

УДК 539.3

## СИСТЕМЫ ВКЛЮЧЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ УПРУГОМ КЛИНЕ

© 2024 г. Е. Д. Пожарская<sup>1</sup>, Д. А. Пожарский<sup>1,\*</sup>, Б. В. Соболев<sup>1</sup><sup>1</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

\*e-mail: pozharda@rambler.ru

Поступила в редакцию 21.02.2024 г.

После доработки 12.04.2024 г.

Принята к публикации 10.05.2024 г.

Рассматриваются контактные задачи о двух одинаковых тонких жестких эллиптических включениях в трехмерном упругом клине двухгранного угла, внешние грани которого подчинены условиям жесткой или скользящей заделки. Задачи сведены к интегральным уравнениям с симметричными ядрами. Вводятся два безразмерных геометрических параметра, характеризующих расположение включений в биссекториальной полуплоскости клина. В предположении линейной связи между параметрами для решения применяется регулярный асимптотический метод. Асимптотика для двух включений сравнивается с соответствующими решениями для единичного включения в клине и для периодической цепочки включений, ось которой параллельна ребру клина.

*Ключевые слова:* пространственный упругий клин, включения, интегральные уравнения

DOI: 10.31857/S0032823524030119 YZUYXI

**1. Введение.** Исследование задач для тел с включениями может иметь приложение в механике композитов. Большинство публикаций посвящено плоским задачам [1–6]. В различных постановках изучались задачи о периодических системах включений в упругой плоскости [1, 3]. Рассматривалось напряженно-деформированное состояние упругой полосы с упругим [2] или жестким [4] включением. Анализировались задачи в нелинейной постановке, содержащей граничные условия с неравенствами [5–8]. Периодические контактные задачи для систем включений близки к периодическим задачам о внедрении штампов [9–14]. Известны регулярные и сингулярные асимптотические решения осесимметричных задач о круглой пластинке в слое [4]. В пространственном случае точное решение задачи о жестком эллиптическом включении в неограниченном упругом теле было получено на основании результатов Л. А. Галина [4]. При помощи регулярного асимптотического метода, используя решение [4] в качестве нулевого приближения, изучались задачи о единичном плоском включении в трехмерном упругом однородном [15] и составном [16] клине, а также задача о периодической цепочке включений в клине с жестко заделанными гранями [14].

В отличие от интегральных уравнений [15], в настоящей статье ядра интегральных уравнений представлены в форме явной симметрии, обеспечивающей корректность при всех углах клина и предельный переход к соответствующим плоским задачам для единичного включения в клине. Преобразование ядер от скрытой [15] к явной форме симметрии осуществляется путем сдвига контура интегрирования [17]. Показано, что в случае бесконечной периодической прямолинейной цепочки включений в клине со скользящей заделкой граней ряды в интегральном уравнении сходятся, как и для

случая жесткой заделки [14]. Для частного случая периодической системы включений в полупространстве при скользящей заделке границы ядро интегрального уравнения представлено в двух эквивалентных формах, одна из которых не содержит квадратур. Ранее две аналогичные формы ядра были получены в периодической задаче нормального контакта для упругого полупространства со скользящей заделкой по границной полуплоскости [12].

**2. Два включения в клине.** Рассмотрим упругий клин  $0 \leq r < \infty$ ,  $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ ,  $|z| < \infty$ , ребро которого совпадает с осью  $z$  цилиндрической системы координат. Упругий материал характеризуется модулем сдвига  $G$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . В срединной полуплоскости клина расположены два тонких жестких включения, занимающих симметричные эллиптические области  $\Omega_{\pm} = \{(r - a)^2/c^2 + (z \pm l)^2/b^2\} \leq 1$ ,  $a > c$ ,  $b \geq c$  (рис. 1). Между включениями и упругой средой в области контакта осуществляется полное сцепление. Внешние грани клина находятся в условиях жесткой или скользящей заделки (задачи А и В соответственно). К включениям приложены силы  $2T$ , действующие в полуплоскости  $\varphi = 0$  перпендикулярно ребру клина. Включения смещаются на величину  $\delta$  в направлении действия сил. В силу симметрии по  $\varphi$  достаточно рассматривать область  $\varphi \in [0, \alpha]$ . В первом приближении в области контакта пренебрегаем напряжением  $\tau_{\varphi z}$  по сравнению с  $\tau_{r\varphi}$ . Для единичного включения показано, что  $\tau_{\varphi z} = O(\tau_{r\varphi}/\lambda^2)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda = a/b$  [15]. Граничные условия задач имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi = 0 : \quad & u_r = \delta, (r, z) \in \Omega; \quad \tau_{r\varphi} = 0 \quad (r, z) \notin \Omega; \quad u_\varphi = \tau_{\varphi z} = 0 \\ \varphi = \alpha : \quad & A) u_\varphi = u_r = u_z = 0, \quad B) u_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

При известных величинах  $\alpha, G, \nu, \delta$  и заданных областях  $\Omega_{\pm}$  требуется определить касательные контактные напряжения  $\tau_{r\varphi}(r, 0, z) = \tau(r, z)$ ,  $(r, z) \in \Omega_{\pm}$ . Затем можно найти величину  $T$  при помощи условия равновесия включений

$$\iint_{\Omega_{\pm}} \tau(r, z) dr dz = T \tag{2.2}$$

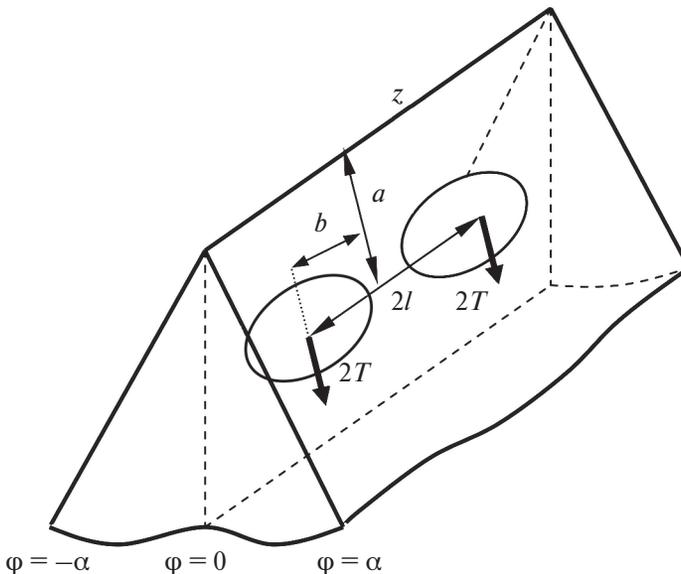


Рис. 1. Эллиптические включения в клине

Для сведения краевых задач (2.1) к интегральным уравнениям используем известные фундаментальные решения и ядра интегральных уравнений соответствующих задач для единичного включения, полученные в форме скрытой симметрии по радиальной координате [15]. Переходя к форме явной симметрии ядер в соответствии с теоремой Бетти взаимности работ путем сдвига контура интегрирования [17, п. 2.9.3], учитывая симметрию задач по  $z$  и вводя новые обозначения

$$y = y' + l, z = z' + l, \Omega = \{(r - a)^2/c^2 + z^2/b^2 \leq 1\}, \theta = \kappa/\kappa_1, \\ \kappa = 3 - 4\nu, \kappa_1 = 4 - 4\nu$$

и т.д., получим (штрихи далее опускаем)

$$\iint_{\Omega} \tau(x,y)K(x,y,r,z)dxdy = 2\pi G \delta; \quad (r,z) \in \Omega \tag{2.3}$$

$$K(x,y,r,z) = \frac{4\theta}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u)W(u)K_{iu}(\beta x)K_{iu}(\beta r)C(\beta y, \beta z)dud\beta$$

$$W(u) = S_1(u) - \kappa^{-1}S_2(u) \left( x \frac{\partial}{\partial x} + r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \kappa^{-2}S_3(u)xr \frac{\partial^2}{\partial x \partial r}$$

$$C(\beta y, \beta z) = \cos(\beta(y - z)) + \cos(\beta(y + z + 2l))$$

Здесь  $K_{iu}(r)$  – цилиндрическая функция Бесселя [18,19]. Для задачи А

$$S_1(u) = \frac{f_+(u)}{g_+(u)} - S_3(u), S_2(u) = \frac{\text{sh}(2\alpha u)}{g_+(u)} - S_3(u), S_3(u) = \frac{4\text{sh}^2(\alpha u)\sin^2\alpha}{g_+(u)f_-(u)},$$

а для задачи В

$$S_1(u) = \frac{f_-(u)}{g_-(u)}, S_2(u) = \frac{\text{sh}(2\alpha u)}{g_-(u)}, S_3(u) = 0$$

$$f_{\pm}(u) = \text{sh}(2\alpha u) \pm \kappa^{-1}u \sin(2\alpha), g_{\pm}(u) = \text{ch}(2\alpha u) \pm \cos(2\alpha)$$

Для единичных эллиптических включений (задачи С и D соответственно для жесткой и скользящей заделки граней клина) в ядре (2.3) следует положить

$$C(\beta y, \beta z) = \cos(\beta(y - z)) \tag{2.4}$$

Форма ядер с явной симметрией по  $x, r$  гарантирует их корректность при всех углах клина. Пусть в уравнении (2.3), (2.4) область  $\Omega$  – полоса  $\{a \leq r \leq b, |z| < \infty\}$ ,  $\tau(r,z) = \tau(r)$ . Тогда, совершая предельный переход при  $\beta \rightarrow 0$ , используя теорию обобщенных функций [20], придем к интегральным уравнениям соответствующих плоских задач

$$\int_a^b \tau(\rho) k \left( \ln \frac{\rho}{r} \right) d\rho = \pi G \delta \quad (a \leq r \leq b), \quad k(t) = \theta \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos(ut) du \tag{2.5}$$

$$\text{А) } L(u) = \frac{2 \text{sh}^2(\alpha u) - 2\kappa^{-2}u^2 \sin^2 \alpha}{f_-(u)}, \quad \text{В) } L(u) = \frac{f_-(u)}{g_-(u)} = S_1(u)$$

Уравнения (2.5) можно вывести также при помощи интегрального преобразования Меллина. В пределе при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\alpha u = t$  функция  $L(u)$  для задачи В совпадает с известным символом ядра соответствующей задачи о включении в упругой полосе [4, формула (3.11)]. Функции  $L(u)$  служат символами ядер интегральных уравнений (2.3) и (2.5). Важно, что эти функции по своему асимптотическому поведению в нуле и бесконечности являются функциями типа тангенса гиперболического.

Исключением служит значение  $\alpha = \pi$  в задаче В, когда  $L(u) = \text{cth}(\pi u)$  и ядро уравнения (2.3) при условии (2.4) соответствует случаю единичного эллиптического включения в упругом пространстве [4, формулы (1.16)], а ядро (2.5) – случаю включения в виде отрезка в упругой плоскости. В последнем случае интегральное уравнение (2.5) приводится к уравнению плоской контактной задачи о вдавливании жесткого штампа в упругую полуплоскость.

Ядро интегрального уравнения (2.3), (2.4) для задачи В при  $\alpha = \pi/2$ , используя известные интегралы ([17], формулы (109)), можно представить в виде

$$K(x, y, r, z) = \frac{1}{R} - \frac{(z - y)^2}{\kappa_1 R^3} - \frac{1}{R_+} + \frac{(z - y)^2}{\kappa_1 R_+^3}$$

$$R = \sqrt{(r - x)^2 + (z - y)^2}, \quad R_+ = \sqrt{(r + x)^2 + (z - y)^2},$$

что соответствует случаю двух симметричных включений в упругом пространстве, сдвигаемых в противоположных направлениях оси, проходящей через их центры [4].

Для пары симметричных включений в упругом пространстве, смещаемых в одном направлении перпендикулярно прямой, соединяющей их центры (задача В при  $\alpha = \pi$ ), ядро уравнения (2.3) принимает форму [4]

$$K(x, y, r, z) = \frac{1}{R} - \frac{(z - y)^2}{\kappa_1 R^3} + \frac{1}{R_*} - \frac{(z + y + 2l)^2}{\kappa_1 R_*^3} \tag{2.6}$$

$$R_* = \sqrt{(r - x)^2 + (z + y + 2l)^2}$$

Для решения интегрального уравнения (2.3) применим регулярный асимптотический метод [4]. Введем безразмерные величины

$$r' = \frac{r - a}{b}, \quad z' = \frac{z}{b}, \quad \delta' = \frac{\delta}{b}, \quad c' = \frac{c}{b}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \mu = \frac{l}{b}$$

$$\tau'(r', z') = \frac{\tau(r, z)}{G}, \quad T' = \frac{T}{Gb^2}, \quad \Omega \rightarrow \Omega' \tag{2.7}$$

и т.д. (штрихи далее опускаем). Локация пары эллиптических включений в клине характеризуется параметрами  $\lambda$  (относительная удаленность от ребра клина) и  $\mu$  (относительное расстояние между включениями). Предположим, что эти параметры связаны соотношением

$$\mu = \gamma\lambda, \quad \gamma = 1/a, \tag{2.8}$$

и будем искать решение в виде разложения по степеням малого параметра  $1/\lambda$ .

Запишем уравнение (2.3) в безразмерных обозначениях, выделяя в ядре главную часть (2.6), соответствующую включению в упругом пространстве:

$$\iint_{\Omega} \tau(x, y) \left[ \frac{1}{R} - \frac{(z - y)^2}{\kappa_1 R^3} + K_*(x, y, r, z) \right] dx dy = 2\pi\delta; \quad (r, z) \in \Omega \tag{2.9}$$

$$K_*(x, y, r, z) = \frac{1}{R_0} - \frac{(z_0 + y_0)^2}{\kappa_1 R_0^3} +$$

$$+ \frac{4\theta}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) W_0(u) K_{iu}(\beta x_0) K_{iu}(\beta r_0) \mathcal{C}_0(\beta y, \beta z) du d\beta$$

$$R_0 = \sqrt{(r-x)^2 + (z_0 + y_0)^2}, x_0 = x + \lambda, r_0 = r + \lambda, y_0 = y + \gamma\lambda, z_0 = z + \gamma\lambda$$

$$W_0(u) = S_1^*(u) - \kappa^{-1}S_2^*(u) \left( x_0 \frac{\partial}{\partial x} + r_0 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \kappa^{-2}S_3(u)x_0r_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial r}$$

$$C_0(\beta y, \beta z) = \cos(\beta(y-z)) + \cos(\beta(y_0 + z_0)), S_n^*(u) = S_n(u) - \text{cth}(\pi u); n = 1, 2$$

Разложим функцию  $K_*(x, y, r, z)$  в ряд по степеням  $1/\lambda$  при помощи значения интеграла [19]

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty K_{iu}(\beta x_0) K_{iu}(\beta r_0) \cos(\beta z) d\beta = \\ & = \frac{1}{\sqrt{x_0 r_0} \text{ch}(\pi u)} F \left( \frac{1}{2} - iu, \frac{1}{2} + iu, 1; -\frac{(r-x)^2 + z^2}{4x_0 r_0} \right), \end{aligned}$$

где  $F(a, b, c, x)$  – гипергеометрическая функция Гаусса, и биномиальных рядов. Можно показать, что такое разложение сходится при достаточно больших  $\lambda$  и определенных ограничениях на параметр  $\gamma$ . В частности, для пары круговых включений для сходимости достаточно наложить условия

$$\lambda > \max \left( \frac{1}{1-\gamma}, \sqrt{\frac{2}{1-\gamma^2}}, \frac{1}{\alpha-\gamma}, \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2-\gamma^2}} \right); \quad \gamma < \min(1, \alpha) \tag{2.10}$$

Для единичного кругового включения (случай (2.4)) оценки (2.10) меняются на неравенство

$$\lambda > \max(\sqrt{2}, \sqrt{1+\alpha^{-2}})$$

Ограничиваясь первым членом разложения, получим ( $\lambda \rightarrow \infty$ )

$$K_*(x, y, r, z) = \frac{A}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right); \quad A = a_0 + a_1 + a_2 \tag{2.11}$$

Для пары включений

$$a_0 = \frac{\theta}{2\gamma}, \quad a_1 = \theta \int_0^\infty \text{th}(\pi u) \left[ S_1^*(u) + \kappa^{-1}S_2^*(u) - \kappa^{-2}S_3(u) \frac{3+4u^2}{8} \right] du$$

$$\begin{aligned} a_2 = \theta \int_0^\infty \text{th}(\pi u) & \left[ S_1^*(u) \sum_{n=0}^\infty V_n(u) + \kappa^{-1}S_2^*(u) \sum_{n=0}^\infty (1+2n)V_n(u) - \right. \\ & \left. - \kappa^{-2}S_3(u) \sum_{n=0}^\infty \left( \frac{1}{4} + n + n^2 - \frac{n}{2\gamma^2} \right) V_n(u) \right] du \\ V_n(u) & = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left( \frac{1}{2} - iu \right)_n \left( \frac{1}{2} + iu \right)_n \gamma^{2n}, \end{aligned}$$

где  $(a)_n$  – символ Похгаммера [18].

Для единичного включения (задачи С и D) в формулах (2.11) следует положить  $a_0 = a_2 = 0$ .

Для эллиптической области  $\Omega$  регулярное асимптотическое решение интегрального уравнения (2.9), (2.11) получим в виде ( $\lambda \rightarrow \infty$ )

$$\tau(r, z) = \frac{\delta}{cDL(r, z)} \left[ 1 - \frac{A}{\lambda D} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right], \quad L(r, z) = \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2} - z^2} \quad (2.12)$$

$$D = S_{00} - \frac{S_{10}}{\kappa_1}, \quad S_{00} = K, \quad S_{10} = \frac{K - E}{e^2}$$

$$S_{km} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2k} t \sin^{2m} t}{(1 - e^2 \sin^2 t)^{k+m+1/2}} dt; \quad e^2 = 1 - c^2,$$

где  $K = K(e)$  и  $E = E(e)$  – полные эллиптические интегралы.

На основе формул (2.12) найдем интегральную характеристику (2.2)

$$T = \iint_{\Omega} \tau(x, y) dx dy = \frac{2\pi\delta}{D} T_0; \quad T_0 = 1 - \frac{A}{\lambda D} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right); \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

Асимптотики (2.12) и (2.13) эффективны как для пары включений, так и для единичного включения для относительно удаленных от ребра клина областей контакта.

**3. Периодические системы включений.** Пусть срединная полуплоскость клина  $\varphi = 0$  контактирует с периодической системой тонких жестких эллиптических включений (полуоси эллипсов  $c$  и  $b$ ,  $b \geq c$ ), расположенных вдоль оси  $z$  (рис. 1). Ось цепочки удалена от ребра клина на расстояние  $a > c$ , период равен  $2l$  ( $l > b$ ). Грани клина подчинены условиям жесткой или скользящей заделки (задачи E и F соответственно). В размерных обозначениях периодические задачи сводятся к интегральному уравнению (2.3), в котором следует взять

$$C(\beta y, \beta z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\beta(z - y + 2kl)) \quad (3.1)$$

Сходимость ряда в ядре уравнения (2.3), (3.1) обеспечивается поведением функций-символов  $L(u)$  типа тангенса гиперболического, которые в задачах E и F такие же, как соответственно в задачах A, C и B, D. Исключим из рассмотрения значение  $\alpha = \pi$  в задаче F, когда (периодическая система включений в упругом пространстве, ряд в ядре расходится). Значение  $\alpha = \pi/2$  в задаче F ( $L(u) = \text{cth}(\pi u/2)$ ) соответствует самоуравновешенной системе двух параллельных периодических цепочек включений в упругом пространстве (рис. 2, условия скользящей заделки возникают на пунктирной линии). В этом случае ядро представляется сходящимся рядом

$$K(x, y, r, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k} - \frac{(z - y + 2kl)^2}{\kappa_1 R_k^3} - \frac{1}{P_k} + \frac{(z - y + 2kl)^2}{\kappa_1 P_k^3} \right] \quad (3.2)$$

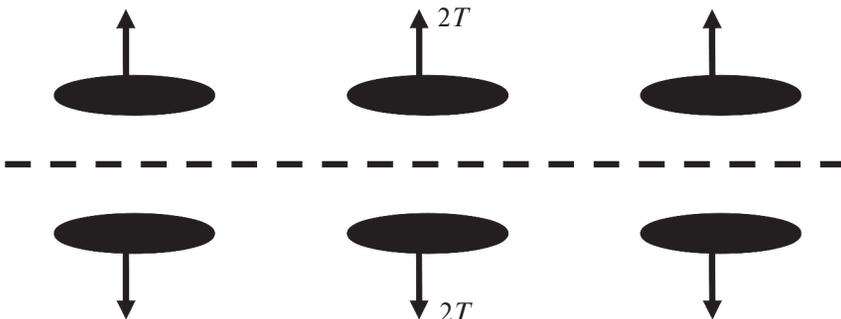


Рис. 2. Самоуравновешенная система двух параллельных периодических цепочек включений в упругом пространстве

$$R_k = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y+2kl)^2}, \quad P_k = \sqrt{(r+x)^2 + (z-y+2kl)^2}$$

Для выделения главных членов ядра уравнения (2.3), (3.1) применим известную методику, основанную на замене тригонометрического ряда (3.1) рядом обобщенных функций [10,12,13,20] и вычислении пределов и интегралов [18,19]. В результате представим ядро в форме ( $C$  – постоянная Эйлера)

$$\begin{aligned} K(x,y,r,z) &= \frac{1}{R} - \frac{(z-y)^2}{\kappa_1 R^3} + \frac{\theta}{l} \ln \frac{|r-x|}{4l |\ln(r/x)|} + \frac{\theta C}{l} - \frac{1}{\kappa_1 l} + \\ &+ \frac{\theta}{l} \int_0^\infty \left\{ [L(u) - 1] \cos\left(u \ln \frac{r}{x}\right) + \exp(-u) \right\} \frac{du}{u} + \theta \sum_{k=1}^\infty \left[ \frac{1}{R_k^+} + \frac{1}{R_k^-} - \frac{1}{kl} \right] + \\ &+ \frac{(r-x)^2}{\kappa_1} \sum_{k=1}^\infty \left[ \frac{1}{(R_k^+)^3} + \frac{1}{(R_k^-)^3} \right] + \frac{4\theta}{\pi l} \int_0^\infty \operatorname{sh}(\pi u) W_*(u) \sum(u) du \\ R_k^\pm &= \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} W_*(u) &= S_1^*(u) - \kappa^{-1} S_2^*(u) \left( x \frac{\partial}{\partial x} + r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \kappa^{-2} S_3(u) x r \frac{\partial^2}{\partial x \partial r} \\ \sum(u) &= \sum_{k=1}^\infty K_{iu} \left( \frac{\pi k}{l} x \right) K_{iu} \left( \frac{\pi k}{l} r \right) \cos \left( \frac{\pi k}{l} (z-y) \right) \end{aligned}$$

В представлении (3.3) улучшена сходимость всех интегралов с учетом асимптотического поведения символов в бесконечности. Ядро (3.3) интегрального уравнения линейно-периодической задачи включает члены, входящие в ядра интегральных уравнений как пространственных, так и плоских контактных задач о включениях в клине; в пределе при  $l \rightarrow \infty$  оно переходит в известное ядро для единичного включения. Логарифмическая особенность плоской задачи в формуле (3.3) при  $r = x$  является устранимой ( $x > 0$ ):

$$\lim_{r \rightarrow x} \ln \frac{|r-x|}{|\ln(r/x)|} = \ln |x| \tag{3.4}$$

Проверку эквивалентности форм (3.2) и (3.3) для задачи F при  $\alpha = \pi/2$  проведем, отбрасывая главные члены, в частном случае  $r = x \neq 0, z = y, l = 1$ . При учете предела (3.4) и соотношений [19]

$$\int_0^\infty K_{iu}^2(x) du = \frac{\pi}{2} K_0(2x), \quad \frac{d}{dx} K_0(x) = -K_1(x)$$

можно численно убедиться в справедливости равенства

$$\begin{aligned} \ln \frac{x}{4} + C - \frac{1}{\kappa} + \int_0^\infty \left[ \operatorname{th} \frac{\pi u}{2} - 1 + \exp(-u) \right] \frac{du}{u} - 2 \sum_{k=1}^\infty \left[ K_0(2\pi k x) + \frac{4\pi k x}{\kappa} K_1(2\pi k x) \right] = \\ = -\frac{1}{2\theta x} + \sum_{k=1}^\infty \left[ \frac{1}{k} - \frac{k^2 + \theta^{-1} x^2}{(k^2 + x^2)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

Для решения интегрального уравнения (2.3) с ядром (3.3) снова применим регулярный асимптотический метод [12–14], вводя безразмерные обозначения (2.7), (2.8). Придем к уравнению (2.9) с ядром (2.11), в котором следует положить

$$A = \frac{\theta}{\gamma} \ln \frac{1}{4\gamma} + \frac{\theta C}{\gamma} - \frac{1}{\kappa_1 \gamma} + \frac{\theta}{\gamma} \int_0^\infty [L(u) - 1 + \exp(-u)] \frac{du}{u} -$$

$$- \frac{2\theta}{\pi \gamma} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sh}(\pi u) \cos(ut) \cos(us) \left[ \mathcal{S}_1^*(u) \frac{\exp(-\frac{\pi}{\gamma}(\operatorname{cht} + \operatorname{chs})) - 1}{\operatorname{ch}(\frac{\pi}{\gamma}(\operatorname{cht} + \operatorname{chs})) - 1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{\gamma \kappa} \mathcal{S}_2^*(u) \frac{\operatorname{cht} + \operatorname{chs}}{\operatorname{ch}(\frac{\pi}{\gamma}(\operatorname{cht} + \operatorname{chs})) - 1} + \frac{\pi^2}{\gamma^2 \kappa^2} \mathcal{S}_3(u) \frac{\operatorname{sh}(\frac{\pi}{\gamma}(\operatorname{cht} + \operatorname{chs})) \operatorname{cht} \operatorname{chs}}{[\operatorname{ch}(\frac{\pi}{\gamma}(\operatorname{cht} + \operatorname{chs})) - 1]^2} \right] dt ds du$$

В результате получим асимптотики вида (2.12) и (2.13), справедливые при достаточно больших значениях  $\lambda$ .

**4. Численный анализ.** В табл. 1 для разных углов клина  $2\alpha$  приведены значения величины  $A$  в асимптотиках (2.12), (2.13) для шести задач, рассчитанные при  $\nu = 0.25$  (для задач А, В и Е, F брали  $\gamma = 0.5$ ). В табл. 2 даны значения приведенной интегральной характеристики  $T_0$  (2.13), рассчитанные для круговых включений при  $\nu = 0.25$ ,  $c = 1$ ,  $\lambda = 4$  и разных  $\gamma$ . Значение  $T_0 = 1$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  соответствует единичному включению в упругом пространстве (задача D при  $\alpha = \pi$ ). При сближении включе-

**Таблица 1.** Значения величины  $A$  в асимптотиках (2.12), (2.13) при  $\nu = 0.25$

Задача	A	B	C	D	E	F
$\alpha = \pi/4$	-0.805	-0.615	-0.895	-0.736	-0.693	-0.564
$\alpha = \pi/2$	-0.376	-0.251	-0.583	-0.500	-0.0638	0.103
$\alpha = 3\pi/4$	-0.0757	0.196	-0.398	-0.249	0.478	1.790
$\alpha = \pi$	0.0667	0.667	-0.318	0	1.027	-

**Таблица 2.** Значения величины  $T_0$  (2.13) при  $\nu = 0.25$ ,  $c = 1$ ,  $\lambda = 4$

Задача	A	B	C	D	E	F
$\gamma = 0.5$						
$\alpha = \pi/4$	1.153	1.117	1.171	1.141	1.132	1.108
$\alpha = \pi/2$	1.072	1.048	1.111	1.095	1.012	0.980
$\alpha = 3\pi/4$	1.014	0.963	1.076	1.048	0.909	0.658
$\alpha = \pi$	0.987	0.873	1.061	1.000	0.804	-
$\gamma = 0.4$						
$\alpha = \pi/4$	1.137	1.096	1.171	1.141	1.094	1.063
$\alpha = \pi/2$	1.047	1.021	1.111	1.095	0.944	0.904
$\alpha = 3\pi/4$	0.986	0.932	1.076	1.048	0.815	0.502
$\alpha = \pi$	0.958	0.841	1.061	1.000	0.684	-

**Таблица 3.** Значения величины  $T_0$  при  $\alpha = \pi/2$ ,  $c = 1$ ,  $\lambda = 4$  и разных  $\nu$ 

$\nu$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Задача А	1.043	1.052	1.064	1.082	1.111	1.165
Задача В	1.032	1.037	1.044	1.053	1.066	1.085
Задача Е	0.949	0.968	0.995	1.033	1.092	1.195
Задача F	0.933	0.949	0.968	0.995	1.032	1.090

ний в задачах А, В и Е, F (уменьшении  $\gamma$ ) значение сдвигающей силы уменьшается. При жесткой заделке граней клина (задачи А, С и Е) включения сдвинуть труднее, чем в соответствующих случаях при скользящей заделке (задачи В, D и F). Как видно из табл. 2, периодическую систему включений (задачи Е и F) сдвинуть легче, чем пару включений (задачи А и В), которую, в свою очередь, легче сместить, чем единичное включение (задачи С и D). Как показывают расчеты, эллиптические включения ( $c < 1$ ) сдвинуть легче, чем круговые ( $c = 1$ ). В табл. 3 для четырех задач приведены значения  $T_0$  при различных коэффициентах Пуассона  $\nu$  ( $\alpha = \pi/2$ ,  $c = 1$ ,  $\lambda = 4$ ). Требуемая для сдвига включений сила возрастает с ростом  $\nu$ . Как видно из табл. 3, для несжимаемого материала периодическую систему включений сдвинуть труднее, чем пару включений, хотя для сжимаемого материала ситуация противоположная. В первом приближении концентрация напряжений на границе сопряжения клина с включением, описываемая коэффициентом при корневой особенности в асимптотическом разложении (2.12), снижается с увеличением числа или плотности включений и повышается при росте коэффициента Пуассона, а также при уменьшении угла клина.

**Заключеие.** Показана связь интегральных уравнений пространственных и плоских задач о включениях в упругом клине. В пространственном случае важно привести ядра интегральных уравнений к симметричной форме по радиальной координате. Закрепление граней пространственного упругого клина жесткой или скользящей заделкой позволяет получить корректные интегральные уравнения задач линейно-периодического контакта жестких включений с упругим материалом в срединной полуплоскости клина. Структура ядер интегральных уравнений пространственных линейно-периодических задач о системах включений в клине аналогична структуре ядра интегрального уравнения контактной задачи о вдавливании периодической системы штампов в грань клина, другая грань которого жестко заделана [12, 13].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00014, <https://rscf.ru/project/24-21-00014/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 520–529.
2. Грилицкий Д.В., Евтушенко А.А., Сулим Г.Т. Распределение напряжений в полосе с упругим тонким включением // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 542–549.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
4. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
5. Khludnev A.M. On thin inclusions in elastic bodies with defects // ZAMP. 2019. V. 70. №2. P. 45.

6. Попова Т.С. Задача о Т-образном сопряжении двух тонких включений Тимошенко в упругом теле // Матем. зам. СВФУ. 2023. Т. 30. №2. С. 40–55.
7. Khudnev A.M., Rodionov A.A. Elastic body with thin nonhomogeneous inclusion in non-coercive case // Math. Mech. Solids. 2023. V. 28. №10. P. 2141–2154.
8. Khudnev A.M., Fankina I.V. Noncoercive problems for elastic bodies with thin elastic inclusions // Math. Meth. Appl. Sci. 2023. V. 46. №13. P. 14214–14228.
9. Горячева И.Г. Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1036–1044.
10. Александров В.М. Двоякопериодические контактные задачи для упругого слоя // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 307–315.
11. Goryacheva I., Yakovenko A. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // Tribol. Int. 2021. V. 161. P. 107078.
12. Золотов Н.Б., Пожарский Д.А. Периодические контактные задачи для полупространства с частично закрепленной границей // ПММ. 2022. Т. 86. №3. С. 394–403.
13. Пожарская Е.Д., Пожарский Д.А., Соболев Б.В. Периодические контактные задачи для клина с учетом сил трения // Изв. РАН. МТТ. 2023. №5. С. 170–179.
14. Pozharskaya E.D. Periodic system of rigid inclusions in a spatial elastic wedge // Тенденции развития науки и образования. 2023. №96. Ч. 9. С. 177–180.
15. Александров В.М., Пожарский Д.А. Задача о включении в трехмерном упругом клине // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 635–646.
16. Александров В.М., Пожарский Д.А. Пространственная задача о тонком включении в составном упругом клине // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 843–849.
17. Пожарский Д.А. Фундаментальные решения статике упругого клина и их приложения. Ростов-на-Дону: ДГТУ-Принт, 2019. 312 с.
18. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
19. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Спец. функции. М.: Наука, 1983. 752 с.
20. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 486 с.

### Systems of Inclusions in a Spatial Elastic Wedge

E.D. Pozharskaya<sup>a</sup>, D.A. Pozharskii<sup>a, #</sup>, B.V. Sobol<sup>†</sup>

<sup>a</sup>Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

<sup>#</sup>e-mail: pozharda@rambler.ru

Contact problems are considered for two identical thin rigid elliptic inclusions in a three-dimensional elastic wedge of two-sided angle outer faces of which are subjected to rigid or sliding support. The problems are reduced to integral equations with symmetric kernels. Two dimensionless geometric parameters are introduced to characterize location of the inclusions in the bisecting half-plane of the wedge. Assuming linear connection between the parameters, the regular asymptotic method is used to solve the problems. The asymptotic for two inclusions is compared with corresponding solutions for unit inclusion in the wedge as well as for a periodic chain of inclusions the axis of which is parallel to the wedge edge.

*Keywords:* spatial elastic wedge, inclusions, integral equations

### REFERENCES

1. Grilitskii D.V., Sulim G.T. Periodic problem for an elastic plane with thin-walled inclusions // JAMM, 1975, vol. 39, no. 3, pp. 494–503.
2. Grilitskii D.V., Evtushenko A.A., Sulim G.T. Stress distribution in a strip with a thin elastic inclusion // JAMM, 1979, vol. 43, no. 3, pp. 582–589.
3. Aleksandrov V.M., Mkhitarian S.M. Contact Problems for Bodies with Thin Coatings and Interlayers. Moscow: Nauka, 1983. 488 p. (in Russian)

4. *Aleksandrov V.M., Smetanin B.I., Sobol B.V.* Thin Stress Concentrators in Elastic Bodies. Moscow: Nauka, 1993. 224 p. (in Russian)
5. *Khudnev A.M.* On thin inclusions in elastic bodies with defects // ZAMP, 2019, vol. 70, no. 2, pp. 45.
6. *Popova T.S.* The problem of T-shaped junction of two thin Timoshenko inclusions in a two-dimensional elastic body // Math. Notes of NEFU, 2023, vol. 30, no. 2, pp. 40–55. (in Russian)
7. *Khudnev A.M., Rodionov A.A.* Elastic body with thin nonhomogeneous inclusion in non-coercive case // Math. Mech. Solids., 2023, vol. 28, no. 10, pp. 2141–2154.
8. *Khudnev A.M., Fankina I.V.* Noncoercive problems for elastic bodies with thin elastic inclusions // Math. Meth. Appl. Sci., 2023, vol. 46, no. 13, pp. 14214–14228.
9. *Goryacheva I.G.* The periodic contact problem for an elastic half-space // JAMM, 1998, vol. 62, no. 6, pp. 959–966.
10. *Aleksandrov V.M.* Doubly periodic contact problems for and elastic layer // JAMM, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 297–305.
11. *Goryacheva I., Yakovenko A.* The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // Tribol. Int., 2021, vol. 161, pp. 107078.
12. *Zolotov N.B., Pozharskii D.A.* Periodic contact problems for a half-space with a partially fixed boundary // Mech. Solids, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 152–159.
13. *Pozharskaya E.D., Pozharskii D.A., Sobol B.V.* Periodic contact problems for a wedge with friction forces taken into account // Mech. of Solids, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1578–1586.
14. *Pozharskaya E.D.* Periodic system of rigid inclusions in a spatial elastic wedge // Tend. Razvitiya Nauki i Obraz., 2023, no. 96, pt. 9, pp. 177–180.
15. *Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A.* The problem of an inclusion in a three-dimensional elastic wedge // JAMM, 2002, vol. 66, no. 4, pp. 617–628.
16. *Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A.* The three-dimensional problem of a thin inclusion in a composite elastic wedge // JAMM, 2011, vol. 75, no. 5, pp. 589–594.
17. *Pozharskii D.A.* Fundamental Solutions of Elastic Wedge Statics and Applications. Rostov-on-Don: DGTU-Print, 2019. 312 p. (in Russian)
18. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integral and Series. Vol. 1. Elementary Functions. N.Y.: Gordon&Breach Sci. Pub., 1986. 798 p.
19. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integral and Series. Vol. 2. Special Functions. N.Y.: Gordon&Breach Sci. Pub., 1986. 750 p.
20. *Gel'fand I.M., Shilov G.E.* Generalized Functions and Actions on Them. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 486 p. (in Russian)