

УДК 531.381

НЕРЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛЯХ

В. Ю. Ольшанский^{1,*}¹ ИПТМУ РАН, Саратов, Россия^{*} e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru

Поступила в редакцию 07.11.2023 г.

После доработки 15.01.2024 г.

Принята к публикации 20.01.2024 г.

В статье приведено решение задачи об условиях нерегулярной прецессии твердого тела в трех однородных полях, при которой отношение скоростей прецессии и собственного вращения постоянно. Показано, что прецессия динамически симметричного тела возможна при скорости прецессии, равной, вдвое большей или вдвое меньшей скорости собственного вращения. Для каждого из случаев указано множество допустимых положений центров приведения сил и найдена связь между моментами инерции тела и постоянным углом нутации.

Ключевые слова: твердое тело, движение вокруг неподвижной точки, три однородных поля, нерегулярная прецессия

DOI: 10.31857/S0032823524010026 EDN: YUVXUJ

1. Введение. Задача о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки имеет много обобщений при движении в различных силовых полях. Большое количество исследований посвящено случаю, когда силовое поле одно или действуют несколько полей с общей осью симметрии. Были найдены [1] решения для тяжелого твердого тела в магнитном поле, для гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [2, 3].

Важным случаем движения является прецессия. Регулярная прецессия симметричного тяжелого тела хорошо известна. Гриоли в 1947 году была доказана [4] возможность регулярной прецессии несимметричного тела вокруг оси, отклоненной от вертикали. В задаче о движении тела в жидкости позже было найдено [5] решение вида [4]. Отметим, что прецессия тела с полостью, заполненной жидкостью, также возможна при отсутствии динамической симметрии [6–9]. Обзор прецессий твердого тела и гиростата под действием сил различной природы приведен в [10, 11].

В значительно меньшей степени изучен случай, когда направления полей заданы двумя или тремя векторами в инерциальном пространстве. Первые примеры регулярной прецессии несимметричного твердого тела и гиростата в двух [12] и трех [13] однородных полях были построены Х. Яхья, причем, как отмечено автором, решение [13] было первым решением уравнений движения тела в трех полях, отличным от случаев равновесий.

В решениях [12, 13] оси прецессии и собственного вращения ортогональны, а скорости прецессии и собственного вращения совпадают; эти решения можно считать аналогами для двух и трех полей прецессии Гриоли [4] в поле тяжести. В наших рабо-

тах описаны все возможные случаи прецессии твердого тела и гиростата в двух [14] и трех [15] однородных полях; найден новый случай, когда оси прецессии и собственного вращения не ортогональны и скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения.

Была рассмотрена [16] регулярная прецессия гиростата в трех полях, одно из которых — осесимметричное, и для частного случая, когда скорости прецессии и собственного вращения равны, поля ортогональны и ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля, получены условия, связывающие параметры системы. В работе [17] выполнено исследование всех возможных случаев регулярной прецессии в данной суперпозиции трех полей, найдены конфигурационные условия и центры приведения сил. Показано [17], что прецессия возможна при скорости прецессии равной, вдвое большей или вдвое меньшей скорости собственного вращения.

Задача о нерегулярной прецессии, при которой отношение скоростей прецессии и собственного вращения постоянно [18–20], расширяет множество известных точных решений [13, 15–17], описывающих вращение тела в трех полях. Исследования [18–20] выполнены для случая, когда поля ортогональны и ось прецессии совпадает с направлением одного из полей; получены условия прецессии в случае динамической симметрии тела.

В настоящей статье при использовании методов [15, 17] проанализированы возможные случаи нерегулярной прецессии динамически симметричного тела с неподвижной точкой в суперпозиции трех независимых однородных полей с постоянным отношением скоростей прецессии и собственного вращения. Задача решается при произвольных углах между силовыми линиями полей и с произвольным направлением оси прецессии в инерциальном пространстве. Показано, что, как и в задаче [17], прецессия возможна при скорости прецессии, равной, вдвое большей или вдвое меньшей скорости собственного вращения. Для каждого из случаев найдены связь между моментами инерции тела и постоянным углом нутации и множество допустимых положений центров приведения сил. Выделен частный случай ортогональных полей и указано множество положений центров приведения сил, при которых движение тела в трех полях экспоненциально быстро со временем приближается к состоянию покоя.

2. Постановка задачи. Для описания движения твердого тела вокруг неподвижной точки под действием трех полей используем уравнения [13]

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \alpha_1 \times \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \times \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \times \mathbf{u}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M} \quad (2.1)$$

$$\dot{\alpha}_i + \boldsymbol{\omega} \times \alpha_i = 0; i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Здесь $(\cdot)^*$ — производная по времени в системе отсчета, связанной с телом, $\mathbf{I}$ — оператор инерции тела в неподвижной точке O , $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, единичные векторы α_i задают направления сил каждого из полей, $\mathbf{u}_i = p_i \mathbf{OC}_i$, C_i — центры приведения сил.

Прецессия тела задается равенством

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r \mathbf{m} + \omega_p \mathbf{p} \quad (2.3)$$

Единичные векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{p}$ постоянны, соответственно, в подвижной и инерциальной системах. Скалярные функции $\omega_r(t)$ и $\omega_p(t)$ — это величины скоростей собственного вращения и прецессии.

Рассмотрим, как и в работе [18], прецессии, для которых отношение скоростей постоянно

$$\omega_p / \omega_r = \kappa = \text{const} \quad (2.4)$$

Векторная функция $\mathbf{p}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.2), которое, при учете равенства (2.3), становится линейным

$$\dot{\mathbf{p}} + \omega_r(t) \mathbf{m} \times \mathbf{p} = 0 \quad (2.5)$$

Пусть (I_1, I_2, I_3) — некоторый связанный с телом ортонормированный правый базис и $I_3 = \mathbf{m}$. Решение уравнения (2.5) можно записать в виде

$$\mathbf{p} = \sin\theta(\sin\tau I_1 + \cos\tau I_2) + \cos\theta I_3, d\tau = \omega_r(t) dt \quad (2.6)$$

Произвольный параметр θ — это постоянный угол между осями собственного вращения и прецессии (угол нутации), $\cos\theta = (\mathbf{m}, \mathbf{p})$.

Векторные функции $\mathbf{\omega}(t), \mathbf{\alpha}_i(t)$, как и ранее [15, 17], задаются в связанном с телом ортонормированном базисе (I_1, I_2, I_3) равенствами:

$$\mathbf{\omega} = \Omega \tilde{\mathbf{\omega}}, \tilde{\mathbf{\omega}} = \kappa \sin\theta(\sin\tau I_1 + \cos\tau I_2) + (1 + \kappa \cos\theta) I_3, \Omega = \omega_r(t) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{\alpha}_i = -\mathbf{R} \mathbf{s}_i; i = 1, 2, 3, \mathbf{p} = -\mathbf{R} I_3 \quad (2.8)$$

Элементы матрицы оператора поворота $\mathbf{R}$ в базисе (I_i) следующие:

$$\begin{aligned} r_{11} &= -\cos^2 \frac{\theta}{2} \cos(\kappa + 1)\tau - \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos(\kappa - 1)\tau, r_{13} = -\sin\theta \sin\tau \\ r_{12} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin(\kappa + 1)\tau + \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin(\kappa - 1)\tau, r_{31} = -\sin\theta \sin\kappa\tau \\ r_{21} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin(\kappa + 1)\tau - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin(\kappa - 1)\tau, r_{23} = -\sin\theta \cos\tau, r_{33} = -\cos\theta \\ r_{22} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos(\kappa + 1)\tau - \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos(\kappa - 1)\tau, r_{32} = -\sin\theta \cos\kappa\tau \end{aligned} \quad (2.9)$$

Функции $\mathbf{\alpha}_i(t)$, заданные равенствами (2.8), являются решениями линейных (при заданной формулой (2.7) функции $\mathbf{\omega}(t)$) уравнений (2.2) при произвольных постоянных (в связанной с телом системе отсчета) векторах $\mathbf{s}_i$.

Определим условия обращения в тождество равенства (2.1) при функциях $\mathbf{\omega}, \mathbf{\alpha}_i$, заданных равенствами (2.7) и (2.8). Из формул (2.6) и (2.7) получим

$$\dot{\mathbf{\omega}} = \dot{\Omega} \tilde{\mathbf{\omega}} + \Omega^2 \kappa \sin\theta(\cos\tau I_1 - \sin\tau I_2) \quad (2.10)$$

Уравнение (2.1) записывается в виде

$$\dot{\Omega} \mathbf{a} + \Omega^2 \mathbf{b} = \mathbf{M} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{I} \tilde{\mathbf{\omega}}, \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{\omega}} \times \mathbf{I} \tilde{\mathbf{\omega}} + \kappa \sin\theta \mathbf{I}(\cos\tau I_1 - \sin\tau I_2) \quad (2.12)$$

При $\dot{\Omega} = 0$ имеем регулярную прецессию, условия которой в трех однородных полях получены ранее [15]. При $\dot{\Omega} \neq 0$ необходимо выполнение условия компланарности:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{M} \rangle = 0 \quad (2.13)$$

Если $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle \neq 0$, то из уравнения (2.11) находим

$$\dot{\Omega} = \frac{\langle \mathbf{M}, \mathbf{b}, I_3 \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle}, \Omega^2 = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{M}, I_3 \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle} \quad (2.14)$$

Так как $\dot{\Omega} = \Omega d\Omega / d\tau$, то для совместности равенств (2.14) необходимо выполнение условия

$$\frac{\langle \mathbf{M}, \mathbf{b}, I_3 \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{M}, I_3 \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle}$$

или

$$2\langle \mathbf{M}, \mathbf{b}, I_3 \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{M}, I_3 \rangle' \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{M}, I_3 \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle' \quad (2.15)$$

Таким образом, для того чтобы тело могло совершать в трех однородных полях прецессию с постоянным отношением скоростей (2.4), необходимо (и достаточно), чтобы тождественно выполнялись равенства (2.13) и (2.15) для функций $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{M}, \tilde{\omega}$ переменной τ , заданных равенствами (2.7), (2.8) и (2.12).

Если рассматривать осесимметричное тело, ось собственного вращения которого совпадает с осью динамической симметрии (как в работе [18]), то есть случай

$$I_{ij} = 0; i \neq j, I_1 = I_2, \quad (2.16)$$

то из формул (2.7), (2.12) получим

$$\mathbf{a} = \kappa \sin\theta I_1 (\sin\tau I_1 + \cos\tau I_2) + (1 + \kappa \cos\theta) I_3 I_3 \quad (2.17)$$

$$\mathbf{b} = \lambda (\cos\tau I_1 - \sin\tau I_2), \lambda = \kappa \sin\theta ((1 + \kappa \cos\theta) I_3 - \kappa \cos\theta I_1) \quad (2.18)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle = -\lambda \kappa \sin\theta I_1 \quad (2.19)$$

Условие (2.15) совместности равенств (2.14) с учетом формулы (2.19) (при $\lambda \neq 0$) упрощается и записывается в виде

$$2\langle \mathbf{M}, \mathbf{b}, I_3 \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{M}, I_3 \rangle' \quad (2.20)$$

Нижe решается задача определения условий совместного выполнения тождеств (2.13) и (2.20) для тела с осевой симметрией.

3. Предварительный анализ. В рассматриваемом далее случае осевой симметрии из формулы (2.14) при учете формул (2.17)–(2.19) получим

$$\Omega^2 = \frac{\cos\tau M_1 - \sin\tau M_2}{\lambda} \quad (3.1)$$

Условия (2.13) и (2.20) записываются в виде

$$(1 + \kappa \cos\theta) I_3 (\sin\tau M_1 + \cos\tau M_2) \equiv \kappa \sin\theta I_1 M_3 \quad (3.2)$$

$$2\lambda(\sin\tau M_1 + \cos\tau M_2) \equiv \kappa \sin\theta I_1(\cos\tau M_1 - \sin\tau M_2)' \quad (3.3)$$

Для получения условий выполнения тождеств (3.2), (3.3) будем использовать, как и в работе [17], запись момента внешних сил, удобную при произвольных (неортогональных) полях.

Зададим векторы $\mathbf{n}_i$ и оператор $\mathbf{G}$ равенствами

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3}{\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \rangle} (1\,2\,3) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{G}\mathbf{n}_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

Здесь $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $(1\,2\,3)$ — знак циклической перестановки.

Всюду рассматриваем случай неприводимых полей и считаем векторы α_i некомпланарными, тогда, в силу равенств (2.8), $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \rangle \neq 0$.

Имеем формулу [17] для суммы моментов внешних сил

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \alpha_1 \times \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \times \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{G}l_1 \times \mathbf{R}l_1 + \mathbf{G}l_2 \times \mathbf{R}l_2 + \mathbf{G}l_3 \times \mathbf{R}l_3 = \\ &= \mathbf{G}l_1 \times \mathbf{R}l_1 + \mathbf{G}l_2 \times \mathbf{R}l_2 + \mathbf{G}l_3 \times \mathbf{R}l_3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Учитывая равенства (2.9), запишем формулу (3.6) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{C}_{10} + \mathbf{C}_{11}\cos\tau + \mathbf{C}_{21}\sin\tau + \mathbf{C}_{12}\cos\kappa\tau + \mathbf{C}_{22}\sin\kappa\tau + \mathbf{C}_{13}\cos(\kappa-1)\tau + \\ &+ \mathbf{C}_{23}\sin(\kappa-1)\tau + \mathbf{C}_{14}\cos(\kappa+1)\tau + \mathbf{C}_{24}\sin(\kappa+1)\tau \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{C}_{10} = -\cos\theta \mathbf{G}l_3 \times l_3, \mathbf{C}_{i1} = -\sin\theta \mathbf{G}l_3 \times l_{3-i}, \mathbf{C}_{i2} = -\sin\theta \mathbf{G}l_{3-i} \times l_3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ij} &= (-1)^{3ij} \frac{1 + (-1)^j \cos\theta}{2} \times (\mathbf{G}l_2 \times l_{3-i} + (-1)^{i+j} \mathbf{G}l_1 \times l_i) \\ i &= 1, 2, j = 3, 4 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \sin\tau M_1 + \cos\tau M_2 &= \cos\theta(G_{13}\cos\tau - G_{23}\sin\tau) + G_{32}\sin\kappa\tau - G_{31}\cos\kappa\tau + \\ &+ \frac{\sin\theta}{2}((G_{12} + G_{21})\cos(\kappa+1)\tau + (G_{11} - G_{22})\sin(\kappa+1)\tau) + \\ &+ (G_{12} - G_{21})\cos(\kappa-1)\tau + (G_{11} + G_{22})\sin(\kappa-1)\tau \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \cos\tau M_1 - \sin\tau M_2 &= -\cos\theta(G_{23}\cos\tau + G_{13}\sin\tau + G_{32}\cos\kappa\tau + G_{31}\sin\kappa\tau) + \\ &+ \frac{\sin\theta}{2}(2G_{33} + (G_{11} - G_{22})\cos(\kappa+1)\tau - (G_{12} + G_{21})\sin(\kappa+1)\tau - \\ &- (G_{11} + G_{22})\cos(\kappa-1)\tau + (G_{12} - G_{21})\sin(\kappa-1)\tau) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
M_3 = & \sin\theta(-G_{13}\cos\tau + G_{23}\sin\tau) + \\
& + \sin^2\frac{\theta}{2}((G_{21} - G_{12})\cos(\kappa - 1)\tau - \\
& - (G_{11} + G_{22})\sin(\kappa - 1)\tau) + \\
& + \cos^2\frac{\theta}{2}\left((G_{12} + G_{21})\cos(\kappa + 1)\tau + \right. \\
& \left. + (G_{11} - G_{22})\sin(\kappa + 1)\tau\right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Тождества (3.2) и (3.3) принимают вид

$$\begin{aligned}
& \lambda_1(G_{13}\cos\tau - G_{23}\sin\tau) + \\
& + \lambda_2(G_{32}\sin\kappa\tau - G_{31}\cos\kappa\tau) + \\
& + \lambda_3\left((G_{12} - G_{21})\cos(\kappa - 1)\tau + \right. \\
& \left. + (G_{11} + G_{22})\sin(\kappa - 1)\tau\right) + \\
& + \lambda_4\left((G_{12} + G_{21})\cos(\kappa + 1)\tau + \right. \\
& \left. + (G_{11} - G_{22})\sin(\kappa + 1)\tau\right) \equiv 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_5(G_{13}\cos\tau - G_{23}\sin\tau) + \\
& + \lambda_6(G_{32}\sin\kappa\tau - G_{31}\cos\kappa\tau) + \\
& + \lambda_7\left((G_{12} - G_{21})\cos(\kappa - 1)\tau + \right. \\
& \left. + (G_{11} + G_{22})\sin(\kappa - 1)\tau\right) + \\
& + \lambda_8\left((G_{12} + G_{21})\cos(\kappa + 1)\tau + \right. \\
& \left. + (G_{11} - G_{22})\sin(\kappa + 1)\tau\right) \equiv 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\kappa}\lambda + \kappa I_1 \\
\lambda_2 &= (1 + \kappa \cos\theta)I_3 \\
\lambda_{3,4} &= \frac{1}{2\kappa}(\lambda \pm \kappa^2 \sin\theta I_1) \\
\lambda_5 &= \cos\theta(2\lambda + \kappa \sin\theta I_1) \\
\lambda_6 &= 2\lambda - \kappa^2 \sin\theta \cos\theta I_1 \\
\lambda_7 &= \sin\theta\left(\lambda - \frac{\sin\theta}{2}\kappa(\kappa - 1)I_1\right) \\
\lambda_8 &= \sin\theta\left(\lambda + \frac{\sin\theta}{2}\kappa(\kappa + 1)I_1\right)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Рассмотрим возможность выполнения тождеств (3.12) и (3.13) в общем случае, когда все частоты разные. Необходимо выполнение условий

$$\lambda_1 G_{i3} = 0, \lambda_5 G_{i3} = 0, \lambda_2 G_{3i} = 0, \lambda_6 G_{3i} = 0; i = 1, 2 \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 (G_{12} - G_{21}) &= \lambda_7 (G_{12} - G_{21}) = 0 \\ \lambda_3 (G_{11} + G_{22}) &= \lambda_7 (G_{11} + G_{22}) = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \lambda_4 (G_{12} + G_{21}) &= \lambda_8 (G_{12} + G_{21}) = 0 \\ \lambda_4 (G_{11} - G_{22}) &= \lambda_8 (G_{11} - G_{22}) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Если $\lambda_3^2 + \lambda_7^2 > 0$ и $\lambda_4^2 + \lambda_8^2 > 0$, то из условий (3.15), (3.16) следует

$$G_{11} = G_{22} = G_{12} = G_{21} = 0$$

Матрица $\mathbf{G}$ в этом случае вырожденная, и система приводимая. Для прецессии в трех неприводимых полях необходимо одно из условий

$$\lambda_3 = \lambda_7 = 0 \quad (3.18)$$

$$\lambda_4 = \lambda_8 = 0 \quad (3.19)$$

Пусть выполнено условие (3.18). Из формул (3.14) получаем

$$\begin{aligned} (1 + \kappa \cos \theta) I_3 + \kappa (1 - \cos \theta) I_1 &= 0 \\ (1 + \kappa \cos \theta) I_3 - \kappa \cos \theta I_1 - \frac{\kappa - 1}{2} I_1 &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует $\kappa = 1/3$ и $\cos \theta = (3I_3 + I_1) / (I_1 - I_3)$. В этом случае $|\cos \theta| > 1$ при $I_{1,3} > 0$. Аналогично проверяем, что при условиях (3.19) необходимо $\kappa = -1/3$ и условие $|\cos \theta| < 1$ также не может быть выполнено.

Таким образом, рассматриваемая нерегулярная прецессия осесимметричного тела в трех неприводимых полях невозможна, если все частоты в тождествах (3.12) и (3.13) различные, то есть в случае, когда различны числа $1, |\kappa|, |\kappa - 1|, |\kappa + 1|$.

При $\kappa > 0$ возможны три случая совпадения частот:

1) $\kappa = 1$; 2) $\kappa = 2$; 3) $\kappa = 1/2$.

Ниже рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

После определения допустимых значений параметров G_{ij} определяем $\Omega(\tau)$ по формулам (3.1) и (3.10). Зависимость $\tau = \tau(t)$ найдем, интегрируя равенство

$$dt = \frac{d\tau}{\Omega(\tau)} \quad (3.20)$$

Замечание 1. Всюду рассматривается случай $\lambda \neq 0$. При $\lambda = 0$ из формулы (2.18) получаем $\mathbf{b} = 0$ и уравнение (2.11) принимает вид $\dot{\Omega} \mathbf{a} = \mathbf{M}$, для существования его решения необходимо, чтобы векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{M}$ были коллинеарны. Была выполнена проверка условия $\mathbf{a} \times \mathbf{M} = 0$. В общем случае, при несовпадении частот, это условие выполнено только при $\mathbf{G} = 0$, тогда $\mathbf{M} = 0$. В случае $\kappa = 1$ необходимы условия $G_{11} = G_{22} = G_{33}, G_{ij} = 0; i \neq j$. Так как при $\kappa = 1$ оператор поворота $\mathbf{R}$ — симме-

трический, то для $\mathbf{G} = c\mathbf{E}$ из формулы (3.6) получаем снова $\mathbf{M} = 0$. При $\kappa = 2$ для коллинеарности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{M}$ необходимо $G_{31} = G_{32} = G_{33} = 0$, а при $\kappa = 1/2$ необходимо $G_{13} = G_{23} = G_{33} = 0$. В обоих случаях матрица $\mathbf{G}$ — вырожденная, задача приводимая (к двум полям). Таким образом, при $\lambda = 0$ нет решений поставленной задачи о прецессии с постоянным отношением скоростей в трех неприводимых однородных полях.

Замечание 2. При осевой динамической симметрии из условий (2.16) получаем условие (2.19) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{l}_3 \rangle = \text{const}$, что упрощает тождество (2.15). Была решена обратная задача — определение конфигураций тела, при которых возможно условие $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{l}_3 \rangle = \text{const}$. Проверка показала, что если $1 + \kappa \cos \theta \neq 0$, то необходима осевая симметрия тела. При $1 + \kappa \cos \theta = 0$ условие $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{l}_3 \rangle = \text{const}$ выполнено при любой диагональной матрице $\mathbf{I}$, но условия (2.13) и (2.20) в этом случае выполняются, только если $G_{31} = G_{32} = G_{33} = 0$. Матрица $\mathbf{G}$ вырожденная, нерегулярная прецессия в трех неприводимых полях с постоянным отношением скоростей в случае $1 + \kappa \cos \theta = 0$ не существует в случае $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{l}_3 \rangle = \text{const}$.

4. Прецессия с равными скоростями прецессии и собственного вращения. Для выполнения тождеств (3.12) и (3.13) при $\kappa = 1$ необходимо и достаточно условий

$$\begin{aligned} \lambda_1 G_{13} - \lambda_2 G_{31} &= \lambda_5 G_{13} - \lambda_6 G_{31} = \\ &= \lambda_1 G_{23} - \lambda_2 G_{32} = \lambda_5 G_{23} - \lambda_6 G_{32} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\lambda_3 (G_{12} - G_{21}) = \lambda_7 (G_{12} - G_{21}) = 0 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \lambda_4 (G_{12} + G_{21}) &= \lambda_8 (G_{12} + G_{21}) = \\ &= \lambda_4 (G_{11} - G_{22}) = \lambda_8 (G_{11} - G_{22}) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь параметры λ_k заданы формулами (3.14) с $\kappa = 1$.

Так как $\lambda_3^2 + \lambda_7^2 > 0$ и $\lambda_4^2 + \lambda_8^2 > 0$, то из условий (4.2) и (4.3) следует

$$G_{12} = G_{21} = 0, \quad G_{11} = G_{22} \quad (4.4)$$

Если $\lambda_2 \lambda_5 - \lambda_1 \lambda_6 \neq 0$, то из условий (4.1) следует

$$G_{13} = G_{31} = G_{23} = G_{32} = 0$$

В этом случае $\mathbf{G} = \text{diag}(G_{11}, G_{11}, G_{33})$, из формул (3.1) и (3.10) следует $\Omega = \text{const}$ и получаем регулярную прецессию [15].

Нерегулярная прецессия с равными скоростями прецессии и собственного вращения возможна только условия

$$\lambda_2 \lambda_5 - \lambda_1 \lambda_6 = 0$$

Это условие при учете формул (3.14) записывается в виде

$$(1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 2) I_3 + 3 \cos \theta (1 - \cos \theta) I_1 = 0 \quad (4.5)$$

Отметим некоторые частные случаи выполнения условия (4.5)

$$1) I_1 = I_2 = I_3, \cos \theta = \frac{1}{2}, 2) I_1 = I_2 = 2I_3, \cos \theta = \frac{1}{3}$$

Условие (4.5) при ограничении $I_3 < 2I_1$ может быть выполнено, если

$$0 < \cos\theta < (\sqrt{73} - 5) / 6 \approx 0,590667 \quad (4.6)$$

При условии (4.5) связи (4.1) записываются в виде

$$\begin{aligned} (2 - \cos\theta)G_{13} &= 3\cos\theta G_{31}, \\ (2 - \cos\theta)G_{23} &= 3\cos\theta G_{32} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Условия (4.4) и (4.7) позволяют задать матрицу $\mathbf{G}$ четырьмя параметрами

$$\begin{aligned} G_{11} &= G_{22} = v_1 \\ G_{33} &= v_1 + v_2 \\ G_{12} &= G_{21} = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} G_{13} &= 3\cos\theta v_3 \\ G_{31} &= (2 - \cos\theta) v_3 \\ G_{23} &= 3\cos\theta v_4 \\ G_{32} &= (2 - \cos\theta) v_4 \end{aligned}$$

Из формулы (3.10) при условиях (4.8) получаем

$$\begin{aligned} \cos\tau M_1 - \sin\tau M_2 &= \\ &= \sin\theta(G_{33} - G_{11}) - \cos\theta((G_{23} + G_{32})\cos\tau + \\ &\quad + (G_{13} + G_{31})\sin\tau) = \\ &= \sin\theta v_2 - 2\cos\theta(1 + \cos\theta)(v_4\cos\tau + v_3\sin\tau) \end{aligned}$$

Параметр λ задан формулой (2.18), учитывая связь (4.5), запишем

$$\lambda = \sin\theta((1 + \cos\theta)I_3 - \cos\theta I_1) = \frac{\sin\theta \cos\theta}{2 - 3\cos\theta} I_1$$

Формула (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= (2 - 3\cos\theta) \times \\ &\times \frac{v_2\sin\theta - 2\cos\theta(1 + \cos\theta)(v_4\cos\tau + v_3\sin\tau)}{\sin\theta \cos\theta I_1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Положения центров приведения получаем из формул (3.5) и (4.8).

Прецессия с равными скоростями прецессии и собственного вращения является, в терминологии [10], прецессионно-изоконическим движением. Такое движение рассмотрено в работе [19] в случае ортогональных полей, когда прецессия происходит вокруг вертикали.

5. Прецессия со скоростью прецессии, вдвое большей скорости собственного вращения. Для выполнения тождеств (3.12) и (3.13) при $\kappa = 2$ необходимо и достаточно условий

$$\begin{aligned} \lambda_1 G_{13} + \lambda_3 (G_{12} - G_{21}) &= 0 \\ \lambda_5 G_{13} + \lambda_7 (G_{12} - G_{21}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 G_{23} - \lambda_3 (G_{11} + G_{22}) &= 0 \\ \lambda_5 G_{23} - \lambda_7 (G_{11} + G_{22}) &= 0\end{aligned}\quad (5.2)$$

$$\lambda_2 G_{32} = \lambda_6 G_{32} = 0, \lambda_2 G_{31} = \lambda_6 G_{31} = 0 \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}\lambda_4 (G_{12} + G_{21}) &= \lambda_8 (G_{12} + G_{21}) = \\ &= \lambda_4 (G_{11} - G_{22}) = \lambda_8 (G_{11} - G_{22}) = 0\end{aligned}\quad (5.4)$$

Параметры λ_k заданы формулами (3.14) с $\kappa = 2$.

Так как $\lambda_2^2 + \lambda_6^2 > 0$ и $\lambda_4^2 + \lambda_8^2 > 0$, то из условий (5.2) и (5.3) следует

$$\begin{aligned}G_{31} &= G_{32} = 0 \\ G_{11} &= G_{22} \\ G_{12} &= -G_{21}\end{aligned}\quad (5.5)$$

Если $\lambda_3 \lambda_5 - \lambda_1 \lambda_7 \neq 0$, то из условий (5.1) и (5.5) получим

$$G_{13} = G_{23} = G_{11} = G_{22} = G_{12} = G_{21} = 0$$

Матрица $\mathbf{G}$ — вырожденная в этом случае, поэтому необходимо

$$\lambda_3 \lambda_5 - \lambda_1 \lambda_7 = 0$$

Данное условие при учете формул (3.14) записывается в виде

$$\begin{aligned}(1 + 2\cos\theta)(3\cos\theta - 2)I_3 + \\ + (1 - \cos\theta)(1 + 6\cos\theta)I_1 = 0\end{aligned}\quad (5.6)$$

Условие (5.6) при $I_3 < 2I_1$ может быть выполнено, только если

$$-\frac{1}{6} < \cos\theta < \frac{1}{2} \quad (5.7)$$

Отметим частные случаи выполнения условия (5.6)

$$1) I_1 = I_2 = I_3, \cos\theta = \frac{1}{4}, \quad 2) I_1 = I_2 = 2I_3, \cos\theta = 0$$

При условиях (5.5) и (5.6) связи (5.1) записываются в виде

$$\begin{aligned}(4 - \cos\theta)G_{13} + 5\sin\theta G_{12} &= 0 \\ (4 - \cos\theta)G_{23} - 5\sin\theta G_{11} &= 0\end{aligned}\quad (5.8)$$

Полученные условия (5.5) и (5.8) позволяют задать матрицу $\mathbf{G}$ тремя параметрами v_i :

$$\begin{aligned}G_{11} &= G_{22} = (4 - \cos\theta)v_1 \\ G_{23} &= 5\sin\theta v_1, G_{31} = G_{32} = 0 \\ G_{12} &= -G_{21} = (4 - \cos\theta)v_2 \\ G_{13} &= -5\sin\theta v_2, G_{33} = v_3\end{aligned}\quad (5.9)$$

Найдем скорость $\Omega(\tau)$. Из формул (3.10) и (5.9) получаем

$$\begin{aligned} \cos\tau M_1 - \sin\tau M_2 = \\ = \sin\theta(v_3 + 4(1 + \cos\theta)(v_2\sin\tau - v_1\cos\tau)) \end{aligned}$$

Если учесть связь (5.6), то из формулы (3.14) получим

$$\lambda = (1 + 2\cos\theta)I_3 - 2\cos\theta I_1 = \frac{1 + \cos\theta}{2 - 3\cos\theta}I_1$$

Формула (3.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Omega^2 = \frac{\sin\theta(2 - 3\cos\theta)}{I_1(1 + \cos\theta)} \times \\ \times (v_3 + 4(1 + \cos\theta)(v_2\sin\tau - v_1\cos\tau)) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Множество допустимых положений центров приведения получаем из формул (3.5) и (5.9).

Отметим, что условия (5.6) и (5.7) указаны в работе [18]. Вывод [18] об ортогональности векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ справедлив только для рассмотренного в этой работе частного случая ортогональных полей при оси прецессии, коллинеарной силовым линиям поля номер три.

6. Прецессия со скоростью прецессии, вдвое меньшей скорости собственного вращения. Для выполнения тождеств (3.12) и (3.13) при $\kappa = 1/2$ необходимо и достаточно условий

$$\lambda_1 G_{13} = \lambda_1 G_{23} = \lambda_5 G_{13} = \lambda_5 G_{23} = 0 \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 G_{31} - \lambda_3 (G_{12} - G_{21}) &= 0 \\ \lambda_6 G_{31} - \lambda_7 (G_{12} - G_{21}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 G_{32} - \lambda_3 (G_{11} + G_{22}) &= 0 \\ \lambda_6 G_{32} - \lambda_7 (G_{11} + G_{22}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \lambda_4 (G_{12} + G_{21}) &= \lambda_8 (G_{12} + G_{21}) = \\ = \lambda_4 (G_{11} - G_{22}) &= \lambda_8 (G_{11} - G_{22}) = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Проверяем, используя формулы (3.14) с $\kappa = 1/2$, что если $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_5 \neq 0$ и, если $\lambda_4 = 0$, то $\lambda_8 \neq 0$, тогда из условий (6.1) и (6.4) следует

$$G_{13} = G_{23} = 0, G_{11} = G_{22}, G_{12} = -G_{21} \quad (6.5)$$

Если $\lambda_2\lambda_7 - \lambda_3\lambda_6 \neq 0$, то из условий (6.2), (6.3) и (6.5) получим

$$G_{31} = G_{32} = G_{11} = G_{22} = G_{12} = G_{21} = 0$$

Матрица $\mathbf{G}$ — вырожденная в этом случае, поэтому необходимо

$$\lambda_2\lambda_7 - \lambda_3\lambda_6 = 0$$

Данное условие при учете формул (3.14) записывается в виде

$$\begin{aligned} (2 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)I_3 + \\ + 3(1 - \cos\theta)\cos\theta I_1 = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Условие (6.6) при $I_3 < 2I_1$ может быть выполнено, только если

$$0,075604 \approx \frac{1}{6}(\sqrt{181} - 13) < \cos\theta < \frac{1}{3} \quad (6.7)$$

Частные случаи выполнения условия (6.6):

$$1) I_1 = I_2 = I_3, \cos\theta = \frac{1}{4}, 2) I_1 = I_2 = \frac{10}{3}I_3, \cos\theta = \frac{1}{7}$$

При условиях (6.5) связи (6.3) и (6.4) записываются в виде

$$3\cos\theta G_{31} - \sin\theta G_{12} = 3\cos\theta G_{32} - \sin\theta G_{11} = 0 \quad (6.8)$$

Полученные условия позволяют задать матрицу $\mathbf{G}$ тремя параметрами

$$\begin{aligned} G_{11} = G_{22} = 3\cos\theta v_1, G_{32} = \sin\theta v_1, G_{13} = G_{23} = 0 \\ G_{12} = -G_{21} = 3\cos\theta v_2, G_{31} = \sin\theta v_2, G_{33} = v_3 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Параметр λ при условии (6.6) равен

$$\lambda = \frac{\sin\theta \cos\theta I_1}{2(1 - 3\cos\theta)}$$

Из формулы (3.10) при условиях (6.9) получим

$$\begin{aligned} \cos\tau M_1 - \sin\tau M_2 = \\ = \sin\theta \left(v_3 - 4\cos\theta \left(v_1 \cos \frac{\tau}{2} + v_2 \sin \frac{\tau}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Формула (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \Omega^2 = \frac{2(1 - 3\cos\theta)}{\cos\theta I_1} \times \\ \times \left(v_3 - 4\cos\theta \left(v_1 \cos \frac{\tau}{2} + v_2 \sin \frac{\tau}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Отметим, что прецессия осесимметричного тела со скоростью прецессии, вдвое меньшей скорости собственного вращения, рассматривалась в работе [20] в частном случае, когда силовые линии полей взаимно ортогональны и ось прецессии совпадает с силовой линией одного из полей.

7. Случай ортогональных полей. Запишем полученные в пп. 4–6 условия в частном случае ортогональных полей. Пусть единичные векторы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ образуют правую ортогональную тройку, тогда в соответствии с формулами (2.8) единичные векторы s_1, s_2, s_3 образуют левую ортогональную тройку. Из формул (3.4) получим

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{s}_i; i = 1, 2, 3 \quad (7.1)$$

Рассмотрим теперь для сравнения с результатами работы [18] частный случай $\rho = \alpha_3$. Из формул (2.8) в этом случае получим $\mathbf{s}_3 = \mathbf{l}_3$. Всюду выше векторы $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ правого ортогонального базиса пока не определены. Так как (s_i) — левая тройка, то можно положить $\mathbf{l}_1 = \mathbf{s}_1, \mathbf{l}_2 = -\mathbf{s}_2, \mathbf{l}_3 = \mathbf{s}_3$. Из формулы (7.1) тогда получим $\mathbf{n}_1 = \mathbf{l}_1, \mathbf{n}_2 = -\mathbf{l}_2, \mathbf{n}_3 = \mathbf{l}_3$. Формула (3.5) определяет при известной матрице $\mathbf{G}$ положения центров приведения сил

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{G}\mathbf{l}_1, \mathbf{u}_2 = -\mathbf{G}\mathbf{l}_2, \mathbf{u}_3 = \mathbf{G}\mathbf{l}_3 \quad (7.2)$$

В случае $\kappa = 1$ из формул (7.2) и (4.8) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= v_1 \mathbf{l}_1 + (2 - \cos\theta) v_3 \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{u}_2 &= -v_1 \mathbf{l}_2 - (2 - \cos\theta) v_4 \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{u}_3 &= 3\cos\theta(v_3 \mathbf{l}_1 + v_4 \mathbf{l}_2) + (v_1 + v_2) \mathbf{l}_3 \end{aligned} \quad (7.3)$$

В случае $\kappa = 2$ из формул (7.2) и (5.9) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (4 - \cos\theta)(v_1 \mathbf{l}_1 - v_2 \mathbf{l}_2) \\ \mathbf{u}_2 &= -(4 - \cos\theta)(v_2 \mathbf{l}_1 + v_1 \mathbf{l}_2) \\ \mathbf{u}_3 &= -5\sin\theta(v_2 \mathbf{l}_1 - v_1 \mathbf{l}_2) + v_3 \mathbf{l}_3 \end{aligned} \quad (7.4)$$

В случае $\kappa = 1/2$ из формул (7.2) и (6.9) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= 3\cos\theta(v_1 \mathbf{l}_1 - v_2 \mathbf{l}_2) + \sin\theta v_2 \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{u}_2 &= -3\cos\theta(v_2 \mathbf{l}_1 + v_1 \mathbf{l}_2) - \sin\theta v_1 \mathbf{l}_3, \mathbf{u}_3 = v_3 \mathbf{l}_3 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Формулы (3.20), (4.9), (5.10), (6.10) позволяют выразить зависимость от времени скоростей прецессии и собственного вращения через эллиптические функции. Выделим случаи, когда эта зависимость определяется элементарными функциями. В этих случаях происходит экспоненциально быстрое стремление к нулю указанных скоростей.

Для указания более ясного смысла связей между положениями центров приведения в названных выделенных случаях запишем формулы (7.3)–(7.5) по-другому.

В формулах (7.3) обозначим $\mu_3 \mathbf{e} = (2 - \cos\theta)(v_3 \mathbf{l}_1 + v_4 \mathbf{l}_2)$, где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, $\mu_{1,2} = v_{1,2}$, $\mathbf{l}_i = \mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$, и запишем формулы в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_3 \mathbf{e} \times \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_2 = -\mu_1 \mathbf{e}_2 + \mu_3 \mathbf{e} \times \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{3\cos\theta}{2 - \cos\theta} \mu_3 \mathbf{e} + (\mu_1 + \mu_2) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.6)$$

В формулах (7.4) выполним замены

$$\begin{aligned} (4 - \cos\theta) v_1 &= \mu_1 \cos\xi \\ (4 - \cos\theta) v_2 &= \mu_1 \sin\xi, v_3 = \mu_2 \\ \cos\xi \mathbf{l}_1 - \sin\xi \mathbf{l}_2 &= \mathbf{e}_1 \\ \sin\xi \mathbf{l}_1 + \cos\xi \mathbf{l}_2 &= \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{l}_3 &= \mathbf{e}_3, \cos 2\xi \mathbf{e}_2 - \sin 2\xi \mathbf{e}_1 = \mathbf{e} \end{aligned}$$

и запишем эти формулы в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mu_1 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= -\mu_1 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{5\sin\theta}{4 - \cos\theta} \mu_1 \mathbf{e} + \mu_2 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Аналогичными преобразованиями формулы (7.5) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mu_1 \left(\mathbf{e}_1 + \frac{\operatorname{tg} \theta \sin \xi}{3} \mathbf{e}_3 \right) \\ \mathbf{u}_2 &= -\mu_1 \left(\mathbf{e}_2 + \frac{\operatorname{tg} \theta \cos \xi}{3} \mathbf{e}_3 \right) \\ \mathbf{u}_3 &= \mu_2 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.8)$$

В формулах (7.6)–(7.8) μ_i, ξ — произвольные параметры, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — правая ортонормированная тройка, где $\mathbf{e}_3$ направлен по оси динамической симметрии, $\mathbf{e}$ — произвольный единичный вектор в экваториальной плоскости эллипсоида инерции.

Формулы (4.9), (5.10) и (6.10) для скорости собственного вращения запишем, используя параметры, входящие в описания (7.6)–(7.8) векторов $\mathbf{u}_i$:

$$\begin{aligned} \kappa &= 1 \\ \Omega^2 &= \frac{1}{I_1} (2 - 3 \cos \theta) \times \\ &\times \left(\frac{\mu_2}{\cos \theta} - \frac{2(1 + \cos \theta)}{(2 - \cos \theta) \sin \theta} \mu_3 \sin(\tau + \varepsilon) \right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \kappa &= 2 \\ \Omega^2 &= \frac{\sin \theta (2 - 3 \cos \theta)}{I_1 (1 + \cos \theta)} \times \\ &\times \left(\mu_2 - \frac{4(1 + \cos \theta)}{4 - \cos \theta} \mu_1 \cos(\tau + \xi) \right) \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2} \\ \Omega^2 &= \frac{2(1 - 3 \cos \theta)}{\cos \theta I_1} \times \\ &\times \left(\mu_2 - \frac{4}{3} \mu_1 \left(\cos \frac{\tau}{2} - \xi \right) \right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

В формуле (7.9) ε — угол между $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}_1$.
В случаях

$$\begin{aligned} \kappa &= 1 \\ \mu_2 &= \pm \frac{2(1 + \cos \theta) \cos \theta}{(2 - \cos \theta) \sin \theta} \mu_3 \\ \kappa &= 2 \\ \mu_2 &= \pm \frac{4(1 + \cos \theta)}{4 - \cos \theta} \mu_1 \end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{1}{2}, \mu_2 = \pm \frac{4}{3}\mu_1 \quad (7.12)$$

уравнение (3.21) интегрируется в элементарных функциях.

Например, в случае $\kappa = 2$ при соответствующем условии (7.12) получим

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\tau + \xi}{2}\right) &= \frac{\exp(rt + c) - 1}{\exp(rt + c) + 1} \\ \Omega^2 &= r^2 \sin^2\left(\frac{\tau + \xi}{2}\right) \\ r^2 &= \frac{8\sin\theta(2 - \cos\theta)}{(4 - \cos\theta)I_1} \end{aligned}$$

При $t \rightarrow +\infty$ получаем $\Omega \rightarrow 0$. Такой же результат получаем и в других случаях (7.12). Формулы (7.6)–(7.8) при условиях (7.12) записываются в виде

$$\begin{aligned} \kappa = 1, \mathbf{u}_1 &= \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_3 \mathbf{e} \times \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_2 = -\mu_1 \mathbf{e}_2 + \mu_3 \mathbf{e} \times \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{u}_3 &= \mu_1 \mathbf{e}_3 + \frac{3\cos\theta}{2 - \cos\theta} \mu_3 \left(\mathbf{e} \pm \frac{2(1 + \cos\theta)}{3\sin\theta} \mathbf{e}_3 \right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\kappa = 2$$

$$\frac{\mathbf{u}_1}{\mu_1} = \mathbf{e}_1$$

$$\frac{\mathbf{u}_2}{\mu_1} = -\mathbf{e}_2 \quad (7.14)$$

$$\frac{\mathbf{u}_3}{\mu_1} = \frac{5\sin\theta}{4 - \cos\theta} \left(\mathbf{e} \pm \frac{4(1 + \cos\theta)}{5\sin\theta} \mathbf{e}_3 \right)$$

$$\kappa = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\mathbf{u}_1}{\mu_1} = \mathbf{e}_1 + \frac{\operatorname{tg}\theta \sin\xi}{3} \mathbf{e}_3$$

$$\frac{\mathbf{u}_2}{\mu_1} = -\mathbf{e}_2 - \frac{\operatorname{tg}\theta \cos\xi}{3} \mathbf{e}_3 \quad (7.15)$$

$$\frac{u_3}{\mu_1} = \pm \frac{4}{3} e_3$$

Таким образом, если центры приведения заданы формулами (7.13)–(7.15), то нерегулярная прецессия тела с постоянным отношением скоростей в трех однородных полях экспоненциально быстро затухает со временем, приближаясь к состоянию покоя.

Заключение. Известные точные решения задачи о вращении твердого тела в суперпозиции трех полей описывают регулярную прецессию [13, 15–17] либо нерегулярную прецессию с постоянным отношением скоростей прецессии и собствен-

ного вращения [18–20]. Задача о нерегулярной прецессии рассмотрена [18–20] для осесимметричного тела, совершающего прецессию вокруг силовой линии одного из трех однородных ортогональных полей. В настоящей работе описаны все возможные случаи нерегулярной прецессии с постоянным отношением скоростей симметричного тела в трех неприводимых однородных полях. Конфигурационные условия прецессии получены без предположения о взаимной ортогональности полей и при произвольном направлении оси прецессии. Показано, что прецессия динамически симметричного тела возможна при скорости прецессии, равной, вдвое большей или вдвое меньшей скорости собственного вращения. Выделены положения центров приведения сил, для которых прецессионное движение экспоненциально быстро со временем приближается к состоянию покоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogoyavlensky O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // *Math. Phys. Commun.* 1984. V. 95. P. 307–315.
2. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I. The equations of motion and their transformation // *J. Theor. & Appl. Mech.* 1986. V. 5. № 5. P. 747–754.
3. *Yehia H.M., El-kenani H.N.* Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrost at with principal axes on a circular orbit // *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. V. 7(4). P. 2120–2128.
4. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // *Ann. Mat. Pura e Appl.* 1947. V. 26. Iss. 3–4. P. 271–281.
5. *Рубановский В.Н.* Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // *ПММ.* 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 212–219.
6. *Ольшанский В.Ю.* О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // *ПММ.* 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 559–571.
7. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2019. V. 131. Iss. 12. Art. № 57.
8. *Ol'shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2020. V. 132. Iss. 9. Art. № 46.
9. *Ольшанский В.Ю.* Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением // *ПММ.* 2021. Т. 85. Вып. 5. С. 547–564.
10. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
11. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДНГУ, 2009.
12. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // *Egypt. J. Bas. Appl. Sci.* 2015. V. 2. Iss. 3. P. 200 — 205.
13. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrost at) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // *J. Egypt. Math. Soc.* 2017. V. 25. Iss. 2. P. 216 — 219.
14. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a rigid body in two uniform fields // *Mech. Res. Commun.* 2023. V. 127. Art. № 104041.
15. *Ольшанский В.Ю.* Регулярная прецессия гиростата в суперпозиции трех однородных полей // *ПММ.* 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 872–886.
16. *Hussein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2019. V. 15. Iss. 3. P. 285–292.
17. *Ольшанский В.Ю.* Регулярная прецессия гиростата в трех силовых полях // *ПММ.* 2023. Т. 87. Вып. 4. С. 571–588.
18. *Горр Г.В.* Один класс резонансных прецессионных движений твердого тела под действием трех однородных силовых полей // *ПММ.* 2023. Т. 87. Вып. 1. С. 3–18.
19. *Горр Г.В.* Постановка задачи о прецессиях твердого тела с неподвижной точкой в трех однородных силовых полях. Прецессионно-изоконические движения твердого тела // *Изв. РАН МТТ.* 2023. № 3. С. 123–134.
20. *Gorr G.V.* On a class of precessions of a rigid body with a fixed point under the action of forces of three homogeneous force field // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2023. V.19. Iss. 2. P. 249–264.

Nonregular Precession of a Rigid Body in Three Uniform Fields

V. Yu. Ol'shanskii ^{a, #}

^a *Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, Saratov, Russia*
[#] *e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru*

This article presents a solution to the problem of the conditions of nonregular precession of a rigid body in three homogeneous fields, in which the ratio of precession and proper rotation velocities is constant. It is shown that the precession of a dynamically symmetric body is possible at a precession velocity equal to, twice as large as, or twice as small as the proper rotation velocity. For each of the cases, the set of admissible positions of the centres of the forces and the relation between the body moments of inertia and constant nutation angle are given.

Keywords: rigid body, motion around a fixed point, three uniform fields, irregular precession

REFERENCES

1. Bogoyavlensky *O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // *Math. Phys. Commun.*, 1984, vol. 95, pp. 307–315.
2. Yehia *H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I. The equations of motion and their transformation // *J. Theor. & Appl. Mech.*, 1986, vol. 5, no. 5, pp. 747–754.
3. Yehia *H.M.*, El-kenani *H.N.* Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrost at with principal axes on a circular orbit // *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021, vol. 7(4), pp. 2120 – 2128.
4. Grioli *G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // *Ann. Mat. Pura e Appl.*, 1947, vol. 26, iss. 3–4, pp. 271–281.
5. Rubanovskii *V.N.* On a new particular solution of the equations of motion of a heavy solid in liquid // *JAMM*, 1985, vol. 49, iss. 2, pp. 160–165. (in Russian)
6. Ol'shanskii *V.Yu.* On the regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Mech. Solids*, 2018, vol. 53 (Suppl. 2), pp. 95–106.
7. Ol'shanskii *V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2019, vol. 131, iss. 12, art. no. 57.
8. Ol'shanskii *V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2020, vol. 132, iss. 9, art. no. 46.
9. Ol'shanskii *V.Yu.* Semi-regular precession of an asymmetrical rigid body filled with a liquid // *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, iss. 8, pp. 1500–1513.
10. Gorr *G.V.*, Kovalev *A.M.* Motion of a Gyrost at. Kyev: Naukova Dumka, 2013. 408 p. (in Russian)
11. Gorr *G.V.*, Maznev *A.V.*, Shchetinina *E.K.* Precession Motions in Rigid Body Dynamics and Dynamics of Linked Rigid Bodies Systems. Donetsk: Donetsk National Univ., 2009. 222 p. (in Russian)
12. Yehia *H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // *Egypt. J. Bas. Appl. Sci.* 2015, vol. 2, iss.3, pp. 200 – 205.
13. Yehia *H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrost at) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // *J. Egypt. Math. Soc.*, 2017, vol. 25, iss. 2, pp. 216 – 219.
14. Ol'shanskii *V.Yu.* Regular precession of a rigid body in two uniform fields // *Mech. Res. Commun.*, 2023, vol.127, art. no. 104041.
15. Ol'shanskii *V.Yu.* Regular precession of a gyrost at in three uniform fields // *Mech. Solids*, 2022, vol.57, iss. 8, pp. 1873 – 1884.
16. Hussein *A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2019, vol. 15, iss. 3, pp. 285–292.
17. Ol'shanskii *V.Yu.* Regular precession of a gyrost at in three force fields // *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, iss. 7, pp. 2515 – 2530.
18. Gorr *G.V.* One class of resonance precession motions of a rigid body under the action of three homogeneous force fields // *JAMM*, 2023, vol. 87, iss. 1, pp. 3 – 18.
19. Gorr *G.V.* Statement of the problem on precessions of a rigid body with a fixed point in three homogeneous force fields. Precession-isoconic motions of a rigid body // *Izv. RAS. Mech. Solids*, 2023, no. 3, pp. 123–134. (in Russian)
20. Gorr *G.V.* On a class of precessions of a rigid body with a fixed point under the action of forces of three homogeneous force field // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2023, vol.19, iss. 2, pp. 249–264.