ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2023, том 87, № 4, с. 684–695

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ДВУХОСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ ТОНКОЙ ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКОПЛАСТИЧНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

И. М. Цветков[1,*]

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
**e-mail: cvetkoviv@yandex.ru*

Поступила в редакцию 18.01.2023 г.
После доработки 10.05.2023 г.
Принята к публикации 20.06.2023 г.

Исследуется напряженно-деформированное состояние, возникающее при динамическом растяжении однородной пластины из несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса–Генки. Верхнее и нижнее основания свободны от напряжений, на торцах заданы продольные скорости. Учитывается возможность деформирования верхней и нижней граней пластины, что моделирует шейкообразование и дальнейшее развитие шейки. Вводится малый геометрический параметр – отношение средней толщины пластины к ее длине вдоль одного из направлений. На разных временных интервалах порядки малости безразмерных функций, характеризующих динамический режим растяжения, по отношению к геометрическому параметру могут быть разными, что определяет тот или иной режим растяжения. Таких характерных режимов выявлено два, один связан с достаточно большой скоростью удаления концов пластины друг от друга, второй с ускорением. Во втором случае проведен анализ с использованием метода асимптотического интегрирования, позволяющий приближенно найти параметры напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: идеальная пластичность, предел текучести, пластина, растяжение, шейка, квазистатика, динамика, скорость деформации, напряжение, асимптотические разложения

DOI: 10.31857/S0032823523040148, **EDN:** DYXOQF

Актуальность теории идеальной пластичности обусловлена важными приложениями во многих областях техники (оценка прочности и несущей способности конструкций, обработка металлов), задачах геофизики и геологии. Рассмотрению пространственных задач теории пластичности, изучению различных математических вопросов, в частности построению теории с условием пластичности Треска посвящены следующие работы [1, 2]. Первое аналитическое решение пространственной динамической задачи было найдено с помощью группового анализа [3], исследованиям в этой области посвящены современные статьи [4, 5].

При деформировании большинство пластических материалов заметно изменяют форму перед разрушением, то есть имеет место процесс локализации деформации. Динамическая задача о шейке при одноосном растяжении листа и стержня с постоянной скоростью исследовалась в работах [6, 7] с применением линейного анализа устойчивости, где продемонстрирован инерционный эффект, заключающийся в том, что число шеек увеличивается с увеличением скорости растяжения. В [8] проведен анализ динамической задачи о растяжении идеально жесткопластического бесконечного листа с критерием пластичности Мизеса в плоской постановке с использованием метода асимптотического интегрирования. Асимптотические разложения использовались в [9, 10] для исследования осесимметричных задач о динамическом растяжении стержня и слоя соответственно. В приведенных работах, в случае когда ускорение, заданное в областях кинематических граничных условий, достаточно высоко, приближенно получены параметры напряженно-деформированного состояния и аппроксимация границы области квадратичным трехчленом.

Настоящая работа посвящена задаче о растяжении идеально жесткопластической пластины. С использованием метода асимптотического интегрирования, выявлено два характерных режима растяжения, реализующихся при переходе от квазистатики к динамическому деформированию. Каждый из них связан с достижением некоторых безразмерных функций времени определенных порядков малости по отношению к малому геометрическому параметру, характеризующему форму пластины. Одна из групп безразмерных функций представляет собой обратные числа Эйлера, другая зависит от ускорений, с которыми боковые поверхности удаляются от центра. При реализации режима связанного с достижением ускорений своих критических значений, приближенно вычислены параметры напряженно-деформированного состояния, в частности получена аппроксимация поверхности пластины параболоидом, позволяющая моделировать шейкообразование.

1. Постановка задачи о динамическом растяжении пластины. Рассмотрим деформирование во времени пластины из однородного несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса—Генки с плотностью ρ и пределом текучести σ_s. Область Ω_t, занятая пластиной в момент t, представляет собой вытянутую симметричную область с неизменным во времени объемом $|\Omega_t|$ и в прямоугольной системе координат связанной с плоскостью симметрии пластины имеет вид

$$\Omega_t = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| \le l_1(t), \quad |x_2| \le l_2(t), \quad |x_3| \le h(x_1, x_2, t)\} \tag{1.1}$$

$$|\Omega_t| = 2\int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_2}^{l_2} h(x_1, x_2, t)dx_1dx_2 = 8h^* l_1 l_2 \tag{1.2}$$

Средняя высота h^* определяется в (1.2) таким образом, чтобы объем пластины с прямоугольным сечением имеющей измерения $2l_1$, $2l_2$ и высоту $2h^*$ равнялся $|\Omega_t|$.

Верхняя и нижняя поверхности $x_3 = \pm h(x_1, x_2, t)$ свободны от напряжений, а на боковых сторонах $x_i = l_i(t)$, где $i = 1,2$, заданы продольные скорости

$$x_i = \pm l_i(t): \quad v_i = \pm V_i(t), \quad V_i(t) > 0 \tag{1.3}$$

Отметим, что случай $V_2 \equiv 0$, экспериментально реализованный в квазистатике [11] растяжением широких рулонов листового металла, соответствует плоской деформации по ширине пластины. Разрушению пластины при растяжении как вдоль направления прокатки, так и в поперечном направлении может предшествовать диффузная локализация деформации либо образование полосы сдвига.

Итак, рассматривается растяжение пластины с заданной кинематикой движения ее боковых сторон. Функции $l_1 l_2$ и h^* являются соответственно монотонно возрастающей и монотонно убывающей. Векторные определяющие соотношения идеально жесткопластической среды имеют следующий вид

$$v_u \underset{\sim}{s} = \sigma_u \underset{\sim}{v}, \tag{1.4}$$

где $\underset{\sim}{s}$ и $\underset{\sim}{v}$ девиатор напряжений и тензор скоростей деформаций, σ_u и v_u их интенсивности соответственно. Исключая интенсивности из соотношений (1.4), можно образовать пропорции, $s_{11}v_{12} = s_{12}v_{11}$, $s_{22}v_{13} = s_{13}v_{22}$, $s_{11}v_{22} = s_{22}v_{11}$, $s_{33}v_{23} = s_{23}v_{33}$, преобразующиеся к следующему виду, где индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей переменной:

$$
\begin{gathered}
s_{11}(v_{1,2} + v_{2,1}) = 2s_{12}v_{1,1}, \quad s_{22}(v_{1,3} + v_{3,1}) = 2s_{13}v_{2,2} \\
s_{11}v_{2,2} = s_{22}v_{1,1}, \quad (s_{11} + s_{22})(v_{2,3} + v_{3,2}) = -2s_{23}v_{3,3}
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

Условие пластичности Мизеса–Генки $\sigma_u = \sigma_s$ запишется следующим образом:

$$
s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{11}s_{22} + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2 = \tau_s^2, \tag{1.6}
$$

где, $\tau_s = \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{2}}$ – предел текучести при сдвиге.

Выпишем условия несжимаемости, а также уравнения движения:

$$
v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} = 0 \tag{1.7}
$$

$$
-p_{,i} + s_{ij,j} = \rho(v_{i,t} + v_j v_{i,j}), \tag{1.8}
$$

где $i = 1, 2, 3$; а s_{33} из (1.8) можно исключить.

Нелинейная система девяти уравнений (1.5)–(1.8) замкнута относительно девяти функций v_1, v_2, v_3, p, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{22}, s_{23} зависящих от x_1, x_2, x_3 и t в области Ω_t с заранее неизвестной частью границы $x_3 = \pm h(x_1, x_2, t)$, которая характеризуется нормалью $\mathbf{n}$:

$$
\begin{gathered}
n_1 = \mp\frac{\partial h/\partial x_1}{\sqrt{1 + (\partial h/\partial x_1)^2 + (\partial h/\partial x_2)^2}}, \quad n_2 = \mp\frac{\partial h/\partial x_2}{\sqrt{1 + (\partial h/\partial x_1)^2 + (\partial h/\partial x_2)^2}} \\
n_3 = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (\partial h/\partial x_1)^2 + (\partial h/\partial x_2)^2}}
\end{gathered}
\tag{1.9}
$$

На этой части границы выполнены условия равенства нулю трех компонент вектора напряжений:

$$
\begin{gathered}
x_3 = \pm h(x_1, x_2, t): \quad \pm (p - s_{11})\frac{\partial h}{\partial x_1} \mp s_{12}\frac{\partial h}{\partial x_2} \pm s_{13} = 0 \\
\mp s_{12}\frac{\partial h}{\partial x_1} \pm (p - s_{22})\frac{\partial h}{\partial x_2} \pm s_{23} = 0, \quad s_{13}\frac{\partial h}{\partial x_1} + s_{23}\frac{\partial h}{\partial x_2} + p + s_{11} + s_{22} = 0
\end{gathered}
\tag{1.10}
$$

Для строгой постановки начально-краевой задачи, рассматриваемой при $t > 0$, необходимо задать функцию $h(x_1, x_2, 0) = h_0(x_1, x_2)$, удовлетворяющую интегральному условию

$$
\frac{|\Omega_t|}{2} = \int\limits_{-l_1(0)}^{l_1(0)} \int\limits_{-l_2(0)}^{l_2(0)} h_0(x_1, x_2)dx_1dx_2 \tag{1.11}
$$

На основании того, что область Ω_t симметрична, предположим, что s_{13}, s_{23}, v_3 нечетны по x_3.

2. Квазистатический режим растяжения. Квазистатическая постановка задачи о растяжении идеально жесткопластической пластины отличается от динамической тем, что в правых частях уравнений (1.8) стоят нули, т.е. время t становится параметром, входящим в решения неявно через l_i, V_i. Уравнения (1.8) превращаются в уравнения равновесия.

Аналитическое решение квазистатической задачи несложно получить, если в начальный момент времени пластина имела форму прямоугольного параллелепипеда, т.е. $h_0 = \text{const}$. Будем обозначать параметры этого решения верхним индексом “qs”. Имеем:

$$\begin{gathered}
v_1^{\mathrm{qs}} = \frac{V_1}{l_1}x_1, \quad v_2^{\mathrm{qs}} = \frac{V_2}{l_2}x_2, \quad v_3^{\mathrm{qs}} = -\frac{V_1 l_2 + V_2 l_1}{l_1 l_2}x_3, \quad s_{12}^{\mathrm{qs}} = s_{13}^{\mathrm{qs}} = s_{23}^{\mathrm{qs}} = 0 \\
s_{11}^{\mathrm{qs}} = \frac{\tau_s V_1 l_2}{\sqrt{V_1^2 l_2^2 + V_2^2 l_1^2 + V_1 V_2 l_2 l_1}}, \quad s_{22}^{\mathrm{qs}} = \frac{\tau_s V_2 l_1}{\sqrt{V_1^2 l_2^2 + V_2^2 l_1^2 + V_1 V_2 l_2 l_1}} \\
s_{33}^{\mathrm{qs}} = p = -\frac{\tau_s (V_1 l_2 + V_2 l_1)}{\sqrt{V_1^2 l_2^2 + V_2^2 l_1^2 + V_1 V_2 l_2 l_1}}
\end{gathered} \tag{2.1}$$

У тензора напряжений только две ненулевые компоненты σ_{11}, σ_{22}. Кинематика (2.1) обеспечивает отсутствие жестких зон в Ω_t, так как

$$v_u^{\mathrm{qs}} = \frac{\sqrt{2}}{l_1 l_2}\sqrt{V_1^2 l_2^2 + V_2^2 l_1^2 + V_1 V_2 l_2 l_1} > 0 \tag{2.2}$$

во всех точках пластины.

Исследуем далее вопрос о том, при каких соотношениях безразмерных параметров системы (или на каких временах) выписанное выше квазистатическое приближение является главным и им можно ограничиться в технологических расчетах, а когда инерционные эффекты, вызванные слагаемыми в правых частях уравнений (1.8), начинают играть соизмеримую роль в распределении напряжений и движений точек внутри пластины.

3. Асимптотическое разложение. Обратимся к динамическим уравнениям (1.8) и образуем явно зависящие от времени безразмерные параметры:

$$\begin{gathered}
\alpha(t) = \frac{h^*(t)}{l_1(t)} \ll 1, \quad \varepsilon_{11} = \frac{\rho V_1^2(t)}{\tau_s}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\rho V_1(t) V_2(t)}{\tau_s} \\
\varepsilon_{22} = \frac{\rho V_2^2(t)}{\tau_s}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\rho \dot{V}_1(t) h^*(t)}{\tau_s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho \dot{V}_2(t) h^*(t)}{\tau_s}
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Первый из них – малый геометрический параметр, следующая за ним группа – обратные числа Эйлера, последняя – характеризует ускорение с которым боковые грани удаляются от центра пластины. На разных интервалах процесса растяжения порядок малости выписанных параметров по α может меняться. От этого зависит вклад инерционных слагаемых в уравнениях движения. Помимо выписанных групп в обезразмеренные уравнения входят следующие параметры зависящие от времени – l_1/l_2, V_2/V_1. От порядка их малости по α также зависит вид исследуемых уравнений. В данной работе рассмотрим частный случай $l_1/l_2 = O(1)$, $V_2/V_1 = O(1)$.

Представим разложения девяти неизвестных функций в виде регулярных асимптотических рядов по целым степеням малого асимптотического параметра α (в [9, 10] аналогичные по структуре разложения использовались при анализе растяжения осесимметричных стержня и слоя соответственно, в [12] разложения использовались в анализе задачи Прандтля):

$$\begin{gathered}
v_1(x_1, x_2, x_3, t) = V_1(t)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) v_{\eta_1}^{\{n\}}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau) \\
v_2(x_1, x_2, x_3, t) = V_2(t)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) v_{\eta_2}^{\{n\}}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau) \\
v_3(x_1, x_2, x_3, t) = \left(V_1(t) + V_2(t)\frac{l_1(t)}{l_2(t)}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) v_{\eta_3}^{\{n\}}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau)
\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$s_{(11;12;13;23;22)}(x_1,x_2,x_3,t)=\tau_s\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)s^{\{n\}}_{(\eta_1\eta_1;\eta_1\eta_2;\eta_1\eta_3;\eta_2\eta_3;\eta_2\eta_2)}(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\tau)$$

$$p(x_1,x_2,x_3,t)=\tau_s\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)p^{\{n\}}(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\tau)$$

$$\eta_1=\frac{\alpha(t)x_1}{h^*(t)}=\frac{x_1}{l_1(t)},\quad \eta_2=\frac{x_2}{l_2(t)},\quad \eta_3=\frac{x_3}{h^*(t)},\quad \tau=\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}\frac{t}{h^*(t)} \tag{3.3}$$

Безразмерные коэффициенты рядов (3.2) зависят от новых безразмерных координат η_1, η_2, η_3 и безразмерного времени τ. Область пластины Ω_t (1.1) в любой момент времени описывается неравенствами

$$\Omega_\tau=\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\mid |\eta_1|\le 1,\quad |\eta_2|\le 1,\quad |\eta_3|\le\xi(\tau,\eta_1,\eta_2)\} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}\xi(\tau,\eta_1,\eta_2)=\frac{h(t,x_1,x_2)}{h^*(t)},\quad \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\xi(\tau,\eta_1,\eta_2)d\eta_1 d\eta_2=4\\ \frac{\partial h}{\partial x_1}=\alpha\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1},\quad \frac{\partial h}{\partial x_2}=\alpha\frac{l_1}{l_2}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_2}\end{gathered} \tag{3.5}$$

Отметим, что порядок малости по α безразмерных производных $\partial h/\partial x_i$ и $\partial\xi/\partial\eta_i$ разный. Так как функция $\tau(t)$ монотонно возрастает, якобиан замены переменных $\partial(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau)/\partial(x_1, x_2, x_3, t)$ отличен от нуля, т.е. она невырожденна. Имеет место замена дифференциальных операторов:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{1}{l_1(t)}\frac{\partial}{\partial\eta_1}=\frac{\alpha(t)}{h^*(t)}\frac{\partial}{\partial\eta_1},\quad \frac{\partial}{\partial x_2}=\frac{1}{l_2(t)}\frac{\partial}{\partial\eta_2}=\frac{\alpha}{h^*}\frac{l_1}{l_2}\frac{\partial}{\partial\eta_2},\quad \frac{\partial}{\partial x_3}=\frac{1}{h^*(t)}\frac{\partial}{\partial\eta_3} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=-\frac{V_1\eta_1}{l_1}\frac{\partial}{\partial\eta_1}-\frac{V_2\eta_2}{l_2}\frac{\partial}{\partial\eta_2}+\frac{(V_1l_2+V_2l_1)}{l_1l_2}\eta_3\frac{\partial}{\partial\eta_3}+\left(\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}\frac{1}{h^*}+\frac{(V_1l_2+V_2l_1)}{l_1l_2}\tau\right)\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{3.7}$$

Из определения малого параметра (3.1) и средней высоты пластины (1.2) следуют кинетические соотношения:

$$\dot\alpha=-\frac{\alpha(2V_1l_2+V_2l_1)}{l_1l_2},\quad \dot h^*=-\frac{h^*(V_1l_2+V_2l_1)}{l_1l_2} \tag{3.8}$$

Подставим ряды (3.2) в девять уравнений (1.5–1.8) и граничные условия (1.3), (1.10). С учетом формул (3.5)–(3.8) получим систему, состоящую из уравнений движения (1.8)

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\left(-\alpha p^{\{n\}}_{,\eta_1}+\alpha s^{\{n\}}_{\eta_1\eta_1,\eta_1}+\alpha\frac{l_1}{l_2}s^{\{n\}}_{\eta_1\eta_2,\eta_2}+s^{\{n\}}_{\eta_1\eta_3,\eta_3}\right)=\\ =\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}\left(-n\left(2\varepsilon_{11}+\frac{l_1}{l_2}\varepsilon_{12}\right)v^{\{n\}}_{\eta_1}-\varepsilon_{11}\eta_1v^{\{n\}}_{\eta_1,\eta_1}-\frac{l_1}{l_2}\varepsilon_{12}\eta_2v^{\{n\}}_{\eta_1,\eta_2}+\left(\varepsilon_{11}+\frac{l_1}{l_2}\varepsilon_{12}\right)\eta_3v^{\{n\}}_{\eta_1,\eta_3}+\right.\\ \left.+\left(\varepsilon_{11}+\frac{l_1}{l_2}\varepsilon_{12}\right)\tau v^{\{n\}}_{\eta_1,\tau}\right)+\sqrt{\varepsilon_{11}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^nv^{\{n\}}_{\eta_1,\tau}+\varepsilon_{11}\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v^{\{j\}}_{\eta_1}v^{\{n-j\}}_{\eta_1,\eta_1}+\\ +\frac{l_1}{l_2}\varepsilon_{12}\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v^{\{j\}}_{\eta_2}v^{\{n-j\}}_{\eta_1,\eta_2}+\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v^{\{j\}}_{\eta_3}v^{\{n-j\}}_{\eta_1,\eta_3}+\varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^nv^{\{n\}}_{\eta_1}\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\left(-\alpha\frac{l_1}{l_2}p^{\{n\}}_{,\eta_2}+\alpha s^{\{n\}}_{\eta_1\eta_2,\eta_1}+\alpha\frac{l_1}{l_2}s^{\{n\}}_{\eta_2\eta_2,\eta_2}+s^{\{n\}}_{\eta_2\eta_3,\eta_3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}\left(-n\left(2\varepsilon_{12}+\frac{l_1}{l_2}\varepsilon_{22}\right)v^{\{n\}}_{\eta_2}-\right.$$

$$
\begin{gathered}
-\varepsilon_{12}\eta_1 v^{\{n\}}_{\eta_2,\eta_1} - \varepsilon_{22}\frac{l_1}{l_2}\eta_2 v^{\{n\}}_{\eta_2,\eta_2} + \left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22}\frac{l_1}{l_2}\right)\eta_3 v^{\{n\}}_{\eta_2,\eta_3} + \left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22}\frac{l_1}{l_2}\right)\tau v^{\{n\}}_{\eta_2,\tau}\Bigg) + \\
+ \sqrt{\varepsilon_{22}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v^{\{n\}}_{\eta_2,\tau} + \varepsilon_{12}\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n} v^{\{j\}}_{\eta_1} v^{\{n-j\}}_{\eta_2,\eta_1} + \varepsilon_{22}\alpha\frac{l_1}{l_2}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n} v^{\{j\}}_{\eta_2} v^{\{n-j\}}_{\eta_2,\eta_2} + \\
+ \left(\varepsilon_{12} + \frac{l_1}{l_2}\varepsilon_{22}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n} v^{\{j\}}_{\eta_3} v^{\{n-j\}}_{\eta_2,\eta_3} + \varepsilon_2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v^{\{n\}}_{\eta_2}
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\left(-p^{\{n\}}_{,\eta_3} + \alpha s^{\{n\}}_{\eta_1\eta_3,\eta_1} + \alpha\frac{l_1}{l_2}s^{\{n\}}_{\eta_2\eta_3,\eta_2} - s^{\{n\}}_{\eta_1\eta_1,\eta_3} - s^{\{n\}}_{\eta_2\eta_2,\eta_3}\right) = \\
= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}\Bigg(-n\left(2\varepsilon_{11} + 3\varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} + \varepsilon_{22}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\right)v^{\{n\}}_{\eta_3} - \left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2}\right)\eta_1 v^{\{n\}}_{\eta_3,\eta_1} - \\
- \left(\varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} + \varepsilon_{22}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\right)\eta_2 v^{\{n\}}_{\eta_3,\eta_2} + \left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} + \varepsilon_{22}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\right)\eta_3 v^{\{n\}}_{\eta_3,\eta_3} + \\
+ \left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} + \varepsilon_{22}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\right)\tau v^{\{n\}}_{\eta_3,\tau}\Bigg) + \left(\sqrt{\varepsilon_{11}} + \sqrt{\varepsilon_{22}}\frac{l_1}{l_2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v^{\{n\}}_{\eta_3,\tau} + \\
+ \left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2}\right)\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n} v^{\{j\}}_{\eta_1} v^{\{n-j\}}_{\eta_3,\eta_1} + \left(\varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} + \varepsilon_{22}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\right)\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n} v^{\{j\}}_{\eta_2} v^{\{n-j\}}_{\eta_3,\eta_2} + \\
+ \left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\frac{l_1}{l_2} + \varepsilon_{22}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n} v^{\{j\}}_{\eta_3} v^{\{n-j\}}_{\eta_3,\eta_3} + \\
+ \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\frac{l_1}{l_2} + \alpha\frac{l_1}{l_2}\varepsilon_{12} - \alpha\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\varepsilon_{22}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v^{\{n\}}_{\eta_3},
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

условия несжимаемости (1.9), которое в силу линейности, может быть записано в виде рекуррентной цепочки (коэффициенты с отрицательными индексами считаются равными нулю)

$$
v^{\{n-1\}}_{\eta_1,\eta_1} + \frac{l_1}{l_2}\frac{V_2}{V_1}v^{\{n-1\}}_{\eta_2,\eta_2} + \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\frac{V_2}{V_1}\right)v^{\{n\}}_{\eta_3,\eta_3} = 0; \quad n \ge 0,
\tag{3.12}
$$

критерия Мизеса–Генки (1.6)

$$
\begin{gathered}
\left(s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1}\right)^2 + \left(s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_2}\right)^2 + s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1}s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_2} + \left(s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2}\right)^2 + \left(s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_3}\right)^2 + \left(s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_3}\right)^2 = 1 \\
\sum_{j=0}^{n} s^{\{j\}}_{\eta_1\eta_1}s^{\{n-j\}}_{\eta_1\eta_1} + \sum_{j=0}^{n} s^{\{j\}}_{\eta_2\eta_2}s^{\{n-j\}}_{\eta_2\eta_2} + \sum_{j=0}^{n} s^{\{j\}}_{\eta_1\eta_1}s^{\{n-j\}}_{\eta_2\eta_2} + \sum_{j=0}^{n} s^{\{j\}}_{\eta_1\eta_2}s^{\{n-j\}}_{\eta_1\eta_2} + \\
+ \sum_{j=0}^{n} s^{\{j\}}_{\eta_1\eta_3}s^{\{n-j\}}_{\eta_1\eta_3} + \sum_{j=0}^{n} s^{\{j\}}_{\eta_2\eta_3}s^{\{n-j\}}_{\eta_2\eta_3} = 0; \quad n \ge 1
\end{gathered}
\tag{3.13}
$$

условия пропорциональности девиатора напряжений и тензора скоростей деформаций (1.5)

$$
\frac{l_1}{l_2}\sum_{j=0}^{n} s^{\{j\}}_{\eta_1\eta_1}v^{\{n-j\}}_{\eta_1,\eta_2} + \frac{V_2}{V_1}\sum_{j=0}^{n} s^{\{j\}}_{\eta_1\eta_1}v^{\{n-j\}}_{\eta_2,\eta_1} = 2\sum_{j=0}^{n} s^{\{j\}}_{\eta_1\eta_2}v^{\{n-j\}}_{\eta_1,\eta_1}; \quad n \ge 0
\tag{3.14}
$$

$$\sum_{j=0}^{n} s_{\eta_2\eta_2}^{\{j\}} v_{\eta_1,\eta_3}^{\{n-j\}} + \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\frac{V_2}{V_1}\right)\sum_{j=0}^{n-1} s_{\eta_2\eta_2}^{\{j\}} v_{\eta_3,\eta_1}^{\{n-1-j\}} = 2\frac{l_1}{l_2}\frac{V_2}{V_1}\sum_{j=0}^{n-1} s_{\eta_1\eta_3}^{\{j\}} v_{\eta_2,\eta_2}^{\{n-1-j\}}; \quad n \ge 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{V_2}{V_1}\frac{l_1}{l_2}\sum_{j=0}^{n} s_{\eta_1\eta_1}^{\{j\}} v_{\eta_2,\eta_2}^{\{n-j\}} = \sum_{j=0}^{n} s_{\eta_2\eta_2}^{\{j\}} v_{\eta_1,\eta_1}^{\{n-j\}}; \quad n \ge 0 \tag{3.16}$$

$$\frac{V_2}{V_1}\sum_{j=0}^{n}\left(s_{\eta_1\eta_1}^{\{j\}} + s_{\eta_2\eta_2}^{\{j\}}\right)v_{\eta_2,\eta_3}^{\{n-j\}} + \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\frac{V_2}{V_1}\right)\frac{l_1}{l_2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(s_{\eta_1\eta_1}^{\{j\}} + s_{\eta_2\eta_2}^{\{j\}}\right)v_{\eta_3,\eta_2}^{\{n-1-j\}} =$$

$$= -2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\frac{V_2}{V_1}\right)\sum_{j=0}^{n} s_{\eta_2\eta_3}^{\{j\}} v_{\eta_3,\eta_3}^{\{n-j\}}; \quad n \ge 0 \tag{3.17}$$

Граничные условия (1.3) имеют вид, где $i = 1,2$:

$$\eta_i = \pm 1: \quad v_{\eta_i}^{\{0\}} = \pm 1, \quad v_{\eta_i}^{\{n\}} = 0; \quad n \ge 1 \tag{3.18}$$

Нижняя граница получается из верхней отражением, поэтому в (1.10) оставим знак “+”. Условия того, что верхняя грань свободна от напряжений (1.10) следующие:

$$\eta_3 = \xi(\eta_1,\eta_2,\tau): \quad \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}\left(p^{\{n\}} - s_{\eta_1\eta_1}^{\{n\}}\right)\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1} - \frac{l_1}{l_2}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1} s_{\eta_1\eta_2}^{\{n\}}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_2} + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n} s_{\eta_1\eta_3}^{\{n\}} = 0 \tag{3.19}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1} s_{\eta_1\eta_2}^{\{n\}}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1} + \frac{l_1}{l_2}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}\left(p^{\{n\}} - s_{\eta_2\eta_2}^{\{n\}}\right)\frac{\partial\xi}{\partial\eta_2} + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n} s_{\eta_2\eta_3}^{\{n\}} = 0 \tag{3.20}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1} s_{\eta_1\eta_3}^{\{n\}}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1} + \frac{l_1}{l_2}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1} s_{\eta_2\eta_3}^{\{n\}}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_2} + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n}\left(p^{\{n\}} + s_{\eta_1\eta_1}^{\{n\}} + s_{\eta_2\eta_2}^{\{n\}}\right) = 0 \tag{3.21}$$

Безразмерные параметры ε_{ij} и ε_i входят только в уравнения (3.9–3.11). На тех или иных временных интервалах порядок их малости по сравнению с $\alpha(t)$ может меняться. От этого зависит учет или неучет слагаемых в правых частях уравнений в процессе приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра.

4. Метод асимптотического интегрирования. Воспользуемся методом асимптотического интегрирования [8–10, 12, 13] задачи (3.9)–(3.21), заключающемся в последовательном решении замкнутых систем уравнений относительно $v_{\eta_1}^{\{n\}}$, $v_{\eta_2}^{\{n\}}$, $v_{\eta_3}^{\{n\}}$, $s_{\eta_1\eta_1}^{\{n\}}$, $s_{\eta_1\eta_2}^{\{n\}}$, $s_{\eta_1\eta_3}^{\{n\}}$, $s_{\eta_2\eta_2}^{\{n\}}$, $s_{\eta_2\eta_3}^{\{n\}}$, $p^{\{n\}}$, где $n \ge 0$, в области Ω_τ с заранее неизвестной частью границы $\eta_3 = \pm\xi(\eta_1, \eta_2, \tau)$.

Обратимся к первому уравнению (3.12): $v_{\eta_3,\eta_3}^{\{0\}} = 0$. Из этого уравнения следует, что $v_{\eta_3}^{\{0\}} = v_{\eta_3}^{\{0\}}(\eta_1,\eta_2,\tau)$, а с учетом требования антисимметричности по η_3 получаем $v_{\eta_3}^{\{0\}} = 0$.

Из рекуррентной цепочки (3.12) при $n = 1$ и уравнений (3.15), (3.17) при $n = 0$ получаем

$$v_{\eta_1,\eta_1}^{\{0\}} + g_1 g_2 v_{\eta_2,\eta_2}^{\{0\}} + (1 + g_1 g_2) v_{\eta_3,\eta_3}^{\{1\}} = 0, \quad s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}} v_{\eta_1,\eta_3}^{\{0\}} = 0, \quad \left(s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}} + s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}\right) v_{\eta_2,\eta_3}^{\{0\}} = 0, \tag{4.1}$$

где $g_1 = l_1/l_2$, $g_2 = V_2/V_1$. Следовательно, $v_{\eta_1}^{\{0\}} = v_{\eta_1}^{\{0\}}(\eta_1,\eta_2,\tau)$, $v_{\eta_2}^{\{0\}} = v_{\eta_2}^{\{0\}}(\eta_1,\eta_2,\tau)$, $v_{\eta_3}^{\{1\}} = -\eta_3\dfrac{v_{\eta_1,\eta_1}^{\{0\}} + g_1 g_2 v_{\eta_2,\eta_2}^{\{0\}}}{1 + g_1 g_2}$. Потребуем, чтобы найденные компоненты вектора скорости совпали с компонентами (2.1) в квазистатике, в таком случае

$$v_{\eta_1}^{\{0\}} = \eta_1, \quad v_{\eta_2}^{\{0\}} = \eta_2, \quad v_{\eta_3}^{\{1\}} = -\eta_3 \tag{4.2}$$

Линейные зависимости (4.2) имеют место для любых соотношений порядков малости по α параметров $\varepsilon_{ij}(t)$, $\varepsilon_i(t)$. Рассмотрев первое уравнение в (3.13), уравнение из (3.14) при $n = 0$, из (3.15) при $n = 1$, из (3.16) при $n = 0$ и из (3.17) при $n = 1$, получим незамкнутую систему уравнений относительно $s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}, s_{\eta_1\eta_2}^{\{0\}}, s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}, s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}, s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}, v_{\eta_1,\eta_3}^{\{1\}}, v_{\eta_2,\eta_3}^{\{1\}}$:

$$\begin{gathered}\left(s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}\right)^2 + s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}} s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}} + \left(s_{\eta_1\eta_2}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}\right)^2 = 1, \quad s_{\eta_1\eta_2}^{\{0\}} = 0 \\ s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}} v_{\eta_1,\eta_3}^{\{1\}} = 2g_1g_2 s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}, \quad g_1g_2 s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}} = s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}, \quad g_2\left(s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}} + s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}\right) v_{\eta_2,\eta_3}^{\{1\}} = 2(1 + g_1g_2) s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}\end{gathered} \tag{4.3}$$

Для замыкания системы (4.3) необходимо рассмотреть конкретный режим растяжения. Отметим что $\varepsilon_{12} = g_2\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_{22} = g_2^2\varepsilon_{11}$, где $g_2 = O(1)$, поэтому для обратных чисел Эйлера достаточно задать только порядок ε_{11} по α.

Из (3.9)–(3.11) следует, что на временных интервалах, где одновременно $\varepsilon_{11}\alpha^2 = o(1)$, $\varepsilon_1 = o(1)$, $\varepsilon_2 = o(1)$ после приравнивания нулю коэффициентов при α^0 в (3.9) и (3.10), с учетом (4.3), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\left(s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}\right)^2 + s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}} s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}} + \left(s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}\right)^2 = 1 \\ g_1g_2 s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}} = s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}, \quad s_{\eta_1\eta_3,\eta_3}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\eta_2\eta_3,\eta_3}^{\{0\}} = 0\end{gathered} \tag{4.4}$$

Из последних уравнений получаем, что $s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}} = s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}(\eta_1, \eta_2, \tau)$, $s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}} = s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}(\eta_1, \eta_2, \tau)$, а с учетом требования нечетности $s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}, s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}$ по η_3 получаем

$$\begin{gathered}s_{\eta_1\eta_2}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}} = \frac{1}{\sqrt{1 + g_1g_2 + g_1^2g_2^2}} \\ s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}} = \frac{g_1g_2}{\sqrt{1 + g_1g_2 + g_1^2g_2^2}}\end{gathered} \tag{4.5}$$

Таким образом пришли к напряженному состоянию, соответствующему квазистатическому растяжению пластины с горизонтальной границей. Также, приравнивая коэффициенты при α^0, из (3.11) следует, что $p_{,\eta_3}^{\{0\}} + s_{\eta_1\eta_1,\eta_3}^{\{0\}} + s_{\eta_2\eta_2,\eta_3}^{\{0\}} = 0$.

Итак, в рамках сделанных предположений о порядках g_1 и g_2, динамические эффекты начинают играть роль и вносить вклад в напряженно-деформированное состояние, сопоставимый с квазистатикой, если выполняется хотя бы одно из требований: а) параметр ε_{11} становится порядка α^n, $n \le -2$; б) один из параметров ε_1 или ε_2 становится порядка α^m, $m \le 0$.

Остановимся в данной работе на случае, когда $\varepsilon_{11} = o(\alpha^{-2})$ и $\varepsilon_1 = O(1)$, $\varepsilon_2 = O(1)$. Дадим оценку размерных величин, при которых реализуется данный режим растяжения пластины. Константа ρ/τ_s как для металлов и сплавов, так и для большинства полимеров, имеет порядок 10^{-5}–10^{-4} с^2/м^2. Если взять временной интервал, на котором $\alpha \sim 10^{-1}$, а $h^* \sim 10^{-2}$ м, то соотношения порядков $\varepsilon_{11} = o(\alpha^{-2})$ будут реализовываться при скоростях V_1 не больше чем 10^2 м/с, а $\varepsilon_i = O(1)$ при ускорениях $\dot{V}_i \sim 10^6$–10^7м/с^2.

Рассмотрев коэффициенты при α^0 в (3.9)–(3.11) и добавив уравнения к (4.3) получим замкнутую систему относительно $s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}, s_{\eta_2\eta_2}^{\{0\}}, s_{\eta_1\eta_3}^{\{0\}}, s_{\eta_2\eta_3}^{\{0\}}, v_{\eta_1}^{\{1\}}, v_{\eta_2}^{\{2\}}$:

$$s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_3,\eta_3} = \varepsilon_1\eta_1, \quad s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_3,\eta_3} = \varepsilon_2\eta_2, \quad p^{\{0\}}_{,\eta_3} + s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1,\eta_3} + s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_2,\eta_3} = 0 \tag{4.6}$$

Два первых уравнения (4.6) замыкают систему, а последнее служит для определения давления $p^{\{0\}}$. Решение системы (4.6) следующее:

$$\begin{gathered} s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_3} = \varepsilon_1\eta_1\eta_3, \quad s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_3} = \varepsilon_2\eta_2\eta_3 \\ s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1} = \sqrt{\frac{1-\eta_3^2\left(\varepsilon_1^2\eta_1^2+\varepsilon_2^2\eta_2^2\right)}{1+g_1g_2+g_1^2g_2^2}}, \quad s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_2} = g_1g_2\sqrt{\frac{1-\eta_3^2\left(\varepsilon_1^2\eta_1^2+\varepsilon_2^2\eta_2^2\right)}{1+g_1g_2+g_1^2g_2^2}} \end{gathered} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} v^{\{1\}}_{\eta_1} &= -2\varepsilon_1\sqrt{1+g_1g_2+g_1^2g_2^2}\,\frac{\eta_1\sqrt{1-\eta_3^2\left(\varepsilon_1^2\eta_1^2+\varepsilon_2^2\eta_2^2\right)}}{\left(\varepsilon_1^2\eta_1^2+\varepsilon_2^2\eta_2^2\right)} + f_1(\eta_1,\eta_2,\tau) \\ v^{\{1\}}_{\eta_2} &= \frac{-2\varepsilon_2\sqrt{1+g_1g_2+g_1^2g_2^2}}{g_2}\,\frac{\eta_2\sqrt{1-\eta_3^2\left(\varepsilon_1^2\eta_1^2+\varepsilon_2^2\eta_2^2\right)}}{\left(\varepsilon_1^2\eta_1^2+\varepsilon_2^2\eta_2^2\right)} + f_2(\eta_1,\eta_2,\tau), \end{aligned} \tag{4.8}$$

где функции $f_1(\eta_1, \eta_2, \tau)$, $f_2(\eta_1, \eta_2, \tau)$ определяется из последующих по α приближений. Заметим, что если одновременно устремить ε_1 и ε_2 к нулю, то компоненты девиатора (4.7) будут стремиться к квазистатическому решению.

Вид функции $v^{\{1\}}_{\eta_1}$, $v^{\{1\}}_{\eta_2}$ позволяет сделать следующие выводы:

1. Точно однородным граничным условиям на торцах пластины $\eta_i = \pm 1$, где $i = 1, 2$, удовлетворить не удается.

2. Когда $\eta_1^2 + \eta_2^2 \to 0$, т.е. при стремлении к средней оси пластины, $\left|v^{\{1\}}_{\eta_1}\right| \to \infty$, $\left|v^{\{1\}}_{\eta_2}\right| \to \infty$. Это говорит о потере асимптотичности в смысле Пуанкаре вблизи оси $(0, 0, \eta_3)$ ряда (3.2) для скоростей v_1, v_2.

Из этих выводов следует, что использование асимптотических рядов (3.2) вблизи торцов пластины, т.е. в зоне краевого эффекта и в середине, где происходит перестройка течения, неправомерно. По своей геометрии область неприменимости асимптотического разложения напоминает задачу Прандтля [12].

5. Уравнения для определения формы границы пластины. Обратимся к граничным условиям (3.19–3.21) на неизвестной границе пластины $\eta_3 = \xi(\eta_1, \eta_2, \tau)$. Порядок малости по α производных $\partial\xi/\partial\eta_1$, $\partial\xi/\partial\eta_2$ заранее неизвестен. Предположение о том, что хотя бы одна из производных имеет порядок 1, например $\partial\xi/\partial\eta_1 \sim 1$, т.е. $\partial h/x_1 \sim \alpha$, приводит к противоречию. В таком случае из (3.19) будем иметь на границе $s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_3} = 0$. Но согласно (4.7) компонента $s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_3}$ равна нулю только при $\xi = 0$ или при $\eta_1 = 0$. Ни одно из этих уравнений форму границу описывать не может, что говорит о неправомерности предположения $\partial\xi/\partial\eta_1 \sim 1$.

Пусть $\partial\xi/\partial\eta_1 \sim 1/\alpha$, $\partial\xi/\partial\eta_2 \sim 1/\alpha$, т.е. $\partial h/x_1 \sim 1$, $\partial h/x_2 \sim 1$. Тогда, в главном по α приближении, условия (3.19)–(3.21) имеют вид

$$\begin{gathered} \eta_3 = \xi(\eta_1,\eta_2,\tau){:}\quad \alpha\left(p^{\{0\}} - s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1}\right)\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1} + s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_3} = 0, \quad g_1\alpha\left(p^{\{0\}} - s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_2}\right)\frac{\partial\xi}{\partial\eta_2} + s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_3} = 0 \\ \alpha s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_3}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1} + g_1 s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_3}\alpha\frac{\partial\xi}{\partial\eta_2} + p^{\{0\}} + s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1} + s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_2} = 0 \end{gathered} \tag{5.1}$$

Исключая $p^{\{0\}}$ из равенств (5.1) используя третье уравнение и подставляя компоненты девиатора (4.7) получим нелинейную систему уравнений для определения функции ξ:

$$\begin{gathered}
\alpha\left(\frac{2+g_1g_2}{\sqrt{1+g_1g_2+g_1^2g_2^2}}\right)\sqrt{1-\xi^2\left(\varepsilon_1^2\eta_1^2+\varepsilon_2^2\eta_2^2\right)}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1}+ \\
+\alpha^2\varepsilon_1\eta_1\xi\left(\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1}\right)^2+g_1\alpha^2\varepsilon_2\eta_2\xi\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_2}-\varepsilon_1\eta_1\xi=0 \\
\alpha g_1\left(\frac{2g_1g_2+1}{\sqrt{1+g_1g_2+g_1^2g_2^2}}\right)\sqrt{1-\xi^2\left(\varepsilon_1^2\eta_1^2+\varepsilon_2^2\eta_2^2\right)}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_2}+\alpha^2g_1^2\varepsilon_2\eta_2\xi\left(\frac{\partial\xi}{\partial\eta_2}\right)^2+ \\
+g_1\alpha^2\varepsilon_1\eta_1\xi\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_2}-\varepsilon_2\eta_2\xi=0
\end{gathered} \tag{5.2}$$

Необходимо учесть также интегральное условие нормировки (3.5).

Для приближенного интегрирования уравнения заметим, что если положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, то с учетом (3.5) получим $\xi \equiv 1$, что соответствует горизонтальной поверхности в квазистатическом решении. Представим функцию $\xi(\eta_1, \eta_2, \tau)$ в виде ряда по ε_1 и ε_2:

$$\xi(\eta_1,\eta_2,\tau)=1+\varepsilon_1\xi_1+\varepsilon_2\xi_2+\ldots;\quad \varepsilon_1<1,\quad \varepsilon_2<1, \tag{5.3}$$

и подставим в (5.2) и интегральное условие (3.5). В линейном приближении по ε_1, ε_2 для ξ_1 и ξ_2 будем иметь уравнения

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_2}=\frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_1}=0,\quad \frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_1}=\frac{\sqrt{1+g_1g_2+g_1^2g_2^2}}{2+g_1g_2}\frac{\eta_1}{\alpha},\quad \frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_2}=\frac{\sqrt{1+g_1g_2+g_1^2g_2^2}}{g_1(1+2g_1g_2)}\frac{\eta_2}{\alpha}, \tag{5.4}$$

откуда после интегрирования и нормировки получаем приближение границы пластины параболоидом

$$\xi\approx 1+\frac{\varepsilon_1\sqrt{1+g_1g_2+g_1^2g_2^2}}{2(2+g_1g_2)\alpha}\left(\eta_1^2-\frac{1}{3}\right)+\frac{\varepsilon_2\sqrt{1+g_1g_2+g_1^2g_2^2}}{2g_1(1+2g_1g_2)\alpha}\left(\eta_2^2-\frac{1}{3}\right), \tag{5.5}$$

моделирующее утоньшение в середине пластины и утолщение по краям при динамическом растяжении, т.е. шейкообразование при динамическом растяжении.

Найдем последний из неопределенных коэффициентов главного по α приближения (3.2) – давление $p^{\{0\}}$. Для этого воспользуемся третьим уравнением (4.6) и последним граничным условием (5.1). Следовательно всюду в области Ω_τ:

$$\begin{gathered}
p^{\{0\}}=-s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1}-s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_2}-\left(\alpha s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_3}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1}+g_1\alpha s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_3}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_2}\right)\bigg|_{\eta_3=\xi}= \\
=-\frac{1+g_1g_2}{\sqrt{1+g_1g_2+g_1^2g_2^2}}\sqrt{1-\eta_3^2\left(\varepsilon_1^2\eta_1^2+\varepsilon_2^2\eta_2^2\right)}-\alpha\eta_3\left(\varepsilon_1\eta_1\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1}+g_1\varepsilon_2\eta_2\frac{\partial\xi}{\partial\eta_2}\right)\bigg|_{\eta_3=\xi},
\end{gathered} \tag{5.6}$$

куда из (4.7) подставлены компоненты $s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1}$, $s^{\{0\}}_{\eta_2\eta_2}$ девиатора напряжений. В (5.6) входит функция, удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений (5.2). В качестве ее приближенного значения может быть использована аппроксимация (5.5). В отличие от квазистатического решения, с точностью до первых по α членов разложения (3.2), все компоненты тензора напряжений, кроме σ_{12} отличны от нуля.

Таким образом, переход от квазистатики к динамическому режиму растяжения пластины, характеризующийся достижением безразмерных фунций ε_1, ε_2 своих критических значений, влечет за собой образование и рост шейки в средней части пластины. Параметры напряженно-деформированного состояния и других инерционных эффектов точно или приближенно найдены выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 384 с.
2. *Радаев Ю.Н.* Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарск. гос. ун-та, 2004. 147 с.
3. *Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашов С.И.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985. 239 с.
4. *Сенашов С.И., Савостьянова И.Л.* Новые решения динамических уравнений идеальной пластичности // Сиб. ж. индустр. матем. 2019. Т. 22. № 4. С. 89–94.
5. *Сенашов С.И., Гомонова О.В., Савостьянова И.Л. и др.* Новые классы решений динамических задач пластичности // Ж. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2020. Т. 13. Вып. 6. С. 792–796.
6. *Shenoy V.B., Freund L.B.* Necking bifurcations during high strain rate extension// J. Mech.&Phys. of Solids. 1999. V. 47. P. 2209–2233.
7. *Mercier S., Molinari A.* Predictions of bifurcation and instabilities during dynamic extension // Int. J. Solids Struct. 2003. V. 40. P. 1995–2016.
8. *Цветков И.М.* Динамическое растяжение листа из идеально жесткопластического материала // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2022. № 6. С. 51–60.
9. *Георгиевский Д.В.* Динамические режимы растяжения стержня из идеально жесткопластического материала // ПМТФ. 2021. Т 62. № 5. С. 119–130.
10. *Цветков И.М.* Динамическое осесимметричное растяжение тонкого круглого идеально жесткопластического слоя // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 5. С. 79–88.
11. *Taha F., Graf A., Hosford W.* Plane-strain tension tests on aluminum aloy sheet // J. Eng. Mater. Technol. (Trans. ASME) 1995. V. 117. № 2. P. 168–171.
12. *Georgievskii D.V., Muller W.H., Abali B.E.* Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2019. V. 99. № 12. P. 1–11.
13. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений, М.: Мир, 1984. 535 с.

Dynamic Regimes of Biaxial Stretching of a Thin Ideally Rigid-Plastic Rectangular Plate

I. M. Tsvetkov[a,#]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: cvetkoviv@yandex.ru*

The stress-strain state arising during dynamic tension of a homogeneous rectangular plate of an incompressible ideally rigid-plastic material, which obeys the Mises–Hencky criterion, is considered. The upper and lower bases are stress-free, longitudinal velocities are set at the ends. The possibility of deformation of the upper and lower sides of the plate is taken into account, which simulates neck formation and further development of the neck. A small geometric parameter is introduced – the ratio of the average thickness of the plate to its length along one of the directions. At different time intervals, the order of smallness of the dimensionless functions characterizing the dynamic stretching mode may be different with respect to the geometric parameter, which determines one or another stretching mode. Two such characteristic modes have been identified, one is associated with a sufficiently high rate of removal of the ends of the plate from each other, the second with acceleration. In the second case, an analysis was carried out using the method of asymptotic integration, which allows us to approximately find the parameters of the stress-strain state.

Keywords: ideal plasticity, yield stress, plate, tension, neck, quasi-static, dynamics, strain rate, stress, asymptotic expansions

REFERENCES

1. *Zadoyan M.A.* Spatial Problems of Plasticity Theory. Moscow: Nauka, 1992. 384 p. (in Russian)
2. *Radaev Y.N.* Spatial Problem of Mathematical Theory of Plasticity. Samara: Izd-vo Samar. Gos. Univ., 2004. 147 p. (in Russian)
3. *Annin B.D., Bytev V.O., Senashov S.I.*, Group Properties of the Equations of Elasticity and Plasticity. Novosibirsk: Nauka, 1985. 239 p. (in Russian)
4. *Senashov S.I., Savostyanova I.L.* New solutions of dynamical equations of ideal plasticity // J. Appl.&Industr. Math., 2019, vol. 13, pp. 740–745.
5. *Senashov S.I., Savostyanova I.L. et al.* New classes of solutions of dynamical problems of plasticity // J. Sib. Fed. Univ. Math.&Phys., 2020, vol. 13 (6), pp. 792–796.
6. *Shenoy V.B., Freund L.B.* Necking bifurcations during high strain rate extension // J. Mech.&Phys. of Solids, 1999, vol. 47, pp. 2209–2233.
7. *Mercier S., Molinari A.* Predictions of bifurcation and instabilities during dynamic extension // Int. J. Solids Struct., 2003, viol. 40, pp. 1995–2016.
8. *Tsvetkov I.M.* Dynamic tension of a sheet made of rigid-plastic material // Bull. MSU. Mech., 2022, vol. 77, no. 6, pp. 177–185.
9. *Georgievskii D.V.* Dynamic tension of a rod made of an ideally rigid-plastic material // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2021, vol. 62, pp. 806–815.
10. *Tsvetkov I.M.* Dynamic axisymmetric tension of a thin round ideally rigid-plastic layer // Mech. Solids, 2023. (in Press)
11. *Taha F., Graf A., Hosford W.* Plane-strain tension tests on aluminum aloy sheet // J. Eng. Mater. Technol. (Trans. ASME), 1995, vol. 117, no. 2, pp. 168–171.
12. *Georgievskii D.V., Muller W.H., Abali B.E.* Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 2019, vol. 99, no. 12, pp. 1–11.
13. *Nayfeh A.H.* Introduction to Perturbation Techniques. N.Y.: Wiley, 1981.