

УДК 534.1+517.984.5

Светлой памяти Л.Д. Акуленко

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ© 2023 г. С. В. Нестеров^{1,*}¹Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия

*e-mail: bayd@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 05.05.2023 г.

После доработки 15.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Настоящая статья посвящается памяти Л.Д. Акуленко, с которым автор статьи работал более 40 лет. В рамках разработанного совместно метода ускоренной сходимости был решен ряд классов задач относящихся к задачам Штурма–Лиувилля. По результатам исследований было опубликовано несколько десятков статей и обобщающая монография [1]. В данной работе изложена адаптация метода к решению сингулярных задач Штурма–Лиувилля.

Ключевые слова: метод ускоренной сходимости, задача Штурма–Лиувилля, сингулярность

DOI: 10.31857/S0032823523050119, **EDN:** VGZAYO

1. Метод ускоренной сходимости. Пусть задана задача Штурма–Лиувилля с граничными условиями первого, второго или третьего рода

$$\begin{aligned} & (p(x)u')' + [\lambda r(x) - q(x)]u = 0 \\ & u(0) = u(1) = 0; \quad u(0) = u'(1) = 0; \quad u(0) = 0, \quad \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $p(x), r(x), q(x)$ — известные функции. Предполагается, что они достаточно гладкие и могут быть определены на более широком интервале $0 \leq x \leq 1 + a$, кроме того справедливы неравенства

$$0 < p_0 \leq p(x) \leq p^+ < \infty, \quad 0 < r_0 \leq r(x) \leq r^+ < \infty, \quad |q(x)| < \infty$$

Требуется найти такие значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (1.1), удовлетворяющие краевым условиям.

Опишем подробно процедуру нахождения первого собственного числа λ_1 . Оценку сверху можно получить, например, используя принцип Рэлея–Ритца

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^* = \frac{\int_0^1 (p(x)\psi'^2 + q\psi^2) dx}{\int_0^1 r(x)\psi^2 dx}, \quad (1.2)$$

где $\psi(0) = \psi(1) = 0$, функция $\psi(x)$ не имеет нулей на интервале $0 < x < 1$.

Алгоритм дальнейших действий нахождения собственного значения может быть сформулирован следующим образом:

1. Построить конструктивный метод получения оценки снизу λ_{1*} ($\lambda_{1*} < \lambda_1 < \lambda_1^*$);
2. Задать критерий близости λ_1 и λ_1^* ;
3. Определить процедуру уточнения собственных чисел;
4. Построить процедуру уточнения собственных чисел с любой наперед заданной точностью;
5. Получить последующие собственные числа $\lambda_2, \lambda_3, \dots$;
6. Для найденных собственных чисел, построить собственные функции им соответствующие;
7. Обобщить алгоритм на краевые условия второго и третьего рода.

2. Системы сравнения. Будем считать, что оценка сверху известна λ_1^* . Найдем решение задачи Коши I вида

$$I. \quad (p(x)u')' + [\lambda_1^* r(x) - q(x)]u = 0; \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \quad (2.1)$$

Решение задачи Коши I $u = V_1(x, \lambda_1^*)$ обладает следующими свойствами $V_1(0, \lambda_1^*) = 0$, т.е. выполняется краевое условие в левой граничной точке. Далее, согласно второй осцилляционной теореме Штурма существует такое значение параметра $\xi < 1$, что $V_1(\xi, \lambda_1^*) = 0$. Задачу Коши I будем решать численно, и в процессе решения определим положение точки ξ .

Найдем решение задачи Коши II вида

$$II. \quad (p(x)u')' + [\xi^2 \lambda_1^* r(x) - q(x)]u = 0; \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \quad (2.2)$$

Обозначим решение задачи (2.2), отвечающее оценке λ_1^* как $u = W_1(x, \xi^2 \lambda_1^*)$. Тогда если функция $W_1(x, \xi^2 \lambda_1^*) > 0$ на интервале $0 < x \leq 1$, то $\xi^2 \lambda_1^*$ — оценка первого собственного числа снизу. Принимая во внимание следствие второй осцилляционной теоремы Штурма, имеем

$$\xi^2 \lambda_1^* \leq \lambda_1$$

Если существует значение $x = \xi_1$ ($\xi_1 < 1$), для которого $W_1(\xi_1, \xi^2 \lambda_1^*) = 0$, то в этом случае имеем улучшенную оценку сверху

$$\lambda_1 \leq \xi^2 \lambda_1^* < \lambda_1^*$$

Значение параметра ξ_1 определяется в ходе численного решения задачи Коши II.

В качестве критерия близости λ_1 и λ_1^* можно выбрать следующий

$$\varepsilon = 1 - \xi \ll 1$$

3. Теория возмущений. В уравнении (1.1) введем новую независимую переменную $y = \xi x$, параметр $\Lambda = \lambda/\xi^2$ и функцию $u = U(y, \varepsilon)$. Тогда первая краевая задача (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} & (p(y)U')' + [\Lambda r(y) - q(y)]U = \\ & = -\varepsilon[(yp'U')' + (\Lambda yr' - 2q - yq')U] + \varepsilon^2 H_2 \\ & U(0, \varepsilon) = U(x, \varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение задачи (3.1) ищем в виде рядов

$$U = U_1^{(0)} + \varepsilon U_1^{(1)} + \varepsilon^2 U_1^{(2)} + \dots, \quad \Lambda = \Lambda_1^{(0)} + \varepsilon \Lambda_1^{(1)} + \varepsilon^2 \Lambda_1^{(2)} + \dots \quad (3.2)$$

Подставляя ряды (3.2) в краевую задачу (3.1) в нулевом приближении получаем

$$\begin{aligned} & \left(p(y) U_1^{(0)'} \right)' + \left[\Lambda_1^{(0)} r(y) - q(y) \right] U_1^{(0)} = 0 \\ & U_1^{(0)}(0) = U_1^{(0)}(\xi) = 0; \quad U_1^{(0)} = V_1(y, \lambda_1^*); \quad \Lambda_1^{(0)} = \lambda_1^* \end{aligned} \quad (3.3)$$

Функция $V_1(y, \lambda_1^*)$ является решением уравнения (2.1) и удовлетворяет поставленным краевым условиям (3.3).

В следующем (первом) приближении имеем

$$\begin{aligned} & \left(p(y) U_1^{(1)'} \right)' + \left[\lambda_1^* r(y) - q(y) \right] U_1^{(1)} = \\ & = -\Lambda_1^{(1)} r(y) V_1 - \left(y p' V_1^* \right)' - \left[\lambda_1^* y r' - 2q - y q' \right] V_1 \\ & U_1^{(1)}(0) = U_1^{(1)}(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для того, чтобы краевая задача имела решение необходимо, чтобы правая часть уравнения (3.4) была ортогональна функции $V_1(y, \lambda_1^*)$ на отрезке $0 \leq y \leq \xi$. Это условие позволяет найти выражение для $\Lambda_1^{(1)}$ в виде

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{(1)} &= -\frac{1}{\|V_1\|^2} \int_0^\xi \left[\left(y p' V_1^* \right)' + \left(\lambda_1^* y r' - 2q - y q' \right) V_1 \right] V_1 dy = \\ &= -\frac{1}{\|V_1\|^2} p(\xi) \xi V_1'^2(\xi, \lambda_1^*) + 2\lambda_1^*, \end{aligned}$$

$$\text{где } \|V_1\|^2 = \int_0^\xi r(y) V_1^2 dy.$$

Возвращаясь к старым переменным и учитывая, что $\varepsilon \ll 1$, имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= \xi^2 \left(\lambda_1^* - \frac{\varepsilon}{\|V_1\|^2} p(\xi) \xi V_1'^2(\xi, \lambda_1^*) + 2\varepsilon \lambda_1^* \right) = \\ &= \lambda_1^* - \frac{\varepsilon}{\|V_1\|^2} p(\xi) \xi V_1'^2(\xi, \lambda_1^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из формулы (3.5) следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо соотношение

$$\left. \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = -p(1) \frac{(U_1'(1))^2}{\|U_1\|^2} \leq 0 \quad (3.6)$$

Для остальных собственных чисел λ_n эта формула также имеет место, и она показывает, что вместе с уменьшением ширины интервала происходит возрастание собственных чисел.

4. Метод ускоренной сходимости. Формула (3.5) позволяет построить метод ускоренной сходимости, алгоритм которого может быть сформулирован в виде пяти пунктов:

1. Определяется (любым способом) оценка сверху собственного значения λ_1^* ;
2. Решается задача Коши I (2.1). Находится функция $V_1(x, \lambda_1^*)$;
3. Определяется решение ξ уравнения $V_1(x, \lambda_1^*) = 0$ (простейший способ решения — линейная интерполяция);

4. Вычисляется уточненное значение собственного числа

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^* - \varepsilon p(1) \frac{V_1'^2(1)}{\|V_1\|^2};$$

5. Повторение процедуры 1–4 с заменой исходной оценки собственного значения с λ_1^* на уточненное $\lambda_1^{(1)}$. По результатам расчетов определяются новые значения параметров ξ_1 , $\varepsilon_1 = 1 - \xi_1$

$$\lambda_1^{(2)} = \lambda_1^{(1)} - \varepsilon_1 p(1) \frac{V_1'^2(1)}{\|V_1\|^2} \quad (4.1)$$

и т.д. Вычисления повторяются до тех пор, пока собственное значение λ_1 не получено с требуемой точностью. После того, как найдено первое собственное число λ_1 , из решения задачи Коши I находится первая собственная функция. Ранее было показано [1], что имеет место квадратичная сходимость по параметру ε .

$$|\lambda_1 - \lambda_1^{(1)}| \leq C\varepsilon^2, \quad |\lambda_1 - \lambda_1^{(2)}| \leq C\varepsilon^4, \text{ и т.д.,}$$

где λ_1 – точное значение первого собственного числа.

Если поставлены краевые условия второго или третьего рода, то вместо формулы (3.5) будут следующие

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^* - \frac{\varepsilon}{\|V_1\|^2} \left[\lambda_1^* r(\xi) - q(\xi) \right] V_1^2(\xi, \lambda_1^*) + O(\varepsilon^2) \quad (4.2)$$

Здесь ξ – корень уравнения $\frac{dV_1}{dx}(\xi, \lambda_1^*) = 0$.

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^* - \frac{\varepsilon}{\|V_1\|^2} \left\{ p(\xi) V_1'^2(\xi, \lambda_1^*) + \left[\lambda_1^* r(\xi) - q(\xi) \right] V_1^2(\xi, \lambda_1^*) \right\} + O(\varepsilon^2) \quad (4.3)$$

Здесь ξ – корень уравнения $\alpha V(\xi, \lambda_1^*) + \beta \frac{dV_1}{dx}(\xi, \lambda_1^*) = 0$.

5. Численные примеры

Пример 1: Дана задача Штурма–Лиувилля

$$u'' + \lambda(1 + \sin \pi x)u = 0; \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (5.1)$$

С помощью функции $\psi_1 = \sin(\pi x)$ согласно принципу Рэлея–Ритца находим оценку сверху $\lambda_1 \leq \lambda_1^* = 5.33827$. Интегрирование задачи Коши I приводит к

$$\xi = 0.99942, \quad \varepsilon = 5.8 \times 10^{-4}, \quad \lambda_1^* \xi^2 = 5.33205$$

Имеем двустороннюю оценку

$$5.33205 \leq \lambda_1 \leq 5.33827$$

Уточнение согласно формуле (3.5) после первой итерации дает $\lambda_1^{(1)} = 5.33284$. Национальное бюро стандартов США приводит “точное” значение $\lambda_1 = 5.33274$. Относительное отклонение от полученного в рамках метода ускоренной сходимости значения собственного числа в первом приближении составляет $\Delta\lambda/\lambda_1 \leq 10^{-5}$.

Пример 2: Рассмотрим другой пример — задачу Штурма–Лиувилля, имеющую точное решение

$$u'' + \lambda(1+x^2)^{-2}u = 0; \quad u(0) = u(1) = 0$$

Точное решение дает

$$\lambda_n = 16n^2 - 1; \quad \lambda_1 = 15, \quad \varphi_1 = 2x \frac{1-x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Оценка сверху: $\lambda_1 < \lambda_1^* = 15.33728 \rightarrow \xi = 0.98383; \varepsilon = 1.617 \times 10^{-2}$

Оценка снизу: $\lambda_1^* \xi^2 = 14.83533$

Первая итерация по методу ускоренной сходимости $\lambda_1^{(1)} = 14.99719$; вторая итерация $\lambda_{12} = 15.000005$.

Расчет собственных чисел высших порядков. Для краевой задачи (5.1) согласно методу Рэля–Ритца находим оценки сверху $\lambda_2^* = 2.37186\pi^2$; $\lambda_3^* = 5.49612\pi^2$. Далее алгоритм вычисления старших собственных значений совпадает с алгоритмом расчета основного собственного значения. Однако, решение задачи Коши $u = V_1(x, \lambda_1^*)$ обращается в нуль на отрезке $(0, 1)$ в нескольких точках (в двух для второго собственного значения, в трех — для третьего), одна из которых близка к единице, и в качестве параметра ξ (номер три алгоритма метода ускоренной сходимости) следует выбрать значение абсциссы этой точки. Тогда, учитывая сделанные замечания, после второй итерации находим

$$\lambda_2^{(2)} = 23.407186, \quad \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_2} \leq 4.5 \times 10^{-6}; \quad \lambda_3^{(2)} = 53.772, \quad \frac{\Delta\lambda_3}{\lambda_3} \leq 7.0 \times 10^{-5}$$

6. Сингулярные задачи Штурма–Лиувилля. Пусть коэффициенты уравнений задачи Штурма–Лиувилля имеют особенность в одной из граничных точек. Тогда алгоритм метода ускоренной сходимости (пункты 1–5 из разд. 4) можно распространить на случай сингулярных задач путем введения малой регуляризирующей добавки устраняющей сингулярный характер зависимости коэффициентов внутри интервала решения задачи Штурма–Лиувилля. Затем последовательно уменьшая величину регуляризатора будем предполагать, что последовательность найденных собственных значений регуляризованных задач Штурма–Лиувилля будет сходиться к собственному значению сингулярной задачи.

Рассмотрим описанную выше процедуру на примере задачи определения собственных значений и функций радиально симметричных поперечных колебаний круглой неоднородной мембраны (рис. 1)

$$T \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - r \rho(r) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (6.1)$$

где T — натяжение, $\rho(r) = \rho_0 \exp(br^2/R_0^2)$ — плотность, а R_0 — радиус мембраны.

С краевыми условиями первого рода

$$w(R_0, t) = 0, \quad |w(0, t)| \leq H \quad (6.2)$$

После разделения переменных $w = u(r) \exp(i\Omega t)$ задача (6.1)–(6.2) в безразмерном виде ($z = r/R_0$, $\omega = \sqrt{\rho_0/T} R_0 \Omega$) сведется к сингулярной задаче Штурма–Лиувилля

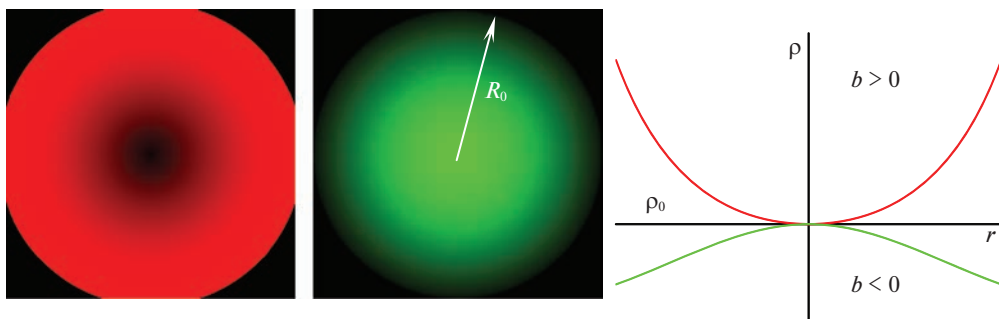


Рис. 1. Геометрия масс мембраны. Радиальное распределение плотности $\rho(r) = \rho_0 \exp(br^2/R_0^2)$. Случаю $b > 0$ соответствует красный цвет, $b < 0$ – зеленый.

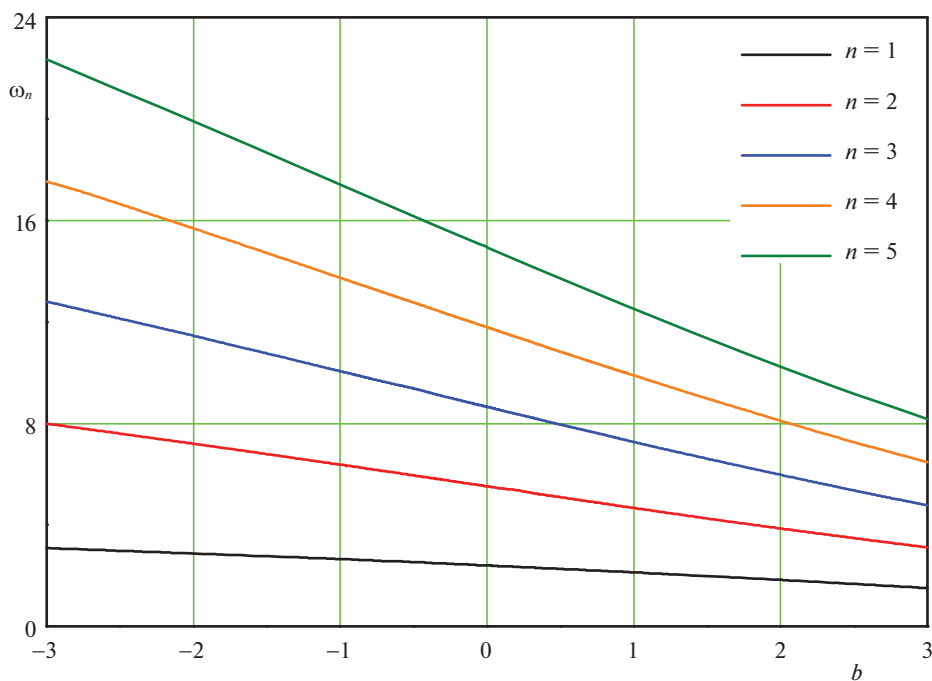


Рис. 2. Зависимость безразмерных собственных частот от параметра b .

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{du}{dz} \right) + \omega^2 z e^{bz^2} u = 0; \quad u(1) = 0, \quad |u(0)| \leq M \quad (6.3)$$

Заменим сингулярную задачу (6.3) семейством регуляризованных задач вида

$$\frac{d}{dz} \left((z + a_m) \frac{du_m}{dz} \right) + \omega^2 z e^{bz^2} u_m = 0; \quad u_m(1) = 0, \quad u'_m(0) = 0, \quad a_m = \{10^{-3}, 10^{-4}, \dots\} \quad (6.4)$$

Будем предполагать, что собственные частоты задачи (6.4) при $m = 1, 2, \dots$ образуют сходящуюся последовательность, так, что пределом при $m \rightarrow \infty$ являются собственные значения сингулярной задачи (6.2)–(6.3) $\omega_1(a_m) \rightarrow \omega_1$, $\omega_2(a_m) \rightarrow \omega_2$, $\omega_3(a_m) \rightarrow \omega_3$, Зависимость собственных частот от плотностного параметра b приведена на рис. 2.

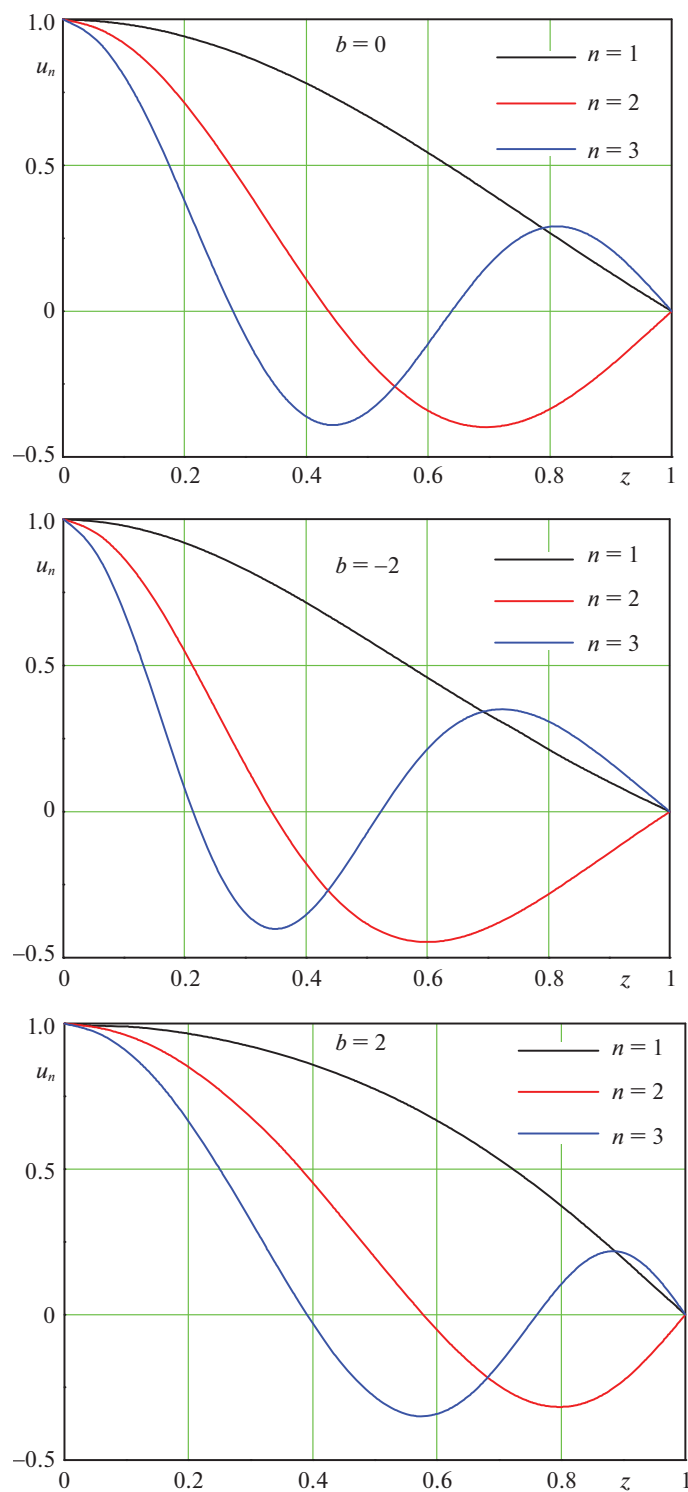


Рис. 3. Профили собственных функций при различном значении параметра b .

В качестве базисных функций используем функции Бесселя $J_0(\gamma_n z)$ (где $J_0(\gamma_n) = 0$) и метод Рэлея—Ритца для контроля полученных результатов. Можно показать, что проведенные расчеты по методу ускоренной сходимости для краевой задачи (6.4) дают достаточно хорошее приближение для первых пяти собственных чисел краевой задачи (6.3) для значений параметра $-3 \leq b \leq 3$. По найденным собственным значениям были построены профили собственных функций задачи (рис. 3).

Отметим, что решение приведенной выше задачи о собственных колебаниях мембраны, плотность материала которой изменяется радиально, была решена в [2] для малых значений параметра $|b| \leq 0.25$. Для описанного выше метода решения такого ограничения на значения параметра не существует.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 123021700050-1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Akulenko L.D., Nesterov S.V. High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC Press, 2005. 255 p.
2. Ratneswar S.G., Ranjit Gh. Method of perturbation applied to the vibration problem of a circular membrane of varying density // JASA. 1964. V. 36. № 6. P. 1118–1120.
3. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
4. Нестеров С.В., Байдулов В.Г. Использование метода ускоренной сходимости в сингулярных задачах Штурма—Лиувилля // Сб. матер. 13-й международной конференции — школы молодых ученых “Волны и вихри в сложных средах”, Москва, 30 ноября—02 декабря 2022. С. 194–195.

Using the Accelerated Convergence Method for Solving the Singular Sturm—Liouville Problem

S. V. Nesterov^{a, #}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: bayd@ipmnet.ru*

This article is dedicated to the memory of L.D. Akulenko, with whom the author of the article worked for more than 40 years. Within the framework of the accelerated convergence method developed jointly, a number of classes of problems related to the Sturm—Liouville problems were solved. Based on the research results, several dozen articles and a generalizing monograph [1] were published. In this paper, we describe the adaptation of the method to solving singular Sturm—Liouville problems.

Keywords: accelerated convergence method, Sturm—Liouville problem, singularity

REFERENCES

1. Akulenko L.D., Nesterov S.V. High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC Press, 2005. 255 p.
2. Ratneswar S.G., Ranjit Gh. Method of perturbation applied to the vibration problem of a circular membrane of varying density // JASA, 1964, vol. 36, no. 6, pp. 1118–1120.
3. Sretensky L. The Theory of Wave Motion of Fluid. Moscow: Nauka, 1977. 815 p. (in Russian)
4. Nesterov S.V., Baidulov V.G. Using the accelerated convergence method in singular Sturm—Liouville problems // Sb. Mater. 13th Int. Conf. — School of Young Scientists “Waves and Vortices in Complex Media”, Moscow, Nov. 30 — Dec. 02, 2022, pp. 194–195.