

УДК 532.5:551.465

ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПУЛЬСИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ПОТОКА ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ И ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

© 2024 г. В. В. Булатов^{1,*}, И. Ю. Владимиров^{2,**}¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*² *Институт океанологии им. П.П. Шириова РАН, Москва, Россия**e-mail: internalwave@mail.ru*, iyuvladimirov@rambler.ru***

Поступила в редакцию 25.02.2024 г.

После доработки 09.04.2024 г.

Принята к публикации 15.05.2024 г.

Плавающий ледяной покров определяет динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику морской поверхности и подповерхностных вод, так как в общем движении по вертикали участвует ледяной покров и вся масса жидкости под ним. В работе исследована фазовая структура волновых полей, возникающих на границе раздела льда и потока однородной жидкости конечной толщины при обтекании локализованного пульсирующего источника возмущений. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной, деформации которой малы, и пластина является физически линейной. Получено интегральное представление решения, приведены результаты расчетов дисперсионных зависимостей и фазовых картин для различных параметров волновой генерации. Показано, что основными параметрами, определяющими характеристики амплитудно-фазовых структуру волновых возмущений поверхности ледяного покрова, являются толщина льда, скорость потока, частота пульсаций. Численные расчеты демонстрируют, что при изменении скоростей потока, толщины льда и частоты происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых дальних волновых полей на границе раздела льда и жидкости.

Ключевые слова: ледяной покров, возвышение поверхности раздела, дисперсионные зависимости, фазовая структура, локализованный пульсирующий источник

DOI: 10.31857/S0032823524030046 ZAZCOJ

1. Введение. Характерным природным фактором полярных районов Мирового океана и замерзающих морских акваторий является наличие ледяного покрова [1–3]. Плавающий ледяной покров, определяющий динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику не только морской поверхности, но и подповерхностных вод, при этом в общем движении по вертикали участвует как ледяной покров, так и вся масса жидкости под ним [4–8]. Волновые движения на границе раздела ледяного покрова в условиях морской среды могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться обтеканием искусственных препятствий, например, погруженных частей платформ, с которых осуществляется добыча углеводородов, проложенных в море трубопроводов, иных сложных гидротехнических сооружений. В условиях реального океана причинами деформации ледяной поверхности могут быть, например, импульсные и периодические изменения давления, подводные источники различной физической природы (в том числе под-

водные взрывы), движущиеся по льду нагрузки постоянной и переменной интенсивности, локализованные вариации морской поверхности. Воздействием волн можно объяснить такие явления как образование трещин в сплошных ледяных полях, разрушение льда в прикромочных зонах, взламывание припая [1, 5, 7, 9].

Одним из заметных источников возбуждения ледяного покрова могут являться интенсивные пакеты внутренних гравитационных волн: амплитуды возмущений ледяного покрова за счет таких волн могут быть в диапазоне от сантиметров до нескольких метров [10–15]. Изучение волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом актуально для изучения его реакции на различные гидродинамические возмущения, движущиеся надводные и подводные суда, процессы распада ледяных полей в интересах судоходства, а также совершенствования методов дистанционного зондирования поверхности ледяного покрытия. Также практический интерес к воздействию ледяного покрова на подводные препятствия обусловлен тем, что при наличии водной толщи обтекаемое потоком препятствие генерирует волны на поверхности раздела льда и морской среды и, следовательно, оно испытывает дополнительное волновое сопротивление, расчет которого необходим при проектировании различных сооружений [3, 5, 6, 16]. С другой стороны, эти поверхностные возмущения несут информацию, как о самих источниках возмущений, так и о характеристиках морской среды подо льдом, и они могут быть зарегистрированы с помощью специальных средств, прежде всего, радиолокационных и оптических систем [5, 6, 8].

Разработка методов контролирующего мониторинга морских акваторий с ледяным покровом, основанных на данных, получаемых средствами дистанционного зондирования поверхности льда, предполагает, в частности, возможность эффективного расчета силового воздействия морских течений на подводные источники различной физической природы с учетом скорости потока, толщины льда, глубины погружения источника, параметров его изменчивости, иных существенных гидродинамических характеристик [16–21]. Генерации волновых возмущений на поверхности границы льда и жидкости от обтекаемых подводных препятствий посвящены многочисленные исследования как в лабораторных опытах, так и в рамках теоретических работ. Современное состояние проблемы и обзор работ содержится в [1, 3, 7, 22–26].

2. Постановка задачи. Многочисленные лабораторные эксперименты, а также натурные наблюдения в Мировом океане показывают, что ледяной покров в условиях морской среды ведет себя как тонкая упругая пластина, плавающая на поверхности потока жидкости [1–3, 23–26]. В связи с этим в настоящей работе используется модель упругой пластины, относительно которой, без ограничения какой-либо физической общности, можно сделать допущения, что ее малые деформации удовлетворяет закону Гука. Это означает, в частности, что каждый элементарный объем упругого слоя льда, который ортогонален нейтральной поверхности в недеформированном состоянии, остается прямым и ортогональным этой поверхности после деформации [3, 7, 25]. Также предполагается, что ледяной покров является сплошным, то есть его горизонтальные масштабы превышают длины возбуждаемых волн и, при достаточно естественных условиях, моделируется тонкой упругой пластиной, деформации которой малы и пластина является физически линейной [1–3, 18, 21].

Рассматривается поток идеальной жидкости глубиной H , который обтекает точечный пульсирующий источник массы с интенсивностью $Q = qe^{i\omega t}$ ($q = \text{const}$), ω — частота осцилляций. Сверху течение ограничено ледяным покровом толщины h . Горизонтальная плоскость ξy совпадает с невозмущенной границей раздела жидкости плотности ρ_0 и льда плотности ρ_1 . Скорость потока жидкости конечной толщины направлена вдоль оси ξ и равна V , источник расположен в точке $(0, 0, z_0)$, $-H < z_0 < 0$. Обозначим через $\varphi_1(\xi, y, z, t)$ потенциал возмущений скорости: $\nabla\varphi_1 = (u, v, w)$, а через $\eta_1(\xi, y, t)$ — величину возвышения поверхности раздела жидкости и ледового покрова. Тогда $(V + u, v, w)$ — вектор скорости произвольной частицы жидко-

сти. Будем искать функции $\varphi_1(\xi, y, z, t)$, $\eta_1(\xi, y, t)$ в виде: $\varphi_1(\xi, y, z, t) = e^{i\omega t} \varphi(\xi, y, z)$, $\eta_1(\xi, y, t) = e^{i\omega t} \eta(\xi, y)$.

Тогда в линейном приближении математическая постановка задачи формулируется следующим образом [1–3, 25–27]

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = q \delta(\xi) \delta(y) \delta(z - z_0)$$

$$\frac{D\varphi}{Dt} + g\eta - C\Delta\eta + B\Delta^2\eta + A \frac{D^2\eta}{Dt^2} = 0; \quad z = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}; z = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0; \quad z = -H,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{D}{Dt} = i\omega + V \frac{\partial}{\partial \xi}$, $A = \frac{h\rho_1}{\rho_0}$, $B = \frac{Eh^3}{12\rho_0(1 - \nu_0^2)}$, $C = \frac{\sigma h}{\rho_0}$, g – ускорение свободного падения, E – модуль Юнга льда, ν_0 – коэффициент Пуассона, σ – начальное напряжение. Характерные значения этих величин в морских условиях равны [1–3, 7]: $\rho_0 = 1025 \text{ кг/м}^3$, $\rho_1 = 0.9\rho_0$, $E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\nu_0 = 0.3$, $\sigma = 10^5 \text{ Н/м}^2$. Из граничных условий при $z = 0$ можно получить одно условие для потенциала $\varphi(\xi, y, z)$ в виде

$$\frac{D^2\varphi}{Dt^2} + g \frac{\partial\varphi}{\partial z} - C \Delta \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) + B \Delta^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) + A \frac{D^2}{Dt^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = 0; z = 0 \quad (2.2)$$

3. Интегральные формы решений. Решение для функций $\varphi(\xi, y, z)$, $\eta(\xi, y)$ будем искать в виде интегралов Фурье

$$\varphi(\xi, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivy) dv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mu, \nu, z) \exp(-i\mu\xi) d\mu$$

$$\eta(\xi, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivy) dv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mu, \nu) \exp(-i\mu\xi) d\mu$$

Тогда задача (2.1)–(2.2) для Фурье образа потенциала $\Phi(\mu, \nu, z)$ формулируется следующим образом

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - k^2\Phi = q\delta(z - z_0)$$

$$-(\mu V - \omega)^2 \Phi + \left(g + Ck^2 + Bk^4 - A(\mu V - \omega)^2 \right) \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0; \quad z = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0; \quad z = -H, \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\Phi = q \frac{\left(kP \operatorname{ch} kz + (\mu V - \omega)^2 \operatorname{sh} kz \right) \operatorname{ch} k(z_0 + H)}{kD}; \quad z_0 < z \leq 0$$

$$\Phi = q \frac{\left(kP \operatorname{ch} kz_0 + (\mu V - \omega)^2 \operatorname{sh} kz_0 \right) \operatorname{ch} k(z + H)}{kD}; \quad -H \leq z < z_0$$

$$P = g + Ck^2 + Bk^4 - A(\mu V - \omega)^2, D = (\mu V - \omega)^2 \operatorname{ch} kH - kP \operatorname{sh} kH$$

Фурье-образ возвышения $\Psi(\mu, \nu)$ можно представить в виде

$$\Psi = \frac{iq(\mu V - \omega) \operatorname{ch} k(z_0 + H)}{\operatorname{ch} kH (Ak \operatorname{th} kH + 1) Z(\omega, \mu, \nu)}$$

$$\Omega^2(k) = \frac{k(g + Ck^2 + Bk^4) \operatorname{th} kH}{Ak \operatorname{th} kH + 1}; Z(\omega, \mu, \nu) = (\mu V - \omega)^2 - \Omega^2(k),$$

где $\Omega(k)$ – дисперсионное соотношение для волн на границе раздела слоя неподвижной однородной жидкости конечной толщины H и льда [3, 7, 18, 23–25]. Тогда выражение для возвышения поверхности раздела жидкости и льда имеет вид

$$\begin{aligned} \eta_1(\xi, y, t) &= R(t) \eta(\xi, y) \\ \eta(\xi, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega, \mu, \nu)}{Z(\omega, \mu, \nu)} \exp(-i\mu \xi) d\mu \\ R(t) &= \frac{i q e^{i\omega t}}{4\pi^2}, F(\omega, \mu, \nu) = \frac{(\mu V - \omega) \operatorname{ch} k(z_0 + H)}{\operatorname{ch} kH (Ak \operatorname{th} kH + 1)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Проблема неоднозначности интеграла (3.1) решается методом возмущений [28, 29]. Для этого в знаменателе подынтегрального выражения (3.1) частота ω заменяется на $\omega - i\varepsilon$, где ε – малая положительная величина, которая в дальнейшем будет устремлена к нулю. Такая замена соответствует пульсирующему с частотой ω источнику, амплитуда интенсивности которого нарастает как $q e^{\varepsilon t}$. В результате интеграл (3.1) преобразуется к виду:

$$\eta(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega - i\varepsilon, \mu, \nu)}{Z(\omega - i\varepsilon, \mu, \nu)} \exp(-i\mu \xi) d\mu \quad (3.2)$$

Функция $Z = Z(\omega - i\varepsilon, \mu, \nu)$ такова, что уравнение $Z = 0$ представляет собой одну из возможных форм записи дисперсионного соотношения. Рассмотрим поведение функции $\eta(\xi, y)$ вдоль некоторого направления $S_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Для вычисления интеграла (3.2) можно использовать следующий прием [29, 30]. Введем новые системы координат $O\xi'y', O\mu'v'$, которые получаются из исходных систем $O\xi y, O\mu \nu$ поворотом на выбранный угол α относительно их начала. Тогда

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' \cos \alpha - y' \sin \alpha, & y &= \xi' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ \mu &= \mu' \cos \alpha - \nu' \sin \alpha, & \nu &= \mu' \sin \alpha + \nu' \cos \alpha \\ \xi' &= \xi \cos \alpha + y \sin \alpha, & y' &= -\xi \sin \alpha + y \cos \alpha \\ \mu' &= \mu \cos \alpha + \nu \sin \alpha, & \nu' &= -\mu \sin \alpha + \nu \cos \alpha \end{aligned}$$

Так как $\frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(\mu', \nu')} \equiv 1$, то, в частности, вдоль такого направления S_α , где $y' = 0$, $\xi' > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \eta(\xi', 0) &= \eta(\xi(\xi', 0), y(\xi', 0)) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F'(\omega - i\varepsilon, \mu', \nu')}{Z'(\omega - i\varepsilon, \mu', \nu')} \exp(-i\mu' \xi') d\mu' \\ F'(\omega - i\varepsilon, \mu', \nu') &= F(\omega - i\varepsilon, \mu(\mu', \nu'), \nu(\mu', \nu')) \\ Z'(\omega - i\varepsilon, \mu', \nu') &= Z(\omega - i\varepsilon, \mu(\mu', \nu'), \nu(\mu', \nu')) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Предположим, что подынтегральное выражение внутреннего интеграла (3.3) при $\varepsilon = 0$ имеет полюса на действительной оси: $\mu'_1 = \mu'_1(\nu')$, $\mu'_2 = \mu'_2(\nu')$, ... Для вычисления внутреннего интеграла (3.3) необходимо определить их смещения: $\Delta \mu'_j = \mu'(\nu')$ при $\varepsilon > 0$. С этой целью необходимо приравнять нулю знаменатель подынтегральной функции в (3.3) при $= 0$: $Z'(\omega, \mu'_j, \nu') = 0$ и при $\varepsilon > 0$: $Z'(\omega - i\varepsilon, \mu'_j + \Delta \mu'_j, \nu') = 0$.

Методом возмущений можно получить: $\Delta\mu'_j = i\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial \omega} / \frac{\partial Z}{\partial \mu'_j}$, при $\mu' = \mu'_j(v')$. Тогда, считая, что $\omega = \omega(\mu', v')$, имеем:

$$\frac{\partial Z}{\partial \omega} / \frac{\partial Z}{\partial \mu'_j} = -1 / \frac{\partial \omega}{\partial \mu'_j}, \quad \Delta\mu'_j = -i\varepsilon / \frac{\partial \omega}{\partial \mu'_j}, \quad \text{при } \mu' = \mu'_j(v')$$

Поэтому при $\frac{\partial \omega}{\partial \mu'_j} > 0$ полюса μ'_j смещаются в нижнюю полуплоскость, и при $\frac{\partial \omega}{\partial \mu'_j} < 0$ – в верхнюю полуплоскость. Так как $\xi' > 0$, то по лемме Жордана контур интегрирования по переменной μ' в (3.3) замыкается в нижнюю полуплоскость, и, учитывая вклад полюсов $\mu'_j = \mu'_j(v')$ можно получить

$$\eta(\xi', 0) = -2\pi i \sum_j \int_{L_j(\alpha)} \frac{F'(\omega, \mu'_j(v'), v')}{T'(\omega, \mu'_j(v'), v')} \exp(-i\mu'_j(v')\xi') dv' \quad (3.4)$$

$$T'(\omega, \mu'_j(v'), v') = \frac{\partial Z'(\omega, \mu'_j(v'), v')}{\partial \mu'_j},$$

где $L_j(\alpha)$ – та часть дисперсионной кривой, где выполнено неравенство $\frac{\partial \omega}{\partial \mu'_j} > 0$ при $\mu' = \mu'_j(v')$. Отметим, что в формуле (3.4) выполнен предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$. Вернемся далее к исходным переменным ξ, y и μ, v . Для этого необходимо показать, что

$$\frac{dv'}{\frac{\partial Z}{\partial \mu'_j}} = \frac{dv}{\frac{\partial Z}{\partial \mu}}, \quad \text{при } \mu' = \mu'_j(v'), \quad \mu = \mu_j(v), \quad (3.5)$$

где $\mu = \mu_j(v)$ – уравнение j -ой дисперсионной кривой в исходных координатах μ, v . Действительно, из формул замены переменных имеем

$$dv' = (-d\mu \sin \alpha + dv \cos \alpha) = \left(\frac{d\mu_j(v)}{dv} \sin \alpha + \cos \alpha \right) dv$$

при $\mu' = \mu'_j(v'), \mu = \mu_j(v)$

Далее из уравнения $Z(\omega, \mu, v) = 0$, находим, что

$$\frac{d\mu_j(v)}{dv} = \frac{\partial Z}{\partial v} / \frac{\partial Z}{\partial \mu}, \quad \text{при } \mu = \mu_j(v)$$

Следовательно,

$$dv' = \frac{\frac{\partial Z}{\partial v} \sin \alpha + \frac{\partial Z}{\partial \mu} \cos \alpha}{\frac{\partial Z}{\partial \mu}} dv, \quad \text{при } \mu = \mu_j(v) \quad (3.6)$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu'_j} = \frac{\partial Z}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \mu'_j} + \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \mu'_j} = \frac{\partial Z}{\partial \mu} \cos \alpha + \frac{\partial Z}{\partial v} \sin \alpha \quad (3.7)$$

Сравнивая (3.6) и (3.7), получаем искомое равенство (3.5), учитывая которое, приходим к выводу, что интегральное представление возвышения поверхности раздела является инвариантным относительно использованной замены координат, и может быть представлено в виде

$$\eta(\xi, y) = -2\pi i \sum_j \int_{L_j(\alpha)} \frac{F(\omega, \mu_j(v), v)}{T(\omega, \mu_j(v), v)} \exp(-iv y - i\mu_j(v)\xi) dv$$

$$T(\omega, \mu_j(v), v) = \frac{\partial Z(\omega, \mu_j(v), v)}{\partial \mu}$$

4. Дисперсионные зависимости и фазовые структуры. Нестационарность источника волновых возмущений приводит к заметному усложнению топологии карт дисперсионных кривых $\mu_j(v)$, являющихся соответствующими решениями уравнения $Z(\omega, \mu, v) = 0$ [26, 27]. Далее все численные результаты приведены для параметров, характерных для реальной морской среды: толщина льда $h = 0.25$ м, глубина жидкости $H = 100$ м. В данной задаче существуют три критических значения скорости потока жидкости $V_{0,1,2}$ ($V_0 < V_1 < V_2 = \sqrt{gH}$), которые определяют качественно разное поведение дисперсионных зависимостей, и, соответственно, пространственные свойства фазовых картин возбуждаемых волновых полей. Значение V_0 определяется минимумом фазовой скорости волн на поверхности раздела неподвижной жидкости

конечной толщины подо льдом: $V_0 = \frac{\Omega(k_0)}{k_0}$, где k_0 – единственный положительный корень уравнения: $2ABk^5 + 3Bk^4 + Ck^2 - 2Agk - g = 0$ [23, 26, 27]. Значение V_1 соответствует такой скорости потока жидкости V , при которой дисперсионные кривые, заданные параметрически: $\mu_j(v) = \frac{\Omega(k)}{V}$, $v_j(k) = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\Omega(k)}{V}\right)^2}$, не

имеют точек перегиба при $V < V_1$, и имеют, как минимум, две пары точек перегиба при $V > V_1$. Это означает, что при $V < V_1$, уравнение $\mu'_j(k)v''_j(k) - v'_j(k)\mu''_j(k) = 0$ не имеет действительных корней, и при $V > V_1$ имеет, как минимум, два действительных корня. Для параметров этой задачи значения критических скоростей равны: $V_0 = 8.91$ м/с, $V_1 = 14.56$ м/с, $V_2 = 31.31$ м/с.

Если $V < V_0$, то при $\omega = 0$ волновые колебания отсутствуют. Если $V_0 < V < V_1$, то дисперсионная кривая при $\omega = 0$ является выпуклой и не охватывает начало координат $\mu = v = 0$. Если $V_1 < V < V_2$, то дисперсионная кривая при $\omega = 0$, является невыпуклой имеет две точки перегиба, и не охватывает начало координат $\mu = v = 0$. На рис.1 приведены результаты расчетов дисперсионных зависимостей $\mu_1(v)$, для $V = 5$ м/с $< V_0$ и различных значений $\omega \neq 0$, каждая из которых представляет собой одну замкнутую линию. На рис. 2, 3 приведены результаты расчетов дисперсионных зависимостей $\mu_j(v)$ ($j = 1, 2, 3$) для $V_0 < V = 10$ м/с $< V_1$ и различных значений ω , каждая из которых, может состоять из двух или трех замкнутых ветвей. При $\omega < \omega^- = \Omega(k^-) - k^-V = 0.241$ с⁻¹ ($k^- = 0.0266$ м⁻¹ – меньший корень уравнения $\frac{\partial \Omega}{\partial k} = V$) существует как нижняя $\mu_1(v)$ ($\mu_1(v) < 0, \forall v$), так и средняя $\mu_2(v)$ ветви дисперсионных кривых (рис. 2). При увеличении значений ω от нуля до ω^- эти две ветви расширяются навстречу друг к другу, и при $\omega = \omega^-$ происходит слияние двух ветвей в одну – нижнюю ветвь. При дальнейшем увеличении частоты ω происходит расширение оставшейся одной ветви. Верхние ветви дисперсионных кривых $\mu_3(v)$ (рис. 3) существуют только для тех частот ω , которые удовлетворяют неравенству $\omega < \omega^+ = k^+V - \Omega(k^+) = 0.192$ с⁻¹ ($k^+ = 0.181$ м⁻¹ – больший корень уравнения $\frac{\partial \Omega}{\partial k} = V$). При увеличении значений ω от нуля до ω^+ происходит сужение этой ветви дисперсионной кривой, и при $\omega = \omega^+$ она вырождается в точку. Качественное поведение дисперсионных кривых при $V_1 < V < V_2$ остается такими же, только при $\omega = 0$ нижняя и верхняя ветви дисперсионной кривой является невыпуклыми. При $V > V_2$ существуют только две ветви дисперсионных кривых: нижняя (охватывающая точку $\mu = v = 0$) и верхняя.

На рис. 4–7 приведены результаты расчеты фазовых картин, которые показывают, что в зависимости от основных параметров волновой генерации возбуждается одно-

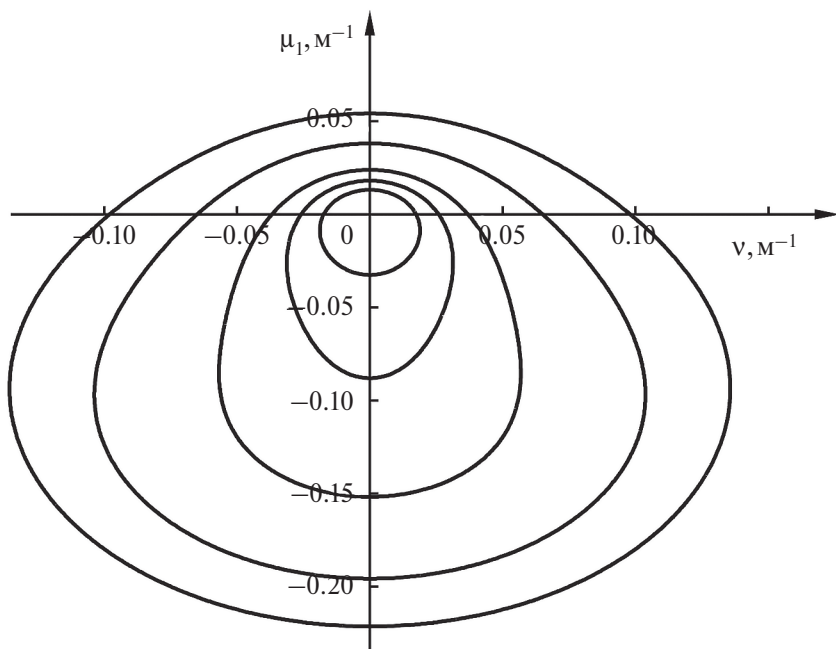


Рис. 1. Дисперсионные кривые $\mu_1(v)$:
линии 1–5 – $\omega = 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0 \text{ c}^{-1}$

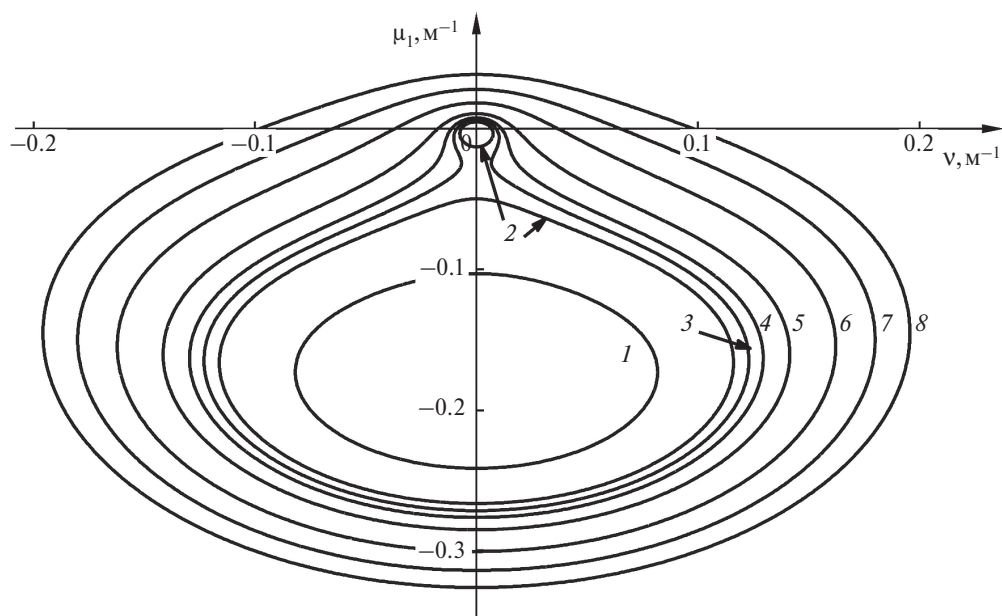


Рис. 2. Дисперсионные кривые:
линии 1, 2 – $\mu_1(v)$: $\omega = 0, 0.2 \text{ c}^{-1}$
линии 3–8 – $\mu_2(v)$: $\omega = 0.25 (\omega > \omega^-), 0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 \text{ c}^{-1}$

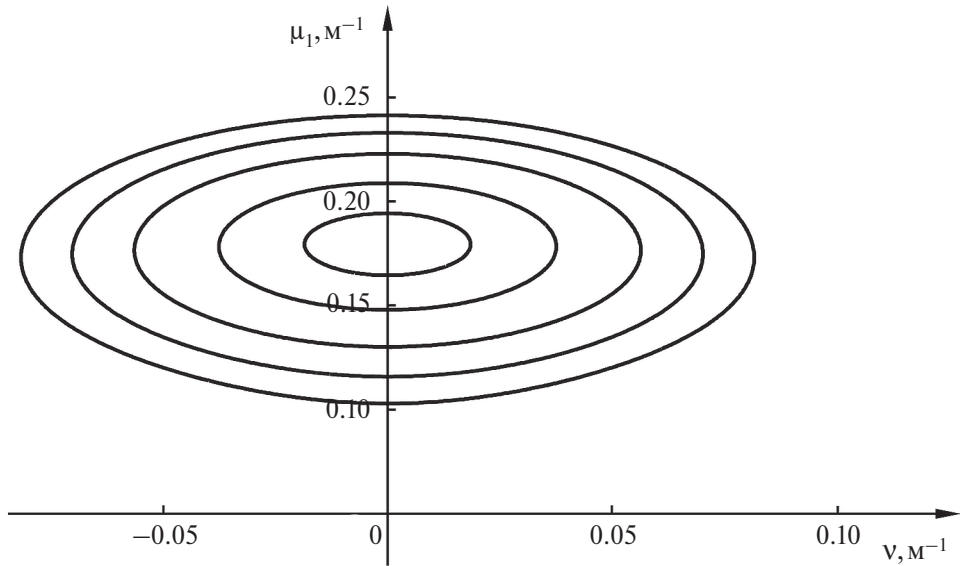


Рис. 3. Дисперсионные кривые $\mu_3(v)$:
линии $\omega = 0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.18 \text{ c}^{-1}$ $\omega = 0, 0.2 \text{ c}^{-1}$

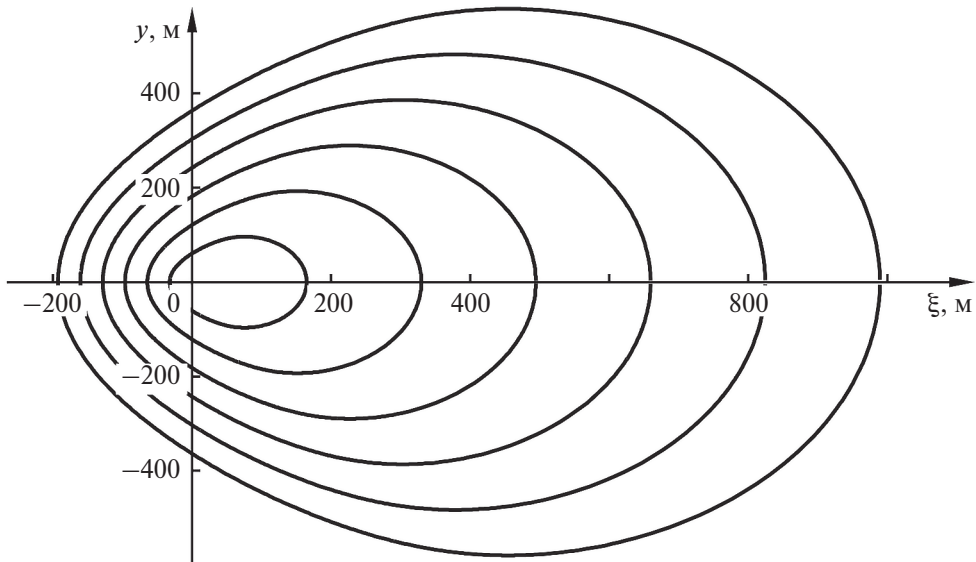


Рис. 4. Линии равной фазы – волны распространяются от источника

временно от одной до трех волновых систем, отвечающим соответствующим ветвям дисперсионных соотношений. На рис. 4 приведены результаты расчетов линий равной фазы для $V = 5 \text{ м/с} < V_0$ и $\omega = 0.8 \text{ c}^{-1}$. Волновая картина представляет собой систему кольцевых волн, распространяющихся от источника. На рис. 5–7 приведены результаты расчетов линий равной фазы для $V_0 < V = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}} < V_1$, $\omega = 0.24 \text{ c}^{-1} < \omega^-$ (рис. 5, 6), $\omega = 0.1 \text{ c}^{-1} < \omega^+$ (рис. 7), которые отвечают нижней (рис. 5), средней (рис. 6) и верхней (рис. 7) ветвям дисперсионных соотношений соответственно. На

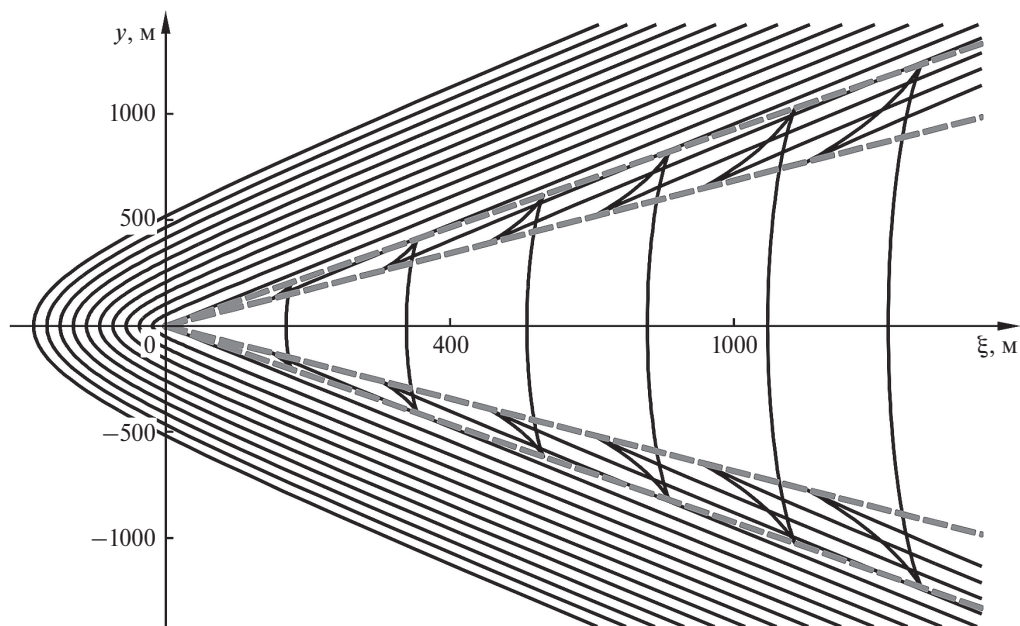


Рис. 5. Линии равной фазы — волны бегут вверх по потоку

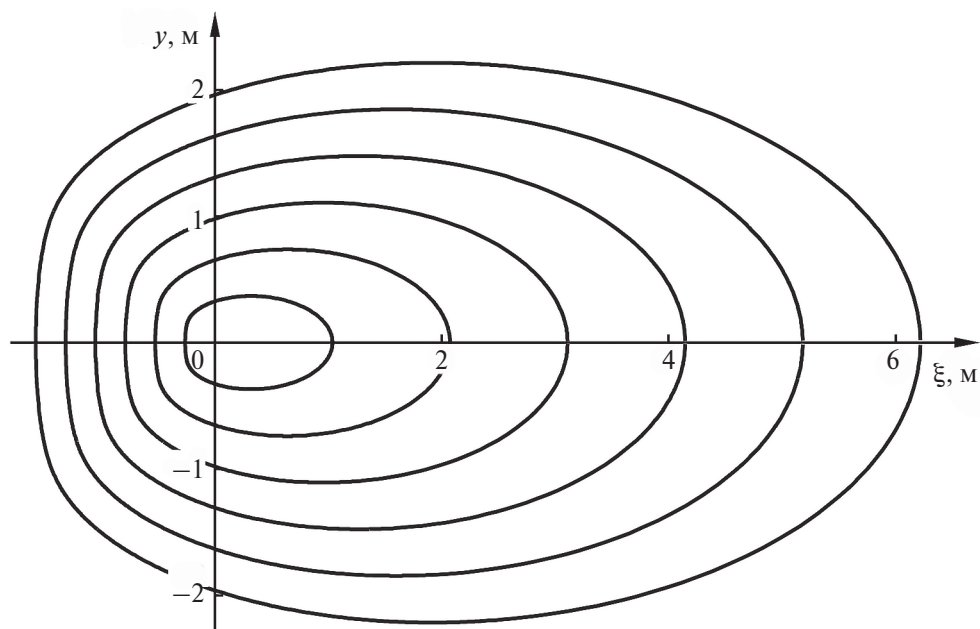


Рис. 6. Линии равной фазы — волны распространяются от источника

рис. 5 изображена достаточно сложная волновая картина, состоящая как из продольных, так и поперечных волн, уходящих от источника возмущений вверх по потоку. Направление распространения волн в этом случае определяется знаком дисперсионных кривых: $\mu_1(v) < 0$ для любых значений v . На рис. 6 представлена волновая

картина кольцевых волн, которые эволюционируют от источника вниз по потоку. На рис. 7 изображена волновая картина, которая представляет собой систему только клиновидных волн, распространяющихся от источника вниз по потоку. Численные расчеты демонстрируют также достаточно заметную перестройку фазовых картин при изменении частоты ω .

Численные расчеты показывают, что при изменении основных параметров волновой генерации (скорость потока, толщина льда, частота пульсаций источника возмущений) волновая картина может состоять из нескольких типов волн, а также происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых волновых полей на границе раздела льда и жидкости. Поэтому усложнение наблюдаемых волновых картин возвышения ледяного покрова, в том числе появление дополнительных волновых структур, может являться одним из признаков заметного изменения таких свойств морской среды как скорость течения, толщина льда, частота осцилляций источников генерации. Как показывают численные расчеты, дисперсионные зависимости $\mu(v)$ могут представлять собой замкнутые, всюду выпуклые кривые (рис. 1, 3), а также могут иметь по две пары точек перегиба, которые существуют только при достаточно малых значениях волновых чисел и расположены симметрично относительно оси $v = 0$ (рис. 2). Такое усложнение топологии дисперсионных зависимостей приводит к генерации дополнительной системы поперечных волн и появлению соответствующих пар волновых фронтов (штриховые линии на рис. 5). Уравнения волновых фронтов определяются как $\xi = \pm \mu'(v_{1,2}^*)y$, где $v_{1,2}^*$ – два корня уравнения $\mu''(v_{1,2}^*) = 0$. В этом случае фазовые картины демонстрируют пространственные структуры типа “ласточкина хвоста” (рис. 5), когда в фиксированной точке наблюдения происходит качественная перестройка одновременно приходящих волновых фронтов [29, 30]. Наиболее интересными с практической точки зрения являются локальные экстремумы дисперсионных зависимостей $\mu'(v)$, так как асимптотики

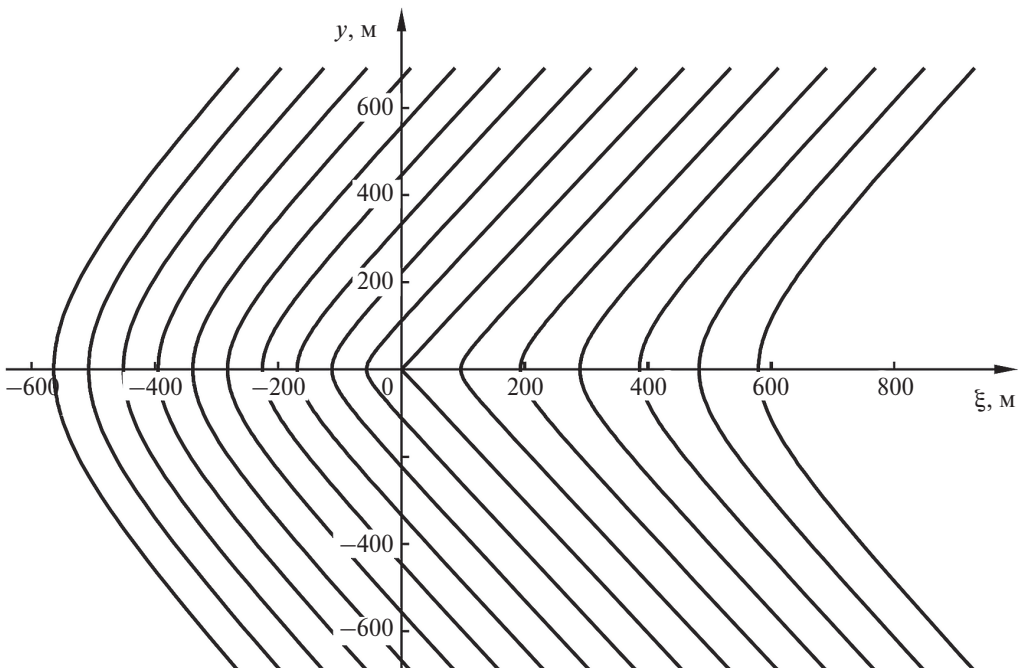


Рис. 7. Линии равной фазы – волны бегут вниз по потоку

дальних волновых полей в окрестности соответствующих волновых фронтов и каустик, отвечающих этим экстремумам, можно описать с помощью метода эталонных интегралов. Сложность топологии рассчитанных дисперсионных зависимостей требует для корректного асимптотического исследования возбуждаемых волновых полей применения специального математического аппарата [29, 30].

Увеличение скорости течения при неизменной толщине льда и частоте пульсаций приводит к расширению (в пространстве волновых чисел) дисперсионных кривых. Кривая, соответствующая меньшей скорости потока, целиком находится внутри кривой, отвечающей большей скорости потока. Поэтому при увеличении скорости течения V длина волны вдоль положительной направления оси $O\xi$ возрастает, а вдоль отрицательного направления оси $O\xi$ убывает. Также при увеличении скорости потока происходит уменьшение пространственной области, где существуют волновые колебания. Вне этой зоны амплитуды дальних волновых полей экспоненциально малы. Этот же эффект наблюдается при изменении толщины льда при неизменном значении скорости потока. При увеличении толщины льда при неизменной скорости потока и частоте пульсаций происходит сужение (в пространстве волновых чисел) дисперсионных кривых, и, соответственно, расширение пространственной области волновых колебаний. Длина волны вдоль положительного направления оси $O\xi$ возрастает, а вдоль отрицательного оси $O\xi$ — убывает.

Заключение. Для решения ряда важных практических задач и приложений, используя операцию свертки, можно в дальнейшем рассчитать волновые возмущения ледяного покрова, возбуждаемых распределенными в пространстве пульсирующими нелокальными источниками возмущений различной физической природы природного и антропогенного характеров. Постановка задачи обтекания нелокального пульсирующего источника потоком однородной жидкости, ограниченной сверху ледяным покровом, включает в себя задание определенных граничных условий на его поверхности. Даже в предположении об идеальности жидкости и потенциальности обтекающего источника потока вычисление волновых полей представляет собой весьма сложную в математическом плане задачу. Очевидно, что существенно проще решается задача обтекания системы точечных гидродинамических особенностей, поскольку в этом случае нет необходимости удовлетворять наперед заданным граничным условиям. Это обстоятельство используется при решении задач обтекания тел или непроницаемых границ, моделируемых специально подобранными системами гидродинамических особенностей, которые часто используются при решении модельных задач, где точное воспроизведение формы, находящегося подо льдом в потоке жидкости нелокального пульсирующего источника не имеет решающего значения. Подобный метод в значительной мере может относиться к задаче о генерации волновых возмущений на границе льда и жидкости, так как замена нелокального пульсирующего источника некоторым набором гидродинамических особенностей существенно упрощает решение. Дополнительного исследования требует вопрос о том, как влияет наличие границ раздела льда и жидкости на картину линий тока, возникающих при обтекании заданных гидродинамических особенностей. Поэтому, в частности, при рассмотрении потоков конечной толщины под ледяным покровом необходимо знать какой именно нелокальный источник возмущений может моделировать выбранная система гидродинамических особенностей.

Работа выполнена за счет гранта РНФ № 23-21-00194.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Букатов А.Е.* Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.
2. *Ильичев А.Т.* Уединенные волны в моделях гидродинамики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.

3. *Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J.* Moving Loads on Ice Plates. Dordrecht: Springer Sci.&Business Media, 1996. 236 pp.
4. *Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V.* Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean. Boston: Kluwer Acad. Pub., 2001. 406 pp.
5. *Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P.* Theory and Applications of Ocean Surface Waves. Advanced Series of Ocean Engineering. Vol. 42. London: World Sci. Pub., 2018. 1240 pp.
6. The Ocean in Motion / Ed. by *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V.* Cham: Springer Nature, 2018. 625 pp.
7. *Козин В.М., Погорелова А.В., Земляк В.Л., Верещагин В.Ю., Рогожникова Е.Г., Купин Д.Ю., Матюшина А.А.* Экспериментально-теоретические исследования зависимости параметров распространяющихся в плавающей пластине изгибно-гравитационных волн от условий их возбуждения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 222 с.
8. *Morozov E.G.* Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 pp.
9. *Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S.* Interaction of short internal waves with the ice cover in an Arctic fjord // *Oceanology*. 2010. V. 50(1). P. 18–27.
10. *Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S.* Short-period internal waves under an ice cover in Van Mijen Fjord, Svalbard // *Advances in Meteorol.* 2011. V. 2011. Art. ID 573269.
11. *Marchenko A., Morozov E., Muzylev S.* Measurements of sea ice flexural stiffness by pressure characteristics of flexural-gravity waves // *Ann. Glaciology*. 2013. V. 54. P. 51–60.
12. *Marchenko A.V., Morozov E.G.* Surface manifestations of the waves in the ocean covered with ice // *Rus. J. Earth Sci.* 2016. V. 16 (1). ES1001.
13. *Morozov E.G., Marchenko A.V., Filchuk K.V., Kowalik Z., Marchenko N.A., Ryzhov I.V.* Sea ice evolution and internal wave generation due to a tidal jet in a frozen sea // *Appl. Ocean Res.* 2019. V. 87. P. 179–191.
14. *Morozov E.G., Pisarev S.V.* Internal tides at the Arctic latitudes (numerical experiments) // *Oceanology*. 2002. V. 42(2). P. 153–161.
15. *Morozov E.G., Zuev O.A., Zamshin V.V., Krechik V.A., Ostroumova S.A., Frey D.I.* Observations of icebergs in Antarctic cruises of the R/V “Akademik Mstislav Keldysh” // *Rus. J. Earth Sci.* 2022. V. 2. P. 1–5.
16. *Булатов В.В., Владимиров И.Ю.* Силовое воздействие потока бесконечно глубокой жидкости на источник под ледяным покровом // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2023. Т. 16. №3. С. 120–128.
17. *Dinvay E., Kalisch H., Parau E.I.* Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // *J. Fluid Mech.* 2019. V. 876. P. 122–149.
18. *Sturova I.V.* Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 784. P. 373–395.
19. *Das S., Sahoo T., Meylan M.H.* Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity // *Proc. R. Soc. A*. 2018. V. 474. P. 20170223.
20. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // *J. Hydrodyn.* 2019. V. 31(3). P. 562–569.
21. *Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A.* Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // *Appl. Ocean Res.* 2019. V. 86. P. 154–165.
22. *Ильичев А.Т.* Эффективные длины волн огибающей на поверхности воды под ледяным покровом: малые амплитуды и умеренные глубины // *ТМФ*. 2021. Т. 28. №3. С. 387–408.
23. *Савин А.С., Савин А.А.* Пространственная задача о возмущениях ледяного покрова движущимся в жидкости диполем // *Изв. РАН. МЖГ*. 2015. №5. С. 16–23.
24. *Стурова И.В.* Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием // *Изв. РАН. МЖГ*. 2021. №4. С. 63–72.
25. *Ильичев А.Т., Савин А.С., Шашков А.Ю.* Траектории жидких частиц в поле темного солитона в жидкости под ледяным покровом // *Изв. РАН. МЖГ*. 2023. №6. С. 110–120.
26. *Маленко Ж.В., Ярошенко А.А.* Трехмерные изгибно-гравитационные волны в плавающем ледяном покрове от движущегося источника возмущений // *ПММ*. 2023. Т. 87. №6. С. 1037–1048.
27. *Булатов В.В., Владимиров И.Ю.* Дальние поля на поверхности на поверхности раздела бесконечно глубокого океана и ледяного покрова, возбуждаемые локализованным источником // *Изв. РАН. ФАО*. 2023. Т. 59. №3. С. 346–351.

28. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
29. Лайтхил Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
30. Borovikov V.A. Uniform Stationary Phase Method. London: IEE Electromagnetic Waves. Ser. 40, 1994. 233 pp.

The Phase Structure of Wave Disturbances Excited By a Pulsating Source at the Interface of a Liquid Flow of Finite Depth and an Ice Sheet

V.V. Bulatov^{a, #}, I.Yu. Vladimirov^{b, ##}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^b*Shirshov Oceanology Institute RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: internalwave@mail.ru*

^{##}*e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

The floating ice sheet determines the dynamic interaction between the ocean and the atmosphere, affects the dynamics of the sea surface and subsurface waters, since the ice sheet and the entire mass of liquid under it participate in the general vertical movement. The paper investigates the phase structure of wave fields arising at the interface between ice and a flow of homogeneous liquid of finite thickness when flowing around a localized pulsating source of disturbances. The ice sheet is modeled by a thin elastic plate, the deformations of which are small, and the plate is physically linear. An integral representation of the solution is obtained, and the results of calculations of dispersion dependencies and phase patterns for various parameters of wave generation are presented. It is shown that the main parameters determining the characteristics of the amplitude-phase structure of wave disturbances of the ice sheet surface are ice thickness, flow velocity, and pulsation frequency. Numerical calculations demonstrate that when the flow velocities, ice thickness, and frequency change, there is a noticeable qualitative restructuring of the phase patterns of the excited long-range wave fields at the ice-liquid interface.

Keywords: ice cover, elevation of the interface, dispersion dependences, phase structure, localized pulsating source

REFERENCES

1. Bukatov A.E. Waves in the Sea with Floating Ice Cover. Sebastopol: FGBUN MHI, 2017. 360 p. (in Russian)
2. Ilyichev A.T. Solitary Waves in Hydrodynamic Models. Moscow: Fizmatlit, 2003. 256 p. (in Russian)
3. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving Loads on Ice Plates. Dordrecht: Springer Sci.&Business Media, 1996. 236 p.
4. Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V. Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean. Boston: Kluwer Acad. Pub., 2001. 406 p.
5. Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P. Theory and Applications of Ocean Surface Waves. Advanced Series of Ocean Engineering. Vol. 42. London: World Sci. Pub., 2018. 1240 p.
6. The Ocean in Motion / Ed. by Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. Cham: Springer Nature, 2018. 625 p.
7. Kozin V.M., Pogorelova A.V., Zemlak V.L., Vereshchagin V.Yu., Rogozhnikova E.G., Kipin D.Yu., Matyushina A.A. Experimental and Theoretical Studies of the Dependence of the Parameters of Flexural-Gravity Waves Propagating in a Floating Plate on the Conditions of Their Excitation. Novosibirsk: SB RAS Pub., 2016. 222 p. (in Russian)
8. Morozov E.G. Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
9. Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S. Interaction of short internal waves with the ice cover in an Arctic fjord // Oceanology, 2010, vol. 50(1), pp. 18–27.
10. Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S. Short-period internal waves under an ice cover in Van Mijen Fjord, Svalbard // Advances in Meteorol., 2011, vol. 2011, art. ID 573269.

11. *Marchenko A., Morozov E., Muzylev S.* Measurements of sea ice flexural stiffness by pressure characteristics of flexural-gravity waves // *Ann. Glaciology*, 2013, vol. 54, pp. 51–60.
12. *Marchenko A.V., Morozov E.G.* Surface manifestations of the waves in the ocean covered with ice // *Rus. J. Earth Sci.*, 2016, vol. 16 (1), ES1001.
13. *Morozov E.G., Marchenko A.V., Filchuk K.V., Kowalik Z., Marchenko N.A., Ryzhov I.V.* Sea ice evolution and internal wave generation due to a tidal jet in a frozen sea // *Appl. Ocean Res.*, 2019, vol. 87, pp. 179–191.
14. *Morozov E.G., Pisarev S.V.* Internal tides at the Arctic latitudes (numerical experiments) // *Oceanology*, 2002, vol. 42(2), pp. 153–161.
15. *Morozov E.G., Zuev O.A., Zamshin V.V., Krechik V.A., Ostroumova S.A., Frey D.I.* Observations of icebergs in Antarctic cruises of the R/V “Akademik Mstislav Keldysh” // *Rus. J. Earth Sci.*, 2022, vol. 2, pp. 1–5.
16. *Bulatov V.V., Vladimirov I.Yu.* Forceful influence of a flow of infinitely deep liquid on a source under the ice cover // *Fundam. & Appl. Hydrophys.*, 2023, vol. 16, no. 3, pp. 120–128.
17. *Dinvay E., Kalisch H., Parau E.I.* Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // *J. Fluid Mech.*, 2019, vol. 876, pp. 122–149.
18. *Sturova I.V.* Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya // *J. Fluid Mech.*, 2015, vol. 784, pp. 373–395.
19. *Das S., Sahoo T., Meylan M.H.* Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity // *Proc. R. Soc. A*, 2018, vol. 474, pp. 20170223.
20. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // *J. Hydrodyn.*, 2019, vol. 31(3), pp. 562–569.
21. *Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A.* Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // *Appl. Ocean Res.*, 2019, vol. 86, pp. 154–165.
22. *Il'ichev A.T.* Effective wavelength of envelope waves on the water surface beneath an ice sheet: small amplitudes and moderate depths // *Theor. & Math. Phys.*, 2021, vol. 208, pp. 1182–1200. <https://doi.org/10.1134/S0040577921090026>
23. *Savin A.A., Savin A.S.* Three-dimensional problem of disturbing an ice cover by a dipole moving in fluid // *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, pp. 613–620. <https://doi.org/10.1134/S0015462815050026>
24. *Sturova I.V.* Motion of a load over an ice sheet with non-uniform compression // *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, pp. 503–512. <https://doi.org/10.1134/S0015462821040121>
25. *Il'ichev A.T., Savin A.S., Shashkov A.Y.* Trajectories of liquid particles in a dark soliton field in a fluid beneath an ice cover // *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, pp. 1076–1086. <https://doi.org/10.1134/S0015462823601912>
26. *Malenko Zh.V., Yaroshenko A.A.* Three-dimensional flexural gravity waves in a floating ice cover from a moving source of disturbances // *JAMM*, 2023, vol. 87, no. 6, pp. 1037–1048.
27. *Bulatov V.V., Vladimirov I.Yu.* Far surface fields at the interface between an infinitely deep ocean and an ice sheet, excited by a localized source // *Izv. RAS. FAO*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 346–351.
28. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* *Waves in Stratified Media*. Moscow: Nauka, 2015. 735 p.
29. *Lighthill J.* *Waves in Liquids*. Moscow: Mir, 1981. 598 p.
30. *Borovikov V.A.* *Uniform Stationary Phase Method*. London: IEE Electromagnetic Waves. Ser. 40, 1994. 233 pp.