

УДК 517(54, 583)+556.342

О ФИЛЬТРАЦИИ В ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЫЧКЕ С УЧАСТКОМ ВЫСАЧИВАНИЯ

© 2024 г. К.Н. Анахаев*

*Институт прикладной математики и автоматизации**Кабардино-Балкарского НЦ РАН, Нальчик, Россия***e-mail: anaha13@mail.ru*

Поступила в реакцию 15.03.2024 г.

После доработки 25.05.2024 г.

Принята к публикации 10.06.2024 г.

На основе представления модулярной эллиптической функции в виде комбинации простых алгебраических формул, конформно отображающих область годографа скорости (криволинейного треугольника) на полуплоскость, приводится прямое определение скоростей фильтрации в геофизической перемычке. Впервые построено семейство изотак — линий равных скоростей фильтрации для внутренней области перемычки при отсутствии воды в нижнем бьефе. Для частных случаев значения предложенных формул практически полностью совпадают с гидромеханическим решением М. Muskat (для 4 случаев) и численными расчетами З.Э. Хайруллина (для 2 случаев). Известная формула Ф.Б. Нельсон Скорнякова для выходных скоростей фильтрации через низовую грань перемычки дает занижение результатов до 45%, а потому не может быть рекомендована для практического использования.

Ключевые слова: фильтрация, перемычка, модулярная эллиптическая функция, конформные отображения, годограф скорости, высота высачивания, изотакхи

DOI: 10.31857/S0032823524030075 ZAUDSA

1. Введение. Исследованию одной из сложнейших задач движения грунтовых вод в геофизической среде — задачи фильтрации в прямоугольной грунтовой перемычке посвящено множество теоретических, экспериментальных и численных методов расчета. Основополагающим исследованием в этой области является работа [1], в которой рассматривалась безнапорная фильтрация в грунтовом массиве (с коэффициентом фильтрации k), расположенном на горизонтальном водопоре с выделенным фрагментом шириной L и глубинами потока с верховой H_1 и низовой H_2 его сторон. Представляя расчетную схему в виде прямоугольника напорной фильтрации высотой и действующим напором, соответственно, равными полусумме и разности последних, он получил гидравлическим методом на основе закона Дарси формулу (1.1) для определения фильтрационного расхода q

$$q = k \frac{H_1^2 - H_2^2}{2L} \quad (1.1)$$

Однако, данное решение было основано не на действительной картине фильтрации в перемычке, поскольку не учитывало явление высачивания потока на низовую грань перемычки (рис. 1), а потому не может быть использовано, в частности, для определения положения депрессионной кривой.

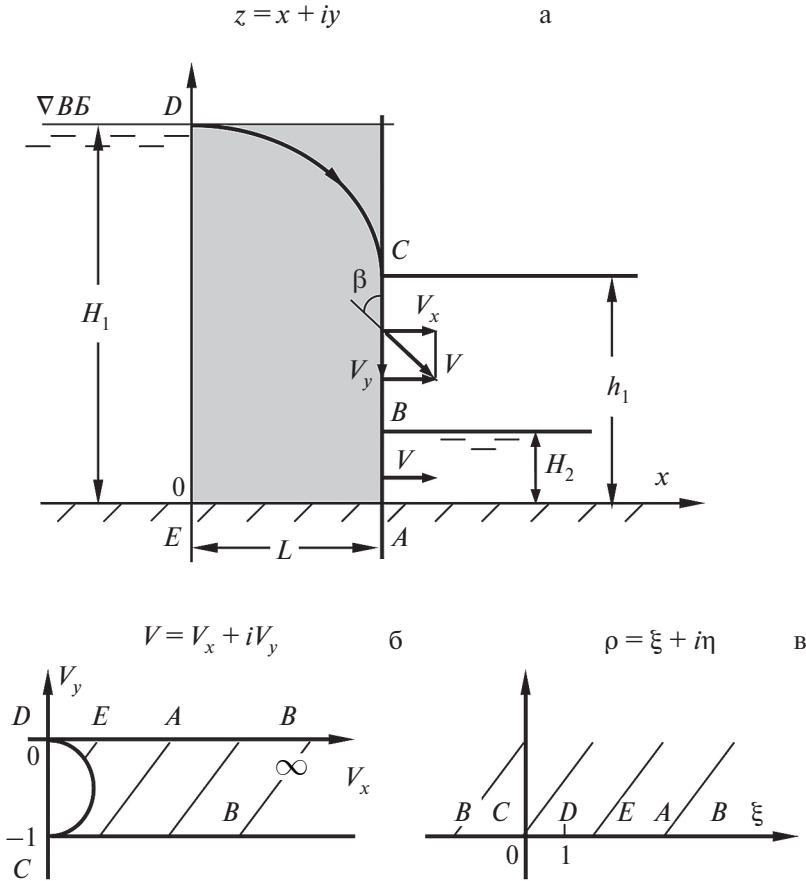


Рис. 1. Фильтрация в геофизической перемычке с комплексными областями:

- а) физического течения $z = x + iy$; б) годографа скорости $V = V_x + iV_y$;
в) промежуточной полуплоскости $\zeta = \xi + i\eta$

В последующем формула (1) использовалась в [2,3] для расчета расхода фильтрации через грунтовую перемычку. Позже, разработанная методика [4] гидравлического расчета фильтрационного расхода через перемычку (ядро) с учетом высачивания потока на ее низовую грань в предположении горизонтальности всех линий токов также дала результат, равный формуле (1.1).

Девинсон [5] впервые дал общую гидромеханическую постановку точного решения задачи фильтрации через грунтовую перемычку с составлением годографа скорости и рассмотрением условий распределения скоростей на свободной поверхности и участке высачивания на низовой грани (рис. 1), а также указал на необходимость использования модулярных эллиптических функций для ее решения.

Было установлено [6] нижеследующее соотношение приведенных скоростей фильтрации (при $k = 1$ – здесь и далее в усл. ед.) в зоне высачивания низовой грани перемычки (рис. 1):

$$V_t = 1, V_n = \operatorname{tg} \beta, V = \sqrt{V_t^2 + V_n^2} = \cos^{-1} \beta, \quad (1.2)$$

где V_t и V_n – касательная и нормальная составляющие полной скорости фильтрации V , β – угол между линией тока и низовой гранью перемычки. Там же показано, что в случаях $H_2 > 0$ (в точке уреза воды нижнего бьефа) и при $H_2 = 0$ (в точке

сопряжения низовой грани с непроницаемым основанием) теоретическое значение выходной скорости фильтрации стремиться к бесконечности $V \rightarrow \infty$, а фильтрационный расход через перемычку в обоих случаях находится по формуле (1).

На основе точной гидромеханической постановки задачи безнапорной фильтрации в перемычке был дан [6,7] полуобратный метод решения указанной задачи для заданных значений промежуточных параметров a и b . Позже [8] были приведен численный расчет по этой методике для одной частной задачи (случай I: $a = 10$, $b = 5$), для которого получены (обратным расчетом) геометрические размеры “перемычки Гамеля–Гюнтера”: $H_1 = 0.3223$, $H_2 = 0.0842$, $L = 0.1619$ и значение ординаты высачивания кривой депрессии на низовой грани $h_1 = 0.2067$. Фильтрационный расход через перемычки при этом не определялся.

Muskat [9, 10] охарактеризовал решение [7] с использованием годографа скорости в задаче фильтрации через перемычку как “весьма сильное и наиболее серьезное теоретическое изыскание в области гравитационных течений”, но имеющее “ужасающую трудность” проведения математических расчетов [10]. Используя методику [7, 8], он рассчитал полуобратным методом характеристики перемычек еще для пяти случаев (II–VI) [9, 10], соответственно, для:

- случая II ($a = 5$, $b = 2$): $H_1 = 0.670$, $H_2 = 0.158$, $L = 0.444$, $h_1 = 0.358$,
- случая III ($a = \infty$, $b = 10$): $H_1 = 0.672$, $H_2 = 0$, $L = 0.329$, $h_1 = 0.430$,
- случая IV ($a = \infty$, $b = 5$): $H_1 = 0.872$, $H_2 = 0$, $L = 0.484$, $h_1 = 0.519$,
- случая V ($a = \infty$, $b = 2$): $H_1 = 1.286$, $H_2 = 0$, $L = 0.906$, $h_1 = 0.646$,
- случая VI ($a = \infty$, $b = 1.2$): $H_1 = 1.823$, $H_2 = 0$, $L = 1.692$, $h_1 = 0.719$.

При этом были также рассчитаны значения приведенных скоростей фильтрации на верховой и низовой гранях и по подошве перемычек. Им же была предложена приближенная потенциальная функция на основе рядов Фурье для фильтрационно-го потока в перемычке, в виде:

$$\Phi = kH_1 - \frac{k}{2H_1L}(H_1^2 - H_2^2)x + \frac{2kH_1}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{\left[(-1)^n - \cos \frac{n\pi H_2}{H_1}\right]}{n^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi L}{H_1}} \cos \frac{n\pi y}{H_1} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{H_1}, \quad (1.3)$$

где x , y – текущие координаты по рис. 1; $\Phi = -kh$ – потенциал скорости фильтрации при напоре h .

Значение фильтрационного расхода, теоретически определяемое по зависимости (1.3), также равно формуле (1.1), которая получила, в свою очередь, подтверждение опытами по методу ЭГДА [9–11]. При этом, величины скоростей фильтрации на верховой грани (входные), в зоне подпора низовой грани (выходные) и по подошве ядра (продольные), а также распределение напоров вдоль последней, практически полностью совпадают с значениями точного решения [7]. В то же время, зависимость (1.3) дает неверные значения высоты высачивания и скоростей фильтрации в верхней части участка высачивания, а расчеты по ней требуют большого объема вычислительной работы, что ограничивало возможности ее широкого применения в инженерной практике [12].

Была разработана [13–15] методика моделирования безнапорной фильтрации в перемычке по методу ЭГДА (на электролитической модели), проведены обширные экспериментальные исследования и построены семейства графиков по прямому определению высоты высачивания и положения депрессионной кривой, а также фильтрационного расхода через перемычки при различных глубинах воды в нижнем бьефе. При этом было отмечено практически полное совпадение значений опытных расходов с результатами расчетов по формуле (1.1).

На основе аналитической теории линейных дифференциальных уравнений дано [15, 16] более эффективное, чем по методу Девинсона–Гамеля, решение задачи безнапорной фильтрации в перемычке с построением семейств графиков по прямо-

му определению высоты высачивания депрессионной кривой и дифференцированных значений расходов через зоны высачивания и подпора нижнего бьефа.

На основе строгого гидромеханического решения доказано [17], что формула Дюпюи (1.1), ранее полученная при различных приближениях, является точной для фильтрационного расхода через перемычку.

Вышеприведенные исследования (из огромного числа работ по этой тематике) определяют основные характеристики фильтрационного потока через перемычку, однако, до настоящего времени наименее изученным остается вопрос определения скоростей в самой области фильтрации перемычки. Известные гидромеханические решения [7–10, 15, 16] позволяют находить параметры фильтрации только лишь по контуру области фильтрации [18–20], поскольку конформное отображение годографа скорости фильтрации (криволинейного треугольника) на полуплоскость, осуществляемое модулярной эллиптической функцией [19], рассматривается в них только для действительной оси комплексной полуплоскости (рис. 1,б). Кроме этого, указанные решения являясь полуобратными, а потому не могут дать прямого аналитического решения в явном виде задачи фильтрации для перемычки с наперед заданными граничными условиями, а из-за чрезвычайной математической сложности имеют ограниченные возможности для прикладных исследований – так, известны всего 6 случаев перемычек с аналитическим расчетом скоростей фильтрации по их верховым граням и подошвам, в том числе только для одной “перемычки Гамеля–Гюнтера” с расчетом скоростей по низовой грани (рис. 2).

2. Основной раздел. В работах [18–20] дано гидромеханическое решение задачи фильтрации в перемычке, полученное на основе приближенного последовательного конформного отображения области физического течения (рис. 1,а) посредством шестнадцати промежуточных комплексных областей на область годографа скорости фильтрации (рис. 1,б). При этом, область последнего отображена на комплексную полуплоскость (рис. 1,в) комбинацией простых (алгебраических) формул с максимальной погрешностью до 1% в сравнении с точными значениями модулярной эллиптической функции [19], строго отображающей область криволинейного тре-

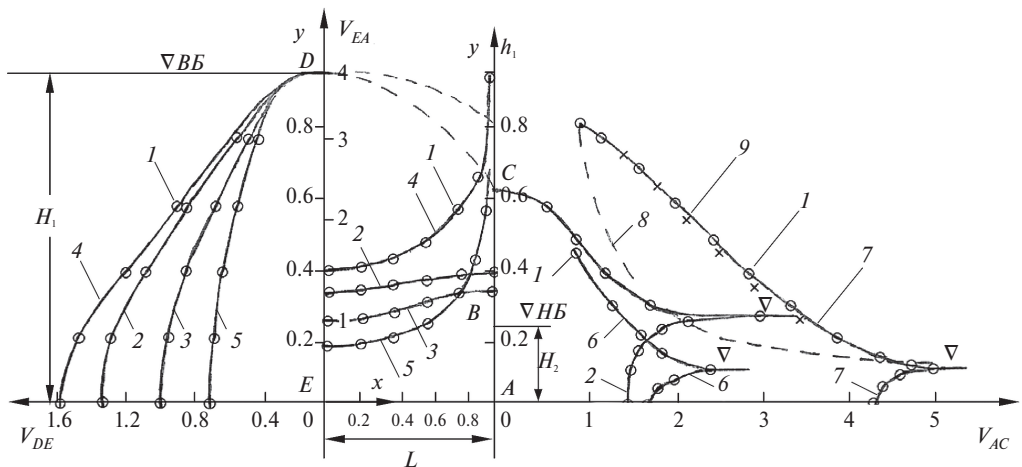


Рис. 2. Сравнение результатов скоростей фильтрации:

символом $\circ$ обозначены расчеты 1 – по автору; кривые 2–5 – по [10,11] для верховой грани и подошвы перемычек, соответственно (I–III, VI), а также для низовой грани для случая I (кривые 2); кривые 6, 7 – по численному решению [21] для низовой грани перемычек VII, VIII; пунктирная кривая 8 – по [22] для участка высачивания VIII; символом $\times$ обозначены расчеты 9 – по формуле (2.19) для участка высачивания VIII.

угольника (годографа скорости фильтрации) на полуплоскость [7–10, 15, 16]. Указанное позволяет непосредственно определять элементарными функциями скорости фильтрации не только по граням перемычки, но и непосредственно внутри области фильтрации.

Решение по прямому определению величин полной скорости фильтрации V (с горизонтальной V_x и вертикальной V_y составляющими) для любых заданных точек области фильтрации с координатами x и y для перемычек (при $L/H_1 \leq 1.1$) реализуем посредством элементарных расчетных зависимостей, в виде:

$$x_1 = \frac{\pi x}{2L}, y_1 = \frac{\pi y}{2L}, \delta_1 = \sin x_1 \operatorname{ch} y_1, \delta_2 = \cos x_1 \operatorname{sh} y_1$$

$$\sigma_1 = \frac{\delta_1}{\delta_c}, \sigma_2 = \frac{\delta_2}{\delta_c}, M_1 = \sqrt{(1 + \sigma_1)^2 + \sigma_2^2} + \sqrt{(1 - \sigma_1)^2 + \sigma_2^2}$$

(при $\sigma_2 = 0$: – для $\sigma_1 > 1 \rightarrow M_1 = 2\sigma_1$, – для $\sigma_1 \leq 1 \rightarrow M_1 = 2$)

$$\theta_1 = \arcsin \frac{2\sigma_1}{M_1}, \theta_2 = \operatorname{arch} \frac{M_1}{2}, \varepsilon_1 = \frac{\theta_1}{\theta_1^2 + \theta_2^2}, \varepsilon_2 = \frac{\theta_2}{\theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$N_1 = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2, N_2 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2, P_1 = \frac{1}{m}[N_1 + (m - c)], P_2 = \frac{N_2}{m}$$

$$t_1 = P_1[1 + (P_1^2 + P_2^2)^{-1}], t_2 = P_2[1 - (P_1^2 + P_2^2)^{-1}]$$

$$A_2 = t_1^2 - t_2^2 + (\beta_1^2 - \alpha_1^2), B_2 = 2t_1t_2$$

$$A_1 = t_1 + \frac{t_1}{|t_1|} \sqrt{\frac{\sqrt{A_2^2 + B_2^2} + A_2}{2}}, B_1 = t_2 + \sqrt{\frac{\sqrt{A_1^2 + B_2^2} - A_2}{2}}$$

$$S_1 = t_1 + \frac{(\alpha_1 + \beta_1)\beta_1 A_1}{A_1^2 + B_1^2}, S_2 = t_2 - \frac{(\alpha_1 + \beta_1)\beta_1 B_1}{A_1^2 + B_1^2} \quad (2.1)$$

$$\xi = A_0 \frac{(\alpha_1 + \beta_1 - S_1)(b_s - S_1) + S_2^2}{(b_s - S_1)^2 + S_2^2}, \eta = S_2 \frac{\alpha_1 + \beta_1 - b_s}{(b_s - S_1)^2 + S_2^2}$$

$$\xi_0 = 2(\alpha_3 + \beta_3) \left(\xi - \frac{1}{2} \right), \eta_0 = 2(\alpha_3 + \beta_3)\eta$$

$$C_1 = \xi_0^2 - \eta_0^2 - (\alpha_3 + \beta_3)^2, D_1 = 2\xi_0\eta_0$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\alpha_3 + \beta_3} \left(\alpha_3 \xi_0 + \frac{\xi_0}{|\xi_0|} \beta_3 \sqrt{\frac{\sqrt{C_1^2 + D_1^2} + C_1}{2}} \right)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\alpha_3 + \beta_3} \left(\alpha_3 \eta_0 + \beta_3 \sqrt{\frac{\sqrt{C_1^2 + D_1^2} - C_1}{2}} \right)$$

$$C_2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - (\alpha_2 + \beta_2)^2, D_2 = 2\gamma_1\gamma_2$$

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2} \left(\alpha_2 \gamma_1 + \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} \beta_2 \sqrt{\frac{\sqrt{C_2^2 + D_2^2} + C_2}{2}} \right)$$

$$g_2 = \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2} \left(\alpha_2 \gamma_2 + \beta_2 \sqrt{\frac{C_2^2 + D_2^2 - C_2}{2}} \right)$$

$$C_3 = g_1^2 - g_2^2 - 4, \quad D_3 = 2g_1g_2$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \left(g_1 + \frac{g_1}{|g_1|} \sqrt{\frac{C_3^2 + D_3^2 + C_3}{2}} \right), \quad J_2 = \frac{1}{2} \left(g_2 + \sqrt{\frac{C_3^2 + D_3^2 - C_3}{2}} \right)$$

$$M_2 = \sqrt{(1 + J_1)^2 + J_2^2} + \sqrt{(1 - J_1)^2 + J_2^2}$$

(при $J_2 = 0$: — для $J_1 > 1 \rightarrow M_2 = 2J_1$, — для $J_1 \leq 1 \rightarrow M_2 = 2$)

$$u_1 = \arcsin \frac{2J_1}{M_2}, u_2 = \operatorname{arch} \frac{M_2}{2}, \tau_1 = \frac{u_1}{\pi} - \frac{1}{2}, \tau_2 = \frac{u_2}{\pi}$$

$$V_x = \tau_2, V_y = \tau_1, V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Следует указать, что громоздкость формулы (2.1) обусловлена необходимостью сохранения пошагового контроля правильности полученных расчетных зависимостей при проведении семнадцати конформных отображений различных комплексных областей с установлением однозначной взаимосвязи областей физического течения и годографа скорости.

При этом, угол наклона β линии тока к горизонтали для полной скорости фильтрации V в заданной точке находится по формуле

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{V_y}{V_x} \quad (2.2)$$

В расчетные зависимости (2.1) входят нижеследующие параметры, равные:

$$\alpha_1 = 2, \beta_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{L}{H_1} \right), \alpha_2 = 2, \beta_2 = \pi^{-1}, \alpha_3 = 2.31831$$

$$\beta_3 = 1.70578, c = \frac{4}{\pi^2}, d = -\operatorname{arsh}^{-2} \left(\operatorname{sh} \frac{\pi H_1}{2L} / \operatorname{ch} \frac{\pi h_1}{2L} \right), \delta_c = \operatorname{ch} \frac{\pi h_1}{2L}$$

$$m = \frac{1}{2}(c - d), A_0 = \frac{b_s + \alpha_1 + \beta_1}{2(\alpha_1 + \beta_1)}, b_s = b_t + \frac{(\alpha_1 + \beta_1)\beta_1}{b_t + \sqrt{b_t^2 + \beta_1^2 - \alpha_1^2}} \quad (2.3)$$

$$b_t = b_p(1 + b_p^{-2}), b_p = \frac{1}{m}(m - c + b_N), b_N = \arcsin^{-2} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi H_2}{2L} / \operatorname{ch} \frac{\pi h_1}{2L} \right),$$

в которых h_1 — высота высачивания депрессионной кривой на низовую грань над подошвой перемычки, определяемая для заданных размеров перемычки по результатам точных [8–10, 15, 16 и др.] и численных [21, 22 и др.] решений, электрогидродинамического моделирования [9, 13, 23 и др.], а также по формулам [12, 24]:

$$h_1 = H_2 + \left(1 - \frac{H_2}{H_1} \right)^n h_{1(0)}; h_{1(0)} = H_1 - 0.29L \left(\pi - \frac{L}{H_1} \right) \quad (2.4)$$

$$n = 0.72 + 2.2L/H_1,$$

где $h_{1(0)}$ — высота участка высачивания в предположении $H_2 = 0$ в перемычках $L/H_1 \leq 1.1$.

Полученные зависимости позволяют определять значения скоростей фильтрационного потока в любой заданной точке области фильтрации перемычки с построением семейства изоток — линий равных скоростей фильтрации, а также эпюр скоростей фильтрации на верховой и низовой границах и подошве перемычки, практически полностью совпадающих с результатами теоретического решения [9, 10] (рис. 2).

На верховой грани перемычки DE величины входных скоростей фильтрации определяются по зависимостям (2.1) при значениях координат $x = 0$, $0 \leq y \leq H_1$: $x, x_1, t_2, g_2, \gamma_2, \delta_1, \varepsilon_1, \eta, \eta_0, \sigma_1, \tau_1, \theta_1, B_{1-2}, D_{1-3}, J_2, N_2, P_2, S_2$ равны нулю.

При этом вертикальная составляющая V_y полной скорости фильтрации V будет равна нулю $V_y = 0$, а горизонтальная составляющая V_x равна полной скорости $V_x = V$. Величины V_x возрастают от нулевого значения на урезе воды верхнего бьефа (в точке D) $V_D = 0$ до максимальной величины на верховой грани в месте ее сопряжения с основанием (в точке E) $V_E = V_{\max}$. При этом текущие значения скоростей фильтрации вдоль верховой грани DE определяются в зависимости от координаты $0 \leq y \leq H_1$ по формуле

$$V_{DE} = V_x = \frac{1}{\pi} \operatorname{arch} \left[\frac{1}{2} \left(g_1 + \frac{g_1}{|g_1|} \sqrt{g_1^2 - 4} \right) \right], \quad (2.5)$$

в которой

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2} \left(\alpha_2 \gamma_1 + \frac{\gamma_1}{|\gamma_1|} \beta_2 \sqrt{\gamma_1^2 - (\alpha_2 + \beta_2)^2} \right) \\ \gamma_1 &= \frac{1}{\alpha_3 + \beta_3} \left(\alpha_3 \xi_0 + \frac{\xi_0}{|\xi_0|} \beta_3 \sqrt{\xi_0^2 - (\alpha_3 + \beta_3)^2} \right); \quad \xi_0 = 2(\alpha_3 + \beta_3) \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \\ \xi &= A_0 \frac{(\alpha_1 + \beta_1 - S_1)}{(b_s - S_1)}; \quad S_1 = \frac{1 + P_1^2}{P_1} + \frac{(\alpha_1 + \beta_1) \beta_1}{A_1} \\ A_1 &= \frac{1 + P_1^2}{P_1} - \frac{P_1}{|P_1|} \sqrt{\left(\frac{1 + P_1^2}{P_1} \right)^2 + (\beta_1^2 - \alpha_1^2)}; \quad P_1 = [N_1 + (m - c)] m^{-1} \\ N_1 &= N_{DE} = - \left[\operatorname{arch} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\delta_c} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{2L} \right)^2} \right]^{-2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Максимальное на верховой грани значение скорости фильтрации в точке E $V_E = V_{\max}$ для случаев наличия и отсутствия воды в нижнем бьефе найдем по (2.4) при значении $y = 0$, в виде:

$$\begin{aligned} V_E &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arch} \left[\frac{1}{2} \left(g_E + \sqrt{g_E^2 - 4} \right) \right]; \quad g_E = \frac{1}{1 + 2\pi} \left[2\pi \gamma_E + \sqrt{\gamma_E^2 - \left(2 + \frac{1}{\pi} \right)^2} \right] \\ \gamma_E &= \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} \left[\alpha_3 b_s + \beta_3 \sqrt{b_s^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Вдоль подошвы перемычки EA вертикальные скорости фильтрации V_y равны нулю $V_y = 0$, а горизонтальные скорости $V_x = V_{EA}$ возрастают от V_E (в точке E) до V_A (в точке A).

Текущие значения скоростей фильтрации по подошве EA ($0 \leq x < L$, $y = 0$) V_{EA} и низовой грани AC ($x = L$, $0 < y \leq h_1$) V_{AC} перемычки рассчитываются по формулам (2.5)–(2.6), подставляя в них вместо N_1 , соответственно, величины $N_1 = N_{EA}$ и $N_1 = N_{AC}$, равные:

$$N_{EA} = \left[\arcsin \left(\frac{1}{\delta_c} \sin \frac{\pi x}{2L} \right) \right]^{-2} \quad (2.8)$$

$$N_{AC} = \left[\arcsin \left(\frac{1}{\delta_c} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2L} \right) \right]^{-2} \quad (2.9)$$

Более упрощенно значения скоростей фильтрации по подошве перемычки могут быть определены по линейной (при $H_2 > 0$) и эллиптической (при $H_2 = 0$) зависимостям [12, 24], соответственно:

— при *наличии воды* в нижнем бьефе ($H_2 > 0$) по линейной зависимости

$$V_{EA} = V_E + (V_A - V_E) \frac{x}{L}, \quad (2.10)$$

где V_E находится по (2.7), а V_A — скорость фильтрации в точке A определяется дифференцированием зависимости (1.3) при $y = 0$ и $x = L$ по формуле

$$V_A = -\frac{d\Phi}{dx} = \frac{H_1^2 - H_2^2}{2H_1L} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - \cos \frac{n\pi H_2}{H_1}}{n \operatorname{th} \frac{n\pi L}{H_1}}, \quad (2.11)$$

либо по более упрощенной формуле (2.12), основанной на равенстве площадей эпюр скоростей фильтрации и действующего потенциала скорости по линии подошвы перемычки [12, 24]

$$V_A = \frac{2}{L}(H_1 - H_2) - V_E \quad (2.12)$$

— при *отсутствии воды* в нижнем бьефе ($H_2 = 0$) по эллиптической зависимости

$$V_{EA} = V_A - (V_A - V_E) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2}, \quad (2.13)$$

где V_E находится по (2.7), либо по упрощенной (до 4–5%), аппроксимирующей формуле

$$V_E = 0.21\pi L^{-1.17} \quad (2.14)$$

Как известно [6, 12, 24], теоретическое значение скорости фильтрации в точке A при отсутствии воды в нижнем бьефе ($H_2 = 0$) стремится к бесконечности $V_A \rightarrow \infty$, однако, практическое ее значение ограничено и для прикладных исследований может быть определена из условия равенства эллиптической площади эпюры скоростей значению действующего потенциала по линии подошвы перемычки [12, 24], в виде

$$V_A = \frac{4}{4 - \pi} \left(\frac{H_1}{L} - \frac{\pi}{4} V_E \right), \quad (2.15)$$

либо по эмпирической зависимости на основе данных ЭГДА для максимальной выходной скорости фильтрации по низовой грани перемычки при $H_2 = 0$ [12, 24]

$$V_{A,\max} = \frac{2.5 + 0.5L/H_1}{0.1 + 1.3L/H_1} \quad (2.16)$$

Впервые Nemenyi [25] представил кривую депрессии в ядрах земляных плотин в виде дуги окружности, которая для перемычек $L/H_1 \leq 1.2$ может быть описана зависимостью [12, 23, 24]:

$$y = H_1 + \sqrt{r^2 - (x + \sqrt{2} \cdot h_s - \frac{1}{2}L)^2} - \frac{1}{2}h_s - \sqrt{2}L; \quad 0 < x < L \quad (2.17)$$

$$h_s = H_1 - h_1; r = \frac{3}{2} \sqrt{h_s^2 + L^2},$$

основанной на опытных данных ЭГДА и аналогичной кривой [9, 10].

На рис. 2 приводятся сравнения значений скоростей фильтрации, рассчитанных по предлагаемым зависимостям (2.5)–(2.16) (“кружочки” 1), с результатами гидромеханических (строгих) решений [9, 10] по верховой грани и подошве перемычек для случаев I–III, VI (соответственно, кривые 2–5) и по низовой грани для случая I (кривые 2), а также с численными расчетами [21] для скоростей фильтрации по низовой грани (для случаев VII, VIII) соответственно: – $H_1 = 1$, $H_2 = 1/10$, $L = 3/4$, $h_1 = 0.474$ (VII – кривые 6); $H_1 = 1$, $H_2 = 0.1$, $L = 0.2$, $h_1 = 0.734$ (VIII – кривые 7). Кроме этого, приведены также данные по скорости фильтрации для участка высачивания низовой грани (случай VIII), рассчитанные по формуле (2.18) [22], принятой по аналогии изменения скоростей при выходе фильтрационного потока из основания флютбета в горизонтальный дренаж (пунктирная кривая 8)

$$V_{BC} = \sqrt{\frac{h_1 - H_2}{y - H_2}}, \quad (2.18)$$

и упрощенной формуле автора (“крестики” 9)

$$V_{BC} = \cos^{-1} \left(\frac{\arctg \sqrt{\ln \frac{h_1 - H_2}{y - H_2} + \frac{1}{2} \frac{L}{H_1 - H_2}}}{0.1 + 1.3 \frac{L}{H_1 - H_2}} \right), \quad (2.19)$$

в которых ордината y изменяется в интервале $H_2 < y \leq h_1$.

Как видно из рис. 2, значения скоростей фильтрации по предложенным формулам (2.5)–(2.16) для верховой и низовой граней и подошвы перемычки практически полностью (<1–2%) совпадают с результатами теоретического решения [9], а также с численными расчетами [21] (<4–5%) для низовой грани. При этом, упрощенная формула автора (2.19) также дает приемлемые для практики (<4–5%) значения скоростей фильтрации для участка высачивания, формула же (2.18) [22] занижает результаты до 45% и более, а потому не может быть рекомендована для практического использования.

На рис. 3 приведена впервые построенное по элементарным формулам семейство кривых 1 изотх (линий равных скоростей фильтрации) для внутренней области фильтрации перемычки при отсутствии воды в нижнем бьефе: $H_1 = 1$, $H_2 = 0$, $L = 3/4$, $h_1 = 0.48$ (случай IX), из которого видно крайне неравномерное распределение скоростей в теле перемычки. Наличие сильнонапряженного, опасного участка с резко возрастающими градиентами скоростей фильтрации характеризуется сильным сгущением линий изотх в нижней правой части перемычки при явной “недогруженности” зон с разряженными линиями изотх в верхних (левой и срединной) частях области фильтрации. Приведены также рассчитанные эпюры скоростей фильтрации: – входных V_{DE} на верховой грани DE (кривая 2); – продольных V_{EA} по линии подошвы EA (кривая 3); – полных выходных V на низовой грани AC (кривая 4) и их горизонтальной составляющей V_x (кривая 5), а также очертание кривой депрессии по зависимости (2.17).

Получение изложенного прямого решения в элементарных функциях для скоростей фильтрации внутри области перемычки стало возможным вследствие конформно отображения комплексной области годографа скорости (криволинейного треугольника) на полуплоскость (рис. 1,б,в) модулярной эллиптической функции, представленной в виде комбинации алгебраических зависимостей [18, 19].

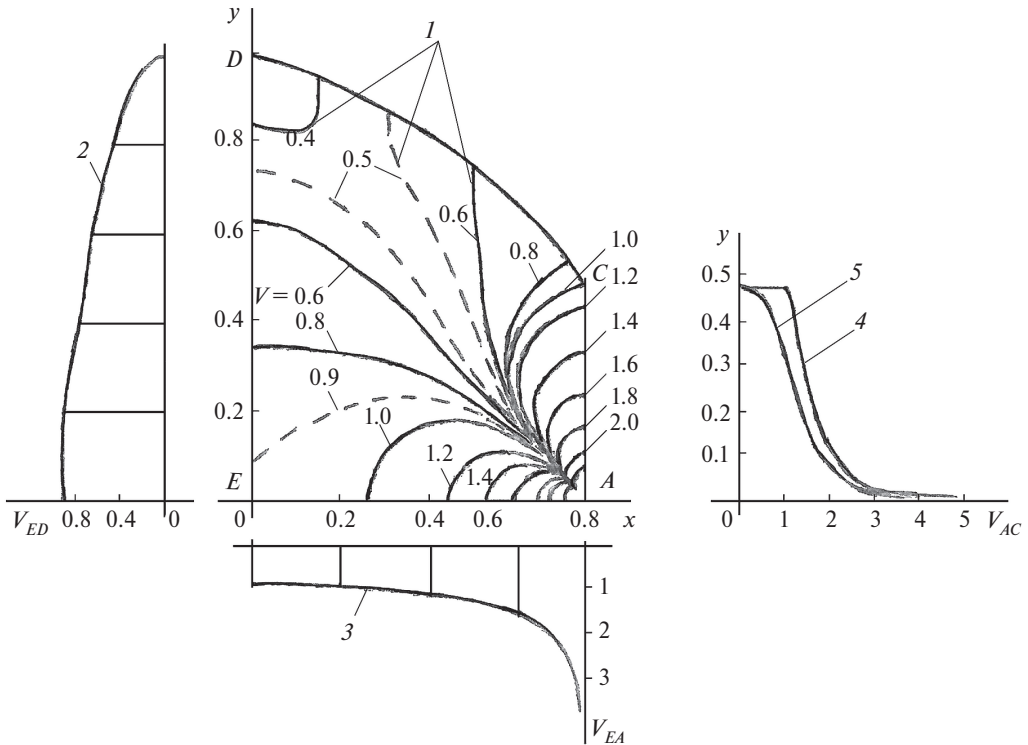


Рис. 3. Фильтрация в геофизической перемычке при отсутствии воды в нижнем бьефе:

$H_1 = 1$, $H_2 = 0$, $L = 0.75$, $h_1 = 0.48$ (случай IX):

1 – семейство изот на внутренней области перемычки; 2 – эпюра входных скоростей фильтрации V_{DE} на верховой грани DE ; 3 – эпюра продольных скоростей фильтрации V_{EA} по линии подошвы EA ; 4 и 5 – эпюры полных выходных скоростей фильтрации V и V_x на низовой грани AC .

Результаты точных аналитических решений задачи фильтрации в перемычке широко используются как для сравнительного анализа различных приближенных решений [26], так и для тестирования программ для ЭВМ [27, 28]. При этом, нередко выявляются ошибки в определении таких фильтрационных параметров перемычек, как высота высачивания кривой депрессии, фильтрационный расход, выходные градиенты напора (скорости фильтрации) на низовой грани [29, 30]. Следует также отметить, что результаты фильтрационного расчета перемычек непосредственно используются и при расчетах фильтрации в земляных плотинах с ядрами [30, 31].

Закключение. В статье рассматриваются методы расчета фильтрации в геофизических перемычках с определением характеристик фильтрационного потока, таких как: фильтрационный расход, очертание депрессионной кривой и высота ее высачивания на низовую грань перемычки, скорости фильтрации. Отмечено, что конформное отображение комплексной области годографа скорости (криволинейного треугольника) на полуплоскость модулярной эллиптической функцией, представленной в элементарных функциях, дало возможность для прямого вычисления значений скоростей фильтрации не только по граням и подошве перемычки, но и внутри области перемычки комбинацией простых алгебраических формул. Приводится впервые построенное семейство изотак (линий равных скоростей фильтрации) для внутренней области фильтрации перемычки при отсутствии воды в нижнем бьефе. Для частных случаев расчеты скоростей фильтрации по предложенным формулам практически

полностью совпадают с гидромеханическим решением [9] (для 4 случаев) и численными расчетами [21] (для 2 случаев). Известная формула [22] для выходных скоростей фильтрации через низовую грань, принятая по аналогии с выходом потока из основания флютбета в горизонтальный дренаж, дает занижение результатов до 45 % и более, а потому не может быть рекомендована для практического использования.

Работа выполнена в рамках темы Государственного задания ИПМА КБНЦ РАН № 122041800015-8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dupuit J.* Etudes theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux. No 49. August. Paris., 1863.
2. *Forchheimer Ph.* Hydraulik. Leipzig u. Berlin. 3 Auflage. 1930. 525 s.
3. *Кнорре М.Е.* Работа песчаных перемычек в физическом отношении и метод их расчета // в кн.: Методология гидравлических расчетов, принятых при составлении проекта Запорожской ГЭС на реке Днепре. В. 1. М.: 1925. С. 285–327.
4. *Павловский Н.Н.* Собр. соч. Т. 2. Движение грунтовых вод. М.;Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 771 с.
5. *Девисон Б.Б.* Об установившемся движении грунтовых вод через земляные плотины // Зап. гос. гидр. ин-та. Т. 6. 1932. С. 11–19.
6. *Dachler R.* Ueber den Stromungsvorgang bei Hangquellen // Die Wasserwirtschaft. Wien. 1934. Jg. 27. H. 5–6. S. 41–43.
7. *Hamel G.* Ueber Grundwasserstromung // Zeischrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 1934. B. 14. H. 3. S. 129–159.
8. *Hamel G., Gunter E.* Numerische Duchredinung der Abhandlung uber Grundwasserstromung // Zeischrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 1935. B. 15. H. 3. S. 255–265.
9. *Muskat M.* The seepage of water through dams with vertical faces // Physics. 1935. V. 6. P. 402–415.
10. *Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.;Л.: 1949. 528 с.
11. *Wyckoff R.D., Reed D.W.* Electrical conduction models for the solition of water seepage problems // Physics. 1935. V. 6. P. 395–401.
12. *Анахаев К.Н.* Методы фильтрационного расчета каменно-земляных плотин. Дис. канд. техн. наук (05.23.07) / М.: ВНИИ ВОДГЕО, 1985. 203 с.
13. *Проскурников С.М.* Новые расчетные данные по фильтрации через земляные перемычки // Тр. Гос. гидр. ин-та. В. 5. 1937. С. 162–182.
14. *Христианович С.А., Михлин С.Г., Девисон Б.Б.* Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1938. 407 с.
15. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. М.; Л.: Институт механики АН СССР, 1942. 143 с.
16. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука. 1977. 664 с.
17. *Чарный И.А.* Строгое доказательство формул Дюпюи для безнапорной фильтрации с промежутком высачивания // Докл. АН СССР. 1951. Т. 79. №6. С. 937–940.
18. *Анахаев К.Н.* О фильтрационном расчете перемычки // Матем. моделир. 2011. Т. 23. №2. С. 148–158.
19. *Анахаев К.Н.* Определение модулярной эллиптической функции в задачах безнапорной фильтрации // Докл. РАН. 2016. Т. 470. №2. С. 157–161.
<https://doi.org/10.7868/S0869565216220084>
20. *Анахаев К.Н.* Задачи гидромеханики и нелинейной механики в комплексных и специальных функциях // в сб. избр. статей: ИПМА КБНЦ РАН, ИВП РАН. Нальчик; М.: 2020. 245 с.
21. *Хайруллин З.Э.* Исследование влияния неоднородности ядра каменно-земляной плотины на фильтрационные характеристики // Тр. сем. по краевым задачам. В. 19. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1983. С. 202–210.
22. *Нельсон-Скорняков Ф.Б.* Расчет движения грунтовых вод через земляные плотины. М.: 1936. 159 с.
23. *Анахаев К.Н.* Расчет фильтрации через грунтовую перемычку на непроницаемом основании // Изв. вузов. Строит. и архитект. 1990. №7. С. 78–82.

24. Анахаев К.Н. Совершенствование конструкции, методов расчетного обоснования и проектирования противофильтрационных устройств грунтовых плотин. Дис. д-ра техн. наук (05.23.07) / М.: МГУП, 1997. 521 с.
25. Nemenyi P. Wasserbauliche Stromungslehre. Leipzig: 1933.
26. Cryer C.W. A survey of steady-state porous flow free boundary problems. // MRC Tech. Sum. Rep. 1657. Univ. Wisconsin, Madison. 1976. 135 p.
27. Chaiyo Kh., Rattanadecho Ph., Chantasiriwan S. The method of fundamental solutions for solving free boundary saturated seepage problem // Int. Commun. in Heat&Mass Transfer. 2011. №38. P. 249–254.
28. Шаланин В.А., Патлай К.И. Численное моделирование фильтрации грунтовых вод через прямоугольную перемычку из однородного грунта на водонепроницаемом основании // Инжен. гидрол. 2019. №2 (39). С. 111–117.
29. Петриченко М.Р., Заборова Д.Д., Котов Е.В., Мусорина Т.А. Образование промежутка высачивания в прямоугольной перемычке // Гидротех. строит. 2018. №10. С. 49–52.
30. Распопин Г.А., Лещенко С.И. Фильтрация через грунтовые плотины с ядром // Изв. вузов. Строит. 2006. №8. С. 47–51.
31. Mohamed Abd El-Razek M. Rezk, Abd El-Aziz Ahmed Ali Senoon. Analytical solution of seepage through earth dam with an internal core // Alexandria Engng. J. 2011. №50. P. 111–115.

About Filtration in a Geophysical Bridge with a Seepage Site

K.N. Anakhaev^{a,*}

^a*Institute of applied mathematics and automation
of Kabardino-of the Balkar SC of the RAS, Nalchik, Russia*

^{*}*e-mail: anaha13@mail.ru*

Based on the representation of a modular elliptic function in the form of a combination of simple algebraic formulas that conformally map the area of the velocity hodograph (curved triangle) onto a half-plane, a direct definition of filtration rates in a geophysical bridge is given. For the first time, a family of isotope lines of equal filtration rates was constructed for the inner area of the bridge in the absence of water in the downstream. For special cases, the values of the proposed formulas almost completely coincide with the hydromechanical solution of Masket M. (for 4 cases) and the numerical calculations of Khairullin Z.E. (for 2 cases). The well-known Nelson-Skornyakov F.B. formula for the output filtration rates through the lower face of the jumper, adopted by analogy with the flow outlet from the base of the flatbed into the horizontal drainage, gives an underestimation of the results by up to 45%, and therefore cannot be recommended for practical use.

Keywords: filtration, jumper, modular elliptic function, conformal maps, velocity hodograph, curved triangle, isotopes

REFERENCES

1. Dupuit J. Etudes theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux. No 49. Paris: 1863.
2. Forchheimer Ph. Hydraulik. Leipzig u. Berlin: Auflage, 1930. 525 s.
3. Knorre M.E. The work of sand bridges in physical terms and the method of their calculation // in: Methodology of Hydraulic Calculations Adopted When Drafting the Zaporozhye Hydro-electric Power Station on the Dnieper River. Vol. 1. Moscow: 1925. pp. 285–327.
4. Pavlovsky N.N. Coll. Works. Vol. 2. Movement of Groundwater. Moscow, Leningrad: USSR AS Pub., 1956. 771 p.
5. Devison B.B. On the steady movement of groundwater through earthen dams // Notes of the State Hydrol. Inst., vol. 6, 1932, pp. 11–19.
6. Dachler R. Ueber den Stromungsvorgang bei Hangquellen // Die Wasserwirtschaft, 1934, Jg. 27, h. 5–6, ss. 41–43.
7. Hamel G. Ueber Grundwasserströmung // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1934, B. 14, h. 3, ss. 129–159.

8. *Hamel G., Gunter E.* Numerische Durchrednung der Abhandlung uber Grundwasserstromung // Zeischrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 1935, B. 15, h. 3, ss. 255–265.
9. *Muskat M.* The seepage of water through dams with vertical faces // Physics, 1935, vol. 6, pp. 402–415.
10. *Muskat M.* The Flow Homogeneous Fluid through Porous Media. N.Y.;London: McGraw Hill Co., 1937. 763 p.
11. *Wyckoff R.D., Reed D.W.* Electrical conduction models for the solition of water seepage problems // Physics, 1935, vol. 6, pp. 395–401.
12. *Anakhaev K.N.* Methods of filtration calculation of stone-earth dams. Dis. Candidate of Technical Sciences (05.23.07) / Moscow: VNII VODGEO, 1985. 203 p.
13. *Proskurnikov S.M.* New calculated data on filtration through earth bridges // Proc. of the State Hydrol. Inst., 1937, vol. 5, pp. 162–182.
14. *Khristianovich S.A., Mikhlin S.G., Devison B.B.* Some New Questions of Continuum Mechanics. Moscow: USSR AS Pub., 1938. 407 p.
15. *Polubarinova-Kochina P.Ya.* Some Problems of the Flat Movement of Groundwater. Moscow: Inst. of Mech. of the USSR AS, 1942. 143 p.
16. *Polubarinova-Kochina P.Ya.* Theory of Groundwater Movement. Moscow: Nauka, 1977. 664 p.
17. *Charny I.A.* Rigorous proof of Dupuy formulas for non-pressure filtration with a seepage interval // Dokl. of the USSR AS, 1951, vol. 79, no. 6. pp. 937–940.
18. *Anakhaev K.N.* On the filtration calculation of the jumper // Math. Model., 2011, vol. 23, no. 2, pp. 148–158.
19. *Anakhaev K.N.* Definition of a modular elliptic function in pressure-free filtration problems // Dokl. of the RAS, 2016, vol. 470, no. 2, pp. 157–161.
<https://doi.org/10.7868/S0869565216220084>
20. *Anakhaev K.N.* Problems of hydromechanics and nonlinear mechanics in complex and special functions // in: Coll. of Selected Articles. IPMA KBNTS RAS, IVP RAS. Nalchik;Moscow: 2020. 245 p.
21. *Khairullin Z.E.* Investigation of the influence of the heterogeneity of the core of a stone-earth dam on filtration characteristics // Proc. of the Sem. on Boundary Value Problems, Vol. 19. Kazan: Kazan Univ. Pub., 1983, pp. 202–210.
22. *Nelson-Skornyakov F.B.* Calculation of Groundwater Movement through Earthen Dams. Moscow: 1936. 159 p.
23. *Anakhaev K.N.* Calculation of filtration through a soil bridge on an impermeable base // Izv. vuzov. Construct.&Archit., 1990, no. 7, pp. 78–82.
24. *Anakhaev K.N.* Improvement of the design, methods of calculation justification and design of anti-filtration devices of soil dams. Dis. doctor of Technical Sciences (05.23.07) / Moscow: MGUP, 1997. 521 p.
25. *Nemenyi P.* Wasserbauliche Stromungslehre. Leipzig: 1933.
26. *Cryer C.W.* A survey of steady-state porous flow free boundary problems. // MRC Tech. Sum. Rep., 1657, Univ. Wisconsin, Madison, 1976, 135 p.
27. *Chaiyo Kh., Rattanadecho Ph., Chantasiriwan S.* The method of fundamental solutions for solving free boundary saturated seepage problem // Int. Commun. in Heat&Mass Transfer, 2011, no. 38, pp. 249–254.
28. *Shalanin V.A., Patlay K.I.* Numerical modeling of groundwater filtration through a rectangular bridge made of homogeneous soil on a waterproof base // Engng. Hydrology, 2019, no. 2 (39), pp. 111–117.
29. *Petrichenko M.R., Zaborova D.D., Kotov E.V., Musorina T.A.* Formation of a seepage gap in a rectangular bridge // Hydrotech. Constr., 2018, no. 10, pp. 49–52.
30. *Raspopin G.A., Leshchenko S.I.* Filtration through soil dams with a core // Izv. vuzov. Construct., 2006, no. 8, pp. 47–51.
31. *Mohamed Abd El-Razek M. Rezk, Abd El-Aziz Ahmed Ali Senoon.* Analytical solution of seepage through earth dam with an internal core // Alexandria Engng. J., 2011, no. 50, pp. 111–115.