J$, где $\min J$ — минимальное значение критерия по Δu_0 , $J(\Delta u_0)$ — значение критерия при заданном Δu_0 , приводится на рис. 3е. Как следует из рис. 3е, с помощью правильного выбора параметра Δu_0 можно существенно уменьшить значения критерия оптимальности (5), которые получаются после решения задачи оптимального управления.

РАЗВЕРТЫВАНИЕ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ И ЕЕ СБЛИЖЕНИЕ С НЕУПРАВЛЯЕМЫМ КОСМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ

После перехода активного КА на промежуточную орбиту и его совмещения с фиктивной точкой происходит разворачивание тросовой системы в вертикальное положение. При этом используется программа выпуска троса, построенная и обоснованная в работе [15]. В соответствии с этой программой конечное вертикальное положение космической тросовой системы при заданной длине троса асимптотически устойчиво. Моделирование разворачивания КТС осуществляется также в геоцентрической системе координат $OXYZ$ [15], причем трос рассматривается как растяжимая односторонняя невесомая механическая связь. Использование для моделирования уравнений движения КТС в системе координат $OXYZ$ удобно для проведения полного совместного сквозного

моделирования рассматриваемого процесса сближения КА и КТС с НКО. После разворачивания КТС имеет место пассивный участок движения системы, когда КТС “догоняет” НКО, так как центр масс КТС находится на более низкой орбите. Понятно, что в этом случае время начала сближения КА с фиктивной точкой и, следовательно, относительное угловое положение КА и НКА, должны быть выбраны так, чтобы по окончании разворачивания КТС существовал пассивный участок ее движения. Это нетрудно сделать, так как время сближения КА с фиктивной точкой и время разворачивания КТС (и соответственно угловая дальность) примерно известны заранее. Причем протяженность пассивного участка движения КТС должна быть выбрана так, чтобы было время принять решение о дополнительной коррекции длины троса или переменных состояния устройства захвата (если, например, используется активный автономный стыковочный модуль), для обеспечения успешной стыковки с НКО. На рис. 4а показаны траектории концевых тел КТС при ее разворачивании относительно центра масс системы (0, 0) в вертикальное положение с использованием программы управления [15], где $\Delta x_{1,2}, \Delta y_{1,2}$ — отклонения концевых точек от центра масс системы, темная точка — центр масс системы. Рисунки 4б, г характеризуют пассивный участок движения КТС, на котором осуществляется ее сближение с НКО. На рис. 4б показано изменение расстояний концевых точек КТС до НКО, где сплошная линия — это изменение расстояния Δr от устройства захвата до НКО. Рисунок 4в иллюстрирует сближение КТС с НКО (0, 0) (размерность по осям в километрах). На рис. 4г в увеличенном масштабе показано положение устройства захвата относительно НКО (размерность по осям в метрах) по окончании сближения КТС с НКО. Конечное расстояние между устройством захвата и НКО около 1 м. Следует отметить, что сам процесс захвата с учетом движения устройства захвата и НКО относительно своих центров масс, а может быть и активное управление устройством захвата с целью компенсации неизбежно возникающих ошибок управления на предыдущих участках движения системы (например, при разворачивании КТС или при действии других возмущений), в настоящей работе не рассматривается. Сквозное численное моделирование движения всех космических объектов (рис. 2–4), участвующих в процессе сближения КТС с НКО (КА до выпуска троса, разворачивание и пассивное движение КТС, НКО), определение их относительного положения, было проведено с использованием исходных нелинейных уравнений движения (например (1)), записанных в геоцентрической системе координат $OXYZ$. При разворачивании КТС использовалась модель движения с сосредоточенными параметрами, в которой трос был невесомым и прямолинейным. Оценка правомерности данного допущения

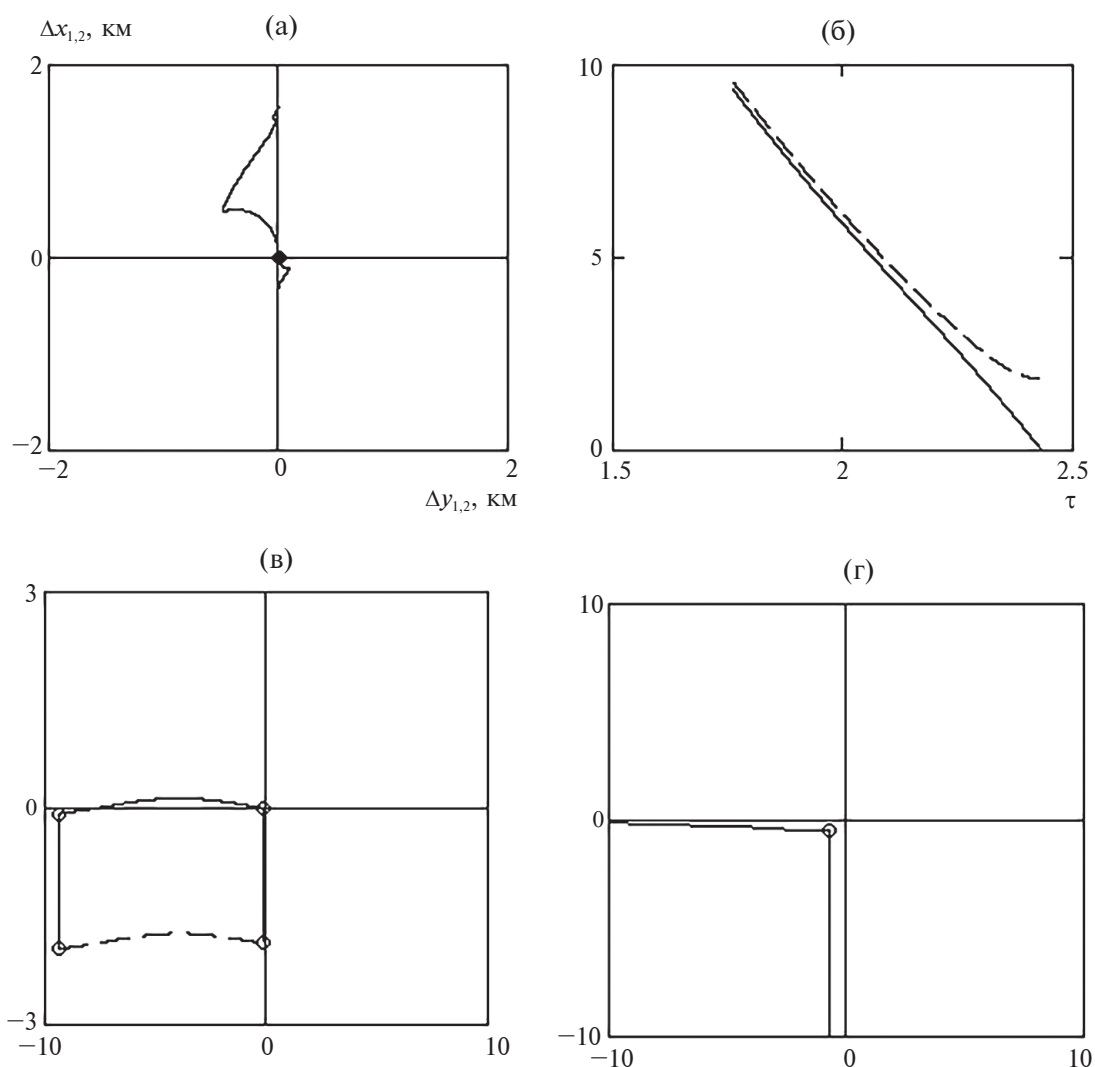


Рис. 4. Зависимости, характеризующие сближение тросовой системы с неуправляемым космическим объектом.

может быть проведена с помощью математической модели, в которой трос представляется в виде совокупности материальных точек, связанных между собой упругими односторонними механическими связями, как это было сделано в исследовании [15]. В связи с этим можно заметить, что существенное различие результатов по обеим моделям [15] имело место при конечной длине троса 30 км и только в случае, когда использовалась программа управления, при которой трос отклонялся от вертикали на величину около 55° в своем конечном состоянии. В настоящем исследовании же используется программа управления для разворачивания КТС в вертикальное положение и окончательная длина троса сравнительно небольшая — 1879 м (трос имеет те же характеристики, что и в работе [15]), причем массы концевых тел существенно больше (более, чем на порядок). Поэтому масса троса в исследовании не учитывается, и форма троса предполагается прямолинейной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предлагается схема сближения КТС с некооперируемым космическим объектом на околокруговой орбите. Отличительной особенностью рассматриваемой схемы представляется предварительный перевод активного КА, имеющего в составе тросовую систему (не развернутую) с устройством захвата НКО, на промежуточную орбиту, параметры которой выбираются исходя из предполагаемой длины троса и орбитальных параметров НКО. Перевод КА на промежуточную орбиту связан с совмещением КА с некоторой фиктивной точкой, перемещающейся по этой орбите, положение которой выбирается исходя из минимизации затрат на управление. Естественно, перевод КА на промежуточную орбиту может быть осуществлен и с помощью другого способа управления, который будет соответствовать имеющимся возможностям активного КА, что не изменяет

общей предлагаемой схемы сближения с НКО. Выбор параметров промежуточной орбиты и положения фиктивной точки на этой орбите обеспечивают (имеется участок пассивного движения КТС) согласно законам орбитального движения сближение устройства захвата с НКО. Возможность реализации предлагаемой схемы сближения КТС с НКО подтверждается численным примером сквозного моделирования, включающего все этапы рассматриваемого процесса. Более детальное рассмотрение предлагаемой схемы сближения КТС с НКО, а именно, с более подробным учетом возмущений (например, нецентральности гравитационного поля Земли), с анализом и со стабилизацией угловых движений твердых тел, участвующих в процессе сближения, навигационных определений и т.д. требует отдельного рассмотрения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование поддержано грантами КНР: Supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities (D5000220031); Supported by Key Research and Development Program of Shaanxi (2023-GHZD-32).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Williams P., Blanksby C., Trivailo P., Fujii H. A. In-plane payload capture using tethers // *Acta Astronautica*. 2005. V. 57(10). P. 772–787.
2. Trushlyakov V., Yudinsev V. Dynamics of rotating tethered system for active debris removal // *Acta Astronautica*. 2022. V. 195. P. 405–415. DOI: 10.1016/j.actaastro.2022.03.023.
3. Zhu W., Pang Z., Si J., Gao G. Dynamics and configuration control of the Tethered Space Net Robot under a collision with high-speed debris // *Advances in Space Research*. 2022. V. 70. Iss. 5. P. 1351–1361. DOI: 10.1016/j.asr.2022.06.019.
4. Wang B., Meng Z., Huang P. Attitude control of towed space debris using only tether // *Acta Astronautica*. 2017. V. 138. P. 152–167. DOI: 10.1016/j.actaastro.2017.05.012.
5. Aslanov V.S., Ledkov A. S. Survey of Tether System Technology for Space Debris Removal Missions // *J. Spacecraft and Rockets*. 2023. V. 60. Iss. 5. P. 1355–1371. <https://doi.org/10.2514/1.A35646>.
6. Lu H., Li Ai., Wang Ch., Zabolotnov Yu. Impact Stabilization of Spinning Tether Systems after Nonideal Rendezvous // *J. Spacecraft and Rockets*. 2022. V. 60. Iss. 1. P. 59–67. <https://doi.org/10.2514/1.A35293>.
7. Aslanov V. S., Pikalov R. S., Gunchin E. R. Control of the Rendezvous of Two Spacecraft Using a Tether System // *Russian Aeronautics*. 2020. V. 63. Iss. 1. P. 171–175. DOI: 10.3103/S1068799820010249.
8. Sean Cl., William J. Control of Space Debris Using an Elastic Tether and Wave-Based Control // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2016. V. 39. Iss. 6. P. 1–15. DOI: 10.2514/1.G001624.
9. Zhang Y., Huang P., Meng Zh., Liu Zh. Precise Angles-Only Navigation for Noncooperative Proximity Operation with Application to Tethered Space Robot // *IEEE Trans. Control Systems Technology*. 2018. V. 27. Iss. 3. P. 1139–1150. DOI: 10.1109/TCST.2018.2790400.
10. Основы теории полета космических аппаратов / под ред. Нариманова Г. С. и Тихонравова М. К. М.: Машиностроение, 1972. 608 с.
11. Балахонцев В.Г., Иванов В. А., Шабанов В. И. Сближение в космосе. М.: Воениздат, 1973. 240 с.
12. Ермилов Ю.А., Иванова Е. Е., Пантюшин С. В. Управление сближением космических аппаратов. М.: Наука. 1977. 448 с.
13. Миронов В.И., Миронов Ю. В., Фоминов И. В. Энергетически оптимальное управление сближением космических аппаратов в нецентральной гравитационном поле Земли на этапе дальнего наведения // *Тр. СПИИРАН*. 2019. Т. 18. № 1. С. 202–229. <https://doi.org/10.15622/sp.18.1.202-229>.
14. Авксентьев А. А. Оптимальное управление угловым движением космического аппарата при оперативном сближении с орбитальным объектом // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2016. Т. 59. № 2. С. 128–133.
15. Заболотнов Ю. М. Управление развертыванием орбитальной тросовой системы, состоящей из двух малых космических аппаратов // *Косм. исслед.* 2017. Т. 55. Вып. 3. С. 236–246. <https://doi.org/10.7868/S002342061702008X>.
16. Trushlyakov V., Yudinsev V. Systems engineering design and optimization of an active debris removal mission of a spent rocket body using piggyback autonomous module // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2017. V. 161. P. 667–681.
17. Williams P., Blanksby C., Trivailo P., Fujii H. A. In-Plane Payload Capture Using Tethers // *Acta Astronautica*. 2005. V. 57. Iss. 10. P. 772–787.
18. Kruijff M. Tethers in Space: A propellantless propulsion in-orbit demonstration. Netherlands: Delta-Utec Space Research, 2011. 423 с.
19. Сихарулидзе Ю. Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 407 с.
20. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.
21. Летов А. М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.
22. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
23. Дмитриевский А.А., Иванов Н. М., Лысенко Л. Н., Богодистов С. С. Баллистика и навигация ракет. М.: Машиностроение, 1985. 310 с.

МУЛЬТИПОЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ ПРИТЯЖЕНИЯ АСТЕРОИДА (433) ЭРОС

© 2024 г. А. А. Буров**, В. И. Никонов**

Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление”
Российской академии наук, Москва, Россия

*e-mail: jtm@yandex.ru

**e-mail: nikon_v@list.ru

Поступила в редакцию 29.06.2023
Переработанный вариант 21.07.2023
Принята к публикации 01.08.2023

Для астероида (433) Эрос определяется мультипольное представление потенциала вплоть до мультиполей четвертого порядка. Полученное выражение для потенциала используется при построении областей возможного движения космического аппарата в окрестности этого небесного тела.

DOI: 10.31857/S0023420624030077, EDN: JJVEWH

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, для многих малых небесных тел, прежде всего для тел небольших размеров, характерны нерегулярная форма и сложное распределение масс. Поэтому при исследовании движения в окрестности таких тел приходится уделять особое внимание особенностям потенциала притяжения. Для описания такого потенциала, как правило, используют приближения, опирающиеся либо на ряды Лапласа (см., например, работу [1], а также пособие [2] и цитируемую там литературу), либо на метод, известный как метод Вернера — Ширса ([3–5], см. также публикацию [6]), либо на так называемые масконы (см., например, работу [7]). Сравнительный анализ применяемых методов предложен, в частности, в статье [8].

В настоящей работе основное внимание сосредоточено на восходящем к Максвеллу подходе [9–11], предусматривающем использование мультиполей для представления потенциалов, в частности, потенциала поля притяжения. Ставится задача отыскания направлений, вдоль которых при задании мультиполей осуществляется дифференцирование, а также мультипольных моментов. Соответствующие вычисления для различных, вплоть до четвертого порядка, мультиполей выполняются для астероида (433) Эрос.

ПОТЕНЦИАЛ МУЛЬТИПОЛЯ

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — бесконечно дифференцируемая скалярная функция, зависящая от n скалярных переменных, $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$ — вектор в пространстве $\mathbf{R}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Величину

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n$$

называют производной функции f по направлению $\mathbf{h}$.

Если задано несколько (не обязательно различных) направлений $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k$, то последовательное дифференцирование функции f по этим направлениям называют k -производной функции f по направлениям $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k$ и обозначают

$$\frac{\partial^k f}{\partial \mathbf{h}_1 \partial \mathbf{h}_2 \dots \partial \mathbf{h}_k}.$$

Пусть $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа в $\mathbf{R}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Функция f называется гармонической, если

$$\Delta f = 0.$$

Понятно, что производная по направлению любого порядка от гармонической функции — вновь гармоническая функция, см., например, исследование [10].

В случае, когда $n = 3$, функция

$$\frac{1}{r} \equiv \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}}$$

является гармонической функцией. Ее производные порядка k по направлениям $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k$,

обозначаемые $\frac{\partial^k}{\partial \mathbf{h}_1 \partial \mathbf{h}_2 \dots \partial \mathbf{h}_k} \left(\frac{1}{r} \right)$, характеризуют потенциал специального точечного объекта — мультиполя k -го порядка, располагающегося в начале системы координат.

ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ТЕЛА КАК ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ МУЛЬТИПОЛЕЙ

Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное твердое тело массы M . Обозначим $Ox_1x_2x_3$ связанную с ним прямоугольную систему координат. Потенциал создаваемого им поля силы ньютоновского притяжения $U(\mathbf{r})$ в точке $P: \overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ определяется как

$$U(\mathbf{r}) = -G \iiint_{\mathcal{B}} \frac{dM(\mathbf{x})}{(\mathbf{r} - \mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{x})^{1/2}},$$

где G — гравитационная постоянная; $dM(\mathbf{x})$ — элемент массы в точке тела, задаваемой вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$. Интегрирование осуществляется по всему телу $\mathcal{B}$.

Как известно (см., например, публикации [1, 12]), во внешних по отношению к телу $\mathcal{B}$ точках пространства потенциал может быть представлен в виде разложения:

$$U(\mathbf{r}) = -G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}, \quad r = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{1/2},$$

где коэффициенты Y_n представимы либо в виде

$$Y_n(\mathbf{r}) = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{(-1)^n}{k_1!k_2!k_3!} I_{k_1k_2k_3} r^{n+1} \frac{\partial^k}{\partial r_1^{k_1} \partial r_2^{k_2} \partial r_3^{k_3}} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (1)$$

где k_1, k_2, k_3 — целые неотрицательные числа;

$$I_{k_1k_2k_3} = \iiint_{\mathcal{B}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} dM(\mathbf{x}) \quad \text{— моменты инерции}$$

(интегралы инерции) порядка n , либо, согласно Максвеллу [9] (см. также публикации [10–12]), в виде

$$Y_n(\mathbf{r}) = (-1)^n \frac{p_n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial \mathbf{h}_1 \partial \mathbf{h}_2 \dots \partial \mathbf{h}_n} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial \mathbf{h}_n}$ — дифференцирование вдоль единичного вектора $\mathbf{h}_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)^T$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 = 1$, $(k = 1, 2, \dots, n)$, p_n — постоянные положительные величины, характеризующие распределение масс в теле. Функции (2) — гармонические: они удовлетворяют уравнению Лапласа. Эти функции определяют потенциал мультиполя n -го порядка. Постоянные p_n называют моментами функции $Y_n(\mathbf{r})$, векторы $\mathbf{h}_i$ — ее осями. Свойствам мультиполей и их физической интерпретации посвящены многочисленные исследования (см., например, [9–12]).

Для каждого конкретного тела, в нашем случае — для астероида (433) Эрос — ставится задача определения направлений $\mathbf{h}_k$ и моментов p_k .

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОСЕЙ МУЛЬТИПОЛЯ И ЕГО МОМЕНТА

Согласно Сильвестру [13, 14] (см. также статью [10]), вычисление осей мультиполя сводится к решению системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} Y_n(\mathbf{r}) = 0, \\ (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где величина $Y_n(\mathbf{r})$ определяется соотношением (1). Обращаясь к исследованию [11], для решения системы (3) выполним подстановку

$$r_1 = \frac{1-u^2}{1+u^2} v, \quad r_2 = \frac{2u}{1+u^2} v, \quad r_3 = iv, \quad (4)$$

где $u \in (-\infty; +\infty)$ и $v \in (-\infty; +\infty)$. Здесь и далее $i = \sqrt{-1}$. В результате рациональной параметризации (4) второе из уравнений системы (3) оказывается выполненным тождественно, и задача сводится к изучению первого из уравнений системы (3), с новыми переменными имеющего вид

$\frac{v^n}{(u^2+1)^n} P_{2n}(u) = 0$. Отбрасывая тривиальное решение $v = 0$, приходим к задаче определения корней многочлена $P_{2n}(u)$ степени $2n$ относительно переменной u с комплексными коэффициентами.

Для всех различных пар корней u_1 и u_2 многочлена $P_{2n}(u)$, рассмотрим формы

$$Ar_1 + Br_2 + Cr_3 = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ \xi(u_1) & \eta(u_1) & i \\ \xi(u_2) & \eta(u_2) & i \end{vmatrix} = 0,$$

$$\xi(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \eta(u) = \frac{2u}{1+u^2}, \quad (5)$$

линейные относительно r_1, r_2, r_3 . Выберем из них лишь те, для которых коэффициенты A , B и C из соотношения (5) являются вещественными. Согласно работам [11–14], таких пар будет ровно n . Обозначим отвечающие им коэффициенты (A_k, B_k, C_k) , $k = 1, \dots, n$ соответственно. Тогда оси мультиполей определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_k = & \left(\frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}}, \frac{B_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}}, \frac{C_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}} \right)^T, \\ & k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь, когда оси мультиполей определены, можно вычислить мультипольные моменты p_n . Для этого приравнивают правые части соотношений (1) и (2). Величины p_n определяются из соотношений, получающихся в результате подстановки координат произвольной точки пространства,

а также вычисленных осей. Принимая во внимание то обстоятельство, что момент p_n должен быть положительной величиной [10, 11], в случае необходимости изменяют направление одного из векторов $\mathbf{h}_k$ на противоположное.

ПРИМЕР. АСТЕРОИД (433) ЭРОС

С помощью описанного выше подхода, построим мультипольное представление потенциала гравитационного поля астероида (433) Эрос вплоть до порядка $n = 4$.

Для вычисления инерциальных характеристик астероида (433) Эрос в предположении о постоянстве его плотности $\rho = 2640 \text{ кг/м}^3$ используется предложенная в публикации [15] триангуляционная сетка, содержащая 856 вершин и 1708 граней, заданных в некоторой жестко связанной с астероидом системе координат $Ox_1x_2x_3$.

В рамках принятой модели эффективный радиус тела, т.е. радиус сферы, объем которой равен объему тела, равен $R_e = 8.41 \text{ км}$. В работе [16] (см. также статью [17]), приведены моменты инерции астероида (433) Эрос вплоть до четвертого порядка. Используя эти значения, определим оси соответствующих мультиполей и их моменты. Отметим, что выполнен пересчет координат вершин сетки; и оси, в которых теперь она задана, являются главными центральными осями инерции. Алгебраические уравнения

$$P_{2n}(u) = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (7)$$

имеют следующий явный вид:

$$P_2(u) = \sigma_{10}u^2 + \sigma_{11}u - \overline{\sigma_{10}} = 0, \quad \sigma_{10} = I_{100} - iI_{001}, \\ \sigma_{11} = -2I_{010};$$

$$P_4(u) = \sigma_{20}u^4 + \sigma_{21}u^3 + \sigma_{22}u^2 - \overline{\sigma_{21}}u + \overline{\sigma_{20}} = 0,$$

$$\sigma_{20} = \frac{3}{2}(I_{002} - I_{200}) + 3iI_{101}, \quad \sigma_{21} = 6(I_{110} - iI_{011}),$$

$$\sigma_{22} = 3(I_{200} + I_{002} - 2I_{020}),$$

$$P_6(u) = \sigma_{30}u^6 + \sigma_{31}u^5 + \sigma_{32}u^4 + \\ + \sigma_{33}u^3 - \overline{\sigma_{32}}u^2 + \overline{\sigma_{31}}u - \overline{\sigma_{30}} = 0,$$

$$\sigma_{30} = \frac{5}{2}(I_{300} - 3I_{102} + i(I_{003} - 3I_{201})),$$

$$\sigma_{31} = 15(I_{012} - I_{210} + 2iI_{111}),$$

$$\sigma_{32} = \frac{15}{2}(4I_{120} - I_{102} - I_{300} - i(4I_{021} - I_{003} - I_{201})),$$

$$\sigma_{33} = 30\left(I_{012} + I_{210} - \frac{2}{3}I_{030}\right).$$

$$P_8(u) = \sigma_{40}u^8 + \sigma_{41}u^7 + \sigma_{42}u^6 + \sigma_{43}u^5 + \\ + \sigma_{44}u^4 - \overline{\sigma_{43}}u^3 + \overline{\sigma_{42}}u^2 - \overline{\sigma_{41}}u + \overline{\sigma_{40}} = 0,$$

$$\sigma_{40} = \frac{35}{8}(6I_{202} - I_{400} - I_{004} + 4i(I_{301} - I_{103})),$$

$$\sigma_{41} = 35(I_{310} - 3I_{112} + i(I_{013} - 3I_{211})),$$

$$\sigma_{42} =$$

$$= \frac{35}{2}(I_{400} - I_{004} + 6I_{022} - 6I_{220} + 2i(6I_{121} - I_{103} - I_{301})),$$

$$\sigma_{43} = 105\left(\frac{4}{3}I_{130} - I_{112} - I_{310} - i\left(\frac{4}{3}I_{031} - I_{211} - I_{013}\right)\right),$$

$$\sigma_{44} = 70(3I_{220} + 3I_{022} - I_{040}) - \frac{105}{4}(I_{400} + I_{004} + 2I_{202}).$$

Здесь и далее черта над коэффициентом означает операцию комплексного сопряжения.

Так как начало системы координат совпадает с центром масс астероида, то $Y_1(\mathbf{r}) \equiv 0$, поэтому и момент p_1 тоже тождественно равен нулю.

Каждое из уравнений (7) рассматривалось отдельно и решалось численно для значений параметров, присущих астероиду (433) Эрос.

Анализ линейных форм (5) позволяет получить следующие моменты и координаты осей мультиполей:

$p_2 = 0.8326403869,$	$\alpha_1 = 0.9897492417,$	$\beta_1 = 0,$	$\gamma_1 = 0.1428160988,$
	$\alpha_2 = 0.9897492417,$	$\beta_2 = 0,$	$\gamma_2 = -0.1428160988,$
$p_3 = 0.3687158871,$	$\alpha_1 = 0.9973167777,$	$\beta_1 = 0.0719499141,$	$\gamma_1 = -0.0135075931,$
	$\alpha_2 = -0.9993422577,$	$\beta_1 = 0.0231732690,$	$\gamma_1 = -0.0278935827,$
	$\alpha_3 = 0.2479396651,$	$\beta_3 = 0.9578998050,$	$\gamma_3 = -0.1447545721,$
$p_4 = 1.283187187,$	$\alpha_1 = -0.9948508619,$	$\beta_1 = 0.0216591256,$	$\gamma_1 = 0.0990083078,$
	$\alpha_2 = -0.9838707721,$	$\beta_1 = 0.0240519691,$	$\gamma_1 = -0.1772563301,$
	$\alpha_3 = 0.9199623237,$	$\beta_3 = 0.1292685232,$	$\gamma_3 = 0.3700796830,$
	$\alpha_4 = 0.8948489024,$	$\beta_4 = 0.0700769894,$	$\gamma_4 = -0.4408340473.$

Здесь мультипольные моменты p_n представлены в безразмерном виде — их размерные величины p'_n отнесены к массе астероида и к эффективному радиусу R_e , взятому в соответствующей степени: $p_n = p'_n / (m R_e^n)$.

Замечание. Представляет интерес механическая интерпретация найденных полюсов и сопоставление мест их расположения с топографической картой астероида (433) Эрос [18]. Этому вопросу предполагается посвятить отдельное исследование.

Чувствительность значений моментов инерции различных порядков астероида (433) Эрос при переходе от более грубых к более точным сеткам исследовалась в работе [16]. Чувствительность положений осей мультиполей и значений мультипольных моментов к калибру сетки в настоящей работе не обсуждается.

ИЗМЕНЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ, ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ И ОБЛАСТИ ВОЗМОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

Измененный потенциал

Рассмотрим космический аппарат (КА), совершающий движение в окрестности астероида. Предположим, что астероид совершает равномерное вращение вокруг главной оси инерции, отвечающей наибольшему моменту инерции, с угловой скоростью ω . Положим массу КА, равной единице. В системе отсчета $Ox_1x_2x_3$, равномерно вращающейся вместе с астероидом около оси Ox_3 с периодом $T = 5.27$ ч, кинетическая энергия КА имеет вид:

$$E_k = \frac{1}{2}(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + \dot{r}_3^2) + \omega(r_1\dot{r}_2 - \dot{r}_1r_2) - U_c,$$

где

$$U_c = -\frac{1}{2}\omega^2(r_1^2 + r_2^2) -$$

потенциал центробежных сил. Ограничиваясь рассмотрением мультиполей вплоть до четвертого порядка, потенциал притяжения примем приближенным равным

$$U_N = G \sum_{n=0}^k (-1)^{n+1} \frac{p_n}{n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left(\frac{1}{r} \right),$$

где, согласно постановке задачи, величина k будет принимать значения от 2 до 4. Функция

$$\mathcal{J}_0 = \frac{1}{2}(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + \dot{r}_3^2) + U_a, \quad U_a = -U_c + U_N = h -$$

¹ Вычисления показывают, что применение третьего приближения потенциала дает результаты, мало отличающиеся от результатов, полученных во втором приближении. Результаты этих вычислений в дальнейшем не приводятся.

интеграл Пенлеве—Якоби.

Точки либрации

Для вращающегося гравитирующего тела под точками либрации понимают положения равновесия относительно системы отсчета, вращающейся вместе с этим телом. Точкам либрации отвечают критические точки приведенного потенциала, состоящего из потенциала центробежных сил и потенциала ньютоновского притяжения.

Осуществим сравнение координат точек либрации, вычисленных при $k = 2$ и $k = 4$ (во втором и четвертом приближении потенциала¹), с результатами из статьи [19], где точки либрации вычислялись для потенциала Вернера — Ширса. Имеем: для коллинеарной точки E_1 (табл. 1):

Таблица 1.

Координаты, км	r_1	r_2	r_3
$k = 2$	−18.36045	−2.14939	0.08234
$k = 4$	−19.07455	−1.58843	0.06202
[19]	−19.72858	−3.38644	0.13237

Для коллинеарной точки E_2 (табл. 2):

Таблица 2.

Координаты, км	r_1	r_2	r_3
$k = 2$	18.12444	−2.49167	0.09062
$k = 4$	18.92920	−0.99672	0.06751
[19]	19.15600	−2.65188	0.14298

Замечание. Коллинеарные точки либрации располагаются вне экваториальной плоскости.

Внутри описанной около небесного тела сферы, известной как сфера Бриллюэна, имеются проблемы со сходимостью рядов, приближающих потенциал притяжения. Поэтому нет оснований для того, чтобы считать получаемые в результате вычислений координаты треугольных точек либрации достоверными. Выполненные вычисления показывают, что получающиеся для применяемых при вычислениях приближений потенциала треугольные точки либрации оказываются внутри сферы Бриллюэна, радиус которой приблизительно составляет 16 км [15]. Согласно исследованию [19] треугольные точки либрации имеют координаты (табл. 3).

Таблица 3.

Координаты, км	r_1	r_2	r_3
E_3	−0.48407	14.72470	−0.06316
E_4	−0.46166	−13.96640	−0.07438

Для сравнения полученных результатов с результатами из публикации [19] воспользуемся соотношением

$$\delta = \frac{\sqrt{(r_1 - r_{1*})^2 + (r_2 - r_{2*})^2 + (r_3 - r_{3*})^2}}{\min(\rho, \rho_*)},$$

$$\rho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}, \quad \rho_* = \sqrt{r_{1*}^2 + r_{2*}^2 + r_{3*}^2},$$

где величины со звездочкой взяты из работы [19]. Результаты вычислений приведены в табл. 4.

Таблица 4.

δ	$k = 2$	$k = 4$
E_1	0.0998	0.1000
E_2	0.0571	0.0882

Замечание. На первый взгляд, результаты вычислений, приведенные в последней из таблиц, парадоксальны. Хотя, как можно видеть, отклонение положений точек либрации, вычисленных с помощью мультипольных приближений, от положений, вычисленных с помощью метода Вернера — Ширса, находится в пределах 10 %, результаты, полученные во втором приближении, более точны, чем результаты, полученные в четвертом приближении. Это обстоятельство заслуживает более тщательного, отдельного изучения. Среди причин наблюдаемых парадоксальных отклонений могут оказаться, в частности, достаточно медленная сходимость (или вообще, расходимость) рядов, составленных из мультиполей. Исследованию общих вопросов сходимости и расходимости мультипольных приближений посвящен ряд работ (см., например, [20, 21]). Эта, в общем случае, теоретическая тематика, далеко выходит за рамки настоящей работы.

Области возможного движения

Измененный потенциал и постоянная интеграла Пенлеве—Якоби определяют области возможного движения

$$\Sigma_h: U_a(r_1, r_2, r_3) \leq h,$$

ограниченные поверхностями

$$\partial \Sigma_h: U_a(r_1, r_2, r_3) = h.$$

Для изображения областей возможного движения обычно используют те или иные их сечения. Ограничимся изображением сечения плоскостью, проходящей через коллинеарные точки либрации и ортогональной оси вращения астероида. Эти

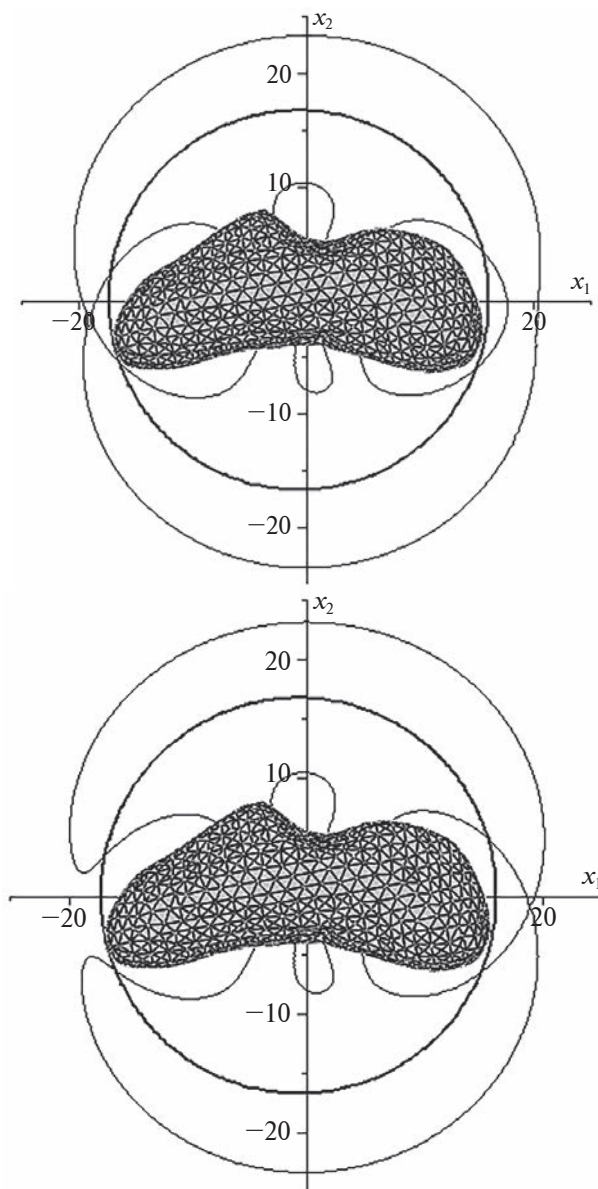


Рис. 1. Сечения поверхностей уровня плоскостями, проходящими через точки либрации E_1 (сверху) и E_2 (снизу) и параллельными плоскости Ox_1x_2 для четвертого приближения потенциала.

тройки изображены на рис. 1. Полуэллиптические окружности на рисунках — сечения сферы, описанной около астероида. Нетрудно видеть, что вычисленные коллинеарные точки либрации находятся вблизи этой сферы, чем и может быть вызвано описанное выше парадоксальное снижение точности с увеличением порядка приближения.

Некоторые замечания

Вообще говоря, мультиполь n -го порядка является классическим объектом исследований не только в земной геодезии [22, 23] (см. также статью [24]) и в описании межмолекулярных взаимодействий (см., например, работу [25]²), но и при

² См. также в работе [26] весьма экзотический пример применения мультиполей в динамике человеческого тела.

решении уравнений математической физики со сложными граничными условиями (см., например, публикации [27, 28]). Заметим, что при решении таких задач большие усилия тратятся не только на исследование сходимости возникающих рядов, но и на изучение полноты системы функций, по которым осуществляется разложение.

При решении задач моделирования динамики многих частиц с помощью мультипольных подходов (см., например, уже упоминавшиеся работы [20, 21]) особо актуален вопрос о требующихся для исследования вычислительных ресурсах. В рассматриваемом классе задач о мультипольных приближениях потенциала притяжения астероидов очевидны как минимум два фактора, сказывающихся как на объеме, так и на скорости вычислений. Первый из них обусловлен калибром разбиения, а вместе с ним и числом узлов, ребер и граней триангуляционных сеток, задающих приближение поверхности астероидов. Эти величины, как правило, фиксированы и определены результатами обработки фотометрических наблюдений, на основе которых выполняется построение таких сеток. Другой фактор связан с порядком мультипольного приближения потенциала: объем вычислений возрастает с ростом порядка аппроксимации. Оценка изменения объема вычислений с ростом такого порядка в настоящей работе не проводилась.

Как известно, астероид (433) Эрос относят к небесным телам, совершающим одночастотное вращение. Представляет интерес решение задачи о верификации с помощью сведений о точках либрации полей притяжения небесных тел, совершающих прецессионные движения (см., например, работы [29–32]). Общая теория, касающаяся определения свойств точек либрации для такой задачи развивалась в исследованиях [33, 34].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе воспроизведен восходящий к Максвеллу и Сильвестру подход к определению приближенного выражения для потенциала гравитационного притяжения с помощью мультипольных разложений. С помощью такого подхода для поля притяжения астероида (433) Эрос определены мультиполи вплоть до четвертого порядка. Построены некоторые сечения областей возможного движения. Затронут вопрос о чувствительности результатов к порядку приближения.

Остается открытым вопрос о том, каким точкам на поверхности (“на карте”) астероида отвечают направления вычисленных мультиполей.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00297.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 800 с.
2. *Холшевников К. В., Питьев Н. П., Титов В. Б.* Притяжение небесных тел: учеб. пособие. СПб: Изд-во Санкт-Петербургского гос. ун-та. 2005. 108 с.
3. *Werner R. A.* The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1994. V. 59. Iss. 3. P. 253–278. DOI: 10.1007/BF00692875.
4. *Werner R. A., Scheeres D. J.* Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1996. V. 65. Iss. 3. P. 313–344. DOI: 10.1007/BF00053511.
5. *Werner R. A.* The solid angle hidden in polyhedron gravitation formulations // *J. Geodesy*. 2017. V. 91. Iss. 3. P. 307–328. DOI: 10.1007/s00190-016-0964-z.
6. *Werner R. A.* Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron // *Computers and Geosciences*. 1997. V. 23. Iss. 10. P. 1071–1077. DOI: 10.1016/S0098-3004(97)00110-6.
7. *Chanut T. G. G., Aljbaae S., Carruba V.* Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. V. 450. Iss. 4. P. 3742–3749. DOI: 10.1093/mnras/stv845.
8. *Юдицкая А. С., Ткачев С. С.* Сравнительный анализ методов моделирования гравитационного потенциала тел сложной формы // *Матем. моделирование*. 2021. Т. 33. № 5. P. 78–90. DOI: 10.20948/mm-2021-05-06. (= *Yuditskaya A. S., Tkachev S. S.* Comparative Analysis of Methods for Modeling the Gravitational Potential of Complex Shaped Bodies // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2021. V. 13. P. 1138–1147.)
9. *Maxwell J. C.* A treatise on electricity and magnetism. Vol. I. Oxford: Clarendon Press, 1873. 500 p.
10. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций: пер. с англ. С. В. Фомина. М.: ИЛ, 1952. (= *Hobson E. W.* The Theory of Spherical and

- Ellipsoidal Harmonics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1931.)
11. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1: пер. с нем. М.; Л.: ГТТИ, 1933. 525 с. (= Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924.)
 12. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1962.
 13. Sylvester J. J. Note on spherical harmonics // Philosophical Magazine. 1876. V. 2. P. 291–307.
 14. Sylvester J. J. The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester. V. 3. Cambridge: Cambridge University Press, 1909. P. 37–51.
 15. Thomas P. C., Joseph J., Carcich B. et al. Eros: Shape, Topography and Slope Processes // Icarus. 2002. V. 155. Iss. 1. P. 18–37.
 16. Буров А. А., Никонов В. И. Чувствительность значений компонент тензоров Эйлера — Пуансо к выбору триангуляционной сетки поверхности тела // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 10. С. 1764–1776. (= Burov A. A., Nikonov V. I. Sensitivity of the Euler–Poinso tensor values to the choice of the body surface triangulation mesh // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. V. 60. Iss. 10. P. 1708–1720.) DOI: 10.31857/S0044466920100063.
 17. Буров А. А., Никонов В. И. Вычисление потенциала притяжения астероида (433) Эрос с точностью до членов четвертого порядка // Докл. Российской акад. наук. Физика, техн. науки. 2020. Т. 492. № 1. С. 58–62. (= Burov A. A., Nikonov V. I. Computation of attraction potential of asteroid (433) Eros with an accuracy up to the terms of the fourth order // Doklady Physics. 2020. V. 65. Iss. 5. P. 164–168.) DOI: 10.31857/S2686740020030086.
 18. Buczkowski D. L., Barnouin-Jha O. S., Prockter L. M. 433 Eros lineaments: Global mapping and analysis // Icarus. 2008. V. 193. P. 39–52.
 19. Wang X., Jiang Y., Gong Sh. Analysis of the potential field and equilibrium points of irregular-shaped minor celestial bodies // Astrophysics Space Science. 2014. V. 353. P. 105–121.
 20. Greengard L., Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations // J. Computational Physics. 1997. V. 135. P. 280–292.
 21. Greengard L., Rokhlin V. Rapid evaluation of potential fields in three dimensions // Vortex methods: Lecture Notes in Mathematics. V. 1360 / eds. C. Anderson, C. Greengard. Springer-Verlag, 1988. P. 121–141.
 22. Winch D. E. The fourth order geomagnetic multipole: The sedecimupole // Pure and Applied Geophysics. 1967. V. 67. P. 112–122.
 23. Winch D. E. The fifth order geomagnetic multipole: The duotrigintupole // Pure and Applied Geophysics. 1967. V. 68. P. 90–102.
 24. Мещеряков Г. А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. М.: Наука, 1991.
 25. Гиршфельдер Дж., Кермисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей: пер. с англ. М.: ИЛ, 1961. (= Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B. Molecular theory of gases and liquids. N.Y.: Wiley, 1954.)
 26. De Guise J., Gulrajani R. M., Savard P., Guardo R., Roberge F. A. Inverse Recovery of Two Moving Dipoles from Simulated Surface Potential Distributions on a Realistic Human Torso Model // IEEE Trans. Biomedical Engineering. 1985. V. BME-32. Iss. 2. P. 126–135.
 27. Власов В. И., Скороходов С. Л. Метод мультиполей для задачи Дирихле в двусвязных областях сложной формы. I. Общее описание метода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. Вып. 11. С. 1633–1647. (= Vlasov V. I., Skorokhodov S. L. Multipole method for the Dirichlet problem on doubly connected domains of complex geometry: A general description of the method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2000. V. 40. Iss. 11. P. 1567–1581.)
 28. Безродных С. И., Власов В. И. Применение метода мультиполей к прямым и обратным задачам для уравнения Грэда — Шафранова с нелокальным условием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 4. С. 619–685. (= Bezrodnykh S. I., Vlasov V. I. Application of the multipole method to direct and inverse problems for the Grad–Shafranov equation with a nonlocal condition // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. V. 54. Iss. 4. P. 631–695.)
 29. Harris A. W. Tumbling Asteroids // Icarus. 1994. V. 107. Iss. 1. P. 209–211.
 30. Рябова Г. О. Астероид Географ. I. Вращение // Астрон. вестн. Исслед. Солнечной системы. 2002. Т. 36. № 2. С. 186–192. (= Ryabova G. O. Asteroid 1620 Geographos: I. Rotation // Solar System Research. 2002. V. 36. P. 168–174.)
 31. Pravec P., Harris A. W., Michalowski T. Asteroid Rotations // Asteroids III / eds. Bottke W. F., Cellino A., Paolicchi P., Binzel R. P. Tucson: Univ. of Arizona Press, 2002. P. 113–122.
 32. Pravec P., Harris A. W., Scheirich P. et al. Tumbling asteroids // Icarus. 2005. V. 173. P. 108–131.
 33. Муницина М. А. Относительные равновесия точки в гравитационном поле прецессирующего динамически симметричного твердого тела // Задачи исслед. устойчивости и стабилизации движения. М.: Вычисл. центр им. А. А. Дородницына РАН. 2009. С. 14–19.
 34. Лавровский Э. К. О точках либрации в системе астероид-исследовательский зонд // Косм. исслед. 2023. Т. 61. № 4. С. 302–310. (= Lavrovsky E. K. On libration points in the asteroid — research probe system // Cosmic Research. 2023. V. 61. Iss. 4. P. 305–311. DOI: 10.1134/S0010952523700211.)

УДК 531.352

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ПО ЛЕЕРНОЙ СВЯЗИ ПОД СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

© 2024 г. В. С. Васькова*, А. В. Родников**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*e-mail: vsvaskova@yandex.ru

**e-mail: rodnikovav@mai.ru

Поступила в редакцию 06.07.2023

После доработки 06.09.2023

Принята к публикации 11.09.2023

Рассматривается возможность перемещения грузов вдоль троса, связывающего две тяжелые космические станции, посредством космического аппарата (КА) с управляемым солнечным парусом без затрат топлива. Динамика относительного движения КА изучается в рамках модельной задачи, предполагающей, что станции движутся по одной гелиоцентрической орбите, солнечный парус является идеальной отражающей плоской панелью, а трос реализует идеальную одностороннюю леерную связь, ограничивающую относительное движение КА некоторым эллипсоидом. Указывается, что если расстояние между станциями достаточно мало, а отношение площади паруса к массе КА имеет тот же порядок, что и в уже реализованных космических миссиях, то солнечная радиация является основным фактором, определяющим движение КА в орбитальной системе отсчета. Решается задача определения всех пар точек эллипсоида в плоскости орбиты станций, между которыми возможно перемещение с постоянно ориентированным парусом. Оценивается время перелета КА между вершинами эллипсоида, соответствующими его большей полуоси, при парусе, ориентированном ортогонально солнечным лучам с нулевой начальной скоростью. Также оценивается минимально возможное время такого перелета при соответствующем законе управления положением паруса, в том числе для нулевых начальной и конечной скоростей.

DOI: 10.31857/S0023420624030087, EDN: JJNLXZ

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании космического пространства может возникнуть необходимость в перемещении грузов между рукотворными космическими объектами, расположенными достаточно близко. Использование для такой транспортировки движителей, использующих солнечную радиацию, является способом, позволяющим удешевить космическую миссию за счет сокращения необходимых запасов топлива и уменьшения в целом служебных систем, в состав которых входит топливный отдел космического аппарата (КА) [1]. В настоящее время уже можно сказать, что солнечные паруса успешно вошли в космическую практику [2–4]. В опубликованных к настоящему времени теоретических исследованиях (не претендуя на полноту цитирования, упомянем работы [5–12]) обосновываются многочисленные возможности использования солнечного паруса. В частности, указывается, что радиационный движитель применим для межпланетных перелетов (например, публикации [6, 13]), когда, располагая плоскость паруса под углом к солнечным лучам, можно изменить перигелий орбиты, тем самым удаляясь от Солнца или приближаясь к нему. Однако солнечный парус сам по

себе не может создавать ускорение, направленное не под острым углом по отношению к солнечным лучам. Этот факт, казалось бы, становится непреодолимым препятствием для парусного сообщения между близко расположенными искусственными гелиоцентрическими объектами. Проблема движения “против ветра”, в данном случае солнечного, может быть решена, если движение будет осуществляться вдоль троса, соединяющего эти объекты. Трос в этом случае будет исполнять ту же роль, что и киль морского парусного судна [14, 15].

В настоящей работе рассматривается модельная задача движения легкого космического аппарата, оснащенного идеальным солнечным парусом, вдоль троса, концы которого закреплены на двух массивных гелиоцентрических космических станциях. При этом станции перемещаются по одной гелиоцентрической орбите на расстоянии порядка 1 а.е. от Солнца и расположены достаточно близко (от нескольких до нескольких сотен километров) друг от друга, а трос считается невесомым, идеально гибким и нерастяжимым. Длина троса предполагается превосходящей расстояние между точками закрепления. В этом случае движение КА с парусом ограничено некоторым эллипсоидом вращения

с фокусами на станциях, реализующим идеальную одностороннюю леерную [16, 17] связь. Кроме того, отклонение КА от орбиты станций не превышает величину порядка 10^{-6} от большой полуоси этой орбиты, а угловая скорость орбитальной системы отсчета может быть оценена как $2 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$. Поэтому, при малой продолжительности перелета КА, неинерциальностью орбитальной системы отсчета можно пренебречь. Предполагается также, что движение КА не оказывает существенного влияния на движение станций. Оправданием этого предположения выступает тот факт, что, как будет показано ниже, максимальное натяжение троса определяется центростремительным ускорением КА в орбитальной системе отсчета и в большинстве случаев составляет менее 1 Н. Таким образом, необходимый трос в буквальном смысле является нитью, чья масса незначительна по сравнению с массой всей конструкции. Заметим, что в реальной ситуации трос будет оказывать разнонаправленное влияние на станции. Для компенсации такого влияния могли бы быть полезны солнечные паруса, развернутые непосредственно на станциях.

В работе изучаются перелеты КА между вершинами эллипсоида, соответствующими его большой полуоси, вдоль дуги, образуемой пересечением эллипсоида и плоскости орбиты станций. Рассматриваются перелеты с постоянно ориентированным парусом, с парусом, в каждой точке траектории ориентированным так, чтобы обеспечить минимальную продолжительность перелета. При этом последняя оценивается для нулевой начальной и, в большинстве случаев, нулевой конечной скорости. Определяется оптимальная с точки зрения продолжительности перелета длина троса. Устанавливается, что для станций, расположенных на расстоянии 2...200 км друг от друга, минимально возможное время перелета КА с характеристиками паруса, как в уже реализованных миссиях, может составлять несколько часов, что вполне приемлемо с учетом отсутствия топливных затрат. Также приводятся некоторые рекомендации для практической реализации рассматриваемых перелетов.

ПОСТАНОВКА МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Будем изучать движение космического аппарата A массой m , оснащенного идеально отражающим плоским солнечным парусом площадью S , способного передвигаться вдоль троса длиной $2a$ с концами, закрепленными в точках F_1 и F_2 , находящихся на расстоянии $2c$ друг от друга и принадлежащих соответственно двум тяжелым гелиоцентрическим станциям, описывающим одну и ту же орбиту. Будем предполагать, что влияние аппарата на движение станций незначительно, т.е. точки F_1 и F_2 неподвижны в орбитальной системе отсчета. В этом

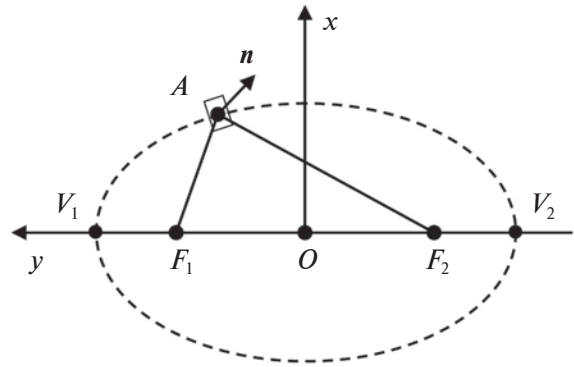


Рис. 1. Космическая система с солнечным парусом.

случае движение аппарата A будет ограничено эллипсоидом вращения с фокусами F_1 и F_2 , большой полуосью a и эксцентриситетом $e = c/a$ (рис. 1).

Будем считать, что прямая F_1F_2 всегда перпендикулярна солнечным лучам. Для описания движения аппарата A относительно станций будем использовать правую декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$, где O — середина отрезка F_1F_2 , Ox направлена от Солнца, т.е. по направлению солнечных лучей, Oy направлена по прямой F_1F_2 так, что точка F_1 имеет положительную координату по этой оси. Без ограничения общности можно считать, что Oz направлена в сторону движения космических станций. Тогда координаты x, y, z аппарата A в течение всего времени движения должны подчиняться неравенству

$$\tilde{f}(x, y, z) = \frac{x^2}{b^2} + y^2 + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad (1)$$

задающему идеальную одностороннюю леерную [16, 17] связь. Следуя исследованиям [14, 15], будем предполагать, что станции находятся на расстоянии порядка 1 а.е. от Солнца, расстояние между ними не превышает нескольких километров и отношение S/m имеет тот же порядок, что и у аппаратов уже реализованных миссий. В этом случае отношение максимально возможной величины силы солнечной радиации, действующей на парус, к абсолютной величине разности силы тяготения Солнца и переносной силы инерции, действующих на аппарат A , соответствует величине порядка $10^5 - 10^6$, так как расстояние от КА до орбиты станций не превышает 10^{-6} ее полуоси. Поэтому в рамках модельной задачи в уравнениях движения могут быть учтены только сила солнечной радиации F_S и кориолисова сила F_c . Величина F_c при относительной скорости порядка нескольких метров в секунду будет превосходить разность отброшенной силы притяжения и центробежной силы на 3...4 порядка и может быть лишь немного меньше F_S . Например, при $m = 1000 \text{ кг}$, $S = 1000 \text{ м}^2$ и относительной скорости аппарата в 1 м/с, кориолисова сила оценивается в $4 \cdot 10^{-4} \text{ Н}$, а $F_S \cong 9 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$

. Поэтому кориолисова сила должна быть учтена в уравнениях движения. Однако в рассматриваемой ситуации сила Кориолиса лежит в плоскости орбиты станций и перпендикулярна скорости аппарата с солнечным парусом. Эта сила не может вывести аппарат из данной плоскости и, в то же время, не может изменить скорость, так как траектория движения определена геометрическим ограничением, т.е. тросом. Тем не менее, при очень малых относительной скорости ускорение, создаваемое кориолисовой силой, может превышать центростремительное ускорение. Поэтому, чтобы компенсировать влияние F_c и обеспечить ненулевое натяжение троса, в начале и в конце движения в течение нескольких секунд необходимо располагать нормаль к солнечному парусу под углом $\sim 135^\circ$ к внутренней нормали к траектории.

Используя стандартную модель идеального солнечного паруса [6], примем $F_S = PSn_x^2n$, где P — характерная величина солнечного давления ($P \approx 9 \cdot 10^{-6}$ Н/м² на расстоянии 1 а.е. от Солнца); $n(n_x, n_y, n_z)$ — орт направления нормали к плоскости паруса; n_x, n_y, n_z — направляющие косинусы этой нормали в $Oxyz$, $n_x \geq 0$ по смыслу задачи. В то же время $F_c = -2m[\omega, \dot{r}]$, где ω — угловая скорость орбитальной системы отсчета $Oxyz$, $r = OA$ — радиус-вектор точки A . Тогда уравнения движения аппарата A в орбитальной системе отсчета могут быть записаны в форме уравнений с множителем Лагранжа $\tilde{\lambda}$ как

$$\ddot{r} = P \frac{S}{m} n_x^2 n - 2[\omega, \dot{r}] + \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}. \quad (2)$$

Здесь $\tilde{\lambda} = 0$, если аппарат A находится внутри эллипсоида, и $\tilde{\lambda} \leq 0$, если на его поверхности. Считая большую полуось a эллипсоида (1) единицей безразмерной длины и обозначая штрихом ()' производную по безразмерному времени

$$\tau = \sqrt{\frac{PS}{(am)}} t, \text{ перепишем выражение (2) в виде} \\ r'' = n_x^2 n - 2\varepsilon[e_z, r'] + \lambda \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (3)$$

где $\varepsilon = |\omega| \sqrt{am/(PS)}$; e_z — орт оси Oz ; λ имеет тот же смысл, что и $\tilde{\lambda}$; $f = \frac{(x^2 + z^2)}{(1 - e^2)} + y^2 = 1$. Отметим,

что в описанной выше ситуации ε составляет величину порядка $10^{-4} \dots 10^{-3}$.

Заметим, что если во все время движения $n_z = 0$, т.е. нормаль к солнечному парусу параллельна плоскости орбиты станций, то уравнение (3) допускает интегральное многообразие $z = 0$, т.е. многообразие движений аппарата A в плоскости Oxy . В дальнейшем ограничимся только такими движениями. Более того, будем рассматривать только движения по эллипсу, являющемуся пересечением

эллипсоида (1) с плоскостью Oxy . В этом случае уравнение (3) упрощается:

$$\frac{1}{2}(r', r')' = n_x^2(n, r'), \quad (4)$$

причем обязательное в этом случае условие неположительности множителя Лагранжа λ может быть записано как

$$\frac{x'^2}{1 - e^2} + y'^2 + \frac{n_x^2}{2} \left(n, \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \varepsilon \left([e_z, r'], \frac{\partial f}{\partial r} \right) \geq 0. \quad (5)$$

Отметим, что последнее слагаемое в левой части выражения (5) при скорости аппарата A относительно станций, не превышающей нескольких метров в секунду с учетом уже сделанных предположений, можно считать незначительным. Таким образом, в описываемой ситуации неинерциальность орбитальной системы отсчета слабо влияет на движения по границе эллипсоида (1) в плоскости орбиты станций и в рамках модельной задачи может не учитываться. Заметим также, что в этом случае условие (5) заведомо выполняется, если угол между нормалью к парусу и внешней нормалью к эллипсоиду (1) является острым.

Нетрудно проверить, что если направление нормали n определяется только положением аппарата A , то уравнение (5) допускает интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \int n_x^2(n_x dx + n_y dy) = h = \text{const}. \quad (6)$$

ДВИЖЕНИЕ С НЕИЗМЕННО НАПРАВЛЕННОЙ НОРМАЛЬЮ К ПАРУСУ

Если во все время движения направление нормали n не меняется по отношению к орбитальным осям, то интеграл (6) может быть записан как

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = n_x^2(n_x x + n_y y) + h. \quad (7)$$

Анализируя это равенство, можно показать, что если движение начинается с нулевой скоростью из некоторой точки A_1 на границе эллипсоида (1) в плоскости орбиты станций с неизменно ориентированной по отношению к орбитальным осям и параллельной этой плоскости нормалью к солнечному парусу, то возможны только две ситуации. Аппарат A или покинет границу эллипсоида, или возникнут колебания по дуге эллипса

$$\frac{x^2}{1 - e^2} + y^2 = 1 \quad (8)$$

между A_1 и точкой A_2 такой, что прямая $A_1 A_2$ ортогональна n (рис. 2).

Если в условии (5) пренебречь слагаемым, содержащим ε , то такие колебания (с учетом того, что как в A_1 , так и в A_2 относительная скорость аппарата A равна 0) будут возможны, только если в обеих точках угол между внешней нормалью

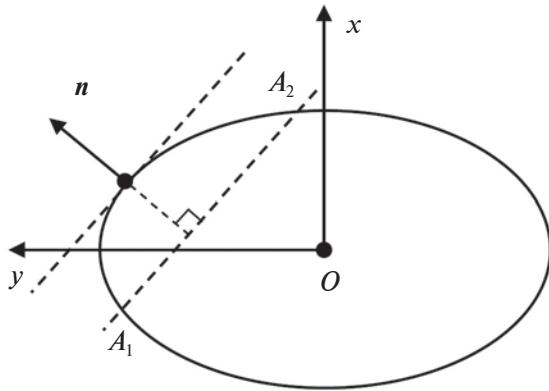


Рис. 2. Постоянно ориентированная нормаль к парусу при перемещении между двумя точками.

к эллипсоиду (1) и нормалью к парусу n будет не более чем прямым. В то же время, если как в A_1 , так и в A_2 этот угол будет острым и дуга A_1A_2 составляет менее половины эллипса (8), скалярное произведение $(n, \partial f / \partial r)$ будет положительным во всех ее точках. Из этого следует, что условием возможности колебаний по дуге A_1A_2 будут неравенства

$$\left(n, \frac{\partial f}{\partial r}(A_{1,2}) \right) > 0. \quad (9)$$

Найдем все пары точек на эллипсе (8), удовлетворяющие этим неравенствам, если n выбирается ортогональным прямой A_1A_2 так, чтобы n_x был положительным. Для этого поставим в соответствие каждой точке эллипса (8) ее эксцентрическую аномалию ψ по формулам $x = \sqrt{1-e^2}(\sin \psi)$, $y = \cos \psi$. Пусть при этом точке A_1 соответствует аномалия ψ_1 , а точке A_2 — аномалия ψ_2 . Тогда искомое множество пар точек можно изобразить на плоскости переменных ψ_1 и ψ_2 , причем, учитывая, что эти величины определяются с точностью до 2π , достаточно рассмотреть какой-нибудь квадрат со стороной 2π . Для определенности будем считать, что $-\pi/2 \leq \psi_i \leq 3\pi/2$. Заметим, что в паре (A_1, A_2) не имеет значения, какая из точек первая, а какая вторая. Поэтому множество пар, между которыми возможны колебания вдоль дуги эллипса, симметрично относительно прямой $\psi_1 = \psi_2$. По той же причине без ограничения общности можно считать, что $\cos \psi_2 > \cos \psi_1$. Отметим также, что точки A_1 и A_2 не могут иметь одинаковые координаты по

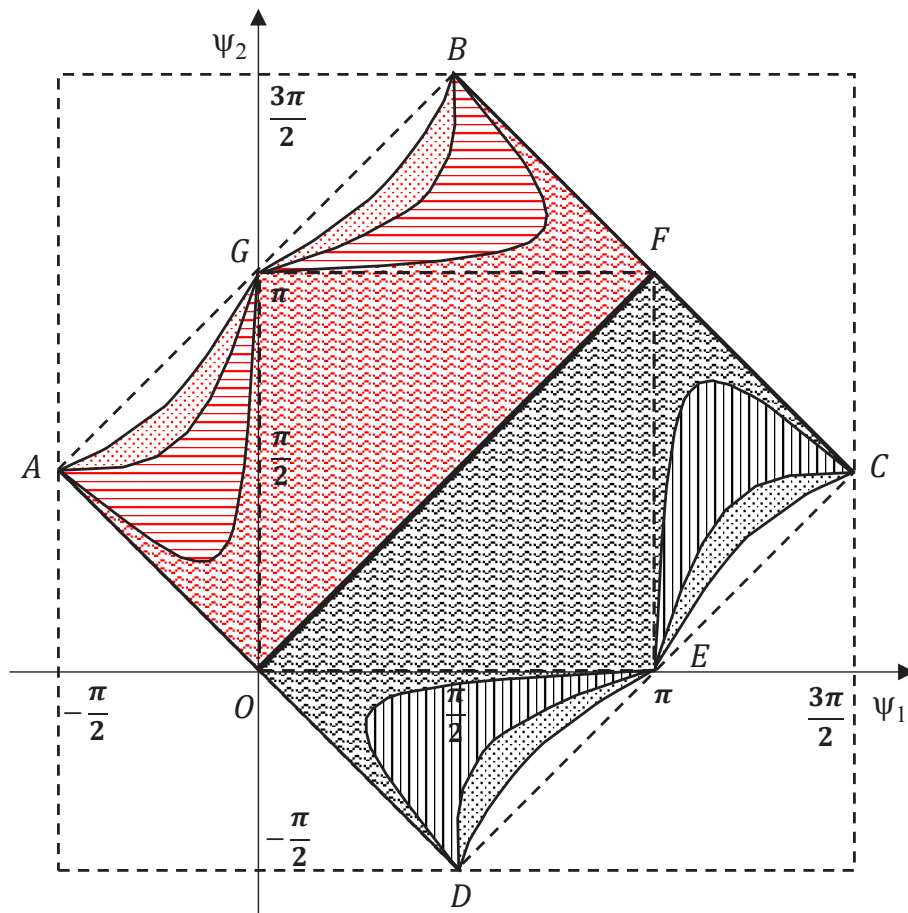


Рис. 3. Множества пар точек при различных эксцентриситетах эллипса e .

оси Oy , так как в этом случае n должна быть ортогональна оси Ox , т.е. должно выполняться равенство $n_x = 0$ и движение не сможет начаться.

С учетом сделанных предположений условие (9) можно переписать как

$$\begin{aligned} e^2 \cos \psi_1 (\sin \psi_2 - \sin \psi_1) + \sin(\psi_1 - \psi_2) &> 0, \\ e^2 \cos \psi_2 (\sin \psi_2 - \sin \psi_1) + \sin(\psi_1 - \psi_2) &> 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Анализируя эти условия и учитывая вышесказанное, можно установить, что искомая область при изменении e от 0 до 1 эволюционирует из квадрата $ABCD$ в квадрат $OGFE$, но так, что точки A, B, C, D, G, F, E, O все время остаются на границе области (рис. 3). На этом рисунке границы области показаны для $e = 0$, $0 < e < 1/\sqrt{2}$, $e = 1/\sqrt{2}$ (когда криволинейные участки границы имеют вертикальные и горизонтальные касательные в своих крайних точках) и для $1/\sqrt{2} < e < 1$. Отметим, что во всех случаях кривые AG и GB , а также кривые EC и DE симметричны относительно прямой $\psi_2 + \psi_1 = \pi$, в то время как кривые AG и DE , и также кривые GB и EC симметричны относительно прямой $\psi_1 = \psi_2$, т.е. кривые AG, GB, EC, DE конгруэнтны.

ДВИЖЕНИЕ С ПАРУСОМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ СОЛНЕЧНЫМ ЛУЧАМ

Рассмотрим более подробно пару $\psi_2 = 0$, $\psi_1 = \pi$ (точки V_1 и V_2 на рис. 1 соответственно). В этом случае движение происходит между наиболее удаленными вершинами эллипса (8), т.е. вершинами, соответствующими большой полуоси, причем во все время движения нормаль к парусу должна быть сонаправлена с осью Ox , плоскость паруса ортогональна солнечным лучам. Очевидно, колебания между этими вершинами будут происходить по дуге, соответствующей положительным значениям координаты x . В этой ситуации $n_x = 1$, $n_y = 0$, условия (5) выполняются во все время движения, и интеграл (7), с учетом того, что относительная скорость аппарата в каждой из вершин V_1 и V_2 равна нулю, может быть переписан в виде

$$\frac{1}{2}(1 - e^2 \cos^2 \psi) \psi'^2 = \sqrt{1 - e^2} \sin \psi, \quad (11)$$

т.е. закон движения точки A может быть найден очевидной квадратурой. В частности, продолжительность T перемещения между вершинами V_1 и V_2 , как следует из уравнения (11), определяется интегралом

$$T(e) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1 - e^2}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \psi}{\sin \psi}} d\psi. \quad (12)$$

Отметим, что при $e \rightarrow 0$ функция $T(e) \rightarrow 2K(\sqrt{2}/2) \approx 3.708$, где $K(k)$ — полный

эллиптический интеграл первого рода с модулем k . В то же время, если $e \rightarrow 1$, то, как и следовало ожидать, $T(e) \rightarrow \infty$. Дифференцируя выражение (12) по e , можно установить, что время перемещения между вершинами эллипса (8) будет минимальным при $e = e_{\min} = 0.7906$, причем $T_{\min} = T(e_{\min}) = 3.557$.

ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ САМОГО БЫСТРОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МЕЖДУ ВЕРШИНАМИ V_1 И V_2 ЭЛЛИПСА С НУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

Вычислим теперь минимально возможное время перемещения из вершины $\psi = 0$ в вершину $\psi = \pi$, предполагая, что движение начинается с нулевой скоростью, а нормаль n к парусу, оставаясь параллельной плоскости Oxy , может быть в любой момент времени повернута под любым не тупым углом к направлению солнечных лучей. Будем определять направление этой нормали углом α между Ox и n , отсчитывая его против часовой стрелки. Очевидно, $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$. Для того чтобы время перелета было минимальным, необходимо в каждой точке траектории выбирать угол α так, чтобы проекция силы солнечного давления на касательную τ к эллипсу (8), направленную в сторону движения, принимала максимально возможное значение (рис. 4).

Учитывая, что $n_x = \cos \alpha$, $n_y = \sin \alpha$, эта проекция в безразмерных переменных может быть представлена как

$$\begin{aligned} F_\tau &= n_x^2(n, \tau) = \\ &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos \psi \cos^3 \alpha - \sin \psi \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}}. \end{aligned} \quad (13)$$

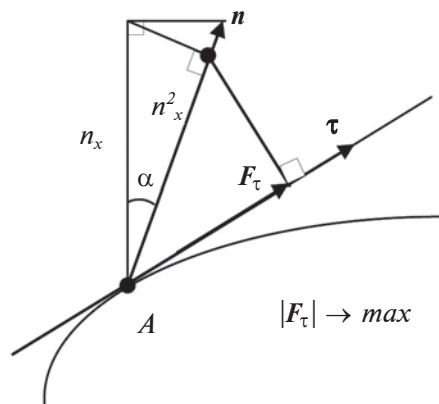


Рис. 4. Поиск максимально возможной проекции силы солнечного давления на касательную к траектории движения.

Анализируя правую часть уравнения (13) как функцию α , нетрудно убедиться, что F_τ достигает максимума при $\psi = 0$, если $\alpha = 0$, при $0 < \psi < \pi$, если

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= G(\psi) = \\ &= \frac{3\sqrt{1-e^2} \cos \psi - \sqrt{9(1-e^2)\cos^2 \psi + 8\sin^2 \psi}}{4\sin \psi}, \end{aligned} \quad (14)$$

и при $\psi = \pi$, если $\alpha = -\pi/2$.

Заметим, что максимальное значение F_τ будет положительным как при движении “от Солнца” ($0 \leq \psi \leq \pi/2$), так и при движении “к Солнцу” ($\pi/2 \leq \psi < \pi$), т.е. трос в данном случае выполняет ту же функцию, что и киль морского парусного судна (см. также [14, 15]). Кроме того, если угол α выбирается по формуле (14), в каждой точке траектории движения угол между нормалью к парусу и внешней нормалью к эллипсоиду (1) оказывается острым, т.е. условие (5) гарантировано выполняется (если, конечно, считать слагаемые с ε несущественными). Интеграл энергии (5) в рассматриваемой ситуации запишется как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1-e^2 \cos^2 \psi) \psi'^2 &= F(\psi) = \\ &= \int_0^\psi \frac{\sqrt{1-e^2} \cos \varphi - G(\varphi) \sin \varphi}{(1+G^2(\varphi))^{3/2}} d\varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Откуда закон движения можно получить очевидной квадратурой. В частности, минимальное время перелета между вершинами эллипса (8) оказывается равным

$$T_1(e) = \int_0^\pi \sqrt{\frac{1-e^2 \cos^2 \psi}{2F(\psi)}} d\psi. \quad (16)$$

Этот интеграл является несобственным. Для устранения особенности можно разбить отрезок интегрирования на промежутки $[0, \psi^*]$, $[\psi^*, \pi]$ и на первом из них сделать замену $b = \sqrt{\sin(\sin \psi)}$. В результате первую часть интеграла (16) можно записать как

$$\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{\sin(\psi^*)}} \frac{\sqrt{1-e^2(1-b^4)}/\sqrt{1-b^4}}{\sqrt{\int_0^{\arcsin b^2} f(\psi) d\psi} / b^2} db, \quad (17)$$

где через $f(\psi)$ обозначено подынтегральное выражение в выражении (15). Нетрудно убедиться, что подынтегральная функция в уравнении (17) ограничена, т.е. интеграл (16) может быть найден численно.

Графики зависимостей T_1 от эксцентриситета e и от отношения полуосей $b/a = \sqrt{1-e^2}$ приведены на рис. 5. Минимальное значение T_1 достигается при $e = 0.9085$ ($b/a = 0.4189$), причем $T_{1\min} = 2.5691$.

ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ САМОГО БЫСТРОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МЕЖДУ ВЕРШИНАМИ V_1 И V_2 ЭЛЛИПСА С НУЛЕВЫМИ НАЧАЛЬНОЙ И КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЯМИ

Вычислим также минимально возможное время перемещения из вершины $\psi = 0$ в вершину $\psi = \pi$, потребовав, чтобы движение не только начиналось, но и заканчивалось с нулевой скоростью. В этом случае, как и раньше, в каждой точке траектории касательное ускорение должно быть максимально

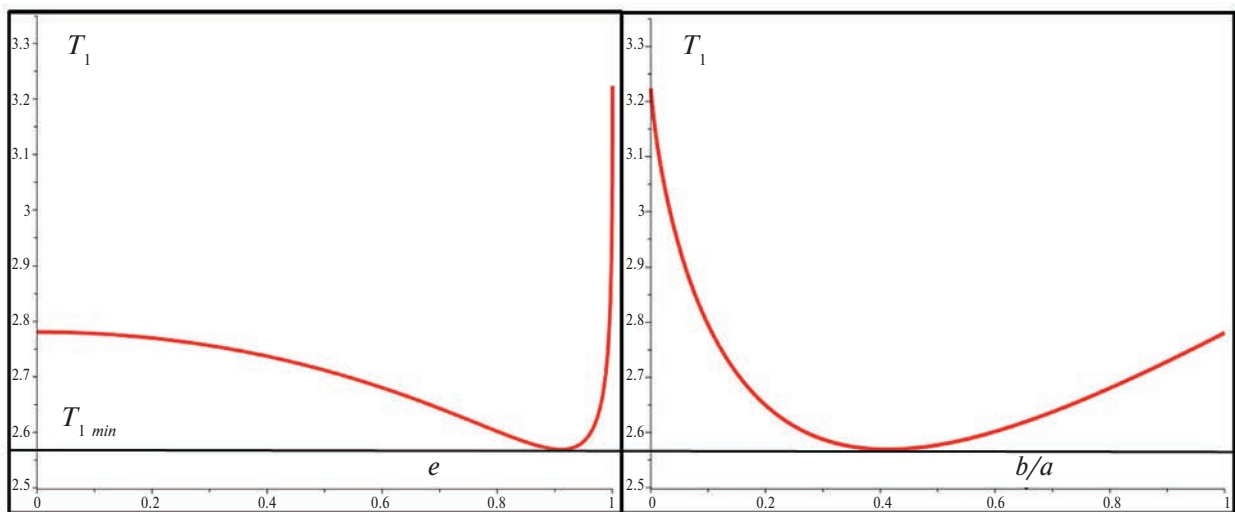


Рис. 5. Зависимость времени перелета от параметров эллипса при нулевой начальной скорости.

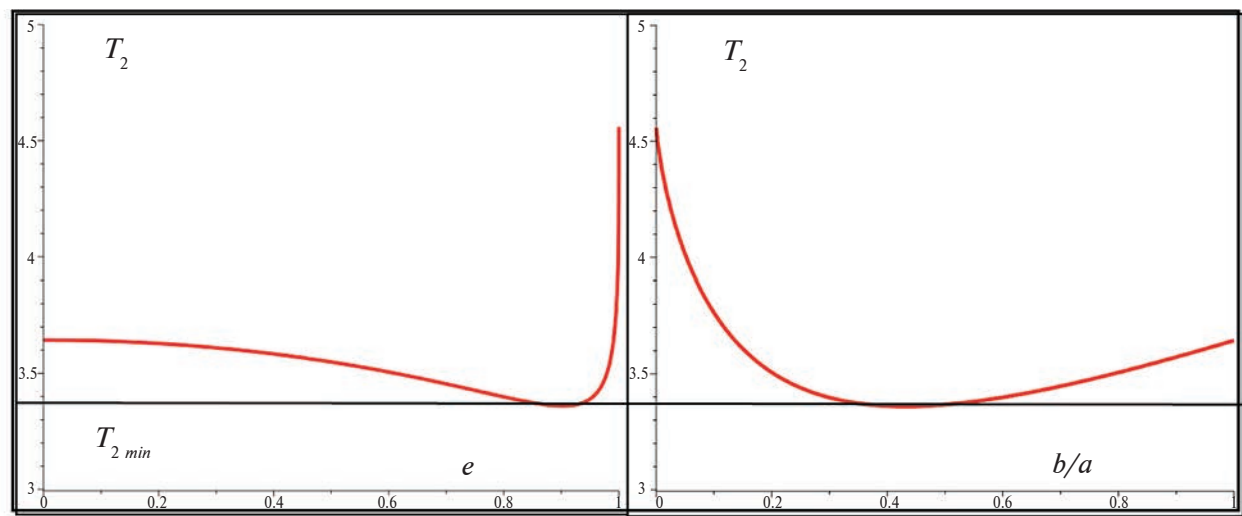


Рис. 6. Зависимость времени перелета от параметров эллипса при нулевой начальной и конечной скоростях.

возможным. Но в силу симметрии траектории относительно оси Ox при $\psi \in [0, \pi/2)$ оно должно быть направлено в сторону движения, а на промежутке $\psi \in (\pi/2, \pi)$ — против движения. Иными словами, на первой половине пути надо максимально ускоряться, а на второй — максимально замедляться. В силу той же симметрии, продолжительность перелета в этом случае определяется равенством

$$T_1(e) = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \psi}{2F(\psi)}} d\psi,$$

(18)

где, как и раньше, $F(\psi)$ определяется интегралом (15).

Графики зависимостей T_2 от эксцентриситета e и от отношения полуосей $b/a = \sqrt{1 - e^2}$ приведены на рис. 6. Минимальное значение T_2 достигается при $e = 0.9117$ ($b/a = 0.4324$), причем $T_{2min} = 3.3597$.

Таблица. Продолжительность перелета между вершинами эллипса (на расстоянии 1 а.е. от Солнца)

Аппараты	Площадь паруса S , m^2	Масса аппарата m , кг	Отношение площади к массе S/m , m^2/kg	Расстояние (= длине троса) $2a$, км	Минимальное время перелета с парусом, ортогональным солнечным лучам (сут+ч+мин)	Минимальное время перелета с нулевой начальной и конечной скоростями (сут+ч+мин)	Минимальное время перелета с нулевой начальной скоростью t^* (сут+ч+мин)	Максимальная средняя скорость (по "горизонтали") $v = 2a/t^*$, м/с
Безразмерные значения	1	1	1	2	3.557267412	3.3597	2.5691	0.7785
IKAROS (2010)	196	310	0.6323	2	0 + 13 + 6	0 + 12 + 22	0 + 9 + 28	0.06
				200	5 + 10 + 60	5 + 3 + 43	3 + 22 + 36	0.59
NanoSail (2010)	10	4	2.5	2	0 + 6 + 35	0 + 6 + 13	0 + 4 + 45	0.12
				200	2 + 17 + 53	2 + 14 + 13	1 + 23 + 35	1.17
LightSail-2 (2019)	32	5	6.4	2	0 + 4 + 7	0 + 3 + 53	0 + 2 + 58	0.19
				200	1 + 17 + 10	1 + 14 + 53	1 + 5 + 44	1.87
Sunjamer (canceled 2014)	>1200	32	37.5	2	0 + 1 + 42	0 + 1 + 36	0 + 1 + 14	0.45
				200	0 + 17 + 1	0 + 16 + 4	0 + 12 + 17	4.52
"Тягач"	1000	1000	1	2	0 + 10 + 25	0 + 9 + 50	0 + 7 + 31	0.07
				200	4 + 8 + 9	4 + 2 + 22	3 + 3 + 13	0.74
"Клипер"	10000	200	50	2	0 + 1 + 28	0 + 1 + 23	0 + 1 + 4	0.52
				200	0 + 14 + 44	0 + 13 + 55	0 + 10 + 38	5.22

ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ПЕРЕЛЕТОВ В ТРАДИЦИОННЫХ ЕДИНИЦАХ ВРЕМЕНИ

Минимально возможные величины продолжительности перелетов между вершинами эллипса (8), соответствующими большой полуоси, определяемые равенствами (12), (16), (18), выражены в единицах безразмерного времени, зависящего от необходимой длины троса и “парусности” S/m . В таблице эти же значения приведены в традиционных единицах времени для аппаратов *IKAROS* [2], *NanoSail* [4], *LightSail* [3], нереализованной миссии *Sunjammer* [18], а также для гипотетических аппаратов “Буксир” с парусностью $1 \text{ м}^2/\text{кг}$ и “Клипер” с парусностью $50 \text{ м}^2/\text{кг}$.

Как видно из таблицы, если станции расположены достаточно близко (2 км), продолжительность перемещения составляет не более нескольких часов, что может быть признано приемлемым, с учетом отсутствия топливных затрат. Если же станции расположены на несколько большем расстоянии друг от друга (200 км), то перемещение занимает время от нескольких часов до нескольких суток. Насколько это приемлемо, зависит от характера выполняемой миссии. Отметим также, средняя скорость перемещения оказывается тем больше, чем больше расстояние между станциями.

Для полноты описания движения приведем пример оценки необходимой прочности троса. Для этого заметим, что почти во всех рассматриваемых ситуациях относительная скорость КА максимальна в вершине эллипса, соответствующей меньшей полуоси. Заметим также, что при скорости порядка нескольких метров в секунду сила натяжения троса в основном определяется центростремительным ускорением КА, так как величины F_S и F_c оказываются на три-четыре порядка меньше, чем величина mv^2/ρ , где v — максимальная относительная скорость КА, а ρ — радиус кривизны траектории. Тогда силу натяжения троса можно оценить как $T \cong mv^2/(2\rho \cos(\alpha/2))$, где α — угол между ветвями троса (т.е. между направлениями от КА на фокусы эллипса). Пусть, например, $m = 1000 \text{ кг}$, $a = 100 \text{ км}$, $v = 10 \text{ м/с}$ (последнее заведомо больше любой из ситуаций из таблицы). Тогда в упомянутой вершине эллипса $T \cong 1 \text{ Н}$. Таким образом, даже трос, выдерживающий усилие в 10 Н, заведомо имеет многократный запас прочности для реализации описанных выше перелетов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе установлена принципиальная возможность перемещения грузов вдоль троса, соединяющего две гелиоцентрические станции посредством солнечного паруса за приемлемое время в случае, когда длина троса превышает расстояние между точками его закрепления. Следует, однако,

заметить, что реальная продолжительность такого перемещения окажется несколько больше, чем вычисленная выше, так как на движение влияют, в частности, такие факторы, как неидеальность материала паруса, упругие и прочностные свойства троса и другое. Но благодаря малости относительной скорости, прочность троса может быть сравнительно малой. Отметим также, что предлагаемая схема организации движения, т.е. движения между настолько отдаленными точками, насколько позволяет трос, может и не быть оптимальной хотя бы потому, что при достаточно большом расстоянии между станциями линейные размеры станций могут не позволить реализовать оптимальное отношение длины троса к расстоянию между его точками закрепления. Возможно, более быстрые перелеты сможет обеспечить другая организация движения, предусматривающая начало и конец движения непосредственно в точках закрепления троса и специальные алгоритмы развертывания троса, обеспечивающие большую, чем в рассмотренных ситуациях, среднюю скорость перемещения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цандер Ф. А. Об использовании силы давления света для полетов в межпланетном пространстве // Цандер Ф. А. Проблема полета при помощи реактивных аппаратов: Межпланетные полеты: сб. статей / под ред. Л. К. Корнеева. 2-е доп. изд. М.: Оборонгиз, 1961. С. 361–381.
2. JAXA. IKAROS Small Scale Solar Powered Sail Demonstration Satellite. 2010. Дата обращения: 02.07.2023.
<http://www.isas.jaxa.jp/en/missions/spacecraft/current/ikaros.html>
3. The Planetary Society. LightSail 2 completes mission with atmospheric reentry. 2022. Дата обращения: 02.07.2023.
<https://www.planetary.org/articles/lightsail-2-completes-mission-2022>
4. NASA. Small Satellite Missions. 2011. Дата обращения: 02.07.2023.
https://www.nasa.gov/mission_pages/smallsats/nanosaild.html

5. Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. 3-е изд. испр. и доп. М.: Наука, 2009. 432 с.
6. Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом / под ред. Егорова В. А. М.: Наука, 1986. 304 с.
7. Macdonald M. *Advances in Solar Sailing*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2014. 980 p.
8. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимального вывода на орбиту космического аппарата с использованием реактивного ускорения и солнечного паруса в переменных Кустаанхеймо — Штифеля // Косм. исслед. 2021. Т. 59. № 4. С. 327–338. DOI: 10.31857/S0023420621040051. (= Sapunkov Y. G., Chelnokov Y. N. Solution of the Problem of Optimal Spacecraft Launching into Orbit Using Reactive Acceleration and Solar Sail in Kustaanheimo–Stiefel Variables // Cosmic Research. 2021. V. 59. No. 4. P. 280–290.)
9. Шмыров В. А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестностях коллинеарной точки либрации L1 // Вестн. СПбГУ. 2005. Сер. 10. Вып. 2. С. 192–198.
10. Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А. Управляемое движение солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации // Астрон. журн. 2020. Т. 4. № 3. С. 193–200. DOI: 10.31857/S0320010820030055.
11. Farrés A., Jorba À. Periodic and quasi-periodic motions of a solar sail close to SL1 in the Earth–Sun system // Celestial Mechanics. 2010. V. 107. P. 233–253.
12. Tian-Ze Chen, Xiang Liu, Guo-Ping Cai, Chao-Lan You. Attitude and vibration control of a solar sail // *Advances in Space Research*. 2023. V. 71. Iss. 11. P. 4557–4567. DOI: 10.1016/j.asr.2023.01.039.
13. Хабибуллин Р. М., Старина О. Л. Алгоритм применения законов управления движением космического аппарата с солнечным парусом для совершения некомпланарного перелета Земля – Марс // Инженер. журн.: наука и инновации. 2020. Т. 104. № 8. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-8-2006.
14. Rodnikov A. V. Coastal navigation by a solar sail // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2020. V. 868. Art. ID. 012021. DOI: 10.1088/1757-899X/868/1/012021.
15. Rodnikov A. V. On Relative motion via a solar sail // *AIP Conf. Proc. XLIV Academic Space Conference: Dedicated to the Memory of Academician S. P. Korolev and Other Outstanding Russian Scientists — Pioneers of Space Exploration* 2021. V. 2318(1). Art. ID. 110020. DOI: 10.1063/5.0035755.
16. Родников А. В. О существовании безударных движений по леерной связи, закрепленной на протяженном космическом аппарате // Косм. исслед. 2006. Т. 44. № 6. С. 553–560. (= Rodnikov A. V. Existence of Nonimpact Motions Along a Wire Rope Fixed to an Extended Spacecraft // *Cosmic Research*. 2006. V. 44. Iss. 6. P. 532–539.)
17. Родников А. В., Красильников П. С. О пространственных движениях орбитальной леерной связки // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 4. С. 505–518. DOI: 10.20537/nd1704004.
18. NASA. Solar Sail Demonstrator ('Sunjammer'). 2017. Дата обращения: 02.07.2023. https://www.nasa.gov/mission_pages/tdm/solarsail/index.html

УДК 531.011:521.1

О ДВИЖЕНИЯХ ГАНТЕЛИ В ОБОБЩЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА

© 2024 г. П. С. Красильников*, А. Е. Байков

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия***krasil06@rambler.ru*

Поступила в редакцию 28.07.2023

Переработанный вариант 17.09.2023

Принята к публикации 02.10.2023

Рассматриваются поступательно-вращательные движения симметричной гантели в круговой ограниченной задаче трех тел, когда основные притягивающие тела имеют одинаковые массы и вращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Найден новый тип движения гантели, когда ее центр масс перемещается вдоль нормали к плоскости орбиты основных тел, а сама гантель непрерывно вращается вокруг нормали, образуя с ней постоянный прямой угол (инвариантное многообразие “гравитационный пропеллер”). Показано, что указанное многообразие включает в себя несколько двумерных инвариантных подмногообразий. Описана динамика гантели на этих подмногообразиях. Найденны и исследованы на устойчивость относительные равновесия, принадлежащие “гравитационному пропеллеру”, при которых гантель ориентирована параллельно оси, соединяющей основные тела, либо перпендикулярна ей, а ее центр масс покоится в центре масс системы. Исследованы малые пространственные нелинейные колебания гантели на многообразии “гравитационный пропеллер” в окрестности устойчивого относительного равновесия для предельного случая, когда отношение длины гантели к радиусу орбиты основных тел стремится к нулю. Показано, что эти колебания имеют природу нелинейного параметрического резонанса, который задает “медленную” амплитудную модуляцию быстрых” гармонических колебаний по углу вращения гантели.

DOI: 10.31857/S0023420624030092, EDN: JJMLXA

ВВЕДЕНИЕ

В обобщенной ограниченной задаче трех тел исследуется движение пассивно гравитирующего твердого тела малой массы в поле притяжения двух основных тел, поэтому обобщенная задача Ситникова — ее частный случай. В обобщенной круговой задаче Ситникова две одинаковые по массе материальные точки (основные тела) движутся друг относительно друга по круговой орбите, а пассивно гравитирующее тело, находящееся в поле притяжения основных тел, совершает сложное поступательно-вращательное движение, при этом его центр масс перемещается вдоль прямой, нормальной к плоскости вращения основных тел и проходящей через их центр масс. Такие движения существуют в силу симметрии задачи, если, например, тело имеет симметричное распределение массы вокруг оси динамической симметрии, совпадающей с нормалью к плоскости вращения основных тел; при этом тело вращается вокруг нормали. Отметим, что в классической задаче Ситникова вдоль нормали движется не твердое тело, а материальная точка [1–6].

В работе [7] рассматривается движение однородного стержня, когда основные тела одинаковой массы движутся по круговой орбите. Был

обнаружен новый класс движения, соответствующего обобщенной задаче Ситникова: центр масс перемещается вдоль нормали к плоскости орбиты основных тел, а сам стержень непрерывно вращается вокруг этой нормали, образуя с ней постоянный прямой угол. Этот класс движений назван в публикации [7] “гравитационным пропеллером”. В статье [8] описано движение симметричной или асимметричной гантели вдоль нормали к плоскости движения двух основных тел одинаковой массы, когда последние движутся по круговой или эллиптической орбитам. Авторами найдены положения равновесия гантели, исследована их устойчивость.

Остановимся на работах, изучающих движение гантели в более простых гравитационных полях. В статье [9] исследуются плоские движения гантели в центральном поле сил, при этом длина гантели малой не предполагается. Были найдены возможные классы таких движений. В работе [10] исследуется устойчивость стационарных движений и гироскопическая стабилизация гантели в центральном поле сил. В публикации [11] рассматривается асимметричная гантель, концы которой связаны нерастяжимыми тросами с третьим телом. В работе найдены относительные равновесия гантели, указана их устойчивость. В статье [12] показаны

нелинейные колебания несимметричной гантели в окрестности стационарного режима, когда гантель расположена вдоль радиус-вектора ее центра масс, движущегося по эллиптической орбите с малым эксцентриситетом. Задача гравитационной стабилизации гантели с весовым стержнем анализируется в работе [13]; решение было найдено с помощью ограниченных управляющих воздействий.

Отдельный интерес представляют движения гантели в центральном гравитационном поле с изменяемой длиной. Такая пульсирующая гантель может моделировать гравитет — космический аппарат, преобразующий энергию внутренних сил в энергию орбитального движения за счет изменения своей геометрии и моментов инерции [14]. Гантель переменной длины, находящаяся в центральном поле сил, рассматривается также в статье [15]: найдены частные движения гантели определенного вида, существующие при определенном правиле изменения длины гантели.

Цель настоящей статьи — доказать существование инвариантного многообразия “гравитационный пропеллер” для симметричной гантели, когда основные тела имеют одинаковые массы и движутся по круговым орбитам; исследовать некоторые движения, принадлежащие этому инвариантному многообразию.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Гантель (гравитационный диполь) длины 2, представляющая собой соединенные безмассовым стержнем две точечные массы m , находится в гравитационном поле, созданном двумя одинаковыми по массе M основными точечными телами, которые вращаются с угловой скоростью ω_0 вокруг их общего центра масс C по круговой орбите радиуса a . Влиянием гантели на движение основных тел можно пренебречь ($m \ll M$). Для составления уравнений движений рассмотрим следующие системы координат: 1) $C\xi\eta\zeta$ — инерциальная система координат; 2) $Sxyz$ — синодическая система координат, в которой ось Sx соединяет основных тела все время движения, ось Sz перпендикулярна плоскости движения основных тел; 3) $Ox'y'z'$ — связанная с гантелью правая декартова система координат, где O — центр гантели, ось Oz' направлена вдоль гантели; 4) $O\xi'\eta'\zeta'$ — поступательно движущаяся система координат, оси которой ориентированы параллельно осям инерциальной системы $C\xi\eta\zeta$ (рис. 1). Ориентацию осей $Ox'y'z'$ относительно $O\xi'\eta'\zeta'$ зададим с помощью углов Эйлера: ψ , φ , θ (ψ — угол прецессии, φ — угол собственного вращения, θ — угол нутации).

Уравнения движения центра масс гантели имеют вид

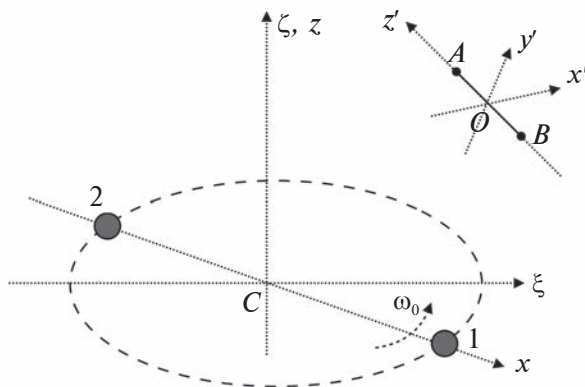


Рис. 1. Гантель в поле основных тел и системы координат.

$$2m\ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad 2m\ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad 2m\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad (1)$$

где ξ , η , ζ — координаты центра масс гантели в инерциальной системе координат; $U = U(\xi, \eta, \zeta, \psi, \varphi, \theta, t)$ — силовая функция, выражение для которой будет приведено ниже. Очевидно, что силовая функция не зависит от угла собственного вращения φ . Уравнения, описывающие вращательные движения гантели, можно записать в виде уравнений Лагранжа второго рода

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $L = T + U$ — функция Лагранжа. Выражение для кинетической энергии системы следует из теоремы Кенига:

$$T = m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + ml^2(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2). \quad (3)$$

Так как T и U не зависят от φ , T не зависит от $\dot{\varphi}$, второе уравнение в системе (2) представляет собой тождество.

Принимая во внимание выражение (3) для кинетической энергии, перепишем (2) в виде

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = -2\dot{\psi}\dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{J \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ \ddot{\theta} = \dot{\psi}^2 \cos \theta \cdot \sin \theta + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta}, \end{cases} \quad (4)$$

где $J = J_{x'x'} = J_{y'y'} = 2ml^2$.

Представим силовую функцию задачи в виде суммы $U = U_1 + U_2$, где U_j — силовая функция притяжения гантели от основного тела с номером j ($j = 1, 2$). Чтобы получить выражение для U_1 ,

рассмотрим одну из точечных масс, например, точечную массу A с координатами $x' = y' = 0, z' = 1$ в связанных осях. В поступательно движущихся осях $O\xi'\eta'\zeta'$ имеем следующие координаты этой точки: $\xi'_A = l\sin\psi \cdot \sin\theta, \eta'_A = -l\cos\psi \cdot \sin\theta, \zeta'_A = l\cos\theta$.

Координаты первого основного тела в инерциальной системе $C\xi\eta\zeta$ есть $(a\cos\omega_0 t, a\sin\omega_0 t, 0)$, где ω_0 — угловая скорость движения основных тел по основной орбите (мы считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ системы $C\xi\eta\zeta$ и $Cx\eta\zeta$ совпадают), а координаты точечной массы A в той же инерциальной системе имеют вид $(\xi_A + \xi'_A, \eta_A + \eta'_A, \zeta_A + \zeta'_A)$. Поэтому расстояние от первого основного тела до точки A находится по формуле

$$r_{1A} = \sqrt{(\xi + l\sin\psi \cdot \sin\theta - a\cos\omega_0 t)^2 + (\eta - l\cos\psi \cdot \sin\theta - a\sin\omega_0 t)^2 + (\zeta + l\cos\theta)^2}.$$

Расстояние r_{2A} от второго основного тела до точечной массы A дается аналогичной формулой с учетом замены a на $(-a)$. Расстояние r_{1B} от первого основного тела до точечной массы B дается формулой

$$r_{1B} = \sqrt{(\xi - l\sin\psi \cdot \sin\theta - a\cos\omega_0 t)^2 + (\eta + l\cos\psi \cdot \sin\theta - a\sin\omega_0 t)^2 + (\zeta - l\cos\theta)^2},$$

поскольку в осях $O\xi'\eta'\zeta'$ координаты точки B имеют вид

$$\xi'_B = -l\sin\psi \cdot \sin\theta, \eta'_B = l\cos\psi \cdot \sin\theta, \theta'_B = -l\cos\theta.$$

Таким образом, выражение для r_{2B} получается из выражения для r_{1B} заменой a на $(-a)$. Имеем $U_j = f \frac{Mm}{r_{jA}} + f \frac{Mm}{r_{jB}}, j = 1, 2$, где f — гравитационная постоянная.

ИНВАРИАНТНОЕ МНОГООБРАЗИЕ “ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПРОПЕЛЛЕР”

Рассмотрим множество решений уравнений движения (1), (4) следующего вида:

$$\mathcal{P} = \left\{ \xi = \eta = 0, \zeta = \zeta(t), \theta = \frac{\pi}{2}, \psi = \omega_0 t + \delta(t) \right\}. \quad (5)$$

Покажем, что система уравнений движения стержня действительно допускает указанные решения. Вычисления показывают, что

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{\mathcal{P}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} \Big|_{\mathcal{P}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\mathcal{P}} = 0.$$

Нетрудно видеть, что уравнения для ξ, η и θ на многообразии $\mathcal{P}$ представляют собой тождества $0 = 0$. Итак, выражение (5) — инвариантное многообразие системы (1), (4). В работе [7], где вместо

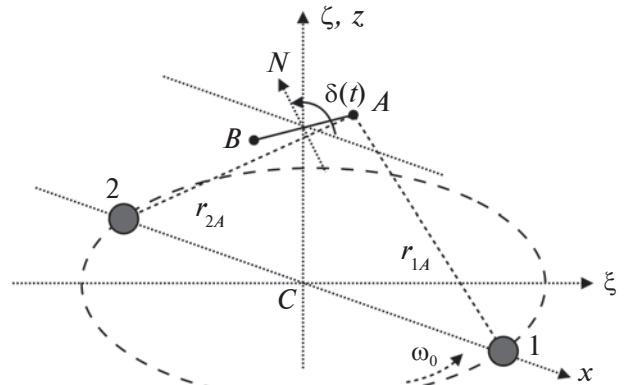


Рис. 2. Конфигурация гантели на “гравитационном пропеллере”.

гантели рассматривался однородный стержень, многообразие $\mathcal{P}$ называется “гравитационным пропеллером”. Движение гантели, принадлежащее этому инвариантному многообразию, определяется тем, что ее центр масс перемещается вдоль нормальной к плоскости основных тел прямой, а сама гантель вращается вокруг нормальной прямой, образуя с ней постоянный угол $\pi/2$ (рис. 2). При этом движение центра масс гантели и ее вращение вокруг оси Cz взаимно влияют друг на друга.

Получим уравнения движения на “гравитационном пропеллере”. Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} \Big|_{\mathcal{P}} = -2\zeta f M m \left(\frac{1}{(\zeta^2 + 2a l \sin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} + \frac{1}{(\zeta^2 - 2a l \sin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} \right).$$

Отсюда уравнение для ζ имеет вид

$$\ddot{\zeta} = -\mu \zeta \left(\frac{1}{(\zeta^2 + 2a l \sin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} + \frac{1}{(\zeta^2 - 2a l \sin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} \right), \quad (6)$$

где $\mu = fM$ — гравитационный параметр. Чтобы получить уравнение для угла δ , найдем производную U_ψ :

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} \Big|_{\mathcal{P}} = -2f M m l a \cos\delta \left(\frac{1}{(\zeta^2 + 2a l \sin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} - \frac{1}{(\zeta^2 - 2a l \sin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} \right).$$

Тогда из первого уравнения системы (4) получаем уравнение для δ :

$$\ddot{\delta} = -\frac{\mu a}{l} \cos \delta \left(\frac{1}{(\zeta^2 + 2alsin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} - \frac{1}{(\zeta^2 - 2alsin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} \right). \quad (7)$$

Уравнения (6), (7) допускают обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби) вида

$$T_2|_P - T_0|_P - U|_P = \text{const}, \quad \text{где } T_2|_P = m\dot{\zeta}^2 + ml^2\dot{\delta}^2, \\ T_0|_P = -ml^2\omega_0^2, \\ U|_P = 2\mu m \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + a^2 + l^2 + 2alsin\delta}} + \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + a^2 + l^2 - 2alsin\delta}} \right).$$

Преобразуем уравнения движения (6), (7) к безразмерному виду, рассмотрев новое безразмерное время τ , зависящее от физического времени t следующим образом: $\tau = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$. Пусть $l = sa$, $\zeta = az$, тогда уравнения (6), (7) принимают вид

$$\begin{cases} z'' = -z \left(\frac{1}{\Delta_1^3} + \frac{1}{\Delta_2^3} \right) \\ \delta'' = -\frac{\cos \delta}{s} \left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{\Delta_2^3} \right), \end{cases} \quad (8)$$

где $\Delta_1 = \sqrt{1 + s^2 + z^2 + 2ssin\delta}$, $\Delta_2 = \sqrt{1 + s^2 + z^2 - 2ssin\delta}$, двойным штрихом обозначена вторая производная по безразмерному времени.

Отметим некоторые свойства системы (8). Она зависит от единственного безразмерного параметра s , представляющего собой отношение длины гантели к диаметру орбиты основных тел. Если параметр $s > 0$, $s \neq 1$, то оба выражения под корнями Δ_1 и Δ_2 положительны при любых z и δ :

$$0 < (1-s)^2 + z^2 \leq 1 + s^2 + z^2 - 2s \leq 1 + s^2 + z^2 \pm 2ssin\delta.$$

В этом случае правые части уравнений (8) представляют собой аналитические функции переменных z и δ , а инвариантное многообразие $\mathcal{P}$ диффеоморфно пространству касательного расслоения конфигурационного цилиндра $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^1$, где $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R} / (2\pi\mathbb{Z})$. Уравнения (8) допускают дискретную группу симметрий, которая порождается преобразованиями $\delta \mapsto \delta + \pi$, $z \mapsto -z$ и $\delta \mapsto -\delta$. Система уравнений (8) имеет интеграл Якоби вида

$$(z')^2 + s^2(\delta')^2 + W = \text{const}, \quad (9)$$

где $W = -2\left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2}\right)$ — измененная потенциальная энергия.

Рассмотрим систему (8) в предположении, что s — малый параметр. Разложим правые части уравнений по степеням s , удержав члены до второго порядка включительно:

$$\begin{cases} z'' = -\frac{2z}{(z^2 + 1)^{3/2}} + \frac{3z(z^2 + 5\cos^2\delta - 4)}{(z^2 + 1)^{7/2}}s^2 + O(s^4), \\ \delta'' = \frac{3\sin 2\delta}{(z^2 + 1)^{5/2}} - \frac{5\sin\delta \cdot \cos\delta(3z^2 + 7\cos^2\delta - 4)}{(z^2 + 1)^{9/2}}s^2 + O(s^4). \end{cases} \quad (10)$$

Уравнения (10) имеют вид регулярно возмущенной системы. В силу четности относительно s правых частей уравнений (8), разложения в правых частях уравнений (9) включают только четные степени s .

В предельном случае, когда $s = 0$, имеем систему уравнений вида

$$\begin{cases} z'' = -\frac{2z}{(z^2 + 1)^{3/2}}, \\ \delta'' = \frac{3\sin 2\delta}{(z^2 + 1)^{5/2}}. \end{cases} \quad (11)$$

Отметим, что модель предельного случая есть гантель бесконечно малой длины и конечной массы, но не материальная точка. Уравнение движения относительно z в системе (11) не зависит от угла δ и представляет собой уравнение движения материальной точки в круговой задаче Ситникова [1]. Уравнение по δ в системе (11) подобно уравнению колебаний математического маятника с переменным коэффициентом, который определяется конкретным решением уравнения по z . Таким образом, в предельной системе (11) поступательные движения гантели влияют на ее вращательные движения, но не наоборот, тогда как в полной системе (10) или (8) поступательные и вращательные движения взаимосвязаны.

ДВУМЕРНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ

“Гравитационный пропеллер” $\mathcal{P}$ допускает следующие инвариантные подмногообразия размерности два:

1. Подмногообразия $A = \{\delta = \pm\pi / 2 \pmod{2\pi}\}$. Гантель параллельна оси Sx все время движения, ее центр масс совершает колебания вдоль оси Cz .

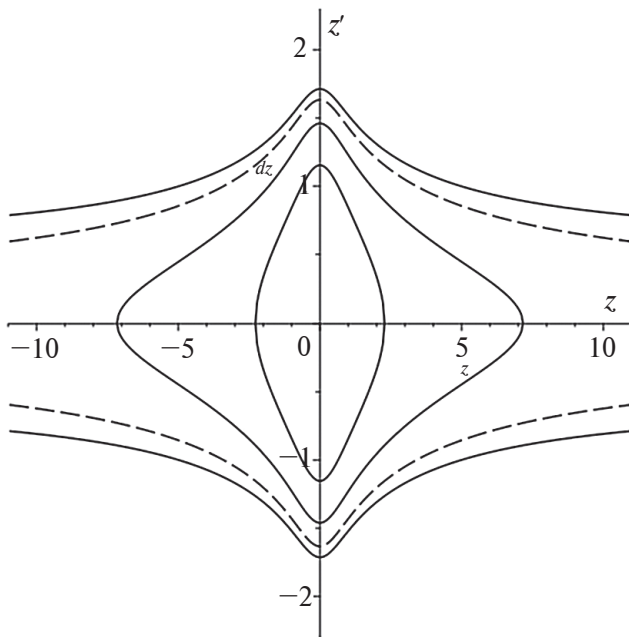


Рис. 3. Фазовый портрет на подмногообразиях $\mathcal{A}$ ($s = 0.1$).

2. Подмногообразия $B = \{\delta = 0, \pi(\bmod 2\pi)\}$. Гантель перпендикулярна оси Cx все время движения, ее центр масс колеблется вдоль оси Cz .

3. Подмногообразие $C = \{z = 0\}$. Гантель совершает неравномерные вращения в плоскости движения основных тел.

Очевидно, подмногообразия A и B не пересекаются, пересечение A с C дает положения равновесия $z = 0$, $\delta = \pm\pi/2(\bmod 2\pi)$, а пересечение B с C — положения равновесия $z = 0$, $\delta = 0, \pi(\bmod 2\pi)$. В силу симметрий $\delta \mapsto \delta + \pi$, $\delta \mapsto -\delta$ достаточно исследовать компоненты связности $\mathcal{A} = \{\delta = \pi/2\}$, $B = \{\delta = 0\}$ и положения относительного равновесия $E_{AC} = \{z = 0, \delta = \pi/2\}$, $E_{BC} = \{z = 0, \delta = 0\}$.

Инвариантное подмногообразие $\mathcal{A} = \{\delta = \pi/2\}$. Уравнение движения на инвариантном подмногообразии $\mathcal{A}$ имеет вид

$$z'' = -z \left[\frac{1}{((1+s)^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{((1-s)^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (12)$$

и допускает интеграл вида

$$\frac{1}{2}(z')^2 + V_A(z) = \text{const},$$

$$V_A(z) = -\frac{1}{\sqrt{(1+s)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1-s)^2 + z^2}}.$$

Фазовый портрет уравнения (12) построен на рис. 3 (для $s = 0.1$). Анализ показывает, что его топология не зависит от параметра $s > 0$, $s \neq 1$. Действительно, функция V_A имеет единственную

критическую точку, $V_A''(0) = |1-s|^{-3} + (1+s)^{-3} > 0$, поэтому особая точка $z = 0$, $z' = 0$ есть центр. Кроме того, функция $V_A \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$, следовательно, $z' = \pm\sqrt{-2V_A(z)}$ — сепаратрисы (отмечены на рис. 3 пунктиром), отделяющие внутреннюю область с периодическими (колебательными) режимами движения от областей с аperiodическими режимами.

Инвариантное подмногообразие $B = \{\delta = 0\}$. Уравнение движения на инвариантном подмногообразии B имеет вид

$$z'' = -\frac{2z}{(z^2 + 1 + s^2)^{3/2}}. \quad (13)$$

Уравнение (12) имеет интеграл вида

$$\frac{1}{2}(z')^2 + V_B(z) = \text{const}, V_B(z) = -\frac{2}{\sqrt{z^2 + 1 + s^2}}.$$

Фазовый портрет уравнения (13) имеет аналогичный фазовому портрету уравнения (12) вид. Кроме того, анализ показывает, что функция $V_B - V_A$ достигает глобального максимума в точке $z = 0$ (при любом $s > 0$, $s \neq 1$) и достаточно быстро стремится к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$. Итак, динамика на инвариантных подмногообразиях $\mathcal{A}$ и B качественно совпадает с динамикой точки в классической круговой задаче Ситникова.

Инвариантное подмногообразие $C = \{z = 0\}$. Уравнение движения на подмногообразии C имеет вид

$$\delta'' = -\frac{\cos\delta}{s} \left[\frac{1}{(1+s^2+2s\sin\delta)^{3/2}} - \frac{1}{(1+s^2-2s\sin\delta)^{3/2}} \right]; \quad (14)$$

оно допускает интеграл

$$\frac{1}{2}(\delta')^2 + V_C(\delta) = \text{const}, V_C(\delta) =$$

$$= \frac{1}{s^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2+2s\sin\delta}} + \frac{1}{\sqrt{1+s^2-2s\sin\delta}} \right).$$

Фазовый портрет уравнения (14) указан на рис. 4 при $s = 0.1$, он сохраняет топологию при любом $s > 0$, $s \neq 1$. В самом деле, критические точки функции V_C есть

$$\delta = \pm\pi/2, \delta = 0, \delta = \pi(\bmod 2\pi);$$

$$V_C''(-\pi) = V_C''(0) =$$

$$= -\frac{6}{(s^2+1)^{5/2}} < 0, V_C''\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{|1-s|^3} - \frac{1}{(1+s)^3} \right) > 0,$$

поэтому особые точки $\delta = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, имеют тип “центр”, а особые точки $\delta = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ — тип “седло”. При особом значении $s = 1$ правая часть уравнения (14) не определена в особых точках

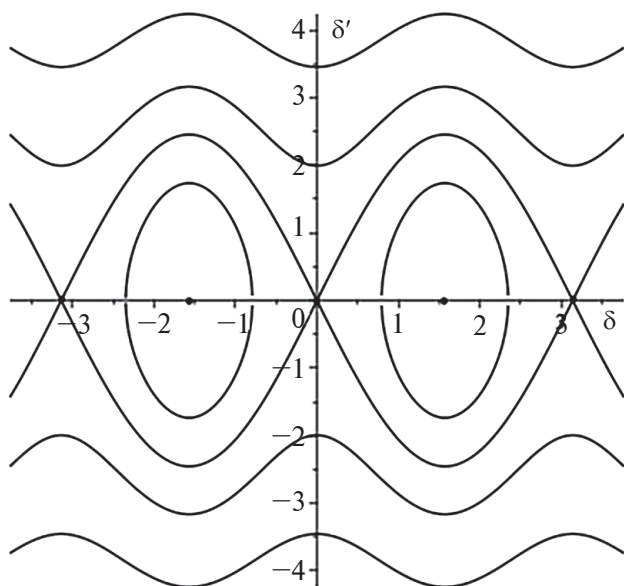


Рис. 4. Фазовый портрет на подмногообразии $\mathcal{C}$.

$\delta = \pm\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, но топология фазового портрета все равно сохраняется. Кроме того, уравнения (14) выдерживают симметрии $\delta \mapsto \delta + \pi$, $\delta \mapsto -\delta$, следующие из симметрий уравнений движения (8) на инвариантном многообразии $\mathcal{P}$.

Относительное равновесие $E_{BC} = \{z = 0, \delta = 0\}$ неустойчиво на инвариантном подмногообразии $\mathcal{C}$. Оно неустойчиво на всем гравитационном пропеллере, что следует из уравнений малых колебаний в окрестности этого равновесия:

$$z'' + \frac{2z}{(s^2 + 1)^{3/2}} = 0, \quad \delta'' - \frac{6\delta}{(s^2 + 1)^{5/2}} = 0.$$

Имеем неустойчивость по δ .

Относительное равновесие $E_{AC} = \{z = 0, \delta = \pi/2\}$ устойчиво и на подмногообразии $\mathcal{A}$, и на подмногообразии $\mathcal{C}$. Исследуем устойчивость в линейном приближении относительного равновесия E_{AC} на инвариантном многообразии $\mathcal{P}$. Пусть $\delta = \pi/2 + \gamma$, тогда уравнения линейного приближения для системы (8) в окрестности положения равновесия $z = 0, \delta = \pi/2$ имеют вид

$$\begin{cases} z'' = -\left(\frac{1}{|1-s|^3} + \frac{1}{(1+s)^3}\right)z, \\ \gamma'' = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{(1+s)^3} - \frac{1}{|1-s|^3}\right)\gamma. \end{cases} \quad (15)$$

Очевидно, что при всех $s > 0, s \neq 1$, тривиальное положение равновесия системы (15) устойчиво, следовательно, относительное равновесие E_{AC} устойчиво на “гравитационном пропеллере” в линейном приближении.

Исследуем устойчивость относительного равновесия E_{AC} по Ляпунову. Установим характер стационарной точки $z = 0, \delta = \pi/2, z' = 0, \delta' = 0$ для измененной потенциальной энергии W системы. Матрица второго дифференциала (матрица Гесса) этой функции в точке $E_{AC} = \{z = 0, \delta = \pi/2\}$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{|1-s|^3} + \frac{2}{(1+s)^3} & 0 \\ 0 & 2s\left(\frac{1}{|1-s|^3} - \frac{1}{(1+s)^3}\right) \end{bmatrix} \quad (16)$$

При всех $s > 0, s \neq 1$, диагональные элементы матрицы (16) положительны, поэтому в точке относительного равновесия $z = 0, \delta = \pi/2, z' = 0, \delta' = 0$ функция W имеет строгий локальный минимум. Поэтому положение относительного равновесия E_{AC} устойчиво для любых $s > 0, s \neq 1$.

Заметим, что при $s \rightarrow 0$, вырождаются квадратичная относительно скоростей часть $(z')^2 + s^2(\delta')^2$ интеграла Якоби (9) и матрица Гесса измененной потенциальной энергии W .

ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ $s = 0$

Рассмотрим предельный случай движения гантели, когда $s = 0$. Из формул (10) следует, что движения гантели бесконечно малой длины описываются уравнениями

$$\begin{cases} \frac{d^2 z}{d\tau^2} = -2z + 3z^3 + O(z^5), \\ \frac{d^2 \delta}{d\tau^2} = \frac{3\sin 2\delta}{(z^2 + 1)^{5/2}}, \\ \tau = \omega_0 t. \end{cases} \quad (17)$$

Первое уравнение, если удерживать в нем члены порядка z^3 , несложно интегрируется в малой окрестности устойчивого равновесия $z = 0$ методом Линдштедта:

$$\begin{aligned} z(\bar{\tau}) &= \varepsilon \cos(\omega \bar{\tau}) + \\ &+ \frac{3}{64} \varepsilon^3 (\cos(\omega \bar{\tau}) - \cos(3\omega \bar{\tau})) + O(\varepsilon^5) \\ \bar{\tau} &= \sqrt{2} \omega_0 t, \quad \omega = 1 - \frac{9}{16} \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, являющийся характерным размером для малой окрестности точки $z = 0$.

Исследуем второе уравнение системы (17) в окрестности устойчивого равновесия $\delta = \pi/2$ с учетом изменения z по формуле (18). Полагая $\gamma = \delta - \pi/2$ и раскладывая правую часть

уравнения по δ в ряд по γ, ε до членов третьего порядка малости включительно, получим

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} = -3\gamma + \frac{15}{2}\gamma\varepsilon^2\cos^2\tau + 2\gamma^3. \quad (19)$$

Отсюда следует, что период T малых колебаний гантели в исходном времени t вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{T_0}{\sqrt{3}}.$$

Здесь $T_0 = 2\pi / \omega_0$ — период обращения основных тел (звезд) по круговой орбите вокруг общего их центра масс. С точностью до коэффициента $2^{-1/2}$ он совпадает с известным выражением периода малых колебаний гантели в центральном силовом поле [16], когда T_0 — период обращения центра масс гантели вокруг притягивающего центра. Таким образом, гантель медленно колеблется в окрестности устойчивого равновесия $\delta = \pi / 2$ с периодом $T \approx 0.41T_0$.

Исследуем влияние членов третьего порядка малости в уравнении (19) на колебания по углу γ . Полагая малый угол γ величиной порядка $\mu \ll 1$, т.е. $\gamma = \mu\alpha$, $\alpha \sim 1$, и, вводя новое время $\lambda = \sqrt{3}\omega\tau$, представим уравнение (19) в виде

$$\omega^2 \frac{d^2\alpha}{d\lambda^2} + \alpha = \varepsilon^2 \frac{5}{2} \alpha \cos^2\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}\omega}\right) + \mu^2 \frac{2}{3} \alpha^3. \quad (20)$$

Положим $\mu = \varepsilon$. Используя традиционную технику метода Линдштедта, когда искомая частота ω и решение $\alpha(\lambda)$ раскладываются в ряд по ε

$$\omega = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots, \quad \alpha = 1 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \dots$$

получим систему линейных рекуррентных уравнений относительно $\alpha_k(\lambda)$. Решаем задачу Коши $\alpha(0) = b$, $\frac{d\alpha}{d\lambda}(0) = 0$ до членов второго порядка малости по ε включительно, подавляя секулярные члены:

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda) &= \varepsilon b \cos \lambda - \\ &- \frac{1}{192} \varepsilon^3 b \left[90 \cos \lambda - 4b^2 \cos \lambda + 4b^2 \cos 3\lambda - 45(1 + \sqrt{3}) \times \right. \\ &\times \cos\left(-\lambda + \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda\right) + 45(\sqrt{3} - 1) \cos\left(\lambda + \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda\right) \left. \right], \\ \lambda &= \sqrt{6} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \left(b^2 + \frac{5}{2} \right) \right) \omega_0 t. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, колебания третьего порядка малости в окрестности невозмущенного значения $\delta = \pi / 2$ являются квазипериодическими по λ с тремя частотами $\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = -1 + 2 / \sqrt{3}$, $\Omega_3 = 1 + 2 / \sqrt{3}$, при этом $\Omega_2 = 0.154700$ — малая величина. Итак, колебания порядка ε^3 содержат один долгопериодический член с частотой Ω_2 и четыре короткопериодических с частотами Ω_1 ,

Ω_3 . Движение центра масс гантели вдоль оси z является существенным, так как оно вызывает колебания с частотами Ω_2 , Ω_3 и, как следствие, меняет характер движения в третьем приближении по ε : периодические колебания становятся квазипериодическими. Малые движения центра масс гантели вдоль оси z задают форму колебаний по γ . Действительно, сложение всех гармоник порядка ε^3 ведет к эффекту наложения быстрых колебаний на медленное движение, описываемое гармоникой

$$\frac{15}{64} \varepsilon^3 b (1 + \sqrt{3}) \cos\left(\lambda - \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda\right). \quad (22)$$

В результате имеем сложное движение в виде узкой полосы, заполненной быстрыми движениями, и напоминающей по форме кривую (22) с несколько увеличенным размахом колебаний и практически неизменной частотой $\mid_2$.

Эти рассуждения показывают, что формулу (21) можно упростить, отбрасывая члены, мало влияющие на колебания первого порядка малости по ε :

$$\gamma(\lambda) = \varepsilon b \cos \lambda + \frac{15}{64} \varepsilon^3 b (1 + \sqrt{3}) \cos\left(\lambda - \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda\right).$$

Вторая гармоника этого выражения является низкочастотной, поэтому она задает медленную амплитудную модуляцию быстрого гармонического колебания $\varepsilon b \cos \lambda$: появляется верхняя огибающая в виде гармоники с размахом колебаний $15\varepsilon^3 b (1 + \sqrt{3}) / 32$ и частотой изменения Ω_2 и, синхронная с ней, нижняя огибающая с тем же размахом колебаний. Период амплитудной модуляции равен (в старом времени t)

$$\frac{T_0}{\sqrt{6} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \left(b^2 + \frac{5}{2} \right) \right) \Omega_2} \approx \frac{T_0}{\sqrt{6} \Omega_2} = 2.639 T_0,$$

где T_0 — период вращения основных тел по круговой орбите вокруг общего их центра масс.

Отметим, что эффект амплитудной модуляции имеет природу параметрического резонанса. Действительно, уравнение (20) есть обобщенное уравнение Матве в виде параметрически возбуждаемого осциллятора Дуффинга. При этом частота $2/(\sqrt{3}\omega)$ гармонического параметрического возбуждения близка к частоте $1/\omega$ собственных колебаний. Модуляция вызвана неавтономным членом правой части уравнения (20), порождающим квазипериодические колебания конечной амплитуды с частотами $\Omega_2 \approx 0$, Ω_3 . Эти колебания исчезают при $z = 0$ (плоский случай).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы движения симметричной пассивно гравитирующей гантели, находящейся в поле притяжения основных тел. Основные тела

представляют собой материальные точки, движущиеся по круговой орбите вокруг общего центра масс. Найден новый класс движений гантели, когда ее центр масс движется вдоль нормали к плоскости орбиты основных тел, а сама гантель вращается вокруг этой нормали, образуя с ней постоянный прямой угол. В фазовом пространстве системы этот класс движений, получивший название “гравитационный пропеллер”, представляет собой четырехмерное инвариантное многообразие.

Показано, что отмеченное многообразие включает в себя несколько двумерных инвариантных подмногообразий, пересечения которых дают положения относительного равновесия гантели. Исследована динамика на двумерных инвариантных подмногообразиях, отвечающих случаю совпадения угловых скоростей вращения гантели и основных тел, либо случаю плоских вращений гантели вокруг общего центра масс системы. проанализирована устойчивость по Ляпунову всех относительных равновесий гантели, принадлежащих “гравитационному пропеллеру”. Показано, что условия устойчивости равновесий не зависят от длины гантели.

Описаны колебания гантели бесконечно малой длины в окрестности устойчивого равновесия $z = 0$, $\delta = \pi / 2$. В первом приближении по малому параметру колебания гантели имеют гармонический характер по z и δ , причем периоды этих колебаний сравнимы по величине с периодом обращения основных тел. В третьем приближении колебания сохраняют периодический характер по z , но становятся квазипериодическими по δ , так как появляется пара дополнительных частот. Одна из частот мала, что приводит к появлению низкочастотной гармоники, модулирующей амплитуду высокочастотных колебаний. Период этой модуляции равен $2.639T_0$, где T_0 — период вращения основных тел по круговой орбите вокруг общего их центра масс.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено в Московском авиационном институте при финансовой поддержке РНФ, проект № 22-21-00560.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ситников К. А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 303–306.
2. Corbera M., Llibre J. Periodic Orbits of the Sitnikov Problem via a Poincaré Map // Celestial Mechanics

- and Dynamical Astronomy. 2000. V. 77. Iss. 4. P. 273–303.
3. Alfaro J. M., Chiralt C. Invariant Rotational Curves in Sitnikov's Problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1993. V. 55. P. 351–367.
4. Sidorenko V. V. On the circular Sitnikov problem: the alternation of stability and instability in the family of vertical motions // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2011. V. 109. P. 367–384.
5. Kalas V. O., Krasil'nikov P. S. On the Investigation of Stability of Equilibrium in Sitnikov Problem in Nonlinear Formulation // Russian J. Nonlinear Dynamics. 2015. V. 11. Iss. 1. P. 117–126. DOI: 10.20537/nd1501006.
6. Маркеев А. П. О субгармонических колебаниях в близкой к круговой эллиптической задаче Ситникова // ПММ. 2020. Т. 84. № 4. С. 442–454. DOI: 10.31857/S0032823520040062.
7. Красильников П. С. О многообразии “гравитационный пропеллер” в обобщенной круговой задаче Ситникова // ПММ. 2021. Т. 85. № 5. С. 576–586. DOI: 10.31857/S0032823521040081.
8. Krasil'nikov P. S., Ismagilov A. R. On the Dumb-Bell Equilibria in the Generalized Sitnikov Problem // Russian J. Nonlinear Dynamics. 2022. V. 18. Iss. 4. P. 577–588. DOI: 10.20537/nd221203.
9. Окунев М. В. О возможных движениях длинной гантели в центральном поле сил // Косм. исслед. 1969. Т. 7. № 5. С. 637–642.
10. Белецкий В. В., Пономарева О. Н. Параметрический анализ устойчивости относительных равновесий в гравитационном поле // Косм. исслед. 1990. № 5. С. 664–675.
11. Муницына М. А. Относительные равновесия системы “гантель — груз” с односторонними связями на круговой кеплеровой орбите // Автомат. и телемех. 2007. № 9. С. 9–15.
12. Markeev A. P. On the Dynamics of a Gravitational Dipole // Russian J. Nonlinear Dynamics. 2021. V. 17. Iss. 3 P. 247–261. <https://doi.org/10.20537/nd210301>.
13. Безгласный С. П., Мухаметзянова А. А. Гравитационная стабилизация и переориентация спутника-гантели на круговой орбите по принципу качелей // Автоматиз. процессов управл. 2016. № 1(43). С. 91–96.
14. Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1977. 432 с.
15. Буров А. А., Косенко И. И. О плоских колебаниях гантели переменной длины в центральном поле ньютоновского притяжения. Точная постановка // Сб. Современные проблемы математики и механики. Серия Математика, механика. 2013. Т. 7. № 2. С. 11–21.
16. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.