

УДК 531.36

О ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО НЕПОДВИЖНОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2024 А. П. Маркеев^{1,*}¹Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия

*e-mail: anat-markeev@mail.ru

Поступила в редакцию 27.05.2024 г.

После доработки 15.07.2024 г.

Принята к публикации 20.07.2024 г.

Исследована нелинейная динамика точки, которая во все время движения остается на внутренней части абсолютно гладкой поверхности неподвижного трехосного эллипсоида. Движение происходит в однородном поле тяжести, наибольшая из осей эллипсоида направлена вдоль вертикали. Основное внимание уделяется движениям точки вблизи ее устойчивого положения равновесия в наинижней точки поверхности эллипсоида, лежащей на его вертикальной оси. Дано качественное описание условно-периодических колебаний точки, указана оценка меры множества начальных условий, отвечающих этим колебаниям. В резонансном случае, когда отношение частот малых линейных колебаний равно двум, исследованы периодические движения точки: рассмотрен вопрос об их существовании, устойчивости и геометрическом представлении.

Ключевые слова: консервативная система, устойчивость, условно-периодические и периодические колебания

DOI: 10.31857/S0032823524040017, EDN: WWSDJG

Современные технические устройства зачастую содержат в себе элементы малых размеров, движущиеся по неподвижным (или медленно перемещающимся в пространстве) поверхностям, являющимися частью устройства.

В статье исследуется движение материальной точки по неподвижной абсолютно гладкой поверхности в однородном поле тяжести. Предполагается, что поверхность является частью поверхности трехосного эллипсоида, одна из осей которого вертикальна.

Существует устойчивое положение равновесия, когда материальная точка покоится в лежащей на этой оси наинижней точке поверхности. Основное внимание в статье уделяется анализу нелинейных колебаний (условно-периодических и периодических) точки в окрестности этого устойчивого положения равновесия. Анализ осуществляется при помощи современных методов и алгоритмов аналитического и численного исследования динамических систем, описываемых уравнениями Гамильтона [1–5].

1. Введение. Функция Гамильтона. Пусть материальная точка весом mg движется в однородном поле тяжести, все время оставаясь на внутренней части неподвижной абсолютно гладкой эллипсоидальной поверхности

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \quad (a < b < c) \quad (1.1)$$

Ось $O\zeta$ направлена вверх. Предполагается, что движение происходит в области $-c \leq \zeta < 0$, поэтому координаты ξ, η, ζ точки удовлетворяют уравнению

$$\zeta = -c \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}} \quad (1.2)$$

Потенциальная и кинетическая энергии вычисляются по формулам

$$\Pi = mg\zeta, T = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) \left(\dot{\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \dot{\eta} \right), \quad (1.3)$$

где точкой обозначена производная по времени t .

Существует очевидное положение равновесия $\xi = \eta = 0, \zeta = -c$. По теореме Лагранжа это положение равновесия устойчиво, так как в нем потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум [6]. Цель статьи состоит в исследовании нелинейных колебаний точки вблизи этого положения равновесия.

Рассматриваемая механическая система является консервативной и имеет две степени свободы. Величины ξ, η — обобщенные координаты, а соответствующие обобщенные импульсы задаются равенствами

$$p_\xi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}, p_\eta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}}$$

Найдя отсюда величины $\dot{\xi}, \dot{\eta}$ как функции ξ, η, p_ξ, p_η и подставив их в выражение $T + \Pi$, получим функцию Гамильтона $H(\xi, \eta, p_\xi, p_\eta)$. Уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\xi}, \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\eta}, \frac{dp_\xi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \frac{dp_\eta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}$$

Для удобства дальнейших вычислений целесообразно получить уравнения движения в безразмерной форме. Для этого сделаем каноническое (с валентностью 1 / $(mc\sqrt{gc})$) преобразование [6, 7] $\xi, \eta, p_\xi, p_\eta \rightarrow q_1, q_2, p_1, p_2$ по формулам

$$\xi = \sqrt{ac}q_1, \eta = \sqrt{bc}q_2, p_\xi = mc\sqrt{\frac{g}{a}}p_1, p_\eta = mc\sqrt{\frac{g}{b}}p_2$$

и введем еще безразмерное время $\tau = \sqrt{g / ct}$.

Несложные выкладки показывают, что в новых переменных уравнения движения примут вид

$$\frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2), \quad (1.4)$$

где

$$H = \frac{\omega_1[1 - \omega_1 q_1^2 + \omega_2(\omega_2^2 - 1)q_2^2]p_1^2 - 2\omega_1^2\omega_2^2 q_1 q_2 p_1 p_2 + \omega_2[1 - \omega_2 q_2^2 + \omega_1(\omega_1^2 - 1)q_1^2]p_2^2}{2[1 + \omega_1(\omega_1^2 - 1)q_1^2 + \omega_2(\omega_2^2 - 1)q_2^2]} - \sqrt{1 - \omega_1 q_1^2 - \omega_2 q_2^2} \quad (1.5)$$

Здесь

$$\omega_1 = \frac{c}{a}, \omega_2 = \frac{c}{b} \quad (\omega_1 > \omega_2 > 1) \quad (1.6)$$

Величины (1.6) – это отвечающие безразмерному времени τ частоты малых линейных колебаний в окрестности изучаемого равновесия $\xi = \eta = 0$, $\varsigma = -c$ которому в новых переменных соответствует решение $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ уравнений (1.4).

Отметим, что функция Гамильтона (1.5) не изменяется, если индексы входящих в нее величин поменять местами, т.е.

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2; \omega_1, \omega_2) \equiv H(q_2, q_1, p_2, p_1; \omega_2, \omega_1) \quad (1.7)$$

Вблизи решения $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ функция Гамильтона (1.5) представима в виде сходящегося ряда по формам четных степеней:

$$H = \frac{1}{2}\omega_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2(q_2^2 + p_2^2) + \sum_{s=2}^{\infty} H_{2s}, \quad H_{2s} = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 2s} h_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \quad (1.8)$$

В разложении (1.8) величина $H_0 = -1$, равная значению функции H на решении $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$, отброшена.

Из 35-ти коэффициентов формы H_4 отличны от тождественного нуля только следующие 6 коэффициентов:

$$h_{4000} = \frac{1}{8}\omega_1^2, h_{2200} = \frac{1}{4}\omega_1\omega_2, h_{2020} = -\frac{1}{2}\omega_1^4 \quad (1.9)$$

$$h_{1111} = -\omega_1^2\omega_2^2, h_{0400} = \frac{1}{8}\omega_2^2, h_{0202} = -\frac{1}{2}\omega_2^4$$

Из 84-х коэффициентов формы H_6 отличны от нуля только 10 коэффициентов:

$$\begin{aligned} h_{6000} &= \frac{1}{16}\omega_1^3, h_{4200} = \frac{3}{16}\omega_1^2\omega_2, h_{4020} = \frac{1}{2}\omega_1^5(\omega_1^2 - 1), h_{3111} = \omega_1^3\omega_2^2(\omega_1^2 - 1) \\ h_{2220} &= \frac{1}{2}\omega_1^4\omega_2(\omega_2^2 - 1), h_{2202} = \frac{1}{2}\omega_1\omega_2^4(\omega_1^2 - 1), h_{2400} = \frac{3}{16}\omega_1\omega_2^2 \\ h_{1311} &= \omega_1^2\omega_2^3(\omega_2^2 - 1), h_{0402} = \frac{1}{2}\omega_2^5(\omega_2^2 - 1), h_{0600} = \frac{1}{16}\omega_2^3 \end{aligned} \quad (1.10)$$

2. О нормальной форме функции Гамильтона возмущенного движения. Вместо переменных q_j, p_j ($j = 1, 2$) введем новые канонически сопряженные переменные Q_j, P_j при помощи близкого к тождественному канонического преобразования, задаваемого неявно формулами [3,4,6]

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} (j = 1, 2), \quad (2.1)$$

где

$$S = q_1 P_1 + q_2 P_2 + S_4(q_1, q_2, P_1, P_2) + S_6(q_1, q_2, P_1, P_2) \quad (2.2)$$

$$S_{2k} = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 2k} s_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} (k = 2, 3)$$

Из (2.1), (2.2) следует, что q_j, p_j выражаются через новые переменные Q_j, P_j при помощи сходящихся рядов по степеням Q_1, Q_2, P_1, P_2 :

$$q_j = Q_j - \frac{\partial S_4^*}{\partial P_j} + \frac{\partial^2 S_4^*}{\partial P_j \partial Q_1} \frac{\partial S_4^*}{\partial P_1} + \frac{\partial^2 S_4^*}{\partial P_j \partial Q_2} \frac{\partial S_4^*}{\partial P_2} - \frac{\partial S_6^*}{\partial P_j} + O_7 (j = 1, 2) \quad (2.3)$$

$$p_j = P_j + \frac{\partial S_4^*}{\partial Q_j} - \frac{\partial^2 S_4^*}{\partial Q_j \partial Q_1} \frac{\partial S_4^*}{\partial P_1} - \frac{\partial^2 S_4^*}{\partial Q_j \partial Q_2} \frac{\partial S_4^*}{\partial P_2} + \frac{\partial S_6^*}{\partial Q_j} + O_7 \quad (j = 1, 2) \quad (2.4)$$

Здесь S_{2k}^* – функции S_{2k} из (2.2), в которых q_1, q_2 заменены на Q_1, Q_2 :

$$S_{2k}^* = S_{2k}(Q_1, Q_2, P_1, P_2), \quad (2.5)$$

через O_n здесь и далее обозначается совокупность членов не ниже n -й степени относительно Q_1, Q_2, P_1, P_2 .

Подставив выражения (2.3), (2.4) в функцию Гамильтона (1.8) и подобрав надлежащим образом коэффициенты $s_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}$ форм S_4 и S_6 , можно упростить (нормализовать) формы четвертой и шестой степеней в новой функции Гамильтона. При этом существенно наличие резонансов $k_1 \omega_1 = k_2 \omega_2$, где ω_1 и ω_2 задаются равенствами (1.6), а k_1, k_2 – натуральные числа, причем $k_2 > k_1$. Число $k_1 + k_2$ – порядок резонанса.

1. Так как разложение функции Гамильтона в ряд (1.8) не содержит форм нечетных степеней, а сумма показателей $\nu_1 + \mu_1$ и $\nu_2 + \mu_2$ в любом из членов ряда есть четное число, то все резонансы до пятого порядка включительно ($\omega_1 = 2\omega_2$, $\omega_1 = 3\omega_2$, $\omega_1 = 4\omega_2$, $2\omega_1 = 3\omega_2$) не препятствуют приведению функции (1.8) к нормальной форме вида

$$H = H^{(0)}(r_1, r_2) + O_6, \quad H^{(0)} = \omega_1 r_1^2 + \omega_2 r_2^2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2, \quad (2.6)$$

где

$$Q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \quad P_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j \quad (j = 1, 2) \quad (2.7)$$

Вычисления по подробно описанному в статье [8] алгоритму нормализации консервативной системы показывают, что форма S_4^* содержит только 8 одночленов $s_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}(\omega_1, \omega_2) Q_1^{\nu_1} Q_2^{\nu_2} P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2}$. При этом, ввиду свойства (1.7) исходной функции Гамильтона, коэффициенты одночленов удовлетворяют такому свойству симметрии:

$$s_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}(\omega_1, \omega_2) \equiv s_{\nu_2 \nu_1 \mu_2 \mu_1}(\omega_2, \omega_1) \quad (2.8)$$

Четыре из коэффициентов формы S_4^* задаются формулами

$$\begin{aligned} s_{3010} &= \frac{1}{64} \omega_1 (5 + 4\omega_1^2), \quad s_{2101} = \frac{\omega_1 (\omega_1^2 - 2\omega_2^2 + 4\omega_1^2 \omega_2^2)}{16(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \\ s_{1012} &= -\frac{\omega_2^3 (1 - 4\omega_1^2)}{16(\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad s_{1030} = \frac{1}{64} \omega_1 (3 - 4\omega_1^2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

а оставшиеся четыре коэффициента $s_{0301}, s_{1210}, s_{0121}, s_{0103}$ находятся из (2.8), (2.9).

Коэффициенты c_{ij} нормальной формы (2.6) определяются следующими равенствами:

$$c_{20} = \frac{1}{16} \omega_1^2 (3 - 4\omega_1^2), \quad c_{11} = \frac{1}{4} \omega_1 \omega_2, \quad c_{02} = \frac{1}{16} \omega_2^2 (3 - 4\omega_2^2) \quad (2.10)$$

2. При нормализации функции (1.8) до членов седьмой степени включительно из резонансов шестого и седьмого порядков ($\omega_1 = 5\omega_2$, $\omega_1 = 6\omega_2$, $2\omega_1 = 3\omega_2$, $2\omega_1 = 4\omega_2$, $2\omega_1 = 5\omega_2$, $3\omega_1 = 4\omega_2$) важен только резонанс $2\omega_1 = 4\omega_2$. На самом деле это резонанс третьего порядка $\omega_1 = 2\omega_2$. Но его наличие, как замечено выше, не повлияло на функцию S_4^* и нормальную форму (2.6).

Если $\omega_1 \neq 2\omega_2$, то нормальная форма функции (1.8) имеет вид

$$H = \omega_1 r_1^2 + \omega_2 r_2^2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + c_{30} r_1^3 + c_{21} r_1^2 r_2 + c_{12} r_1 r_2^2 + c_{03} r_2^3 + O_8 \quad (2.11)$$

Коэффициенты c_{20}, c_{11}, c_{02} задаются формулами (2.10), а

$$c_{30} = \frac{1}{256} \omega_1^3 (48\omega_1^4 - 72\omega_1^2 + 23), c_{21} = \frac{\omega_1^2 \omega_2 (16\omega_1^4 \omega_2^2 + 8\omega_1^2 \omega_2^2 - 16\omega_1^4 + 10\omega_1^2 - 9\omega_2^2)}{64(\omega_1^2 - \omega_2^2)}$$

$$c_{12} = \frac{\omega_1 \omega_2^2 (16\omega_1^2 \omega_2^4 + 8\omega_1^2 \omega_2^2 - 16\omega_2^4 + 10\omega_2^2 - 9\omega_1^2)}{64(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, c_{03} = \frac{1}{256} \omega_2^3 (48\omega_2^4 - 72\omega_2^2 + 23) \quad (2.12)$$

При этом форма S_4^* определяется, как и выше, равенствами (2.8) и (2.9), а форма S_6^* содержит 20 одночленов и представима в виде

$$S_6^* = \frac{R_6}{24576(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)^2(4\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}, \quad (2.13)$$

где

$$R_6 = \sum_{v_1+v_2+\mu_1+\mu_2=6} r_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}(\omega_1, \omega_2) Q_1^{v_1} Q_2^{v_2} P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2}, r_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}(\omega_1, \omega_2) \equiv r_{v_2 v_1 \mu_2 \mu_1}(\omega_2, \omega_1) \quad (2.14)$$

Выпишем выражения для 10-ти из коэффициентов формы R_6 (остальные 10 находятся при помощи второго из соотношений (2.14)):

$$\begin{aligned} r_{5010} &= 3\omega_1^2 [1100\omega_2^8 + (-6875 + 1248\omega_2^2)\omega_2^6\omega_1^2 + 10(1155 - 780\omega_2^2 - 32\omega_2^4)\omega_2^4\omega_1^4 + \\ &\quad + (-6875 + 13104\omega_2^2 + 2000\omega_2^4)\omega_2^2\omega_1^6 + 20(55 - 390\omega_2^2 - 168\omega_2^4)\omega_1^8 + \\ &\quad + 16(78 + 125\omega_2^2)\omega_1^{10} - 320\omega_1^{12}] \\ r_{4101} &= 48\omega_1^2 [144\omega_2^8 - 36(21 + 16\omega_2^2)\omega_2^6\omega_1^2 + 40(23 + 62\omega_2^2 + 8\omega_2^4)\omega_2^4\omega_1^4 - \\ &\quad - (409 + 2056\omega_2^2 + 1360\omega_2^4)\omega_2^2\omega_1^6 + 8(7 + 70\omega_2^2 + 40\omega_2^4)\omega_1^8 - 48\omega_1^{10}] \\ r_{3210} &= 24\omega_1 [204\omega_2^9 + \omega_2^7(-1551 + 1216\omega_2^2)\omega_1^2 + \omega_2^5(3255 - 5424\omega_2^2 - 448\omega_2^4)\omega_1^4 + \\ &\quad + 144\omega_2^3(-15 + 36\omega_2^2 + 11\omega_2^4)\omega_1^6 + 8\omega_2(45 - 266\omega_2^2 + 114\omega_2^4)\omega_1^8 - \\ &\quad - 32\omega_2(-9 + 10\omega_2^2)\omega_1^{10}] \\ r_{3030} &= 2\omega_1^2 [1796\omega_2^8 - \omega_2^6(11225 + 5088\omega_2^2)\omega_1^2 + 2\omega_2^4(9429 + 15900\omega_2^2 + 1568\omega_2^4)\omega_1^4 - \\ &\quad - \omega_2^2(11225 + 53424\omega_2^2 + 19600\omega_2^4)\omega_1^6 + 4(449 + 7950\omega_2^2 + 8232\omega_2^4)\omega_1^8 - \\ &\quad - 16(318 + 1225\omega_2^2)\omega_1^{10} + 3136\omega_1^{12}] \\ r_{3012} &= 24\omega_1 \omega_2^3 [2\omega_1^6(-37 + 164\omega_1^2 + 32\omega_1^4) + 9\omega_1^4(49 - 240\omega_1^2 + 48\omega_1^4)\omega_2^2 - \\ &\quad - 3\omega_1^2(205 - 1208\omega_1^2 + 976\omega_1^4)\omega_2^4 + 4(35 - 232\omega_1^2 + 176\omega_1^4)\omega_2^6] \\ r_{2103} &= 24\omega_1 \omega_2 [60\omega_1^8 + \omega_1^6(-427 + 128\omega_1^2)\omega_2^2 - \omega_1^4(-1175 + 1184\omega_1^2 + 448\omega_1^4)\omega_2^4 + \\ &\quad + 4\omega_1^2(-235 + 8\omega_1^2 + 524\omega_1^4)\omega_2^6 + 8(21 + 120\omega_1^2 - 158\omega_1^4)\omega_2^8 + 32(-7 + 6\omega_1^2)\omega_2^{10}] \\ r_{2121} &= 48[16\omega_2^{10} - 4\omega_2^8(17 + 32\omega_2^2)\omega_1^2 + 4\omega_2^6(-87 + 404\omega_2^2 + 64\omega_2^4)\omega_1^4 - \\ &\quad - \omega_2^4(-1007 + 2668\omega_2^2 + 2048\omega_2^4)\omega_1^6 + \omega_2^2(-661 + 104\omega_2^2 + 4656\omega_2^4)\omega_1^8 + \\ &\quad + 4(27 + 205\omega_2^2 - 580\omega_2^4)\omega_1^{10} + 16(-11 + 20\omega_2^2)\omega_1^{12}] \\ r_{1014} &= 48\omega_2^4 [12(-1 + 4\omega_1^2)\omega_1^6 - \omega_1^4(-195 + 524\omega_1^2 + 256\omega_1^4)\omega_2^2 + \\ &\quad + 48\omega_1^2(-4 + \omega_1^2 + 24\omega_1^4)\omega_2^4 + 12(3 + 23\omega_1^2 - 44\omega_1^4)\omega_2^6 + 64(-1 + \omega_1^2)\omega_2^8] \\ r_{1050} &= 3\omega_1^2 [332\omega_2^8 - \omega_2^6(2075 + 1056\omega_2^2)\omega_1^2 + 2\omega_2^4(1743 + 3300\omega_2^2 + 352\omega_2^4)\omega_1^4 - \\ &\quad - \omega_2^2(2075 + 11088\omega_2^2 + 4400\omega_2^4)\omega_1^6 + 4(83 + 1650\omega_2^2 + 1848\omega_2^4)\omega_1^8 - \\ &\quad - 16(66 + 275\omega_2^2)\omega_1^{10} + 704\omega_1^{12}] \end{aligned}$$

$$r_{032} = 24\omega_1\omega_2^3[2\omega_1^6(-31 + 92\omega_1^2 + 32\omega_1^4) - \omega_1^4(-337 + 1040\omega_1^2 + 80\omega_1^4)\omega_2^2 - \omega_1^2(371 - 1240\omega_1^2 + 752\omega_1^4)\omega_2^4 + 12(5 - 8\omega_1^2 + 16\omega_1^4)\omega_2^6] \quad (2.15)$$

3. При резонансе $\omega_1 = 2\omega_2$ к нормальной форме (2.11) добавится слагаемое (резонансный член) вида $\alpha_{12}r_1r_2^2 \cos(2\varphi_1 - 4\varphi_2)$. При этом, как показывают несложные вычисления, коэффициенты нормальной формы будут такими:

$$c_{20} = \frac{1}{4}\omega_2^2(3 - 16\omega_2^2), c_{11} = \frac{1}{2}\omega_2^2, c_{02} = \frac{1}{16}\omega_2^2(3 - 4\omega_2^2) \quad (2.16)$$

$$c_{30} = \frac{1}{32}\omega_2^3(768\omega_2^4 - 288\omega_2^2 + 23), c_{21} = \frac{1}{48}\omega_2^3(256\omega_2^4 - 224\omega_2^2 + 31) \quad (2.17)$$

$$c_{12} = -\frac{1}{48}\omega_2^3(32\omega_2^4 + 8\omega_2^2 - 13), c_{03} = \frac{1}{256}\omega_2^3(48\omega_2^4 - 72\omega_2^2 + 23)$$

$$\alpha_{12} = \frac{3}{64}\omega_2^3(12\omega_2^2 - 1) \quad (2.18)$$

Функции S_4^* и S_6^* в нормализующей замене переменных (2.3), (2.4) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} S_4^* = & \frac{1}{32}\omega_2(16\omega_2^2 + 5)Q_1^3P_1 - \frac{1}{48}\omega_2(16\omega_2^2 - 7)Q_1Q_2^2P_1 - \frac{1}{32}\omega_2(16\omega_2^2 - 3)P_1^3Q_1 + \\ & + \frac{1}{48}\omega_2(16\omega_2^2 - 1)P_2^2Q_1P_1 - \frac{1}{6}\omega_2(4\omega_2^2 - 1)P_1^2P_2Q_2 + \frac{1}{12}\omega_2(8\omega_2^2 + 1)Q_1^2Q_2P_2 + \\ & + \frac{1}{64}\omega_2(4\omega_2^2 + 5)Q_2^3P_2 - \frac{1}{64}\omega_2(4\omega_2^2 - 3)Q_2P_2^3 \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} S_6^* = & \frac{1}{9216}\omega_2^2(1664\omega_2^4 - 940\omega_2^2 + 401)P_2^3Q_2P_1^2 - \frac{1}{480}\omega_2^2(364\omega_2^2 - 43)Q_2P_2P_1^4 + \\ & + \frac{1}{23040}\omega_2^2(6400\omega_2^4 - 16256\omega_2^2 + 2287)Q_1Q_2^2P_1^3 + \frac{1}{23040}\omega_2^2(8960\omega_2^4 + 2336\omega_2^2 - 217)Q_1P_1^3P_2^2 + \\ & + \frac{1}{1024}\omega_2^2(640\omega_2^4 - 692\omega_2^2 + 103)P_2P_1^2Q_2^3 - \frac{1}{6144}\omega_2^2(1280\omega_2^4 - 636\omega_2^2 + 73)P_2^4Q_1P_1 - \\ & - \frac{1}{7680}\omega_2^2(11520\omega_2^4 - 3392\omega_2^2 - 1441)Q_1^3Q_2^2P_1 + \frac{1}{7680}\omega_2^2(6400\omega_2^4 + 928\omega_2^2 - 71)P_2^3Q_1^3P_1 + \\ & + \frac{1}{18432}\omega_2^2(5120\omega_2^4 - 6652\omega_2^2 + 1577)Q_2^4Q_1P_1 - \frac{1}{9216}\omega_2^2(3200\omega_2^4 - 1468\omega_2^2 - 67)P_2^3Q_1^2Q_2 - \\ & - \frac{1}{3072}\omega_2^2(1408\omega_2^4 - 2508\omega_2^2 - 199)Q_2^3Q_1^2P_2 + \frac{1}{1440}\omega_2^2(1600\omega_2^4 + 208\omega_2^2 + 109)Q_2Q_1^4P_2 - \\ & - \frac{1}{8192}\omega_2^2(80\omega_2^4 - 312\omega_2^2 - 275)Q_2^5P_2 + \frac{1}{12288}\omega_2^2(784\omega_2^4 - 1272\omega_2^2 + 449)Q_2^3P_2^3 + \\ & + \frac{1}{2048}\omega_2^2(2816\omega_2^4 - 1056\omega_2^2 + 83)Q_1P_1^5 + \frac{1}{3072}\omega_2^2(12544\omega_2^4 - 5088\omega_2^2 + 449)P_1^3Q_1^3 + \\ & + \frac{1}{8192}\omega_2^2(176\omega_2^4 - 264\omega_2^2 + 83)Q_2P_2^5 + \frac{1}{1024}\omega_2^2(128\omega_2^4 + 108\omega_2^2 + 51)P_2^2Q_2^2Q_1P_1 + \\ & + \frac{1}{1920}\omega_2^2(2560\omega_2^4 - 3344\omega_2^2 + 403)P_2Q_2P_1^2Q_1^2 - \frac{1}{2048}\omega_2^2(1280\omega_2^4 - 1248\omega_2^2 - 275)Q_1^5P_1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

3. О невырожденности и изокэнергетической невырожденности системы с функцией Гамильтона (2.6). В рассматриваемой нами задаче о движении точки по поверхности (1.1) функция (2.6) является функцией Гамильтона общего эллиптического типа,

т.е. [1] в окрестности равновесия $r_1 = r_2 = 0$ система с этой функцией Гамильтона является невырожденной или изоэнергетически невырожденной. Система будет невырожденной, если отличен от нуля определитель второго порядка

$$D_2 = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1^2} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1 \partial r_2} \\ \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2^2} \end{vmatrix} = 4c_{20}c_{02} - c_{11}^2 \quad (3.1)$$

А когда отличен от нуля определитель третьего порядка

$$D_3 = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1^2} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1 \partial r_2} & \omega_1 \\ \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2^2} & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{vmatrix} = -2(c_{20}\omega_2^2 - c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2), \quad (3.2)$$

то система будет изоэнергетически невырожденной.

Для проверки выполнения условий невырожденности и изоэнергетической невырожденности удобно ввести обозначения $a = \sqrt{xc}$, $b = \sqrt{yc}$. Из (1.6) следует, что в плоскости x, y область допустимых значений безразмерных параметров x, y представляет собой (см. рис. 1) внутренность прямоугольного треугольника с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$:

$$0 < x < y < 1 \quad (3.3)$$

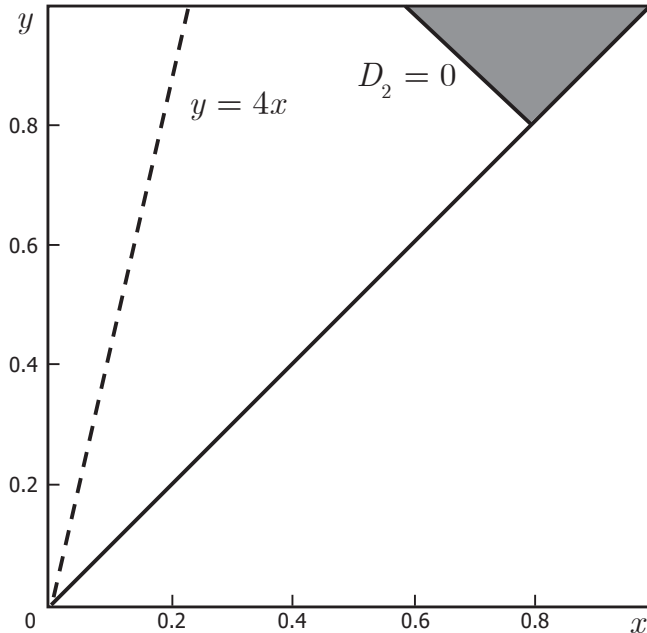


Рис. 1

В области (3.3) выражения (1.6) для частот принимают вид

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}, \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad (3.4)$$

Из (3.4), (3.1) и (2.10) получаем

$$D_2 = \frac{y(5x - 12) - 4(3x - 4)}{64x^2y^2} \quad (3.5)$$

На рис.1 показана часть кривой $D_2 = 0$, лежащая в треугольнике (3.3). Она является участком гиперболы

$$y = \frac{4(3x - 4)}{(5x - 12)} \quad (3.6)$$

Граничными точками этого участка являются точки $(4/7, 1)$ и $(4/5, 4/5)$. Область $D_2 < 0$ на рис. 1 выделена серым цветом. Штриховой линией в области $D_2 > 0$ показана прямая $y = 4x$. На ней имеет место резонанс третьего порядка $\omega_1 = 2\omega_2$. При этом резонансе полуоси эллипсоида (1.1) связаны равенством $b = 2a$.

Для определителя D_3 из (3.2), (3.4) и (2.10) имеем выражение

$$D_3 = \frac{y(2 - x) + 2x}{4x^2y^2} \quad (3.7)$$

Всюду в области (3.3) величина $D_3 > 0$.

4. Условно-периодические колебания. Общее решение системы дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона $H^{(0)}$ из (2.6) записывается в виде

$$Q_j = \sqrt{2r_{j0}} \sin \varphi_j, P_j = \sqrt{2r_{j0}} \cos \varphi_j, \varphi_j = \Omega_j \tau + \varphi_{j0} \quad (j = 1, 2) \quad (4.1)$$

$$\Omega_1 = \omega_1 + 2c_{20}r_{10} + c_{11}r_{20}, \Omega_2 = \omega_2 + c_{11}r_{10} + 2c_{02}r_{20}, \quad (4.2)$$

где r_{j0}, φ_{j0} — начальные значения величин r_j, φ_j , а ω_1, ω_2 и c_{ij} вычисляются по формулам (1.6) и (2.10) соответственно.

Если нет резонансов $k_1\omega_1 = k_2\omega_2$, то при малых r_{10}, r_{20} движения в системе с функцией $H^{(0)}$ будут условно-периодическими с рационально независимыми частотами (4.2).

Так как (см. разд. 3) функция (2.6) является функцией Гамильтона общего эллиптического типа, то, согласно КАМ-теории [1], движения в системе с функцией (2.6) для большинства начальных условий r_{10}, r_{20} будут условно-периодическими с частотами (4.2). Множество начальных условий, не принадлежащих этому большинству, имеет малую меру: в окрестности $r_1 + r_2 < \mu$ его относительная мера имеет порядок $\mu^{1/2}$ [1, 9].

Значения координат ξ, η, ζ движущейся материальной точки можно получить с погрешностью O_7 из (1.2), равенств $\xi = \sqrt{acq_1}, \eta = \sqrt{bcq_2}$, формул замены (2.3), (2.4), формул (2.8), (2.9) и (2.13)–(2.15) для функций S_4^* и S_6^* и выражений (2.10), (2.12) для коэффициентов нормальной формы (2.11).

В качестве конкретного примера рассмотрим случай движения точки по эллипсоидальной поверхности (1.2), у которой $c = 2\sqrt{2}a = 2b$. В этом случае $\omega_1 = 2\sqrt{2}$, $\omega_2 = 2$,

$$\begin{aligned} S_4^* = & \frac{37\sqrt{2}}{32} Q_1^3 P_1 - \frac{29}{8} Q_1 Q_2^2 P_1 - \frac{29\sqrt{2}}{32} P_1^3 Q_1 + \frac{31}{8} P_2^2 Q_1 P_1 - \\ & - \frac{15\sqrt{2}}{4} P_1^2 P_2 Q_2 + 4\sqrt{2} Q_1^2 Q_2 P_2 + \frac{21}{32} Q_2^3 P_2 - \frac{13}{32} Q_2 P_2^3 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
S_6^* = & -\frac{2349}{1024}P_1Q_1^5 + \frac{243}{2048}P_2Q_2^5 + \frac{1137}{14}P_2Q_1^4Q_2 + \frac{4187}{128}Q_1Q_2^4P_1 - \\
& -\frac{115909\sqrt{2}}{1792}Q_1^3Q_2^2P_1 - \frac{3837\sqrt{2}}{128}Q_1^2Q_2^3P_2 + \frac{13483}{512}Q_1^3P_1^3 + \frac{2635}{1024}Q_2^3P_2^3 + \\
& + \frac{91927\sqrt{2}}{1792}Q_1^3P_1P_2^2 + \frac{2523\sqrt{2}}{64}Q_2^3P_1^2P_2 - \frac{2035\sqrt{2}}{128}Q_1^2Q_2P_2^3 - \frac{14641\sqrt{2}}{1792}Q_1Q_2^2P_1^3 - \\
& - \frac{1429}{28}Q_1^2Q_2P_1^2P_2 - \frac{5225}{128}Q_1Q_2^2P_1P_2^2 - \frac{353}{16}P_1Q_1P_2^4 - \frac{7869}{224}P_1^4Q_2P_2 + \\
& + \frac{9235}{1024}Q_1P_1^5 + \frac{1843}{2048}Q_2P_2^5 + \frac{36971\sqrt{2}}{1792}Q_1P_1^3P_2^2 + \frac{291\sqrt{2}}{32}Q_2P_1^2P_2^3,
\end{aligned} \quad (4.4)$$

а коэффициенты нормальной формы (2.11) имеют такие значения:

$$c_{20} = -\frac{29}{2}, c_{11} = \sqrt{2}, c_{02} = -\frac{13}{4} \quad (4.5)$$

$$c_{30} = \frac{2519\sqrt{2}}{16}, c_{21} = \frac{843}{4}, c_{12} = -63\sqrt{2}, c_{03} = \frac{503}{32} \quad (4.6)$$

Формулы (4.3)–(4.6) позволяют вычислить величины ξ, η с погрешностью O_7 . Для краткости выпишем только первые члены соответствующих разложений:

$$\xi = \frac{c}{2^{1/4}}\sqrt{r_{10}}\sin\varphi_1 + O_2, \eta = c\sqrt{r_{20}}\sin\varphi_2 + O_2 \quad (4.7)$$

В плоскости $O\xi\eta$ траектория материальной точки всюду плотно заполняет прямоугольник со сторонами $2^{3/4}c\sqrt{r_{10}} + O_2$ и $2c\sqrt{r_{20}} + O_2$. Для координаты ς из (4.7) и (1.2) получаем такое выражение:

$$\varsigma = -c + 2c(\sqrt{2}r_{10}\sin^2\varphi_1 + r_{20}\sin^2\varphi_2) + O_3 \quad (4.8)$$

Из (4.8) видно, что при малых r_{10}, r_{20} материальная точка во все время движения по поверхности (1.1) не может подняться над ее положением равновесия $\xi = \eta = 0, \varsigma = -c$ выше, чем на $2c(\sqrt{2}r_{10} + r_{20}) + O_3$.

5. О колебаниях при резонансе $\omega_1 = 2\omega_2$. Этот резонанс реализуется на прямой $y = 4x$, показанной на рис. 1 штриховой линией. Согласно разд. 1 и 2 нормальная форма функции Гамильтона возмущенного движения записывается в виде

$$H = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \sum_{m+n=2}^3 c_{mn} r_1^m r_2^n + \alpha_{12} r_1 r_2^2 \cos(2\varphi_1 - 4\varphi_2) + O_8, \quad (5.1)$$

где $\omega_1 = 1/\sqrt{x}$, $\omega_2 = 1/(2\sqrt{x})$, причем $0 < x < 1/4$.

Из (2.16)–(2.18) следует, что коэффициенты нормальной формы (5.1) можно записать как функции величины x :

$$c_{20} = \frac{3x-4}{16x^2}, c_{11} = \frac{1}{8x}, c_{02} = \frac{3x-1}{64x^2} \quad (5.2)$$

$$c_{30} = \frac{23x^2-72x+48}{256x^{7/2}}, c_{21} = \frac{31x^2-56x+16}{384x^{7/2}}, c_{12} = \frac{13x^2-2x-2}{384x^{7/2}} \quad (5.3)$$

$$c_{03} = \frac{23x^2-18x+3}{2048x^{7/2}}, \alpha_{12} = \frac{3(3-x)}{512x^{5/2}}$$

Если в (5.1) отбросить величины O_8 , то придем к приближенной системе, которая, помимо интеграла $H = \text{const}$ (имеющимся и в полной системе), допускает еще один, характерный для рассматриваемого резонанса $\omega_1 = 2\omega_2$, интеграл

$$2r_1 + r_2 = \tilde{c} = \text{const} > 0 \quad (5.4)$$

Для исследования периодических колебаний, обусловленных наличием резонанса, сделаем в функции Гамильтона (5.1) унивалентную каноническую замену переменных $\varphi_j, r_j \rightarrow \psi_j, R_j$ ($j = 1, 2$) по формулам

$$\psi_1 = \varphi_1 - 2\varphi_2, \psi_2 = \varphi_2, R_1 = r_1, R_2 = 2r_1 + r_2 \quad (5.5)$$

В приближенной системе величина ψ_2 будет циклической координатой. Соответствующий ей интеграл – это интеграл (5.4), т.е. $R_2 = \tilde{c}$.

Введем вместо ψ_1, R_1 новые канонически сопряженные переменные θ, ρ по формулам

$$\psi_1 = \theta, R_1 = \tilde{c}\rho \quad (0 < \rho < 1/2) \quad (5.6)$$

и примем в качестве новой независимой переменной величину $s = \tilde{c}\tau / 16$. Тогда, если отбросить не зависящие от θ, ρ слагаемые, то функция Гамильтона Γ приближенной системы запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma = & \left(\frac{1-x}{x^2} - \frac{103x^2 - 146x + 43}{192x^{7/2}} \tilde{c} \right) \rho + \left(\frac{2x-5}{x^2} + \frac{41x^2 - 118x + 41}{32x^{7/2}} \tilde{c} \right) \rho^2 - \\ & - \frac{20x^2 - 46x - 55}{48x^{7/2}} \tilde{c} \rho^3 + \frac{3(3-x)\tilde{c}}{32x^{5/2}} \rho(1-2\rho)^2 \cos 2\theta \end{aligned} \quad (5.7)$$

Соответствующие канонические уравнения

$$\frac{d\rho}{ds} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = \frac{3(3-x)\tilde{c}}{16x^{5/2}} \rho(1-2\rho)^2 \sin 2\theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} \quad (5.8)$$

допускают четыре отличающихся одно от другого равновесных решения θ_*, ρ_* , в которых

$$\theta_* = \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3), \quad (5.9)$$

а ρ_* – корень квадратного уравнения. При четном k оно имеет вид

$$\begin{aligned} 192x^{3/2}[(1-x) - 2(5-2x)\rho_*] - \tilde{c}[(121x^2 - 200x + 43) - \\ - 12(53x^2 - 154x + 41)\rho_* + 12(38x^2 - 100x - 55)\rho_*^2] = 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

а при нечетном:

$$\begin{aligned} 192x^{3/2}[(1-x) - 2(5-2x)\rho_*] - \tilde{c}[(85x^2 - 92x + 43) - \\ - 12(29x^2 - 82x + 41)\rho_* + 12(2x^2 + 8x - 55)\rho_*^2] = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

При малых $\tilde{c}$ равновесное значение ρ_* можно представить в виде ряда по степеням $\tilde{c}$: $\rho_* = \rho_0 + \tilde{c}\rho_1 + \dots$. Из (5.10) и (5.11) следует, что, как для четных, так и для нечетных значений k , имеем

$$\rho_0 = \frac{1-x}{2(5-2x)} \quad (5.12)$$

В интервале $0 < x < 1/4$ допустимых значений x функция ρ_0 монотонно убывает, причем

$$\frac{1}{10} > \rho_0 > \frac{1}{12} \quad (5.13)$$

Из (5.10) и (5.11) получаем, что при четных k величина ρ_1 задается равенством

$$\rho_1 = -\frac{(4-x)^2(19x^2 - 11x + 10)}{192x^{3/2}(2x-5)^3}, \quad (5.14)$$

а при нечетных:

$$\rho_1 = \frac{(4-x)(x^3 - 69x^2 + 162x - 40)}{192x^{3/2}(2x-5)^3} \quad (5.15)$$

На интервале $0 < x < 1/4$ обе функции (5.14) и (5.15) являются монотонно убывающими, причем функция (5.14) удовлетворяет неравенству

$$+\infty > \rho_1 > \frac{125}{2304} = 0.0542534722...,$$

а функция (5.15) – неравенству

$$+\infty > \rho_1 > \frac{7}{768} = 0.0065104166...$$

Характеристическое уравнение линеаризованной в окрестности равновесия θ_*, ρ_* системы (5.8) имеет вид

$$\lambda^2 + (-1)^k \tilde{c} \frac{3(1-x)(3-x)(4-x)^2}{8x^{9/2}(5-2x)^2} + O(\tilde{c}^2) = 0 \quad (5.16)$$

Коэффициент при $(-1)^k$ положителен для любых значений x из интервала $0 < x < 1/4$, поэтому для малых $\tilde{c}$ найденным равновесиям в случае четных k отвечают в фазовой плоскости особые точки типа центр, а в случае нечетных k – точки типа седло.

Методом Пуанкаре [5] можно показать, что в полной системе с функцией Гамильтона (5.1) существуют периодические движения, аналитические относительно $\sqrt{\tilde{c}}$. При четных k эти периодические движения орбитально устойчивы, а при нечетных k – неустойчивы.

Соответствующие периодическим движениям координаты $\xi = \sqrt{ac}q_1, \eta = \sqrt{bc}q_2$ материальной точки могут быть получены с погрешностью порядка $\tilde{c}^{7/2}$ из формул (2.3), (2.4), (2.19), (2.20) замены $q_j, p_j \rightarrow Q_j, P_j$, выражений (1.6) и (3.4) для частот линейных колебаний и равенств (2.7), (5.5), (5.6), (5.9). Выпишем в явном виде только первые члены разложений ξ, η по степеням $\tilde{c}^{1/2}$. С погрешностью порядка $\tilde{c}^{3/2}$ имеем такие выражения:

$$\xi = c^4 \sqrt{x} \sqrt{2\tilde{c}\rho_*} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + 2\varphi_2\right), \eta = 2c^4 \sqrt{x} \sqrt{\tilde{c}(1-2\rho_*)} \sin \varphi_2 \quad (5.17)$$

Отсюда, с учетом равенств (1.2), (1.6) и (3.4), находим, что с погрешностью порядка $\tilde{c}^2$ координата ς материальной точки может быть вычислена по формуле

$$\varsigma = -c + c \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{x}} [2\rho_* \sin^2\left(\frac{k\pi}{2} + 2\varphi_2\right) + (1-2\rho_*) \sin^2 \varphi_2] \quad (5.18)$$

В (5.17) и (5.18) введено обозначение

$$\varphi_2 = \Omega_2 \tau + \varphi_2(0) \quad (5.19)$$

Величина Ω_2 определяется равенством, аналогичным равенству (8.12) из статьи [10]:

$$\Omega_2 = \omega_2 + [c_{11}\rho_* + 2c_{02}(1 - 2\rho_*)]\tilde{c} + \\ + \{c_{21}\rho_*^2 + 2[c_{12} + (-1)^k \alpha_{12}]\rho_*(1 - 2\rho_*) + 3c_{03}(1 - 2\rho_*)^2\}\tilde{c}^2 + O(\tilde{c}^3)$$

Принимая во внимание выражения (3.4) и (5.2), (5.3), получаем, что при четных значениях k

$$\Omega_2 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3x-1}{32x^2}\tilde{c} + \frac{3(23x^2-18x+3)}{2048x^{7/2}}\tilde{c}^2 - \frac{1}{1536}\left[\frac{96(x-1)}{x^2}\tilde{c} + \right. \\ \left. + \frac{121x^2-200x+43}{x^{7/2}}\tilde{c}^2\right]\rho_* + \frac{53x^2-154x+41}{512x^{7/2}}\tilde{c}^2\rho_*^2 + O(\tilde{c}^3),$$

где ρ_* — корень уравнения (5.10). А при нечетных k :

$$\Omega_2 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3x-1}{32x^2}\tilde{c} + \frac{3(23x^2-18x+3)}{2048x^{7/2}}\tilde{c}^2 - \frac{1}{1536}\left[\frac{96(x-1)}{x^2}\tilde{c} + \right. \\ \left. + \frac{85x^2-92x+43}{x^{7/2}}\tilde{c}^2\right]\rho_* + \frac{29x^2-82x+41}{512x^{7/2}}\tilde{c}^2\rho_*^2 + O(\tilde{c}^3),$$

где ρ_* — корень уравнения (5.11).

Вычисляемая по формуле (5.18) координата ς изменяется (с периодом π по φ_2) между своими минимальным $\varsigma_{\min}$ и максимальным $\varsigma_{\max}$ значениями, которые ς принимает соответственно при $\varphi_2 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$. Для четных k

$$\varsigma_{\min} = -c, \varsigma_{\max} = -c + c\frac{\tilde{c}}{2\sqrt{x}}(1 - 2\rho_*), \quad (5.20)$$

а при нечетных k

$$\varsigma_{\min} = -c + c\frac{\tilde{c}}{\sqrt{x}}\rho_*, \varsigma_{\max} = -c + c\frac{\tilde{c}}{2\sqrt{x}} \quad (5.21)$$

В (5.20) и (5.21) ρ_* — корни уравнений (5.10) и (5.11) соответственно.

В плоскости $O\xi\eta$ траектории (5.17) движущейся материальной точки при четных и нечетных k существенно отличаются. При четных k (когда периодическое движение точки орбитально устойчиво) траектория является кривой четвертого порядка, имеющей форму восьмерки. Для нечетных k (когда периодическое движение неустойчиво) траектория представляет собой параболу, которую материальная точка проходит дважды за период.

В качестве иллюстрации на рис. 2 и 3 показаны траектории материальной точки при конкретных значениях параметров: $x = 1/7$, $\tilde{c} = 1/100$. За единицу длины на этих рисунках принята длина полуоси c поверхности (1.1).

На рис. 2, где $k = 0$, имеем $\rho_* = 0.0921670583...$ и $\xi = 0.0263954062\sin 2\varphi_2$, $\eta = 0.1110482283\sin \varphi_2$, а на рис. 3, где $k = 1$, $\rho_* = 0.0915908343...$ и $\xi = 0.0263127655\cos 2\varphi_2$, $\eta = 0.1111266502\sin \varphi_2$. При этом в случае $k = 0$ $-1 \leq \varsigma \leq -0.9892097546...$, а в случае $k = 1$: $-0.9975767342... \leq \varsigma \leq -0.9867712434...$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00162, <https://rscf.ru/project/24-11-00162/> в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

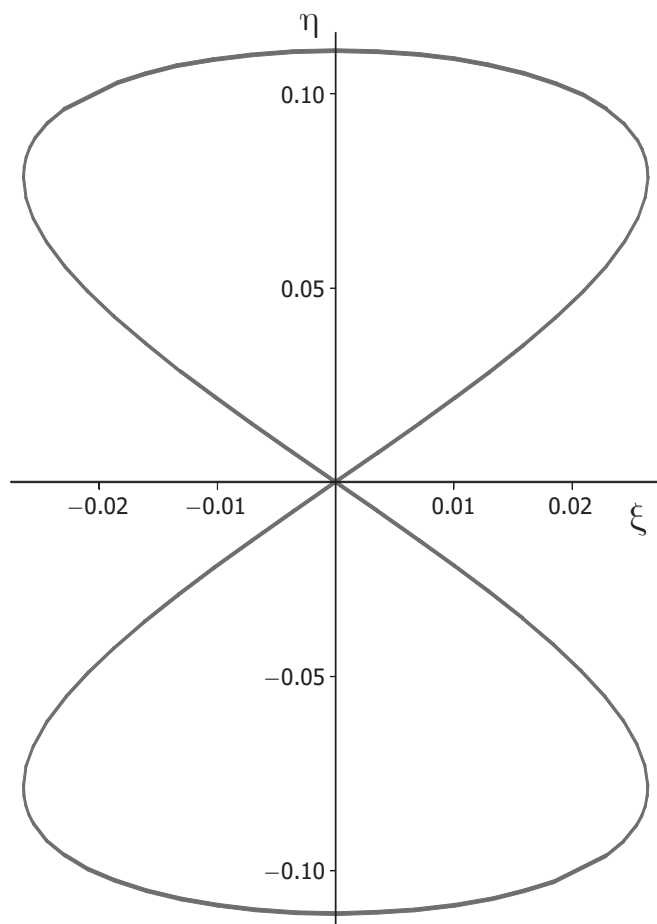


Рис. 2

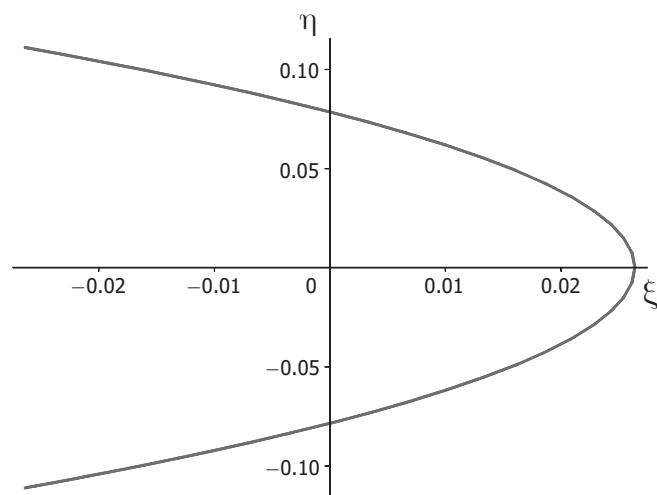


Рис. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
2. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
3. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. М.;Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
4. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
5. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
6. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
7. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.;Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 592 с.
8. Маркеев А.П. К задаче о нелинейных колебаниях консервативной системы при отсутствии резонанса // ПММ. 2024. Т. 88. Вып. 3. С. 347–358.
9. Pöschel J. Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets // Commun. Pure&Appl. Math. 1982. V. 35. № 5. P. 653–696.
10. Маркеев А.П. О нелинейных колебаниях трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 784–800.

On the Motion of a Material Point on a Fixed Ellipsoidal Surface

A. P. Markeev^{a,*}^aMoscow Aviation Institute (NRU), Moscow, Russia^{*}e-mail: anat-markeev@mail.ru

The nonlinear dynamics of a point that remains throughout its motion on the inner part of an absolutely smooth surface of a fixed triaxial ellipsoid is studied. The motion occurs in a uniform field of gravity, the largest of the axes of the ellipsoid is directed along the vertical. The main attention is paid to the motions of the point near its stable equilibrium position at the lowest point of the ellipsoid's surface lying on its vertical axis. A qualitative description of conditionally periodic oscillations of the point is given, and an estimate of the measure of the set of initial conditions corresponding to these oscillations is defined. In the resonant case, when the ratio of the frequencies of small linear oscillations is equal to two, the periodic motions of the point are studied; the question of their existence, stability and geometric representation is considered.

Keywords: conservative system, stability, conditionally periodic and periodic oscillations

REFERENCES

1. Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Encyclopedia Math. Sci. Vol. 3. Berlin: Springer, 2006. 505 p.
2. Moser J.K. Lectures on Hamiltonian systems // Mem. Amer. Math. Soc., no. 81, Providence, R.I.: AMS, 1968.
3. Birkhoff G.D. Dynamical Systems. AMS Coll. Publ., Vol. 9, Providence, R.I.: AMS, 1966.
4. Giacaglia G.E.O. Perturbation Methods in Non-Linear Systems. N.Y.: Springer, 1972. 369 p.
5. Malkin I.G. Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations. In 2 Vols., Germantown, Md.:US Atom. Energy Commis., Techn. Inform. Serv., 1959.
6. Gantmacher F.R. Lectures on Analytical Mechanics. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 296 p. (in Russian)
7. Markeev A.P. Theoretical Mechanics. Moscow;Izhevsk: R&C Dyn., 2007. 592 p. (in Russian)
8. Markeev A.P. On the problem of nonlinear oscillations of a conservative system in the absence of resonance // JAMM, 2024, vol. 88, no. 3, pp. 347–358.
9. Pöschel J. Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets // Commun. Pure&Appl. Math., 1982, vol. 35, no. 5, pp. 653–696.
10. Markeev A.P. On nonlinear oscillations of a triaxial ellipsoid on a smooth horizontal plane // Mech. of Solids, 2022, vol. 57, no. 8, pp. 1805–1818.