

УДК 531.36

О ДВИЖЕНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СИЛОВЫХ ПОЛЯХ, КАК ДВИЖЕНИИ В ИХ ОТСУТСТВИИ ПРИ НАЛОЖЕНИИ СВЯЗЕЙ

© 2024 Е. С. Брискин^{1,*}¹Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

*e-mail: dtm@vstu.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.

После доработки 10.07.2024 г.

Принята к публикации 22.07.2024 г.

Изучается возможность обратимости принципа освобождаемости от связей, широко используемого при решении задач механики. Формулируется обратное положение, в соответствии с которым движение системы не изменится, если игнорировать действующие на нее силы и наложить связи, реакции которых и обеспечивают исходное движение. В этом случае изучаемая механическая система получается из другой, с большим числом степеней свободы, на которую накладываются как голономные идеальные связи, так и неголономные, движение происходит в отсутствии действующих активных сил. Основной задачей является определение уравнений связей в расширенном пространстве конфигураций, однозначно порождающих заданные силовые поля в исходном пространстве.

Ключевые слова: принцип освобождаемости, обратимость, голономные связи, потенциальные силы, уравнения Лагранжа

DOI: 10.31857/S0032823524040034, EDN: WWFHDC

1. Введение. В механике известна аксиома об освобождаемости от связей. Так, например, в [1] она формулируется следующим образом: «Механическое состояние системы не изменится, если освободить ее от связей, приложив к точкам системы силы, равные реакциям связей». Для однозначного определения реакции связи требуется дополнительное условие [2]. Обычно принимается условие идеальности связи и тогда между той или иной связью и силой (реакцией связи) устанавливается однозначное соответствие. Применение принципа освобождения от связей предполагает увеличение числа степеней свободы исходной механической системы на число отброшенных связей.

Формулируется обратное положение, в соответствии с которым движение системы не изменится, если игнорировать действующие на нее силы и наложить связи, реакции которых и обеспечивают заданное движение [3, 4]. Такая аксиома для однозначного соответствия между силами и связями также требует дополнительных условий, например, их идеальности. В этом случае происходит обратное явление: изучаемая исходная механическая система получается из другой, с большим числом степеней свободы механической системы, на которую накладываются голономные идеальные связи, а движение происходит в отсутствии действующих активных сил. Таким образом основной задачей является определение уравнений связей в расширенном пространстве конфигураций, однозначно порождающих заданное силовое поле в исходном пространстве.

2. Постановка задачи. Как известно [1, 2, 5] изучение динамики движения механической системы с s степенями свободы на которую накладываются стационарные голономные связи можно осуществлять с помощью уравнений Лагранжа

$$a_{ij}\ddot{q}^j + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^n} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{nj}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^n \dot{q}^j = Q_i \quad (i, j, n = 1 \dots s) \quad (2.1)$$

В дифференциальных уравнениях (2.1) q^i – обобщенные координаты, a_{ij} – элементы матрицы инерционных коэффициентов, в общем случае зависящих от всех обобщенных координат, Q_i – обобщенные силы, зависящие от внешних стационарных, не зависящих от времени сил, действующих на механическую систему и соответствующие каждой i обобщенной координате. Повторяющиеся в (1.1) верхние и нижние индексы, как это принято в тензорном анализе [6] означают по ним суммирование.

Рассматривается и другая механическая система с $s + 1$ степенями свободы отличающаяся от исходной отсутствием внешних сил, генерирующих в (2.1) обобщенные силы Q_i , но дополненная уравнением движения относительно новой введенной координаты $q^{s+1}(t)$ и уравнением голономной идеальной связи между координатами $q^1, \dots, q^s, q^{s+1}$

$$f = f(q^1, \dots, q^s, q^{s+1}) = 0 \quad (2.2)$$

Ставится задача определения такого уравнения связи (2.2), которое при известном законе изменения координаты $q^{s+1}(t)$ обеспечивает те же законы изменения координат $q^i(t)$ новой рассматриваемой механической системы, как и у исходной при тех же начальных условиях. Если такая связь существует, то справедлив принцип обратный принципу освобождения от связей, а именно: можно игнорировать действующие на механическую систему силы и заменить их действие наложением связей.

3. Метод решения. Для новой рассматриваемой механической системы вводится матрица инерционных коэффициентов a_{pr}^* отличающаяся от такой же матрицы для исходной a_{ij} системы наличием дополнительной строки и столбца

$$a_{pr}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2s} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & a_{s+1,s+1} \end{pmatrix} \quad (p, r = 1 \dots s + 1) \quad (3.1)$$

Причем ненулевой элемент $a_{s+1,s+1}$ считается функцией обобщенных координат $q^1, \dots, q^s, q^{s+1}$. Такая структура матрицы инерционных коэффициентов соответствует ортогональности дополнительно введенной координаты q^{s+1} всем остальным. Примером такой новой механической системы может являться исходный плоский механизм с s степенями подвижности, которому сообщается движение, как единому целому, вдоль оси, ортогональной исходной поверхности.

С геометрической точки зрения такая матрица инерционных коэффициентов соответствует метрике расширенного риманова пространства, которое всегда может быть реализовано во вместилищем евклидовом пространстве размерность N которого определяется формулой [6]

$$N = \frac{(s+1)(s+2)}{2} \quad (3.2)$$

Кинетическая энергия T^* новой системы определяется выражением

$$T^* = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{1}{2} a_{s+1,s+1} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} \quad (3.3)$$

Тогда уравнения движения, составленные с помощью уравнений Лагранжа в отсутствии действия внешних сил можно разделить на две группы. В первую группу входят s уравнений, соответствующих s первым координатам

$$a_{ij}\ddot{q}^j + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^n} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{nj}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^n \dot{q}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{s+1,s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} \quad (i, j, n = 1 \dots s) \quad (3.4)$$

Во второй группе содержится только одно уравнение, составленное для $s + 1$ координаты

$$a_{s+1,s+1}\ddot{q}^{s+1} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{s+1,s+1}}{\partial q^{s+1}} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} = - \frac{\partial a_{s+1,s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^i \dot{q}^{s+1} \quad (3.5)$$

Для того чтобы уравнения (3.4) описывали движение исходной механической системы необходимо, чтобы инерционный коэффициент $a_{s+1,s+1}$ определялся из системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно координат $q^1, \dots, q^s$

$$Q_i = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{s+1,s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} \quad (3.6)$$

В уравнениях (3.6), в силу независимости Q_i от времени $\dot{q}^{s+1}$ должна быть величиной постоянной и рассматриваться как параметр. Результатом решения будет являться функция $a_{s+1,s+1} = \varphi_{s+1,s+1}$, зависящая от координат $q^1, \dots, q^s$ с точностью до аддитивной функции $\psi_{s+1,s+1}$, зависящей от дополнительно введенной координаты q^{s+1}

$$a_{s+1,s+1} = \varphi_{s+1,s+1}(q^1, \dots, q^s) + \psi_{s+1,s+1}(q^{s+1}) \quad (3.7)$$

Тогда уравнения (3.4) и (3.5) можно представить в форме

$$a_{ij}\ddot{q}^j + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^n} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{nj}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^n \dot{q}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_{s+1,s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} \quad (3.8)$$

$$\left(\psi_{s+1,s+1} + \varphi_{s+1,s+1} \right) \ddot{q}^{s+1} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_{s+1,s+1}}{\partial q^{s+1}} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} = - \frac{\partial \varphi_{s+1,s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^i \dot{q}^{s+1}$$

Такая структура уравнений (3.8) позволяет правые части полученных уравнений рассматривать как характеристики взаимодействия исходной системы, перемещающейся в исходном s -мерном пространстве конфигураций, с той же системой, но перемещающейся как твердое тело поступательно относительно дополнительно введенной координаты q^{s+1} . При отсутствии внешних сил Q_i , действующих на исходную систему, правые части уравнений в соответствии с (3.8) обращаются в нуль, рассматриваемые движения независимы, а кинетическая энергия в каждом движении сохраняется. При наличии внешних сил Q_i , действующих на исходную механическую систему, кинетическая энергия всей системы с учетом ее дополнительного движения также сохраняется. В процессе движения может осуществляться лишь перераспределение кинетической энергии между отдельными видами движения.

Особенность уравнения (3.6) состоит также в том, что рассматриваемый метод замены сил уравнениями связей может быть реализован только для потенциальных сил

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q^i}, \quad (3.9)$$

где Π – потенциальная энергия исходной механической системы.

Сопоставление (3.9) с (3.6) и (3.3) показывает, что потенциальная энергия Π исходной системы с точностью до аддитивной постоянной равна части кинетической энергии той же системы, определяемой поступательным движением как единого

твердого тела, с изменением дополнительно введенной виртуальной координаты q^{s+1} , ортогональной всем действительным координатам $q^1, \dots, q^s$.

Для того, чтобы уравнения имели форму уравнений Лагранжа с неопределенными множителями λ необходимо ввести уравнение связи (2.2), а правые части уравнений (3.8) представить в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_{s+1, s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial q^i} \\ - \frac{\partial \varphi_{s+1, s+1}}{\partial q^i} \dot{q}^i \dot{q}^{s+1} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial q^{s+1}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Уравнения (3.10) следует рассматривать как уравнения для определения уравнения связи (2.2) и неопределенного множителя λ . Этим уравнениям удовлетворяет решение

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \mu \dot{q}^{s+1} \dot{q}^{s+1} = \frac{1}{2} \mu v^2 = \text{const} \\ f &= \frac{1}{\mu} \left[\varphi_{s+1, s+1}(q^1 \dots q^s) + \frac{1}{2} \psi_{s+1, s+1}(q^{s+1}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где μ — произвольный нормирующий размерный постоянный множитель, позволяющий уравнение связи (2.2) представлять в безразмерной форме.

Следует иметь в виду, что решение (3.11) представлено с точностью до постоянного слагаемого.

Аддитивная функция $\psi_{s+1, s+1}$, входящая в (3.7), (3.8), (3.11) должна быть дифференцируемой функцией. Наиболее простой ее вид

$$\psi_{s+1, s+1} = \mu q^{s+1} \quad (3.12)$$

Тогда из (3.11) можно установить связь введенной дополнительной координаты q^{s+1} , со всеми обобщенными координатами изначально рассматриваемой механической системы (2.1)

$$\mu q^{s+1} = a_{s+1, s+1}(q^1, \dots, q^{s+1}) - \varphi_{s+1, s+1}(q^1, \dots, q^s) \quad (3.13)$$

4. Метод Г. Герца и «скрытые движения». Рассматриваемый метод игнорирования действующих на механическую систему сил и замена их связями согласуется с идеями Герца [7], которые А. Пуанкаре сформулировал следующим образом [8]:

1. «В природе имеются лишь системы со связями, свободные от действия любой внешней силы».

2. «Если некоторые тела кажутся нам подчиненными каким-либо силам, это значит, что они связаны с другими телами, для нас невидимыми».

Однако, по мнению К. Ланцош [9, стр. 157–158], «эта любопытная гипотеза так и осталась в виде эскизных набросков», хотя «теория относительности ... дала эффективный пример бессиловой механики Герца».

Вместе с тем имеются и некоторые отличия от предлагаемого Герцем метода. В частности, в бессиловой механике обязательно вводятся циклические координаты, за счет чего получают первые интегралы движения. Поэтому и возникает возможность формировать воздействия на изучаемую механическую систему и трактовать эти воздействия как силы.

Действительно, если материальная точка движется по поверхности вращения и ее положение определяется координатами $u^1 u^1$ и $u^2 = \varphi$ (рис. 1), то ее кинетическая энергия T будет определяться выражением

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{u}^1)^2 + \frac{1}{2}mr^2(u^1)\dot{\phi}^2, \quad (4.1)$$

где $r(u^1)$ — радиус окружности в сечении поверхности с координатой u^1 , ϕ циклическая координата.

Тогда, при отсутствии внешних активных сил, рассматривая поверхность вращения как идеальную связь, можно получить дифференциальные уравнения движения

$$\begin{aligned} m\ddot{u}^1 - mru^1 \frac{dr}{du^1} \dot{\phi}^2 &= 0 \\ mr^2(u^1)\dot{\phi} &= K = \text{const} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Второе уравнение в (6.2) — и есть первый интеграл, а физический смысл постоянной K — момент количества движения точки относительно оси Ox^3 .

Теперь можно считать, что на материальную точку действует сила Q , направленная по касательной к координатной оси u^1 в каждой точке траектории

$$Q(u_1) = \frac{K^2}{m} \frac{1}{r^3} \frac{dr}{du^1} = \frac{K^2}{2mr_0^2} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(-\frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad (4.3)$$

где r_0 — радиус окружности в начальном сечении поверхности вращения.

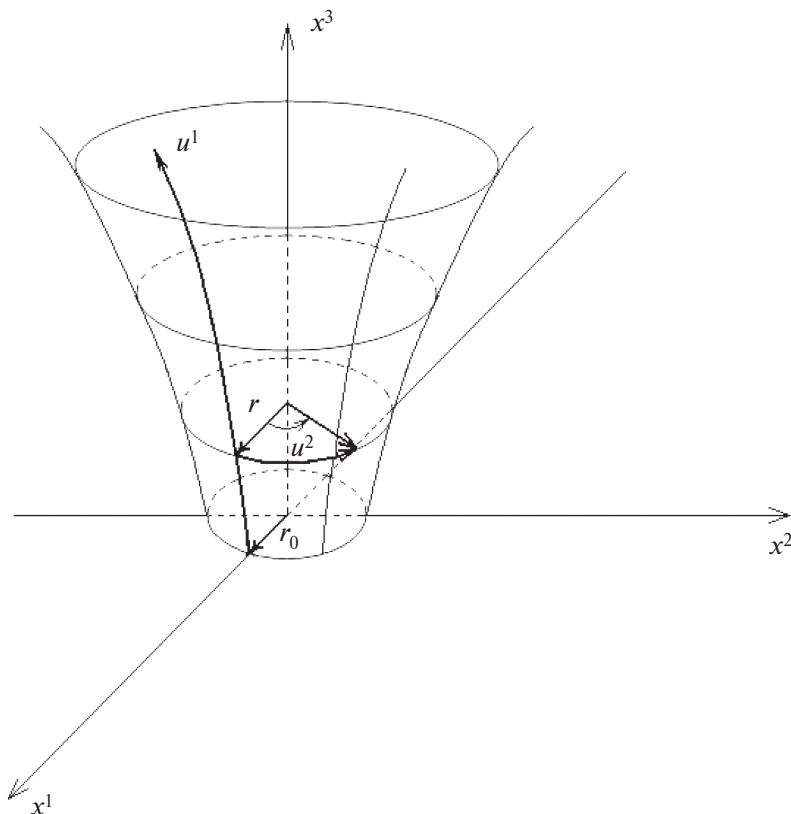


Рис. 1. Поверхность, соответствующая голономной связи, генерирующей активную силу $Q = Q(u^1)$

Предлагаемый метод учета сил наложением связей не предполагает наличия циклических координат, но первый интеграл имеется — постоянство и равенство скоростей всех точек рассматриваемой механической системы, перемещающейся относительно дополнительно введенной координаты ортогональной всем остальным.

5. Одномерное движение материальной точки массы m под действием различных сил

Уравнение для исходной механической системы согласно (2.1) имеет вид

$$m\ddot{q}^1 = Q(q^1) \quad (5.1)$$

Вводится координата q^2 и определяется инерционный коэффициент $a_{22}(q^1, q^2)$ из уравнения типа (3.6) при $\dot{q}^2 = v = \text{const}$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial q^1} = \frac{1}{v^2} Q(q^1) \quad (5.2)$$

Тогда кинетическая энергия новой механической системы в соответствии с (3.3) определяется выражением

$$T^* = \frac{1}{2} m(\dot{q}^1)^2 + \frac{1}{2} a_{22}(\dot{q}^2)^2 \quad (5.3)$$

В этом случае уравнения (3.8) приобретают форму

$$m\ddot{q}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial q^1} v^2 \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial q^2} v^2 = -\frac{\partial a_{22}}{\partial q^1} \dot{q}^1 v,$$

но в соответствии с (3.7) и (3.12)

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial q^1} \dot{q}^1 = \frac{\partial \Psi_{s+1, s+1}}{\partial q^1} \dot{q}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_{s+1, s+1}}{\partial q^2} v, \quad (5.5)$$

и поэтому второе уравнение в (5.4) обращается в тождество, а первое уравнение преобразуется к форме уравнения Лагранжа с неопределенным множителем

$$m\ddot{q}^1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial q^1}, \quad (5.6)$$

где λ и $f(q^1, q^2)$ определяется в соответствии с (3.10), (3.11).

5.1. Действие постоянной силы $Q = \text{const}$

Тогда

$$a_{22} = \frac{2Q}{v^2} q^1 + \mu q^2, \quad \lambda = \frac{1}{2} \mu v^2, \quad f = \frac{2Q}{\mu v^2} q^1 + \frac{1}{2} q^2 = 0 \quad (5.7)$$

Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{q}^1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial q^1} = Q \quad (5.8)$$

5.2. Действие восстанавливающей силы, пропорциональной координате $Q = -kq^1$

Тогда

$$a_{22} = -\frac{k(q^1)^2}{v^2} + \mu q^2, \quad \lambda = \frac{1}{2} \mu v^2, \quad f = -\frac{k(q^1)^2}{\mu v^2} + \frac{1}{2} q^2 = 0 \quad (5.9)$$

Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{q}^1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial q^1} = -kq^1 \quad (5.10)$$

5.3. Действие силы притяжения $Q = -\gamma / q^{1^2}$

Тогда

$$a_{22} = \frac{2\gamma}{v^2 q^1} + \mu q^2, \quad \lambda = \frac{1}{2} \mu v^2, \quad f = -\frac{2\gamma}{\mu v^2 q^1} + q^2 = 0 \quad (5.11)$$

Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{q}^1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial q^1} = -\frac{\gamma}{q^{1^2}} \quad (5.12)$$

На рис. 2 для всех трех примеров для наглядности представлены графики зависимостей уравнений голономных связей для рассматриваемых случаев. Размерности параметров, при которых построены графики согласуются с размерностями обобщенных координат q^1 и q^2 .

Выводы. Рассмотренный метод замещения действующих на механическую систему потенциальных сил, не зависящих от времени, соответствует концепции Г. Герца о «скрытых движениях». Отличие состоит в необязательности введения циклических координат и в отсутствии придания формальному механико-математическому методу физической сущности. Практическая значимость предложенного метода не очевидна, но может состоять в более глубоком понимании равноправности решения задач механики как с помощью введения в расчетную схему решаемой задачи сил, подчиняющихся той или иной закономерности или уравнений связи.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00477, <https://rscf.ru/project/24-21-00477/>

Автор выражает благодарность участникам семинара по теории управления и динамике систем ИПМех РАН под руководством академика Черноусько Ф.Л. за ценные замечания, способствующие улучшению содержания статьи.

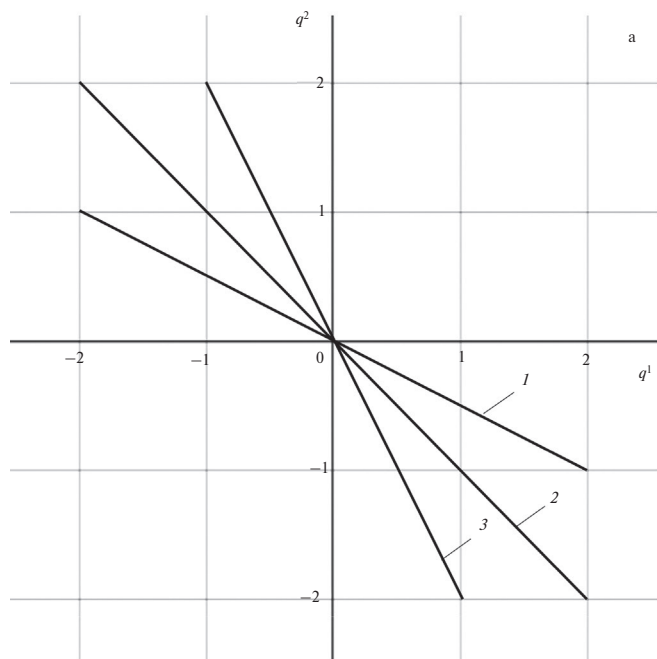


Рис. 2а. Графическое представление уравнений голономных связей: 1–3: $\frac{4Q}{\mu v^2} = -\frac{1}{2}, -1, -2$

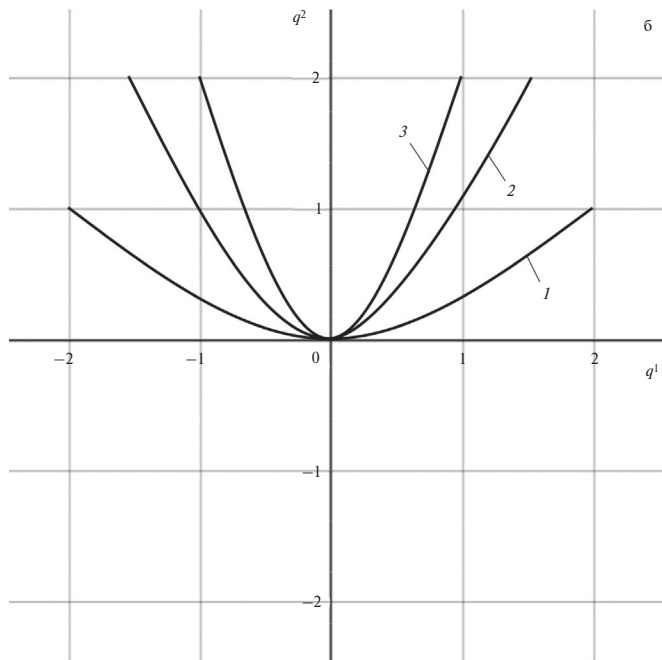


Рис. 26. Графическое представление уравнений голономных связей: $Q = -kq^1$, 1–3: $\frac{2k}{\mu v^2} = 0.25, 1, 2$

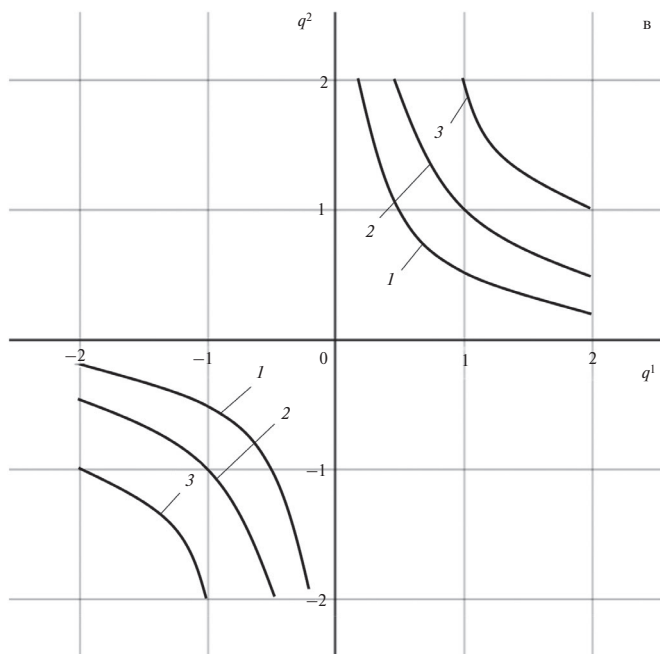


Рис. 27. Графическое представление уравнений голономных связей: $Q = \gamma / v^2 q^1$, 1–3: $\frac{2\gamma}{\mu v^2} = 0.5, 1, 2$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т. 1 М.: Наука. 1972. 456 с.
2. Добронравов В.В. Основы аналитической механики. М.: Высшая школа. 1976. 262 с.
3. Брискин Е.С. Исследование динамики материальной точки на основе замены силовых полей связями // Вопр. мат. физ. и прикл. матем.: матер. сем., СПб, 18 декабря 2006 г. Санкт-Петербург: Физ.-тех. ин-т им. А.Ф. Иоффе РАН, 2007. С. 264–271.
4. Брискин Е.С. Обратимости принципа освобожденности от связей // в сб.: Теоретическая механика. Вып. 28 / под ред. Мартыненко Ю.Г. М.: Изд-во МГУ, 2012. 224 с.
5. Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику. М.: Наука. 1991. 255 с.
6. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука. 1967. 664 с.
7. Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи / под общ. ред. Артоболевского И.И. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 386 с.
8. Пуанкаре А. Идеи Герца в механике // в кн.: Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи / под общ. ред. Артоболевского И.И. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 310–333.
9. Ланцош К. Вариационные принципы механики / под ред. Полака Л.С. М.: Мир, 1965. 408 с.

**On the Motion of Mechanical Systems in Force Fields,
as Motion in Their Absence when Connections Are Applied**

E. S. Briskin^{a, #}

^aVolgograd State Technical University, Volgograd, Russia

[#]e-mail: dtm@vstu.ru

The possibility of reversibility of the principle of release from connections, widely used in solving problems of mechanics, is studied. The opposite position is formulated, according to which the movement of the system will not change if the forces acting on it are ignored and connections are imposed, the reactions of which provide the initial movement. In this case, the studied mechanical system is obtained from another, with a large number of degrees of freedom, on which both holonomic ideal connections and nonholonomic ones are superimposed, and movement occurs in the absence of active active forces. The main task is to determine the equations of relations in an expanded space of configurations that uniquely generate given force fields in the original space.

Keywords: principle of releasing, reversibility, holonomic connections, potential forces, Lagrange equations

REFERENCES

1. Kil'chevskiy N.A. Course of Theoretical Mechanics. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1972. 456 p. (in Russian)
2. Dobronravov V.V. Fundamentals of Analytical Mechanics. Moscow: Vysshaya shkola, 1976. 262 p. (in Russian)
3. Briskin E.S. Investigation of the dynamics of a material point based on the replacement of force fields by connections // Vopr. Matem. Fiziki i Prikl. Matem.: Materialy Sem., SPb, Dec 18, 2006 Sankt-Peterburg: Ioffe Institute of the RAS, 2007, pp. 264–271. (in Russian)
4. Briskin E.S. On the reversibility of the principle of freedom from connections // in: Teoreticheskaya Mekhanika. no. 28 / ed. by Martynenko Yu.G. Moscow: MSU Pub., 2012. 224 p. (in Russian)
5. Butenin N.V., Fufayev N.A. Introduction to Analytical Mechanics. Moscow: Nauka, 1991. 255 p. (in Russian)
6. Rashevskiy P.K. Riemann's Geometry and Tensor Analysis. Moscow: Nauka, 1967. 664 p. (in Russian)
7. Gerts G. Principles of Mechanics Set Forth in a New Connection. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1959. 386 p. (in Russian)
8. Puankare A. Hertz's Ideas in Mechanics // in: Hertz G. Principles of Mechanics Set Forth in a New Connection. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1959. pp. 310–333. (in Russian)
9. Lantsosh K. Variational Principles of Mechanics. Moscow: Mir, 1965, 408 p. (in Russian)