УДК 531.36

ДВИЖЕНИЕ ИЗМЕНЯЕМОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ВРЕМЕНИ СИЛОВОМ ПОЛЕ

© 2023 г. А. А. Буров[1,*]

[1]ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

**e-mail: jtm@narod.ru*

Поступила в редакцию 30.05.2023 г.
После доработки 30.09.2023 г.
Принята к публикации 10.10.2023 г.

Рассматривается задача о движении вокруг неподвижной точки изменяемого тела в зависящем от времени силовом поле. Указываются условия, при которых уравнения движения сводятся к классическим уравнениям Эйлера–Пуассона, описывающем движения твердого тела в поле притяжения. Обсуждаются вопросы существования первых интегралов и устойчивости установившихся движений.

Ключевые слова: движение изменяемого тела с неподвижной точкой, зависящее от времени силовое поле, замена времени, замена переменных, существование интегрируемых случаев, неинтегрируемость уравнений движения, существование установившихся движений, бифуркационные диаграммы

DOI: 10.31857/S0032823523060024, **EDN:** AEBWIS

1. Постановка задачи и уравнения движения. Пусть $OX_\alpha X_\beta X_\gamma$ – абсолютная система отсчета (АСО), $Ox_1x_2x_3$ – подвижная прямоугольная декартова система отсчета (ПСО), оси которой могут свободно вращаться вокруг неподвижной точки O. Пусть тело образовано точками P_1, ..., P_n точки массами m_1, ..., m_n. Положение этих точек задается векторами $\overrightarrow{OP}_k$, проекции которых на оси ПСО имеют вид

$$\mathbf{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k})^T$$

Будем считать, что законы движения точек относительно ПСО заданы соотношениями

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k(t), \tag{1.1}$$

где $x_{1k}(t)$, $x_{2k}(t)$, $x_{3k}(t)$ – гладкие функции времени.

Пусть

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} -$$

ортогональная матрица, по строкам которой записаны единичные векторы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ АСО, заданные своими проекциями на оси ПСО (см., например, [1], стр. 56 и далее, а также [2]). Эта матрица зависит от времени $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t)$, причем кососимметричная матрица

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{S}^{-1}\frac{d\mathbf{S}}{dt} \iff \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.2}$$

называется матрицей угловой скорости:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

По ее компонентам определяется вектор угловой скорости ПСО относительно АСО

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T,$$

заданный в проекциях на оси ПСО.

При этом матричное равенство (1.2) можно записать в виде системы уравнений Пуассона

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \tag{1.3}$$

Согласно формуле Эйлера скорость точки P_k в момент времени t определяется соотношением

$$\mathbf{v}_k(t) = \dot{\mathbf{x}}_k(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k(t)$$

Тогда кинетическая энергия системы в целом определяется как

$$\begin{gathered} T = \frac{1}{2}\left(m_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + \ldots + m_n(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n)\right) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\dot{\mathbf{x}}_k(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k(t)\right) \equiv \\ \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\right) + \left(\mathbf{K}(t), \boldsymbol{\omega}\right) + T_0(t), \end{gathered}$$

где

$$\mathbf{I}(t) = \begin{pmatrix} \sum m_k\left(x_{2k}^2(t) + x_{3k}^2(t)\right) & -\sum m_k x_{1k}(t) x_{2k}(t) & -\sum m_k x_{1k}(t) x_{3k}(t) \\ -\sum m_k x_{1k}(t) x_{2k}(t) & \sum m_k\left(x_{3k}^2(t) + x_{1k}^2(t)\right) & -\sum m_k x_{2k}(t) x_{3k}(t) \\ -\sum m_k x_{1k}(t) x_{3k}(t) & -\sum m_k x_{2k}(t) x_{3k}(t) & \sum m_k\left(x_{1k}^2(t) + x_{2k}^2(t)\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}(t) = \begin{pmatrix} \sum m_k\left(x_{2k}(t)\dot{x}_{3k}(t) - x_{3k}(t)\dot{x}_{2k}(t)\right) \\ \sum m_k\left(x_{3k}(t)\dot{x}_{1k}(t) - x_{1k}(t)\dot{x}_{3k}(t)\right) \\ \sum m_k\left(x_{1k}(t)\dot{x}_{2k}(t) - x_{2k}(t)\dot{x}_{1k}(t)\right) \end{pmatrix}$$

Здесь суммирование осуществляется по всем точкам: индекс k пробегает значения от 1 до n. Функция $T_0(t)$ зависит только от времени и при дальнейшем составлении уравнений движения роли не играет.

Согласно теореме об изменении момента количеств движения уравнения движения имеют вид

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right) = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}(t)\right) \Leftrightarrow \\ \left(\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}(t)\right) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ – момент внешних сил.

Замечание 1. Уравнения (1.4) совместно с уравнениями Пуассона (1.3) описывают движения гиростата с переменным тензором инерции и переменным гиростатическим моментом. Известны различные постановки задачи о движении тел с осесимметричными роторами (см., напр., [3, 4]). Движению гиростата с переменным гиростатическим моментам посвящена монография [5].

Утверждение 1. Если существует функция $f(t) > 0\ \forall t$, такая, что

$$\mathbf{I}(t) = f(t)\mathbf{I}_\star, \quad \mathbf{K}(t) = \mathbf{K}_\star, \quad f(t)\mathbf{Q}(t,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{Q}_*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}), \tag{1.5}$$

где тензор $\mathbf{I}_\star$ и вектор $\mathbf{K}_\star$ постоянны в осях ПСО, а вектор $\mathbf{Q}_*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ не зависит явно от времени, то заменой независимой переменной $t \to t_\star$:

$$f(t)\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt_\star} \tag{1.6}$$

и переменной $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega}_\star = f(t)\boldsymbol{\omega} \tag{1.7}$$

уравнения (1.4), (1.3) приводимы к виду

$$\frac{d}{dt_\star}(\mathbf{I}_\star\boldsymbol{\omega}_\star + \mathbf{K}_\star) = (\mathbf{I}_\star\boldsymbol{\omega}_\star + \mathbf{K}_\star)\times\boldsymbol{\omega}_\star + \mathbf{Q}_\star(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \tag{1.8}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt_\star} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\omega}_\star, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt_\star} = \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\omega}_\star, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt_\star} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega}_\star \tag{1.9}$$

Правые части уравнений (1.8), (1.9) не зависят явно от времени и имеют вид уравнений движения гиростата под действием не зависящего явно от времени крутящего момента.

Доказательство. Подставим условия (1.5) в уравнения (1.4)

$$\frac{d}{dt}(f(t)\mathbf{I}_\star\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_\star) = (f(t)\mathbf{I}_\star\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_\star)\times\boldsymbol{\omega} + f^{-1}(t)\mathbf{Q}_\star(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$$

и домножим левую и правую части этого уравнения на $f(t)$

$$f(t)\frac{d}{dt}(f(t)\mathbf{I}_\star\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_\star) = f(t)(f(t)\mathbf{I}_\star\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_\star)\times\boldsymbol{\omega} + f(t)f^{-1}(t)\mathbf{Q}_\star(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \tag{1.10}$$

Применение к уравнениям (1.10) соотношений (1.6) и (1.7) приводит их к виду (1.8), что и требовалось.

Что касается уравнений Пуассона (1.3), то также домножая левую и правую части на $f(t)$ и, используя замену переменных (1.7), получаем уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt_\star} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\omega}_\star, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt_\star} = \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\omega}_\star, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt_\star} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega}_\star$$

отличающиеся от уравнений (1.3) лишь обозначениями.

Замечание 2. В постановке задачи предполагается, что точки P_1, P_2, ..., P_n совершают наперед заданное движение относительно подвижной системы отсчета, описываемое соотношениями (1.1). Понятно, что для обеспечения такого относительного движения к этим точкам надо приложить некоторые управляющие воздействия – силы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$. После того, как то или иное вращательное движение системы, определяемое уравнениями (1.3), (1.4) найдено, управляющие силы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$ могут быть найдены из уравнений

$$m_k\frac{d}{dt_\star}(\dot{\mathbf{x}}_k + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}_k) = m_k(\dot{\mathbf{x}}_k + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}_k)\times\boldsymbol{\omega} + \mathbf{F}_k + \mathbf{u}_k; \quad k = 1,\ldots,n,$$

где $\mathbf{F}_k$ – активные силы, действующие на точки P_1, P_2, ..., P_n.

2. Случай потенциальности внешних сил. Предположим, что система совершает движение в потенциальном поле внешних сил с потенциалом

$$U = U(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \tag{2.1}$$

выражающим зависимость от времени и от ориентации тела. При этом момент внешних сил, как известно, записывается как

$$\mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \tag{2.2}$$

Утверждение 2. Если потенциал (2.1) имеет вид

$$f(t) U(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = U_*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \tag{2.3}$$

то уравнения движения сводятся к не зависящим от времени уравнениям Эйлера–Пуассона, описывающим вращение тела в трехмерном евклидовом пространстве.

Доказательство сводится к непосредственной подстановке условий (2.3) в соотношение для момента (2.2).

Рассмотрим некоторые известные специальные случаи такого потенциала, для которых предлагаемая замена переменных и времени приводит к классическим задачам механики твердого тела.

3. Движение тела в однородном переменном поле. Пусть поле, в котором совершает движение система, однородно, но, в отличие от привычного поля силы тяжести, меняется со временем. Для определенности можно считать, что это поле направлено вдоль оси OX_γ. Тогда потенциал в общем случае записывается как

$$U(t, \boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{a}(t), \boldsymbol{\gamma})$$

При этом условие теоремы записывается как

$$f(t) \cdot \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_\star, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{a}_\star$ – постоянный вектор.

Замечание 3. В случае, когда речь идет об однородном, но переменном поле силы тяжести с ускорением $\mathbf{g}(t)$, направленным в сторону, противоположную вектору $\boldsymbol{\gamma}$, вектор $\mathbf{a}(t)$ можно представить в виде

$$\mathbf{a}(t) = -m\mathbf{g}(t) \boldsymbol{\ell}(t),$$

где $m = m_1 + \ldots + m_n$ – масса системы, $\ell(t) = \mathbf{OC}(t)$ – вектор, определяющий положение центра масс системы – точку C.

Утверждение 3. Пусть выполнено условие (3.1).

– При $\mathbf{K}_\star = 0$ уравнения (1.8), (1.3), а вместе с ними – и уравнения (1.4), (1.2), вполне интегрируемы во всех случаях, известных из механики тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Речь идет о случаях Эйлера, Лагранжа, Ковалевской и Горячева–Чаплыгина. Также при выполнении указанных условий имеют место многочисленные случаи существования частных интегралов, включая случай Гесса (см. детали, напр., в [1, 6–8]). В общем случае уравнения движения системы оказываются неинтегрируемыми (см. [9–11]).

– При $\mathbf{K}_\star \neq 0$ и уравнения (1.8), (1.3), а вместе с ними – и уравнения (1.4), (1.2), вполне интегрируемы во всех случаях, известных из механики тяжелого гиростата. Речь идет о случае Жуковского–Вольтерра, случае динамической симметрии, а также случаях Ковалевской–Яхья [12, 13] и Сретенского [14]. Также при выполнении указанных условий имеют место случаи существования частных интегралов и решений, включая случай Сретенского, аналогичный случаю Гесса (также см. [15]). В общем случае уравнения движения системы также оказываются неинтегрируемыми (см. [16]).

Замечание 4. В рассматриваемый класс систем не попадают тела с переменным гироскопическим моментам (см., напр., [5]).

Утверждение 4. При выполнении условия (3.1) установившимся движениям системы (1.8), (1.9) – положениям равновесия и равномерным вращениям – единственным образом ставятся в соответствие движения системы (1.4), (1.3). При этом движение, равномерное в новом времени, в исходном времени таковым не будет. Также сохраняются вид и свойства бифуркационных диаграмм (см., в частности, [17–22]) относительно тяжелого твердого тела и [23–26] относительно тяжелого гиростата.

Замечание 5. Устойчивость записанных в исходном времени движений из утверждения 4 в общем случае требует отдельного обсуждения.

Замечание 6. Одним из наиболее естественных источников зависимости однородного поля от времени является колебания точки подвеса (см., напр., [27]).

4. Движение тела в линейном переменном поле. Предположим теперь, что закон движения точек организован таким образом, что центр масс совпадает с неподвижной точкой. Тогда в квадратичном приближении поле притяжения со стороны распределенных притягивающих центров определяется потенциалом вида (см., напр., [28])

$$U = \frac{1}{2}\left(\mu_\alpha\left(\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\right) + \mu_\beta\left(\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\right) + \mu_\gamma\left(\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}\right)\right)$$

Утверждение 5. Если коэффициенты $\mu_\alpha(t)$, $\mu_\beta(t)$, $\mu_\gamma(t)$ таковы, что

$$f^2(t)\mu_\alpha(t) = \mu_{\alpha\star}, \quad f^2(t)\mu_\beta(t) = \mu_{\beta\star}, \quad f^2(t)\mu_\gamma(t) = \mu_{\gamma\star},$$

где $\mu_{\alpha\star}$, $\mu_{\beta\star}$ и $\mu_{\gamma\star}$ – постоянные, то условие (2.3) утверждения 2 оказываются выполненными, а сами уравнения (1.8), (1.3) при $\mathbf{K}_\star = 0$ являются вполне интегрируемыми [28] (см. также [29–31]).

Замечание 7. Инвариантные многообразия в упомянутом интегрируемом случае изучались в [32].

Замечание 8. Изучаемые уравнения посредством преобразования Лежандра в общем случае приводятся к виду

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\times\frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\alpha}\times\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta}\times\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma}\times\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}\times\frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}\times\frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}\times\frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}$$

с функцией Гамильтона

$$H(\mathbf{M},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},t) = f(t)\,H(\mathbf{M},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$$

Для таких систем замена независимой переменной $t \mapsto t_\star$ вида (1.6) выглядит вполне естественной и очевидной.

5. Краткие исторические замечания и возможные направления дальнейших исследований. Системы подобно-деформируемых тел, исследование движения которых восходит к публикации Д.Н. Зейлигера [33], при соответствующем выборе относятся к системам рассматриваемого класса.

Исследования таких систем, продолженные Н.Г. Четаевым [34] (см. также [35]), получили развитие в ряде работ, посвященных решению задач теории групп, дифференциальной геометрии и математической физики [36–39].

Исследования применимости моментов инерции, зависящих от времени, к управлению ориентацией спутников восходят, вероятно, к публикациям [40, 41]. Примеры использования особенностей динамики тел с моментами инерции, зависящими от времени, применительно к задачам орбитальной динамики обсуждаются в [42].

Для аффинно-деформируемых тел рассматриваемого класса характерно изменение со временем тензора инерции. Вместе с тем, как видно из формулировки утверждения 1, вопрос о распространении полученных результатов на случай зависящего от времени гиростатического момента остается открытым. Исследования таких систем, восходящие, вероятно, к публикации [43], посвященной перманентным вращениям уравновешенного неавтономного гиростата, ведутся довольно интенсивно. Так изучались [44] маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом, регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [45–47], инвариантные соотношения уравнений движения такого гиростата [48]. Полученные результаты были изложены в труднодоступной монографии [5]. Дальнейшие исследования были сосредоточены на разработке подходов к исследованию гиростатов с переменным гироскопическим моментом [49] и на изучении различных частных решений их уравнений движения [50–54].

Также заметим, что в вышеприведенных рассуждениях молчаливо предполагается неизменность массы изучаемой системы. Между тем, задачи о движении тела переменной массы также заслуживают внимания (см., напр., [55, 56]). При этом источниками изменения массы и формы могут быть, например, как испарение и сублимация, так и налипание пыли. Общие подходы к исследованию таких систем предложены в [57].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2005. 576 с.
2. *Burov A.A., Chevallier D.P.* On motion of a rigid body about a fixed point with respect to a rotating frame // R&C Dyn. 1998. V. 3. № 1. P. 66–76. DOI: RD1998v003n01ABEH000061
3. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. Динамика систем с конечным числом степеней свободы. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 544 с.
4. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 294 с.
5. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: Изд-е ГУ Ин-т прикл. матем. и мех., 2017. 250 с.
6. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: ГИТТЛ, 1953. 288 с.
7. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалёв А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 2012. 402 с.
8. *Yehia H.M.* Rigid BODY DYNAMICS. A Lagrangian Approach. Switzerland AG: Springer Nature, 2022. 460 p.
9. *Козлов В.В.* Расщепление сепаратрис возмущенной задачи Эйлера–Пуансо // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. 1976. № 6. С. 99–104.
10. *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление, решение и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Тр. ММО. 1980. Т. 41. С. 287–303.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38 (229). Вып. 1. С. 3–67.
12. *Yehia H.M.* New integrable cases in dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Com. 1986. V. 13. Iss. 3. P. 169–172.
13. *Яхья Х.М.* Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. 1987. № 4. С. 88–90.
14. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. Вып. 2. С. 292–294.
15. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом // Вест. Моск. ун-та. 1963. № 3. С. 60–71.
16. *Gavrilov L.* Non-integrability of the equations of heavy gyrostat // Compos. Math. 1992. T. 82. № 3. P. 275–291.

17. *Каток С.Б.* Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // УМН. 1972. Т. 27. Вып. 2. С. 126–132.
18. *Рубановский В.Н.* О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // Теор. и приложна мех. София. 1974. Т. 5. № 4. С. 55–70.
19. *Рубановский В.Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твердого тела // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 4. С. 616–627.
20. *Татаринов Я.В.* Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. 1974. № 6. С. 99–105.
21. *Gashenenko I.N., Richter P.H.* Enveloping surfaces and admissible velocities of heavy rigid bodies // Int. J. Bifur. & Chaos. 2004. V. 14. № 08. P. 2525–2553.
22. *Карапетян А.В.* Инвариантные множества в задаче Горячева–Чаплыгина: существование, устойчивость и ветвление // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 221–224.
23. *Анчев А.* О перманентных вращениях тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 49–58.
24. *Elipe A., Arribas M., Riaguas A.* Complete analysis of bifurcations in the axial gyrostat problem // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30. P. 587–601. DOI: 10.1088/0305-4470/30/2/021
25. *Гашененко И.Н.* Бифуркации интегральных многообразий в задаче о движении тяжелого гиростата // Нелин. дин. 2005. Т. 1. № 1. С. 33–52. DOI: 10.20537/nd0501003
26. *Iñarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A.* On the stability of a class of permanent rotations of a heavy asymmetric gyrostat // R&C Dyn. 2017. V. 22. P. 824–839. DOI: 10.1134/S156035471707005X
27. *Холостова О.В.* Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. Ижевск: ИКИ, 2016. 308 с.
28. *Bogoyavlensky O.I.* New integrable problem of classical mechanics // Comm. in Math. Phys. 1984. V. 94. P. 255–269. DOI: 10.1007/BF01209304
29. *Brun F.* Rotation kring fix punkt // Ofversigt at Kongl. Svenska Vetenskaps Akad. Forhadl. Stokholm. 1893. V. 7. P. 455–468.
30. *Brun F.* Rotation kring fix punkt. II // Ark. Mat. Ast. Fys. 1907. V. 4. № 4. S. 1–4.
31. *Brun F.* Rotation kring fix punkt. III // Ark. Mat. Ast. Fys. 1910. V.6. № 5. S. 1–10.
32. *Карапетян А.В.* Инвариантные множества в задаче Клебша–Тиссерана: существование и устойчивость // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 959–964.
33. *Зейлигер Д.Н.* Теория движения подобно-изменяемого тела. Казань: тип. Казанского Императорского ун-та, 1892. 105 с.
34. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях движения подобно-изменяемого тела // Учен. зап. Казан. ун-та. 1954. V. 114. Казань: Казанский гос. ун-т. С. 5–7.
35. *Четаев Н.Г.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 368 с.
36. *Sławianowski J.J.* The mechanics of the homogeneously-deformable body. Dynamical models with high symmetries // ZAMM. 1982. V. 62. № 6. P. 229–240. DOI: 10.1002/zamm.19820620604
37. *Sławianowski J.J.* Affinely rigid body and Hamiltonian systems on $\mathbf{GL}(n\mathbf{R})$ // Rep. on Math. Phys. 1988. V. 26. Iss. 1. P. 73–119. DOI: 10.1016/0034-4877(88)90006-7
38. *Sławianowski J.J., Kovalchuk V., Gołubowska B., Rożko E.E.* Mechanics of affine bodies. Towards affine dynamical symmetry // J. Math. Anal. & Appl. 2017. V. 446. Iss. 1. P. 493–520. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.08.042
39. *Burov A.A., Chevallier D.P.* Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry // Rep. on Math. Phys. 2008. V. 62. Iss. 3. P. 283–321. DOI: 10.1016/S0034-4877(09)00003-2
40. *Iñarrea M., Lanchares V.* Chaos in the reorientation process of a dual-spin spacecraft with time-dependent moments of inertia // Int. J. Bifur.&Chaos. 2000. V. 10. № 05. P. 997–1018. DOI: 10.1142/S0218127400000712
41. *Iñarrea M., Lanchares V., Rothos V.M., Salas J.P.* Chaotic rotations of an asymmetric body with time-dependent moments of inertia and viscous drag // Int. J. Bifur.&Chaos. 2003. V. 13. № 02. P. 393–409. DOI: 10.1142/S0218127403006613
42. *Burov A., Guerman A., Kosenko I.* Satellite with periodical mass redistribution: relative equilibria and their stability // Celest. Mech. & Dyn. Astron. 2019. V. 131. Art № 1. DOI: 10.1007/s10569-018-9874-0

43. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 875–876.

44. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Мех. твердого тела: Межвед. сб. науч. тр. 2009. Вып. 39. С. 42–49.

45. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Мех. твердого тела: Межвед. сб. науч. тр. 2010. Вып. 40. С. 91–104.

46. *Мазнев А.В.* Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Докл. НАНУ. 2011. № 8. С. 66–72.

47. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О движении симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики // Нелин. дин. 2012. Т. 8. № 2. С. 369–376. DOI: 10.20537/nd1202011

48. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата в случае переменного гиростатического момента // Дин. сист. 2012. Т. 2 (30). № 1; 2. С. 23–32.

49. *Горр Г.В.* Об одном подходе в исследовании движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 102–115. DOI: 10.35634/vm210108

50. *Горр Г.В., Белоконь Т.В.* О решениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 2. С. 139–151. DOI: 10.31857/S0032823521020053

51. *Ткаченко Д.Н.* Новое решение уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Мех. твердого тела. 2021. Вып. 51. С. 34–43.

52. *Данилюк Д.А.* Об одном решении уравнений Кирхгофа–Пуассона в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом // Мех. твердого тела. 2021. Вып. 51. С. 44–56.

53. *Данилюк Д.А., Ткаченко Д.Н.* Новое решение уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим под действием потенциальных и гироскопических сил // Ж. теоретич. и прикл. мех. 2022. № 1 (78). С. 5–15. DOI: 10.24412/0136-4545-2022-1-5-15

54. *Горр Г.В.* Об одном классе полурегулярных прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 2. С. 115–124. DOI: 10.31857/S0572329922600414

55. *Cveticanin L.* Dynamics of Machines with Variable Mass (Stability and Control: Theory, Methods and Applications) Routledge. 1998. 252 p. DOI: 10.1201/9780203759066

56. *Ong J.J., O'Reilly O.M.* On the equations of motion for rigid bodies with surface growth // Int. J. Engng Sci. 2004. V. 42. Iss. 19–20. P. 2159–2174. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2004.07.010

57. *Irschik H., Humer A.* A rational treatment of the relations of balance for mechanical systems with a time-variable mass and other non-classical supplies // in: Dyn. Mech. Syst. with Variable Mass. Int. Centre for Mech. Sci. Courses and Lectures. 2014. V. 557. P. 1–50.

Motion of a Variable Body with a Fixed Point in a Time-dependent Force Field

A. A. Burov[a,#]

[a] *Federal Research Center "Computer Science and Control" RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: jtm@narod.ru*

The problem of motion around a fixed point of a variable body in a time-dependent force field is considered. The conditions under which the equations of motion are reduced to the classical Euler–Poisson equations describing the motions of a rigid body in the field of attraction are indicated. The problems of the existence of the first integrals and the stability of steady motions are discussed.

Keywords: motion of a variable body with a fixed point, time-dependent force field, change of time, change of variable, existence of integrable cases, nonintegrability of equations of motion, existence of steady motions, bifurcation diagrams

REFERENCES

1. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Rigid Body Dynamics. Hamiltonian Methods, Integrability, Chaos. Moscow: Inst. Comp. Sci., 2005. 576.
2. *Burov A.A., Chevallier D.P.* On motion of a rigid body about a fixed point with respect to a rotating frame // R&C Dyn., 1998, vol. 3, no. 1, pp. 66–76. DOI: RD1998v003n01ABEH000061
3. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razionale. Volume seconda. Parte seconda. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di bibertà. Bologna: N. Zanichelli, 1950.
4. *Wittenburg J.* Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner, 1977.
5. *Gorr G.V., Maznev A.V., Kotov G.A.* Movement of a Gyrostat with a Variable Gyrostatic Moment. Donetsk: Inst. Appl. Math. & Mech., 2017. 250 p. (in Russian)
6. *Golubev V.V.* Lectures on the Integration of the Equations of Motion of a Rigid Body about a Fixed Point. Moscow: Gostekhizdat, 1953.
7. *Gashenenko I.N., Gorr G.V., Kovalev A.M.* Classical Problems of Rigid Body Dynamics. Kyiv: Nauk. Dumka, 2012. 402 p. (in Russian)
8. *Yehia H.M.* Rigid Body Dynamics. A Lagrangian Approach. Switzerland AG: Springer Nature, 2022. 460 p.
9. *Kozlov V.V.* Splitting of the Separatrices in the Perturbed Euler–Poinsot Problem // MSU Bull. Ser. I: Math., Mech., 1976, vol. 31, pp. 99–104.
10. *Ziglin S.L.* Splitting of separatrices, branching solutions and non-existence of an integral in the dynamics of a rigid body // Proc. Moscow Math. Soc., 1980, vol. 41, pp. 287–303.
11. *Kozlov V.V.* Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics // Rus. Math. Surv., 1983, vol. 38, iss. 1, pp. 1–76. DOI: 10.1070/RM1983v038n01ABEH003330
12. *Yehia H.M.* New integrable cases in dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Com., 1986, vol. 13, iss. 3, pp. 169–172.
13. *Yehia H.M.* New integrable cases in the problem of motion of a gyrostat // MSU Bull. Ser. I: Math., Mech., 1987, vol. 42, no. 4, pp. 29–31.
14. *Sretensky L.N.* On some cases of integrability of the equations of motion of a gyrostat // Dokl. AN SSSR, 1963, vol. 149, iss. 2, pp. 292–294.
15. *Sretensky L.N.* On some cases of motion of a heavy rigid body with a gyroscope // MSU Bull., 1963, no. 3, pp. 60–71.
16. *Gavrilov L.* Non-integrability of the equations of heavy gyrostat // Compos. Math., 1992, vol. 82, no. 3, pp. 275–291.
17. *Katok S.B.* Bifurcation sets and integral manifolds in the problem of motion of a heavy rigid body // Usp. Math. Nauk, 1972, vol. 27, pp. 126–132.
18. *Rubanovsky V.N.* On bifurcation and stability of permanent rotations of a heavy rigid body with one fixed point // Theory&Appl., Mech., Sofiya, 1974, vol. 5, no. 4, pp. 55–70.
19. *Rubanovskii V.N.* On bifurcation and stability of stationary motions in certain problems of dynamics of a solid body // JAMM, vol. 38, no. 4, 1974, pp. 573–584.
20. *Tatarinov Ya.V.* Portraits of classical integrals of the problem of rotation of a rigid body around a fixed point // MSU Bull. Ser. Nath., Mech., 1974, no. 6, pp. 99–105.
21. *Gashenenko I.N., Richter P.H.* Enveloping surfaces and admissible velocities of heavy rigid bodies // Int. J. Bifur.&Chaos., 2004, vol. 14, no. 8, pp. 2525–2553.
22. *Karapetyan A.V.* Invariant sets in the Goryachev–Chaplygin problem: existence, stability and branching // JAMM, 2006, vol. 70, iss. 2, pp. 195–198.
23. *Anchev A.* Permanent rotations of a heavy gyrostat having a stationary point // JAMM, 1967, vol. 31, iss. 1, pp. 48–58.
24. *Elipe A., Arribas M., Riaguas A.* Complete analysis of bifurcations in the axial gyrostat problem // J. Phys. A: Math. Gen., 1997, vol. 30, pp. 587–601. DOI: 10.1088/0305-4470/30/2/021
25. *Gashenenko I.N.* Bifurcations of the integral manifolds in the problem on motion of a heavy gyrostat // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2005, vol. 1, no. 1, pp. 33–52.

26. *Iñarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A.* On the stability of a class of permanent rotations of a heavy asymmetric gyrostat // R&C Dyn., 2017, vol. 22, pp. 824–839. DOI: 10.1134/S156035471707005X
27. *Kholostova O.V.* Problems of the Dynamics of Rigid Bodies with a Vibrating Suspension. Izhevsk: IKI, 2016. 308 p. (in Russian)
28. *Bogoyavlensky O.I.* New integrable problem of classical mechanics // Comm. in Math. Phys., 1984, vol. 94, pp. 255–269. DOI: 10.1007/BF01209304
29. *Brun F.* Rotation kring fix punkt // Ofversigt at Kongl. Svenska Vetenskaps Akad. Forhadl. Stokholm, 1893, vol. 7, pp. 455–468.
30. *Brun F.* Rotation kring fix punkt. II // Ark. Mat. Ast. Fys., 1907, vol. 4, no. 4, S. 1–4.
31. *Brun F.* Rotation kring fix punkt. III // Ark. Mat. Ast. Fys., 1910, vol. 6, no. 5, S. 1–10.
32. *Karapetyan A.V.* Invariant sets in the Clebsch–Tisserand problem: Existence and stability // JAMM, 2006, vol. 70, iss. 6, pp. 859–864.
33. *Seiliger D. N.* Theory of motion of a similarly variable body. Kazan': Typo-lithography of Kazan', 1892.
34. *Chetaev N.G.* On the equations of motion of a similarly variable body. // Uch. Zap. Kazan. Univ., 1954, vol. 114, pp. 5–7.
35. *Chetaev N.G.* Theoretical Mechanics. Moscow: Nauka, 1987. 368 p.
36. *Sławianowski J.J.* The mechanics of the homogeneously-deformable body. Dynamical models with high symmetries // ZAMM, 1982, vol. 62, no. 6, pp. 229–240. DOI: 10.1002/zamm.19820620604
37. *Sławianowski J.J.* Affinely rigid body and Hamiltonian systems on $\mathbf{GL}(n\mathbf{R})$ // Rep. on Math. Phys., 1988, vol. 26, iss. 1, pp. 73–119. DOI: 10.1016/0034-4877(88)90006-7
38. *Sławianowski J.J., Kovalchuk V., Gołubowska B., Martens A., Rożko E.E.* Mechanics of affine bodies. Towards affine dynamical symmetry // J. Math. Anal.&Appl., 2017, vol. 446, iss. 1, pp. 493–520. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.08.042
39. *Burov A.A., Chevallier D.P.* Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry // Rep. on Math. Phys., 2008, vol. 62, iss. 3, pp. 283–321. DOI: 10.1016/S0034-4877(09)00003-2
40. *Iñarrea M., Lanchares V.* Chaos in the reorientation process of a dual-spin spacecraft with time-dependent moments of inertia // Int. J. Bifur.&Chaos, 2000, vol. 10, no. 05, pp. 997–1018. DOI: 10.1142/S0218127400000712
41. *Iñarrea M., Lanchares V., Rothos V.M., Salas J.P.* Chaotic rotations of an asymmetric body with time-dependent moments of inertia and viscous drag // Int. J. Bifur.&Chaos, 2003, vol. 13, no. 02, pp. 393–409. DOI: 10.1142/S0218127403006613
42. *Burov A., Guerman A., Kosenko I.* Satellite with periodical mass redistribution: relative equilibria and their stability // Celest. Mech. & Dyn. Astron., 2019, vol. 131, Art. No. 1. DOI: 10.1007/s10569-018-9874-0
43. *Druzhinin E.I.* The permanent rotations of a balanced non-autonomous gyrostat // JAMM, 1999, vol. 63, iss. 5, pp. 825–826.
44. *Volkova O.S., Gashenenko I.N.* Pendulum rotations of a heavy gyrostat with variable gyrostatic moment // Mech. Solid Body, 2009, iss. 39, pp. 42–49.
45. *Maznev A.V.* Precessional movements of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the influence of potential and gyroscopic forces// Mech. Solid Body, 2010, iss. 40, pp. 91–104.
46. *Maznev A.V.* Regular precession of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the influence of potential and gyroscopic forces // Dokl. NASU, 2011, no. 8, pp. 66–72.
47. *Gorr G. V., Maznev A.V.* About motion of symmetric gyrostat with a variable gyrostatic moment in two tasks of dynamics // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2012, vol. 8, no. 2, pp. 369–376.
48. *Gorr G.V., Maznev A.V.* On two linear invariant relations for the equations of motion of a gyrostat in the case of a variable gyrostatic moment // Dyn. Syst., 2012, vol. 2 (30), no. 1; 2, pp. 23–32.
49. *Gorr G.V.* On one approach to studying the motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment // Vestn. Udmurt. Univ. Math. Fur. Computer. Sci., 2021, vol. 31, iss. 1, pp. 102–115.
50. *Gorr G.V., Belokon T.V.* On solutions of the equations of motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment // Mech. Solids, 2021, vol. 56, iss. 8, pp. 1157–1166.

51. *Tkachenko D.N.* New solution to the equations of motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the action of potential and gyroscopic forces // Mech. Solid Body, 2021, iss. 51, pp. 34–43.
52. *Danilyuk D.A.* On one solution of the Kirchhoff–Poisson equations in the problem of the motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment // Mech. Solid Body, 2021, iss. 51, pp. 44–56.
53. *Danilyuk D.A., Tkachenko D.N.* New solution to the equations of motion of a gyrostat with variable gyrostatic under the action of potential and gyroscopic forces // J. Theor.&Appl. Mech., 2022, no. 1 (78), pp. 5–15.
54. *Gorr G.W.* On a class of semi-regular gyrostat precessions with variable gyrostatic moment // Mech. Solids, 2023, vol. 58, no. 2, pp. 475–482.
55. *Cveticanin L.* Dynamics of Machines with Variable Mass (Stability and Control: Theory, Methods and Applications). Routledge. 1998. 252 p. DOI: 10.1201/9780203759066
56. *Ong J.J., O'Reilly O.M.* On the equations of motion for rigid bodies with surface growth // Int. J. Engng Sci., 2004, vol. 42, iss. 19–20, pp. 2159–2174. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2004.07.010
57. *Irschik H., Humer A.* A rational treatment of the relations of balance for mechanical systems with a time-variable mass and other non-classical supplies // in: Dyn. Mech. Syst. with Variable Mass. Int. Centre for Mech. Sci. Courses and Lectures, 2014, vol. 557, pp. 1–50.