

УДК 534.[113:143]

ГАШЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУТОГО СТЕРЖНЯ С ПОМОЩЬЮ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА

© 2024 г. Г. В. Костин^{1,*}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: kostin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 08.05.2024 г.

После доработки 10.07.2024 г.

Принята к публикации 15.07.2024 г.

Исследуется возможность гашения продольных колебаний тонкого однородного упругого стержня при воздействии на него нормальной силы в поперечном сечении. Эта переменная во времени сила, которая может возбуждаться, например, с помощью пьезоэлектрических элементов, однородно распределена по длине на заданном сегменте консольно закрепленного стержня и равна нулю вне его. Представлены такие расположения концов сегмента, при которых возбуждаемая сила не влияет на амплитуду определенных мод. Найдено минимальное время, за которое можно погасить колебания всех остальных мод, и на основе метода Фурье построен в виде ряда соответствующий закон изменения демпфирующей силы. Дана обобщенная формулировка краевой задачи о переводе стержня за это время в нулевое терминальное состояние, для которой предложен алгоритм точного решения в случае рациональных соотношений на геометрические параметры. Незвестные функции состояния стержня ищутся в виде линейной комбинации функций бегущих волн и нормальной силы, которые определяются из линейной системы алгебраических уравнений, следующих из граничных соотношений и условий непрерывности. Проведено сравнение решений, полученных в рядах методом Фурье и в виде бегущих волн Даламбера.

Ключевые слова: упругий стержень, пьезоэлектрические силы, метод Фурье, гашение колебаний, бегущие волны

DOI: 10.31857/S0032823524040022, EDN: WWGMFD

1. Введение. Актуальной областью в теории управления динамическими системами с распределенными параметрами остается исследование возможности гашения начальных колебаний за конечное время при использовании внешнего воздействия, когда существуют ограничения либо на область его приложения, либо на его пространственную форму. Управление в этом случае описывается конечным набором зависящих от времени функций, которые обычно входят в правые части как определяющих уравнений в частных производных (УЧП), так и, возможно, краевых условий [1, 2]. Очевидное преимущество управления, которое воздействует на систему в каждой пространственной точке, заключается в том, что в некоторых случаях допустима декомпозиция колебаний с независимым воздействием на каждую собственную моду [3, 4]. Такую систему бывает невозможно реализовать в приложениях, и тогда важно рассмотрение ограниченных в пространстве или по форме воздействий. При этом построение допустимого закона управления на конечном интервале времени бывает затруднено или даже невозможно, при наличии, например, предельной

скорости распространения сигнала в системе [5]. В статье рассмотрены продольные колебания упругого стержня, на фиксированном связанном сегменте которого возбуждаются нормальные силы в поперечном сечении, равномерно распределенные вдоль центральной линии. Вне этого участка действуют только упругие напряжения. Такие управляющие нормальные силы можно создать одним или несколькими пьезоэлектрическими элементами (ПЭ), присоединенными на активном участке к стержню. Если элементов несколько, они должны располагаться симметрично относительно центральной линии и работать синхронно, способствуя продольному растяжению или сжатию упругого материала. Антисимметрично возбуждаемые элементы воздействуют на изгибы стержня, и такая схема управления изучена в [6]. Создаваемая пьезоэлектрическая сила рассмотрена в рамках простейшей модели ПЭ как независимая функция времени [7]. Так как итоговое распределение нормальной силы в пространстве кусочно-постоянно, волновое УЧП, которое описывает продольные колебания стержня, содержит в правой части дельта-функции вследствие скачков силы при переходе от ПЭ к свободным от управления участкам [8] и решение должно строиться с помощью обобщенных функций.

Альтернативный подход предложен в [9], где в рамках метода интегриродифференциальных соотношений (МИДС) решение начально-краевой задачи о продольных колебаниях однородного упругого стержня удается построить в явном виде, как и решение некоторых оптимизационных задач [10]. При этом состояние стержня передается функцией перемещений и динамическим потенциалом, который через первые частные производные определяет плотность импульса и нормальную силу в поперечном сечении. Решение представляется в виде бегущих волн, определенных на пространственно-временной сетке, образуемой некоторыми характеристиками. Как результат, оптимизация заключается в интегрировании линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с постоянными коэффициентами. Этот подход приемлем для построения оптимального управления в случае свободного стержня с рядом ПЭ, между которыми либо отсутствуют промежутки [10], либо когда ПЭ образуют периодическую структуру [11]. Более простой вариант, когда время управления в безразмерных единицах кратно длине ПЭ, представлен в [12]. Исследован также вопрос помодового гашения колебаний стержня и разделения мод на отдельные группы, каждая из которых имеет независимый управляющий вход [10, 13]. В отличие от предыдущих исследований в этой работе рассмотрен специальный тип стержня с жестким закреплением одного конца и свободным вторым концом. Исследуется вопрос о неуправляемости волнового уравнения для случая скалярного управляющего воздействия, что является частным случаем демпфирования при воздействии распределенной силой только на часть длины [14]. Определено, что управляемость зависит от геометрических параметров ПЭ. Как показано в [15–17], правильный выбор расположения ПЭ – это важная проблема в инженерных приложениях. Найдены координаты концов интервала приложения управления, при выборе которых пьезоэлектрическая сила не воздействует на определенные моды колебаний. Существует предельное время, за которое можно погасить колебания всех остальных мод. Для этого времени построен закон изменения управляющей силы в виде ряда. Для рациональных соотношений на геометрические параметры, предложен алгоритм точного решения задачи управления в виде линейной алгебраической комбинации начального состояния. Проведено сравнение решений, полученных в рядах и в виде бегущих волн Даламбера.

2. Классическая формулировка краевой задачи. Рассмотрим продольные колебания тонкого прямолинейного однородного упругого стержня под воздействием распределенной по длине x и переменной во времени t управляющей силы $f(t, x)$, направленной по нормали к его поперечному сечению. Опишем поведение динамической системы в безразмерных переменных, выбранных так, чтобы длина стержня,

коэффициент жесткости на растяжение сжатие и линейная плотность равнялась единице. Схематически стержень, ориентированный вдоль оси x , представлен на рис. 1. Начало координат расположено в жестко закрепленном конце стержня, а ось x направлена на свободный от каких либо нагрузок конец.

Сила f , возбуждаемая, например, с помощью ПЭ, задается произвольно на интервале времени $t \in T = (0, t_f)$ и распределена кусочно-постоянно по длине $x \in X = (0, 1)$. При использовании простейшей модели [7] можно обеспечить постоянство этой силы на интервале $x \in U = (x^-, x^+) \subset X$ и ее обнуление вне этого участка:

$$f(t, x) = \begin{cases} \dot{u}(t), & x \in U, \\ 0, & x \notin U, \end{cases} \quad u(0) = 0 \quad (2.1)$$

Здесь введена вспомогательная функция управления $u : T \rightarrow \mathbf{R}$. Интервал U длины $\lambda = x^+ - x^-$, на котором дополнительно к упругим напряжениям в поперечном сечении возникает растягивающая или сжимающая нагрузка \dot{u} , выделен на рис. 1 серым тоном.

Область определения неизвестных функций состояния стержня – это декартово произведение временного и пространственного интервалов $D = T \times X$. В качестве неизвестных переменных выбираются линейная плотность импульса $p : D \rightarrow \mathbf{R}$, нормальная сила в поперечном сечении $q : D \rightarrow \mathbf{R}$ и упругие перемещения точек стержня $v : D \rightarrow \mathbf{R}$.

Закон изменения импульса записывается через функции p и q в виде

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial q(t, x)}{\partial x}; \quad (t, x) \in D \quad (2.2)$$

Для выбранной тройки переменных в качестве законов состояния выступают линейное соотношение между импульсом p и скоростью, и аффинная связь силы q и деформации:

$$p(t, x) = \frac{\partial v(t, x)}{\partial t}, \quad q(t, x) = \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} + f(t, x); \quad (t, x) \in D \quad (2.3)$$

Если бы управляющая сила f была непрерывно дифференцируема по x [18], то в классической постановке уравнение движения в перемещениях получается после исключения в (2.2) переменных p и q в силу (2.3):

$$\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}; \quad (t, x) \in D \quad (2.4)$$

В дальнейшем ставится задача гашения в конечный момент времени t_f начальных импульсов и деформаций:

$$\begin{aligned} p(0, x) &= p_0(x), & v(0, x) &= v_0(x); & x &\in X \\ p(t_f, x) &= 0, & v(t_f, x) &= 0; & x &\in X \end{aligned} \quad (2.5)$$

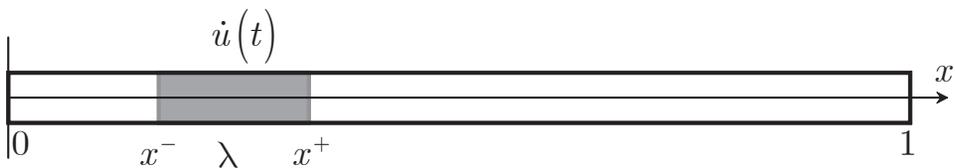


Рис. 1. Схема стержня с управляющим элементом

Здесь p_0 и v_0 – известные начальные распределения [19]. Для консольно закрепленного стержня должны выполняться следующие краевые условия:

$$v(t,0) = 0, \quad q(t,1) = 0; \quad t \in T \quad (2.6)$$

Дополнительно к этим условиям стержень, из физических соображений, должен оставаться неразрывным твердым телом, а полная нормальная сила q не может иметь скачков по пространственной координате x согласно третьему закону Ньютона. Все это приводит к определению класса допустимых распределений p_0 и v_0 , а также управления u .

В соответствии с МИДС [9], для обобщения краевой задачи (2.2)–(2.6) определим на области D новую переменную $r : D \rightarrow \mathbf{R}$, называемую в дальнейшем динамическим потенциалом, который удовлетворяет следующие соотношения:

$$p = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial r}{\partial t} \quad (2.7)$$

Подстановкой (2.7) в (2.2) показывается, что второй закон Ньютона автоматически выполняется при таком представлении импульса p и силы q .

После исключения из рассмотрения p и q , согласно (2.7), локальные законы состояния (2.3) предстают в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(t,x)}{\partial x} &= \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} \\ \frac{\partial r(t,x)}{\partial t} &= \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} + f(t,x); \quad (t,x) \in D \end{aligned} \quad (2.8)$$

Через неизвестные r и v переписываются и начально-терминальные условия (2.5), и краевые ограничения (2.6):

$$\begin{aligned} r(0,x) &= r_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x); \quad x \in X \\ r(t_f,x) &= r^0, \quad v(t_f,x) = 0; \quad x \in X \\ v(t,0) &= 0, \quad r(t,1) = r^0; \quad t \in T, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $r_0(x) = r^0 - \int_x^1 p_0(\chi) d\chi$.

Ненулевые правые части в первом терминальном и последнем краевом условии из (2.9) обеспечивают требуемую в дальнейшем непрерывность решения. Отметим, что динамическая переменная r определяется с точностью до константы r^0 , значение которой не влияет на движение стержня, заданного изначально через переменные p , q , v . Поэтому для определенности выбираем $r^0 = 0$.

3. Обобщенная формулировка задачи. Важно, что функция силы (2.1) имеет разрывы первого рода по координате x , если интервал U не совпадает с пространственной областью X . Следует также допустить возможность таких разрывов силы f по времени. Все это требует обобщения дифференциальных законов состояния (2.8) на области D [19]. Для расширения класса допустимых функций, согласно МИДС [9], локальные соотношения (2.8) можно заменить на один глобальный закон, который основан на минимизации интегральной невязки функций состояния от неизвестных r и v . Тогда поиск решения сведется к условной минимизации функционала, квадратичного по первым производным от кинематической и динамической переменных.

Более конкретно, обобщенная краевая задача ставится следующим образом. Даны функции $r_0, v_0 \in H^1(X)$ и $u \in H^1(T)$, т.е. начальные распределения со своими первыми производными и возбуждаемая сила квадратично-интегрируемы на своих областях определения. Следует найти такие функции состояния $r^*(t,x), v^*(t,x) \in H^1(D)$,

которые при выполнении начальных и краевых ограничений (2.9) минимизируют функционал состояния F :

$$F[r^*, v^*] = \min_{r, v \in H^1(D)} F[r, v] = 0, \quad F = \int_D \varphi dt dx \geq 0 \quad (3.1)$$

$$\varphi = \frac{g^2}{2} + \frac{h^2}{2}, \quad g = \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t}, \quad h = \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} + f,$$

где сила f определена в (2.1). Согласно формулировке (2.1), (2.9), (3.1), функционал F достигает абсолютного минимума на решении. По определению подинтегральное выражение φ представляет собой неотрицательную квадратичную форму от первых производных функций r , v и u . Из этого вытекает принадлежность переменных r и v к гильбертовому пространству $H^1(D)$.

4. Условия неуправляемости. В краевой задаче динамики (2.1), (2.9), (3.1) возможность выполнения однородных терминальных ограничений связана с вопросом управляемости рассматриваемой системы с распределенными параметрами. Условия возможности погашения произвольных колебаний из заданного пространства можно вывести, применяя метод Фурье. Для этого сформулируем соответствующую задачу на собственные значения.

Представим собственные колебания стержня в виде

$$r(t, x) = R_n(x) \cos \omega_n t, \quad v(t, x) = V_n(x) \sin \omega_n t \quad (4.1)$$

$$R_n = -\frac{2 \cos \omega_n x}{\omega_n}, \quad V_n = \frac{2 \sin \omega_n x}{\omega_n}, \quad \omega_n = n\pi - \frac{\pi}{2}; \quad n \in \mathbf{N}$$

Здесь функции R_n и V_n определяют форму n -й моды колебаний с собственной частотой ω_n .

Используем прием разделения переменных для уравнений (2.3) и спроецируем их в гильбертовом пространстве $L^2(X)$ на функции $R_n : X \rightarrow \mathbf{R}$ и $V_n : X \rightarrow \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, которые представляют собой нетривиальные решения соответствующей краевой задачи на собственные значения

$$R_n'(x) = \omega_n V_n(x), \quad V_n'(x) = -\omega_n R_n(x) \quad (4.2)$$

$$V_n(0) = 0, \quad R_n(1) = 0; \quad n \in \mathbf{N}$$

Решение начально-краевой задачи (2.1), (2.9), (3.1) представимо как разложение по базису $\{(R_j, V_j)\}_{j \in \mathbf{N}}$ в виде

$$r(t, x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} R_n(x) r_n(t), \quad v(t, x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} V_n(x) v_n(t) \quad (4.3)$$

После интегрирования по частям с учетом (4.3) и того, что сила f из (2.1) кусочно-постоянна по x , получаем счетную систему линейных ОДУ:

$$\dot{v}_n(t) = \omega_n r_n(t); \quad v_n(0) = v_n^0 \quad (4.4)$$

$$\dot{r}_n(t) = -\omega_n v_n(t) + \omega_n^{-1} c_n \dot{u}(t); \quad r_n(0) = r_n^0$$

Здесь $n \in \mathbf{N}$, а r_n^0 и v_n^0 — проекции начальных распределений $r_0(x)$ и $v_0(x)$ на собственные функции $R_n(x)$ и $V_n(x)$, соответственно. Для компактности в (4.4) введен коэффициент усиления

$$c_n = V_n(x^-) - V_n(x^+) \quad (4.5)$$

Из (4.4) напрямую следует, что n -я мода неуправляема, если для любого допустимого управления u правая часть уравнений (4.4) тождественно равна нулю, т.е., согласно (4.1), должно быть выполнено условие

$$\sin(\omega_n x^-) - \sin(\omega_n x^+) = 0$$

Проведем тригонометрическое преобразование

$$\sin \frac{\omega_n(2x_c - \lambda)}{2} - \sin \frac{\omega_n(2x_c + \lambda)}{2} = -2 \cos \omega_n x_c \sin \frac{\omega_n \lambda}{2} = 0$$

$$x_c = \frac{x^- + x^+}{2}$$

Здесь введена координата x_c центральной точки ПЭ. В результате получаем два геометрических условия неуправляемости

$$x_c = \frac{2k-1}{2n-1} < 1 \quad \vee \quad \lambda = \frac{2k}{2n-1} \leq 1; \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.6)$$

Из (4.6) следует, что n -я мода становится неуправляемой, когда собственная форма V_n достигает экстремума в центре ПЭ или длина ПЭ кратна длине волны функции V_n . Если для фиксированных геометрических параметров x^\pm несколько мод такие, что для каждой из них выполняется одно из условий (4.6), все они принадлежат неуправляемой группе мод. Так, например, если для m -й моды $\lambda = 2 / (2m - 1)$, то неуправляемыми будут и все моды $n > m$, для которых число $2n - 1$ кратно $2m - 1$. Так, например, если по этому условию нельзя изменять колебания моды с номером $m = 3$, при любом управлении сохранится изначальная энергия мод с номерами $n = 8, 13, 18, \dots$

5. Решение краевой задачи в рядах. Можно показать, что решение краевой задачи (2.1), (2.9), (3.1), для произвольного начального состояния стержня (r_0, v_0) возможно только для безразмерного времени управления не меньше критического: $t_f \geq t_f^* = 2$. Допустим, что построено управление $u^* \in H^1(T^*)$, где $u^* = u^*(t, r_0, v_0)$ и $T^* = (0, t_f^*)$, которое способно подавить любые колебания за критическое время t_f^* . Для большего времени $t_f > t_f^*$ допустимым будет управление

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, t_f - t_f^*) \\ u^*(t - t_f + t_f^*), & t \in (t_f - t_f^*, t_f) \end{cases}$$

где u^* строится для промежуточного состояния стержня $r(t_f - t_f^*, x)$ и $v(t_f - t_f^*, x)$.

Используя метод Фурье, найдем управление u^* на интервале T^* в виде ряда

$$u^*(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \sin \omega_n t + b_n (\cos \omega_n t - 1)) \quad (5.1)$$

Для анализа движения, соответствующего u^* , допустим, что в начальный момент времени в стержне запасена единичная энергия, при этом либо стержень недеформирован и динамический потенциал r распределен по моде с номером n :

$$r(0, x) = R_n(x), \quad v(0, x) = 0, \quad (5.2)$$

либо стержень в этот момент неподвижен и деформирован по n -й моде:

$$r(0, x) = 0, \quad v(0, x) = V_n(x) \quad (5.3)$$

Если реализовано начальное условие (5.2), в ряде (5.1) неравным нулю будет только коэффициент a_n . В случае (5.3) ненулевым будет лишь параметр управления b_n . Построим решение счетной системы (4.4) для выбранного управления при начальных распределениях (5.2):

$$r_{mn}^a(t) = \begin{cases} a_n c_m \frac{\omega_n \sin \omega_n t - \omega_m \sin \omega_m t}{\omega_m^2 - \omega_n^2}, & m \neq n \\ \cos \omega_n t - a_n c_n \frac{\omega_n t \cos \omega_n t + \sin \omega_n t}{2\omega_n}, & m = n \end{cases} \quad (5.4)$$

$$v_{mn}^a(t) = \begin{cases} a_n c_m \omega_n \frac{\cos \omega_m t - \cos \omega_n t}{\omega_m^2 - \omega_n^2}, & m \neq n \\ \sin \omega_n t - a_n c_n \frac{t \sin \omega_n t}{2}, & m = n \end{cases}$$

Решение (4.4) для выбранного управления при начальных состояниях (5.3) имеет вид

$$r_{mn}^b(t) = \begin{cases} b_n c_m \omega_n \frac{\cos \omega_n t - \cos \omega_m t}{\omega_m^2 - \omega_n^2}, & m \neq n \\ \sin \omega_n t + b_n c_n \frac{t \sin \omega_n t}{2}, & m = n \end{cases} \quad (5.5)$$

$$v_{mn}^b(t) = \begin{cases} b_n c_m \frac{\omega_m \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega_m t}{\omega_m^2 - \omega_n^2}, & m \neq n \\ \cos \omega_n t - b_n c_n \frac{\omega_n t \cos \omega_n t - \sin \omega_n t}{2\omega_n}, & m = n \end{cases}$$

Приравнивая нулю терминальные значения $r_{mn}^a, v_{mn}^a, r_{mn}^b, v_{mn}^b$ при $t = t_f^* = 2$ получаем, согласно (5.4) и (5.5), что $a_n = b_n = -c_n^{-1}$. Учитывая значения r_n^0 и v_n^0 для проекций начальных распределений r_0 и v_0 соответственно на собственные функции R_n и V_n , управление u^* из (5.1) для произвольных начальных условий примет вид

$$u^*(t) = -\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_n} (r_n^0 \sin \omega_n t + v_n^0 (\cos \omega_n t - 1)) \quad (5.6)$$

Если модуль c_n отделен от нуля, из-за его ограниченности ряд (5.6) сходится в том же пространстве, которому принадлежат функции r_0, v_0 , т.е. $u^* \in H^1(0, 2)$.

Управление $u^*(t)$ определяет, согласно (5.4) и (5.5), движение в виде ряда

$$r^*(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} R_n(x) (r_n^0 r_{mn}^a(t) + v_n^0 r_{mn}^b(t))$$

$$v^*(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} V_n(x) (r_n^0 v_{mn}^a(t) + v_n^0 v_{mn}^b(t)) \quad (5.7)$$

6. Прямое решение обобщенной задачи. Управление $u^*(t)$, заданное в виде ряда (5.6) на критическом интервале времени T^* , не всегда удобно в применении. В случае, когда геометрические параметры расположения ПЭ представлены рациональными числами, решение краевой задачи можно получить в виде конечного набора алгебраических соотношений [6]. Используя представление решения в виде бегущих волн Даламбера, построим при таких параметрах управление.

Пусть, для некоторой пары x^\pm каждая мода колебаний в отдельности управляема. Тогда для нахождения движения возьмем функции состояния (r, v) в виде линейной комбинации бегущих волн и управления. Сформируем конечную сетку из характеристик на пространственно-временной области D , с использованием которой удастся

свести рассматриваемую краевую задачу с распределенными параметрами к линейной алгебраической системе.

В рассматриваемом случае без потери общности можно положить, что

$$x^\pm = \xi n^\pm, \quad \xi = \frac{1}{n_x}; \quad n^+, n_x \in \mathbf{N}, \quad n^- \in \mathbf{Z}_+, \quad n^- < n^+ \leq n_x \quad (6.1)$$

Здесь натуральное число n_x такое, что либо x^+ – несократимая дробь, либо координата x^- не равна нулю и несократима. Критическое время управления кратно безразмерной элементарной длине ξ , т.е. $t_f^* = 2n_x \xi$. Длина ПЭ выражается как $\lambda = (n^+ - n^-)\xi$.

Для построения сетки на области D разобьем временной интервал T на $2n_x$ равных подынтервалов T_i , а пространственный интервал X – на n_x подынтервалов X_k так, что

$$\begin{aligned} T_i &= (t_{i-1}, t_i); \quad i \in M = \overline{1, 2n_x} \\ t_j &= j\xi; \quad j \in M^* = \{0, 2n_x\} \\ X_k &= (x_{k-1}, x_k); \quad k \in N = \overline{1, n_x} \\ x_l &= l\xi; \quad l \in N^* = \{0, n_x\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Каждому интервалу X_k соответствует открытая подобласть $D_k = T \times X_k$ области D (см. рис. 2.) и три одномерные функции:

$$\begin{aligned} w_k^+ &: (x_{k-1}, T + x_k) \rightarrow \mathbf{R}, \quad w_k^- : (-x_k, T - x_{k-1}) \rightarrow \mathbf{R} \\ y_k &: (0, T) \rightarrow \mathbf{R}, \quad y_k(t) = \frac{1}{\xi} \int_{x_k}^t \int_0^t f(\tau, x) d\tau dx \end{aligned} \quad (6.3)$$

На области D_k искомые функции v и r представляются в виде

$$\begin{aligned} v(t, x) &= w_k^+(t + x) + w_k^-(t - x) \\ r(t, x) &= w_k^+(t + x) - w_k^-(t - x) + y_k(t); \quad (t, x) \in D_k, \quad k \in N, \end{aligned} \quad (6.4)$$

После непосредственной подстановки (6.4) в функционал состояния F получается, что $F = 0$, потому что $\partial r / \partial x \equiv \partial v / \partial t$ и $\partial r / \partial t \equiv \partial v / \partial x - f$.

Введем новые декартовы координаты (z^+, z^-) , орты которых связаны с двумя характеристиками решения. Сами орты показаны на рис. 2 сплошными наклонными линиями, причем ось z^- показана для наглядности со сдвигом вдоль оси z^+ . Два семейства характеристик – это прямолинейные сегменты в области D , на которых не меняются значения функций $w_j^\pm(t \pm x)$. Новые координаты связаны с (t, x) биективными линейными преобразованиями:

$$z^\pm = t \pm x, \quad t = \frac{z^+ + z^-}{2}, \quad x = \frac{z^+ - z^-}{2} \quad (6.5)$$

Показанные пунктиром на рис. 2 наклонные ребра сетки – это образующие сетку характеристики, определяемые в новых координатах как

$$S_i^\pm = \{(z^+, z^-) \in D : z^\pm = j\xi, j \in \mathbf{Z}\}$$

Строящаяся сетка дополняется прямолинейными сегментами, параллельными осям t и x . Эти отрезки проще задавать в старых координатах:

$$\begin{aligned} S_j^t &= \{(t, x) \in D : t = t_j\}; \quad j \in M^* \\ S_k^x &= \{(t, x) \in D : x = x_k\}; \quad k \in N^* \end{aligned}$$

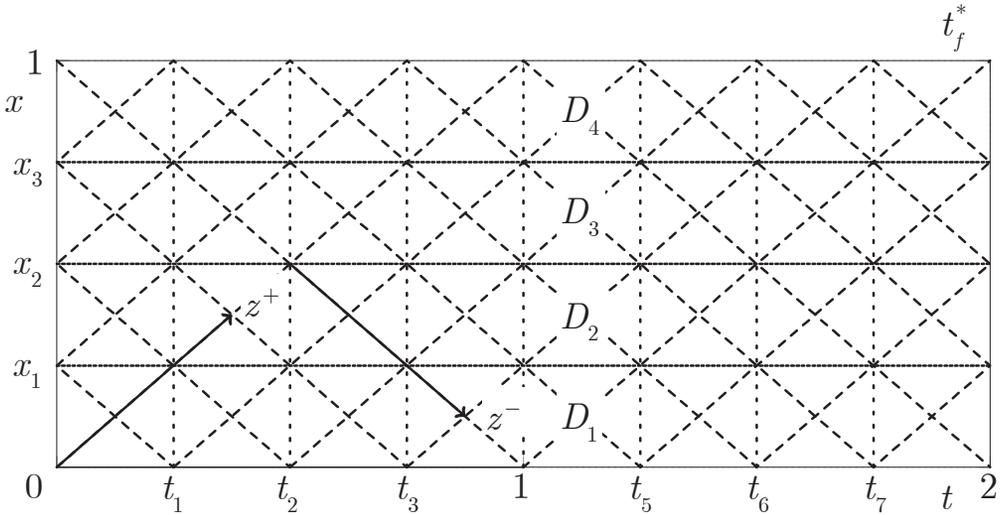


Рис. 2. Сетка в пространственно-временной области D для $n_x = 4$

Определим на каждой области D_j вспомогательные функции:

$$\begin{aligned}
 w_{j,k}^\pm : Z \rightarrow \mathbf{R} : w_{j,k}^\pm(z) &= w_j^\pm(z + z_{j,k}^\pm); \quad z_{j,k}^\pm = z_j^\pm + k\xi \\
 z_j^+ &= (j-1)\xi, \quad z_j^- = -j\xi; \quad j \in N, \quad k \in M^*, \quad Z = (0, \xi) \\
 y_{j,l} : Z \rightarrow \mathbf{R} : y_{j,l}(z) &= y_j(z + t_l); \quad j \in N, \quad l \in M
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

Согласно (6.4), линейная комбинация $w_{j,k}^+$, $w_{j,l}^-$ и $y_{j,m}$ с допустимой комбинацией индексов j, k, l, m уникально определяет пару переменные (v, r) на каждом треугольном элементе сетки.

Поскольку решение принадлежит гильбертову пространству $(v, r) \in H^1(D; \mathbf{R}^2)$, в силу непрерывности линейного преобразования (6.4) подобным же пространствам должны принадлежать и одномерные функции $w_{j,k}^\pm \in H^1(Z)$, $y_{j,l} \in H^1(Z)$. Дополнительно, в силу леммы Соболева [20] эти функции непрерывны и продолжаемы непрерывно на замыкание области определения: $w_{j,k}^\pm \in C^0(\bar{Z})$, $y_{j,l} \in C^0(\bar{Z})$.

Для непрерывности решения (v, r) на замыкании области \bar{D} необходимо выполнить граничные соотношения (2.9) и условия непрерывности динамической переменной r и кинематической переменной v на внутренних ребрах сетки S_k^x . Принимая во внимание (2.9), (6.4), (6.6), а так же вытекающие из (2.1) и (6.3) точечные условия $y_{j,0}(0) = 0$, терминальные ограничения на сегменте S_0' для каждой области D_j после эквивалентных преобразований примут вид

$$\begin{aligned}
 w_{j,2n_x}^+(z) + w_{j,2n_x}^-(\xi - z) &= 0 \\
 w_{j,2n_x}^+(z) - w_{j,2n_x}^-(\xi - z) &= 0; \quad j \in N
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

В свою очередь начальные условия на бегущие волны предстанут в форме

$$\begin{aligned}
 w_{j,0}^+(z) + w_{j,0}^-(\xi - z) &= v_0(z + z_j^+) \\
 w_{j,0}^+(z) - w_{j,0}^-(\xi - z) &= r_0(z + z_j^+); \quad j \in N
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

Краевые условия из (2.9) для ребер сетки, лежащих на граничных сегментах S_0^x и $S_{n_x}^x$, переписываются в форме

$$\begin{aligned} w_{1,k-1}^+(z) + w_{1,k}^-(z) &= 0 \\ w_{n_x,k}^+(z) - w_{n_x,k-1}^-(z) + y_{n_x,k}(z) &= 0; \quad k \in M \end{aligned} \quad (6.9)$$

Условия непрерывности функций v и r на внутренних сегментах S_j^x задаются как

$$\begin{aligned} w_{j,k}^+(z) + w_{j,k-1}^-(z) &= w_{j+1,k-1}^+(z) + w_{j+1,k}^-(z) \\ w_{j,k}^+(z) - w_{j,k-1}^-(z) + y_{j,k}(z) &= w_{j+1,k-1}^+(z) - w_{j+1,k}^-(z) + y_{j+1,k}(z) \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$j \in N_* = \{1, n_x - 1\}, \quad k \in M$$

Следует отметить, что по построению, согласно (6.3) и (6.6), вспомогательные функции $y_{j,k}$ либо равны нулю, если $X_k \cap U = \emptyset$, либо определяются через значения управления $u(t)$, если $X_k \subset U$. Введем новые функции управления в виде

$$\begin{aligned} u_k : Z \rightarrow \mathbf{R} : u_k(z) &= u(z + t_k), \quad k \in M \\ y_{j,k} &= \begin{cases} u_k, & n^- < j \leq n^+ \\ 0, & j \leq n^- \vee j > n^+ \end{cases} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Удобно сгруппировать независимые переменные в два вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_j)_{j=1}^{2n_x}, \quad \mathbf{w} = (w_j)_{j=1}^{n_w}, \quad n_w = 2n_x(2n_x + 1) \\ w_k &= \begin{cases} w_{l,m}^+, & k = (l-1)(2n_x + 1) + m \\ w_{l,m}^-, & k = (l-1)(2n_x + 1) + m + n_w / 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Тогда, с учетом (6.11), систему (6.7)–(6.10) можно рассматривать как линейную алгебраическую, которая задается относительно компонент вектор-функций \mathbf{u} и \mathbf{w} , заданных на интервале $Z = (0, \xi)$. Число переменных и уравнений в этой системе совпадает и равно $4n_x(n_x + 1)$.

Подсистема (6.8)–(6.10), которая определяет начально-краевую задачу о движении стержня при произвольном управлении, всегда разрешима относительно компонент функции \mathbf{w} . Для этого предлагается следующий алгоритм.

На нулевом шаге для каждой области D_j , $j \in N$, разрешаются начальные условия (6.8) относительно двух переменных $w_{j,0}^+$ и $w_{j,0}^-$. Складывая и вычитая два уравнения, а также заменяя в уравнении относительно бегущей волны $w_{j,0}^+$ аргумент z на $z' = \xi - z$, искомые переменные удается выразить через начальные функции:

$$\begin{aligned} w_{j,0}^+(z) &= \frac{1}{2}v_0(z_j^+ + z) + \frac{1}{2}r_0(z_j^+ + z) \\ w_{j,0}^-(z') &= \frac{1}{2}v_0(z_{j+1}^+ - z') - \frac{1}{2}r_0(z_{j+1}^+ - z'); \quad j \in N \end{aligned} \quad (6.13)$$

На следующих шагах с номерами $k \in M$ удовлетворяются краевые и межэлементные условия (6.9), (6.10) с соответствующими индексами. При этом два крайних уравнения из (6.9) разрешаются относительно переменных $w_{1,k}^-$ и $w_{n_x,k}^+$. На том же k -м шаге парами разрешаются уравнения с теми же значениями k из (6.10) относительно бегущих волн $w_{j,k}^+$ и $w_{j+1,k}^-$. Отметим, что остальные функции бегущих волн $w_{j,k-1}^-$ и $w_{j+1,k-1}^+$, входящие в эту подсистему, уже выражены на предыдущих шагах через начальные распределения v_0 , r_0 и возможно управления u_l ; $l = 1, k - 1$.

В результате решения начально-краевой системы (6.8)–(6.10) вектор-функция бегущих волн может быть представлена в линейной зависимости от известного начального состояния стержня и вектор-функции управления: $\mathbf{w}(r_0, v_0, \mathbf{u})$. Подставляя необходимые компоненты вектора \mathbf{w} в терминальные соотношения (6.7), получим систему линейных уравнений относительно управления \mathbf{u} .

Разрешимость этой системы напрямую зависит от отсутствия условий помодовой неуправляемости (4.6) и отделимости от нуля коэффициентов c_n , заданных в (4.5) и определяющих ряд (5.6). Сходимость этого ряда доказывается заменой в (5.6) множителя c_n^{-1} у каждого члена ряда на константу $C = \max\{c_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Можно показать [13], что тригонометрическое выражение (4.5), задающее величину константы c_n , пробегает, согласно (4.1), конечное число значений (не более n_x , см. (6.1)) в случае выбора рациональных параметров x^\pm . Если же не выполняется ни одно из условий (4.6), для всякого n коэффициент c_n не равен нулю, а это значит, существует положительная константа $C < \infty$, мажорирующая ряд.

7. Пример гашения колебаний стержня. Рассмотрим случай, когда длина ПЭ равна $\lambda = 1/4$, расстояние от его левого края до жесткой заделки принимает только четыре значения $x^- = n^- \xi = n^- \lambda$, $n^- = 0, 1, 2, 3$. В качестве критерия качества управления может служить отношение квадрата нормы управляющей силы $\|f\|^2 = \frac{1}{2t_f^*} \int_D f dt dx = \frac{1}{16} \int_0^2 \dot{u}(t) dt$ к энергии стержня в начальный момент

$$E_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 (r_0^2(x) + v_0^2(x)) dx \tag{7.1}$$

В табл. 1 для четырех возможных положений ПЭ приведены значения усредненной энергии управляющей силы $\|f\|^2$ в случае, когда стержень в начальный момент неподвижен ($r_0(x) \equiv 0$), а перемещения распределены, согласно (4.1), по n -ой моде: $v_0(x) = V_n(x)$. В силу нормировки базисных функций $\{(R_n, V_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ по функционалу (7.1) в начальный момент полная энергия стержня равна $E_0 = 1$. В табл. 1 показаны результаты расчета квадрата нормы силы для восьми низших мод ($n = 1, 8$). Эти величины обратно пропорциональны квадрату коэффициента c_n , определенного в (4.5). В силу периодичности выражения (4.5) получается, что $c_{n+2n_x} = c_n$, поэтому и значения $\|f\|^2$ будут повторяться при увеличении n с периодом $2n_x = 8$. Более того, можно показать, что $\|f\|^2$ совпадают для мод с номерами $m \leq n_x$ и $n = n_x - m + 1$.

Согласно приведенным в таблице данным, самым “энергетически” эффективным для выбранных геометрических параметров оказалось расположение ПЭ с $x^- = 1/4$ и $x^- = 1/2$ при воздействии на моды с номерами $n \in \{4 + 8j, 5 + 8j : j \in \mathbb{Z}_+\}$ и $n \in \{2 + 8j, 7 + 8j : j \in \mathbb{Z}_+\}$, соответственно. Если же говорить о минимизации максимального значения нормы силы, то наилучшим расположением для ПЭ будет непосредственно у жесткой заделки ($n^- = 0, \max_{n \in \mathbb{N}} \|f\|^2 = 1.707$), а наихудшим у свободного конца стержня ($n^- = 3, \max_{n \in \mathbb{N}} \|f\|^2 = 42.15$).

Таблица 1. Квадраты норм управляющих сил $\|f\|^2$ для начальных распределений перемещений по n -й моде ($v_0 = V_n, r = 0$) при различных положениях ПЭ ($\lambda = \xi = 1/4$)

$n^- \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1.707	0.293	0.293	1.707	0.293	0.293	1.707
1	2.375	5.320	0.094	0.211	0.211	0.094	5.320	2.375
2	5.320	0.211	2.375	0.094	0.094	2.375	0.211	5.320
3	43.15	0.656	0.131	0.068	0.068	0.131	0.656	43.15

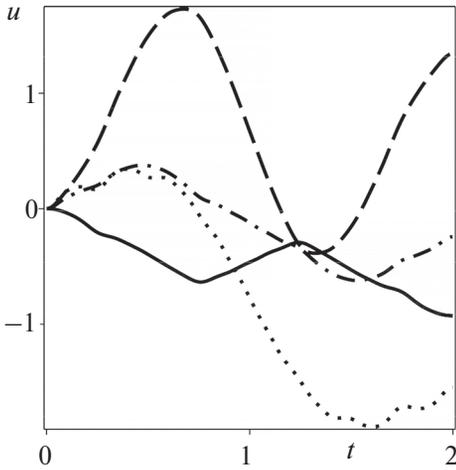


Рис. 3. Управление $u^*(t)$ для $\lambda = 1/4$:
 $x^- = 0$ (сплошная кривая),
 $x^- = 1/4$ (штриховая),
 $x^- = 1/2$ (штрихпунктирная),
 $x^- = 3/4$ (пунктирная).

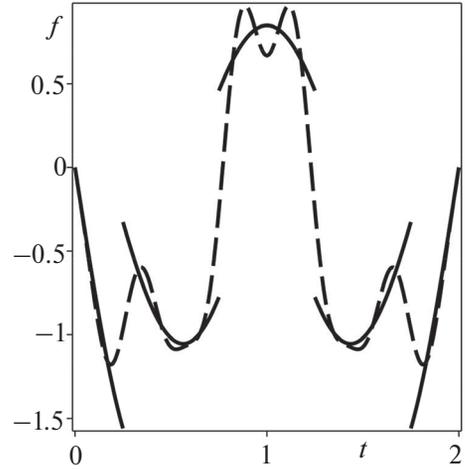


Рис. 4. Сила $f(t, 1/8)$ для $x^- = 0$ и $\lambda = 1/4$:
 точное решение (сплошная кривая)
 и 8-модовое приближение (штриховая кривая).

В качестве примера расчета управления, которое гасит колебания на минимально допустимом интервале времени $t \in (0, 2)$, возьмем изначально неподвижный стержень, перемещения точек которого определяются тригонометрической функцией:

$$r_0(x) = 0, \quad v_0(x) = \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos 4 \sin 4 + 4}} \quad (7.2)$$

не пропорциональной никакой собственной форме V_n . Знаменатель дроби в (7.2) выбран так, чтобы энергия стержня в момент времени $t = 0$ была единичной.

На рис. 3 показаны графики функций управления $u^*(t)$ для начального состояния (7.2) при различных расположениях ПЭ ($n^- = 0, 1, 2, 3$, $\lambda = \xi = 1/4$). По построению $u^*(0) = 0$ и все сигналы управления непрерывно меняются во времени. Максимальное значение управление достигает при $n^- = 1$, а минимальное – при $n^- = 3$.

График управляющей силы $f(t, 1/8)$ при $n^- = 0$ (ПЭ примыкает к заделке) приведен на рис. 4 сплошной линией. Как видно из графика, функция f терпит разрыв по времени в четырех точках: $t = 1/4, 3/4, 5/4, 7/4$. На рис. 4 штриховая кривая отображает приближенные значения этой силы, найденные дифференцированием помодового выражения (5.6), в котором суммируются только 8 членов ряда. Полученная аппроксимация – аналитическая функция, которая будет с ростом числа учтенных слагаемых приближаться в пространстве $L^2(0, 2)$ к точному выражению, полученному в предыдущем разделе с помощью бегущих волн. Следует отметить, что 8-модовая аппроксимация самого управления $u^*(t)$ почти сливается с точным решением, поэтому не приведена на рис. 3.

На рис. 5 для выбранных геометрических параметров ($n^- = 0$, $\lambda = 1/4$) и начального распределения (7.2) в пространственно-временной области D построены значения динамического потенциала $r(t, x)$. Этот график показывает, что потенциал, но не его частные производные, непрерывно изменяется в пространстве и времени и строго удовлетворяет краевое ограничение $r(t, 1) = 0$, а также однородные условия в начале и в конце процесса.

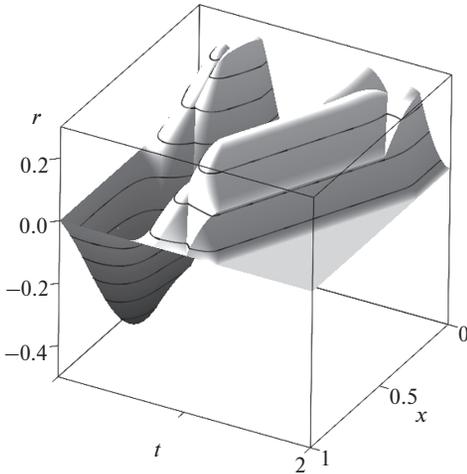


Рис. 5. Распределение динамического потенциала $r(t, x)$ при критическом управлении для $x^- = 0$ и $\lambda = 1/4$

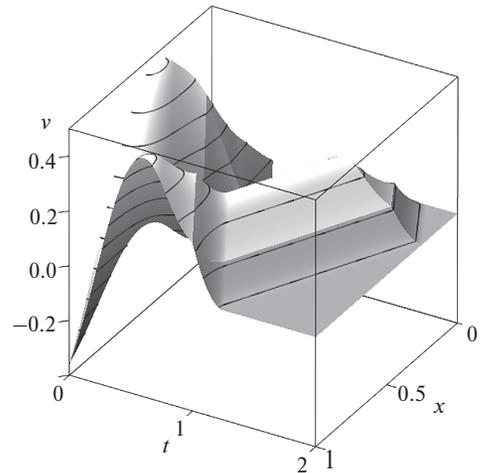


Рис. 6. Распределение упругих перемещений $v(t, x)$ при критическом управлении для $x^- = 0$ и $\lambda = 1/4$

На рис. 6 изображены перемещения v как функции временной и пространственной координат (t, x) . Распределение $w(t, x)$ тоже непрерывны, в заделке сдвиги нулевые ($w(t, 0) = 0$), а в терминальный момент времени $t = 2$ стержень переходит в недеформированное состояние с нулевой скоростью (везде кроме точки $(t, x) = (2, 1/4)$, где сходятся линии разрывов первой производной по направлениям нормальным к характеристикам). Максимум модуля перемещений достигается на границе области D в точках $(t, x) = (0, \pi/8)$ и $(t, x) = (\pi/8, 0)$.

Заключение. Рассмотрен вопрос об управляемости продольных колебаний однородного упругого стержня при скалярном управляющем воздействии нормальной силы в поперечном сечении, возбуждаемой равномерно на заданном участке. Найдены координаты концов этого участка, при которых управление не влияет на амплитуду некоторых собственных мод колебаний. В отсутствие выявленных условий неуправляемости закон демпфирования построен в виде ряда, сходящегося в энергетическом пространстве на кратчайшем допустимом интервале времени. В случае рациональных соотношений на геометрические параметры ПЭ предложен алгоритм явного решения задачи о гашении колебаний за это время в виде конечной алгебраической комбинации начальных распределений.

Исследование выполнено по теме государственного задания (госрегистрация № 124012500443-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
2. Lions J.L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. New York: Springer, 1971. 400 p.
3. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
4. Chen G. Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain. II // SIAM J. Control Optim. 1981. V. 19. № 1. P. 114–122.
5. Романов И.В., Шамаев А.С. О задаче граничного управления для системы, описываемой двумерным волновым уравнением // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 109–116.

6. *Гавриков А.А., Костин Г.В.* Изгибные колебания упругого стержня, управляемого пьезоэлектрическими силами // ПММ. 2023. Т. 87. № 5. С. 801–819.
7. IEEE Standard on Piezoelectricity // ANSI/IEEE Std 176-1987. 1988.
<https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1988.79638>
8. *Kucuk I., Sadek I., Yilmaz Y.* Optimal control of a distributed parameter system with applications to beam vibrations using piezoelectric actuators // J. Franklin Inst. 2014. V. 351. № 2. P. 656–666.
9. *Kostin G.V., Saurin V.V.* Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.
10. *Kostin G., Gavrikov A.* Controllability and optimal control design for an elastic rod actuated by piezoelements // IFAC-PapersOnLine. 2022. V. 55. № 16. P. 350–355.
<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.09.049>
11. *Гавриков А.А., Костин Г.В.* Оптимизация продольных движений упругого стержня с помощью периодически распределенных пьезоэлектрических сил // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 6. С. 93–109.
12. *Kostin G., Gavrikov A.* Modeling and optimal control of longitudinal motions for an elastic rod with distributed forces // ArXiv. 2022. arXiv:2206.06139 5. P. 1–11.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.06139>
13. *Gavrikov A., Kostin G.* Optimal LQR control for longitudinal vibrations of an elastic rod actuated by distributed and boundary forces // Mech.&Machine Sci. V. 125. 2023. P. 285–295.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-15758-5_28
14. *Ho L.F.* Exact controllability of the one-dimensional wave equation with locally distributed control // SIAM J. Control Optim. 1990. V. 28. № 3. P. 733–748.
15. *Bruant I., Coffignal G., Lene F., Verge M.* A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures // J. Sound&Vibr. 2001. V. 243. № 5. P. 861–882.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3448>
16. *Gupta V., Sharma M., Thakur N.* Optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure: A technical review // J. Intell. Mater. Syst.&Struct. 2010. V. 21. № 12. P. 1227–1243.
<https://doi.org/10.1177/1045389X10381659>
17. *Botta F., Rossi A., Belfiore N.P.* A novel method to fully suppress single and bi-modal excitations due to the support vibration by means of piezoelectric actuators // J. Sound&Vibr. 2021. V. 510. № 13. P. 116260.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116260>
18. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
19. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
20. *Иосада К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1968. 624 с.

Damping of Longitudinal Vibrations of an Elastic Rod by a Piezoelectric Element

G. V. Kostin^{a, #}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: kostin@ipmnet.ru*

Possible damping of longitudinal vibrations of a thin homogeneous elastic rod under the influence of a normal force in the cross section is studied. This time-varying force, which can be excited, for example, by using piezoelectric elements, is uniformly distributed along the length on a given segment of the cantilevered rod and is equal to zero outside it. Those placements of the ends of the segment are presented in which the excited force does not affect the amplitude of certain modes. The minimum time in which the oscillations of all other modes can be damped is found, and based on the Fourier method, the corresponding law of the damping force is obtained in the form of a series. A generalized formulation of the boundary value problem on moving the rod during this time to the zero terminal state is given, for which an algorithm for exact solution is proposed in the case of rational relations on the geometric parameters. Unknown functions of the rod state are sought in the form of a linear combination of the traveling wave and normal force functions, which are determined from a linear system of algebraic equations following from boundary relations and continuity conditions. The solutions obtained in series by the Fourier method and in the form of d'Alembert traveling waves are compared.

Keywords: elastic rod, piezoelectric forces, Fourier method, vibration damping, traveling waves

REFERENCES

1. *Butkovskii A.G.* Distributed Control Systems. N.Y.: Elsevier, 1970. 446 p.
2. *Lions J.L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. N.Y.: Springer, 1971. 400 p.
3. *Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A.* Control of Nonlinear Dynamical Systems: Methods and Applications. Berlin: Springer, 2008. 408 p.
4. *Chen G.* Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain. II // *SIAM J. Control Optimization*, 1981, vol. 19, no. 1, pp. 114–122.
5. *Romanov I.V., Shamaev A.S.* On a boundary controllability problem for a system governed by the two-dimensional wave equation // *J. Comput.&Syst. Sci. Int.*, 2019, vol. 58, no. 1, pp. 105–112.
6. *Gavrikov A.A., Kostin G.V.* Bending vibrations of an elastic rod controlled by piezoelectric forces // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, no. 8, pp. 2803–2817.
7. IEEE Standard on Piezoelectricity // *ANSI/IEEE Std 176-1987*. 1988.
<https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1988.79638>
8. *Kucuk I., Sadek I., Yilmaz Y.* Optimal control of a distributed parameter system with applications to beam vibrations using piezoelectric actuators // *J. Franklin Inst.*, 2014, vol. 351, no. 2, pp. 656–666.
9. *Kostin G.V., Saurin V.V.* Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.
10. *Kostin G., Gavrikov A.* Controllability and optimal control design for an elastic rod actuated by piezoelements // *IFAC-PapersOnLine*, 2022, vol. 55, no. 16, pp. 350–355.
<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.09.049>
11. *Gavrikov A.A., Kostin G.V.* Optimization of longitudinal motions of an elastic rod using periodically distributed piezoelectric forces // *J. Comput.&Syst. Sci. Int.*, 2023, vol. 62, no. 5, pp. 800–816.
12. *Kostin G., Gavrikov A.* Modeling and optimal control of longitudinal motions for an elastic rod with distributed forces // *ArXiv*, 2022, arXiv: 2206.06139v2, pp. 1–11.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.06139>
13. *Gavrikov A., Kostin G.* Optimal LQR control for longitudinal vibrations of an elastic rod actuated by distributed and boundary forces // *Mech.&Machine Sci.*, 2023, vol. 125, pp. 285–295.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-15758-5_28
14. *Ho L.F.* Exact controllability of the one-dimensional wave equation with locally distributed control // *SIAM J. Control&Optim.*, 1990, vol. 28, no. 3, pp. 733–748.
15. *Bruant I., Coffignal G., Lene F., Verge M.* A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures // *J. Sound&Vibr.*, 2001, vol. 243, no. 5, pp. 861–882.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3448>
16. *Gupta V., Sharma M., Thakur N.* Optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure: A technical review // *J. Intell. Mater. Syst.&Struct.*, 2010, vol. 21, no. 12, pp. 1227–1243.
<https://doi.org/10.1177/1045389X10381659>
17. *Botta F., Rossi A., Belfiore N.P.* A novel method to fully suppress single and bi-modal excitations due to the support vibration by means of piezoelectric actuators // *J. Sound&Vibr.*, 2021, vol. 510, no. 13, pp. 116260.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116260>
18. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* Equations of Mathematical Physics. Oxford: Pergamon, 1963. 800 p.
19. *Mikhlin S.G.* Mathematical physics; an Advanced Course. Amsterdam: North-Holland, 1971. 576 p.
20. *Yosida K.* Functional Analysis. Berlin: Springer, 1965. 504 p.