

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ПММ)

т. 87, вып. 5



МОСКВА 2023

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 87. Iss. 5

EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),
N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),
A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute
(TsAGI), Zhukovsky, Russia),
M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),
Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),
A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),
A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk, Russia),
V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),
A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic
University, St. Petersburg, Russia),
A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),
Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),
T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),
F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member,
Technische Universität München, Munich, Germany),
V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
RAS, Novosibirsk, Russia),
G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),
S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),
Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.E. Udwalia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),
S.E. Yakush (Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),
V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),
K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko,
A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov,
S.V. Nesterov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian,
I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

September–October

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

О кинематическом описании движения твердого тела <i>А. Г. Петров</i>	711
О расщеплении сепаратрис, отвечающих рабочему режиму регулятора Уатта <i>А. П. Маркеев</i>	720
Динамика малых спутников с трехосным гравитационным демпфером <i>В. С. Асланов, А. В. Дорошин</i>	729
Применение метода быстрых разложений к построению траектории движения тела переменной массы из его начального положения в заданное конечное в гравитационном поле <i>А. Д. Чернышов, М. И. Попов, В. В. Горайнов, О. Ю. Никифорова</i>	742
Использование метода ускоренной сходимости для решения сингулярной задачи Штурма–Лиувилля <i>С. В. Нестеров</i>	757
Автоколебания и предельный цикл для осциллятора Релея с кубической возвращающей силой <i>С. А. Кумакиев</i>	765
Скорейшее перемещение системы взаимодействующих материальных точек вдоль шероховатой горизонтальной прямой <i>И. М. Ананьевский</i>	773
Об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, главные моменты инерции которого находятся в отношении 1 : 4 : 1 <i>Б. С. Бардин, Б. А. Максимов</i>	784
Изгибные колебания упругого стержня, управляемого пьезоэлектрическими силами <i>А. А. Гавриков, Г. В. Костин</i>	801
Ограниченные и гладкие управления колебаниями в системах, заданных дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями <i>Т. Н. Бобылева, И. М. Гусев, А. С. Шамаев</i>	820
Об интегральных воронках управляемых систем, изменяемых на нескольких малых промежутках времени <i>В. Н. Ушаков, А. А. Ершов, А. В. Ушаков</i>	829
Краевые углы лежащей капли и поджатого пузырька с учетом размерной зависимости поверхностного натяжения <i>А. А. Сокуров</i>	862
Применение мультипольного разложения для задач распространения звукового удара <i>А. А. Корняков, В. Г. Судаков, А. С. Щеглов</i>	869
К релаксации напряжений в изогнутой вязкоупругой разнсопротивляющейся пластине <i>Г. М. Севастьянов</i>	883

C O N T E N T S

On the Kinematic Description of the Motion of a Rigid Body <i>A. G. Petrov</i>	711
On Splitting of Separatrices Corresponding to the Working Mode of the Watt Regulator <i>A. P. Markeev</i>	720
The Dynamics of Small Satellites with the Three-Axial Gravitational Damper <i>V. S. Aslanov, A. V. Doroshin</i>	729
Application of the Method of Fast Expansions to Construction of a Trajectory of Movement of a Body with Variable Mass from Its Initial Position in a Gained Final Position in a Gravitational Field <i>A. D. Chernyshov, M. I. Popov, V. V. Goryainov, O. Yu. Nikiforova</i>	742
Using the Accelerated Convergence Method for Solving the Singular Sturm–Liouville Problem <i>S. V. Nesterov</i>	757
Self-sustained Oscillations and Limit Cycles in Rayleigh System with Cubic Return Force <i>S. A. Kumakshev</i>	765
Fastest Motion of a System of Interacting Mass Points along a Rough Horizontal Straight Line <i>I. M. Ananievski</i>	773
On the Orbital Stability of Pendulum Periodic Motions of a Heavy Rigid Body with a Fixed Point, the Main Moments of Inertia of which are in the Ratio 1 : 4 : 1 <i>B. S. Bardin, B. A. Maksimov</i>	785
Bending Vibrations of an Elastic Rod Controlled by Piezoelectric Forces <i>A. A. Gavrikov, G. V. Kostin</i>	801
Limited and Smooth Controls of Oscillations in Systems Given by Differential and Integro-Differential Equations <i>T. N. Bobyleva, I. A. Gusev, A. S. Shamaev</i>	820
On Integral Funnel of Control Systems, Changed at Several Small Time Interval <i>V. N. Ushkov, A. A. Ershov, A. V. Ushkov</i>	829
On the Contact Angles of a Small Sessile Drop and a Captive Bubble in View of the Size Dependence of Surface Tension <i>A. A. Sokurov</i>	862
Application of Multipole Decomposition for Sonic Boom Propagation Problems <i>A. A. Korniyakov, V. G. Soudakov, A. S. Shcheglov</i>	869
Stress Relaxation in Bended Viscoelastic Plate with Tension-Compression Asymmetry <i>G. M. Sevastyanov</i>	883

УДК 531.012

О КИНЕМАТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2023 г. А. Г. Петров^{1,*}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: petrovipmech@gmail.com

Поступила в редакцию 21.02.2023 г.

После доработки 19.06.2023 г.

Принята к публикации 15.07.2023 г.

Выведена система обыкновенных дифференциальных уравнений для вектора конечного поворота, соответствующего теореме Эйлера: вектор конечного поворота направлен по оси конечного поворота твердого тела и его длина равна углу плоского поворота вокруг этой оси. Система уравнений явно разрешена относительно производной по времени компонент вектора поворота. Правая часть системы зависит от вектора поворота и вектора угловой скорости в главных осях. Показана эквивалентность полученной системы уравнений системе уравнений для кватернионов. Координаты ортов главных осей твердого тела в неподвижных осях выражены через углы конечного поворота и компоненты угловой скорости по простым аналитическим формулам.

Ключевые слова: теорема Эйлера о конечном повороте, кинематика твердого тела, кватернион, ориентация

DOI: 10.31857/S0032823523050120, EDN: QPJYLE

1. Введение. Согласно теореме Эйлера [1] любое перемещение твердого тела с одной неподвижной точкой может быть заменено плоским поворотом вокруг некоторой оси на некоторый угол. Таким образом, ориентацию твердого тела в пространстве можно однозначно определить с помощью вектора поворота $\boldsymbol{\varphi}$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \theta \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, направленный по оси поворота, θ — угол плоского поворота.

Поставим задачу описать движение твердого тела с неподвижной точкой под действием заданного момента сил с помощью вектора поворота $\boldsymbol{\varphi}$ или иначе с помощью параметров $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Теорема Эйлера гарантирует однозначность ориентации твердого тела при заданном векторе $\boldsymbol{\varphi}$, что дает преимущество по сравнению с другими параметрами, которые такой однозначности не имеют.

Следует иметь в виду, что между вектором $\boldsymbol{\varphi}$ и положением тела в пространстве нет взаимно однозначного соответствия. Заданный вектор $\boldsymbol{\varphi}$ определяет одно положение тела в пространстве, а обратное не верно. Одному и тому же положению тела в пространстве соответствует счетное число значений вектора $\boldsymbol{\varphi}$

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{e}(\theta_0 + 2\pi n); \quad -\pi < \theta_0 \leq \pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.2)$$

Наиболее простым и часто используемым способом описания ориентации твердого тела в настоящее время является кватернионное описание. Параметры Родрига–Гамильтона кватерниона $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ выражаются через единичный вектор $\mathbf{e}$ и угол θ (1.1): $\lambda_0 = \cos \theta/2$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e} \sin \theta/2$. Большую роль в популяризации идеи использования кватернионов сыграла книга [2], в которой отражены основные аспекты алгебры кватернионов применительно к практическим задачам исследования углового движения твердых тел. Этот подход представлен во многих современных учебниках, например, [1–3]. Ряд задач динамики космического полета в кватернионной постановке рассмотрен в монографии [4] и во многих научных статьях других авторов. В [5] представлен подробный обзор работ об ориентации твердого тела с помощью параметров Родрига–Гамильтона и связи их с углами конечного поворота.

Ниже излагается альтернативный способ реализации ориентации твердого тела с помощью ортогональной матрицы $C(\boldsymbol{\varphi})$ следующим образом.

Введем абсолютную инерциальную систему координат (АСК) и систему координат, скрепленную с твердым телом (ССК). Векторы в подвижной системе будем помечать индексом “*”. Пусть $\mathbf{R}_*$ – независящий от времени радиус-вектор материальной точки твердого тела в ССК. Тогда радиус-вектор $\mathbf{R}$ этой точки в АСК связан с $\mathbf{R}_*$ так:

$$\mathbf{R} = C(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{R}_*, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_* = \begin{pmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Поставим задачу: определить зависимость компонент матрицы $C(\boldsymbol{\varphi})$ от компонент векторного аргумента $\boldsymbol{\varphi}$ и затем вывести для него дифференциальное уравнение в виде $d\boldsymbol{\varphi}/dt = f(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}_*)$, где $\boldsymbol{\omega}_*$ – вектор угловой скорости в осях твердого тела.

Для решения этой задачи введем единичную матрицу E и антисимметричную матрицу $A(\mathbf{X})$, зависящую от векторного аргумента $\mathbf{X}$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0 & -X_3 & X_2 \\ X_3 & 0 & -X_1 \\ -X_2 & X_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad A(\mathbf{X})\mathbf{R} = \mathbf{X} \times \mathbf{R} \quad (1.4)$$

2. Определение матрицы поворотов $C(\boldsymbol{\varphi})$. Докажем, что формула

$$C(\boldsymbol{\varphi}) = E + A(\mathbf{e}) \sin \theta + A(\mathbf{e})^2 (1 - \cos \theta), \quad (2.1)$$

где векторы $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{e}$ определены формулами (1.1), является решением поставленной задачи, то есть матрица $C(\boldsymbol{\varphi})$ 1) является ортогональной и 2) определяет поворот около оси $\mathbf{e}$ на угол θ .

1) Ортогональность матрицы (2.1) можно доказать, учитывая симметрию матрицы $A(\mathbf{e})^2$ и следующие равенства

$$A(\mathbf{e})^3 = -A(\mathbf{e}), \quad A(\mathbf{e})^4 = -A(\mathbf{e})^2 \quad (2.2)$$

Отсюда для транспонированной матрицы получаем

$$C(\boldsymbol{\varphi})^T = C(-\boldsymbol{\varphi}) = E - A(\mathbf{e}) \sin \theta + A(\mathbf{e})^2 (1 - \cos \theta), \quad C(\boldsymbol{\varphi})C(\boldsymbol{\varphi})^T = E, \quad (2.3)$$

что и требовалось доказать. (Учитывая равенство $\boldsymbol{\varphi} = \theta \mathbf{e}$, изменение знака у вектора $\boldsymbol{\varphi}$ равносильно изменению знака либо у θ либо у вектора $\mathbf{e}$.)

2) Докажем, что преобразование $\mathbf{R} = C(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{R}_*$ является поворотом около оси $\mathbf{e}$ на угол θ . Введем единичные базисные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Вектор $\mathbf{k}$ направим по вектору $\mathbf{e}$,

остальные два перпендикулярно ему, так чтобы выполнялись соотношения $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Заметим также, что выполняются равенства

$$A(\mathbf{k})\mathbf{R}_* = \mathbf{k} \times \mathbf{R}_*, \quad A(\mathbf{k})^2\mathbf{R}_* = \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_*) = \mathbf{k}R_3^* - \mathbf{R}_*$$

С помощью их преобразование примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= C(\varphi)\mathbf{R}_* = \mathbf{R}_* + \sin \theta (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_*) + (1 - \cos \theta) \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_*) = \\ &= \mathbf{R}_* + \sin \theta (\mathbf{j}R_1^* - \mathbf{i}R_2^*) + (1 - \cos \theta) (\mathbf{k}R_3^* - \mathbf{R}_*) \end{aligned}$$

Для проекций на базисные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ получим

$$R_1 = \cos \theta R_1^* - \sin \theta R_2^*, \quad R_2 = \sin \theta R_1^* + \cos \theta R_2^*, \quad R_3 = R_3^*$$

Это есть преобразование поворота около оси $\mathbf{k} = \mathbf{e}$ на угол θ , что и требовалось доказать.

3. Векторы в неподвижных и подвижных осях. Абсолютную инерциальную систему координат (АСК) будем называть системой с неподвижными осями, а систему координат, скрепленную с твердым телом (ССК) — системой с подвижными осями. Векторы в подвижной системе будем помечать индексом “*”. Векторы $\mathbf{a}$ в неподвижных осях и $\mathbf{a}_*$ — в подвижных осях имеют разные компоненты. Их вектор столбцы связаны соотношениями

$$\mathbf{a} = C(\varphi)\mathbf{a}_*, \quad \mathbf{a}_* = C(-\varphi)\mathbf{a}, \quad (3.1)$$

где матрицы $C(\varphi)$ и $C(-\varphi)$ определяются по формулам (2.1) и (2.3) соответственно.

Покажем, что векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}_*$ в неподвижных и подвижных осях имеют одни и те же компоненты. Действительно, пользуясь формулами (3.1) и (2.3), получим

$$\mathbf{e}_* = C(-\varphi)\mathbf{e} = \mathbf{e} - \sin \theta \mathbf{e} \times \mathbf{e} + (1 - \cos \theta) \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{e}) = \mathbf{e}, \quad (3.2)$$

что и требовалось показать.

Из (3.2) и (1.1) заключаем, что векторы φ и φ_* в неподвижных и подвижных осях имеют тоже одни и те же компоненты

$$\varphi = \varphi_* \quad (3.3)$$

4. Распределение скорости в твердом теле в неподвижных осях (АСК) можно получить, дифференцируя по времени преобразование $\mathbf{R} = C(\varphi)\mathbf{R}_*$ при постоянном $\mathbf{R}_*$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \left(\frac{d}{dt} C(\varphi) \right) \mathbf{R}_* = \left(\frac{d}{dt} C(\varphi) \right) C(-\varphi) \mathbf{R}$$

Откуда следует

$$\mathbf{v} = A(\omega)\mathbf{R}, \quad A(\omega) = \left(\frac{d}{dt} C(\varphi) \right) C(-\varphi) \quad (4.1)$$

Из тождества

$$A(\omega) + A^T(\omega) = \left(\frac{d}{dt} C(\varphi) \right) C(-\varphi) + C(\varphi) \frac{d}{dt} C(-\varphi) = \frac{d}{dt} (C(\varphi)C(-\varphi)) = 0 \quad (4.2)$$

следует антисимметричность матрицы $A(\omega)$. Угловой скоростью ω в неподвижных

осях является аргумент антисимметричной матрицы $A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$, а форму-

ла (4.1) является формулой Эйлера распределения скоростей в твердом теле

$$\mathbf{v} = A(\omega)\mathbf{R} = \omega \times \mathbf{R} \quad (4.3)$$

Угловая скорость в неподвижных осях определяется формулой

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e} + \dot{\epsilon}\sin\theta + (1 - \cos\theta)(\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}), \quad (4.4)$$

где векторы $\mathbf{e}, \dot{\epsilon}$ и $(\mathbf{e} \times \dot{\epsilon})$ образуют тройку взаимно-ортогональных векторов, а приведенные формулы — разложения угловых скоростей по этим векторам. (Доказательство приведено в приложении.)

Закон Эйлера для распределения скоростей в подвижных осях имеет вид

$$\mathbf{v}_* = C(-\boldsymbol{\varphi})\mathbf{v} = A(\boldsymbol{\omega}_*)\mathbf{R}_*, \quad \boldsymbol{\omega}_* = \dot{\theta}\mathbf{e} + \dot{\epsilon}\sin\theta - (1 - \cos\theta)(\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}) \quad (4.5)$$

(Доказательство приведено в приложении.)

5. Динамика твердого тела. Известно, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_*(p, q, r)$ в главных осях твердого тела при заданном моменте сил $\mathbf{M}$ можно найти из уравнений Эйлера [1]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_*}{dt} + \boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{K}_* &= \mathbf{M} \Rightarrow \\ J_1 \frac{dp}{dt} + (J_3 - J_2)qr &= M_1 \\ J_2 \frac{dq}{dt} + (J_1 - J_3)rp &= M_2 \\ J_3 \frac{dr}{dt} + (J_2 - J_1)qp &= M_3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

6. Кинематика твердого тела. Предположим, что вектор угловой скорости как функция времени $\boldsymbol{\omega}_*(t)$ найдена из уравнений динамики. Поставим задачу: по известному вектору $\boldsymbol{\omega}_*(t)$ вычислить вектор координат твердого тела $\boldsymbol{\varphi}(t)$ и найти матрицу $C(\boldsymbol{\varphi})$ (2.1), определяющую ориентацию твердого тела в пространстве. Будем исходить из уравнения (4.5), с помощью которого выведем систему уравнений для компонент вектора $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{e})$. Умножая скалярно и векторно уравнение (4.5) на $\mathbf{e}$, получим

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}) \\ (\mathbf{e} \times \dot{\epsilon})\sin\theta - (1 - \cos\theta)\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}) &= \sin\theta(\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}) + (1 - \cos\theta)\dot{\epsilon} = \mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_* \end{aligned} \quad (6.1)$$

Последнее уравнение и уравнение (4.5) можно привести к системе уравнений

$$\begin{aligned} \sin\theta(\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}) + (1 - \cos\theta)\dot{\epsilon} &= \mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_* \\ -(1 - \cos\theta)(\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}) + \sin\theta\dot{\epsilon} &= \boldsymbol{\omega}_* - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_*) = -\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_*) \end{aligned}$$

Ее удобно записать в матричной форме

$$2\sin\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \times \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_* \\ -\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_*) \end{pmatrix}$$

Матрица в левой части ортогональна и система легко разрешается относительно $\mathbf{e} \times \dot{\epsilon}$ и $\dot{\epsilon}$. Откуда найдем

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2}(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_*) - \frac{1}{2\operatorname{tg}(\theta/2)}(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}_*)) \Rightarrow \\ \dot{\epsilon}\theta &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*) - \frac{1}{2\theta\operatorname{tg}(\theta/2)}(\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*)) \end{aligned} \quad (6.2)$$

С помощью (6.1) получим

$$\mathbf{e}\dot{\theta} = \frac{1}{\theta^2} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\omega}_* \cdot \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\theta^2} (\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*)) + \boldsymbol{\omega}_* \quad (6.3)$$

Складывая (6.2) и (6.3), находим

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{e}\dot{\theta} + \boldsymbol{\omega}_* = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*) - \frac{1}{2\theta \operatorname{tg}(\theta/2)} (\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*)) + \frac{1}{\theta^2} (\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*)) + \boldsymbol{\omega}_*$$

Таким образом, получаем требуемое уравнение относительно $\boldsymbol{\varphi}(t)$. Его удобно записать в векторном виде

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}_* + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_*) + \Phi(\varphi^2) (\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\omega}_*) - \varphi^2 \boldsymbol{\omega}_*), \quad (6.4)$$

и получить из него систему уравнений для трех компонент $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ вектора

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= p + \frac{1}{2} (\varphi_2 r - \varphi_3 q) + \Phi(\varphi^2) (\varphi_1 (\varphi_2 q + \varphi_3 r) - p (\varphi_2^2 + \varphi_3^2)) \\ \dot{\varphi}_2 &= q + \frac{1}{2} (\varphi_3 p - \varphi_1 r) + \Phi(\varphi^2) (\varphi_2 (\varphi_3 r + \varphi_1 p) - q (\varphi_3^2 + \varphi_1^2)) \\ \dot{\varphi}_3 &= r + \frac{1}{2} (\varphi_1 q - \varphi_2 p) + \Phi(\varphi^2) (\varphi_3 (\varphi_1 p + \varphi_2 q) - r (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)) \\ \Phi(\varphi^2) &= \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{2\theta \operatorname{tg}(\theta/2)}, \quad \varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \theta^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Начальные значения углов следует положить равными нулю

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_3(0) = 0 \quad (6.6)$$

Здесь p, q, r — компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_*$, которые находятся из системы динамических уравнений Эйлера (5.1) для движения твердого тела с закрепленной точкой. В каждый момент времени единичные векторы главных осей твердого тела $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ находятся с помощью матрицы поворота $C(\boldsymbol{\varphi})$ (2.1) по формулам

$$\mathbf{i}(t) = C(\boldsymbol{\varphi}(t)) \mathbf{i}_0, \quad \mathbf{j}(t) = C(\boldsymbol{\varphi}(t)) \mathbf{j}_0, \quad \mathbf{k} = C(\boldsymbol{\varphi}(t)) \mathbf{k}_0 \quad (6.7)$$

Направим неподвижные оси по главным осям твердого тела в начальный момент времени $t^2 = 0$, то есть зададим их вектор-столбцы в виде

$$\mathbf{i}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Тогда с помощью (2.1) формулы (6.7) приведутся к виду

$$\mathbf{i}(t) = \begin{pmatrix} (1 - \cos \theta) e_1 e_1 + \cos \theta \\ (1 - \cos \theta) e_1 e_2 + \sin \theta e_3 \\ (1 - \cos \theta) e_1 e_3 - \sin \theta e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_2 \varphi_1 \varphi_1 + \cos \theta \\ \Phi_2 \varphi_1 \varphi_2 + \Phi_1 \varphi_3 \\ \Phi_2 \varphi_1 \varphi_3 - \Phi_1 \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}(t) &= \begin{pmatrix} (1 - \cos \theta)e_2e_1 - \sin \theta e_3 \\ (1 - \cos \theta)e_2e_2 + \cos \theta \\ (1 - \cos \theta)e_2e_3 + \sin \theta e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_2\varphi_2\varphi_1 - \Phi_1\varphi_3 \\ \Phi_2\varphi_2\varphi_2 + \cos \theta \\ \Phi_2\varphi_2\varphi_3 + \Phi_1\varphi_1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{k}(t) &= \begin{pmatrix} (1 - \cos \theta)e_3e_1 + \sin \theta e_2 \\ (1 - \cos \theta)e_3e_2 - \sin \theta e_1 \\ (1 - \cos \theta)e_3e_3 + \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_2\varphi_3\varphi_1 + \Phi_1\varphi_2 \\ \Phi_2\varphi_3\varphi_2 - \Phi_1\varphi_1 \\ \Phi_2\varphi_3\varphi_3 + \cos \theta \end{pmatrix} \\
\Phi_1 &= \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad \Phi_2 = \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}, \quad \theta^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Входящую в уравнение (6.5) функцию Φ и в выражения для осей функции Φ_1, Φ_2 удобно вычислять с помощью быстро сходящихся рядов по параметру $\varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \theta^2$

$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi^2) &= \frac{1}{12} + \frac{\varphi^2}{720} + \frac{\varphi^4}{30240} + \frac{\varphi^6}{1209600} + \frac{\varphi^8}{47900160} + \dots \\
\Phi_1(\varphi^2) &= 1 - \frac{\varphi^2}{3!} + \frac{\varphi^4}{5!} - \dots, \quad \Phi_2(\varphi^2) = \frac{1}{2!} - \frac{\varphi^2}{4!} + \frac{\varphi^4}{6!} - \dots
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Таким образом особенности при $\varphi^2 = 0$ в этих функциях устраняется. На отрезке $\varphi^2 < \pi^2$ в функциях $\Phi(\varphi^2), \Phi_1(\varphi^2), \Phi_2(\varphi^2)$ достигается семи знаков точности, если учесть в них 8, 7 и 6 членов ряда соответственно.

Значения ортов $\mathbf{i}(t), \mathbf{j}(t), \mathbf{k}(t)$ не изменятся при заменах $\theta = \theta' \pm 2\pi$, $\varphi = \varphi' \frac{\theta' \pm 2\pi}{\theta}$.

При этой замене угол θ увеличивается или уменьшается на 2π . Поэтому без ограничения общности можно считать, что вектор угла конечного поворота удовлетворяет неравенству

$$\varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \leq \pi^2 \tag{6.11}$$

7. Кватернионное описание кинематики твердого тела. Систему уравнений (6.5) и формулы для направлений главных осей (6.7) можно получить с помощью кватерниона [1–4]

$$\Lambda = \cos(\theta/2) + \mathbf{e} \sin(\theta/2) \tag{7.1}$$

Преобразованию поворота (2.1) соответствует присоединенное отображение $\mathbf{R} = \Lambda \circ \mathbf{R}_* \circ \bar{\Lambda}$. Угловая скорость в подвижных осях твердого тела выражается через кватернион так $\omega_* = 2\bar{\Lambda}\dot{\Lambda}$. Отсюда следуют тождества

$$\begin{aligned}
C(\varphi)\mathbf{R}_* &= (E + A(\mathbf{e})\sin \theta + A(\mathbf{e})^2(1 - \cos \theta))\mathbf{R}_* = \Lambda \circ \mathbf{R}_* \circ \bar{\Lambda} \\
\omega_* &= \dot{\theta}\mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}\sin \theta - (1 - \cos \theta)(\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}) = 2\bar{\Lambda} \circ \frac{d}{dt} \Lambda
\end{aligned}$$

Они представляют альтернативный вывод формул (2.1) и (4.5). Здесь и далее знак $\circ$ означает умножение кватернионов.

Систему уравнений (6.5) можно заменить на одно уравнение для кватерниона [1]: $2\frac{d}{dt}\Lambda = \Lambda \circ \omega_*$. Оно эквивалентно системе уравнений для его компонент: параметров Родрига–Гамильтона

$$\lambda_0 = \cos(\theta/2), \quad \lambda_1 = e_1 \sin(\theta/2), \quad \lambda_2 = e_2 \sin(\theta/2), \quad \lambda_3 = e_3 \sin(\theta/2)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_0 &= -\frac{1}{2}(p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3) \\
\dot{\lambda}_1 &= \frac{1}{2}(p\lambda_0 + \lambda_2 r - \lambda_3 q) \\
\dot{\lambda}_2 &= \frac{1}{2}(q\lambda_0 + \lambda_3 p - \lambda_1 r) \\
\dot{\lambda}_3 &= \frac{1}{2}(r\lambda_0 + \lambda_1 q - \lambda_2 p)
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Начальному условию (6.6) соответствуют условия

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0$$

Система уравнений имеет интеграл $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. По найденному кватерниону можно найти орты главных осей твердого тела

$$\mathbf{i}(t) = \Lambda \circ \mathbf{i}_0 \circ \bar{\Lambda}, \quad \mathbf{j}(t) = \Lambda \circ \mathbf{j}_0 \circ \bar{\Lambda}, \quad \mathbf{k}(t) = \Lambda \circ \mathbf{k}_0 \circ \bar{\Lambda}, \tag{7.3}$$

где орты $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$ и кватернион Λ определены формулами (6.8) и (7.1). Формулы для ортов (7.3) и (6.9) тождественны.

Приложение. П1. Вывод формулы для угловой скорости в главных осях.

Согласно (4.1) матрица $A(\omega)$ равна произведению двух матриц

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}C(\varphi) &= (A(\mathbf{e})\cos\theta + A(\mathbf{e})^2\sin\theta)\dot{\theta} + A(\dot{\mathbf{e}})\sin\theta + (A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) + A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}}))(1 - \cos\theta) \\
C(-\varphi) &= E - A(\mathbf{e})\sin\theta + A(\mathbf{e})^2(1 - \cos\theta)
\end{aligned}$$

Его можно представить в виде

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \left(\frac{d}{dt}C(\varphi)\right)C(-\varphi) = \\
&= \dot{\theta}F + \sin\theta F_1 + \sin^2\theta F_2 + (1 - \cos\theta)F_3 + (1 - \cos\theta)^2 F_4 + \sin\theta(1 - \cos\theta)F_5 \tag{П1.1}
\end{aligned}$$

Воспользовавшись равенствами (2.2) и

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}} &= 0, \quad A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e})\mathbf{R} = \mathbf{e} \times (\dot{\mathbf{e}} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{R})) = \mathbf{e} \times \mathbf{e}(\dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R}) = 0, \\
A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e})\mathbf{R} &= \mathbf{e} \times (\dot{\mathbf{e}} \times (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{R}))) = \mathbf{e} \times (\dot{\mathbf{e}} \times (\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R})) = \\
&= \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{R}) - \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{R}) = 0
\end{aligned}$$

последовательно находим

$$\begin{aligned}
F &= A(\mathbf{e}), \quad F_1 = A(\dot{\mathbf{e}}), \quad F_2 = -A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}), \quad F_3 = A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) + A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}}) \\
F_4 &= (A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) + A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}}))A(\mathbf{e})^2 = -A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) + A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e})^2 = -A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) \\
F_5 &= A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e})^2 - A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e})^2 - A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) = 0
\end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в (П1.1), найдем

$$A(\omega) = \dot{\theta}A(\mathbf{e}) + \sin\theta A(\dot{\mathbf{e}}) + (1 - \cos\theta)(A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}}) - A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}))$$

Из тождества

$$(A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}}) - A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}))\mathbf{R} = \mathbf{e} \times (\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{R}) - \dot{\mathbf{e}} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{R}) = (\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}) \times \mathbf{R}$$

следует, что $A(\mathbf{e})A(\dot{\mathbf{e}}) - A(\dot{\mathbf{e}})A(\mathbf{e}) = (\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}})$ и

$$A(\boldsymbol{\omega}) = A(\dot{\theta}\mathbf{e} + \sin\theta\dot{\mathbf{e}} + (1 - \cos\theta)\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}) \quad (\text{П1.2})$$

что и доказывает формулу (4.4).

П2. Вывод формулы для угловой скорости в подвижных осях.

Закон Эйлера для распределения скоростей в подвижных осях твердого тела (ССК) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_* &= C(-\boldsymbol{\varphi})\mathbf{v} = C(-\boldsymbol{\varphi})A(\boldsymbol{\omega})\mathbf{R} = C(-\boldsymbol{\varphi})\frac{d}{dt}C(\boldsymbol{\varphi})C(-\boldsymbol{\varphi})\mathbf{R} = C(-\boldsymbol{\varphi})\frac{d}{dt}C(\boldsymbol{\varphi})C(-\boldsymbol{\varphi})C(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{R}_* \Rightarrow \\ \mathbf{v}_* &= A(\boldsymbol{\omega}_*)\mathbf{R}_*, \quad A(\boldsymbol{\omega}_*) = C(-\boldsymbol{\varphi})\left(\frac{d}{dt}C(\boldsymbol{\varphi})\right) \end{aligned} \quad (\text{П2.1})$$

С помощью тождества (4.2) формулу (П1.2) можно записать так

$$-A(\boldsymbol{\omega}) = C(\boldsymbol{\varphi})\left(\frac{d}{dt}C(-\boldsymbol{\varphi})\right) = A(-\dot{\theta}\mathbf{e} - \sin\theta\dot{\mathbf{e}} - (1 - \cos\theta)\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}})$$

Меняя в этой формуле знак у $\boldsymbol{\varphi}$ на противоположный и соответственно знак у $\mathbf{e}$ в правой части, получим формулу для антисимметричной матрицы (П2.1)

$$A(\boldsymbol{\omega}_*) = C(-\boldsymbol{\varphi})\left(\frac{d}{dt}C(\boldsymbol{\varphi})\right) = A(\dot{\theta}\mathbf{e} + \sin\theta\dot{\mathbf{e}} - (1 - \cos\theta)\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}),$$

а из нее вытекает формула (4.5) для угловой скорости в подвижных осях, что и требовалось показать.

Выводы. Выведена система уравнений (6.5) для вектора $\boldsymbol{\varphi}$, соответствующего теореме Эйлера о конечном повороте: вектор $\boldsymbol{\varphi}$ направлен по оси конечного поворота твердого тела и $\theta = |\boldsymbol{\varphi}|$ — угол плоского поворота вокруг этой оси. В уравнение входит функция $\Phi(\boldsymbol{\varphi}^2)$, которая с учетом неравенства (6.11) $\boldsymbol{\varphi}^2 \leq \pi^2$ определяется быстросходящимся рядом (6.10) с любой точностью. Так для вычисления ее с семью знаками достаточно взять восемь членов ряда. Показана эквивалентность системы (6.5) системе уравнений для кватернионов (7.2). Порядок системы (6.5) равен трем, то есть ниже порядка системы для кватернионов (7.2). Приведены формулы (6.9) координат ортов главных осей твердого тела в неподвижных осях. Они выражаются по формулам (6.9) через углы конечного поворота $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Автор благодарит В.Ф. Журавлева за обсуждения результатов и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997. 320 с.
2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука. 1973. 320 с.
3. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. Учебник. 2-е изд., перераб. и дополн. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с.
4. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
5. Jian S. Dai Euler–Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections // Mech.&Machine Theory, 2015. V. 92. P. 144–152.

On the Kinematic Description of the Motion of a Rigid Body

A. G. Petrov^{a,#}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: petrovipmech@gmail.com*

A system of ordinary differential equations is derived for a vector of finite rotation corresponding to Euler's theorem: the vector of finite rotation is directed along the axis of finite rotation of a solid and its length is equal to the angle of plane rotation around this axis. The system of equations is explicitly resolved with respect to the time derivative of the components of the rotation vector. The right part of the system depends on the rotation vector and the angular velocity vector in the main axes. The equivalence of the obtained system of equations to the system of equations for quaternions is shown. The coordinates of the orts of the main axes of a rigid body in fixed axes are expressed in terms of the angles of final rotation and the components of angular velocity according to simple analytical formulas.

Keywords: Euler's theorem on finite rotation, kinematics of a rigid body, quaternion, orientation

REFERENCES

1. Zhuravlev V.F. Fundamentals of Theoretical Mechanics. Moscow: Nauka, 1997. 320 p. (in Russian)
2. Branec V.N., Shmiglevskii I.P. Application of Quaternions in Problems Orientation of the Rigid Body. Moscow: Nauka, 1973. 320 p.
3. Golubev Iu.F. Fundamentals of Theoretical Mechanics. Moscow: Nauka, 1997. 320 p. (in Russian)
4. Chelnokov Iu.N. Application of Quaternions in Problems Orientation of the Rigid Body. Moscow: Nauka, 1973. 320 p.
5. Jian S. Dai Euler—Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections // Mech.&Machine Theory, 2015, vol. 92, pp. 144—152.

УДК 531.36:531.53

*Светлой памяти Л.Д. Акуленко***О РАСЩЕПЛЕНИИ СЕПАРАТРИС, ОТВЕЧАЮЩИХ
РАБОЧЕМУ РЕЖИМУ РЕГУЛЯТОРА УАТТА**© 2023 г. А. П. Маркеев^{1,*}¹*Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия***e-mail: anat-markeev@mail.ru*

Поступила в редакцию 22.05.2023 г.

После доработки 15.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Исследуется нелинейная задача динамики регулятора Уатта. Предполагается, что он установлен на машине, которая совершает заданные гармонические колебания малой амплитуды вдоль вертикали. Считается, что в шарнирах регулятора возникают силы вязкого трения, которые являются малыми. В основном рабочем режиме регулятора его стержни, несущие массивные грузы, отклонены от нисходящей вертикали на постоянный острый угол. Если пренебречь трением и вертикальными колебаниями машины, то получим приближенную задачу, в которой динамика регулятора будет описываться автономной гамильтоновой системой с одной степенью свободы. На фазовом портрете приближенной задачи рабочему режиму отвечает особая точка типа центр. Траектории, охватывающие эту точку, лежат внутри сепаратрисы, представляющей собой гомоклиническую двоякоасимптотическую траекторию, которая проходит через положение равновесия, отвечающее вертикальному положению стержней с грузами; на фазовом портрете этому положению отвечает седловая особая точка. При помощи метода Мельникова получено условие, при выполнении которого в полной возмущенной задаче (учитывающей диссипацию в шарнирах и вертикальные колебания машины) невозмущенная сепаратриса расщепляется.

Ключевые слова: регулятор Уатта, расщепление сепаратрис, хаотическое движение

DOI: 10.31857/S0032823523050107, EDN: QNUWBI

Классический регулятор Уатта и его модификации представляют собой технические устройства, назначение которых состоит в обеспечении постоянной угловой скорости вращения вала некоторой машины, на которой регулятор установлен. Наилучшим и основным рабочим режимом управляемой машины является такой, когда угловая скорость ее вала остается постоянной; при этом постоянен острый угол между стержнями регулятора, несущими массивные грузы, и нисходящей вертикалью. При изменении угловой скорости вала этот угол также изменяется, и, если при дальнейшем движении угловая скорость вновь становится постоянной, то стержни регулятора будут совершать (например, вследствие инерционности грузов) некоторые колебания в окрестности их равновесного рабочего положения. Изучение этих колебаний представляет собой одну из наиболее важных задач динамики регулятора Уатта.

Эта задача является очень сложной. В ее классических исследованиях чаще всего принималось много упрощающих предположений, и, в частности, использовалась ли-

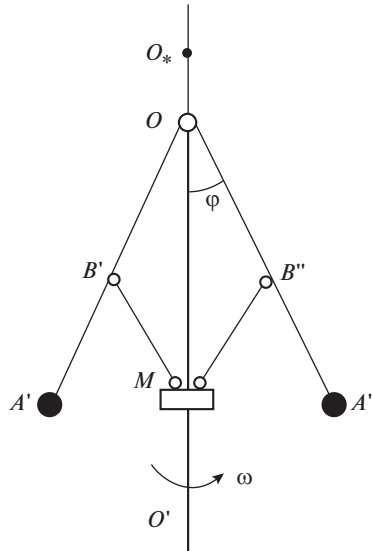


Рис. 1.

неаризация уравнений движения. Результаты этих исследований описаны в ряде монографий и в учебной литературе по вопросам прикладной математики и механики [1–7].

Ниже исследуется нелинейная задача динамики регулятора Уатта вблизи его основного рабочего режима. Предполагается, что машина, на которой установлен регулятор, совершает заданные гармонические колебания малой амплитуды вдоль вертикали, а в шарнирах регулятора возникают силы вязкого трения, которые являются малыми.

1. Введение. Уравнения движения. Схема регулятора Уатта показана на рис. 1. Два одинаковых груза A' и A'' жестко закреплены на концах стержней OA' и OA'' одинаковой длины. Сами же стержни соединены шарниром O с вертикальным вращающимся валом $O'O$. Другие два стержня $B'M$ и $B''M$, также одинаковой длины, шарнирно связаны с муфтой M , которая может свободно скользить вдоль вала $O'O$. Вращение вала машины передается (например, при помощи зубчатых шестеренок, не показанных на рис. 1) на вал $O'O$ регулятора. При вращении вала $O'O$ стержни OA' и OA'' отклоняются от вертикали $O'MOO_*$ на одинаковый угол φ , тем больший, чем больше угловая скорость вала $O'O$. При этом стержни $B'M$ и $B''M$ перемещают муфту M вдоль вала. Поступательное движение муфты при помощи специального устройства передается на механизм управления подачей рабочего вещества регулируемой машины, устроенный так, чтобы при увеличении угловой скорости вращения вала $O'O$ подача уменьшалась, а при уменьшении – увеличивалась.

Будем считать, что движение происходит в однородном поле тяжести и что машина, на которой установлен регулятор, подвержена заданным вертикальным гармоническим колебаниям малой амплитуды; кроме того, будем считать, что в шарнирах регулятора возникают малые по величине силы вязкого трения.

На рис. 1 O_* – фиксированная точка на вертикали $O'MOO_*$ и $O_*O = A \cos \Omega t$ (t – время, A и Ω – постоянные амплитуда и частота вертикальных колебаний управляемой машины).

Угловую скорость ω вращения вала $O'O$ считаем постоянной. Задачу о колебаниях угла φ будем исследовать в нелинейной постановке, предполагая, что стержни регулятора и его муфта невесомы, а грузы A' и A'' — материальные точки массы m каждая.

Из теоремы об изменении кинетического момента имеем следующее нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее динамику регулятора Уатта при принятых выше допущениях:

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -m\ell(g + A\Omega^2 \cos \Omega t) \sin \varphi + m\omega^2 \ell^2 \sin \varphi \cos \varphi - km\omega \ell^2 \dot{\varphi} \quad (1.1)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени, ℓ — длина стержней OA' и OA'' , g — ускорение свободного падения, k — безразмерный коэффициент момента сил вязкого трения.

При отсутствии диссипации нелинейное уравнение (1.1) рассматривалось ранее [8], где, в частности, изучена задача о существовании и устойчивости периодических колебаний угла φ с периодом, кратным периоду вертикальных колебаний регулируемой машины.

Положим

$$A = \varepsilon \ell, \quad k = \varepsilon \delta \quad (0 < \varepsilon \ll 1) \quad (1.2)$$

и введем безразмерные параметры α , ν по формулам

$$\alpha = \frac{g}{\omega^2 \ell}, \quad \nu = \frac{\Omega}{\omega} \quad (1.3)$$

Если в качестве независимой переменной принять безразмерную величину $\xi = \omega t$ и ввести обозначения $\varphi = q$, $d\varphi/d\xi = p$, то уравнение (1.1) можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dq}{d\xi} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \frac{dp}{d\xi} = -\frac{\partial H}{\partial q} - \varepsilon \delta p, \quad (1.4)$$

где

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 \quad (1.5)$$

$$H_0 = \frac{1}{2} p^2 - \alpha \cos q + \frac{1}{4} \cos 2q, \quad H_1 = -\nu^2 \cos(\nu \xi) \cos q \quad (1.6)$$

При $\varepsilon = 0$ имеем приближенную систему с функцией Гамильтона H_0 . Она обладает интегралом

$$H_0 = h = \text{const} \quad (1.7)$$

и подробно изучена ранее (см., например, [6]). Для целей нашего исследования следует принять, что параметр α лежит в интервале

$$0 < \alpha < 1 \quad (1.8)$$

При выполнении этого неравенства приближенная система имеет устойчивое положение равновесия $q = q_0$, $p = 0$, отвечающее основному рабочему режиму регулятора:

$$\cos q_0 = \alpha \quad (1.9)$$

У приближенной системы есть еще равновесия, для которых $q = \pm\pi$, но при условии (1.8) они неустойчивы.

2. О фазовом портрете системы с функцией H_0 . На рис. 2 показана часть фазового портрета приближенной системы, соответствующая нелинейным колебаниям регулятора в окрестности устойчивого положения равновесия $\varphi = q_0$.

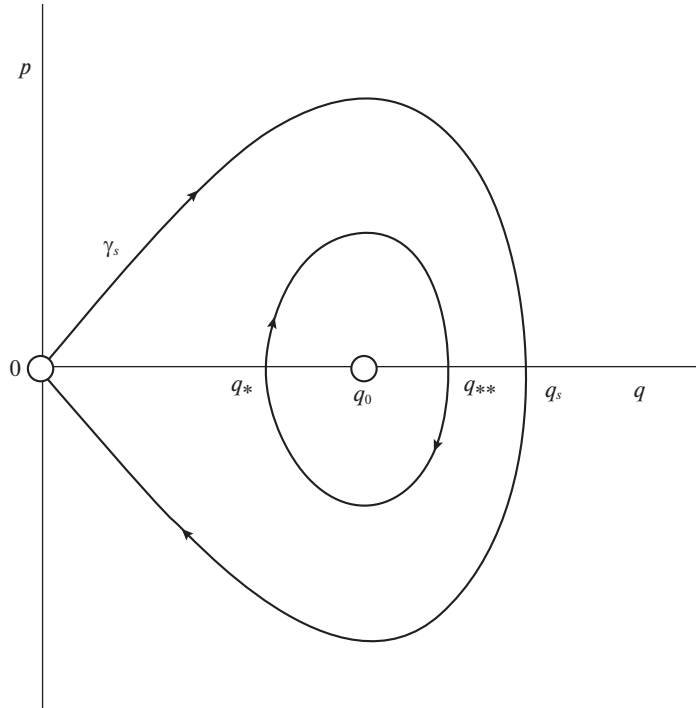


Рис. 2.

Область изменения α и h , отвечающая замкнутым фазовым траекториям, охватывающим точку $q = q_0$, $p = 0$, задается неравенством

$$-\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{4} < h < -\alpha + \frac{1}{4} \quad (2.1)$$

Минимальное q_* и максимальное q_{**} значения величины q на замкнутой фазовой траектории определяются равенствами

$$\cos q_* = z_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2h + \frac{1}{2}}, \quad \cos q_{**} = z_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 2h + \frac{1}{2}}$$

Явные выражения для функций $q(\xi)$, $p(\xi)$, отвечающих нелинейным колебаниям, выписаны в статье [8]. Частота λ этих колебаний вычисляется по формуле

$$\lambda = \frac{\pi \sqrt{(1+z_1)(1-z_2)}}{2\mathbf{K}(k)}, \quad k = \sqrt{1 - \frac{(1-z_1)(1+z_2)}{(1+z_1)(1-z_2)}}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Фазовые траектории, отвечающие нелинейным колебаниям, лежат внутри гомоклинической траектории (сепаратрисы) γ_s , приближающейся при $\xi \rightarrow \pm\infty$ к неустойчивому равновесию (седловой точке) $q = 0$, $p = 0$. На сепаратрисе $h = -\alpha + 1/4$, а максимальное значение $q = q_s$ определяется равенством

$$\cos \frac{q_s}{2} = \sqrt{\alpha} \quad (2.3)$$

В интервале (2.1) частота (2.2) является монотонно убывающей функцией h . Если $h \rightarrow -\alpha^2/2 - 1/4$, то λ мало отличается от постоянной $\sqrt{1 - \alpha^2}$, а при $h \rightarrow -\alpha + 1/4$ имеем

$$\lambda \approx -\frac{2\pi\sqrt{1 - \alpha}}{\ln(1 - 4\alpha - 4h)}$$

Сепаратриса γ_s задается уравнением

$$p^2 = 4 \sin^2 \frac{q}{2} \left(\cos^2 \frac{q}{2} - \alpha \right) \quad (2.4)$$

На верхнем ее участке, где $p > 0$, величина q при увеличении ξ возрастает от нуля до $q = q_s$, а на нижнем участке где $p < 0$, при увеличении ξ координата q убывает от $q = q_s$ до $q = 0$.

Найдем функции $q(\xi)$, $p(\xi)$, описывающие движение регулятора, соответствующие сепаратрисе (2.4). Рассмотрим нижний участок сепаратрисы. Из первого уравнения системы (1.4) и равенства (2.4) следует, что на этом участке функция $q(\xi)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{dq}{d\xi} = -2 \sin \frac{q}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{q}{2} - \alpha} \quad (q(0) = q_s) \quad (2.5)$$

Для его интегрирования сделаем замену переменных

$$\cos \frac{q}{2} = \sqrt{\alpha} x \quad (1 < x < 1/\sqrt{\alpha}) \quad (2.6)$$

Из (2.5), (2.6) получаем, что новая переменная x должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{d\xi} = (1 - \alpha x^2) \sqrt{x^2 - 1}$$

с начальным условием $x(0) = 1$. Поэтому имеет место равенство

$$\int_1^x \frac{du}{(1 - \alpha u^2) \sqrt{u^2 - 1}} = \xi$$

Вычислив интеграл в левой части этого равенства, получим $x(\xi)$ и из (2.6) затем найдем, что на нижнем участке сепаратрисы

$$q(\xi) = 2 \arccos \frac{\sqrt{\alpha} \operatorname{ch}(\sqrt{1 - \alpha}\xi)}{\sqrt{1 + \alpha \operatorname{sh}^2(\sqrt{1 - \alpha}\xi)}} \quad (2.7)$$

Подставив (2.7) в правую часть уравнения (2.5), находим

$$p(\xi) = -\frac{2(1 - \alpha)\sqrt{\alpha} \operatorname{sh}(\sqrt{1 - \alpha}\xi)}{1 + \alpha \operatorname{sh}^2(\sqrt{1 - \alpha}\xi)} \quad (2.8)$$

В (2.7) и (2.8) $0 \leq \xi < +\infty$.

На верхнем участке сепаратрисы функции $q(\xi)$, $p(\xi)$ те же, что и на нижнем участке, надо только в формулах (2.7) и (2.8) считать, что $-\infty < \xi \leq 0$.

Сепаратрису γ_s можно задать уравнениями

$$q = q(\xi - \xi_0), \quad p = p(\xi - \xi_0), \quad (2.9)$$

где q и p – функции (2.7) и (2.8), а ξ_0 – произвольная постоянная. Если в (2.9) положить $\xi = 0$, то получим точку на γ_s с координатами $q = q(-\xi_0)$, $p = p(-\xi_0)$. При изменении ξ_0 от $-\infty$ до $+\infty$ эта точка “пробегают” всю сепаратрису γ_s .

3. О расщеплении сепаратрисы γ_s при $0 < \varepsilon \ll 1$. При $\varepsilon \neq 0$ система уравнений (1.4) допускает (как и при $\varepsilon = 0$) решение $q = 0$, $p = 0$ (отвечающее при $\varepsilon = 0$ седловой особой точке). Линеаризованная в окрестности решения $q = 0$, $p = 0$ система (1.4) отличается от автономной малыми порядка ε поправками, имеющими период $2\pi/\nu$ по ξ . Линейной, $2\pi/\nu$ -периодической по ξ заменой она может быть приведена к автономной линейной системе [9]. При этом собственные значения матрицы приведенной системы аналитичны по ε и при $\varepsilon = 0$ равны $\pm\sqrt{1-\alpha}$. И, таким образом, в расширенном фазовом пространстве q, p, ξ на плоскости $\xi = 0 \pmod{2\pi/\nu}$ решению $q = 0$, $p = 0$ системы (1.4) отвечает седловая особая точка.

При этом сепаратриса γ_s не обязательно сохраняется [10]. При $\varepsilon = 0$ она играет роль кривой, разделяющей траектории различных типов на фазовой плоскости. Если же $\varepsilon \neq 0$, то эту роль будет играть некоторая кривая χ . Эта кривая при $\varepsilon = 0$ совпадает с кривой γ_s (образованной ее верхним и нижним участками). Но при $\varepsilon \neq 0$ эта кривая состоит уже из двух ветвей, которые на плоскости $\xi = 0 \pmod{2\pi/\nu}$ близки γ_s , но, вообще говоря, различны. Несовпадение этих ветвей называют явлением расщепления сепаратрис.

Получим, следуя [10–12], условия расщепления сепаратрис. Для этого рассмотрим периодическую функцию $J(\xi_0)$, определяемую равенством

$$J(\xi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (H_1, H_0) d\xi + \delta \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 d\xi \quad (3.1)$$

Здесь (H_1, H_0) – скобка Пуассона,

$$(H_1, H_0) = \frac{\partial H_1}{\partial q} \frac{\partial H_0}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial H_0}{\partial q} = v^2 p \sin q \cos(v\xi) \quad (3.2)$$

В (3.1), (3.2) функции q и p задаются уравнениями (2.9).

При вычислении первого из интегралов в правой части равенства (3.1) примем во внимание, что $p = dq/d\xi$ на сепаратрисе и для величины $p \sin q$ можно получить из (2.7)–(2.9) следующее выражение

$$p \sin q = -\frac{d}{d\xi} \cos q = -2\alpha \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\operatorname{ch}^2 \sqrt{1-\alpha}(\xi - \xi_0)}{1 + \alpha \operatorname{sh}^2 \sqrt{1-\alpha}(\xi - \xi_0)} \right]$$

И если вместо ξ ввести новую независимую переменную $\eta = \sqrt{1-\alpha}(\xi - \xi_0)$ и принять обозначение $\mu = v/\sqrt{1-\alpha}$, то (при учете четности и нечетности слагаемых в подынтегральной функции) получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (H_1, H_0) d\xi &= 4\alpha(1-\alpha)v^2 \sin v\xi_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta}{(1 + \alpha \operatorname{sh}^2 \eta)^2} \sin \mu \eta d\eta = \\ &= 8(1-\alpha)v^2 \mu \sin v\xi_0 \int_0^{+\infty} \frac{\cos \mu \eta}{\alpha \operatorname{ch} 2\eta + 2 - \alpha} d\eta \end{aligned}$$

Но, учитывая ([13], см. интегралы 3.983 на стр. 519)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \mu \eta}{\alpha \operatorname{ch} 2\eta + 2 - \alpha} d\eta = \frac{\pi \sin\left(\frac{\mu}{2} \arccos h \frac{2 - \alpha}{\alpha}\right)}{4\sqrt{1 - \alpha} \operatorname{sh} \frac{\mu\pi}{2}}$$

Поэтому, окончательно, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (H_1, H_0) d\xi = A(\alpha, \nu) \sin \nu \xi_0, \quad A(\alpha, \nu) = 2\pi\nu^3 \frac{\sin\left(\frac{\nu}{2\sqrt{1 - \alpha}} \arccos h \frac{2 - \alpha}{\alpha}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\nu\pi}{2\sqrt{1 - \alpha}}\right)} \quad (3.3)$$

Второй интеграл в равенстве (3.1) равен площади части фазовой плоскости, заключенной внутри сепаратрисы γ_s , в чем легко убедиться, так как на сепаратрисе $d\xi = dq/p$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p^2 d\xi = 2 \int_0^{q_s} p dq = 4 \int_0^{q_s} \sin \frac{q}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{q}{2} - \alpha} dq$$

Если сделать замену (2.6), то получим отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p^2 d\xi = 8\alpha \int_1^{\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}}} \sqrt{x^2 - 1} dx = f(\alpha), \quad f(\alpha) = 4\sqrt{1 - \alpha} - 2\alpha \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha}}{1 - \sqrt{1 - \alpha}} \quad (3.4)$$

В рассматриваемом интервале (1.8) функция $f(\alpha)$ является монотонно убывающей, причем $4 > f(\alpha) > 0$.

Таким образом для функции (3.1) получено следующее аналитическое представление:

$$J = A(\alpha, \nu) \sin \nu \xi_0 + \delta f(\alpha), \quad (3.5)$$

где A и f определены равенствами (3.3) и (3.4).

Пусть параметры α, ν таковы, что $A(\alpha, \nu) \neq 0$. Тогда расщепление сепаратрис происходит при таких значениях ξ_0 , для которых

$$\sin \nu \xi_0 + \delta \frac{f(\alpha)}{A(\alpha, \nu)} = 0 \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что условием расщепления сепаратрис является выполнение неравенства

$$\delta < \frac{|A(\alpha, \nu)|}{f(\alpha)} \quad (3.7)$$

При выполнении этого условия функция $J(\xi_0)$ меняет знак при переходе через значение ξ_0 , удовлетворяющее уравнению (3.6), а это означает, что ветви возмущенной сепаратрисы χ пересекаются трансверсально.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максвелл Д.К., Вышнеградский И.А., Стодола А. Теория автоматического регулирования (линеаризованные задачи). М.: Изд-во АН СССР, 1949. 431 с.
2. Жуковский Н.Е. Теория регулирования хода машин. В кн.: Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. Т. 3. С. 392–492.
3. Appel П. Теоретическая механика. М.: Физматгиз, 1960. Т. 2. 487 с.
4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 2009. 416 с.
5. Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.
6. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 400 с.
8. Маркеев А.П. К динамике регулятора Уатта // Докл. РАН. 2017. Т. 477. № 4. С. 415–420.
9. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
10. Мельников В.К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. об-ва. 1963. Т. 12. С. 3–52.
11. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
12. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
13. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

On Splitting of Separatrices Corresponding to the Working Mode of the Watt Regulator

A. P. Markeev^{a, #}^aMoscow Aviation Institute, Moscow, Russia[#]e-mail: anat-markeev@mail.ru

The nonlinear problem of the Watt regulator dynamics is investigated. It is assumed to be installed on a machine that performs the specific harmonic oscillations of small amplitude along the vertical. Viscous friction forces is believed to arise in the hinges of the regulator, and these forces are small. In the main operating mode of the regulator, its rods, carrying massive weights, are deflected from the downward vertical by a constant acute angle. If friction and vertical oscillations of the machine are neglected, then we obtain an approximate problem in which the dynamics of the regulator is described by an autonomous Hamiltonian system with one degree of freedom. On the phase portrait of the approximate problem, the operating mode corresponds to a singular point of the center type. The trajectories surrounding this point lie inside the separatrix, which is a homoclinic doubly asymptotic trajectory that passes through the equilibrium position corresponding to the vertical position of the rods with weights. In the phase portrait, this position corresponds to a saddle singular point. The Melnikov method is used to obtain the splitting condition for the unperturbed separatrix in the complete perturbed problem, taking into account dissipation in the hinges and vertical vibrations of the machine.

Keywords: Watt controller, separatrix splitting, chaotic motion

REFERENCES

1. Maxwell D.K., Vyshnegradskii I.A., Stodola A. Theory of Automatic Control (Linearized Problems). Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1949. 431 p. (in Russian)
2. Zhukovskii N.E. Theory of Machine-Motion Control. In Coll. Works. Vol. 3. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1949. p. 392. (in Russian)
3. Appel P. Theoretical Mechanics. Vol. 2. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 487 p. (in Russian)
4. Targ S.M. Brief Course of Theoretical Mechanics. Moscow: Vysshaya Shkola, 2009. 416 p. (in Russian)
5. Zhuravskii A.M. Handbook on Elliptic Functions. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1941. 235 p. (in Russian)

6. *Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E.* Theory of Vibrations. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 915 p. (in Russian)
7. *Pontryagin L.S.* Ordinary Differential Equations. Moscow: NITs "R&C Dyn.", 2001. 400 p. (in Russian)
8. *Markeev A.P.* Watt regulator dynamics // *Dokl. Phys.*, 2017, vol. 62, no. 12, pp. 538–542.
9. *Malkin I.G.* Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations: In 2 Vols. Germantown, Md.: US Atom. Energy Commis., Techn. Inform. Serv., 1959.
10. *Melnikov V.K.* On the stability of a center for time-periodic perturbations // *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 1963, vol. 12, pp. 3–52. (in Russian)
11. *Kozlov V.V.* Integrability and non- integrability in Hamiltonian mechanics // *Rus. Math. Serv.*, 1983, vol. 38, no. 1, pp. 1–76.
12. *Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I.* Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. *Encycl. Math. Sci. Vol. 3.* Berlin: Springer, 2006. 505 p.
13. *Gradstein I.S., Ryzhik I.M.* Tables of Integrals, Sums, Series and Products. Moscow: Nauka, 1971. 1108 p. (in Russian).

УДК 531.36

*Светлой памяти Л.Д. Акуленко***ДИНАМИКА МАЛЫХ СПУТНИКОВ С ТРЕХОСНЫМ
ГРАВИТАЦИОННЫМ ДЕМПФЕРОМ**© 2023 г. В. С. Асланов^{1,*}, А. В. Дорошин¹¹*Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королёва,
Самара, Россия***e-mail: aslanov_vs@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.06.2023 г.

После доработки 11.08.2023 г.

Принята к публикации 15.08.2023 г.

Рассматриваются вопросы динамики углового движения наноспутников с гравитационными демпферами. Демпфер представляет собой твердое тело, вращающееся в сферической полости с вязким жидким наполнением, создающим внутреннее трение с диссипацией кинетической энергии углового движения. В отличие от классических моделей подобных вязких демпферов, использующих схему М.А. Лаврентьева со сферической динамической симметрией тела-демпфера, в настоящей работе тело-демпфер имеет центральный трехосный эллипсоид инерции, что повышает эффективность взаимодействия с внешним гравитационным полем. Это позволяет использовать в качестве такового внутреннего тела-демпфера практически любой автономный агрегат наноспутника, размещая его в герметичной сферической оболочке внутри сферической полости с вязкой жидкостью в центре масс главного тела-корпуса спутника. Наличие трехосового тензора инерции тела-демпфера изменяет и усложняет математическую модель углового движения по сравнению с классической, что может рассматриваться как определенное обобщение и развитие исследований в этом направлении.

Ключевые слова: наноспутник, трехосный гравитационный демпфер, модель М.А. Лаврентьева, угловое движение, центральное поле гравитации

DOI: 10.31857/S003282352305003X, **EDN:** QHRPJS

1. Введение. Угловое движение космических аппаратов с вязкими демпферами было и по-прежнему остается важной темой исследований в рамках динамики твердого тела и ее прикладных вопросов, связанных с механикой космического полета. Наличие внутренних демпферов в форме сферических тел внутри сферических полостей с вязкой жидкостью, размещенных в составе базового твердого тела исследуется в рамках самых разных динамических аспектов, включая вопросы построения математических моделей, поиска законов движения, анализа устойчивости режимов движения и многого другого. Начиная с фундаментальных работ по проблеме движения составных твердых тел с внутренними вязкими демпферами [1–3], динамика подобных твердотельных систем с жидким наполнением изучалась в работах Ф.Л. Черноушко, Л.Д. Акуленко и других авторов [4–16] и, более того, в настоящее время приобретает новые важные аспекты в рамках прикладных вопросов разработки спутниковых си-

стем на основе современных сверхмалых формфакторов, включая так называемые наноспутники.

Наноспутники в своем общепринятом конструктивном варианте имеют модульную структуру, когда весь космический аппарат komponуется из самостоятельных модулей (units), заполняемых соответствующими агрегатами и оборудованием. Если выделять признанные схемы компоновки наноспутников, то стоит подчеркнуть, что они строятся по так называемой компоновке “CubeSat”, где отдельные модули представляют из себя кубические конструкции с размером ребер 10 см. На основе таких кубических модулей, как это хорошо известно, далее составляются конкретные наноспутники, получающие цифровые индексы, отражающие количество содержащихся в их составе модулей — это обычно указывают в форме 3U, 6U, 12U и т.д. Современным стандартом в большинстве космических миссий признана схема трех линейно скрепленных модулей, образующих наноспутник CubeSat-3U, которая находит себя и в образовательных и в исследовательских миссиях университетов и научных организаций. В связи с принципиальной простотой конструкции указанные наноспутники не могут содержать в своем составе каких-либо сложных агрегатов, обладающих высокой эффективностью функционала и большой энергоёмкостью, что характерно для полнофункциональных космических аппаратов большого формфактора. В этой связи актуальной становится задача разработки таких схем и агрегатов наноспутников, которые бы могли быть одновременно простыми с точки зрения конструкции и компоновки, а также обладать множественностью функционала своих внутренних агрегатов, что позволило бы не только выполнять целевую функцию (фотосъемка, прием-передача радиосигнала, измерение параметров среды, и пр.), но также быть использованными в качестве рабочих элементов.

Примером подобной возможности может быть рассматриваемый в настоящей статье гипотетический наноспутник CubeSat-3U, внутри центрального модуля которого размещена сферическая полость с вязким наполнением, содержащая подвижную сферу с внутренним отцентрированным в инерционном смысле агрегатом, выполняющим, например, роль радиометра с автономным блоком питания и радиопередатчиком, транслирующим измеренные параметры среды в эфир. В этом случае функциональный агрегат (автономный радиометр-радиопередатчик) выполнял бы свою целевую миссию, одновременно являясь тем самым вязким демпфером, предназначенным для придания предпочтительных свойств динамике углового движения спутника (достижение и стабилизация гравитационного стабилизированного положения). Так, в случае, когда центрированное твердое тело агрегата внутри сферической оболочки обладало бы идеальным центральным сферическим главным тензором инерции, твердотельная система наноспутника соответствовала бы классической механической модели М.А. Лаврентьева [1], изучаемой во многих аспектах своей динамики в работах [1–3, 10–15, 20–22]. Природа движения такой модели основывалась бы на взаимодействии главного базового тела, обладающего тензором инерции общего вида, с внешним центральным гравитационным полем, стремящимся развернуть тело в гравитационно-ориентированное положение на орбите, в то время как внутреннее тело продолжало бы свое движение без влияния на него центрального поля гравитации в связи со сферической инерционно-массовой компоновкой. В этом случае между телами создавалось бы относительное движение, вызывающее в свою очередь взаимодействие тел посредством жидкостного трения среды между стенками полости и внутреннего тела. Указанная классическая ситуация имела бы место в том случае, когда трехмодульный наноспутник обладал бы такой инерционной компоновкой, когда его центр масс располагался бы в центре масс центрального модуля, внутри которого располагалось бы тело-демпфер с точным совмещением своего центра масс с центром масс полной механической системы и обладало бы сферическим тензором инерции. Однако, как отмечалось выше, внутреннее тело-демпфер в реальных задачах космиче-

ской миссии выполняло бы свой функционал, являясь неким реальным агрегатом, в связи с чем, его тензор инерции отличался бы от сферического, что, к сожалению, выводило бы механическую систему из классического типа, но являлось бы необходимым с точки зрения практических целевых задач наноспутника. Размещение дополнительных масс для придания тензору инерции сферических свойств ухудшало бы массовые характеристики наноспутника, минимизация массы которого является одной из приоритетных целей при конструировании любой космической системы. Стоит также отметить, что подобная схема вязкого демпфера может использоваться в случаях, когда взаимодействие с внешней средой имеет иной характер, нежели гравитационное взаимодействие. Например, можно указать применение этого механического типа демпфера в случаях, когда предпочтительное взаимодействие идет с геомагнитным полем, что переводит тип “гравитационного демпфера” в тип “магнитного демпфера”, когда тело-демпфер, либо главное базовое тело спутника обладает собственным дипольным магнитным моментом, взаимодействующим с внешним магнитным полем. Подобный класс магнитных демпферов, а также магнитные системы управления и стабилизации движения космических аппаратов также были и остаются одними из самых актуальных объектов исследований и разработок [17, 18, 23–26].

Целью настоящей работы является формирование облика и изучение углового движения на круговых орбитах трехмодульного наноспутника с центральным модулем, содержащим тело-демпфер в сферической полости с вязким наполнением, имеющим центральный трехосный тензор инерции. Эта механическая система не может быть описана на основе классической модели Лаврентьева и требует разработки новой математической модели, развивающей и обобщающей в некотором смысле проблематику использования вязких демпферов в рамках движения в центральных полях гравитации. Для достижения указанной цели в работе осуществляется построение математической модели движения системы с трехосным демпфером на базе теоремы об изменении кинетического момента, а также изучение возможности ее практического применения на основе выполнения численного анализа динамики в сравнении с движением соответствующей классической модели.

2. Математическая модель углового движения наноспутника с гравитационным демпфером на круговых орбитах.

2.1. Механическая модель и принцип функционирования. Рассмотрим наноспутник CubeSat-3U (рис. 1), центральный модуль которого содержит сферическую полость с вязкой жидкостью, внутри которой свободно плавает сфера меньшего радиуса с жестко прикрепленным к ней внутренним твердым телом-демпфером, имеющим трехосный тензор инерции с центром масс, совпадающим с центром сферы. Будем предполагать, что центр масс всей системы в этом случае всегда совпадает с центрами масс базового тела (все три модуля без внутренней сферы с демпфером) и тела-демпфера. В этой связи взаимодействие тел передается только посредством жидкостного трения вязкого наполнения в сферической щели, которое мы будем моделировать в виде момента сил, пропорционального относительной скорости вращения тел.

Как уже было замечено во введении, динамика спутника с гравитационным демпфером основывается на различии во взаимодействии главного базового тела и внутреннего тела-демпфера с центральным гравитационным полем, стремящимся развернуть тела в гравитационно-ориентированные положения на орбите. Вследствие различий в инерционно-массовых параметрах тел они будут совершать разные угловые движения вокруг собственных центров масс, что создаст в свою очередь относительное угловое движение тел и соответствующее жидкостное трение в щели сферической полости.

По сравнению с классической моделью, в которой тело-демпфер имеет сферический тензор инерции, в рассматриваемом случае тело-демпфер является трехосным, и

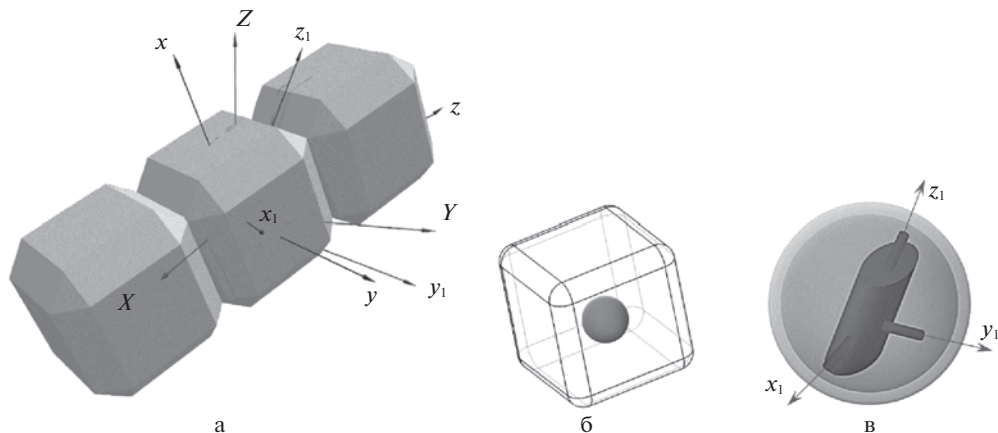


Рис. 1. Схема наноспутника CubeSAT-3U (а) с центральным модулем (б) с внутренним гравитационным демпфером (в).

поэтому в качестве такого тела-демпфера может использоваться некоторый функциональный агрегат, выполняющий свою независимую миссию.

2.2. Системы координат и уравнения движения. Будем использовать следующие системы координат: $CXYZ$ – орбитальная система координат, ось Z которой направлена из центра Земли в центр масс системы на круговой орбите, ось Y ортогональна плоскости орбиты и сонаправлена с угловой орбитальной скоростью, ось X представляет третью ось правой системы координат. Система $Cxyz$ является центральной системой координат, связанной с базовым телом наноспутника, которая сонаправлена с главными осями инерции базового тела. Система $Cx_1y_1z_1$ является центральной системой координат тела-демпфера, сонаправленной с его главными осями инерции.

Угловое положение базового тела относительно орбитальной системы координат будем описывать эйлеровыми углами $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ в соответствии со следующей последовательностью поворотов $x \rightarrow y \rightarrow z$. В этом случае матрицы последовательных поворотов и итоговая матрица перехода от системы координат $CXYZ$ к системе $Cxyz$ имеют вид:

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \Theta_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\Theta = \Theta_3 \cdot \Theta_2 \cdot \Theta_1 = \begin{bmatrix} c\theta_3 c\theta_2 & s\theta_3 c\theta_1 + c\theta_3 s\theta_2 s\theta_1 & s\theta_3 s\theta_1 - c\theta_3 s\theta_2 c\theta_1 \\ -s\theta_3 c\theta_2 & c\theta_3 \cos \theta_1 - s\theta_3 s\theta_2 s\theta_1 & c\theta_3 s\theta_1 + s\theta_3 s\theta_2 c\theta_1 \\ s\theta_2 & -c\theta_2 s\theta_1 & c\theta_2 c\theta_1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

где литеры “ c ” и “ s ” обозначают функции $\cos$ и $\sin$, соответственно.

Положение тела-демпфера относительно орбитальной системы координат будем описывать по аналогии эйлеровыми углами $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ и полностью аналогичной матрицей перехода от системы координат $CXYZ$ к связанной системе $Cx_1y_1z_1$:

$$\Psi = \Psi_3 \cdot \Psi_2 \cdot \Psi_1 = \begin{bmatrix} c\psi_3 c\psi_2 & s\psi_3 c\psi_1 + c\psi_3 s\psi_2 s\psi_1 & s\psi_3 s\psi_1 - c\psi_3 s\psi_2 c\psi_1 \\ -s\psi_3 c\psi_2 & c\psi_3 c\psi_1 - s\psi_3 s\psi_2 s\psi_1 & c\psi_3 s\psi_1 + s\psi_3 s\psi_2 c\psi_1 \\ s\psi_2 & -c\psi_2 s\psi_1 & c\psi_2 c\psi_1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Тогда можно записать следующие кинематические системы уравнений с учетом наличия орбитальной угловой скорости ω_0 , где абсолютная угловая скорость базового тела в своих связанных осях описывается вектором $\omega = [p, q, r]^T$, а угловая скорость тела-демпфера в своих связанных осях описывается вектором $\omega' = [p', q', r']^T$:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 + \omega_0 \Theta_{12} \\ q &= -\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 + \omega_0 \Theta_{22} \\ r &= \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_3 + \omega_0 \Theta_{32} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} p' &= \dot{\psi}_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3 + \dot{\psi}_2 \sin \psi_3 + \omega_0 \Psi_{12} \\ q' &= -\dot{\psi}_1 \cos \psi_2 \sin \psi_3 + \dot{\psi}_2 \cos \psi_3 + \omega_0 \Psi_{22} \\ r' &= \dot{\psi}_1 \sin \psi_2 + \dot{\psi}_3 + \omega_0 \Psi_{32} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассмотрим движение системы с телами, имеющими следующие тензоры инерции в своих связанных системах координат: $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ — центральный главный тензор инерции базового тела (без тела-демпфера), $\mathbf{J}' = \text{diag}(A', B', C')$ — центральный главный тензор инерции тела-демпфера. В данном случае совпадения центров масс системы, базового тела и тела-демпфера уравнения углового движения этих отдельных тел будут иметь стандартную структуру в своих связанных системах координат, где влияние со стороны второго тела будет описываться моментом взаимодействия, выражающего наличие жидкостного трения, формально выступающего в роли “внешнего момента сил” от второго тела системы [19]:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= 3\omega_0^2 (C - B) \Theta_{23} \Theta_{33} + M_x \\ B\dot{q} + (A - C)pr &= 3\omega_0^2 (A - C) \Theta_{33} \Theta_{13} + M_y \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= 3\omega_0^2 (B - A) \Theta_{13} \Theta_{23} + M_z \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} A'\dot{p}' + (C' - B')q'r' &= 3\omega_0^2 (C' - B') \Psi_{23} \Psi_{33} + M'_x \\ B'\dot{q}' + (A' - C')p'r' &= 3\omega_0^2 (A' - C') \Psi_{33} \Psi_{13} + M'_y \\ C'\dot{r}' + (B' - A')p'q' &= 3\omega_0^2 (B' - A') \Psi_{13} \Psi_{23} + M'_z, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\{\Theta_{13}, \Theta_{23}, \Theta_{33}\}$, $\{\Psi_{13}, \Psi_{23}, \Psi_{33}\}$ — компоненты матриц (2.2) и (2.3), соответствующие направляющим косинусам оси Z . Вектор $\mathbf{M} = [M_x, M_y, M_z]^T$ рассматривается как формально внешний момент сил, действующий на базовое тело со стороны тела-демпфера посредством трения. Вектор $\mathbf{M}' = [M'_x, M'_y, M'_z]^T$ — есть момент сил, действующий на тело-демпфер со стороны базового тела. Эти моменты сил будем рассматривать в виде, пропорциональном относительной угловой скорости тел по отношению друг к другу с коэффициентом пропорциональности ν , описывающим кинематическую вязкость:

Таблица 1. Параметры системы с трехосным тензором инерции демпфера

Параметры и начальные условия движения тел			
	Моменты инерции [кг м ²]	Начальные угловые скорости [1/с]	Начальные углы [рад]
Базовое тело	$\mathbf{J} = \text{diag}(0.0045, 0.0055, 0.0035)$	$\boldsymbol{\omega}(0) = [0.002, 0.001, -0.002]$	$\{\theta_i\} = \{0.15, 0.1, 0.2\}$
Тело-демпфер	$\mathbf{J}' = \text{diag}(0.003, 0.004, 0.0015)$	$\boldsymbol{\omega}'(0) = [0.002, 0.001, 0.005]$	$\{\psi_i\} = \{0.05, 0.02, 0.03\}$
Орбитальная скорость $\boldsymbol{\omega}_0$ [1/с]		0.0012	
Кинематическая вязкость ν [Н м с]		0.00001	

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = -\nu \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} - \Theta \cdot \Psi^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}' = \begin{bmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = -\nu \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} - \Psi \cdot \Theta^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Таким образом, системы динамических и кинематических уравнений (2.4)–(2.7) с величинами моментов сил (2.8) будут полностью описывать динамику механической системы в параметрах угловых скоростей тел и эйлеровых углах $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ и $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$. В разрешенном относительно первых производных углов ориентации кинематические уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -\frac{1}{\cos \theta_2} (q \sin \theta_3 - p \cos \theta_3 + \cos \theta_3 \omega_0 \Theta_{12} - \sin \theta_3 \omega_0 \Theta_{22}) \\ \dot{\theta}_2 &= q \cos \theta_3 + p \sin \theta_3 - \cos \theta_3 \omega_0 \Theta_{22} - \sin \theta_3 \omega_0 \Theta_{12} \\ \dot{\theta}_3 &= r + \text{tg } \theta_2 (q \sin \theta_3 - p \cos \theta_3 + \cos \theta_3 \omega_0 \Theta_{12} - \sin \theta_3 \omega_0 \Theta_{22}) - \omega_0 \Theta_{32} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{1}{\cos \psi_2} (q' \sin \psi_3 - p' \cos \psi_3 + \cos \psi_3 \omega_0 \Psi_{12} - \sin \psi_3 \omega_0 \Psi_{22}) \\ \dot{\psi}_2 &= q' \cos \psi_3 + p' \sin \psi_3 - \cos \psi_3 \omega_0 \Psi_{22} - \sin \psi_3 \omega_0 \Psi_{12} \\ \dot{\psi}_3 &= r' + \text{tg } \psi_2 (q' \sin \psi_3 - p' \cos \psi_3 + \cos \psi_3 \omega_0 \Psi_{12} - \sin \psi_3 \omega_0 \Psi_{22}) - \omega_0 \Psi_{32} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Построенные уравнения (2.6)–(2.10) представляют собой замкнутую математическую модель динамики движения наноспутника с трехосным гравитационным демпфером.

3. Моделирование динамики движения. Для изучения эффективности предложенной модели в сравнении с классической, а также для оценки ее практического применения проведем численное моделирование динамики движения на основе численного интегрирования уравнений (2.6)–(2.10) при гипотетических параметрах системы и начальных условиях, приведенных в таблице (табл. 1).

Результаты моделирования представлены на рис. 2,а–6,а, из которых видно, что внутренний демпфер эффективно осуществляет гашение угловых скоростей наноспутника. Явно наблюдается тенденция, при которой компоненты вектора угловой скорости, соответствующие среднему и наименьшему моментам инерции (p, p', r, r') стремятся к нулю (рис. 2,а, 4,а), а компоненты q и q' , соответствующие наибольшему моменту инерции постепенно принимают абсолютные величины, равные орбитальной угловой скорости (рис. 3,а).

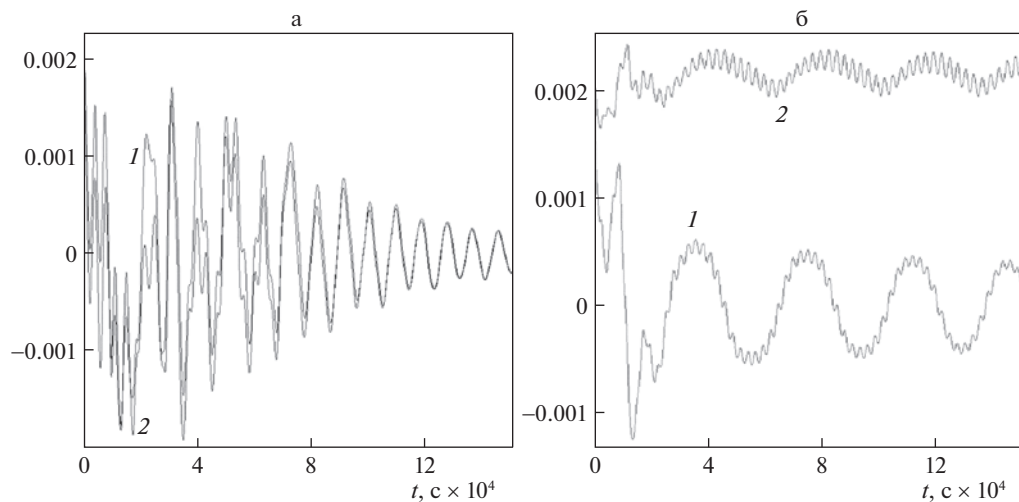


Рис. 2. Зависимости угловых скоростей p (1) и p' (2).

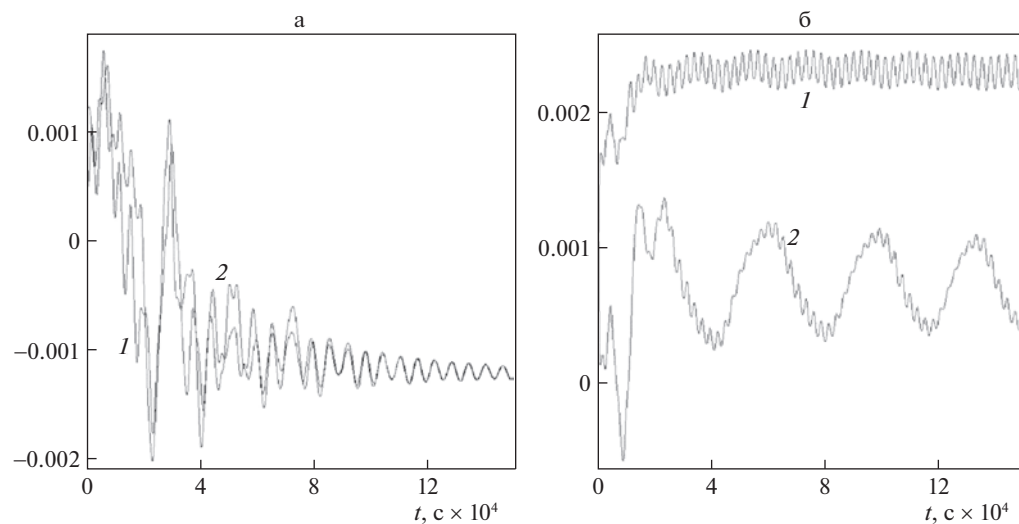


Рис. 3. Зависимости угловых скоростей q (1) и q' (2).

Как видно из результатов моделирования, тела стремятся занять гравитационные положения равновесия, совпадая своими связанными осями с осями орбитальной системы координат, что отвечает принципу гравитационной стабилизации.

4. Сравнение эффективности работы демпферов с трехосным и сферическим тензорами инерции. Для сравнения эффективности действия классического демпфера со сферическим тензором инерции и демпфера с трехосным тензором инерции можно провести численное моделирование на основе тех же уравнений (2.6)–(2.10) с теми же начальными условиями движения и параметрами системы, кроме значений моментов

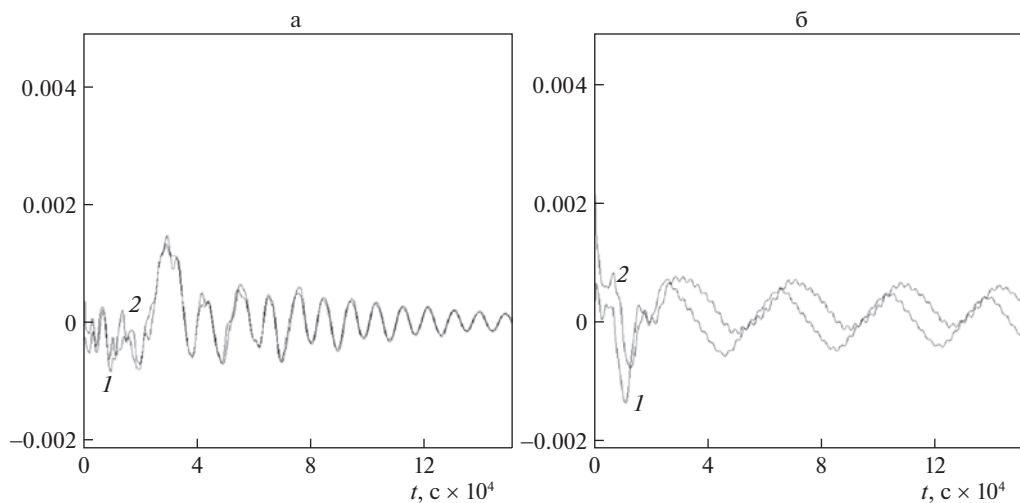
Таблица 2. Параметры системы с классическим демпфером

Параметры и начальные условия движения тел			
	Моменты инерции [кг м ²]	Начальные угловые скорости [1/с]	Начальные углы [рад]
Базовое тело	$\mathbf{J} = \text{diag}(0.0045, 0.0055, 0.0035)$	$\boldsymbol{\omega}(0) = [0.002, 0.001, -0.002]$	$\{\theta_i\} = \{0.15, 0.1, 0.2\}$
Тело-демпфер	$\mathbf{J}' = \text{diag}(0.003, 0.003, 0.003)$	$\boldsymbol{\omega}'(0) = [0.002, 0.001, 0.005]$	$\{\psi_i\} = \{0.05, 0.02, 0.03\}$
Орбитальная скорость $\boldsymbol{\omega}_0$ [1/с]		0.0012	
Кинематическая вязкость ν [Н м с]		0.00001	

инерции тела-демпфера, которые полагаются равными средней величине моментов инерции из предыдущего моделирования в случае с трехосным тензором (табл. 2). В этом случае мы получим результаты, приведенные на рисунках (рис. 2,б–6,б).

Как видно из рис. 2–6 на приведенном интервале времени гравитационной стабилизации спутником со сферическим тензором инерции тела-демпфера не достигается и для этого ему требуется существенно более длинный интервал времени. Для сравнительной демонстрации достижения положения гравитационной стабилизации наноспутников с трехосным и сферическим тензорами инерции тела-демпфера проведено интегрирование уравнений на более длительных интервалах времени, где замечен выход в гравитационно стабилизированное положение в обоих случаях (рис. 7, 8).

Как видно из результатов моделирования, положение гравитационной стабилизации в случае с трехосным тензором инерции тела-демпфера достигается примерно в два раза быстрее: время стабилизации с трехосным телом демпферов примерно равно 2.5×10^5 , а со сферическим телом-демпфером – 5×10^5 с. Последнее сравнительное моделирование показывает бóльшую эффективность работы демпфера с трехосным тензором инерции. Другими словами, модель с трехосным телом-демпфером не только является предпочтительной с точки зрения компоновки многофункционального

**Рис. 4.** Зависимости угловых скоростей r (1) и r' (2).

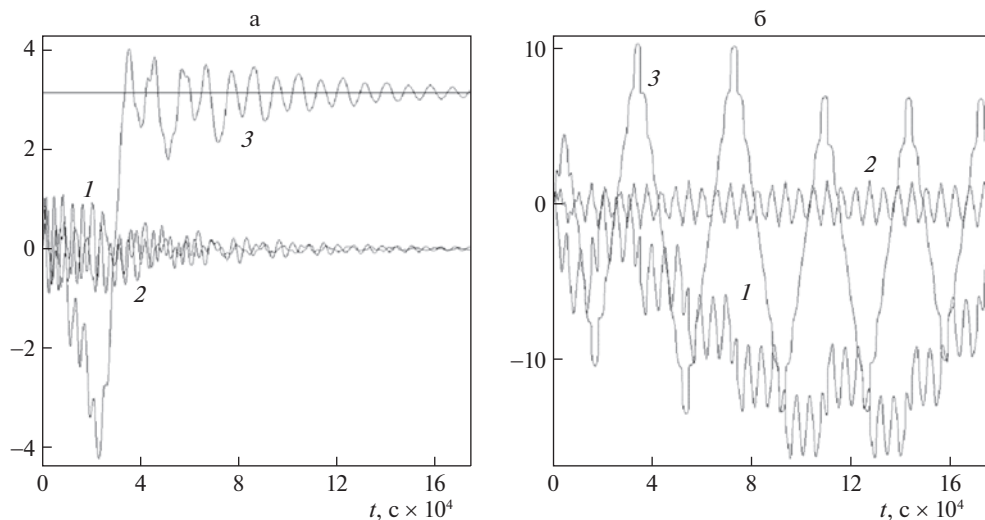


Рис. 5. Зависимости от времени пространственных углов θ_1 (1), θ_2 (2), θ_3 (3).

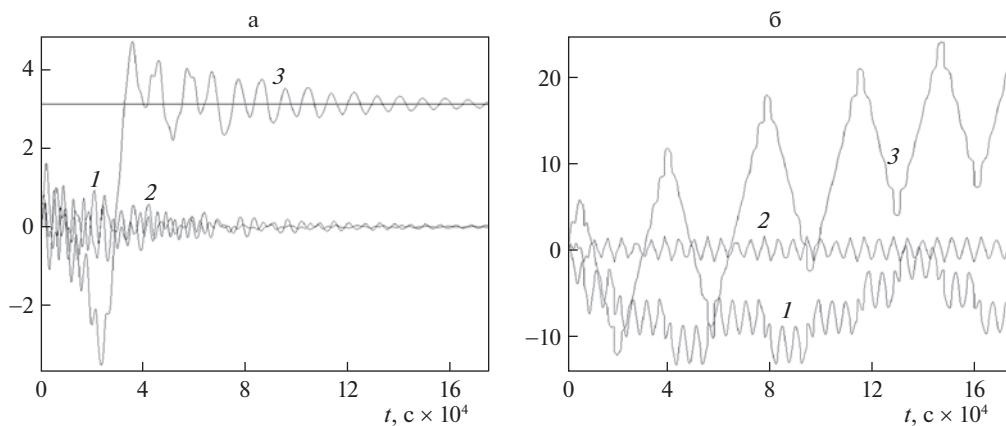


Рис. 6. Зависимости от времени углов ψ_1 (1), ψ_2 (2), ψ_3 (3).

наноспутника, но и является более эффективным демпфирующим устройством по сравнению с классическим демпфером М.А. Лаврентьева.

Заключение. В работе предложены механическая и математическая модели гравитационного трехосного демпфера, развивающего классическую модель М.А. Лаврентьева и создающего предпосылки своего прикладного использования в рамках решения современных задач механики космического полета малых космических аппаратов.

Построенные модели позволяют “сбрасывать” угловую скорость спутника за счет диссипативных моментов сил, возникающих при взаимодействии базового тела и трехосного тела-демпфера посредством моментов сил жидкостного трения. Конечное положение, занимаемое базовым телом и телом-демпфером, соответствует положе-

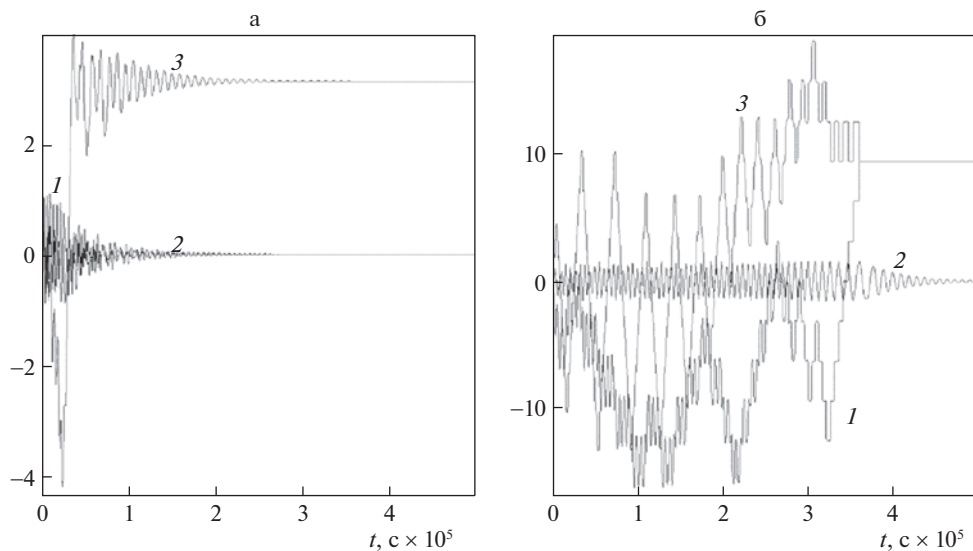


Рис. 7. Зависимости от времени пространственных углов θ_1 (1), θ_2 (2), θ_3 (3): а – трехосный тензор инерции демпфера, б – сферический тензор инерции демпфера.

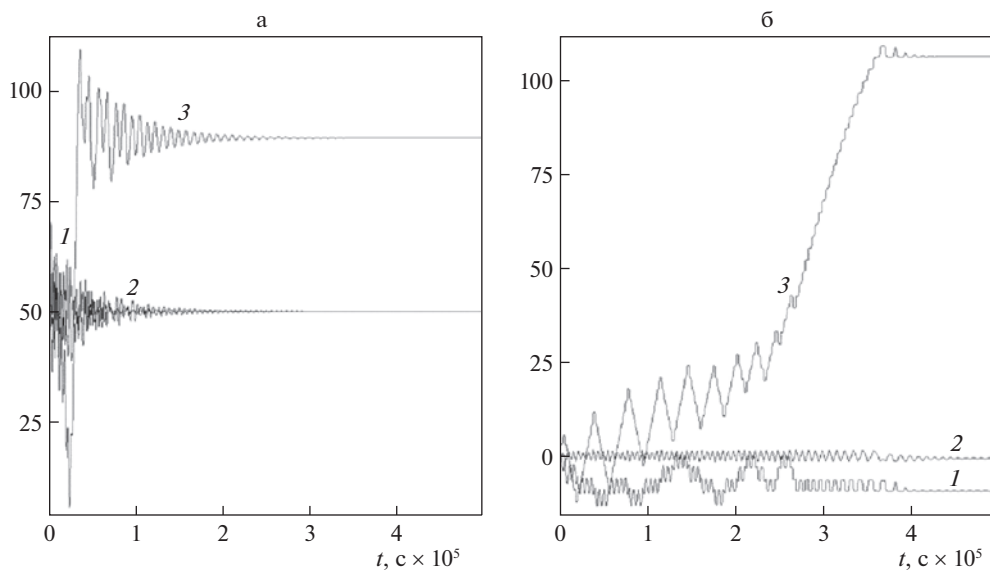


Рис. 8. Зависимости от времени углов ψ_1 (1), ψ_2 (2), ψ_3 (3): а – трехосный тензор инерции демпфера, б – сферический тензор инерции демпфера.

нию гравитационной стабилизации, когда связанные оси тел совпадают с орбитальными осями в соответствии с принципом гравитационной стабилизации.

Как показало моделирование, модель с трехосным телом-демпфером не только является предпочтительной с точки зрения конструкции наноспутника с многофункци-

ональными агрегатами, инерционная геометрия которых отличается от сферически симметричной, но и является более эффективной системой в сравнении с классическим демпфером М.А. Лаврентьева.

Работа поддерживается Российским научным фондом (проект № 19-19-00085).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Деятельность Михаила Алексеевича Лаврентьева в Академии наук УССР // ПМТФ. 1960. № 3. С. 16–19.
2. *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968.
3. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела, содержащего сферический демпфер // ПМТФ. 1968. № 1. С. 73–79.
4. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. Ижевск: Ижевский ин-т компьют. исслед., 2015. 308 с.
5. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 5–13.
6. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
7. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л., Щетинина Ю.С.* Эволюция возмущенных вращений несимметричного гиростата в гравитационном поле и среде с сопротивлением // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 4. С. 43–52.
8. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л.* Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Мех. тверд. тела. 2007. Вып. 37. С. 126–139.
9. *Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л.* Быстрые вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием моментов сил гравитации и светового давления // Космич. исслед. 2011. Т. 49. № 5. С. 453–463.
10. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Об устойчивости стационарных вращений спутника с внутренним демпфированием в центральном гравитационном поле // ПММ. 2017. Т. 81. № 2. С. 123–136.
11. *Холощак В.В.* Динамика вращательного движения спутника с демпфером в центральном гравитационном поле // Тр. МФТИ. 2017. Т. 9. № 4 (36). С. 106–119.
12. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Вращательное движение несимметричного спутника с демпфером на круговой орбите // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 16–31.
13. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Эволюция вращательного движения динамически симметричного спутника с внутренним демпфированием на круговой орбите // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 3–15.
14. *Амелькин Н.И.* Об асимптотических свойствах движений спутников в центральном поле, обусловленных внутренней диссипацией // ПММ. 2011. Т. 75. № 2. С. 204–223.
15. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Об устойчивости стационарных вращений спутника с внутренним демпфированием в центральном гравитационном поле // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 123–136.
16. *Сидоренко В.В.* Эволюция вращательного движения планеты с жидким ядром // Астроном. вестн. 1993. Т. 27. № 2. С. 119–127.
17. Прикладная небесная механика и управление движением. Сб. статей, посвященный 90-летию со дня рождения Д.Е. Охоцимского / Составители: *Т.М. Энеев, М.Ю. Овчинников, А.Р. Голиков*. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. 368 с.
18. *Морозов В.М., Каленова В.И.* Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации // Космич. исслед. 2020. Т. 58. № 3. С. 199–207.
19. *Doroshin A.V.* Gravitational dampers for unloading angular momentum of nanosatellites // in: Advances in Nonlinear Dynamics. NODYCON Conf. Proc. Ser. Vol. 1 / Ed. by *Lacarbonara W., Balachandran B. et al.* Springer, 2022. P. 257–266.
20. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Rotational motion of a non-symmetrical satellite with a damper in a circular orbit // Mech. Solids. 2019. V. 54. P. 190–203.

21. *Amel'kin N.I.* Evolution of rotational motion of a planet in a circular orbit under the influence of internal elastic and dissipative forces // *Mech. Solids*. 2020. V. 55. P. 234–247.
22. *Winfree P.K., Cochran Jr J.E.* Nonlinear attitude motion of a dual-spin spacecraft containing spherical dampers // *J. Guidance, Control, & Dyn.* 1986. V. 9. № 6. P. 681–690.
23. *Davis L.K.* Motion damper. U.S. Patent No. 3,399,317. Washington, DC: U.S. Patent and Trade-mark Office, 1968.
24. *Ivanov D.S., Ovchinnikov M.Y., Penkov V.I., Ivanova T.A.* Modeling a nanosatellite's angular motion damping using a hysteresis plate // *Math. Models&Comput. Simul.* 2020. V. 12. P. 816–823.
25. *Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S.* A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites // *Progr. in Aerosp. Sci.* 2019. V. 109. P. 100546.
26. *Roldugin D.S., Ovchinnikov M.Y.* Wobble of a spin stabilized satellite with cross products of inertia and magnetic attitude control // *Adv. in Space Res.* 2023. V. 71. № 1. P. 408–419.

The Dynamics of Small Satellites with the Three-Axial Gravitational Damper

V. S. Aslanov^{a,#} and A. V. Doroshin^a

^a*Samara National Research University, Samara, Russia*

[#]*e-mail: aslanov_vs@mail.ru*

The questions of the dynamics of the angular motion of nanosatellites with gravitational dampers are considered. The damper is a solid body rotating in a spherical cavity with a viscous liquid filling and creating internal friction with the dissipation of the kinetic energy of the angular motion. Unlike classical models of similar viscous dampers using the M.A. Lavrentiev with spherical dynamic symmetry of the body-damper, in this work the body-damper has a central triaxial ellipsoid of inertia, which increases the efficiency of interaction with an external gravitational field. This makes it possible to use almost any autonomous nanosatellite assembly as such an internal body-damper, placing it in a sealed spherical shell inside a spherical cavity with a viscous liquid in the center of mass of the main body-satellite body. The presence of a three-axis inertia tensor of the damper body changes and complicates the mathematical model of the angular motion in comparison with the classical one, which can be considered as a certain generalization and development of research in this direction.

Keywords: nanosatellite, three-axial gravitational damper, M.A. Lavrentiev's model, angular motion, central gravity field

REFERENCES

1. *Ishlinsky A.Yu.* Activities of M.A. Lavrentiev in the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 1960, no. 3, pp. 16–19.
2. *Chernousko F.L.* Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid. Moscow: Comput. Center of the AS USSR, 1968.
3. *Chernousko F.L.* On the motion of a rigid body containing a spherical damper // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 1968, vol. 1, pp. 73–79.
4. *Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D.* Evolution of Motions of a Rigid Body Relative to the Center of Mass. Izhevsk: Izhevsk Inst. for Comp. Res., 2015. 308 p.
5. *Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Chernousko F.L.* Rapid motion around a fixed point of a heavy rigid body in a resisting medium // *Izv. AN SSSR. Mech. Rigid Body*, 1982, no. 3, pp. 5–13.
6. *Akulenko L.D.* Asymptotic Methods of Optimal Control. Moscow: Nauka, 1987. 365 p.
7. *Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Rachinskaya A.L., Shchetinina Yu.S.* Evolution of perturbed rotations of an asymmetric gyro in a gravitational field and a resisting medium // *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 4, pp. 406–414.
8. *Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Rachinskaya A.L.* Evolution of the rotations of a satellite with a cavity filled with a viscous fluid // *Rigid Body Mech.*, 2007, iss. 37, pp. 126–139.

9. Akulenko L.D., Zinkevich Ya.S., Leshchenko D.D., Rachinskaya A.L. Rapid rotation of a satellite with a cavity filled with a viscous fluid under the action of moments of gravitational forces and light pressure // *Cosm. Res.*, 2011, vol. 49, no. 5, pp. 453–463.
10. Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V. On the stability of stationary rotations of a satellite with internal damping in a central gravitational field // *JAMM*, 2017. vol. 81, no. 2, pp. 123–136.
11. Kholoshchak V.V. Dynamics of rotational motion of a satellite with a damper in a central gravitational field // *Proc. MIPT*, 2017, vol. 9, no. 4 (36), pp. 106–119.
12. Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V. Rotational motion of an asymmetric satellite with a damper in a circular orbit // *JAMM*, 2019, vol. 83, iss. 1, pp. 16–31.
13. Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V. Evolution of the rotational movement of a dynamically symmetric satellite with inner damping in a circular orbit // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, iss. 2, pp. 179–189. <https://doi.org/10.3103/S0025654419030014>
14. Amel'kin N.I. On asymptotic properties of satellite motions in a central field due to internal dissipation // *JAMM*, 2011, vol. 75, no. 2, pp. 204–223.
15. Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V. Stability of the steady rotations of a satellite with internal damping in a central gravitational field // *JAMM*, 2017, vol. 81, iss. 2, pp. 85–94.
16. Sidorenko V.V. Evolution of the rotational motion of a planet with a liquid core // *Astron. Mess.*, 1993, vol. 27, no. 2, pp. 119–127.
17. Applied celestial mechanics and motion control. Coll. articles dedicated to the 90th anniversary of the birth of D.E. Okhotsimsky / Comp. by: Eneev T.M., Ovchinnikov M.Yu., Golikov A.R.. Moscow: IPM im. M.V. Keldysh, 2010. 368 p.
18. Morozov V.M., Kalenova V.I. Satellite control using magnetic moments: controllability and stabilization algorithms // *Cosm. Res.*, 2020, vol. 58, no. 3, pp. 199–207.
19. Doroshin A.V. Gravitational dampers for unloading angular momentum of nanosatellites // in: *Advances in Nonlinear Dynamics. NODYCON Conf. Proc. Ser.* / Ed. by Lacarbonara W., Balachandran B. et al. Vol. 1. Springer, 2022. pp. 257–266.
20. Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V. Rotational motion of a non-symmetrical satellite with a damper in a circular orbit // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, pp. 190–203.
21. Amel'kin N.I. Evolution of rotational motion of a planet in a circular orbit under the influence of internal elastic and dissipative forces // *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, pp. 234–247.
22. Winfree P.K., Cochran Jr J.E. Nonlinear attitude motion of a dual-spin spacecraft containing spherical dampers // *J. Guidance, Control, & Dyn.*, 1986, vol. 9, no. 6, pp. 681–690.
23. Davis L.K. Motion damper. U.S. Patent No. 3,399,317. Washington, DC: U.S. Patent and Trademark Office, 1968.
24. Ivanov D.S., Ovchinnikov M.Y., Penkov V.I., Ivanova T.A. Modeling a nanosatellite's angular motion damping using a hysteresis plate // *Math. Models&Comput. Simul.*, 2020, vol. 12, pp. 816–823.
25. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S. A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites // *Progr. in Aerosp. Sci.*, 2019, vol. 109, pp. 100546.
26. Roldugin D.S., Ovchinnikov M.Y. Wobble of a spin stabilized satellite with cross products of inertia and magnetic attitude control // *Adv. in Space Res.*, 2023, vol. 71, no. 1, pp. 408–419.

УДК 629.78+517.9

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ К ПОСТРОЕНИЮ
ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ
ИЗ ЕГО НАЧАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ В ЗАДАННОЕ
КОНЕЧНОЕ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ**

© 2023 г. А. Д. Чернышов^{1,*}, М. И. Попов^{2,**},
В. В. Горйинов^{3,***}, О. Ю. Никифорова^{1,****}

¹Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия

²Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

³Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

*e-mail: chernyshovad@mail.ru

**e-mail: mihail_semilov@mail.ru

***e-mail: gorvit77@mail.ru

****e-mail: niki22@mail.ru

Поступила в редакцию 28.09.2022 г.

После доработки 04.08.2023 г.

Принята к публикации 10.08.2023 г.

Приводится аналитическое решение задачи о движении космического корабля из начальной точки в конечный пункт за определенное время. Вначале используется метод быстрых синус-разложений. Рассматриваемая здесь космическая задача существенно нелинейная, что порождает необходимость в использовании методов тригонометрической интерполяции, которая по точности и простоте превосходит все известные интерполяции. При этом задача вычисления коэффициентов Фурье интегральными формулами заменяется на решение ортогональной интерполяционной системы. В этой связи рассматривается два случая на отрезке $[0, a]$: универсальная интерполяция и тригонометрические синус- и косинус-интерполяции. Доказана теорема о быстром убывании коэффициентов разложений, получена компактная формула для вычисления коэффициентов интерполяции. Дается общая теория быстрых разложений. Показано, что в таком случае коэффициенты Фурье с ростом порядкового номера убывают значительно быстрее по сравнению с коэффициентами Фурье в классическом случае. Это свойство позволяет существенно сократить число учитываемых членов в ряде Фурье, существенно увеличить точность расчетов и уменьшить объем вычислений на ЭВМ. Проведен анализ полученных решений задачи движения космического корабля и предложено их сравнение с точным решением тестовой задачи. Приближенное решение по методу быстрых разложений вполне можно принимать за точное, так как используемые из справочников входные данные задачи имеют более высокую погрешность.

Ключевые слова: гравитационное поле, тело переменной массы, космический корабль, метод быстрых разложений, быстрая тригонометрическая интерполяция

DOI: 10.31857/S0032823523050065, **EDN:** VCIATN

1. Введение. Расчет траектории движения космического аппарата в атмосфере Земли или других планет имеет огромное значение при подготовке полетов спутников и космических кораблей. Математическая модель движения космического корабля на

пассивном и активном участках траектории представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений. Интегрирование такой системы связано со значительными трудностями в связи с их иррациональной нелинейностью, так как в системе присутствуют дробные степени от неизвестных функций. Задачи, связанные с расчетом траектории движения космических кораблей, обычно решаются численными методами [1–3]. Наиболее успешным из них является метод “раздельного интегрирования” [4]. Полуаналитический метод с использованием вспомогательных эмпирических зависимостей для введенных целевых и базисных функций применяется в работе [5]. По существу такой подход является улучшенным численным методом. Таким образом, актуальным является разработка новых методов для расчета траекторий космических кораблей, способных с высокой точностью при минимальных временных затратах на ЭВМ определить решение в аналитическом виде. Этим условиям удовлетворяет метод быстрых разложений [6], для применимости которого требуется только условие гладкости рассматриваемых функций в заданной области до некоторого заданного порядка. Высокая эффективность метода быстрых разложений апробирована во многих публикациях. Например, решены нелинейные задачи для интегро-дифференциальных уравнений [7], для задач с криволинейными областями [8], для задач с неизвестной границей типа Стефана [9], задачи космического характера [10] и многие другие. Данная статья еще один пример эффективности метода быстрых разложений.

2. Постановка задачи. Космический корабль при работе его реактивных двигателей будем считать телом переменной массы. Запишем уравнения движения корабля в виде системы дифференциальных уравнений для его центра масс:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \beta \dot{\mathbf{r}} + \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{P}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t)) \in C^6 (t \in [-a, a])$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$. В системе (2.1) $\alpha = gR_3^2$ – коэффициент притяжения к Земле единичной массы, R_3 – радиус Земли, g – ускорение свободного падения, β – коэффициент аэродинамического сопротивления, P_x, P_y, P_z – составляющие ускорений реактивной и других возможных сил.

В качестве тестового примера, функции P_x, P_y, P_z в правой части (2.1) подобраны так, чтобы можно было записать точное решение задачи в виде

$$x_* = a \cos \omega t, \quad y_* = a \sin \omega t, \quad z_* = R_3 + \omega t \quad (2.2)$$

Траектория (2.2) обеспечивается силами P_x, P_y, P_z :

$$\begin{aligned} P_x &= -a\omega^2 \cos \omega t - \beta a\omega \sin \omega t + \frac{\alpha}{r_*^3} a \cos \omega t \\ P_y &= -a\omega^2 \sin \omega t + \beta a\omega \cos \omega t + \frac{\alpha}{r_*^3} a \sin \omega t, \quad P_z = \beta \omega + \frac{\alpha}{r_*^3} (R_3 + \omega t) \\ r_* &= \sqrt{x_*^2 + y_*^2 + z_*^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Граничные условия для точного решения (2.2) из заданного начального положения $x(0), y(0), z(0)$ в конечное $x(t_0), y(t_0), z(t_0)$ примут вид:

$$\begin{aligned} x(0) &= a, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = R_3 \\ x(t_0) &= a \cos \omega t_0 = x_{t_0}, \quad y(t_0) = a \sin \omega t_0 = y_{t_0}, \quad z(t_0) = R_3 + \omega t_0 = z_{t_0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Данная задача является важной и актуальной. Решение задачи (2.1), (2.4) будет получено новым аналитическим методом с высокой точностью при минимальных временных затратах на ЭВМ.

В качестве тестовой задачи выбрана одна из простейших, типа винтовой линии, которая может применяться для осложнения определения координат космического корабля. Данное обстоятельство не является принципиальным, так как при использовании метода быстрых разложений с таким же успехом могла бы быть использована и любая другая траектория космического корабля, наиболее близкая к реальной траектории, если бы она была известна.

Будем рассматривать движение космического корабля как движение его центра масс из заданного начального положения в конечное. Поэтому в задаче (2.1), (2.4) неизвестными являются координаты центра масс космического корабля $\mathbf{r}(t)$ во время его полета. Составляющие ускорений сил $\mathbf{P}$ в (2.3) подобраны так, что корабль движется по выбранной винтовой линии (2.2). Имея точное решение (2.2) можно путем сравнения с приближенным, полученным ниже, вычислить абсолютную погрешность местоположения корабля, его скорость и ускорение, что позволит сравнить приближенное аналитическое решение с точным.

Рассматриваемая задача имеет тестовый характер для анализа ряда преимуществ метода быстрых разложений. В связи с этим аэродинамическое сопротивление в (2.1) принято пропорциональным первой степени скорости, поскольку учет нелинейных слагаемых не создает принципиальных трудностей, увеличивая лишь время вычислительных экспериментов. Изложим основную суть метода быстрых разложений равномерных интерполяций.

3. Основные характеристики метода быстрых разложений равномерных интерполяций. Основными недостатками всех известных аналитических интерполяций является их невысокая точность и недопустимость почленного дифференцирования, которое приводит к большой погрешности. Сюда относятся вариационные методы, методы наименьших квадратов, сплайн-методы, классические методы тригонометрической интерполяции и некоторые другие. В известных научных публикациях авторы пишут о возможности дифференцирования при использовании их метода. Это голословные утверждения, так как не приводятся строгие математические обоснования для возможности дифференцирования и не приводятся примеры, подтверждающие возможность дифференцирования. На самом деле во всех известных случаях дифференцирование недопустимо, поэтому авторы не приводят тестовые примеры. Лишь только метод дискретного преобразования Фурье позволяет дифференцирование до второго порядка. Формальное использование данного метода к уравнениям четвертого порядка привело к расходящимся рядам и неправильным результатам.

Метод быстрых разложений (тригонометрических интерполяций) на данный момент является единственным методом, эффективно решающим данную проблему. К настоящему времени разработано несколько разновидностей быстрых разложений: синус-, косинус-разложения [6], универсальный метод быстрых разложений [11].

3.1. Полные тригонометрические интерполяции. При рассмотрении многих прикладных задач удобно использовать полные тригонометрические ряды Фурье, например работа [12]. Пусть некоторая функция $f(x)$ непрерывна и интегрируема на отрезке $[-a, a]$. Представим ее полной интерполяционной тригонометрической суммой

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N-1} a_n \cos \pi n \frac{x}{a} + b_n \sin \pi n \frac{x}{a}, \quad x \in [-a, a], \quad f(x) \in L_p^\alpha \quad (3.1)$$

Отрезок $[-a, a]$ равномерно разобьем на $2N$ частей точками x_j , коэффициенты интерполяции a_0, a_n, b_n вычислим из интерполяционной системы, полагая в (3.1) $x = x_j$,

$$x_j = \frac{a \cdot j}{N}; \quad j = -N + 1, \dots, N - 1:$$

$$f(x_j) = a_0 + \sum_{n=1}^{N-1} a_n \cos \pi n \frac{x_j}{a} + b_n \sin \pi n \frac{x_j}{a}; \quad j = -N \div N-1 \quad (3.2)$$

Из сходимости ряда (3.1) следует, что в системе (3.2) уравнение при $j = 0$ следует опустить, так как оно выполняется тождественно. Поэтому в (3.2) имеем $2N - 1$ уравнений относительно такого же количества неизвестных a_0, a_n, b_n .

Задача о нахождении a_0, a_n, b_n из системы (3.2) сильно упрощается, если доказать, что дискретная система функций

$$\left(1, \cos \pi n \frac{x_j}{a}, \sin \pi n \frac{x_j}{a}\right); \quad j = -N \div N-1 \quad (3.3)$$

является ортогональной при суммировании по переменной $j = -N \div N-1$ в том же смысле, как и непрерывная система $\left(1, \cos \pi n \frac{x}{a}, \sin \pi n \frac{x}{a}\right); \quad x \in [-a, a]$ является ортогональной в пространстве Гильберта. Это означает, что надо доказать справедливость следующих равенств

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{j=-N}^{N-1} \cos \pi n \frac{x_j}{a} = 0, \quad \sum_{j=-N}^{N-1} \sin \pi n \frac{x_j}{a} = 0; \quad j = -N \div N-1 \\ 2) \quad & \sum_{j=-N}^{N-1} \cos \pi m \frac{x_j}{a} \cos \pi n \frac{x_j}{a} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n \\ 3) \quad & \sum_{j=-N}^{N-1} \sin \pi m \frac{x_j}{a} \sin \pi n \frac{x_j}{a} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n \\ 4) \quad & \sum_{j=-N}^{N-1} \sin \pi m \frac{x_j}{a} \cos \pi n \frac{x_j}{a} = 0 \quad \text{при} \quad \forall (m, n) = 1 \div (N-1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

В последнем равенстве системы (3.4) не следует требовать выполнение неравенства $m \neq n$, так как в 4) из (3.4) равенство выполняется при любых m, n . Значение индекса $j = N$ в суммах (3.4) исключается в силу предполагаемой периодичности $f(x)$, представленной зависимостью (3.1), при ее продолжении на область вне отрезка $[-a, a]$, где она практически не рассматривается.

Для доказательства первой формулы 1) из (3.4) воспользуемся тригонометрической формулой Эйлера для комплексного числа и представим левую часть данной формулы в виде

$$\sum_{j=-N}^{N-1} \cos \pi n \frac{x_j}{a} = \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} \exp i \pi n \frac{j}{N} + \exp \left(-i \pi n \frac{j}{N} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} q_{nj} + q_{-nj}, \quad (3.5)$$

где i — мнимая единица и использовано обозначение

$$\exp \left(i \pi n \frac{j}{N} \right) = q_{nj}, \quad \exp \left(-i \pi n \frac{j}{N} \right) = q_{-nj}$$

Тогда равенство (3.5) можно записать в виде

$$\sum_{j=-N}^{N-1} \cos \pi n \frac{x_j}{a} = \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} q_{nj} + q_{-nj} \quad (3.6)$$

При помощи свойств геометрических прогрессий правую часть в (3.6) преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N}^{N-1} q_{nj} + q_{-nj} &= (q_{-nN} + q_{n(1-N)} + q_{n(2-N)} + \dots + q_{n(N-1)}) + \\ &+ (q_{nN} + q_{n(N-1)} + q_{n(N-2)} + \dots + q_{n(1-N)}) = q_{-nN} \frac{1 - q_{2Nn}}{1 - q_n} + q_{nN} \frac{1 - q_{-2Nn}}{1 - q_{-n}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Так как

$$\begin{aligned} q_{\pm 2Nn} &= \exp(\pm i 2\pi n) = \cos(\pm 2\pi n) + i \sin(\pm 2\pi n) = 1 \\ q_{\pm n} &= \exp\left(\pm i \frac{\pi n}{N}\right) \neq 1 \quad \text{при} \quad n = 1 \div N - 1 \end{aligned}$$

то из (3.7) получаем доказательство первого равенства из (3.4). Аналогично доказываются и все остальные равенства из (3.4), при помощи тригонометрической формулы Эйлера и получающихся геометрических прогрессий.

Остается вычислить норму для дискретной системы (3.3). Вначале рассмотрим сумму квадратов косинусов

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N}^{N-1} \cos^2 \pi n \frac{x_j}{a} &= \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} \left(1 + \cos 2\pi n \frac{j}{N}\right) = N + \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^{N-1} \cos 2\pi n \frac{j}{N} = \\ &= N + \frac{1}{4} q_{-2nN} \frac{1 - q_{4nN}}{1 - q_{2n}} + \frac{1}{4} q_{2nN} \frac{1 - q_{-4nN}}{1 - q_{-2n}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для преобразования равенства (3.8) воспользуемся выражениями

$$q_{\pm 2nN} = \cos 2\pi n \pm i \sin 2\pi n = 1, \quad q_{\pm 4nN} = \cos 4\pi n \pm i \sin 4\pi n = 1 \quad (3.9)$$

Кроме (3.9) при $n = 1 \div N - 1$ выполняются неравенства

$$q_{\pm 2n} = \cos \frac{2\pi n}{N} + i \sin \frac{2\pi n}{N} \neq 1, \quad q_{\pm 4nN} = \cos \frac{4\pi n}{N} + i \sin \frac{4\pi n}{N} \neq 1 \quad (3.10)$$

Для доказательства справедливости неравенств (3.10) положим обратное: пусть выполняются равенства

$$q_{\pm 2n} = \cos \frac{2\pi n}{N} + i \sin \frac{2\pi n}{N} = 1, \quad q_{\pm 4nN} = \cos \frac{4\pi n}{N} + i \sin \frac{4\pi n}{N} = 1$$

Докажем, что данные равенства приведут к противоречиям. Эти равенства возможны, если $n/N = k_0$ — какое-либо целое число, или для второго случая $2n/N = k_0$ — какое-либо целое число. Но при $n = 1 \div N - 1$ дробь n/N всегда остается правильной и потому не может равняться целому числу. Во втором случае имеем следующие возможные значения дроби

$$\frac{2n}{N} = \frac{2n}{N} \div \frac{2(N-1)}{N} = \frac{2n}{N} \div 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

При $N \geq 3$ дробь $2/N$ всегда остается правильной и потому $2n/N$ не может равняться целому числу. Полученное противоречие является обоснованием справедливости неравенств (3.10) при $N \geq 3$.

При помощи (3.9) и (3.10) из (3.8) получаем выражение для нормы косинусов

$$\sum_{j=-N}^{N-1} \cos^2 \pi n \frac{x_j}{a} = N \quad (3.11)$$

Аналогично доказывается и выражение для нормы синусов

$$\sum_{j=-N}^{N-1} \sin^2 \pi n \frac{x_j}{a} = N \quad (3.12)$$

Следует заметить, что нормы (3.11) и (3.12) не зависят от номера n . Ортогональные свойства (3.4) и выражения норм (3.11) и (3.12) позволяют получить решение интерполяционной системы (3.2) относительно a_0, a_n, b_n в явном конечном виде. Для этого вначале левую и правую части (3.2) просуммируем по индексу j :

$$\sum_{j=-N}^{N-1} f(x_j) = 2Na_0 + \sum_{n=1}^{N-1} a_n \sum_{j=-N}^{N-1} \cos \pi n \frac{x_j}{a} + b_n \sum_{j=-N}^{N-1} \sin \pi n \frac{x_j}{a} \quad (3.13)$$

Выше было доказано, что суммы косинусов и синусов по свойству 1) из (3.4) равны нулю, поэтому из (3.13) имеем

$$a_0 = \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{N-1} f(x_j), \quad (3.14)$$

т.е. коэффициент a_0 равен среднеарифметическому значению $f(x_j)$ в точках равномерной интерполяции на отрезке $[-a, a]$.

Для нахождения a_n умножим левую и правую части (3.2) на $\cos \pi m j/N$ и просуммируем по индексу j :

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N}^{N-1} f(x_j) \cos \pi m \frac{x_j}{a} &= \sum_{j=-N}^{N-1} a_0 \cos \pi m \frac{x_j}{a} + \\ &+ \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} a_n \cos \pi m \frac{x_j}{a} \cos \pi n \frac{x_j}{a} + b_n \sin \pi n \frac{x_j}{a} \cos \pi m \frac{x_j}{a} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для упрощения равенств (3.15) воспользуемся свойствами (3.4) и (3.11),

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N}^{N-1} \cos \pi m \frac{x_j}{a} &= 0, \quad \sum_{j=-N}^{N-1} \cos \pi m \frac{x_j}{a} \cos \pi n \frac{x_j}{a} = 0 \quad \text{при } m \neq n, \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{j=-N}^{N-1} \cos \pi m \frac{x_j}{a} \cos \pi n \frac{x_j}{a} &= N \quad \text{при } m = n \end{aligned} \quad (3.16)$$

С учетом (3.16) уравнение (3.15) принимает вид

$$\sum_{j=-N}^{N-1} f(x_j) \cos \pi m \frac{x_j}{a} = a_m N \quad (3.17)$$

Отсюда находим в явном виде коэффициент a_m :

$$a_m = \frac{1}{N} \sum_{j=-N}^{N-1} f(x_j) \cos \pi m \frac{x_j}{a}; \quad m = 1 \div N-1 \quad (3.18)$$

Аналогично после умножения левой и правой частей (3.2) на $\sin \pi m j/N$ и суммирования по индексу j подобными вычислениями найдем b_m :

$$b_m = \frac{1}{N} \sum_{j=-N}^{N-1} f(x_j) \sin \pi m \frac{x_j}{a}; \quad m = 1 \div N-1 \quad (3.19)$$

Подставляя a_0, a_n, b_n из (3.14), (3.18), (3.19) в (3.1), получим формулу для полной равномерной тригонометрической интерполяции $f(x)$ на отрезке $[-a, a]$:

$$f(x) = \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{N-1} f(x_j) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} f(x_j) \cos \pi n \frac{x_j}{a} \cos \pi n \frac{x}{a} + \\ + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} f(x_j) \sin \pi n \frac{x_j}{a} \sin \pi n \frac{x}{a}; \quad f(x) \in L_p^\alpha(x \in [-a, a]) \quad (3.20)$$

3.2. Синус- и косинус-интерполяции. Рассмотрим случай, когда $f(x)$ антисимметричная функция на отрезке $[-a, a]$, $f(x) = -f(-x)$. Такой случай часто используется при рассмотрении инженерных задач, когда материальное тело описывается одной координатой $x \in [0, a]$. Тогда достаточно $f(x)$ рассматривать на отрезке $[0, a]$, формулы (3.14), (3.18), (3.19) упрощаются и выражение (3.20) принимает вид синус разложения

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) \sin \pi n \frac{x_j}{a}; \quad n = 1 \div N-1 \\ f(x) = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) \sin \pi n \frac{x_j}{a} \right) \sin \pi n \frac{x}{a}; \quad x \in [0, a] \quad (3.21)$$

Особенно важным следует отметить, что в выражении для $f(x)$ в (3.21) в сумме по j количество слагаемых равно количеству коэффициентов b_n . Данное свойство будет использовано в дальнейшем, что позволит получить замкнутую алгебраическую систему относительно неизвестных.

Если же $f(x)$ продолжить на отрезок $[-a, 0]$ симметрично, т.е. положить $f(x) = f(-x)$, то формулы (3.14), (3.18), (3.19) соответственно упрощаются и выражение (3.20) принимает вид косинус разложения

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \cos \pi n \frac{x_j}{a} \cos \pi n \frac{x}{a}; \quad f(x) \in L_p^\alpha(x \in [0, a]) \quad (3.22)$$

Интерполяционные формулы (3.20)–(3.22) простые, но они имеют существенные недостатки, так как данные суммы при больших N в общем случае медленно сходятся и не допускают почленное дифференцирование. Тогда для достижения высокой точности потребуется большое количество слагаемых, что и является основной причиной редкого их использования в научных работах.

4. Решение задачи о расчете траектории тела переменной массы методом быстрой тригонометрической синус-интерполяции. Для решения некоторой задачи методом быстрых синус-разложений какую-либо неизвестную функцию $f(t)$ следует предварительно представить суммой специальной граничной функции M_{2k} и ряда Фурье для разности $f(t) - M_{2k}(t)$ на заданном отрезке

$$f(t) = M_{2k}(t) + \sum_{m=1}^N f_m \sin \pi m \tau; \quad \tau \in [0, 1], \quad (4.1)$$

где $\tau = t/t_0$, t_0 – время движения космического корабля.

Граничную функцию M_{2k} зададим рекуррентным соотношением:

$$M_{2k} = M_{2(k-1)} + x^{(2k)}(0)P_{2k} + x^{(2k)}(t_0)Q_{2k} \quad (4.2)$$

Здесь $P_{2k}(x)$, $Q_{2k}(x)$ – быстрые полиномы, которые в случае граничных условий Дирихле вычисляются по рекуррентным интегральным формулам

$$P_0 = 1 - \tau, \quad Q_0 = \tau$$

$$\begin{aligned}
 P_{2k}(t) &= \int_0^t \int_0^{t_{(1)}} P_{2k-2}(t_{(2)}) dt_{(2)} dt_{(1)} - \frac{t}{t_0} \int_0^{t_0} \int_0^{t_{(1)}} P_{2k-2}(t_{(2)}) dt_{(2)} dt_{(1)} \\
 Q_{2k}(t) &= \int_0^t \int_0^{t_{(1)}} Q_{2k-2}(t_{(2)}) dt_{(2)} dt_{(1)} - \frac{t}{t_0} \int_0^{t_0} \int_0^{t_{(1)}} Q_{2k-2}(t_{(2)}) dt_{(2)} dt_{(1)} \\
 k &= 1 \div p, \quad 0 \leq t_{(2)} \leq t_{(1)}, \quad 0 \leq t_{(1)} \leq t, \quad 0 \leq t \leq t_0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Полиномы $P_0(t)$, $Q_0(t)$ являются производящими, через них при помощи двукратных интегралов находятся все остальные с четными индексами. Быстрые полиномы $P_{2k}(t)$, $Q_{2k}(t)$ можно вычислить также при помощи производных [6]:

$$\begin{aligned}
 P_{2k}''(t) &= P_{2k-2}(t), \quad P_{2k}(0) = P_{2k}(t_0) = 0; \quad k \neq 0, \quad k = 1 \div p \\
 Q_{2k}''(t) &= Q_{2k-2}(t), \quad Q_{2k}(0) = Q_{2k}(t_0) = 0
 \end{aligned}$$

Значение индекса $2k$ в (4.1) может быть выбрано произвольно, но не ниже порядка старшей производной в дифференциальном уравнении, в которое предполагается подставлять разложение (4.1). Быстрое разложение (4.1) допускает почленное дифференцирование ряда Фурье $2k$ раз, при этом ряды остаются быстро сходящимися. За счет специальной конструкции полиномов $P_{2k}(t)$, $Q_{2k}(t)$ в (4.3) граничная функция $M_{2k}(t)$ значительно увеличивает скорость сходимости ряда Фурье по сравнению с классическим рядом, с увеличением порядка $2k$ скорость сходимости ряда существенно возрастает [13, 14].

Для определенности и простоты дальнейших выкладок выберем граничную функцию в быстром синус-разложении (4.1) невысокого порядка при $k = 1$, т.е. M_2 . Тогда выражение для $\mathbf{r}(t)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0)(1 - \tau) + \mathbf{r}(t_0)\tau + \ddot{\mathbf{r}}(0)t_0^2\left(\frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{6}\tau^3 - \frac{1}{3}\tau\right) + \\
 &+ \frac{1}{6}\ddot{\mathbf{r}}(t_0)t_0^2(\tau^3 - \tau) + \sum_{m=1}^N \mathbf{r}_m \sin \pi m \tau,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $\mathbf{r}_m = (x_m, y_m, z_m)$.

Теорема о скорости убывания коэффициентов быстрого синус-разложения.

Пусть $x(t) \in L_2^4(t \in [0, t_0])$, где L_2^4 — классы функций Соболева–Лиувилля [15]. Тогда коэффициенты x_m быстрого разложения (4.4) для $x(t)$ с ростом номера m будут убывать по закону $x_m \sim (m\pi)^{-4}$.

Покажем это на примере для $x(t)$. Из (4.4) запишем ряд Фурье для $x(t)$ разностью между $x(t)$ и ее граничной функцией:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^N x_m \sin \pi m \tau &= x(t) - x(0)(1 - \tau) - x(t_0)\tau - \\
 &- t_0^2 \left[\ddot{x}(0) \left(\frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{6}\tau^3 - \frac{1}{3}\tau \right) + \frac{1}{6}\ddot{x}(t_0)(\tau^3 - \tau) \right]
 \end{aligned}$$

Отсюда для коэффициентов x_m имеем интегральную формулу

$$\begin{aligned}
 x_m &= \frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} \left(x(t) - x(0)(1 - \tau) - x(t_0)\tau - \right. \\
 &- \left. t_0^2 \left[\ddot{x}(0) \left(\frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{6}\tau^3 - \frac{1}{3}\tau \right) + \frac{1}{6}\ddot{x}(t_0)(\tau^3 - \tau) \right] \right) \sin \pi m \tau dt
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

К интегралу в (4.5) применим интегрирование по частям четыре раза, получим

$$x_m = \frac{2t_0^3}{(\pi m)^4} \int_0^{t_0} x^{(4)}(t) \sin m\pi\tau dt$$

Что и требовалось доказать.

Аналогичные оценки получим для коэффициентов Фурье y_m и z_m .

Отсюда следует, что решение системы в виде (4.4) гарантирует возможность его почленного двукратного дифференцирования по времени, которые присутствуют в уравнениях движения (2.1). При использовании граничных функций $M_{2k}(t)$ более высокого порядка $2k \geq 4$ **степень** скорости убывания коэффициентов Фурье возрастает пропорционально порядку граничной функции и равна $2k + 2$. В данной работе ограничимся простейшим вариантом, когда $k = 1$.

Выполняя граничные условия (2.4) и дифференциальные уравнения (2.1), для построения решения в виде (4.4) надо найти следующие постоянные коэффициенты

$$\mathbf{r}(0), \mathbf{r}(t_0), \ddot{\mathbf{r}}(0), \ddot{\mathbf{r}}(t_0), \mathbf{r}_n; \quad n = 1 \div N \quad (4.6)$$

Неизвестные $\mathbf{r}(0), \mathbf{r}(t_0)$ получаем из граничных условий (2.4). Для нахождения остальных $3N + 6$ коэффициентов (4.6) подставим выражения для координат траектории полета из (4.4) в уравнения движения (2.1):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(0)(1 - \tau) + \ddot{\mathbf{r}}(t_0)\tau - \sum_{m=1}^N \mathbf{r}_m \left(\frac{\pi m}{t_0} \right)^2 \sin \pi m \tau + \alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \beta \left\{ \frac{\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{r}(0)}{t_0} + \right. \\ \left. + t_0 \left[\ddot{\mathbf{r}}(0) \left(\tau - \frac{1}{2} \tau^2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}(t_0) \left(\tau^2 - \frac{1}{3} \right) \right] + \sum_{m=1}^N \mathbf{r}_m \frac{\pi m}{t_0} \cos \pi m \tau \right\} = \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$.

В дальнейшем вследствие нелинейности системы (4.7) с дробными степенями относительно неизвестных (4.6), удобно использовать поточечный метод, который в литературе также называют методом коллокаций [16], либо методом тригонометрической интерполяции [17]. При рассмотрении нелинейных краевых задач наиболее просто применять тригонометрическую синус-интерполяцию, так как ряд Фурье быстро сходится и потому в ряде достаточно удерживать небольшое количество неизвестных слагаемых.

Вначале в соответствии с методом быстрых синус-разложений [6] в системе (4.7) следует положить $t = 0$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(0) + \alpha \mathbf{H}_* + \beta \left(\frac{\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{r}(0)}{t_0} - \frac{1}{3} t_0 \left(\ddot{\mathbf{r}}(0) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}(t_0) \right) + \sum_{m=1}^N \mathbf{r}_m \frac{\pi m}{t_0} \right) = \mathbf{P}|_{t=0} \\ \mathbf{H}_* = \left(\frac{a}{(a^2 + R_3^2)^{3/2}}, 0, \frac{R_3}{(a^2 + R_3^2)^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

и затем в (4.7) взять $t = t_0$:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t_0) + \alpha \frac{\mathbf{r}(t_0)}{r^3(t_0)} + \beta \left(\frac{\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{r}(0)}{t_0} + \frac{t_0}{3} \left[\frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}(0) - \ddot{\mathbf{r}}(t_0) \right] + \sum_{n=1}^N (-1)^n \mathbf{r}_n \frac{\pi n}{t_0} \right) = \mathbf{P}|_{t=t_0} \quad (4.9)$$

В (4.8) и (4.9) имеем 6 уравнений. Для нахождения оставшихся $3N$ неизвестных $x_j, y_j, z_j, j = 1 \div N$ отрезок $[0, t_0]$ разделим на $N + 1$ равных частей интерполяционны-

ми точками $t_j = t_0/(N+1)$ и запишем уравнения (4.7) в каждой расчетной точке при $t = t_j, j = 1 \div N$:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(0)(1 - \tau_j) + \ddot{\mathbf{r}}(t_0)\tau_j - \sum_{n=1}^N \mathbf{r}_n \left(\frac{\pi n}{t_0} \right)^2 \sin \pi n \tau_j + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} \Big|_{t=t_j} + \beta t_0 \left[\frac{\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{r}(0)}{t_0^2} + \right. \\ \left. + \ddot{\mathbf{r}}(0) \left(\tau_j - \frac{1}{2} \tau_j^2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}(t_0) \left(\tau_j^2 - \frac{1}{3} \right) + \sum_{n=1}^N \mathbf{r}_n \frac{\pi n}{t_0^2} \cos \pi n \tau_j \right] = \mathbf{P} \Big|_{t=t_j} \quad (4.10) \\ t_j = jt_0/(N+1), \quad \tau_j = t_j/t_0, \quad j = 1 \div N \end{aligned}$$

Полученную систему (4.8)–(4.10) решаем в Maple. Подставляя найденные коэффициенты (4.6) в (4.4), имеем приближенное аналитическое решение. Отметим, что в полученном решении коэффициенты быстрого разложения находятся численно, но само решение задачи записано в аналитическом виде. Точность вычислений можно повысить увеличением порядка граничной функции и/или увеличением количества членов ряда Фурье. Следует отметить, что возрастание порядка граничной функции приводит к увеличению количества неизвестных постоянных коэффициентов, для определения которых необходимо записать дополнительные алгебраические уравнения. Например, если в быстром разложении (4.1) использовать граничную функцию четвертого порядка M_4 ($k = 2$), то перечень (4.6) увеличится на шесть новых неизвестных

$$\ddot{x}(0), \ddot{x}(t_0), \ddot{y}(0), \ddot{y}(t_0), \ddot{z}(0), \ddot{z}(t_0) \quad (4.11)$$

(по сравнению с вышеописанным решением для случая граничной функции второго порядка M_2). Алгебраические уравнения для нахождения неизвестных (4.11) получаются следующими действиями:

1) дифференцируем уравнения (4.7) два раза,

2) в полученные уравнения последовательно подставим $t = 0$ и $t = t_0$.

Записанные шесть уравнений добавляем к системе (4.8)–(4.10).

В общем случае, при использовании граничной функции M_{2k} , для определения ее неизвестных коэффициентов будем иметь $2k - 2$ алгебраических уравнений, которые получаются при дифференцировании уравнений (4.7) $2k - 2$ раз и последовательном подставлении в уравнения, полученные от четных производных значений $t = 0$ и $t = t_0$.

Движение космического корабля без потери массы возможно лишь при выключенном двигателе. Обобщим постановку задачи. Предположим, что топливо расходуется по линейному закону, поэтому масса корабля выражается функцией $m(t) = m_0(1 - \lambda t)$, где m_0 – стартовая масса, λ – коэффициент пропорциональности. В этом случае уравнения движения примут вид:

$$m_0(1 - \lambda t)\ddot{\mathbf{r}} + \beta \dot{\mathbf{r}} + \alpha m_0(1 - \lambda t) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{P}, \quad (4.12)$$

где в силу $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ могут входить реактивная сила $\dot{m} \mathbf{v}_r$, сила давления солнечного ветра, сила сопротивления космической пыли и т.д.

Разделим каждое уравнение на m_0 и обозначим $\beta_0 = \beta/m_0$ и $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}/m_0$, окончательно получим:

$$(1 - \lambda t)\ddot{\mathbf{r}} + \beta_0 \dot{\mathbf{r}} + \alpha(1 - \lambda t) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{P}_0 \quad (4.13)$$

Таблица 1. Абсолютная погрешность вычислений (5.1)

Исследуемый объект	N	Граничная функция			
		M_2	M_4	M_6	M_8
Δs	5	2.3×10^{-10}	9.2×10^{-17}	3.4×10^{-23}	1.1×10^{-29}
	10	2.2×10^{-11}	5.3×10^{-18}	1.3×10^{-24}	2.7×10^{-31}
	20	1.6×10^{-12}	1.6×10^{-19}	1.7×10^{-26}	1.6×10^{-33}
	40	1.1×10^{-13}	3.4×10^{-21}	1.4×10^{-28}	5.6×10^{-36}
	80	6.8×10^{-15}	6.6×10^{-23}	8.1×10^{-31}	1.2×10^{-38}
Δv	5	1.4×10^{-10}	7.2×10^{-17}	3.3×10^{-23}	1.2×10^{-29}
	10	2.3×10^{-11}	6.5×10^{-18}	1.8×10^{-24}	4.3×10^{-31}
	20	3.2×10^{-12}	3.5×10^{-19}	3.9×10^{-26}	4.3×10^{-33}
	40	4.2×10^{-13}	1.4×10^{-20}	5.8×10^{-28}	2.5×10^{-35}
	80	5.5×10^{-14}	5.3×10^{-22}	6.7×10^{-30}	8.9×10^{-38}
Δa	5	5.8×10^{-11}	3.9×10^{-17}	2.2×10^{-23}	9.6×10^{-30}
	10	1.7×10^{-11}	5.6×10^{-18}	1.8×10^{-24}	4.8×10^{-31}
	20	4.6×10^{-12}	5.2×10^{-19}	6.6×10^{-26}	7.7×10^{-33}
	40	1.2×10^{-12}	4.1×10^{-20}	1.8×10^{-27}	7.7×10^{-35}
	80	3.1×10^{-13}	2.9×10^{-21}	3.7×10^{-29}	5.2×10^{-37}

Составляющие ускорений реактивной и других возможных сил подберем так, чтобы имелось то же точное решение задачи (2.2):

$$\mathbf{P}_0 = (1 - \lambda t) \ddot{\mathbf{r}}_* + \beta_0 \dot{\mathbf{r}}_* + \alpha(1 - \lambda t) \frac{\mathbf{r}_*}{r_*^3}; \quad \mathbf{r}_* = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, R_3 + \omega t)$$

Ход решения задачи (4.13), (2.4) аналогичен описанному выше для задачи (2.1), (2.4).

5. Полученные результаты и их анализ. Для вычислительных экспериментов определим значения параметров, входящих в систему (2.1): $t_0 = 30$ с, $\omega = \pi/3600$ с⁻¹, $w = 2000$ м/с, $a = 100$ м, $g = 9.8$ м/с², $R_3 = 6372$ км, $\beta = 0.1$. Все расчеты выполнены в системе компьютерной алгебры Maple.

Абсолютные погрешности траектории корабля, его скорости и ускорения вычислим по формулам

$$\begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{(x_* - x)^2 + (y_* - y)^2 + (z_* - z)^2} \\ \Delta v &= \sqrt{(\dot{x}_* - \dot{x})^2 + (\dot{y}_* - \dot{y})^2 + (\dot{z}_* - \dot{z})^2} \\ \Delta a &= \sqrt{(\ddot{x}_* - \ddot{x})^2 + (\ddot{y}_* - \ddot{y})^2 + (\ddot{z}_* - \ddot{z})^2} \end{aligned} \quad (5.1)$$

В табл. 1 приведены результаты расчетов абсолютных погрешностей (5.1) приближенного аналитического решения задачи (2.1), (2.4) методом быстрой тригонометрической синус-интерполяции при различных граничных функциях и количестве членов ряда Фурье. Мы видим, что при увеличении количества членов ряда Фурье в 2 раза, погрешность уменьшается как минимум на один порядок, а при увеличении порядка граничной функции на 2, точность увеличивается сразу на 6–8 порядков. Абсолютная погрешность скорости ракеты убывает медленнее, а ускорения еще медленнее по сравнению с погрешностью траектории при увеличении количества членов ря-

Таблица 2. Параметры вычислительного процесса

Параметр	N	Граничная функция			
		M_2	M_4	M_6	M_8
Время расчета, с	5	2	3	4	5
	10	3	4	6	8
	20	9	11	14	20
	40	50	55	72	81
	80	330	408	482	1512
Минимальное количество значащих цифр в расчете	5	15	22	29	35
	10	20	24	30	37
	20	25	25	35	40
	40	40	35	40	45
	80	60	70	75	80

Таблица 3. Погрешности активного участка полета

N	Абсолютные погрешности			Время расчета, с
	Δs	Δv	Δa	
5	9.1×10^{-17}	7.1×10^{-17}	3.2×10^{-17}	3
10	5.3×10^{-18}	6.2×10^{-18}	5.5×10^{-18}	6
20	1.5×10^{-19}	3.6×10^{-19}	5.2×10^{-19}	14
40	3.5×10^{-21}	1.4×10^{-20}	4.1×10^{-20}	60
80	6.1×10^{-23}	5.1×10^{-22}	2.9×10^{-21}	402

да быстрого синус-разложения. Однако с увеличением порядка граничной функции все три погрешности ведут себя одинаково.

Таблица 2 содержит сведения о таких параметрах вычислительного процесса как время расчета и количество значащих цифр. Видно, что время расчета резко возрастает при увеличении количества членов ряда Фурье, а при увеличении порядка граничной функции увеличение времени расчета незначительно.

Проанализировав данные табл. 1 и 2, можно сделать вывод, что для достижения высокой точности решения необходимо увеличить порядок граничной функции, а количество членов ряда Фурье оставить минимальным.

Для численного расчета траектории полета космического корабля с включенным двигателем зададим $\lambda = 1/(2t_0)$, $\beta_0 = 0.1$. Остальные параметры, входящие в задачу (4.13), (2.4) возьмем такими же как при решении задачи (2.1), (2.4). В табл. 3 приведены абсолютные погрешности (5.1) расчета методом быстрой тригонометрической синус-интерполяции с граничной функцией M_4 .

Анализ табличных данных показывает ту же динамику изменения погрешности, что и в случае с постоянной массой (см. табл. 1), причем с тем же порядком точности для граничной функции M_4 . При увеличении количества членов ряда Фурье в 2 раза, погрешность уменьшается как минимум на один порядок. Погрешности скорости и ускорения имеют тот же порядок, что и погрешность траектории для 5, 10 и 20 членов ряда Фурье, и отличаются на порядок для 80 членов.

Таким образом, метод быстрой тригонометрической синус-интерполяции показывает отличные результаты для расчета траектории полета космического корабля как с включенным двигателем, так и с выключенным.

Заключение. С помощью метода быстрой тригонометрической синус-интерполяции найдено приближенное аналитическое решение задачи о движении космического корабля из начальной точки в конечный пункт за определенное время. Исследование полученного решения выявило, что для достижения высокой точности решения в методе быстрой тригонометрической синус-интерполяции необходимо увеличить порядок граничной функции (в четыре раза), а количество членов ряда Фурье оставить минимальным (пять членов). Преимуществом метода быстрой тригонометрической синус-интерполяции является и то, что решение получено в аналитическом виде, что позволяет проводить различные исследования свойств траектории. В системе (2.1) можно было бы учесть силы притяжения к Солнцу и к Луне. Усложнения были бы не принципиальные, временные затраты на ЭВМ при этом существенно не изменятся.

Метод быстрых разложений является очень эффективным при решении краевых задач не только для дифференциальных уравнений в частных производных [18, 19], но и для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карагодин В.В. Приближенные методы расчета внеатмосферного активного участка траектории // Тр. МАИ. 2013. Вып. 66. <http://trudymai.ru/published.php?ID=40267>
2. Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука, 1987. 440 с.
3. Беневольский С.В. Математические модели движения для синтеза методов наведения перспективных баллистических ракет // Оборон. техн. 2007. № 3–4. С. 12–16.
4. Хайрер Э., Нёрссетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
5. Беневольский С.В., Козлов П.Г. Полуаналитический метод восстановления траекторий ЛА по обобщенным проектным параметрам и параметрам системы управления и перспективы его использования // Электр. науч.-технич. Изд. “Наука и образование”. 2011. № 10. <http://technomag.edu.ru/doc/216895.html>
6. Чернышов А.Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // ЖВММФ. 2014. Т. 54. № 1. С. 13–24.
7. Чернышов А.Д., Горайнов В.В. Решение одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения методом быстрых разложений // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер.: Механ. пред. сост. 2012. № 4(12). С. 105–112.
8. Чернышов А.Д. Решение нелинейного уравнения теплопроводности для криволинейной области с условиями Дирихле методом быстрых разложений // ИФЖ. 2018. Т. 91. № 2. С. 456–468.
9. Чернышов А.Д. Решение двухфазной задачи Стефана с внутренним источником и задач теплопроводности методом быстрых разложений // ИФЖ. 2021. Т. 94. № 1. С. 101–120.
10. Чернышов А.Д., Горайнов В.В., Чернышов О.А. Применение метода быстрых разложений для расчета траекторий космических кораблей // Изв. вузов. Авиаци. техн. 2015. № 2. С. 41–47.
11. Chernyshov A.D., Saiko D.S., Kovaleva E.N. Universal fast expansion for solving nonlinear problems // J. Physics: Conf. Ser. 2020. V. 1479. Art. no. 012147.
12. Горячева И.Г., Горячев А.П. Контактные задачи о скольжении штампа с периодическим рельефом по вязкоупругой полуплоскости // ПММ. 2016. Т. 80. № 1. С. 103–116.
13. Чернышов А.Д., Горайнов В.В., Лешонков О.В., Соболева Е.А., Никифорова О.Ю. Сравнение скорости сходимости быстрых разложений с разложениями в классический ряд Фурье // Вестн. ВГУ. Сер.: Сист. анализ и информ. технол. 2019. № 1. С. 27–34.
14. Чернышов А.Д., Горайнов В.В. О выборе оптимального порядка граничной функции в быстром разложении // Вестн. ВГУ. Сер.: Сист. анализ и информ. технол. 2011. № 1. С. 60–65.
15. Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М. Наука, 1991. 368 с.

16. Исаев В.И., Шанеев В.П., Идимешев С.В. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Пуассона // Вычисл. техн. 2011. Т.16. № 1. С. 85–93.
17. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М. Наука, 1987. 800 с.
18. Горяйнов В.В., Попов М.И., Чернышов А.Д. Решение задачи о напряжениях в остром клиновидном режущем инструменте методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 113–130.
19. Чернышов А.Д., Попов В.М., Горяйнов В.В., Лешонков О.В. Исследование контактного термического сопротивления в конечном цилиндре с внутренним источником методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // ИФЖ. 2017. Т. 90. № 5. С. 1288–1297.

Application of the Method of Fast Expansions to Construction of a Trajectory of Movement of a Body with Variable Mass from Its Initial Position in a Gained Final Position in a Gravitational Field

A. D. Chernyshov^{a,#}, M. I. Popov^{b,##}, V. V. Goryainov^{c,###}, and O. Yu. Nikiforova^{a,####}

^aThe Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

^bThe Voronezh State University, Voronezh, Russia

^cThe Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

[#]e-mail: chernyshovad@mail.ru

^{##}e-mail: mihail_semilov@mail.ru

^{###}e-mail: gorvit77@mail.ru

^{####}e-mail: niki22@mail.ru

An analytical solution of the problem of the movement of a spacecraft from the starting point to the final point in a certain time is given. First, the method of fast sine expansions is used. The space problem considered here is essentially non-linear, what necessitates the use of trigonometric interpolation methods, which surpass all known interpolations in accuracy and simplicity. In this case, the problem of calculating Fourier coefficients by integral formulas is replaced by the solution of an orthogonal interpolation system. In this regard, two cases are considered on the segment $[0, a]$: universal interpolation and trigonometric sine and cosine interpolations. A theorem on the rapid decrease of expansion coefficients is proved, and a compact formula for calculating the interpolation coefficients is obtained. A general theory of fast expansions is given. It is shown that in this case, the Fourier coefficients decrease significantly faster with the growth of the ordinal number compared to the Fourier coefficients in the classical case. This property makes it possible to significantly reduce the number of terms taken into account in the Fourier series, significantly increase the accuracy of calculations and reduce the amount of calculations on a computer. The analysis of the obtained solutions of the spacecraft motion problem is carried out and their comparison with the exact solution of the test problem is proposed. An approximate solution by the method of fast expansions can be taken as an exact one, since the input data of the problem used from reference books have a higher error.

Keywords: gravity field, body of variable mass, spacecraft, fast expansions method, fast trigonometric interpolation

REFERENCES

1. Karagodin V.V. Approximate methods for calculating the extra-atmospheric active section of the trajectory // Trudy MAI, 2013, iss. 66. <http://trudymai.ru/published.php?ID=40267>
2. Appazov R.F., Sytin O.G. Methods of Projecting Trajectories of Carriers and Satellites of the Earth. Moscow: Nauka, 1987. 440 p.
3. Benevolsky S.V. Mathematical models of motion for the synthesis of guidance methods for promising ballistic missiles. // Defense Techn., 2007, no. 3–4, pp. 12–16.

4. Hairer E., Nørsett S., Wanner G. Solution of Ordinary Differential Equations. Non-Rigid Tasks. Moscow: Mir, 1990. 512 p.
5. Benevolsky S.V., Kozlov P.G. Semi-analytical method for aircraft trajectory reconstruction from generalized design parameters and control system parameters and prospects for its use. // Electr. Sci.&Techn. Pub. "Science and Education", 2011, no. 10.
<http://technomag.edu.ru/doc/216895.html>
6. Chernyshov A.D. Method of fast expansions for solving nonlinear differential equations // Comput. Math.&Math. Phys., 2014, vol. 54, iss. 1, pp. 11–21.
7. Chernyshov A.D., Goryainov V.V. Solution of one non-linear integro-differential equation by the method of fast expansions // Bull. ChGPU im. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Limit State Mech., 2012, no. 4(12), pp. 105–112.
8. Chernyshov A.D. Solution of a nonlinear heat conduction equation for a curvilinear region with Dirichlet conditions by the fast-expansion method // J. Engng. Phys.&Thermophys., 2018, vol. 91, no. 2, pp. 433–444.
9. Chernyshov A.D. Solution of the Stefan two-phase problem with an internal source and of heat conduction problems by the method of rapid expansions // J. Engng. Phys.&Thermophys., 2021, vol. 94, no. 1, pp. 95–112.
10. Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Chernyshov O.A. Application of the fast expansion method for spacecraft trajectory calculation. // Rus. Aeron., 2015, vol. 58, no. 2, pp. 180–186.
11. Chernyshov A.D., Saiko D.S., Kovaleva E.N. Universal fast expansion for solving nonlinear problems // J. Phys.: Conf. Ser., 2020, vol. 1479, art. no. 012147.
12. Goryacheva I.G., Goryachev A.P. Contact problems of the sliding of a punch with a periodic relief on a viscoelastic half-plane // JAMM, 2016, vol. 80, iss. 1, pp. 73–83.
13. Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Lyashenko O.V., Soboleva E.A., Nikiforova O.Yu. Comparison of the convergence rate of fast expansions with decompositions in the classical Fourier series // Bull. Voronezh State Univ. Ser.: Syst. Anal.&Inform. Technol., 2019, no. 1, pp. 27–34.
14. Chernyshov A.D., Goryainov V.V. About a choice of an optimum order of boundary function in rapid expansion // Bull. Voronezh State Univ. Ser.: Syst. Anal.&Inform. Technol., 2011, no. 1, pp. 60–65.
15. Ilyin V.A. Spectral Theory of Differential Operators. Moscow: Nauka, 1991. 368 p.
16. Isaev V.I., Shapeev V.P., Idimeshev S.V. High-accuracy versions of the collocations and least squares method for numerical solution of the Poisson equation // Comput. Technol., 2011, vol. 16, no. 1, pp. 85–93.
17. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Numerical Methods. Moscow: Nauka, 1987. 800 p.
18. Goryainov V.V., Popov M.I., Chernyshov A.D. Solving the stress problem in a sharp wedge-whaped cutting tool using the quick decomposition method and the problem of matching boundary conditions // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 1083–1097.
19. Chernyshov A.D., Popov V.M., Goryainov V.V., Leshonkov O.V. Investigation of contact thermal resistance in a finite cylinder with an internal source by the fast expansion method and the problem of consistency of boundary conditions // J. Engng. Phys.&Thermophys., 2017, vol. 90, no. 5, pp. 1225–1233.

УДК 534.1+517.984.5

Светлой памяти Л.Д. Акуленко

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ© 2023 г. С. В. Нестеров^{1,*}¹Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия

*e-mail: bayd@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 05.05.2023 г.

После доработки 15.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Настоящая статья посвящается памяти Л.Д. Акуленко, с которым автор статьи работал более 40 лет. В рамках разработанного совместно метода ускоренной сходимости был решен ряд классов задач относящихся к задачам Штурма–Лиувилля. По результатам исследований было опубликовано несколько десятков статей и обобщающая монография [1]. В данной работе изложена адаптация метода к решению сингулярных задач Штурма–Лиувилля.

Ключевые слова: метод ускоренной сходимости, задача Штурма–Лиувилля, сингулярность

DOI: 10.31857/S0032823523050119, EDN: VGZAYO

1. Метод ускоренной сходимости. Пусть задана задача Штурма–Лиувилля с граничными условиями первого, второго или третьего рода

$$\begin{aligned} &(p(x)u')' + [\lambda r(x) - q(x)]u = 0 \\ &u(0) = u(1) = 0; \quad u(0) = u'(1) = 0; \quad u(0) = 0, \quad \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $p(x), r(x), q(x)$ — известные функции. Предполагается, что они достаточно гладкие и могут быть определены на более широком интервале $0 \leq x \leq 1 + a$, кроме того справедливы неравенства

$$0 < p_0 \leq p(x) \leq p^+ < \infty, \quad 0 < r_0 \leq r(x) \leq r^+ < \infty, \quad |q(x)| < \infty$$

Требуется найти такие значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (1.1), удовлетворяющие краевым условиям.

Опишем подробно процедуру нахождения первого собственного числа λ_1 . Оценку сверху можно получить, например, используя принцип Рэлея–Ритца

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^* = \frac{\int_0^1 (p(x)\psi'^2 + q\psi^2) dx}{\int_0^1 r(x)\psi^2 dx}, \quad (1.2)$$

где $\psi(0) = \psi(1) = 0$, функция $\psi(x)$ не имеет нулей на интервале $0 < x < 1$.

Алгоритм дальнейших действий нахождения собственного значения может быть сформулирован следующим образом:

1. Построить конструктивный метод получения оценки снизу λ_{1*} ($\lambda_{1*} < \lambda_1 < \lambda_1^*$);
2. Задать критерий близости λ_1 и λ_1^* ;
3. Определить процедуру уточнения собственных чисел;
4. Построить процедуру уточнения собственных чисел с любой наперед заданной точностью;
5. Получить последующие собственные числа $\lambda_2, \lambda_3, \dots$;
6. Для найденных собственных чисел, построить собственные функции им соответствующие;
7. Обобщить алгоритм на краевые условия второго и третьего рода.

2. Системы сравнения. Будем считать, что оценка сверху известна λ_1^* . Найдем решение задачи Коши I вида

$$I. \quad (p(x)u')' + [\lambda_1^* r(x) - q(x)]u = 0; \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \quad (2.1)$$

Решение задачи Коши I $u = V_1(x, \lambda_1^*)$ обладает следующими свойствами $V_1(0, \lambda_1^*) = 0$, т.е. выполняется краевое условие в левой граничной точке. Далее, согласно второй осцилляционной теореме Штурма существует такое значение параметра $\xi < 1$, что $V_1(\xi, \lambda_1^*) = 0$. Задачу Коши I будем решать численно, и в процессе решения определим положение точки ξ .

Найдем решение задачи Коши II вида

$$II. \quad (p(x)u')' + [\xi^2 \lambda_1^* r(x) - q(x)]u = 0; \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \quad (2.2)$$

Обозначим решение задачи (2.2), отвечающее оценке λ_1^* как $u = W_1(x, \xi^2 \lambda_1^*)$. Тогда если функция $W_1(x, \xi^2 \lambda_1^*) > 0$ на интервале $0 < x \leq 1$, то $\xi^2 \lambda_1^*$ — оценка первого собственного числа снизу. Принимая во внимание следствие второй осцилляционной теоремы Штурма, имеем

$$\xi^2 \lambda_1^* \leq \lambda_1$$

Если существует значение $x = \xi_1$ ($\xi_1 < 1$), для которого $W_1(\xi_1, \xi^2 \lambda_1^*) = 0$, то в этом случае имеем улучшенную оценку сверху

$$\lambda_1 \leq \xi^2 \lambda_1^* < \lambda_1^*$$

Значение параметра ξ_1 определяется в ходе численного решения задачи Коши II.

В качестве критерия близости λ_1 и λ_1^* можно выбрать следующий

$$\varepsilon = 1 - \xi \ll 1$$

3. Теория возмущений. В уравнении (1.1) введем новую независимую переменную $y = \xi x$, параметр $\Lambda = \lambda/\xi^2$ и функцию $u = U(y, \varepsilon)$. Тогда первая краевая задача (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} & (p(y)U')' + [\Lambda r(y) - q(y)]U = \\ & = -\varepsilon[(yp'U')' + (\Lambda yr' - 2q - yq')U] + \varepsilon^2 H_2 \\ & U(0, \varepsilon) = U(x, \varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение задачи (3.1) ищем в виде рядов

$$U = U_1^{(0)} + \varepsilon U_1^{(1)} + \varepsilon^2 U_1^{(2)} + \dots, \quad \Lambda = \Lambda_1^{(0)} + \varepsilon \Lambda_1^{(1)} + \varepsilon^2 \Lambda_1^{(2)} + \dots \quad (3.2)$$

Подставляя ряды (3.2) в краевую задачу (3.1) в нулевом приближении получаем

$$\begin{aligned} & \left(p(y) U_1^{(0)'} \right)' + \left[\Lambda_1^{(0)} r(y) - q(y) \right] U_1^{(0)} = 0 \\ & U_1^{(0)}(0) = U_1^{(0)}(\xi) = 0; \quad U_1^{(0)} = V_1(y, \lambda_1^*); \quad \Lambda_1^{(0)} = \lambda_1^* \end{aligned} \quad (3.3)$$

Функция $V_1(y, \lambda_1^*)$ является решением уравнения (2.1) и удовлетворяет поставленным краевым условиям (3.3).

В следующем (первом) приближении имеем

$$\begin{aligned} & \left(p(y) U_1^{(1)'} \right)' + \left[\lambda_1^* r(y) - q(y) \right] U_1^{(1)} = \\ & = -\Lambda_1^{(1)} r(y) V_1 - \left(y p' V_1^* \right)' - \left[\lambda_1^* y r' - 2q - y q' \right] V_1 \\ & U_1^{(1)}(0) = U_1^{(1)}(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для того, чтобы краевая задача имела решение необходимо, чтобы правая часть уравнения (3.4) была ортогональна функции $V_1(y, \lambda_1^*)$ на отрезке $0 \leq y \leq \xi$. Это условие позволяет найти выражение для $\Lambda_1^{(1)}$ в виде

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{(1)} &= -\frac{1}{\|V_1\|^2} \int_0^\xi \left[\left(y p' V_1^* \right)' + \left(\lambda_1^* y r' - 2q - y q' \right) V_1 \right] V_1 dy = \\ &= -\frac{1}{\|V_1\|^2} p(\xi) \xi V_1'^2(\xi, \lambda_1^*) + 2\lambda_1^*, \end{aligned}$$

$$\text{где } \|V_1\|^2 = \int_0^\xi r(y) V_1^2 dy.$$

Возвращаясь к старым переменным и учитывая, что $\varepsilon \ll 1$, имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= \xi^2 \left(\lambda_1^* - \frac{\varepsilon}{\|V_1\|^2} p(\xi) \xi V_1'^2(\xi, \lambda_1^*) + 2\varepsilon \lambda_1^* \right) = \\ &= \lambda_1^* - \frac{\varepsilon}{\|V_1\|^2} p(\xi) \xi V_1'^2(\xi, \lambda_1^*) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из формулы (3.5) следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо соотношение

$$\left. \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = -p(1) \frac{(U_1'(1))^2}{\|U_1\|^2} \leq 0 \quad (3.6)$$

Для остальных собственных чисел λ_n эта формула также имеет место, и она показывает, что вместе с уменьшением ширины интервала происходит возрастание собственных чисел.

4. Метод ускоренной сходимости. Формула (3.5) позволяет построить метод ускоренной сходимости, алгоритм которого может быть сформулирован в виде пяти пунктов:

1. Определяется (любым способом) оценка сверху собственного значения λ_1^* ;
2. Решается задача Коши I (2.1). Находится функция $V_1(x, \lambda_1^*)$;
3. Определяется решение ξ уравнения $V_1(x, \lambda_1^*) = 0$ (простейший способ решения — линейная интерполяция);

4. Вычисляется уточненное значение собственного числа

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^* - \varepsilon p(1) \frac{V_1'^2(1)}{\|V_1\|^2};$$

5. Повторение процедуры 1–4 с заменой исходной оценки собственного значения с λ_1^* на уточненное $\lambda_1^{(1)}$. По результатам расчетов определяются новые значения параметров ξ_1 , $\varepsilon_1 = 1 - \xi_1$

$$\lambda_1^{(2)} = \lambda_1^{(1)} - \varepsilon_1 p(1) \frac{V_1'^2(1)}{\|V_1\|^2} \quad (4.1)$$

и т.д. Вычисления повторяются до тех пор, пока собственное значение λ_1 не получено с требуемой точностью. После того, как найдено первое собственное число λ_1 , из решения задачи Коши I находится первая собственная функция. Ранее было показано [1], что имеет место квадратичная сходимость по параметру ε .

$$|\lambda_1 - \lambda_1^{(1)}| \leq C\varepsilon^2, \quad |\lambda_1 - \lambda_1^{(2)}| \leq C\varepsilon^4, \text{ и т.д.,}$$

где λ_1 – точное значение первого собственного числа.

Если поставлены краевые условия второго или третьего рода, то вместо формулы (3.5) будут следующие

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^* - \frac{\varepsilon}{\|V_1\|^2} \left[\lambda_1^* r(\xi) - q(\xi) \right] V_1^2(\xi, \lambda_1^*) + O(\varepsilon^2) \quad (4.2)$$

Здесь ξ – корень уравнения $\frac{dV_1}{dx}(\xi, \lambda_1^*) = 0$.

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^* - \frac{\varepsilon}{\|V_1\|^2} \left\{ p(\xi) V_1'^2(\xi, \lambda_1^*) + \left[\lambda_1^* r(\xi) - q(\xi) \right] V_1^2(\xi, \lambda_1^*) \right\} + O(\varepsilon^2) \quad (4.3)$$

Здесь ξ – корень уравнения $\alpha V(\xi, \lambda_1^*) + \beta \frac{dV_1}{dx}(\xi, \lambda_1^*) = 0$.

5. Численные примеры

Пример 1: Дана задача Штурма–Лиувилля

$$u'' + \lambda(1 + \sin \pi x)u = 0; \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (5.1)$$

С помощью функции $\psi_1 = \sin(\pi x)$ согласно принципу Рэлея–Ритца находим оценку сверху $\lambda_1 \leq \lambda_1^* = 5.33827$. Интегрирование задачи Коши I приводит к

$$\xi = 0.99942, \quad \varepsilon = 5.8 \times 10^{-4}, \quad \lambda_1^* \xi^2 = 5.33205$$

Имеем двустороннюю оценку

$$5.33205 \leq \lambda_1 \leq 5.33827$$

Уточнение согласно формуле (3.5) после первой итерации дает $\lambda_1^{(1)} = 5.33284$. Национальное бюро стандартов США приводит “точное” значение $\lambda_1 = 5.33274$. Относительное отклонение от полученного в рамках метода ускоренной сходимости значения собственного числа в первом приближении составляет $\Delta\lambda/\lambda_1 \leq 10^{-5}$.

Пример 2: Рассмотрим другой пример — задачу Штурма–Лиувилля, имеющую точное решение

$$u'' + \lambda(1+x^2)^{-2}u = 0; \quad u(0) = u(1) = 0$$

Точное решение дает

$$\lambda_n = 16n^2 - 1; \quad \lambda_1 = 15, \quad \varphi_1 = 2x \frac{1-x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Оценка сверху: $\lambda_1 < \lambda_1^* = 15.33728 \rightarrow \xi = 0.98383; \varepsilon = 1.617 \times 10^{-2}$

Оценка снизу: $\lambda_1^* \xi^2 = 14.83533$

Первая итерация по методу ускоренной сходимости $\lambda_1^{(1)} = 14.99719$; вторая итерация $\lambda_{12} = 15.000005$.

Расчет собственных чисел высших порядков. Для краевой задачи (5.1) согласно методу Рэля–Ритца находим оценки сверху $\lambda_2^* = 2.37186\pi^2$; $\lambda_3^* = 5.49612\pi^2$. Далее алгоритм вычисления старших собственных значений совпадает с алгоритмом расчета основного собственного значения. Однако, решение задачи Коши $u = V_1(x, \lambda_1^*)$ обращается в нуль на отрезке $(0, 1)$ в нескольких точках (в двух для второго собственного значения, в трех — для третьего), одна из которых близка к единице, и в качестве параметра ξ (номер три алгоритма метода ускоренной сходимости) следует выбрать значение абсциссы этой точки. Тогда, учитывая сделанные замечания, после второй итерации находим

$$\lambda_2^{(2)} = 23.407186, \quad \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_2} \leq 4.5 \times 10^{-6}; \quad \lambda_3^{(2)} = 53.772, \quad \frac{\Delta\lambda_3}{\lambda_3} \leq 7.0 \times 10^{-5}$$

6. Сингулярные задачи Штурма–Лиувилля. Пусть коэффициенты уравнений задачи Штурма–Лиувилля имеют особенность в одной из граничных точек. Тогда алгоритм метода ускоренной сходимости (пункты 1–5 из разд. 4) можно распространить на случай сингулярных задач путем введения малой регуляризирующей добавки устраняющей сингулярный характер зависимости коэффициентов внутри интервала решения задачи Штурма–Лиувилля. Затем последовательно уменьшая величину регуляризатора будем предполагать, что последовательность найденных собственных значений регуляризованных задач Штурма–Лиувилля будет сходиться к собственному значению сингулярной задачи.

Рассмотрим описанную выше процедуру на примере задачи определения собственных значений и функций радиально симметричных поперечных колебаний круглой неоднородной мембраны (рис. 1)

$$T \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - r \rho(r) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (6.1)$$

где T — натяжение, $\rho(r) = \rho_0 \exp(br^2/R_0^2)$ — плотность, а R_0 — радиус мембраны.

С краевыми условиями первого рода

$$w(R_0, t) = 0, \quad |w(0, t)| \leq H \quad (6.2)$$

После разделения переменных $w = u(r) \exp(i\Omega t)$ задача (6.1)–(6.2) в безразмерном виде ($z = r/R_0$, $\omega = \sqrt{\rho_0/T} R_0 \Omega$) сведется к сингулярной задаче Штурма–Лиувилля

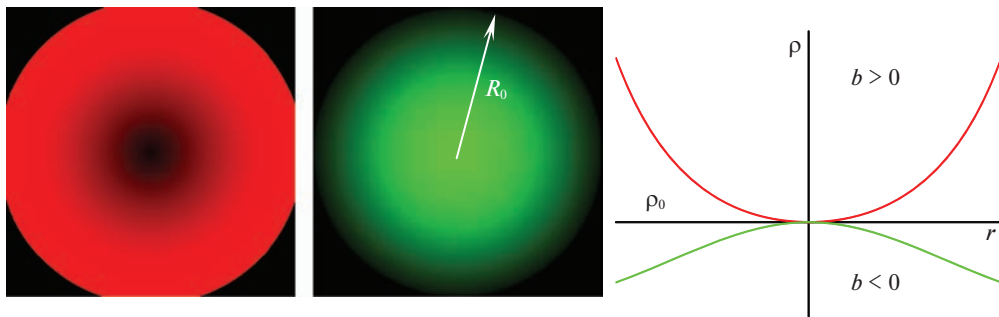


Рис. 1. Геометрия масс мембраны. Радиальное распределение плотности $\rho(r) = \rho_0 \exp(br^2/R_0^2)$. Случаю $b > 0$ соответствует красный цвет, $b < 0$ – зеленый.

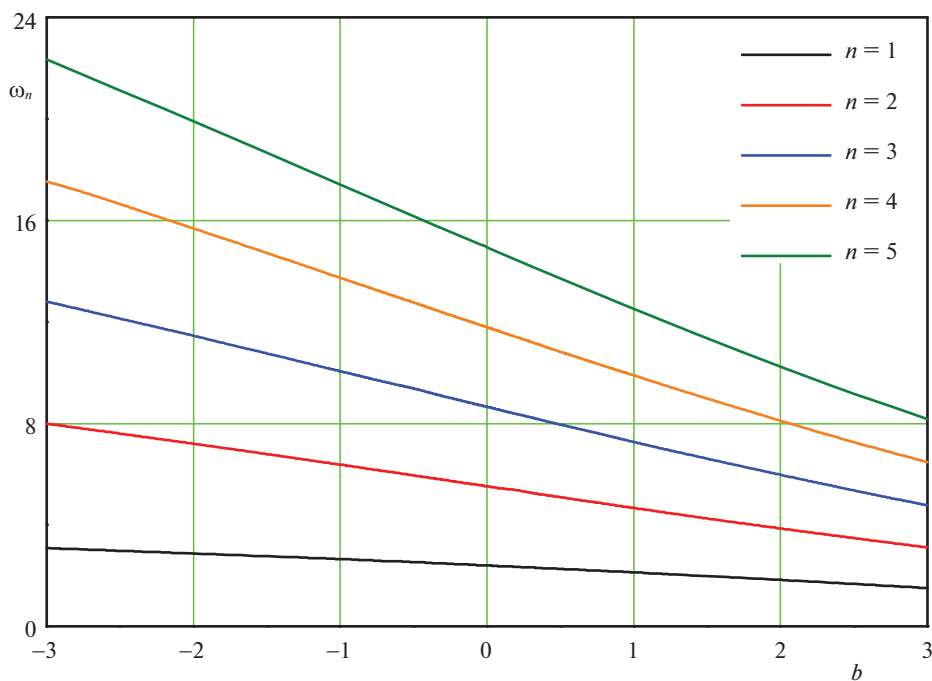


Рис. 2. Зависимость безразмерных собственных частот от параметра b .

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{du}{dz} \right) + \omega^2 z e^{bz^2} u = 0; \quad u(1) = 0, \quad |u(0)| \leq M \quad (6.3)$$

Заменим сингулярную задачу (6.3) семейством регуляризованных задач вида

$$\frac{d}{dz} \left((z + a_m) \frac{du_m}{dz} \right) + \omega^2 z e^{bz^2} u_m = 0; \quad u_m(1) = 0, \quad u'_m(0) = 0, \quad a_m = \{10^{-3}, 10^{-4}, \dots\} \quad (6.4)$$

Будем предполагать, что собственные частоты задачи (6.4) при $m = 1, 2, \dots$ образуют сходящуюся последовательность, так, что пределом при $m \rightarrow \infty$ являются собственные значения сингулярной задачи (6.2)–(6.3) $\omega_1(a_m) \rightarrow \omega_1$, $\omega_2(a_m) \rightarrow \omega_2$, $\omega_3(a_m) \rightarrow \omega_3$, Зависимость собственных частот от плотностного параметра b приведена на рис. 2.

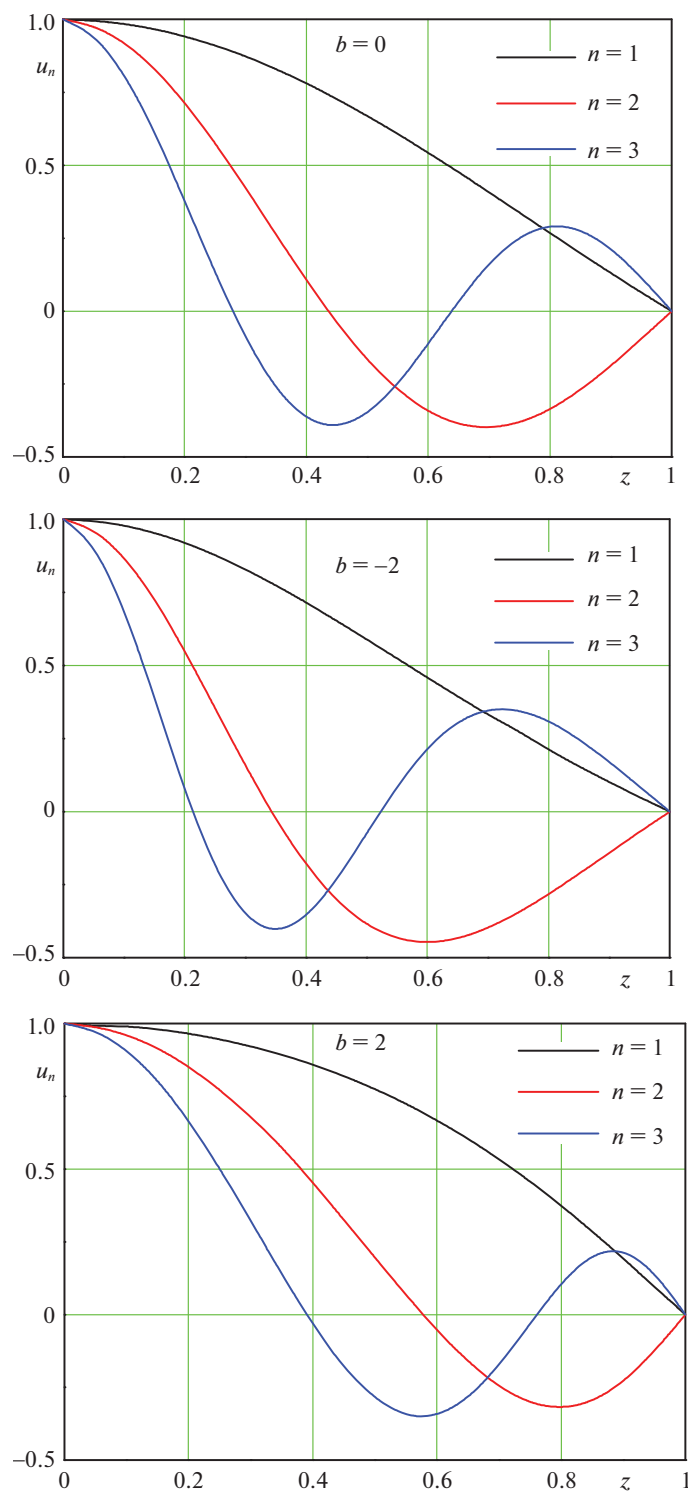


Рис. 3. Профили собственных функций при различном значении параметра b .

В качестве базисных функций используем функции Бесселя $J_0(\gamma_n z)$ (где $J_0(\gamma_n) = 0$) и метод Рэлея—Ритца для контроля полученных результатов. Можно показать, что проведенные расчеты по методу ускоренной сходимости для краевой задачи (6.4) дают достаточно хорошее приближение для первых пяти собственных чисел краевой задачи (6.3) для значений параметра $-3 \leq b \leq 3$. По найденным собственным значениям были построены профили собственных функций задачи (рис. 3).

Отметим, что решение приведенной выше задачи о собственных колебаниях мембраны, плотность материала которой изменяется радиально, была решена в [2] для малых значений параметра $|b| \leq 0.25$. Для описанного выше метода решения такого ограничения на значения параметра не существует.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 123021700050-1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Akulenko L.D., Nesterov S.V. High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC Press, 2005. 255 p.
2. Ratneswar S.G., Ranjit Gh. Method of perturbation applied to the vibration problem of a circular membrane of varying density // JASA. 1964. V. 36. № 6. P. 1118–1120.
3. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
4. Нестеров С.В., Байдулов В.Г. Использование метода ускоренной сходимости в сингулярных задачах Штурма—Лиувилля // Сб. матер. 13-й международной конференции — школы молодых ученых “Волны и вихри в сложных средах”, Москва, 30 ноября—02 декабря 2022. С. 194–195.

Using the Accelerated Convergence Method for Solving the Singular Sturm—Liouville Problem

S. V. Nesterov^{a, #}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: bayd@ipmnet.ru*

This article is dedicated to the memory of L.D. Akulenko, with whom the author of the article worked for more than 40 years. Within the framework of the accelerated convergence method developed jointly, a number of classes of problems related to the Sturm—Liouville problems were solved. Based on the research results, several dozen articles and a generalizing monograph [1] were published. In this paper, we describe the adaptation of the method to solving singular Sturm—Liouville problems.

Keywords: accelerated convergence method, Sturm—Liouville problem, singularity

REFERENCES

1. Akulenko L.D., Nesterov S.V. High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC Press, 2005. 255 p.
2. Ratneswar S.G., Ranjit Gh. Method of perturbation applied to the vibration problem of a circular membrane of varying density // JASA, 1964, vol. 36, no. 6, pp. 1118–1120.
3. Sretensky L. The Theory of Wave Motion of Fluid. Moscow: Nauka, 1977. 815 p. (in Russian)
4. Nesterov S.V., Baidulov V.G. Using the accelerated convergence method in singular Sturm—Liouville problems // Sb. Mater. 13th Int. Conf. — School of Young Scientists “Waves and Vortices in Complex Media”, Moscow, Nov. 30 — Dec. 02, 2022, pp. 194–195.

УДК 534.1

Светлой памяти Л.Д. Акуленко

АВТОКОЛЕБАНИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА РЕЛЕЯ С КУБИЧЕСКОЙ ВОЗВРАЩАЮЩЕЙ СИЛОЙ

© 2023 г. С. А. Кумакшев^{1,*}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: kumak@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 04.06.2023 г.

После доработки 13.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Исследована колебательная система с механизмом возбуждения как в осцилляторе Релея, но с нелинейной (кубической) возвращающей силой. С помощью метода ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметру построены предельные циклы и вычислены амплитуды и периоды автоколебаний. Это сделано для широкого диапазона значений коэффициента обратной связи, в котором этот коэффициент не является асимптотически малым или большим. Предложенная итерационная процедура позволяет достичь заданной точности вычислений. Проведен анализ особенностей предельного цикла, вызванных увеличением коэффициента самовозбуждения. Полученные результаты сопоставлены с автоколебаниями классического осциллятора Релея с линейной возвращающей силой.

Ключевые слова: автоколебания, предельный цикл, уравнение Релея

DOI: 10.31857/S0032823523050090, EDN: QIZOZG

1. Введение. Автоколебания возникают в различных физических системах и исследование автоколебательных процессов имеет большой научный и прикладной интерес для многих областей науки, например механики и, возможно в большей степени, радиотехники. Методам исследования и определения характеристик автоколебательных систем посвящена обширная литература [1–7]. Для динамических систем разработаны качественные и топологические методы, определяющие критерии существования предельных циклов и устойчивости автоколебаний. Приближенно форма предельного цикла может быть найдена методом изоклин [2–4]. Для квазилинейных колебательных систем с малыми значениями коэффициента самовозбуждения широко известны аналитические методы, дающие приближенное решение: методы малого параметра Ляпунова–Пуанкаре, метод усреднения Крылова–Боголюбова и др. [2, 4–10]. С другой стороны, если коэффициент обратной связи асимптотически велик, то такая сингулярно возмущенная автоколебательная система совершает релаксационные колебания [1]. В этом случае предельный автоколебательный цикл можно построить приближенно, используя метод “припасовывания” А.А. Дородницына [4, 5, 11] или методов теории релаксационных колебаний [7, 12]. Однако для технических приложений представляют интерес автоколебания в промежуточной области коэффициентов обратной связи, где они не являются асимптотически большими или малыми. Построение характеристик автоколебательной системы в этой области предполагает числен-

ное решение с контролем точности, что в силу резких изменений параметров системы представляет собой большую вычислительную трудность. Существующие подходы немногочисленны, громоздки в использовании и не позволяют контролировать точность полученных решений. Предлагаемый подход основан на использовании численно-аналитического метода ускоренной сходимости [16] для вычислений совместно с процедурой продолжения по параметру. В частности, ранее, в рамках такого подхода, решены задачи об автоколебаниях классических осцилляторов Релея и Ван дер Поля [17]. Использование метода ускоренной сходимости позволяет контролировать точность вычислений, в отличие от более ранних результатов по исследованию уравнения Ван дер Поля [12–14]. Также была исследована колебательная система, описываемая уравнением Ван дер Поля с возвращающей силой третьего порядка [15]. Для нее были построены предельные циклы в зависимости от коэффициента обратной связи и определены амплитуда и период автоколебаний. Данная работа продолжает этот цикл исследований.

2. Приведение уравнений к стандартной форме. Рассмотрим колебания системы, описываемой уравнением типа Льенара, содержащее степенные функции обобщенной координаты x и скорости $\dot{x}$ вида

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + g(x, \dot{x})\dot{x} + f(x) &= 0 \\ g &= -k|x|^\beta |\dot{x}|^{\gamma-1} + l|x|^\delta |\dot{x}|^{\sigma-1}, \quad f = c|x|^{\alpha-1}x \\ m, c, k, l &> 0, \quad \infty > \alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma \geq 0, \quad \delta + \sigma > \beta + \gamma, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где m отвечает за инерцию в системе, а f играет роль возвращающей силы с коэффициентом упругости c . Это уравнение имеет периодическое решение с устойчивым предельным циклом. При определенных достаточных условиях стационарная точка $x = \dot{x} = 0$ неустойчива. Отметим, что структура уравнения не меняется, если провести замену $x \rightarrow -x$ и $\dot{x} \rightarrow -\dot{x}$. Это свидетельствует о том, что предельный цикл будет центрально симметричен и достаточно определить половину периода.

Для приведения к безразмерному виду сделаем замену переменной x и аргумента t [10]

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= d^{-1}x, \quad d = \left(\frac{k}{l}\right)^{\frac{1-\kappa}{\xi}} \left(\frac{c}{m}\right)^{-\frac{\eta}{\lambda\xi}} \\ \tilde{t} &= vt, \quad v = \left(\frac{k}{l}\right)^{\frac{\alpha-1}{\lambda\xi}} \left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \\ \xi &= \delta + \sigma - \beta - \gamma > 0, \quad \eta = \sigma - \gamma, \quad \lambda = 2 + \frac{(\alpha-1)\eta}{\xi} > 0 \\ \kappa &= \frac{(\alpha-1)\eta}{\lambda\xi} = \frac{(\alpha-1)\eta}{2\xi + (\alpha-1)\eta} \neq 1, \end{aligned}$$

тогда уравнение (2.1) перепишется в виде (знак $\sim$ опускаем)

$$\ddot{\tilde{x}} + \varepsilon \left(-|\tilde{x}|^\beta |\dot{\tilde{x}}|^{\gamma-1} + |\tilde{x}|^\delta |\dot{\tilde{x}}|^{\sigma-1} \right) \dot{\tilde{x}} + |\tilde{x}|^{\alpha-1} \tilde{x} = 0; \quad \varepsilon = \frac{k}{m} d^{\beta+\gamma-1} v^{\gamma-2}$$

В этом уравнении один безразмерный параметр $\varepsilon > 0$, имеющий смысл коэффициента обратной связи или самовозбуждения автоколебаний.

Теперь можно получить представление для уравнения типа Релея с нелинейной возвращающей силой

$$\ddot{\tilde{x}} - \varepsilon(1 - \dot{\tilde{x}}^2)\dot{\tilde{x}} + |\tilde{x}|^{\alpha-1} \tilde{x} = 0; \quad \alpha \geq 0, \quad \beta = \delta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \sigma = 3 \quad (2.2)$$

Классическое уравнение Релея получается, если положить $\alpha = 1$. В данной работе будет исследован случай $\alpha = 3$, то есть когда возвращающая сила имеет кубический вид.

Также интересно сравнить полученные характеристики такой автоколебательной системы с системой, описываемой классическим уравнением Релея. Некоторые результаты для классического случая при умеренно-больших значениях коэффициента самовозбуждения получены в [17]. Далее будет проведено сравнение с этими результатами.

3. Применение метода возмущений. Чтобы применить численно-аналитический метод ускоренной сходимости совместно с процедурой продолжения по параметру ϵ , воспользуемся методами Ляпунова—Пуанкаре [2, 10]. Надо найти периодическое решение, у которого $x(0) = x(2T)$ и $\dot{x}(0) = \dot{x}(2T)$, где T — неизвестный полупериод. Пользуясь подходом Пуанкаре [10], введем “возмущенный” аргумент θ вместо t для того, чтобы явно выделить зависимость от T следующим образом: $\theta = (t\Theta)/T$, где Θ — полупериод автоколебаний по θ будет фиксирован. Таким образом $x = x(\theta + \Theta, \epsilon) = x(\theta, \epsilon)$. Пользуясь центральной симметрией искомого решения, нам достаточно рассмотреть задачу на этом новом полупериоде. Положим полупериод Θ равным единице.

Получаем из (2.2) нелинейную периодическую краевую задачу

$$\ddot{x} - \epsilon T(1 - T^{-2}\dot{x}^2)\dot{x} + T^2x^3 = 0; \quad x = x(\theta, \epsilon) \quad (3.1)$$

$$x(0) = A(\epsilon), \quad x(1) = -A(\epsilon), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0$$

Здесь A — неизвестная амплитуда колебаний. Точками обозначены производные по новому аргументу θ .

Задача содержит четыре неизвестных параметра — две постоянные интегрирования, амплитуда и полупериод автоколебаний. Их можно найти из четырех краевых условий. Таким образом будет найдена одна половина предельного цикла, вторая половина получится симметричным отображением.

При $\epsilon = 0$ задача имеет тривиальный характер, позволяющий легко найти соответствующие значения амплитуды и полупериода колебаний. Обозначим их как A^* и T^* .

Однако, теперь величины A^* и T^* можно использовать как начальные приближения при достаточно малом $\epsilon > 0$, отличным от нуля. Для уточнения этих величин используем метод ускоренной сходимости [16]. Далее еще увеличим ϵ , а в качестве приближенного решения опять используем значения A и T с предыдущего шага. Эти значения снова будут уточнены с помощью метода ускоренной сходимости. Таким образом задача будет решена с помощью процедуры продолжения по параметру ϵ и методе ускоренной сходимости.

4. Применение метода ускоренной сходимости. Для того, чтобы построить Θ — периодическое решение уравнения (3.1), надо для каждого ϵ найти два неизвестных параметра $T(\epsilon)$ и $A(\epsilon)$. На первом шаге для $\epsilon = 0$ имеем значения T^* и A^* , которые используем как начальные приближения на следующем шаге численно-аналитической процедуры. Уточняющая рекуррентная процедура имеет вид

$$T_{(n+1)}(\epsilon) = T_{(n)}(\epsilon) + \delta T_{(n)}(\epsilon), \quad A_{(n+1)}(\epsilon) = A_{(n)}(\epsilon) + \delta A_{(n)}(\epsilon)$$

Уточняющие добавки $\delta T_{(n)}$, $\delta A_{(n)}$ вычисляются из условия обнуления невязок по краевым условиям задачи (3.1):

$$\delta T_{(n)}(\epsilon) = \frac{X'_n(W_n + 1) - (A_{(n)} + X_n)W'_n}{\Delta_n}$$

$$\delta A_{(n)}(\epsilon) = \frac{(A_{(n)} + X_n)Z'_n - X'_nZ_n}{\Delta_n}$$

$$\Delta_n = Z_nW'_n - Z'_n(W_n + 1) \neq 0; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь введены коэффициенты чувствительности W_n, Z_n, W'_n, Z'_n , и невязки решения $X_n + A_{(n)}, X'_n$, которые на каждом шаге n определяются как высокоточное решение следующей задачи Коши

$$\dot{y} = \ddot{x} = -T_{(n)}^2 x^3 + \varepsilon T_{(n)} y (1 - T_{(n)}^{-2} y^2) = 0$$

$$w = \partial x / \partial A, \quad \dot{r} = \ddot{w} = -T_{(n)}^2 3x^2 w + \varepsilon T_{(n)} r (1 - 3T_{(n)}^{-2} y^2) = 0$$

$$z = \partial x / \partial T$$

$$\dot{q} = \ddot{z} = -T_{(n)} x^2 (2x - 3T_{(n)} z) + \varepsilon y (1 + T_{(n)}^{-2} y^2) + \varepsilon T_{(n)} q (1 - 3T_{(n)}^{-2} y^2) = 0$$

с начальными условиями вида:

$$x(0) = A_{(n)}(\varepsilon), \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$w(0) = 1, \quad \dot{w}(0) = 0$$

$$z(0) = \dot{z}(0) = 0$$

Как видно, краевая задача для x, y не зависит от краевых задач для r, w, q и z . Решение этих дополнительных задач Коши для нахождения введенных функций чувствительности позволяет уточнить значения параметров T и A на каждом шаге итерационной процедуры.

Предложенная итерационная процедура позволяет достичь необходимой заданной точности вычислений.

5. Численные результаты. Представим полученные результаты и сравним их с классическим случаем уравнения Релея с линейной возвращающей силой [17]. Отметим, что в [17] была использована другая процедура решения при которой амплитуда автоколебаний получена не была. Основываясь на численной процедуре, изложенной в данной работе, эта характеристика была получена.

На рис. 1 представлены графики амплитуды $A(\varepsilon)$ и периода $T(\varepsilon)$ автоколебаний при увеличении ε . Верхняя линия на обоих графиках соответствует классическому случаю. Видно, что наличие кубической возвращающей силы резко уменьшает и период, и амплитуду автоколебаний при увеличении коэффициента обратной связи. В классическом случае эти параметры возрастают довольно быстро, и при этом вид кривых имеет ярко выраженный линейный характер. При наличии кубической возвращающей силы значения T и A растут гораздо медленнее, вид кривых не имеет линейного характера и наличествует слабый выгиб кверху.

Отметим, что теперь, имея численные значения T и A , можно получить остальные характеристики колебаний просто проинтегрировав задачу Коши (3.1).

На рис. 2 представлены семейства предельных циклов с шагом по ε равным пяти. Случай с кубической возвращающей силой представлен на рис. 2,а, а классический случай уравнения Релея — на рис. 2,б. Можно отметить, что в классическом случае, как видно на рис. 2, предельный цикл представляет собой эллипс при $\varepsilon = 0$.

При отличном от нуля ε , в классическом случае предельные циклы представляют собой выпуклую кривую, имеющую резкие повороты касательной (типа угловых точек) во втором и четвертом квадрантах. Это связано с практически релейным изменением скорости при достижении колебательной системой наибольшего отклонения. В целом, предельный цикл имеет “ромбовидную” форму.

При наличии кубической возвращающей силы в этих угловых точках появляется новый эффект: скорость достигает максимального значения с значительным запаздыванием по отношению к моменту, когда колебательная система проходит максималь-

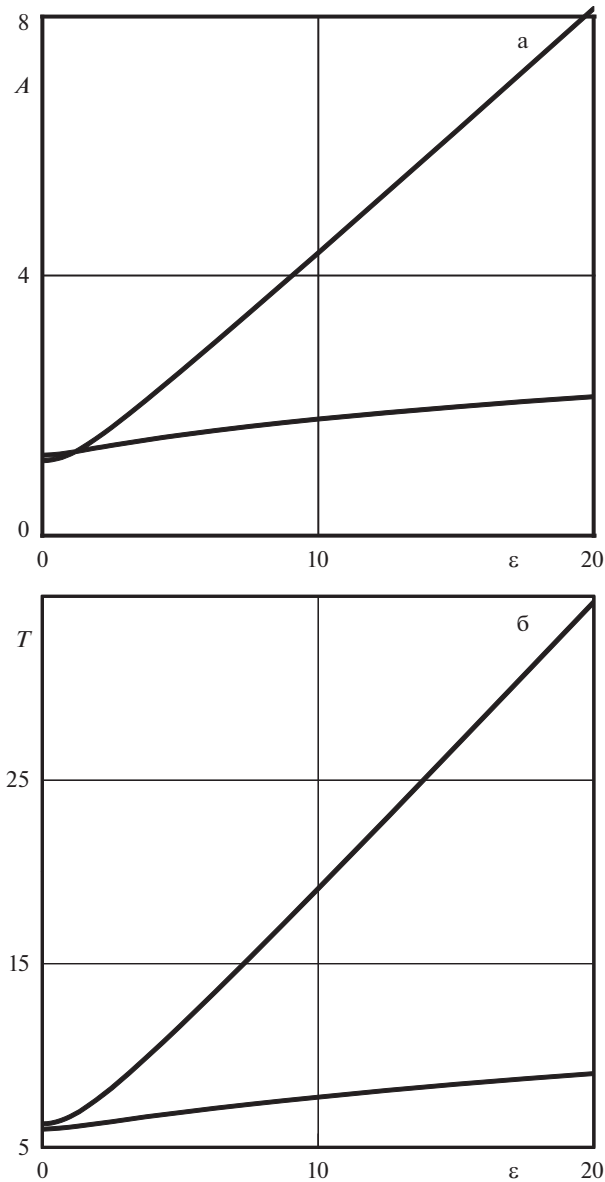


Рис. 1. Амплитуда A и период T автоколебаний для классического уравнения Релея (верхние кривые) и для случая кубической возвращающей силы.

ное отклонение. Наиболее отчетливо этот эффект виден при значениях $\varepsilon \approx 5$. При возрастании ε локальная кривизна в этих точках становится более выраженной.

Также можно отметить появление значительных участков, на которых система движется с почти постоянной скоростью. Из-за этого, в целом, предельный цикл приобретает “квадратный” вид.

Оставшееся общим свойством предельных циклов заключается в том, что около крайних положений колебательной системы происходит резкое изменение скорости.

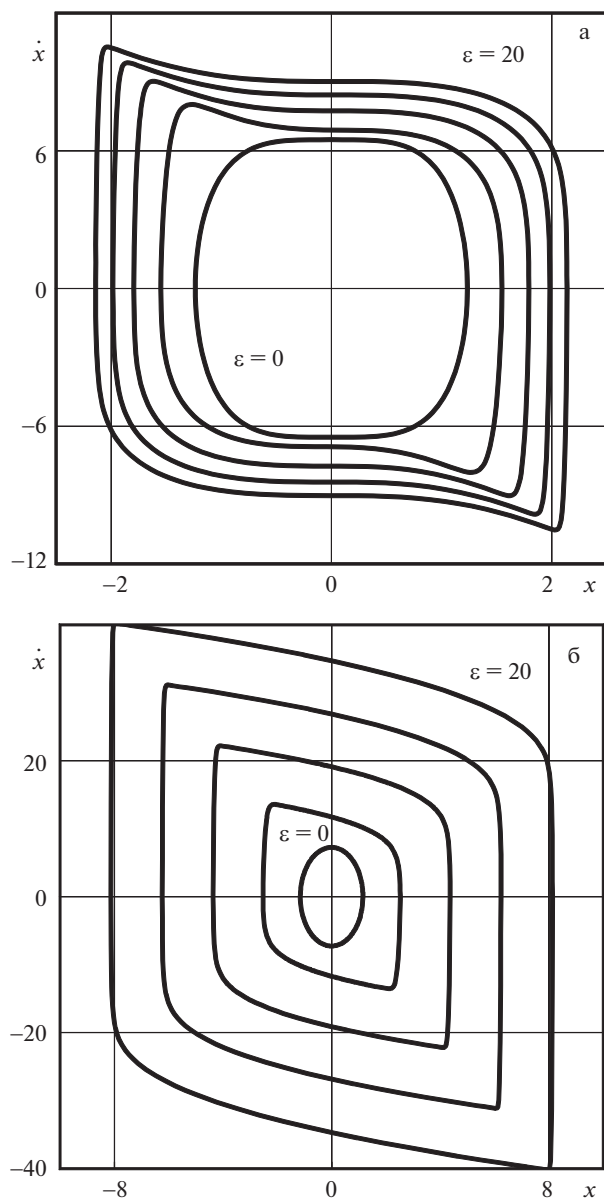


Рис. 2. Предельные циклы автоколебаний для случая кубической возвращающей силы (а) и для классического уравнения Релея (б).

Заключение. Для колебательной системы с механизмом возбуждения как в осцилляторе Релея, но с нелинейной (кубической) возвращающей силой построены предельные циклы и вычислены амплитуды и периоды автоколебаний. Задача решена с помощью метода ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметру для широкого диапазона значений коэффициента обратной связи. Предложенная итерационная процедура позволяет достичь заданной точности вычислений. Проведен анализ особен-

ностей предельного цикла, вызванных нелинейной возвращающей силой при увеличении коэффициента самовозбуждения. Полученные результаты сопоставлены с автоколебаниями классического осциллятора Релея с линейной возвращающей силой.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 123021700055-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харкевич А.А. Автоколебания. М.: Гостехиздат, 1953. 171 с.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
3. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 387 с.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
5. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400 с.
6. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
7. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 247 с.
8. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
9. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
10. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
11. Дородницын А.А. Асимптотическое решение уравнения Ван дер Поля // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 3. С. 313–328.
12. Cartwright M.L. Van der Pol's equation for relaxation oscillations // Contribut. to Theory Nonlin. Oscill. Ann. Math. Studies. 1952. № 29. P. 3–18.
13. Krogdahl W.S. Numerical solutions of the Van der Pol equation // Z. Angew. Math. Phys. 1960. V. 2. № 1. P. 59–63.
14. Urabe M. Numerical study of periodic solutions of Van der Pol's equation // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. Т. 2. С. 367–376.
15. Акуленко Л.Д., Коровина Л.И., Нестеров С.В. Автоколебания существенно нелинейной системы // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 3. С. 42–48.
16. Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Нестеров С.В. Эффективное численно-аналитическое решение изопериметрических вариационных задач механики методом ускоренной сходимости // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 723–741.
17. Акуленко Л.Д., Коровина Л.И., Кумакишев С.А., Нестеров С.В. Автоколебания осцилляторов Релея и Ван дер Поля при умеренно больших коэффициентах обратной связи // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 273–281.

Self-sustained Oscillations and Limit Cycles in Rayleigh System with Cubic Return Force

S. A. Kumakshev^{a,#}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: kumak@ipmnet.ru*

An oscillatory system with an excitation mechanism as in a Rayleigh oscillator, but with a nonlinear (cubic) returning force, is investigated. Using the accelerated convergence method and the continuation procedure for the parameter, limit cycles are constructed and the amplitudes and periods of self-oscillations are calculated. This is done for a wide range of feedback coefficient values, in which this coefficient is not asymptotically small or large. The proposed iterative procedure allows to achieve the specified accuracy of calculations. The analysis of the features of the limit cycle caused by an increase in the self-excitation co-

efficient is carried out. The results obtained are compared with the self-oscillations of a classical Rayleigh oscillator with a linear returning force.

Keywords: self-oscillations, limit cycle, Rayleigh oscillator

REFERENCES

1. *Kharkevich A.A.* Self-Induced Vibrations. Moscow: Gostekhizdat, 1953. 171 p. (in Russian)
2. *Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E.* Theory of Oscillations. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 915 p. (in Russian)
3. *Lefschetz S.* Differential Equations: Geometric Theory. N.Y.: Wiley, 1957. 390 p.
4. *Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A.* Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. Moscow: Nauka, 1958. 462 p.
5. *Blaquiere A.* Nonlinear System Analysis. N.Y.: Acad. Press, 1966. 408 pp.
6. *Zhuravlev V.F., Klimov D.M.* Applied Methods in the Vibration Theory. Moscow: Nauka, 1988. 326 p. (in Russian)
7. *Mishchenko E.F., Rozov N.Kh.* Differential Equations with Small Parameters and Relaxation Oscillations. N. Y.: Plenum Press, 1980. 228 p.
8. *Volosov V.M., Morgunov B.I.* Method of Averaging in the Theory of Nonlinear Oscillatory Systems. Moscow: Izd-vo MGU, 1971. 507 p. (in Russian)
9. *Akulenko L.D.* Asymptotic Methods of Optimal Control. Moscow: Nauka, 1987. 365 p. (in Russian)
10. *Malkin I.G.* Some Problems of the Theory of Nonlinear Oscillations. Moscow: Gostekhizdat, 1956. 491 p. (in Russian)
11. *Dorodnicyn A.A.* Asymptotic solution of Van Der Pol's equation // PMM, 1947, vol. 11, no. 3, pp. 313–328.
12. *Cartwright M.L.* Van der Pol's equation for relaxation oscillations // Contribut. to Theory Nonlin. Oscill. Ann. Math. Studies, 1952, no. 29, pp. 3–18.
13. *Krogdahl W.S.* Numerical solutions of the Van der Pol equation // Z. Angew. Math. Phys., 1960, vol. 2, no. 1, pp. 59–63.
14. *Urabe M.* Numerical study of periodic solutions of van der Pol's equation. // in: Tr. Mezhdunarod. Simpoz. Nelinejnym Kolebaniyam, Mezhdunarod. Soyuz. Teor. Prikl. Mekh., Kiev, 1961, 1963, no. 2, pp. 367–375.
15. *Akulenko L.D., Korovina L.I., Nesterov S.V.* Self-induced vibrations in an essentially nonlinear system // Mech. Solids, 2002, vol. 37, no. 3, pp. 36–41.
16. *Akulenko L.D., Kumakshev S.A., Nesterov S.V.* Effective numerical-analytical solution of isoperimetric variational problems of mechanics by an accelerated convergence method // JAMM, 2002, vol. 66, no. 5, pp. 693–708.
17. *Akulenko L.D., Korovina L.I., Kumakshev S.A., Nesterov S.V.* Self-sustained oscillations of Rayleigh and Van der Pol oscillators with moderately large feedback factors // JAMM, 2004, vol. 68, no. 2, pp. 241–248.

УДК 531.31:62-50

Светлой памяти Л.Д. Акуленко

СКОРЕЙШЕЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК ВДОЛЬ ШЕРОХОВАТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ

© 2023 г. И. М. Ананьевский^{1,*}¹*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия***e-mail: anan@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 23.05.2023 г.

После доработки 15.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Рассматривается система материальных точек, которые движутся по горизонтальной прямой за счет сил взаимодействия друг с другом и сил трения, действующих между точками и прямой. Допускаются только безреверсные движения, т.е. движения, при которых все точки перемещаются только в одном направлении. Решена задача оптимального по быстрдействию перемещения системы из одного состояния покоя в другое.

Ключевые слова: система материальных точек, кулоновское трение, оптимальное быстродействие

DOI: 10.31857/S0032823523050028, EDN: QHYLYP

1. Введение. Рассматривается механическая система, представляющая собой совокупность конечного числа точечных масс, расположенных на горизонтальной прямой. Массы взаимодействуют между собой с помощью сил, которые являются внутренними по отношению к данной системе материальных точек и выступают в качестве управляющих сил. На эти силы не накладывается ограничений. Кроме того, массы испытывают действие сил сухого трения со стороны прямой. Наличие сил трения, т.е. внешних сил, позволяет перемещать всю систему материальных точек на произвольные расстояния путем изменения сил взаимодействия точек между собой.

Изучаемая механическая система относится к классу локомотивных систем с изменяемой конфигурацией, активный интерес к которым в последние годы проявляют разработчики мобильных роботов. Предлагаемое исследование продолжает серию работ [1–7], посвященных движению систем нескольких тел с изменяемой конфигурацией вдоль горизонтальной прямой с сухим трением.

В работе рассматриваются только безреверсные движения, т.е. движения, при которых все точки системы перемещаются лишь в одном направлении. Преимущество безреверсного движения состоит в том, что оно минимизирует энергию, затрачиваемую на компенсацию работы сил трения, т.е. такое движение наименее энергозатратно. Была решена задача о построении безреверсного управляемого периодического движения системы двух тел [1]. Установлены [7, 8] необходимые и достаточные условия

реализуемости безреверсного режима перемещения системы материальных точек на заданное расстояние из одного состояния покоя в другое.

Построено [9] оптимальное управление системой из произвольного числа материальных точек, обеспечивающее максимальное перемещение системы из покоя в покой за фиксированное время в предположении, что массы точек и их коэффициенты трения о прямую одинаковы. Ниже предложено решение задачи оптимального по быстрдействию перемещения такой системы из одного состояния покоя в другой в предположении, что массы точек и коэффициенты трения произвольны.

2. Постановка задачи и уравнения движения. Рассматривается система n взаимодействующих материальных точек, движущихся вдоль горизонтальной прямой при наличии сухого кулонова трения между точками и прямой, $n > 2$. Пусть m_i — масса i -й точки, x_i и v_i — ее координата и скорость на прямой, f_i^j — сила, с которой j -я точка действует на i -ю, f_i — сумма сил, действующих на i -ю точку со стороны всех остальных точек,

$$f_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n f_i^j$$

Динамика системы описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = v_i, \quad m_i \dot{v}_i = f_i + q_i; \quad i = \overline{1, n} \quad (2.1)$$

Здесь q_i — сила сухого кулонова трения, действующая на i -ю точку и задаваемая соотношениям

$$q_i = \begin{cases} -k_i m_i g \operatorname{sign} v_i, & v_i \neq 0 \\ -f_i, & v_i = 0, \quad |f_i| \leq k_i m_i g \\ -k_i m_i g \operatorname{sign} f_i, & v_i = 0, \quad |f_i| > k_i m_i g, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $k_i > 0$ — коэффициент сухого трения между прямой и i -й точкой, g — ускорение силы тяжести.

Задача. Построить закон изменения управляющих сил f_i^j , $i, j = \overline{1, n}$, который обеспечит перевод системы (2.1) из начального состояния

$$x_i(0) = x_i^0 \leq 0, \quad v_i(0) = 0; \quad i = \overline{1, n} \quad (2.3)$$

в терминальное состояние

$$x_i(T) = 0, \quad v_i(T) = 0; \quad i = \overline{1, n} \quad (2.4)$$

за минимально возможное время T в безреверсном режиме, т.е. с соблюдением условия

$$v_i(t) \geq 0; \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [0, T] \quad (2.5)$$

Ограничения на управляющие силы f_i^j не налагаются. Более того, допускается мгновенное (ударное) взаимодействие материальных точек, при котором происходит передача импульса от одной точки к другой и их скорости меняются скачком.

Таким образом, в задаче требуется привести в безреверсном режиме за кратчайшее время все точки системы в начало координат прямой, управляя силами взаимодействия точек между собой.

Занумеруем точки в порядке неубывания произведений их масс на коэффициенты трения:

$$k_1 m_1 \leq k_2 m_2 \leq \dots \leq k_n m_n \quad (2.6)$$

Тогда, как показано в [8], неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} k_i m_i > k_n m_n \quad (2.7)$$

представляет собой достаточное условие существования управления, переводящего систему в безреверсном режиме из состояния (2.3) в состояние (2.4). Будем считать, что это неравенство выполнено.

Ранее [9] сформулированная выше задача оптимального управления решена для случая, когда массы всех точек и их коэффициенты трения одинаковы. В данной работе эти параметры задачи произвольны, они лишь должны удовлетворять условию (2.7).

3. Движение центра масс системы. В каждый момент времени текущее состояние системы описывается парой векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Пусть M – суммарная масса всей системы,

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

Обозначим через X и V координату и скорость центра масс системы, через P – суммарный импульс системы. Эти величины выражаются через координаты и скорости точек системы следующим образом:

$$X(x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad V(v) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i v_i, \quad P(v) = MV(v) \quad (3.1)$$

Рассмотрим два таких состояния (x, v^1) и (x, v^2) , что $P(v^1) = P(v^2)$. В этих состояниях векторы координат точечных масс системы и суммарные импульсы совпадают, а векторы скоростей могут быть различны. Поскольку передача импульса от одной материальной точки к другой может происходить мгновенно, то переход между этими состояниями не требует времени. Мы будем отождествлять состояния, в которых совпадают векторы координат и суммарные импульсы (следовательно, совпадают и скорости центра масс), и обозначать их парой (x, V) . Таким образом, множество состояний системы представляет собой пространство размерности $n + 1$, а терминальное состояние, в которое приводится система, совпадает с началом координат этого пространства.

Помимо системы (2.1) будем изучать движение центра масс рассматриваемой совокупности материальных точек, которое подчиняется уравнению

$$M\ddot{X} = Q \quad (3.2)$$

Здесь Q – сумма всех внешних сил (сил трения), действующих на систему:

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i \quad (3.3)$$

Из (2.2) и (3.3) вытекает неравенство

$$|Q| \leq \bar{Q}; \quad \bar{Q} = \sum_{i=1}^n k_i m_i g \quad (3.4)$$

Режим движения системы, в котором $Q = -\bar{Q}$, будем называть режимом максимального торможения. В этом режиме сила Q отрицательна, поскольку безреверсное движение системы происходит лишь в положительном направлении.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если $x_i \leq 0$, $i = \overline{1, n}$, и $X = 0$, то $x = 0$. Если $v_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, и $V(v) = 0$, то $v = 0$.

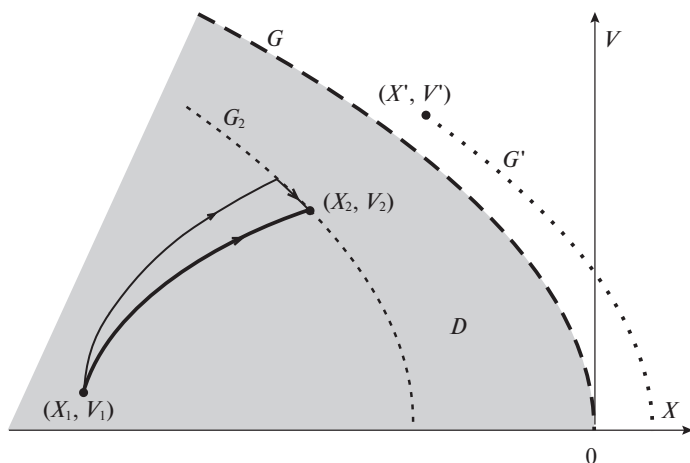


Рис. 1. Фазовая плоскость движения центра масс.

Это утверждение означает, что для приведения системы в безреверсном режиме в терминальное состояние достаточно остановить ее центр масс в начале координат при условии, что в процессе движения ни одна из точек системы не перейдет через начало координат прямой, вдоль которой происходит перемещение. В частности, отсюда следует, что при соблюдении условий (2.5) и $x_i(t) \leq 0$, $0 \leq t \leq T$, $i = \overline{1, n}$, минимально возможное время движения центра масс до начала координат пространства (X, V) совпадает со временем оптимального перемещения всей системы в терминальное состояние.

Обозначим через D область на плоскости фазовых переменных X, V уравнения (3.2), заключенную между полуосью $X \leq 0$ и ветвью параболы

$$G = \left\{ (X, V) : X = -\frac{M}{2Q} V^2, V \geq 0 \right\} \quad (3.5)$$

На рис. 1 эта ветвь изображена жирной штриховой линией, а область D затенена. Опишем подробнее свойства параболы G .

Пусть в некоторый момент времени центр масс системы находится в точке (X', V') фазовой плоскости уравнения (3.2). Через точку (X', V') проведем параболу G' , полученную сдвигом параболы G вдоль оси X (пунктирная линия на рис. 1):

$$G' = \left\{ (X, V) : X = -\frac{M}{2Q} V^2 + X' + \frac{M}{2Q} V'^2 \right\}$$

В точке (X', V') касательный вектор к траектории уравнения (3.2) имеет вид (V', Q) , а касательный вектор к параболе G' — вид $(V', \bar{Q})$. В режиме максимального торможения, т.е. при $Q = \bar{Q}$, центра масс системы движется вдоль параболы G' . Если же $Q < \bar{Q}$, то траектория центра масс пересечет параболу G' слева направо. В силу неравенства (3.4) переход траектории в обратном направлении невозможен.

Утверждение 2. В безреверсном режиме перемещения системы (2.1) в начало координат траектория уравнения (3.2) лежит в области D или на ее границе.

Доказательство. Предположим противное, пусть в момент времени t' точка (X', V') безреверсной траектории Γ' , идущей в начало координат, не лежит в указанном множестве. Поскольку для безреверсных движений выполнено неравенство $V \geq 0$, то точка (X', V') лежит в верхней полуплоскости правее параболы G , как показано на рис. 1. Из приведенных выше рассуждений вытекает, что пр $t > t'$ ни одна точка траектории Γ' не может оказаться левее параболы G' , а при движении в режиме максимального торможения траектория Γ' проходит по параболе G' . Поэтому траектория Γ' пересечет ось X в точке пересечения параболы G' с этой осью или правее ее. Следовательно, в момент остановки центра масс его координата X будет положительна, что противоречит безреверсному достижению системой (2.1) терминального состояния (2.4).

4. Управление в режиме максимального торможения. Пусть в процессе безреверсного перемещения системы (2.1) в терминальное состояние (2.4) траектория центра масс попала на параболу G . Тогда, как следует из приведенных выше рассуждений, движение центра масс к началу координат продолжается по параболе G , т.е. в режиме максимального торможения. Сформулируем один из возможных алгоритмов управления системой (2.1), который обеспечивает данный режим. Алгоритм состоит из нескольких этапов, на каждом из которых движется лишь одна точка, остальные покоятся.

Пусть в момент выхода траектории центра масс на параболу G состояние системы описывалось парой (x, V) , причем $V > 0$ и некоторые из x_i отрицательны, мы обозначим их через x_{i_s} , $s = \overline{1, r}$, $r \leq n$. Передадим весь импульс системы точке m_{i_1} . Эта точка приобретет скорость $v_{i_1} = MV/m_{i_1}$, остальные точки будут неподвижны. Сформируем силы взаимодействия точки m_{i_1} с другими точками следующим образом:

$$f_{i_1}^j = -f_j^{i_1} = -k_j m_j g; \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq i_1 \quad (4.1)$$

В прочих парах точки между собой не взаимодействуют, т.е.

$$f_i^j = f_j^i = 0; \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i, j \neq i_1 \quad (4.2)$$

Тогда действующие на материальные точки силы трения выражаются так:

$$q_i = -k_i m_i g; \quad i = \overline{1, n} \quad (4.3)$$

При таком распределении сил уравнения движения точек принимают вид

$$m_{i_1} \ddot{x}_{i_1} = -\bar{Q}, \quad m_j \ddot{x}_j = 0; \quad j \neq i_1, \quad (4.4)$$

т.е. точка m_{i_1} замедляется с ускорением $\bar{Q}/m_{i_1}$, а остальные точки покоятся.

Когда точка m_{i_1} достигнет терминального положения (нуля), передадим весь оставшийся импульс системы точке m_{i_2} . Теперь станут неподвижны все точки, кроме m_{i_2} . Сформируем силы взаимодействия между точками по формулам (4.1), (4.2) с заменой индекса i_1 на i_2 . Силы трения не изменятся и будут задаваться выражениями (4.3), а в уравнениях движения (4.4) достаточно будет заменить i_1 на i_2 . Теперь точка m_{i_2} будет замедляться, а остальные точки будут покоиться. Когда точка m_{i_2} достигнет нуля, передадим весь импульс системы точке m_{i_3} и т.д. вплоть до точки m_{i_r} . На каждом этапе движения суммарная сила трения, действующая на систему, равняется $-\bar{Q}$, т.е. движение системы происходит в режиме максимального торможения, а центр масс движется по параболе G к началу координат пространства (X, V) . Из утверждения 1 следует, что когда центр масс достигнет начала координат, все точки системы окажутся в терминальном состоянии.

Известно [10], что парабола G представляет собой оптимальную по быстродействию траекторию приведения в нуль тела массы M , движущегося в силу уравнения (3.2) при ограничении (3.4). Поэтому режим максимального торможения обеспечивает скорейшее приведение центра масс системы в начало координат из любой точки параболы G и, следовательно, скорейшее приведение системы (2.1) в терминальное состояние (2.4) из начального состояния (x, v) при условии, что точка $(X(x), V(v))$ лежит на параболе G , т.е. если координата X и скорость V центра масс, вычисленные согласно (3.1), удовлетворяют уравнению из определения параболы (3.5).

5. Алгоритм оптимального управления. Пусть $x_{i_s}^0 < 0$; $s = \overline{1, r}$, $r \leq n$, — все отличные от нуля начальные координаты точечных масс, пронумерованные с сохранением порядка (2.6), т.е.

$$k_{i_1} m_{i_1} \leq k_{i_2} m_{i_2} \leq \dots \leq k_{i_r} m_{i_r} \quad (5.1)$$

Алгоритм оптимального управления состоит из нескольких этапов. На каждом этапе движется только одна материальная точка, остальные покоятся.

На первом шаге сформируем силы взаимодействия точки m_{i_1} с другими точками следующим образом:

$$f_{i_1}^j = -f_j^{i_1} = k_j m_j g; \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq i_1 \quad (5.2)$$

Во всех остальных парах на первом этапе взаимодействие отсутствует и выполнено (4.2). Силы трения теперь выражаются так:

$$q_{i_1} = -k_{i_1} m_{i_1} g, \quad q_i = k_i m_i g; \quad i = \overline{1, n}, \quad i \neq i_1 \quad (5.3)$$

Уравнения движения точек принимают вид

$$m_{i_1} \ddot{x}_{i_1} = Q_{i_1}, \quad m_i \ddot{x}_i = 0; \quad i \neq i_1 \quad (5.4)$$

Здесь и ниже используется обозначение

$$Q_j = \sum_{i=1, i \neq j}^n k_i m_i g - k_j m_j g \quad (5.5)$$

Заметим, что из (2.6), (2.7) вытекают соотношения $Q_j > 0$, $j = \overline{1, n}$.

Таким образом, на первом этапе точка m_{i_1} движется с ускорением Q_{i_1}/m_{i_1} , а остальные точки покоятся. Когда точка m_{i_1} достигает начала координат, она останавливается, весь накопленный импульс системы передается точке m_{i_2} и начинается второй этап управления.

На втором этапе остаются неподвижными все точки, кроме m_{i_2} . Силы взаимодействия между точками задаются формулами (4.2), (5.2) с заменой индекса i_1 на i_2 . Силы трения и уравнения движения представляются в виде (5.3), (5.4), где также нужно заменить i_1 на i_2 . Теперь точка m_{i_2} движется с ускорением Q_{i_2}/m_{i_2} , а остальные точки покоятся. Второй этап продолжается, пока точка m_{i_2} не достигнет нуля, после чего весь импульс системы передается точке m_{i_3} и т.д.

На s -м этапе движения суммарная сила трения, действующая на систему, равняется Q_{i_s} , а динамика центра масс подчиняется уравнению

$$M \ddot{X} = Q_{i_s} \quad (5.6)$$

При таком алгоритме управления центр масс системы движется к нулю, а его скорость растет. Следовательно, в некоторый момент времени траектория центра масс на фазовой плоскости (X, V) пересечет параболу G . В этот момент управление по данно-

му алгоритму прекращается и начинается режим максимального торможения с использованием алгоритма, изложенного в разд. 4.

6. Доказательство оптимальности управления. Таким образом, предлагаемое перемещение системы в начало координат состоит из двух участков. На первом, который будем называть участком разгона, траектория движения центра масс лежит внутри области D . На втором — на участке торможения — эта траектория проходит по параболе G . Покажем, что изложенные в разд. 3 и 4 законы управления дают решение сформулированной задачи оптимального управления, т.е. обеспечивают скорейший перевод системы в начало координат. Изучим для этого свойства оптимальной траектории системы (2.1).

Выше было установлено, что если траектория движения центра масс попадает на параболу G , то при безреверсном перемещении центр масс обязан продолжать движение к началу координат по параболе G в режиме максимального торможения. Рассмотрим теперь участок разгона системы (2.1), движение центра масс здесь происходит внутри области D .

Мы будем использовать следующее простое геометрическое соображение. Пусть в фазовом пространстве системы (2.1) из состояния (x^1, V_1) в состояние (x^2, V_2) ведут две различные траектории, назовем их первая и вторая, а соответствующие им траектории центра масс лежат в области D фазовой плоскости (X, V) и соединяют точки (X_1, V_1) и (X_2, V_2) , $X_j = X(x^j)$, $j = 1, 2$, причем первая траектория расположена выше второй. Тогда движение центра масс из точки (X_1, V_1) в точку (X_2, V_2) по верхней траектории происходит быстрее, поэтому время движения системы (2.1) из состояния (x^1, V_1) в состояние (x^2, V_2) по первой траектории меньше, чем по второй.

Утверждение 3. На участке оптимальной траектории, которому соответствует движение центра масс в области D , в каждый момент времени не может двигаться более одной точечной массы системы.

Доказательство. Рассмотрим участок траектории системы (2.1), ведущий из точки (x^1, V_1) в точку (x^2, V_2) , которому соответствует отрезок траектории центра масс, лежащий в области D и соединяющий точки (X_1, V_1) и (X_2, V_2) , $X_j = X(x^j)$, $j = 1, 2$, (рис. 1, жирная сплошная кривая).

Предположим противное, пусть на рассматриваемом участке траектории движутся одновременно несколько точечных масс m_i , $s = \overline{1, r}$, $2 \leq r \leq n$. Для совокупности их индексов введем обозначение $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, порядок (5.1) при нумерации сохраняется. Таким образом,

$$x_i^1 < x_i^2, \quad v_i(t) > 0; \quad i \in I, \quad x_i^1 = x_i^2, \quad v_i(t) = 0; \quad i \notin I$$

Покажем, что такое движение не является оптимальным, т.е. перевести систему (2.1) из (x^1, V_1) в (x^2, V_2) можно быстрее.

Уравнение движения центра масс (3.2) при сделанных предположениях принимает вид

$$M\ddot{X} = \sum_{i \in I} q_i(t) - \sum_{i \in I} k_i m_i g, \quad (6.1)$$

а в силу (2.2) справедливо неравенство

$$|q_i(t)| \leq k_i m_i g; \quad i \notin I \quad (6.2)$$

Построим алгоритм управления, который обеспечит более быстрое перемещение системы (2.1) из состояния (x^1, V_1) в состояние (x^2, V_2) . Алгоритм аналогичен изложен-

ному в разд. 4 и состоит из нескольких этапов. Как и выше, на каждом этапе движется только одна масса, остальные покоятся.

Сначала весь импульс системы передадим точке m_{i_1} и сформируем силы взаимодействия по формулам (4.2), (5.2). Тогда действующие на материальные точки силы трения выражаются формулами (5.3), а уравнения движения примут вид (5.4). Точечная масса m_{i_1} движется из положения $x_{i_1}^1$ в положение $x_{i_1}^2$ с ускорением Q_{i_1}/m_{i_1} , а остальные массы покоятся. Когда координата массы m_{i_1} станет равной $x_{i_1}^2$, эта точечная масса останавливается, весь накопленный импульс системы передается материальной точке m_{i_2} и начинается второй этап управления.

На втором этапе остаются неподвижными все точки, кроме m_{i_2} . Силы взаимодействия между точками задаются формулами (4.2), (5.2), а силы трения и уравнения движения представляются в виде (5.3), (5.4), причем всюду индекс i_1 нужно заменить на i_2 . Теперь точка m_{i_2} движется с ускорением Q_{i_2}/m_{i_2} , а остальные точки покоятся. Второй этап продолжается, пока координата массы m_{i_2} не станет равной $x_{i_2}^2$, после чего весь импульс системы передается точке m_{i_3} и т.д.

Таким образом, на s -м этапе движения суммарная сила трения, действующая на систему, равняется Q_{i_s} , а динамика центра масс подчиняется уравнению (5.6). Так как множество I содержит не менее двух индексов, то из формулы (5.5) для Q_j и неравенства (6.2) вытекают следующие соотношения для правых частей уравнений (5.6) и (6.1):

$$Q_{i_s} > \sum_{i \in I} q_i(t) - \sum_{i \in I} k_i m_i g; \quad i_s \in I$$

Следовательно, при изложенном поэтапном алгоритме управления центр масс движется с большим ускорением, чем при исходном движении, поэтому его траектория (рис. 1, тонкая сплошная кривая) расположена выше исходной траектории.

На фазовой плоскости (X, V) через точку (X_2, V_2) проведем параболу G_2 (рис. 1, тонкая штриховая линия)

$$G_2 = \left\{ (X, V) : X = -\frac{M}{2Q} V^2 + X_2 + \frac{M}{2Q} V_2^2 \right\},$$

полученную сдвигом параболы G вдоль оси X . В разд. 2 было показано, что траектория центра масс может пересекать параболу G_2 только слева направо, поэтому начальная точка рассматриваемого отрезка траектории (X_1, V_1) лежит левее параболы G_2 .

При поэтапном алгоритме управления траектория центра масс проходит выше исходной траектории, поэтому в некоторый момент времени она попадет на параболу G_2 . В этот момент управление по данному алгоритму прекращается и начинается режим максимального торможения с использованием модификации алгоритма, изложенного в разд. 3. Модификация состоит в том, что система материальных точек приводится теперь не в начало координат, а в состояние (x^2, V_2) . Массы m_{i_s} , $i_s \in I$, которые еще не пришли в положения $x_{i_s}^2$, последовательно переводятся туда в режиме максимального торможения. При этом центр масс системы перемещается вдоль параболы G_2 и окажется в точке (X_2, V_2) , когда система (2.1) достигнет состояния (x^2, V_2) . Поскольку траектория центра масс при поэтапном алгоритме управления расположена выше исходной траектории, то поэтапный алгоритм обеспечивает более быстрое перемещение центра масс в точку (X_2, V_2) . Следовательно, исходная траектория не является оптимальной по быстрдействию. Утверждение 3 доказано.

Итак, при оптимальном законе управления на участке разгона материальные точки перемещаются поочередно и алгоритм управления разбивается на этапы, на каждом из которых движется лишь одна материальная точка с ускорением Q_i/m_i , где i — индекс этой точки. Формально, каждая точка может перемещаться из начального положения в конечное за несколько этапов, между которыми есть этапы с перемещением других точек. Покажем, что при оптимальном движении очередность перемещения точек соответствует порядку (2.6), т.е. точка с меньшим трением движется раньше, чем точка с большим трением.

Воспользуемся для этого следующим вспомогательным рассуждением. Рассмотрим два способа перемещения твердого тела вдоль горизонтальной прямой. В первом случае тело, имея начальную скорость $w_0 \geq 0$, сначала проходит расстояние $l_1 > 0$ с ускорением $a_1 > 0$, а затем проходит расстояние $l_2 > 0$ с ускорением a_2 , причем $a_1 < a_2$. Во втором случае тело с той же начальной скоростью w_0 сначала проходит расстояние l_2 с ускорением a_2 , а затем расстояние l_1 с ускорением a_1 . Каждый из вариантов перемещения состоит из двух этапов. Обозначим через w_1 скорость тела в конце первого этапа при первом способе перемещения, а через w_2 — скорость тела в конце первого этапа при втором способе. Тогда

$$w_1 = (w_0^2 + 2a_1l_1)^{1/2}, \quad w_2 = (w_0^2 + 2a_2l_2)^{1/2} \quad (6.3)$$

Скорость тела в конце движения в обоих случаях равна

$$w = (w_0^2 + 2a_1l_1 + 2a_2l_2)^{1/2} \quad (6.4)$$

Пусть T_1 и T_2 — времена движения в первом и втором случаях соответственно.

Утверждение 4. Справедливо неравенство $T_2 < T_1$.

Доказательство. Имеем

$$T_1 = \frac{w_1 - w_0}{a_1} + \frac{w - w_1}{a_2}, \quad T_2 = \frac{w_2 - w_0}{a_2} + \frac{w - w_2}{a_1},$$

поэтому

$$T_2 - T_1 = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} (w_1 + w_2 - w - w_0)$$

Учитывая соотношение $a_1 < a_2$, достаточно показать, что

$$w_1 + w_2 > w + w_0 \quad (6.5)$$

Из (6.3), (6.4) вытекает, что $w_1^2 + w_2^2 = w^2 + w_0^2$, поэтому (6.5) равносильно неравенству $w_1 w_2 > w w_0$. Возведя в квадрат это неравенство и сокращая одинаковые слагаемые в обеих его частях, получим очевидное соотношение $4a_1 a_2 l_1 l_2 > 0$. Утверждение 4 доказано.

Предположим теперь, что при некотором законе управления системой (2.1) порядок (2.6) нарушен и этап с перемещением точечной массы m_j следует сразу за этапом с перемещением массы m_i , причем $k_j m_j < k_i m_i$. Убедимся, что такой закон управления не является оптимальным.

Рассмотрим движение центра масс системы на этих двух смежных этапах. Пусть на первом точка m_i проходит расстояние l^i с ускорением Q_i/m_i . Остальные точки покоятся, поэтому центр масс при этом перемещается на расстояние $l_1 = m_i l^i / M$ с ускорением $a_1 = Q_i / M$. На втором этапе точка m_j перемещается на расстояние l^j с ускорением

Q_j/m_j , а центр масс перемещается на расстояние $l_2 = m_j l^j / M$ с ускорением $a_2 = Q_j / M$. Используя формулу (5.5) для вычисления Q_i и Q_j и неравенство $k_j m_j < k_i m_i$, получаем $a_1 < a_2$.

Поменяем порядок этапов. Пусть теперь на первом точка m_j перемещается на расстояние l^j с ускорением Q_j/m_j , а на втором точка m_i перемещается на расстояние l^i с ускорением Q_i/m_i . Тогда центр масс сначала проходит расстояние l_2 с ускорением a_2 , а затем расстояние l_1 с ускорением a_1 . Из приведенных выше рассуждений вытекает, что скорость центра масс к концу второго этапа в обоих случаях одинакова, следовательно, итоговое состояние всей системы материальных точек не зависит от порядка этапов. В соответствии с утверждением 4 время движения центра масс при втором способе перемещения меньше, поэтому исходный закон управления не является оптимальным.

Таким образом, оптимальный алгоритм управления на участке разгона состоит из поэтапного перемещения точек в порядке возрастания их трения с прямой, причем каждая точка за один этап переходит из своего начального положения в нуль. На каком-то этапе траектория движения центра масс выйдет на параболу G , после чего начнется участок максимального торможения вдоль этой параболы.

Замечание. Нетрудно видеть, что предложенный поэтапный алгоритм управления решает задачу оптимального быстрогодействия для всех начальных состояний, при которых центра масс системы находится в области D . Более того, этот алгоритм может быть применен не только для перевода системы точечных масс в начало координат, но и для перемещения ее в произвольное состояние покоя $x_i(T) = x_i^1$, $v_i(T) = 0$, $i = \overline{1, n}$, за минимально возможное время T в безреверсном режиме. В этом случае на i -м этапе точка m_i переводится из начального состояния в терминальное состояние x_i^1 , а параболу, вдоль которой центр масс движется в режиме максимального торможения, имеет вид

$$G = \left\{ (X, V) : X = -\frac{M}{2Q} V^2 + X(x^1) \right\}$$

Заключение. Решена задача оптимального быстрогодействия для системы произвольного числа материальных точек, движущихся по горизонтальной прямой за счет сил взаимодействия друг с другом и сил трения, действующих между точками и прямой. Рассматриваются только безреверсные движения, т.е. движения, при которых все точки перемещаются только в одном направлении. Показано, что оптимальный алгоритм управления состоит из двух участков: сначала точечные массы поочередно по одной перемещаются в терминальное положение в порядке возрастания их коэффициентов трения с прямой, а затем, после выхода траектории центра масс системы на выделенную кривую (параболу), используется режим максимального торможения. Предложенный закон управления позволяет приводить систему материальных точек в заданное терминальное состояние покоя за минимальное время.

Работа выполнена в соответствии с государственным заданием АААА-А20-120011690138-6 при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 21-51-12004-ННИО).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. Оптимальное прямолинейное движение двухмассовой системы // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 3–9.
2. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация прямолинейного движения двухмассовой системы // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 707–717.

3. Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K. The undulatory motion of a chain of particles in a resistive medium // ZAMM. 2011. V. 91. № 4. P. 259 – 275.
4. Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K. The undulatory motion of a chain of particles in a resistive medium in the case of a smooth excitation mode // ZAMM. 2013. V. 93. № 12. P. 895–913.
5. Wagner G.L., Lauga E. Crawling scallop: friction-based locomotion with one degree of freedom // J. Theor. Biol. 2013. № 324. P. 42–51.
6. Черноусько Ф.Л. Поступательное движение цепочки тел в сопротивляющейся среде // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 4. С. 380–388.
7. Болотник Н.Н., Губко П.А., Фигурина Т.Ю. О возможности безреверсного периодического прямолинейного движения системы двух тел на шероховатой плоскости // ПММ. 2018. Т. 82. № 2. С. 138–148.
8. Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю. Безреверсное движение цепочки взаимодействующих тел вдоль прямой по шероховатой горизонтальной плоскости // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 3. С. 3–13.
9. Фигурина Т.Ю. Оптимальное управление системой материальных точек на прямой с сухим трением // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 3–9.
10. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

Fastest Motion of a System of Interacting Mass Points along a Rough Horizontal Straight Line

I. M. Ananievski^{a, #}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: anan@ipmnet.ru*

An optimal control problem for a system of material points that move along a horizontal rough line is considered. The system moves due to forces of the interaction between the points and the forces of Coulomb's dry friction acting between points and the underlying line. Only forward movement is allowed. A control algorithm is proposed which provides the fastest transition of the system from one state of rest to another.

Keywords: system of mass points, Coulomb's dry friction, time-optimal control

REFERENCES

1. Chernous'ko F.L. The optimum rectilinear motion of a two-mass system // JAMM, 2002, vol. 66, no. 1, pp. 1–7.
2. Chernous'ko F.L. Analysis and optimization of the rectilinear motion of a two-body system // JAMM, 2011, vol. 75, no. 5, pp. 493–500.
3. Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K. The undulatory motion of a chain of particles in a resistive medium // ZAMM, 2011, vol. 91, no. 4, pp. 259–275.
4. Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K. The undulatory motion of a chain of particles in a resistive medium in the case of a smooth excitation mode // ZAMM, 2013, vol. 93, no. 12, pp. 895–913.
5. Wagner G.L., Lauga E. Crawling scallop: friction-based locomotion with one degree of freedom // J. Theor. Biol., 2013, no. 324, pp. 42–51.
6. Chernous'ko F.L. Translational motion of a chain of bodies in a resistive medium // JAMM, 2017, vol. 81, no. 4, pp. 256–261.
7. Bolotnik N.N., Gubko P.A., Figurina T.Yu. Possibility of a non-reverse periodic rectilinear motion of a two-body system on a rough plane // Mech. Solids, 2018, vol. 53, pp. 7–15.
8. Bolotnik N.N., Figurina T.Yu. Reversible motion of a chain of interacting bodies along a straight line along a rough horizontal plane // J. Comput. Syst. Sci. Int., 2023, no. 3. (in Press)
9. Figurina T.Y. Optimal control of system of material points in a straight line with dry friction // J. Comput. Syst. Sci. Int., 2015, vol. 54, no. 5, pp. 671–677.
10. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.: Wiley&Sons Inc., 1962. 360 p.

УДК 531.381:534.1

Светлой памяти Л.Д. Акуленко

ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ, ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ КОТОРОГО НАХОДЯТСЯ В ОТНОШЕНИИ 1 : 4 : 1

© 2023 г. Б. С. Бардин*, Б. А. Максимов**

¹Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия

*e-mail: bsbardin@yandex.ru

**e-mail: badmamaksimov1@gmail.com

Поступила в редакцию 10.06.2023 г.

После доработки 20.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Рассматривается движение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в однородном поле тяжести. Предполагается, что главные моменты инерции тела для неподвижной точки удовлетворяют условию Д.Н. Горячева—С.А. Чаплыгина, т.е. находятся в отношении 1 : 4 : 1, при этом никаких дополнительных ограничений на положение центра масс тела не накладывается.

Исследуется задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тела. В окрестности периодических движений введены локальные переменные и получены уравнения возмущенного движения. На основании линейного анализа устойчивости сделан вывод об орбитальной неустойчивости маятниковых вращений при всех значениях параметров. Установлено, что маятниковые колебания в зависимости от значений параметров могут быть как орбитально неустойчивы, так и устойчивы в линейном приближении. Для маятниковых колебаний, устойчивых в линейном приближении, на основании методов КАМ теории выполнен нелинейный анализ и получены строгие выводы об орбитальной устойчивости.

Ключевые слова: маятниковые периодические движения, орбитальная устойчивость, случай Д.Н. Горячева—С.А. Чаплыгина, локальные переменные, гамильтоновы системы

DOI: 10.31857/S0032823523050041, EDN: QHQNNGW

1. Введение. Значительный интерес, как для теоретической механики, так и для ее приложений представляет задача об орбитальной устойчивости периодических движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Наиболее простым и хорошо изученным классом периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой являются его плоские движения, которые описываются уравнением математического маятника. Изучение динамики тела в их окрестности часто позволяет сделать важные выводы об общем характере движения и качественно описать структуру фазового пространства вблизи периодических траекторий. Современные методы теории динамических систем: метод нормальных форм, методы теории КАМ и

общая теория устойчивости — позволяют получить строгие выводы об орбитальной устойчивости периодических движений такого типа.

В общем случае задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой содержит четыре параметра. С целью ограничить количество параметров задачи часто рассматривают наиболее интересные частные случаи. Ранее рассматривались случаи С.В. Ковалевской и Д.Н. Горячева—С.А. Чаплыгина, когда в задаче об орбитальной устойчивости имеется один параметр, а также случай динамически симметричного тела и случай Д.К. Бобылева—В.А. Стеклова, когда в задаче имеется два параметра.

В случае С.В. Ковалевской устойчивость маятниковых колебаний на основе различных подходов рассматривалась в [1–5]. Случай Д.Н. Горячева—С.А. Чаплыгина изучался в [6–8]. Случай Д.К. Бобылева—В.А. Стеклова был рассмотрен в [9–11]. Результаты были представлены в виде диаграммы устойчивости в плоскости параметров задачи. Для динамически симметричного твердого тела был исследован случай, когда центр масс тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции [12]. Частный случай динамически симметричного тела рассматривался в [13], в предположении, что центр масс не лежит в экваториальной плоскости, а главные моменты инерции тела для неподвижной точки находятся в отношении 1 : 2 : 1.

2. Постановка задачи. Рассмотрим движение твердого тела массой m вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Для описания движения тела введем неподвижную систему координат $OXYZ$, ось OZ которой направлена вертикально вверх, и подвижную систему координат $Ox\eta z$, жестко связанную с телом, оси которой направлены по главным осям инерции тела для точки O . Кроме того, будем предполагать, что главные моменты инерции A, B, C тела для неподвижной точки O удовлетворяют равенству $A = C = 4B$. Никаких ограничений на положение центра масс не накладывается. В силу динамической симметрии тела направления осей Ox, Oz можно выбрать так, что центр масс тела будет лежать в плоскости $Ox\eta$. При таком выборе осей положение центра масс тела будет определяться расстоянием до начала координат, которое будем обозначать l , и углом α между радиусом-вектором центра масс и положительным направлением оси Ox . Без ограничения общности, можно считать, что $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Отметим, что при $\alpha = 0$ имеет место случай интегрируемости Д.Н. Горячева—С.А. Чаплыгина, а при $\alpha = \pi/2$ — случай Лагранжа с дополнительным ограничением на моменты инерции.

Положение твердого тела в пространстве будем задавать при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ . Обозначим через $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ канонически сопряженные импульсы, соответствующие углам Эйлера. Угол ψ является циклической координатой, поэтому $p_\psi = \text{const}$. Далее положим $p_\psi = 0$. В этом случае уравнения движения тела можно записать в форме канонических уравнений

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \quad (2.1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{(p_\theta \cos \varphi - p_\varphi \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi)^2}{A} + \frac{(p_\theta \sin \varphi + p_\varphi \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi)^2}{B} + \frac{p_\varphi^2}{C} \right) + mgl \sin \theta \sin(\varphi + \alpha) \quad (2.2)$$

Уравнения движения допускают частное решение, описывающее плоское движение твердого тела, при котором ось Oz сохраняет постоянное горизонтальное положение, а само тело совершает плоские движения относительно этой оси. В зависимости

от начальных условий, в плоском движении тело либо совершает периодические колебания или вращения, либо асимптотически приближается к неустойчивому положению равновесия. Поскольку маятниковые периодические движения неустойчивы по Ляпунову, то представляет интерес задача об орбитальной устойчивости таких движений.

Введем безразмерное время $\tau = \mu t$, где $\mu^2 = mgl/C$. Для описания поведения тела в окрестности его маятниковых периодических движений удобно ввести следующие координаты и безразмерные импульсы

$$q_1 = \varphi + \alpha - \frac{3\pi}{2}, \quad q_2 = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad p_1 = \frac{p_\varphi}{C\mu}, \quad p_2 = \frac{p_\theta}{C\mu} \quad (2.3)$$

В новых переменных гамильтониан задачи принимает вид

$$H = \frac{1}{2}(p_2 \sin(q_1 - \alpha) - p_1 \operatorname{tg} q_2 \cos(q_1 - \alpha))^2 + \frac{1}{2}p_1^2 + \\ + 2(p_2 \cos(q_1 - \alpha) + p_1 \operatorname{tg} q_2 \sin(q_1 - \alpha))^2 - \cos q_2 \cos q_1 \quad (2.4)$$

На маятниковых движениях твердого тела выполняется равенство $q_2 = p_2 = 0$, а эволюция переменных q_1, p_1 описывается канонической системой с гамильтонианом

$$H_0 = \frac{1}{2}p_1^2 - \cos q_1 \quad (2.5)$$

Характер маятниковых движений зависит от величины константы интеграла энергии $H_0 = h$: при $|h| < 1$ тело совершает маятниковые колебания, а при $|h| > 1$ тело совершает маятниковые вращения относительно расположенной горизонтально и неподвижной в абсолютном пространстве оси Oz . В зависимости от параметра h общее решение канонической системы с гамильтонианом (2.5) имеет различный вид [1]. В случае колебаний имеем

$$q_{1*}(\tau + \tau_0) = 2 \arcsin(k \operatorname{sn}(\tau + \tau_0, k)), \quad p_{1*}(\tau + \tau_0) = 2k \operatorname{cn}(\tau + \tau_0, k) \\ k^2 = \frac{h+1}{2} \quad (2.6)$$

Период колебаний вычисляется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \frac{\pi}{2K(k)} \quad (2.7)$$

В случае вращений решение имеет вид

$$q_{1*}(\tau + \tau_0) = 2 \operatorname{am}(\tau + \tau_0, k_2), \quad p_{1*}(\tau + \tau_0) = 2k_2^{-1} \operatorname{dn}(\tau + \tau_0, k_2) \\ k_2^2 = \frac{2}{h+1} \quad (2.8)$$

Период вращений вычисляется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \frac{\pi}{k_2 K(k_2)} \quad (2.9)$$

В (2.6)–(2.9) используются общепринятые обозначения для эллиптических функций и интегралов.

В предельных случаях: $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ маятниковые периодические движения орбитально неустойчивы [6, 8, 13]. Целью данной работы является анализ орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тела в неисследованном ранее случае $0 < \alpha < \pi/2$.

3. Локальные переменные и изоэнергетическая редукция. Следуя методике работы [7], введем в окрестности невозмущенного периодического движения локальные координаты по формулам

$$\begin{aligned} q_1 &= f(\xi) + \frac{\sin f(\xi)}{V^2(\xi)}\eta - \frac{\sin f(\xi)}{2V^4(\xi)}\eta^2 + O(\eta^3) \\ p_1 &= g(\xi) + \frac{g(\xi)}{V^2(\xi)}\eta - \frac{g(\xi)\cos f(\xi)}{2V^4(\xi)}\eta^2 + O(\eta^3), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $V^2(\xi) = g^2(\xi) + \sin^2 f(\xi)$, $f(\xi) = q_{1*}(\xi)$, $g(\xi) = p_{1*}(\xi)$. Заметим, что в зависимости от типа периодического движения функции $q_{1*}(\xi)$, $p_{1*}(\xi)$ определяются соотношениями (2.6) или (2.8).

В новых переменных функция Гамильтона периодически зависит от ξ и является аналитической функцией переменной η . Выполним еще одну каноническую замену переменных по формулам

$$\xi = \frac{1}{\omega}w, \quad \eta = \omega\zeta \quad (3.2)$$

и разложим функцию Гамильтона в окрестности $q_2 = p_2 = \eta = 0$

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6 \dots, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \omega\zeta + \Phi_{20}(q_2, p_2, w) \\ \Gamma_4 &= \omega^2\chi(w)\zeta^2 + \omega\Psi_{20}(q_2, p_2, w)\zeta + (q_2, p_2, w) \\ \Gamma_6 &= \omega^3\chi_6(w)\zeta^3 + \omega^2\Phi_{24}(q_2, p_2, w)\zeta^2 + \omega\Phi_{42}(q_2, p_2, w)\zeta + \Phi_{60}(q_2, p_2, w) \\ \Phi_{20}(q_2, p_2, w) &= \sum_{i+j=2} \Phi_{ij}q_2^i p_2^j, \quad \Phi_{40}(q_2, p_2, w) = \sum_{i+j=4} \Phi_{ij}q_2^i p_2^j \\ \Psi_{20}(q_2, p_2, w) &= \sum_{i+j=2} \Psi_{ij}q_2^i p_2^j, \quad \Phi_{24}(q_2, p_2, w) = \sum_{i+j=2} \Phi_{ij}^{(4)}q_2^i p_2^j \\ \Phi_{42}(q_2, p_2, w) &= \sum_{i+j=4} \Phi_{ij}^{(2)}q_2^i p_2^j, \quad \Phi_{60}(q_2, p_2, w) = \sum_{i+j=6} \Phi_{ij}^{(0)}q_2^i p_2^j \end{aligned} \quad (3.4)$$

Коэффициенты форм в (3.4) являются 2π -периодическими функциями переменной w . Для Γ_2 и Γ_4 эти коэффициенты имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \chi(w) &= -\frac{(\cos q_{1*} - 1)(\cos^2 q_{1*} + p_{1*}^2 - 1)}{2(\cos^2 q_{1*} - p_{1*}^2 - 1)^2} \\ \Psi_{20} &= \frac{[6\cos(2q_{1*} - 2\alpha) - 3\cos(q_{1*} - 2\alpha) + 3\cos(3q_{1*} - 2\alpha) - 10]p_{1*}^2 - \cos 2q_{1*} + 1}{-4p_{1*}^2 + 2\cos 2q_{1*} - 2} \\ \Psi_{11} &= \frac{3p_{1*}\sin(2q_{1*} - 2\alpha) + 3p_{1*}\sin(3q_{1*} - 2\alpha) - 3p_{1*}\sin(q_{1*} - 2\alpha)}{2p_{1*}^2 - \cos 2q_{1*} + 1} \\ \Psi_{02} &= \frac{3\cos(q_{1*} - 2\alpha) - 3\cos(3q_{1*} - 2\alpha)}{-4p_{1*}^2 + 2\cos 2q_{1*} - 2} \\ \Phi_{20} &= \frac{-3g^2\cos(2q_{1*} - 2\alpha) + 2\cos q_{1*} + 5p_{1*}^2}{4} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{11} &= \frac{3p_{1*} \sin(2q_{1*} - 2\alpha)}{2}, & \varphi_{02} &= \frac{3 \cos(2q_{1*} - 2\alpha) + 5}{4} \\ \varphi_{40} &= \frac{-12g^2 \cos(2q_{1*} - 2\alpha) - \cos q_{1*} + 20p_{1*}^2}{24} \\ \varphi_{31} &= \frac{p_{1*} \sin(2q_{1*} - 2\alpha)}{2}, & \varphi_{13} &= \varphi_{22} = \varphi_{04} = 0\end{aligned}$$

Явный вид коэффициентов в выражении Γ_6 не приводится в силу их громоздкости.

Рассмотрим движение на нулевом изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$, отвечающем невозмущенному периодическому движению. Эволюция переменных q_2, p_2 на уровне $\Gamma = 0$ может быть описана с помощью редуцированной канонической системы (уравнения Уиттекера)

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{\partial K}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{\partial K}{\partial q_2}, \quad (3.6)$$

где w играет роль новой независимой переменной, а эволюция переменной ζ определяется соотношением $\zeta = -K(q_2, p_2, w)$, которое является результатом решения уравнения $\Gamma = 0$ относительно ζ . При малых q_2, p_2, ζ гамильтониан K можно представить в виде ряда по степеням q_2, p_2 . Принимая во внимание формулы (3.3) и (3.4), получаем следующее разложение функции Гамильтона K в ряд по q_2, p_2

$$K = K_2 + K_4 + K_6 + \dots, \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned}K_2 &= \omega^{-1} \Phi_{20}(q_2, p_2, w) \\ K_4 &= \omega^{-1} [\chi(w) \Phi_{20}^2(q_2, p_2, w) - \Psi_{20}(q_2, p_2, w) \Phi_{20}(q_2, p_2, w) + \Phi_{40}(q_2, p_2, w)]\end{aligned} \quad (3.8)$$

Задача об орбитальной устойчивости периодических движений твердого тела эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия системы (3.6).

4. Линейный анализ орбитальной устойчивости. Исследуем сначала вопрос об орбитальной устойчивости в линейном приближении. Для этого рассмотрим каноническую систему с гамильтонианом K_2 .

$$\frac{dq_2}{dw} = \varphi_{11}q_2 + 2\varphi_{02}p_2, \quad \frac{dp_2}{dw} = -2\varphi_{20}q_2 - \varphi_{11}p_2 \quad (4.1)$$

Вывод об устойчивости линейной системы (4.1) можно сделать на основании анализа корней ее характеристического уравнения

$$\rho^2 - 2\kappa\rho + 1 = 0, \quad (4.2)$$

где κ — сумма диагональных элементов матрицы монодромии системы (4.1).

Коэффициенты системы (4.1) зависят от параметров h и α , поэтому коэффициент κ является функцией этих параметров. На основе общей теории устойчивости А.М. Ляпунова [14], линейная система (4.1) устойчива, если все корни характеристического уравнения (4.2) простые и имеют модуль, равный единице. Этот случай имеет место при $|\kappa| < 1$. Если $|\kappa| > 1$, то характеристическое уравнение (4.2) имеет корень с модулем больше единицы. В этом случае линейная система (4.1) неустойчива [15], что гарантирует и неустойчивость полной нелинейной системы с гамильтонианом (3.7). Последнее означает орбитальную неустойчивость невозмущенного периодического движения. При $|\kappa| = 1$ характеристическое уравнение (4.2) имеет кратный корень равный 1 или -1 . В этом предельном случае линейная система (4.1) устойчива, если ее

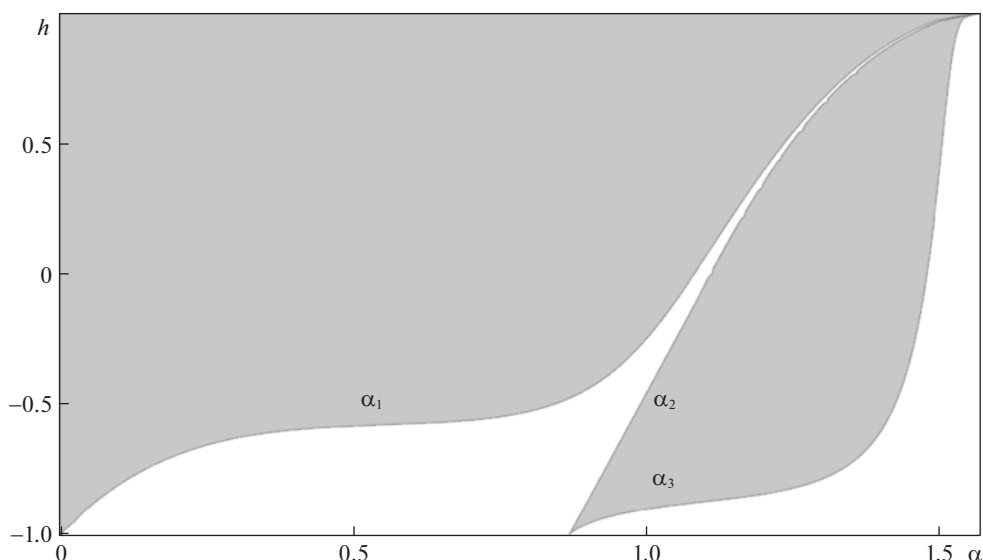


Рис 1. Диаграмма устойчивости маятниковых колебаний в линейном приближении.

матрица монодромии приводится к диагональному виду и неустойчива в противном случае. Если $|\kappa| \leq 1$, то линейного анализа недостаточно для получения строгих выводов об устойчивости в полной нелинейной системе с гамильтонианом (3.7).

Линейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений проводился следующим образом. При помощи численного интегрирования системы (4.1) от 0 до 2π вычислялся коэффициент κ , а затем делались выводы об орбитальной устойчивости.

В случае маятниковых вращений численное нахождение коэффициента κ выполнялось для интервалов $1 < h < 100$ и $0 < \alpha < \pi/2$. Сетка значений параметров строилась с шагом 0.01. Оказалось, что в указанном диапазоне значений выполняется неравенство $|\kappa| > 1$, поэтому линейная система неустойчива. Это означает, что маятниковые вращения твердого тела в указанном диапазоне параметров орбитально неустойчивы.

В случае маятниковых колебаний линейный анализ показал, что в зависимости от значений параметров колебания твердого тела, могут быть как орбитально устойчивы, так и орбитально неустойчивы. Результаты линейного анализа орбитальной устойчивости маятниковых колебаний, полученные на основании численных расчетов коэффициента κ , представлены на диаграмме устойчивости, построенной в плоскости параметров h и α (см. рис. 1). Области неустойчивости отмечены серым цветом. Вне этих областей маятниковые колебания устойчивы в линейном приближении. Границы, разделяющие области устойчивости и неустойчивости, обозначены $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

5. Анализ орбитальной устойчивости маятниковых колебаний с малыми амплитудами. При малых амплитудах колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой исследование их орбитальной устойчивости можно выполнить аналитически. В этом случае можно ввести малый параметр, в качестве которого удобно выбрать величину k — модуль эллиптического интеграла в (2.6), который связан с амплитудой маятниковых колебаний тела соотношением: $k = \sin(\beta/2)$, где β — амплитуда колебаний.

Исследование орбитальной устойчивости при малых амплитудах колебаний начнем с анализа линейной системы. Разложение гамильтониана K_2 линейной системы (4.1) в ряд по степеням k имеет вид

$$K_2 = \frac{1}{2}q_2^2 + \frac{1}{2}p_2^2 \left(1 + 3\cos^2 \alpha\right) + (-3\cos w \sin 2\alpha p_2 q_2 + 3p_2^2 \sin w \sin 2\alpha \cos \alpha)k + K_{22}(\alpha, w)k^2 + O(k^3) \quad (5.1)$$

Явное выражение для $K_{22}(\alpha, w)$ здесь опущено в силу его громоздкости.

При $k = 0$ линейная система (4.1) автономна и описывает гармонические колебания с частотой $\Omega_0 = \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}$. Если $\Omega_0 \neq N/2$, $N \in \mathbb{Z}$, то для достаточно малых k линейная система устойчива. Если же $\Omega_0 \approx N/2$, то возможно так называемое явление параметрического резонанса [16], приводящее при малых k к неустойчивости. В данной задаче параметрический резонанс имеет место в двух случаях: $\Omega_0 \approx 2$ и $\Omega_0 \approx 3/2$. Уравнения границ областей параметрического резонанса могут быть получены аналитически в виде рядов по степеням k . Для построения указанных рядов в данной работе применялась методика, изложенная в [15]. В соответствии с этой методикой строилась линейная каноническая замена переменных $(q_2, p_2) \rightarrow (u, v)$, приводящая линейную систему (4.1) к наиболее простой (нормальной) форме. Задачи об устойчивости исходной и нормализованной системы эквивалентны. Вместе с тем, нормализованная система является автономной и условия ее устойчивости могут быть получены явно в форме неравенств на коэффициенты ее правых частей. На границах, разделяющих области устойчивости и неустойчивости, данные неравенства обращаются в равенства. Из этих равенств можно получить уравнения границ областей параметрического резонанса. Вычисления, проведенные в данной статье на основании указанной методики, показали что области параметрического резонанса в плоскости параметров (α, h) исходят из точек $\alpha = 0$ и $\alpha = \arccos(\sqrt{5/12})$ прямой $h = -1$.

В случае $\Omega_0 \approx 2$ уравнение левой границы области параметрического резонанса имеет вид $\alpha = 0$, а уравнение правой границы, обозначенной на рис. 1 α_1 , задается следующей асимптотической формулой

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}k^2 + O(k^3) \quad (5.2)$$

Отметим, что граница $\alpha = 0$ соответствует случаю Горячева–Чаплыгина [6]. В случае $\Omega_0 \approx 3/2$, левая α_2 и правая α_3 (см. рис. 1) границы области параметрического резонанса определяются следующими асимптотическими разложениями соответственно

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) + \frac{27\sqrt{35}}{160}k^2 + \frac{315}{128}k^3 + O(k^4) \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right) + \frac{27\sqrt{35}}{160}k^2 - \frac{315}{128}k^3 + O(k^4) \end{aligned} \quad (5.3)$$

На границах областей параметрического резонанса нормализованный Гамильтониан имеет вид

$$K = \frac{1}{2}u^2 + K_4(u, v) + O_6; \quad K_4 = \sum_{i+j=4} s_{ij}u^i v^j \quad (5.4)$$

Коэффициенты s_{ij} формы K_4 являются 2π -периодическими функциями независимой переменной w .

Вне областей параметрического резонанса линейная система устойчива. В этом случае при помощи линейной канонической замены переменных

$$q_2 = a_{11}(w)x + a_{12}y, \quad p_2 = a_{21}(w)x + a_{22}(w)y, \quad (5.5)$$

гамильтониан K_2 можно привести к следующей нормальной форме

$$K_2 = \frac{1}{2}\Omega(x^2 + y^2), \quad (5.6)$$

где коэффициенты $a_{11}(w)$, $a_{12}(w)$, $a_{21}(w)$, $a_{22}(w)$ являются 2π -периодическими функциями переменной w и аналитичны по k . Величина Ω является аналитической функцией k и α . Для нахождения коэффициентов $a_{11}(w)$, $a_{12}(w)$, $a_{21}(w)$, $a_{22}(w)$ и Ω применялся метод Депри–Хори [16]. Вычисления показали, что

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \Omega_1 k^2 + O(k^3) \\ \Omega_1 &= \frac{16\Omega_0^6 - 48\Omega_0^4 + (36\sin^2 2\alpha - 69)\Omega_0^2 + 72\sin^2 2\alpha + 20}{4\Omega_0^2(1 - 4\Omega_0^2)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Поскольку из устойчивости линейной системы не следует устойчивости исходной нелинейной системы, то для получения строгих выводов об устойчивости при значениях параметров вне областей параметрического резонанса необходим нелинейный анализ.

Дальнейшее исследование удобно провести в канонических полярных координатах (r, ϑ) , которые вводятся по формулам

$$x = k^3 \sqrt{2r} \sin \vartheta, \quad y = k^3 \sqrt{2r} \cos \vartheta \quad (5.8)$$

В этих переменных гамильтониан K полной нелинейной системы примет вид

$$K = \Omega r + G_4(\vartheta, w)r^2 + G_6(\vartheta, w)r^3 + O(r^4) \quad (5.9)$$

Выражения для $G_4(\vartheta, w)$, $G_6(\vartheta, w)$ опущены в силу их громоздкости. Строгие выводы об устойчивости тривиального решения системы с гамильтонианом (5.9) могут быть сделаны на основе достаточных условий, полученных методами теории КАМ [17–20]. Для применения этих достаточных условий необходимо построить каноническую замену переменных $(r, \vartheta) \rightarrow (R, \phi)$, приводящую систему с гамильтонианом (5.9) к нормальной форме. Нормализацию следует проводить до членов порядка r^2 , а в особых случаях и до членов более высокого порядка.

Если в системе нет резонансов третьего и четвертого порядка, т.е. $\Omega \neq n/3$ и $\Omega \neq n/4$, $n \in \mathbb{Z}$, то гамильтониан нормализованной системы имеет вид

$$\Phi = \Omega R + c_2 R^2 + \tilde{G}_6(\phi, w) R^3 + O(R^4), \quad (5.10)$$

где

$$c_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_4(\vartheta, w) dw d\vartheta \quad (5.11)$$

В данной работе для построения нормализующей замены и нахождения коэффициентов нормальной формы гамильтониана (5.10) применялся метод Депри–Хори. Вычисления показали, что коэффициент c_2 имеет вид

$$c_2 = c_{20} k^6 + O(k^8), \quad (5.12)$$

где

$$c_{20} = -\frac{126 \cos^6 \alpha + 93 \cos^4 \alpha - 34 \cos^2 \alpha - 25}{8(4 \cos^2 \alpha + 1)(3 \cos^2 \alpha + 1)} \quad (5.13)$$

На основании теоремы Арнольда–Мозера [18, 19] положение равновесия системы (3.6) устойчиво при $c_2 \neq 0$. В интервале $0 < \alpha < \pi/2$ уравнение $c_2 = 0$ имеет единственное решение, которое аналитически зависит от k . При достаточно малых k это решение задается следующей асимптотической формулой $\alpha^*(k) = \alpha_0^* + O(k^2)$, где α_0^* является решением уравнения $c_{20} = 0$ и равно $\alpha_0^* \approx 0.7665103122$. Таким образом, вне областей параметрического резонанса, при $\alpha \neq \alpha^*(k)$ и при отсутствии резонансов до четвертого порядка включительно положение равновесия системы (3.6) при малых значениях k устойчиво.

При $\alpha = \alpha^*(k)$ имеет место так называемый случай вырождения, когда требуется анализ с учетом членов до R^3 включительно в гамильтониане (5.10). В этом случае при помощи канонической, близкой к тождественной, аналитической по k замены переменных $(\phi, R) \rightarrow (\tilde{\phi}, \tilde{R})$ система приводится к нормальной форме с гамильтонианом следующего вида

$$\tilde{\Phi} = \Omega \tilde{R} + c_3 \tilde{R}^3 + O(\tilde{R}^4); \quad c_3 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{G}_6(\phi, w) dw d\phi \quad (5.14)$$

Вычисления показали, что

$$c_3 = -\frac{(1 + 3 \cos^2 \alpha_0^*)^{3/2}}{12288} + O(k^2) \quad (5.15)$$

Поскольку для малых k выполнено неравенство $c_3 \neq 0$, то по теореме Арнольда–Мозера [18, 19] положение равновесия будет устойчивым.

Резонансные случаи требуют отдельного анализа. Случаи резонансов первого и второго порядков имеют место на границах областей параметрического резонанса и будут рассмотрены ниже. Поскольку функция Гамильтона (5.9) не содержит членов порядка $r^{3/2}$, то резонансы третьего порядка в рассматриваемом приближении не проявляются. Резонансы четвертого порядка имеют место при $\Omega = n/4$, $n \in \mathbb{Z}$. В рассматриваемой задаче возможны два таких резонанса при $\Omega = 5/4$ и $\Omega = 7/4$. В случае резонанса четвертого порядка гамильтониан нормализованной системы имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \Omega R + (c_2 + a_4 \cos(4\phi - nw) + b_4 \sin(4\phi - nw)) R^2 + O(R^3) \\ a_4 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_4(\vartheta, w) \cos(4\vartheta - nw) dw d\vartheta \\ b_4 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_4(\vartheta, w) \sin(4\vartheta - nw) dw d\vartheta \end{aligned} \quad (5.16)$$

Достаточное условие устойчивости положения равновесия при резонансе четвертого порядка имеет вид [17]

$$\sqrt{a_4^2 + b_4^2} < |c_2| \quad (5.17)$$

Таблица 1. Коэффициенты нормальной формы для случая резонансов четвертого порядка

Резонанс	Коэффициенты нормальной формы		
Ω	a_4	b_4	c_2
5/4	$O(k^3)$	$O(k^3)$	$\frac{55859}{11200} + O(k^3)$
7/4	$O(k^3)$	$O(k^3)$	$-\frac{4987}{3136} + O(k^3)$

Таблица 2. Коэффициенты нормальной формы на границах областей параметрического резонанса

Граница области параметрического резонанса	Коэффициент нормальной формы c_4
α_1	$\frac{1}{4}k^4 + O(k^5)$
α_2	$\frac{445}{6144}k^4 + O(k^5)$
α_3	$-\frac{445}{6144}k^4 + O(k^5)$

В табл. 1 для каждого из реализующихся в данной задаче резонансов четвертого порядка приведены коэффициенты нормализованного гамильтониана (5.16), вычисленные методом Депри–Хори.

Из табл. 1 видно, что условие (5.17) выполняется, т.е. при резонансах четвертого порядка маятниковые колебания с достаточно малыми амплитудами орбитально устойчивы.

Для решения вопроса об орбитальной устойчивости на границах $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ областей параметрического резонанса применим ту же методику исследования. На этих границах имеют место резонансы первого порядка или второго порядка, т.е. характеристическое уравнение (4.2) имеет кратный корень равный 1 (резонанс первого порядка) или -1 (резонанс второго порядка). В этом случае при помощи канонической, близкой к тождественной, аналитической по k замены переменных $(u, v) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$ гамильтониан (5.4) приводится к виду

$$K = \frac{1}{2}\tilde{u}^2 + c_4\tilde{v}^4 + O_6; \quad c_4 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s_{04} dw \quad (5.18)$$

На основании теоремы Иванова–Сокольского [20] положение равновесия системы с гамильтонианом (5.18) устойчиво при выполнении неравенства

$$c_4 > 0, \quad (5.19)$$

и неустойчиво, если это неравенство выполняется с противоположным знаком. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что на границах α_1, α_2 маятниковые колебания с малыми амплитудами орбитально устойчивы, а на границе α_3 — орбитально неустойчивы.

6. Нелинейный анализ орбитальной устойчивости маятниковых колебаний при произвольных значениях параметров. Для получения строгих выводов об орбитальной устойчивости для всех (а не только малых) значений параметров из областей устойчивости в

линейном приближении, а также на границах этих областей необходимо выполнить нелинейный анализ.

Нелинейный анализ орбитальной устойчивости будем проводить на основании методики, разработанной в [21], суть которой состоит в построении симплектического отображения, порожденного системой нелинейных уравнений (3.6), и исследовании устойчивости его неподвижной точки. Задача об устойчивости неподвижной точки этого отображения эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия системы (3.6).

Выполним линейную каноническую замену переменных по формулам:

$$q_2 = n_{11}Q + n_{12}P, \quad p_2 = n_{21}Q + n_{22}P, \quad (6.1)$$

где в случае отсутствия резонансов первого и второго порядка

$$n_{11} = x_{12}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = \kappa - x_{11}, \quad n_{22} = \sqrt{1 - \kappa^2} \quad (6.2)$$

В (6.2) x_{ij} — элементы матрицы монодромии системы (4.1). В новых переменных гамильтониан задачи примет вид

$$K^*(Q, P, w) = K_2^*(Q, P, w) + K_4^*(Q, P, w) + K_6^*(Q, P, w) + \dots \quad (6.3)$$

Чтобы получить явный вид гамильтониана (6.3), необходимо подставить (6.1) в гамильтониан (3.7) и результат подстановки умножить на валентность $(n_{11}n_{22})^{-1}$ замены (6.1). Заметим, что благодаря замене переменных Q, P линейная часть симплектического отображения, порожденная канонической системой с гамильтонианом $K^*(Q, P, w)$, принимает наиболее простой вид. Она определяется следующей матрицей G , задающей поворот на угол $\gamma = \frac{1}{2\pi} \arccos \kappa$

$$G = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\gamma & \sin 2\pi\gamma \\ -\sin 2\pi\gamma & \cos 2\pi\gamma \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Пусть Q_0, P_0 — начальные значения переменных Q, P и Q_1, P_1 — их значения при $w = 2\pi$. Тогда симплектическое отображение, порожденное канонической системой с гамильтонианом $K^*(Q, P, w)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} Q_0 - \frac{\partial F_4}{\partial P_0} + \frac{\partial^2 F_4}{\partial P_0 \partial Q_0} \frac{\partial F_4}{\partial P_0} - \frac{\partial F_6}{\partial P_0} + O_6 \\ P_0 + \frac{\partial F_4}{\partial P_0} - \frac{\partial^2 F_4}{\partial Q_0^2} \frac{\partial F_4}{\partial P_0} + \frac{\partial F_6}{\partial P_0} + O_6 \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

где O_6 — члены шестой степени и выше, $F_m = \Phi_m(Q_0, P_0, 2\pi)$, а $\Phi_m(Q_0, P_0, w)$ — формы степени m ($m = 4, 6$), удовлетворяющие равенствам

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial w} = -G_4, \quad \frac{\partial \Phi_6}{\partial w} = -G_6 - \frac{\partial G_4}{\partial P_0} \frac{\partial \Phi_4}{\partial Q_0} \quad (6.6)$$

$G_m(Q_0, P_0, w)$ — формы, получающиеся из $K_m^*(Q_0, P_0, w)$ заменой переменных

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = X^*(w) \begin{pmatrix} Q_0 \\ P_0 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

где $X^*(w)$ — матрицант линейной системы с гамильтонианом $K_2^*(Q, P)$.

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях уравнения (6.6), получаем пять обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффи-

циентов форм Φ_m . Правые части этих уравнений зависят от величин $x_{ij}(w)$, которые являются элементами матрицы $X^*(w)$. Таким образом, интегрируя систему из шестнадцати уравнений (двенадцать уравнений на коэффициенты форм Φ_m и четыре уравнения для $x_{ij}(w)$) на интервале $[0; 2\pi]$, получаем коэффициенты форм F_m . В общем случае вышеуказанная система может быть решена только численно.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \delta_4 &= 3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}, \quad \nu_4 = f_{22} - f_{40} - f_{04}, \quad \mu_4 = f_{13} - f_{31} \\ \delta_6 &= -\frac{5}{2}f_{06} - \frac{1}{2}f_{24} - \frac{5}{2}f_{60} - \frac{1}{2}f_{42} + f_{31}(4f_{04} + 2f_{22} + 5f_{40}) + \\ &+ f_{13}(4f_{04} + 2f_{22} + 5f_{40}) - \frac{1}{2}[(f_{04} - f_{22} + f_{40})^2 + (f_{13} - f_{31})^2] \operatorname{ctg} 2\pi\gamma - \\ &- [(f_{13} + f_{31})^2 + 4(f_{04} - f_{40})^2] \operatorname{ctg} \pi\gamma, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где f_{ij} — коэффициенты форм F_m .

Теперь кратко сформулируем условия устойчивости и неустойчивости неподвижной точки отображения (6.5). В нерезонансном случае (т.е. когда корни характеристического уравнения удовлетворяют соотношению $\rho^k \neq 1$ ($k = 1, 2, 3, 4$), где k — порядок резонанса) условие устойчивости неподвижной точки отображения (6.5) определяется неравенством $\delta_4 \neq 0$ [21]. В противном случае, если $\delta_4 = 0$, то имеет место так называемый случай вырождения, когда для решения вопроса об устойчивости необходимо вычислить δ_6 . Если $\delta_6 \neq 0$ и в системе нет резонансов до шестого порядка включительно, то неподвижная точка отображения (6.5) устойчива [22]. В противном случае, если $\delta_6 = 0$, то для получения выводов об устойчивости необходим анализ с учетом членов не ниже восьмого порядка в разложении гамильтониана (3.7).

Резонансные случаи требуют отдельного рассмотрения. В невырожденном случае $\delta_4 \neq 0$ достаточно рассмотреть лишь резонансы до четвертого порядка включительно. В рассматриваемой задаче разложение (3.7) гамильтониана системы (3.6) в ряд по степеням канонических переменных не содержит членов третьей степени. Поэтому влияние резонансов третьего порядка на выводы об устойчивости может иметь место лишь в особом случае $\delta_4 = 0$, когда требуется нелинейный анализ с учетом членов до шестой степени включительно в разложении (3.7). В случае же резонанса четвертого порядка неподвижная точка отображения (6.5) устойчива, если выполняется неравенство $|\delta_4| > \sqrt{\nu_4^2 + \mu_4^2}$ и неустойчива при выполнении неравенства $|\delta_4| < \sqrt{\nu_4^2 + \mu_4^2}$ [21].

В особом случае $|\delta_4| = \sqrt{\nu_4^2 + \mu_4^2}$ имеет место вырождение и вопрос об устойчивости решается на основании нелинейного анализа с учетом членов не ниже шестой степени.

Для значений параметров внутри областей устойчивости в линейном приближении на основе описанной выше методики численно вычислялись коэффициенты симплектического отображения (6.5) и проверялись условия устойчивости и неустойчивости его неподвижной точки. В результате была построена диаграмма устойчивости, представленная на рис. 2.

Кривые, отвечающие резонансу четвертого порядка, обозначены γ_1, γ_2 , и выделены пунктирной линией. Кривые, отвечающие случаю вырождения $\delta_4 = 0$, обозначены $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и показаны точками. Вне резонансных кривых четвертого порядка γ_1, γ_2 и вне кривых вырождения $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ маятниковые колебания орбитально устойчивы в строгом нелинейном смысле. Оказалось, что на всех трех кривых вырождения $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ выполняется неравенство $\delta_6 \neq 0$, поэтому в случаях вырождения маятниковые колеба-

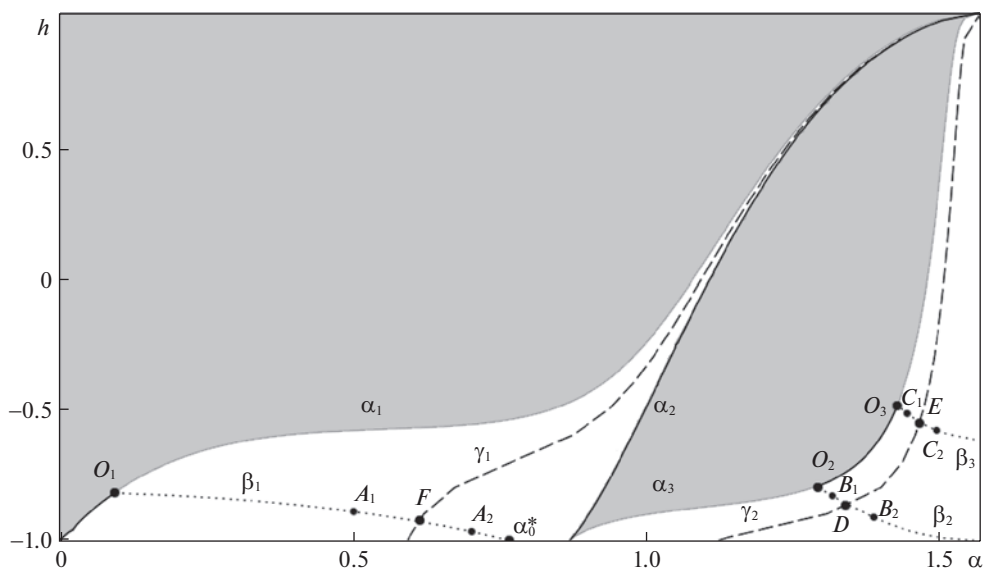


Рис. 2. Диаграмма устойчивости маятниковых колебаний.

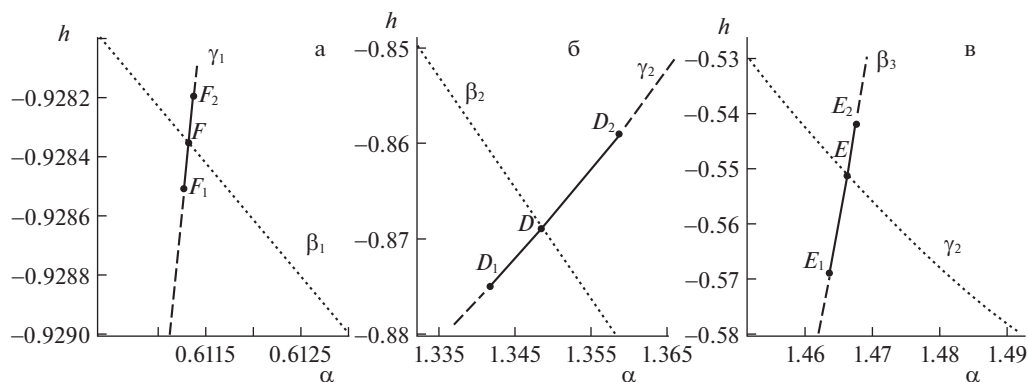
ния также орбитально устойчивы, за исключением лишь точек F, E, D , отвечающих случаям резонанса четвертого порядка и, возможно, точек A_i, B_i, C_i , ($i = 1, 2$), в которых реализуются резонансы третьего ($i = 1$) и шестого ($i = 2$) порядков. Также почти всюду на кривых γ_1, γ_2 имеет место орбитальная устойчивость маятниковых колебаний. Исключение составляют лишь небольшие сегменты кривых γ_1, γ_2 , расположенные вблизи точек пересечения этих кривых с кривыми вырождения (рис. 3). На этих сегментах, включая и точки F, E, D , маятниковые колебания орбитально неустойчивы. Координаты этих точек приведены в табл. 3. В точках $E_1, E_2, D_1, D_2, F_1, F_2$, ограничивающих указанные выше сегменты неустойчивости, а также в точках $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ исследование орбитальной устойчивости не проводилось. Координаты этих точек приведены в табл. 4 и 5, соответственно.

Отметим, что при малых значениях амплитуд колебаний результаты, представленные на диаграмме устойчивости (рис. 2) полностью согласуются с результатами, полученными аналитически в разд. 5.

Случаи резонансов первого и второго порядков, которые реализуются на границах областей устойчивости в линейном приближении, требуют отдельного нелинейного анализа, который проводится по такой же методике. На границе α_1 реализуется резонанс первого порядка ($\kappa = 1$), а на границах α_2, α_3 — резонансы второго порядка ($\kappa = -1$).

Таблица 3. Координаты точек пересечения кривых резонансов четвертого порядка с кривыми вырождения

	Точка F	Точка D	Точка E
α	0.6113268555	1.348	1.466
h	-0.92835814	-0.869	-0.551

Рис. 3. Сегменты неустойчивости резонансных кривых γ_1 и γ_2 .

В случае резонанса первого порядка, то есть на границе α_1 , коэффициенты линейной канонической замены переменных (6.1) определяются по формулам [21]

$$n_{11} = x_{12}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = 1 - x_{11}, \quad n_{22} = 1, \quad (6.9)$$

а условие устойчивости неподвижной точки имеет вид $f_{40} < 0$. В противном случае, т.е. при $f_{40} > 0$, неподвижная точка неустойчива.

В случае резонанса второго порядка, то есть на границах α_2, α_3 , коэффициенты линейной канонической замены переменных (6.1) определяются по формулам [21]

$$n_{11} = x_{12}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = -1 - x_{11}, \quad n_{22} = 1, \quad (6.10)$$

а условие устойчивости неподвижной точки имеет вид $f_{40} > 0$. При обратном знаке последнего неравенства неподвижная точка неустойчива.

Вычисления, проведенные по описанной выше методике, показали, что на участке границы α_1 , расположенном ниже точки O_1 , маятниковые колебания орбитально устойчивы, а на участке границы α_1 , расположенном выше точки O_1 , маятниковые колебания орбитально неустойчивы (рис. 2). На всей границе α_2 маятниковые колебания орбитально устойчивы. На границе α_3 маятниковые колебания орбитально устойчивы на участке между точками O_2, O_3 . Вне этого участка маятниковые колебания ор-

Таблица 4. Координаты граничных точек сегментов неустойчивости на кривых резонансов четвертого порядка

	Точка F_1	Точка F_2	Точка D_1	Точка D_2	Точка E_1	Точка E_2
α	0.6112794995	0.6113762141	1.342	1.352	1.464	1.467
h	-0.92851	-0.9282	-0.875	-0.859	-0.569	-0.542

Таблица 5. Координаты точек пересечения кривых резонансов третьего и шестого порядков с кривыми вырождения

	Точка A_1	Точка A_2	Точка B_1	Точка B_2	Точка C_1	Точка C_2
α	0.702332	0.501423	1.317423	1.388369	1.445120	1.495322
h	-0.967229	-0.891362	-0.831726	-0.913163	-0.519193	-0.583186

Таблица 6. Координаты точек пересечения кривых вырождения с границами областей устойчивости и неустойчивости

	Точка O_1	Точка O_2	Точка O_3
α	0.094040833	1.292699791	1.427688081
h	-0.82	-0.80	-0.49

битально неустойчивы. Координаты точек O_1, O_2, O_3 представлены в табл. 6. Заметим, что при малых значениях амплитуд колебаний данные результаты, полностью согласуются с выводами об устойчивости, полученными аналитически в разд. 5.

Отметим, что в точках O_1, O_2, O_3 граничных кривых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где происходит смена устойчивости на неустойчивость, имеет место пересечение этих кривых с кривыми вырождения $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Координаты точек O_1, O_2, O_3 представлены в табл. 6. В этих точках исследование орбитальной устойчивости маятниковых колебаний не проводилось.

Выводы. Кратко сформулируем основные результаты исследования орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, главные моменты инерции которого находятся в отношении 1 : 4 : 1.

1. Маятниковые вращения твердого тела орбитально неустойчивы. Это следует уже из анализа линейной системы.

2. В зависимости от значений параметров задачи маятниковые колебания тела могут быть как орбитально устойчивы, так и орбитально неустойчивы. Области орбитальной устойчивости и неустойчивости представлены на рис. 2. Почти для всех значений параметров внутри области орбитальной устойчивости в линейном приближении имеет место орбитальная устойчивость в строгом нелинейном смысле. Исключение составляют малые сегменты резонансных кривых четвертого порядка, где имеет место орбитальная неустойчивость (см. рис. 3). На границе α_1 ниже точки O_1 и на всей границе α_2 маятниковые колебания орбитально устойчивы, а на границе α_3 орбитальная устойчивость маятниковых колебаний имеет место лишь на сегменте O_2O_3 .

Выполненное исследование позволило сделать строгие выводы об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний почти для всех значений параметров задачи. Неисследованными остались лишь 15 резонансных точек $A_i, B_i, C_i, F_i, D_i, E_i, O_j$ ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3$) в плоскости параметров. Для решения вопроса об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний в этих точках необходимо дополнительное исследование с учетом членов не ниже шестой степени в разложении (6.3) функции Гамильтона.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркеев А.П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ. 2001. Т. 65. С. 51–58.
2. Маркеев А.П., Медведев С.В., Чеховская Т.Н. К задаче об устойчивости маятниковых движений твердого тела в случае Ковалевской // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 1. С. 3–9.
3. Иртегов В.Д. Устойчивость маятниковых колебаний гироскопа Ковалевской // Тр. Казан. Авиаци. ин-та мат. и мех. 1968. Т. 97. С. 38–40.
4. Брюм А.З. Исследование орбитальной устойчивости при помощи первых интегралов // ПММ. 1989. Т. 53. № 6. С. 873–879.

5. Брюм А.З., Савченко А.Я. Об орбитальной устойчивости одного периодического решения уравнений движения гироскопа Ковалевской // ПММ. 1986. Т. 50. № 6. С. 967–973.
6. Бардин Б.С. К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 14–21.
7. Bardin B.S. On a method of introducing local coordinates in the problem of the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2020. V. 16. № 4. P. 581–594.
8. Маркеев А.П. О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // ПММ. 2004. Т. 68. № 2. С. 282–293.
9. Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A. On the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body in the Bobylev–Steklov case // *R&C Dyn.* 2012. V. 17. № 6. P. 533–546.
10. Bardin B.S. Local coordinates in problem of the orbital stability of pendulum-like oscillations of a heavy rigid body in the Bobylev–Steklov case // *J. Phys.: Conf. Ser. Bristol.* 2021. Art. no. 012016. P. 1–10.
11. Yehia H.M., Hassan S.Z., Shaheen M.E. On the orbital stability of the motion of a rigid body in the case of Bobylev–Steklov // *Nonlin. Dyn.* 2015. V. 80. № 3. P. 1173–1185.
12. Bardin B.S., Savin A.A. On the orbital stability of pendulum-like oscillations and rotations of a symmetric rigid body with a fixed point // *R&C Dyn.* 2012. V. 17. № 3–4. P. 243–257.
13. Бардин Б.С., Савин А.А. Об устойчивости плоских периодических движений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // ПММ. 2013. Т. 77. № 6. С. 806–821.
14. Ляпунов А.М. Общая задача устойчивости. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 472 с.
15. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.; Ижевск: Регул. и хаотич. дин., 2009. 395 с.
16. Giacaglia G.E.O. *Perturbation Methods in Non-Linear System.* New York: Springer, 1972. 369 p.
17. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
18. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 479 с.
19. Siegel C., Moser J. *Lectures on Celestial Mechanics.* New York: Springer, 1971. xii+290 p.
20. Иванов А.П., Сокольский А.Г. Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // ПММ. 1980. Т. 44. № 6. С. 963–970.
21. Маркеев А.П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 6. С. 3–12.
22. Bardin B.S., Chekina E.A., Chekin A.M. On the stability of planar resonant rotation of a satellite in an elliptic orbit // *R&C Dyn.* 2015. V. 20. № 1. P. 63–73.

On the Orbital Stability of Pendulum Periodic Motions of a Heavy Rigid Body with a Fixed Point, the Main Moments of Inertia of which are in the Ratio 1 : 4 : 1

B. S. Bardin^{a, #} and B. A. Maksimov^{a, ##}

^aMoscow Aviation Institute, Moscow, Russia

[#]e-mail: bsbardin@yandex.ru

^{##}e-mail: badmamaksimov1@gmail.com

The motion of a heavy rigid body with a fixed point in a uniform gravitational field is considered. It is assumed that the main moments of inertia of the body for the fixed point satisfy the condition of D.N. Goryachev–S.A. Chaplygin, i.e., they are in the ratio 1 : 4 : 1. In contrast to the integrable case of D.N. Goryachev–S.A. Chaplygin, no additional restrictions are imposed on the position of the center of mass of the body.

The problem of orbital stability of pendulum periodic motions of the body is investigated. In the neighborhood of periodic motions, local variables are introduced and equations of perturbed motion are obtained. On the basis of a linear analysis of stability, the orbital instability of pendulum rotations for all values of the parameters has been concluded. It has been established that, depending on the values of the parameters, pendulum oscillations can be both orbitally unstable and orbitally stable in a linear approximation. For pendulum oscillations that are stable in the linear approximation, based on the methods of KAM theory,

a nonlinear analysis is performed and rigorous conclusions about the orbital stability are obtained.

Keywords: pendulum periodic motions, orbital stability, D.N. Goryachev–S.A. Chaplygin case, local variables, Hamiltonian systems

REFERENCES

1. *Markeev A.P.* The stability of the plane motions of a rigid body in the Kovalevskaya case // JAMM, 2001, vol. 65, no. 1, pp. 51–58.
2. *Markeev A.P., Medvedev S.V., Chekhovskaya T.N.* To the problem of stability of pendulum-like vibrations of a rigid body in Kovalevskaya's case // Mech. Solids, vol. 38, no. 1, pp. 1–6.
3. *Irtegov V.D.* The Stability of the pendulum-like oscillations of a Kovalevskaya gyroscope // Tr. Kazan. Aviat. Inst. Matem. i Mekh., 1968, vol. 97, pp. 38–40 (in Russian)
4. *Bryum A.Z.* A study of orbital stability by means of first integrals // JAMM, 1989, vol. 53, no. 6, pp. 689–695.
5. *Bryum A.Z., Savchenko A.Ya.* On the orbital stability of a periodic solution of the equations of motion of a Kovalevskaya gyroscope // JAMM, 1986, vol. 50, no. 6, pp. 748–753.
6. *Bardin B.S.* Stability problem for pendulum-type motions of a rigid body in the Goryachev–Chaplygin case // Mech. Solids, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 177–183.
7. *Bardin B.S.* On a method of introducing local coordinates in the problem of the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2020, vol. 16, no. 4, pp. 581–594.
8. *Markeev A.P.* The pendulum-like motions of a rigid body in the Goryachev–Chaplygin case // JAMM, 2004, vol. 68, no. 2, pp. 249–258.
9. *Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A.* On the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body in the Bobylev–Steklov case // R&C Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 533–546.
10. *Bardin B.S.* Local coordinates in problem of the orbital stability of pendulum-like oscillations of a heavy rigid body in the Bobylev–Steklov case // J. Phys.: Conf. Ser., Bristol, 2021, art. no. 012016, pp. 1–10.
11. *Yehia H.M., Hassan S.Z., Shaheen M.E.* On the orbital stability of the motion of a rigid body in the case of Bobylev–Steklov // Nonlin. Dyn., 2015, vol. 80, no. 3, pp. 1173–1185.
12. *Bardin B.S., Savin A.A.* On the orbital stability of pendulum-like oscillations and rotations of a symmetric rigid body with a fixed point // R&C Dyn., 2012, vol. 17, no. 3–4, pp. 243–257.
13. *Bardin B.S., Savin A.A.* The stability of the plane periodic motions of a symmetrical rigid body with a fixed point // JAMM, 2013, vol. 77, no. 6, pp. 806–821.
14. *Liapunov A.M.* The General Problem of the Stability of Motion. Moscow; Leningrad: GITTL, 1950. 471 p. (in Russian)
15. *Markeev A.P.* Linear Hamiltonian Systems and Some Problems of Stability of the Satellite Center of Mass. Izhevsk: R&C Dyn.; Inst. Comput. Res., 2009. 395 p. (in Russian)
16. *Giacaglia G.E.O.* Perturbation Methods in Non-Linear Systems. N.Y.: Springer, 1972. 369 p.
17. *Markeev A.P.* Libration Points in Celestial Mechanics and Space Dynamics. Moscow: Nauka, 1978. 312 p. (in Russian)
18. *Arnold V.I.* Mathematical Methods of Classical Mechanics. N.Y.: Springer, 1989. 518 p.
19. *Siegel C., Moser J.* Lectures on Celestial Mechanics. N.Y.: Springer, 1971. xii+290 p.
20. *Ivanov A.P., Sokol'skii A.G.* On the stability of a nonautonomous Hamiltonian system under a parametric resonance of essential type // JAMM, 1980, vol. 44, no. 6, pp. 687–691.
21. *Markeev A.P.* Stability of equilibrium states of Hamiltonian systems: a method of investigation // Mech. Solids, 2004, vol. 39, no. 6, pp. 1–8.
22. *Bardin B.S., Chekina E.A., Chekin A.M.* On the stability of planar resonant rotation of a satellite in an elliptic orbit // R&C Dyn., 2015, vol. 20, no. 1, pp. 63–73.

УДК 534.[131:143]

*Светлой памяти Л.Д. Акуленко***ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ, УПРАВЛЯЕМОГО
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СИЛАМИ**© 2023 г. А. А. Гавриков^{1,*}, Г. В. Костин^{1,**}¹*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия***e-mail: gavrikov@ipmnet.ru****e-mail: kostin@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.

После доработки 14.08.2023 г.

Принята к публикации 15.08.2023 г.

Исследуются изгибные колебания тонкого упругого стержня прямоугольного сечения, к двум противолежащим боковым сторонам которого симметрично без промежутков прикреплен ряд пьезоэлектрических актюаторов (элементов). Каждый элемент склеен с соседними, образуя со стержнем единое упругое тело в форме прямоугольного параллелепипеда. Тело шарнирно закреплено на обоих торцах относительно оси поперечного сечения, параллельной пьезоэлектрическим слоям. В противолежащих пьезоэлементах антисимметрично задаются однородные поля нормальных напряжений как функции времени. Эти напряжения параллельны оси стержня и вынуждают упругую систему совершать изгибные движения. В рамках линейной теории упругости для рассмотренной системы даны обобщенные формулировки начально-краевой задачи и соответствующей задачи на собственные значения, определенные через неизвестные перемещения и интегралы механических напряжений по времени. Предложена полиномиальная по поперечным координатам аппроксимация полей перемещений и напряжений, которая точно выполняет однородные граничные условия в напряжениях на боковых сторонах и учитывает свойства симметрии изгибных движений. Для выбранной аппроксимации точно решена граничная задача на собственные значения. Обнаружены две ветви колебаний, а найденные частоты и формы используются для сведения начально-краевой задачи к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно комплексных переменных. Показана декомпозиция динамической системы на независимые бесконечномерные подсистемы со скалярным управляющим воздействием. Одна из колебательных подсистем не управляема, а для остальных, число которых равно числу пар пьезоэлементов, предложен закон гашения колебаний фиксированного числа низших мод нижней ветви.

Ключевые слова: упругая балка, пьезоэлектрические силы, пьезоактюаторы, управляемые колебания

DOI: 10.31857/S0032823523050077, **EDN:** QHDFBD

1. Введение. Среди моделей, предложенных для приближенного решения начально-краевых задач механики упругих протяженных тел (стержней, валов и т.п.), особое место занимает теория балок, основанная на выдвинутых Я. Бернулли гипотезах [1] о том, что во время движения поперечное сечение не деформируется и остается ортого-

нальным центральной линии тела. Хотя эта теория применима для широкого класса задач, она не учитывает влияние на состояние деформируемого тела сдвиговых перемещений, депланации и деформации поперечного сечения, связи продольных и поперечных движений, обусловленных эффектом Пуассона, и т.п. Для компенсации этих дефектов модели применяются уточняющие формулы, позволяющие учесть сжатие или растяжение поперечных сечений при продольных перемещениях (поправка Релея [2]), а также сдвиги и инерционность поворотов сечения при упругом изгибе (модель балки Тимошенко [3]). В модели Райсснера [4] применен вариационный подход для вывода уравнений, описывающих упругий изгиб тонкой пластины (балки), для определенного заранее распределения полей перемещений в поперечном направлении. Вариационные формулировки используются для вывода совместных балочных уравнений и более высокого порядка, в которых различным образом можно учесть пространственное распределение как перемещений, так и напряжений в упругом теле [5].

Цель этой работы — развитие метода интегродифференциальных соотношений (МИДС) [6], который основан на интегральном представлении законов состояния механической системы, в применении к задачам управления упругими слоистыми системами. Основным преимуществом МИДС является то, что поля перемещений и напряжений, которые являются независимыми переменными, строго удовлетворяют уравнению динамического равновесия и граничным условиям. В явном виде могут быть получены двусторонние энергетические оценки качества любого допустимого движения. Ранее на основе МИДС разработаны регулярные проекционные и вариационные подходы к построению математических моделей, описывающих движения упругих стержней различного сечения [7, 8]. Для расчета спектральных характеристик неоднородных валов на основе МИДС [9] применялся метод ускоренной сходимости [10].

Управление колебаниями протяженных упругих (стержневых) систем можно осуществлять как посредством приложения сил или моментов на концевых торцах, так и путем нагрузки по длине. Последняя может создаваться, например, пьезоэлектрическими актюаторами (элементами). Зачастую предполагается для простоты, что актюаторы размещены по длине стержня периодически, хотя возможно рассмотреть и более общие геометрии [11], а также задачи оптимизации расположения актюаторов [12, 13]. В работах [14, 15] затронут вопрос управляемости отдельных мод продольных колебаний упругих стержней и разбиения мод на группы, каждая из которых управляется определенной комбинацией входов. Распространенный подход при моделировании стержневых систем, управляемых пьезоэлементами, состоит в добавлении к уравнениям изгиба правых частей, содержащих дельта-функции [16], отражающие наличие скачков напряжений в стержне. Однако такой подход может приводить к трудностям в моделировании вследствие необходимости учитывать эти обобщенные функции в расчетах, а также может понизить класс решения.

В представленной работе применяется новый подход, состоящий в постановке вариационной задачи для описания напряженно-деформированного состояния как в балке, так и в актюаторах. Поскольку сами пьезоэлементы представляют собой упругие тела, представляется оправданным моделирование системы “балка-пьезоэлемент” как слоистое тело [17, 18], в котором упругие напряжения в пьезоэлектрических слоях заданы как функции времени (например, вследствие некоторого подаваемого электрического напряжения), а поля напряжений и перемещений внутри балки генерируются вследствие подходящих краевых и межэлементных условий. На основе МИДС для расчета трехмерной динамики системы “балка-пьезоэлементы”, который состоит из центрального упругого слоя и двух граничных пьезоэлектрических слоев, разбитых на последовательность пар работающих антисимметрично актюаторов, выбрана полиномиальная по поперечным координатам аппроксимация перемещений и напряжений.

Исходя из предложенной обобщенной формулировки в рамках семидискретного приближения, удалось найти аналитические выражения для собственных частот и

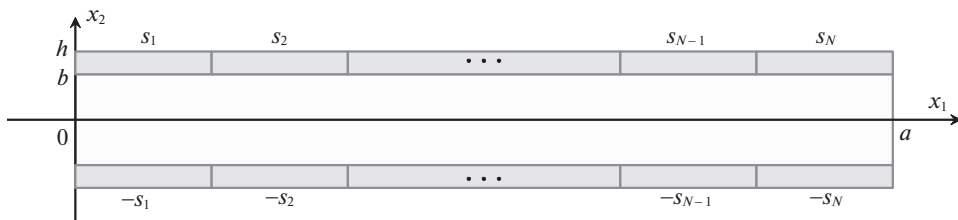


Рис. 1. Схема стержня с управляющими элементами.

форм колебаний. С использованием полученных форм начально-краевая задача управляемого изгиба сводится к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В этой системе каждую моду колебаний представляет пара комплексно сопряженных соотношений. В дополнение к этому все моды группируются в независимые подсистемы, одна из которых неуправляема, а на каждую оставшуюся воздействует своя линейно независимая комбинация управляющих пьезоэлектрических напряжений.

2. Описание динамической системы. Рассматриваются изгибные движения тонкого прямолинейного упругого стержня с прямоугольным сечением. Декартова система координат $Ox_1x_2x_3$ выбирается так, что начало координат находится в центре одного из торцевых сечений, ось x_1 направлена в центр противоположного торца, оси x_2 и x_3 параллельны сторонам поперечного сечения. Обозначим пространственную область, занимаемую стержнем в недеформированном состоянии, как

$$\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < a, |x_2| < b, |x_3| < c\}, \quad (2.1)$$

где $a, 2b \ll a, 2c \ll a$ — линейные размеры тела.

К боковым поверхностям $x_2 = \pm b$ попарно без зазоров присоединены пьезоэлектрические актуаторы (элементы). Схематически разрез стержня с прикрепленными элементами в плоскости Ox_1x_2 изображен на рис. 1. В недеформированном состоянии $2N$ элементов занимают соответствующие пространственные области:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_n^\pm &= \{\mathbf{x} : \chi_{n-1} < x_1 < \chi_n, b < |x_2| < h, |x_3| < c\} \\ \chi_n &= \frac{an}{N}; \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где χ_n — продольные координаты границ пьезоэлементов. В каждой паре пьезоэлектрических элементов с помощью антисимметричного электрического потенциала создаются однородные механические напряжения $\pm s_n(t)$, управляющие на временном промежутке $t \in \mathcal{T} = (0, T)$ изгибом стержня (см. рис. 2). Введем соответствующее тензорное поле пьезоэлектрических напряжений

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \pm s_n(t) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1; & \mathbf{x} \in \mathcal{X}_n^\pm, \quad n = 1, \dots, N \\ 0; & \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь и далее $\mathbf{e}_j$ — орт вдоль оси x_j , $j = 1, 2, 3$.

Обозначим полный объем, занимаемый этой электромеханической системой в пространстве, и соответствующую пространственно-временную область как

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} : 0 < x_1 < a, |x_2| < h, |x_3| < c\}; \quad \mathcal{D} = \mathcal{X} \times \mathcal{T} \quad (2.4)$$

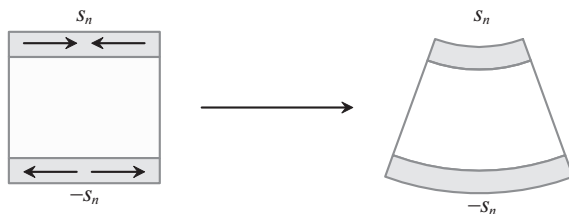


Рис. 2. Изгибные деформации стержня.

Положим для простоты, что в отсутствие электрического потенциала как материал стержня, так и материал пьезоактюаторов однороден и изотропен. Используются следующие сравнимые для обоих материалов константы: объемная плотность ρ_j , модуль Юнга E_j , коэффициент Пуассона ν_j , $j = 0, 1$. Материальные константы стержня и управляющих элементов помечены соответственно нижними индексами 0 и 1. Симметрический тензор модулей податливости четвертого ранга $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ и функция плотности $\rho(\mathbf{x})$ полностью задаются на $\mathcal{X}$ этими шестью параметрами.

В предлагаемой слабой формулировке начально-краевой задачи линейной теории упругости искомыми функциями являются вектор перемещений $\mathbf{v} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}^3$ и симметрический тензор второго ранга $\boldsymbol{\eta} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}^{3 \times 3}$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^T$, который представляет интеграл по t от тензора механических напряжений. В выбранной постановке удобно использовать комплексные переменные для нахождения собственных значений и векторов задачи, но физический смысл имеют лишь действительные части вектора $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и тензора $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$. Для сокращения записи неизвестные вектор и тензор объединяются в одну функцию $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})$, которая предполагается квадратично интегрируемой со всеми своими первыми производными: $\mathbf{V} \in H^1(\mathcal{D}; \mathbb{C}^9)$.

Обобщенная частная производная по времени тензора $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ определяет напряжения $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, возникающие в материале, а дивергенция — объемную плотность импульса $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ в форме

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_t \boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{p} = \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} \quad (2.5)$$

Для таким образом введенных переменных как перемещения $\mathbf{v}$, так и напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ — соболевские функции по пространственным переменным.

С учетом введенных далее граничных условий после подстановки (2.5) автоматически (в обобщенной форме) выполняется второй закон Ньютона:

$$\int_{\mathcal{D}} (\mathbf{p} \cdot \partial_t \mathbf{w} - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})) d\mathcal{D} = 0; \quad \forall \mathbf{w} \in H^1(\mathcal{D}; \mathbb{C}^3) \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) = \mathbf{D}\mathbf{w}; \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \nabla + \frac{1}{2} \nabla^T$$

В уравнении динамики (2.6) введена тестовая вектор-функция $\mathbf{w} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}^3$, которая вместе с тензорным полем $\boldsymbol{\zeta} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}^{3 \times 3}$, $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}^T$, составляют используемую в дальнейшем тестовую функцию $\mathbf{W} = (\mathbf{w}, \boldsymbol{\zeta})$.

Используя переменную $\mathbf{V}$, классические уравнения состояния линейной упругости

$$\mathbf{p} = \rho \partial_t \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \mathbf{D}\mathbf{v} \quad (2.7)$$

можно переписать в интегральной форме:

$$\langle \mathcal{L}\mathbf{V}, \partial_t \mathbf{W} \rangle = - \int_{\mathcal{Q}} \xi : \mathbf{S} : \partial_t \zeta d\mathcal{Q}; \quad \forall \mathbf{W} \in H \subset H^1(\mathcal{Q}; \mathbb{C}^9), \quad (2.8)$$

где введен линейный оператор и билинейная форма:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \rho \partial_t & -\nabla \cdot \\ \mathbf{D} & -\mathbf{S} : \partial_t \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$\langle \mathcal{L}\mathbf{V}, \partial_t \mathbf{W} \rangle = \int_{\mathcal{Q}} [(\rho \partial_t \mathbf{v} - \nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) \cdot \partial_t \mathbf{w} + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \mathbf{S} : \partial_t \boldsymbol{\eta}) : \partial_t \zeta] d\mathcal{Q}$$

В качестве граничных условий на поля $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ выбираются нулевые напряжения на боковых сторонах стержня и шарнирное закрепление торцов:

$$\begin{aligned} x_2 = \pm h : \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad x_3 = \pm c : \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \\ x_1 = 0, a : \mathbf{v} = -\alpha_1(x_1, t)x_2 \mathbf{e}_1, \quad \int_{\mathcal{S}} x_2(\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{e}_1) d\mathcal{S} = 0 \\ x_1 = 0, a : \mathbf{w} = -\beta_1(x_1, t)x_2 \mathbf{e}_1, \quad \int_{\mathcal{S}} x_2(\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{e}_1) d\mathcal{S} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\mathcal{S} = \{(x_2, x_3) : |x_2| < h, |x_3| < c\}$$

Здесь интегралы по поперечному сечению $\mathcal{S}$ означают момент сил относительно оси x_3 в сечении с координатой x_1 , а α_1, β_1 — множители Лагранжа, являющиеся произвольными комплексными функциями времени, которые означают углы поворота торцевых сечений при $x_1 = 0$ и $x_1 = a$. Пространство H в (2.8) определяется как пространство соболевских функций, чьи следы удовлетворяют (2.10).

Известные начальные распределения перемещений $\mathbf{v}$ и плотности импульса $\mathbf{p}$ задаются соотношениями:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} (\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{v}^0(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{w} d\mathcal{X} = 0 \\ \int_{\mathcal{X}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{p}^0(\mathbf{x})) \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} d\mathcal{X} = 0; \quad \forall \mathbf{W} \in H \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. Задача на собственные значения. Начально-краевой задаче (2.8)–(2.11) соответствует краевая задача на собственные частоты $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}} \rangle = 0; \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{H} \subset H^1(\mathcal{X}; \mathbb{C}^9) \\ \langle \mathcal{M}\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}} \rangle = \int_{\mathcal{X}} [(\rho \omega \tilde{\mathbf{v}} + i \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \cdot \tilde{\mathbf{w}} - (i \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{v}}) + \omega \mathbf{S} : \tilde{\boldsymbol{\eta}}) : \tilde{\boldsymbol{\zeta}}] d\mathcal{X} \\ \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \rho \omega & i \nabla \cdot \\ -i \mathbf{D} & -\omega \mathbf{S} : \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = (\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x})), \quad \tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{x}) = (\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{x})), \end{aligned} \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} x_2 = \pm h : \tilde{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{e}_2 = \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \\ x_3 = \pm c : \tilde{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{e}_3 = \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \\ x_1 = 0, a : \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\alpha}_1(x_1)x_2 \mathbf{e}_1, \quad \int_{\mathcal{S}} x_2(\mathbf{e}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{e}_1) d\mathcal{S} = 0 \\ x_1 = 0, a : \tilde{\mathbf{w}} = -\tilde{\beta}_1(x_1)x_2 \mathbf{e}_1, \quad \int_{\mathcal{S}} x_2(\mathbf{e}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \mathbf{e}_1) d\mathcal{S} = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Таблица 1. Степени разложения (четные или нечетные) по x_2 и x_3 компонент векторного и тензорного полей для четырех независимых типов колебаний

	Кручение		Продольные		Изгиб, x_2		Изгиб, x_3	
	x_2	x_3	x_2	x_3	x_2	x_3	x_2	x_3
v_1, η_{jj}	неч.	неч.	чет.	чет.	чет.	неч.	неч.	чет.
v_2, η_{12}	неч.	чет.	чет.	неч.	неч.	неч.	чет.	чет.
v_3, η_{13}	чет.	неч.	неч.	чет.	чет.	чет.	неч.	неч.
η_{23}	чет.	чет.	неч.	неч.	неч.	чет.	чет.	неч.

где $\tilde{\alpha}_1(0)$, $\tilde{\alpha}_1(a)$, $\tilde{\beta}_1(0)$, $\tilde{\beta}_1(a)$ — произвольные комплексные константы, а $\tilde{H}$ — подпространство соболевского пространства с ограничениями (3.2).

4. Аппроксимация полей перемещений и напряжений. Для нахождения собственных частот и форм колебаний используем полиномиальные аппроксимации векторных и тензорных полей $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{w}}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ относительно поперечных координат x_2 , x_3 :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \mathbf{v}^{(jk)}(x_1) \hat{x}_2^j \hat{x}_3^k, & \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \mathbf{w}^{(jk)}(x_1) \hat{x}_2^j \hat{x}_3^k \\
 \tilde{\eta}(\mathbf{x}) &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \eta^{(jk)}(x_1) \hat{x}_2^j \hat{x}_3^k, & \tilde{\xi}(\mathbf{x}) &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \xi^{(jk)}(x_1) \hat{x}_2^j \hat{x}_3^k \\
 \hat{x}_2 &= \frac{x_2}{h}, & \hat{x}_3 &= \frac{x_3}{c}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $\mathbf{v}^{(jk)}(x_1)$, $\eta^{(jk)}(x_1)$ — неизвестные векторно- и тензорнозначные пробные функции соответствующей размерности, $\mathbf{w}^{(jk)}(x_1)$, $\xi^{(jk)}(x_1)$ — произвольные тестовые функции. Заметим, что для более точного учета слоистой структуры рассматриваемой системы можно было бы использовать отдельные разложения в каждом из трех слоев ($x_2 \in (-h, -b)$, $x_2 \in (-b, b)$, $x_2 \in (b, h)$), учитывая соответствующие условия склейки перемещений и напряжений при $x_2 = \pm b$, но для построения простейшей модели изгиба ограничимся общей аппроксимацией по всему поперечному сечению $\mathcal{S}$.

В [7] показано, что для стержней имеющих две плоскости геометрической и механической симметрии существует по крайней мере четыре независимых типа движения: кручение, продольные колебания, а также два изгиба относительно осей x_2 и x_3 . Как указано в табл. 1, они отличаются определенной четностью или нечетностью полиномов по x_2 и x_3 в (4.1). Кручение выделяется тем, что точки центральной линии стержня ($x_2 = x_3 = 0$) всегда остаются неподвижными, а сечение поворачивается вокруг оси x_1 . Продольные движения оставляют точки центральной линии на оси Ox_1 . При изгибе вокруг оси x_2 центральная линия смещается вдоль оси x_3 . И, наоборот, при изгибе вокруг x_3 центральная линия перемещается только вдоль x_2 .

Так как тензор пьезоэлектрических напряжений ξ антисимметричен относительно плоскости Ox_1x_3 и симметричен относительно Ox_1x_2 , он возбуждает только изгибные деформации вокруг оси x_3 . Ограничимся рассмотрением лишь этого типа колебаний и построим приближенные поля перемещений и напряжений ограничив максимальные степени разложения по четным или нечетным степеням x_2 и x_3 . Для получения совместной краевой задачи на собственные значения относительно x_1 необходимо пра-

вильно подобрать как подходящие степени, так и максимальный порядок разложения каждой из компонент $\tilde{\mathbf{v}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$. В результате получаем допустимую аппроксимацию:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= \sum_{j+k \leq N_p} v_1^{(jk)}(x_1) \hat{x}_2^{2j+1} \hat{x}_3^{2k}, & \tilde{\eta}_{11} &= \sum_{j+k \leq N_p} \eta_{11}^{(jk)}(x_1) \hat{x}_2^{2j+1} \hat{x}_3^{2k} \\ \tilde{\eta}_{22} &= \sum_{j+k \leq N_p} \eta_{22}^{(jk)}(x_1) g_2 \hat{x}_2^{2j+1} \hat{x}_3^{2k}, & \tilde{\eta}_{33} &= \sum_{j+k \leq N_p} \eta_{33}^{(jk)}(x_1) g_3 \hat{x}_2^{2j+1} \hat{x}_3^{2k} \\ \tilde{v}_2 &= \sum_{j+k \leq N_p} v_2^{(jk)}(x_1) \hat{x}_2^{2j} \hat{x}_3^{2k}, & \tilde{\eta}_{12} &= \sum_{j+k \leq N_p} \eta_{12}^{(jk)}(x_1) g_2 \hat{x}_2^{2j} \hat{x}_3^{2k} \\ \tilde{v}_3 &= \sum_{j+k \leq N_p-1} v_3^{(jk)}(x_1) \hat{x}_2^{2j+1} \hat{x}_3^{2k+1} \\ \tilde{\eta}_{13} &= \sum_{j+k \leq N_p-1} \eta_{13}^{(jk)}(x_1) g_3 \hat{x}_2^{2j+1} \hat{x}_3^{2k+1}, & \tilde{\eta}_{23} &= \sum_{j+k \leq N_p-1} \eta_{23}^{(jk)}(x_1) g_2 g_3 \hat{x}_2^{2j} \hat{x}_3^{2k+1} \\ g_2 &= 1 - \hat{x}_2^2, & g_3 &= 1 - \hat{x}_3^2,\end{aligned}\tag{4.2}$$

где N_p — порядок приближения. Эти аппроксимации автоматически выполняют граничные условия (3.2) при $x_2 = \pm h$ и $x_3 = \pm c$. Приближения для $\tilde{\mathbf{w}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ аналогичны (4.2) и для сокращения объема не приводятся.

Далее ограничимся полиномиальными разложениями компонент полей $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{w}}$, $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$, $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}$ наименьшей степени: $N_p = 0$. Учитывая, что индексы j, k в (4.2) принимают только неотрицательные значения, и вводя новые обозначения для неизвестных функций от x_1 , получаем

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1(\mathbf{x}) &= \bar{x}_2 q_1(x_1), & \tilde{w}_1(\mathbf{x}) &= \bar{x}_2 r_1(x_1), & \tilde{v}_2(\mathbf{x}) &= q_2(x_1), & \tilde{w}_2(\mathbf{x}) &= r_2(x_1) \\ \tilde{\eta}_{11}(\mathbf{x}) &= i \bar{x}_2 q_3(x_1), & \tilde{\zeta}_{11}(\mathbf{x}) &= -i \bar{x}_2 r_3(x_1) \\ \tilde{\eta}_{12}(\mathbf{x}) &= i g_2(x_2) q_4(x_1), & \tilde{\zeta}_{12}(\mathbf{x}) &= -i g_2(x_2) r_4(x_1) \\ \tilde{\eta}_{22}(\mathbf{x}) &= i g_2(x_2) \bar{x}_2 q_5(x_1), & \tilde{\zeta}_{22}(\mathbf{x}) &= -i g_2(x_2) \bar{x}_2 r_5(x_1) \\ \tilde{\eta}_{33}(\mathbf{x}) &= i g_3(x_3) \bar{x}_2 q_6(x_1), & \tilde{\zeta}_{33}(\mathbf{x}) &= -i g_3(x_3) \bar{x}_2 r_6(x_1) \\ \tilde{v}_3(\mathbf{x}) &= \tilde{w}_3(\mathbf{x}) = 0, & \tilde{\eta}_{13}(\mathbf{x}) &= \tilde{\zeta}_{13}(\mathbf{x}) = \tilde{\eta}_{23}(\mathbf{x}) = \tilde{\zeta}_{23}(\mathbf{x}) = 0\end{aligned}\tag{4.3}$$

Граничные условия на торцах $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ переходят в смешанные краевые ограничения

$$\begin{aligned}q_2(0) &= r_2(0) = q_2(a) = r_2(a) = 0 \\ q_3(0) &= r_3(0) = q_3(a) = r_3(a) = 0\end{aligned}\tag{4.4}$$

Подставляя эти вектор-функции в интегральное соотношение (3.1) и учитывая произвольность выбора $\mathbf{r}$, относительно x_1 получим систему линейных дифференциально-алгебраических уравнений четвертого порядка с действительными коэффициентами:

$$\begin{aligned}q_1' &= \omega(c_{63}q_3 + c_{65}q_5 + c_{65}q_6) \\ q_2' &= b_{24}q_1 + \omega c_{21}q_4 \\ q_3' &= b_{34}q_4 + \omega c_{31}q_1 \\ q_4' &= \omega c_{42}q_2 \\ 0 &= b_{53}q_3 + b_{55}q_5 + b_{55}q_6 \\ 0 &= b_{63}q_3 + b_{65}q_5 + b_{65}q_6\end{aligned}\tag{4.5}$$

Искомые пробные функции $q_j(x_1) \in \mathbb{R}$ и произвольные тестовые функции $r_j(x_1) \in \mathbb{R}$ собираются соответственно в векторы $\mathbf{q}(x_1) \in \mathbb{R}^6$ и $\mathbf{r}(x_1) \in \mathbb{R}^6$. В векторном виде это уравнение можно представить как

$$\mathbf{A}\mathbf{q}' = \mathbf{B}\mathbf{q} + \mathbf{C}\mathbf{q}; \quad \mathbf{A} = \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 0, 0\} \quad (4.6)$$

Компоненты постоянных действительных матриц $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ и $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ определяются аналитически и зависят от геометрических и механических параметров упругой системы $b, c, h, \rho_j, E_j, \nu_j, j = 0, 1$.

Последние два алгебраических уравнения в (4.5) всегда можно разрешить относительно q_5 и q_6 . После их исключения, характеристическое уравнение первых четырех дифференциальных уравнений в (4.5) уже только относительно кинематических переменных q_1, q_2 и динамических переменных q_3, q_4 имеет вид

$$\kappa^4 + 2d_1\omega^2\kappa^2 - 2d_2\omega^2 + d_3\omega^4 = 0, \quad (4.7)$$

где $d_j > 0, j = 1, 2, 3$, постоянные коэффициенты, вычисляемые алгебраически через компоненты матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$.

Учитывая, что частота ω принимает только действительные значения, можно, разрешив биквадратное уравнение (4.7), выразить в явном виде волновое число κ через квадрат частоты:

$$\kappa^2 = -d_1\omega^2 \pm \sqrt{d_1^2\omega^4 + 2d_2\omega^2 - d_3\omega^4} \quad (4.8)$$

Анализ показывает, что вне зависимости от параметров системы выполняется строгое неравенство $d_1^2 > d_3$ и квадрат волнового числа $\kappa^2(\omega^2)$ в (4.8) принимает только действительные значения. Один из корней всегда отрицателен, второй тоже больше нуля, если $\omega^2 < \omega_*^2 = d_2/d_3$. Для высоких частот ($\omega^2 > \omega_*^2$) оба значения отрицательны ($\kappa^2 < 0$), а, следовательно, и все четыре корня характеристического уравнения (4.7) чисто мнимые.

Будем искать решение краевой задачи (4.4)–(4.5) в виде

$$\begin{aligned} q_j &= q_{j,m} \cos \kappa_m x_1; \quad j = 1, 4, \quad q_j = q_{j,m} \sin \kappa_m x_1; \quad j = 2, 3, 5, 6 \\ \omega_m^2 &= \frac{1}{d_3} \left(d_1 \kappa_m^2 + d_2 \pm \sqrt{(d_1 \kappa_m^2 + d_2)^2 - d_3 \kappa_m^4} \right); \quad \kappa_m = \frac{m\pi}{a}, \quad m \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Можно непосредственно убедиться, что компоненты собственного вектора $\mathbf{q}_m(x_1)$ удовлетворяют краевым условиям (4.4). Все параметры $q_m^j, (j = 1, \dots, 6)$ этого вектора с точностью до множителя явно находятся как алгебраические функции от собственной частоты ω_m после подстановки $\mathbf{q}_m$ и ω_m в (4.5). Волновое число $\kappa_m > 0$ и частота $\omega_m \in \mathbb{R}$ удовлетворяют характеристическое уравнение (4.7) после подстановки в него чисто мнимого числа $\kappa = \pm i\kappa_m$ и частоты $\omega = \omega_m$.

Так как $d_1^2 > d_3$, для каждого натурального числа m существуют два типа собственных движений упругой системы, которые определяются выбором плюса (верхняя ветвь колебаний) или минуса (нижняя ветвь) в выражении для ω_m^2 из (4.9). Положим в дальнейшем, что $\omega_{\pm m} > 0$ положительные значения частот для верхней и нижней ветви соответственно. Как собственное значение подходят также и отрицательные частоты $-\omega_{\pm m}$. В результате одно натуральное число m порождает четыре собственных вектора

$$\begin{aligned}
 \omega_{\pm m} &: \mathbf{q}_{\pm m}^+(x_1), \quad -\omega_{\pm m} : \mathbf{q}_{\pm m}^-(x_1) \\
 q_{j,\pm m}^-(x_1) &= q_{j,\pm m}^+(x_1); \quad j = 1, 2 \\
 q_{j,\pm m}^-(x_1) &= -q_{j,\pm m}^+(x_1); \quad j = 3, \dots, 6
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Иначе говоря, при смене знака собственной частоты в собственном векторе первые две компоненты, определяющие перемещения, остаются без изменений, а остальные, относящиеся к напряжениям и импульсам, — меняют знак.

Для выбора неопределенного параметра собственного вектора $\mathbf{q}_{\pm m}$ естественно зафиксировать его энергетическую норму. Согласно (4.3), функция $\mathbf{q}_{\pm m}^+(x_1)$ определяет в пространственной области $\mathcal{X}$ векторное кинематическое поле $\mathbf{v}_{\pm m}$ и тензорное динамическое поле $\eta_{\pm m}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{\pm m} &= (\mathbf{v}_{\pm m}, \eta_{\pm m}), \quad \bar{\mathbf{V}}_{\pm m} = (\mathbf{v}_{\pm m}, \bar{\eta}_{\pm m}) \\
 \mathbf{v}_{\pm m}(\mathbf{x}) &= \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{q}_{\pm m}^+(x_1), x_2), \quad \eta_{\pm m}(\mathbf{x}) = \tilde{\eta}(\mathbf{q}_{\pm m}^+(x_1), x_2, x_3)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Так как представленные поля могут принимать комплексные значения, для получения действительного решения начально-краевой задачи (2.8)–(2.11) нам потребуется как собственный вектор $\mathbf{V}_{\pm m}(\mathbf{x})$, соответствующий положительной частоте $\omega_{\pm m} > 0$ и вектору $\mathbf{q}_{\pm m}^+$, так и сопряженный ему вектор $\bar{\mathbf{V}}_{\pm m}(\mathbf{x})$, соответствующий отрицательной частоте $-\omega_{\pm m}$ и вектору $\mathbf{q}_{\pm m}^-$.

Нормировочное соотношение для полной механической энергии моды с индексом $\pm m$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 E_{\pm m} &= \frac{1}{2} \omega_{\pm m}^2 \|\mathbf{V}_{\pm m}\|^2 = 1 \\
 \|\mathbf{V}_{\pm m}\|^2 &= \int_{\mathcal{X}} (\rho \mathbf{v}_{\pm m} \cdot \mathbf{v}_{\pm m} + \eta_{\pm m} : \mathbf{S} : \bar{\eta}_{\pm m}) d\mathcal{X}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Отметим, что кинетическая и потенциальная энергия собственных колебаний равны. Знак сопряжения над $\eta_{\pm m}$ в выражении для плотности потенциальной энергии выбран из-за того, что собственный тензор $\eta_{\pm m}$, согласно (4.3), принимает мнимые значения. Важно подчеркнуть также, что различные собственные векторы ортогональны относительно скалярного произведения, порождающего энергетическую норму:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{V}_j, \mathbf{V}_k) &= \int_{\mathcal{X}} (\rho \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_k + \eta_j : \mathbf{S} : \bar{\eta}_k) d\mathcal{X} = \frac{2\delta_{jk}}{\omega_j^2} \\
 (\mathbf{V}_j, \bar{\mathbf{V}}_k) &= 0; \quad j, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

5. Пример расчета собственных частот и форм колебаний. В качестве примера рассмотрим колебания упругой системы со следующими безразмерными геометрическими и механическими параметрами

$$\begin{aligned}
 a &= 20, \quad b = \frac{3}{4}, \quad c = h = 1 \\
 E_0 &= \rho_0 = \rho_1 = 1, \quad E_1 = \frac{1}{4}, \quad v_0 = v_1 = \frac{3}{10}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Подставим эти параметры вместе с соответствующими им аппроксимациями (4.3) в интегральное уравнение (3.1). После интегрирования по координатам x_2 и x_3 находят компоненты матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, а из них — коэффициенты характеристического уравнения (4.7).

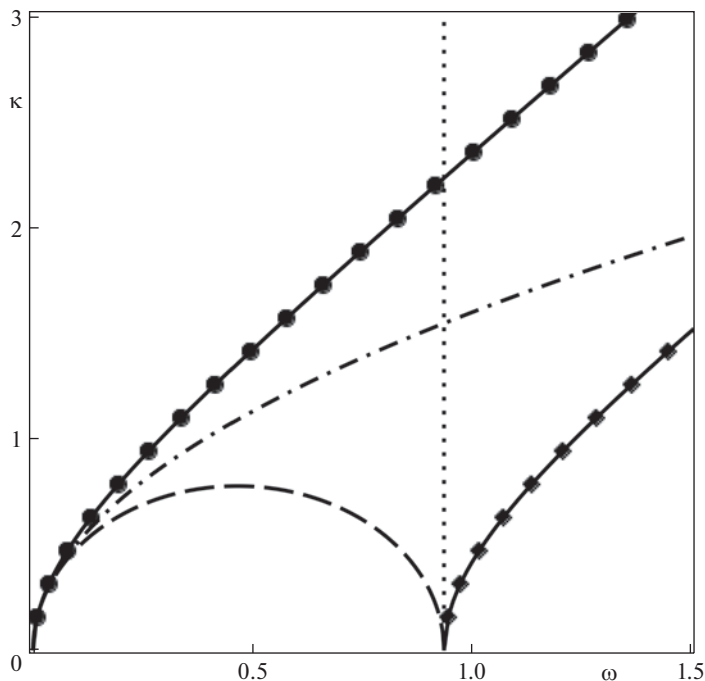


Рис. 3. Частотно-волновые характеристики упругой системы.

Построим амплитудно-частотные характеристики системы с выбранными параметрами (5.1). На рис. 3 изображен график зависимости абсолютных значений корней $|\kappa|$ уравнения (4.7) от частоты $\omega > 0$. Четыре корня можно представить либо как $\kappa \in \{i\kappa^0, -i\kappa^0, \kappa^1, -\kappa^1\}$ при $\omega < \omega_*$, либо как $\kappa \in \{i\kappa^0, -i\kappa^0, i\kappa^1, -i\kappa^1\}$ при $\omega > \omega_*$. На графике критическая частота ω_* помечена вертикальной пунктирной линией и в нашем примере равна:

$$\omega_* = \frac{320}{\sqrt{116753}} \approx 0.946$$

Действительные корни характеристического уравнения $\pm\kappa^1(\omega)$ в докритической зоне $\omega \in (0, \omega_*)$ отображаются на рис. 3 штриховой кривой и для шарнирного закрепления концов не реализуются в общем решении (4.9). На этом интервале функция $\kappa^1(\omega)$ достигает максимума $\kappa_1 = \kappa^* \approx 0.778$ при $\omega^* \approx 0.467$. В отличие от модели балки Бернулли, в рамках которой абсолютные значения всех корней совпадают, в предложенной модели всегда $\kappa^1(\omega) < \kappa^0(\omega)$ для допустимого интервала $(0, \omega_*)$.

Для сравнения штрихпунктирной линией на рисунке построен график квадратичной зависимости от частоты волнового числа $\kappa^c(\omega) = \kappa_0^c \omega^2$, $\kappa_0^c \approx 0.939$, классической модели балки с соответствующими осредненными по сечению параметрами. При $\omega \rightarrow 0$ три функции κ^b , κ^0 , κ^1 (штрихпунктирная, сплошная и штриховая линии вблизи начала координат на рис. 3) асимптотически склеиваются. При выбранном отношении высоты стержня $2h$ к его длине a (1 : 10), графики заметно расходятся уже при достаточно низких частотах ($\omega \sim 0.3$).

Таблица 2. Собственные частоты изгибных колебаний для классической модели Бернулли ω_m^c и предложенной модели $\omega_{\pm m}$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω_m^c	0.0097	0.039	0.087	0.155	0.241	0.35	0.47	0.62	0.78	0.97
ω_{-m}	0.0094	0.036	0.078	0.132	0.195	0.26	0.34	0.42	0.50	0.58
ω_{+m}	0.9461	0.974	1.017	1.071	1.136	1.21	1.28	1.36	1.45	1.53

Если $\omega = \omega_*$, то $\kappa^1 = 0$, а в закритической области $\omega \in (\omega_*, \infty)$ появляются два мнимых корня, абсолютное значение которых $\kappa^1(\omega)$ показано в нижней правой части графика сплошной линией. Это строго монотонно возрастающая функция, которая всегда ниже абсолютных значений двух других сопряженных корней ($\kappa^1(\omega) < \kappa^0(\omega)$). Ветвь $\kappa^0(\omega)$ также строго монотонна и изображена сплошной линией в верхней левой части рис. 3.

Амплитудно-частотные характеристики, описанные выше, верны для любых консервативных типов закрепления стержня на торцах. При выбранной шарнирной заделке обоих концов собственные частоты и векторы находятся в виде (4.9). Для построения таких форм колебаний используются только мнимые волновые числа. Выбирая полученные частоты ω_m и волновые числа κ_m , отобразим их на рис. 3 как точки плоскости (ω, κ) . Кружками обозначена нижняя ветвь колебаний (ω_{-m}, κ_m) , а ромбами – верхняя (ω_{+m}, κ_m) . Как видно на графике эти точки строго ложатся на мнимые ветви функций $\kappa^0(\omega)$, $\omega > 0$, и $\kappa^1(\omega)$, $\omega > \omega_*$.

Для более точного частотного анализа можно обратиться к табл. 2, в которую помещены значения первых десяти частот ω_m^c , $m = 1, \dots, 10$, изгиба шарнирно закрепленной балки Бернулли с параметрами соответствующими рассматриваемой в этом примере упругой системы (вторая строка). Третья строка табл. 2 соответствует нижней ветви собственных частот ω_{-m} , которые получены в рамках предложенной модели. В последней строке указаны десять собственных частот ω_{+m} верхней ветви.

Небольшое расхождение ω_1^c и ω_{-1} (порядка 3%) видно даже для первой моды колебаний. С возрастанием номера m это рассогласование быстро нарастает достигая почти 70% для $m = 10$. При этом классическая частота ω_{10}^c превышает критическую ω_* , выше которой появляются собственные частоты верхней ветви ω_{+m} . Их величины на два порядка выше основной частоты ω_{-1} , но в относительном выражении растут гораздо медленнее с номером m чем ω_{-m} .

Рассмотрим соответствующие двум ветвям $(\omega_{\pm m}, \kappa_m)$ формы собственных колебаний. На рис. 4 показаны углы упругих поворотов в заделке $x_1 = 0$ для различных m :

$$\alpha_1(\pm m) = -\partial_{x_2} v_{1,\pm m}(0, 0, 0), \quad \alpha_2(\pm m) = \partial_{x_1} v_{2,\pm m}(0, 0, 0), \quad (5.2)$$

где $v_{j,\pm m}$, $j = 1, 2, 3$, – компоненты вектора собственных перемещений $\mathbf{v}_{\pm m}$. Значение α_1 – отмеряемый от недеформированного положения угол поворота поперечного сечения, α_2 – угол наклона деформированной центральной линии стержня (см. рис. 2). Оба поворота осуществляются вокруг оси x_3 . На рис. 4 значения $\alpha_1(-m)$ для нижней ветви колебаний отмечены закрашенными ромбами, $\alpha_1(+m)$ для верхней – незакра-

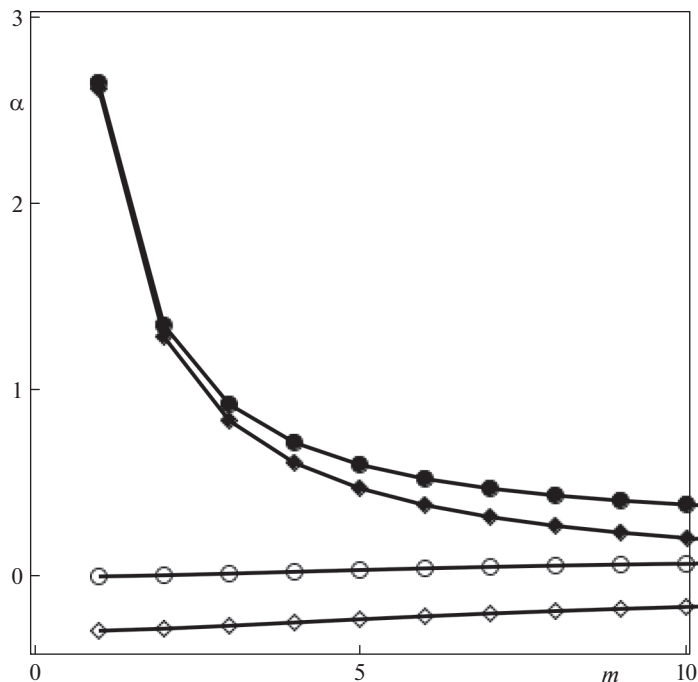


Рис. 4. Углы поворотов плоскостей стержня Ox_2x_3 (α_1^* , кружки) и Ox_1x_3 (α_2^* , ромбы) для нижней ($-m$, закрашенные метки) и верхней ($+m$, прозрачные метки) ветвей колебаний.

шенными. Углы $\alpha_2(-m)$ для нижней ветви показаны закрашенными кружками, $\alpha_2(+m)$ — незакрашенными. Не должны смущать большие значения этих параметров, которые соответствуют собственным колебаниям с безразмерной энергией, равной единице. Это связано с тем что модуль Юнга материала стержня равен единице, а у пьезоматериала этот модуль еще меньше. Для анализа собственных форм важны только относительные значения этих углов.

Как видно из графика, для нижней ветви колебаний, как угол поворота сечения α_1 , так и угол наклона центральной линии α_2 положительны и монотонно уменьшаются с увеличением номера моды m . Разница между этими углами равна углу сдвига $\gamma_{-m} = \alpha_2(-m) - \alpha_1(-m)$ в центре торцевого сечения; он увеличивается для больших m , что указывает на усиление роли перерезывающих сил $\sigma_{12,-m}$ в этом типе колебаний. Для верхней ветви ($+m$) важно отметить, что α_1 и α_2 разных знаков и почти линейно растут. При малых номерах m значения $\alpha_2(+m)$ близки к нулю по сравнению с $\alpha_2(-m)$, а сдвиговые деформации γ_{-m} — существенны, что выявляет сдвиговый характер этих колебаний в отличие от изгибного типа для нижней ветви.

Двумя другими параметрами собственных движений, определяемыми из дифференциальных соотношений, являются амплитуды нормальных и сдвиговых напряжений σ_{11} и σ_{12} . На рис. 5 показаны максимальные значения нормальных и сдвиговых напряжения для различных m :

$$\sigma_1(\pm m) = \max_{x_1 \in (0,a)} i\omega_{\pm m} \eta_{11}^{\pm m}(x_1, h, 0), \quad \sigma_2(\pm m) = \max_{x_1 \in (0,a)} i\omega_{\pm m} \eta_{12}^{\pm m}(x_1, 0, 0) \quad (5.3)$$

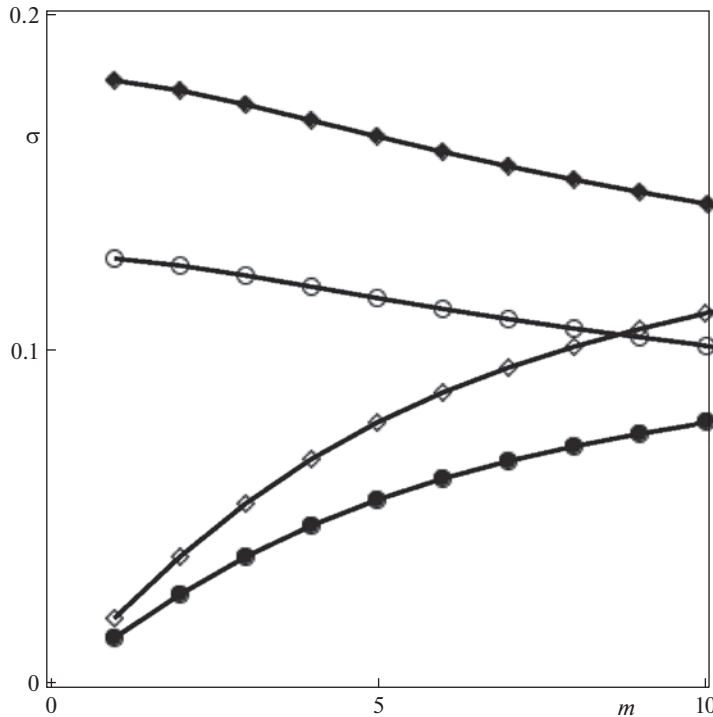


Рис. 5. Максимальные сдвиговые (σ_{12}^* , кружки) и нормальные продольные (σ_{11}^* , ромбы) напряжения для нижней ($-m$, закрашенные метки) и верхней ($+m$, прозрачные метки) ветвей колебаний.

При этом напряжения σ_1 помечены ромбами, σ_2 — кружками; нижняя ветвь обозначена закрашенными символами, верхняя — незакрашенными. Для нижней ветви с ростом номера m напряжение σ_1 уменьшается, σ_2 увеличивается, при этом $\sigma_1 > \sigma_2$. Для низших частот этой ветви амплитуда нормальных напряжений в сечении σ_1 много больше сдвиговых σ_2 , что указывает на преимущественно изгибный характер колебаний. Для верхней же ветви $\sigma_1(+m)$ — монотонно возрастающая функция, а $\sigma_2(+m)$ — убывающая. При малых m сдвиговые напряжения много больше по амплитуде чем нормальные, это означает существенно сдвиговый характер собственных напряжений.

6. Декомпозиция начально-краевой задачи. Согласно методу Фурье представим пробные и тестовые переменные $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ начально-краевой задачи (2.8)–(2.11) как разложение по собственным векторам задачи (4.4), (4.6) на аппроксимациях (4.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (\mathbf{V}_j(\mathbf{x}) y_j(t) + \bar{\mathbf{V}}_j(\mathbf{x}) z_j(t)) \\ \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (\bar{\mathbf{V}}_j(\mathbf{x}) \delta y_j(t) + \mathbf{V}_j(\mathbf{x}) \delta z_j(t)) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь y_j , z_j — неизвестные функции времени, δy_j , δz_j — их вариации.

Подставим выражения для $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ из (6.1) в (2.7). Учитывая условия (4.12), (4.13) для ортонормированного базиса $\{\mathbf{V}_j, \bar{\mathbf{V}}_j\}_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, проинтегрируем выражения под пространственно-временными интегралами в (2.9) только по объему $\mathcal{X}$. Помня о произвольно-

сти вариаций δy_j , δz_j , получаем счетную систему обыкновенных уравнений первого порядка:

$$\dot{y}_j(t) + i\omega_j y_j(t) = -i \sum_{n=1}^N g_j^{(n)} s_n(t), \quad \dot{z}_j(t) - i\omega_j z_j(t) = i \sum_{n=1}^N g_j^{(n)} s_n(t), \quad (6.2)$$

где индексу $j = -m$, $m \in \mathbb{N}$, соответствует собственная частота нижней ветви колебаний $\omega_{-m} > 0$, а $j = +m$ — частота верхней ветви $\omega_{+m} > \omega_{-m}$.

Однородные граничные условия (2.10) для приближения $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, выбранного в виде (6.1), выполняются точно, так как собственные векторы $\mathbf{V}_j(\mathbf{x})$ не нарушают ограничения краевой задачи (3.2). Чтобы получить начальные условия для неизвестных y_j , z_j следует спроецировать заданные в момент $t = 0$ распределения $\mathbf{v}^0(\mathbf{x})$ и $\mathbf{p}^0(\mathbf{x})$ из (2.11) соответственно на собственные функции $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$ и $\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}_j(\mathbf{x})$. В результате получим систему начальных условий:

$$\begin{aligned} y_j(0) &= y_j^0 = \int_{\mathcal{X}} (\mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{p}^0 \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\eta}_j) d\mathcal{X} \\ z_j(0) &= z_j^0 = \int_{\mathcal{X}} (\mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{p}^0 \cdot \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}}_j) d\mathcal{X} = \bar{y}_j^0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Из структуры задачи Коши (6.2), (6.3) сразу следует, что $z_j(t) = \bar{y}_j(t)$ и приближенное решение в виде (6.1) принимает только действительное значение: $\Im \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = 0$.

Правые части уравнений (6.2) имеют важную особенность для выбранного (шарнирного) способа закрепления торцов стержня. Напомним, что тензор пьезоэлектрических напряжений $\xi(\mathbf{v}, t)$ имеет в заданной системе координат только одну ненулевую компоненту ξ_{11} , которая однородно распределена и независимо изменяется как функция времени $\xi_{11}(\mathbf{x}, t) = \pm s_n(t)$ на каждом пьезоэлементе $\mathcal{X}_n^\pm$ и равна нулю на $\mathcal{X}_0$. Следовательно, правая часть, например, первого уравнения в (6.2) для индекса $j = \pm m$ вычисляется как

$$\begin{aligned} -i \sum_{n=1}^N g_{\pm m}^{(n)} s_n(t) &= -2 \sum_{n=1}^N \int (\xi : \mathbf{S} : \boldsymbol{\eta}_{\pm m}) d\mathcal{X}_n^+ = \\ &= -\frac{2}{E_1} \sum_{n=1}^N \int s_n(t) (\eta_{11, \pm m} - \nu_1 \eta_{22, \pm m} - \nu_1 \eta_{33, \pm m}) d\mathcal{X}_n^+ = \\ &= -ig_{\pm m} \sum_{n=1}^N \int_{\chi_{n-1}}^{\chi_n} s_n(t) \sin \frac{\pi m x_1}{a} dx_1 = -ig_{\pm m} \sum_{n=1}^N \left(\cos \frac{\pi m n}{N} - \cos \frac{\pi m (n-1)}{N} \right) s_n(t), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где координаты границ пьезоэлементов χ_n введены в (2.2), множитель $g_{\pm m} \in \mathbb{R}$, общий для всех n , получается после интегрирования диагональных компонент $\eta_{kk, \pm m}(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, 3$, собственного тензора $\boldsymbol{\eta}_{\pm m}$ по части поперечного сечения

$$\mathcal{S}_1 = \{(x_2, x_3) : b < x_2 < h, |x_3| < c\}$$

Из-за антисимметрии этих компонент напряжений возникает двойка перед знаком интеграла в первой строке (6.4) вместо дополнительного интегрирования по области $\mathcal{X}_n^-$.

Покажем, что правая часть уравнений (6.2) — это линейная комбинация N независимых функций времени с коэффициентами

$$g_{\pm m}^{(n)} = g_{\pm m} \left[\cos \frac{\pi m n}{N} - \cos \frac{\pi m (n-1)}{N} \right]; \quad n = 1, \dots, N, \quad (6.5)$$

которые принимают значения из конечного набора. Пусть номер одной моды равен $m_1 = k$, $k = 0, \dots, N$, а другой $m_2 = 2Nj \pm k$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого номера пьезоэлемента n выражение в квадратных скобках в (6.5) не меняется при переходе от m_1 к m_2 , то есть правые части уравнений (6.2) с индексами $\pm m_1$ и $\pm m_2$ линейно зависимы. Важно отметить, что нулевая мода для шарнирного закрепления — это тривиальное решение, но соответствующая линейная комбинация тоже тривиальна и для каждой моды с номером $2Nj$ правая часть равна нулю и эти моды не управляемы. Итак, колебательные моды системы разбиваются на $N + 1$ классов эквивалентности по признаку линейной зависимости правых частей.

Введем новые функции управления

$$u_k(t) = \sum_{n=1}^N \left[\cos \frac{\pi kn}{N} - \cos \frac{\pi k(n-1)}{N} \right] s_n(t); \quad k = 1, \dots, N \quad (6.6)$$

После такой замены задача Коши (6.2), (6.3) для определения неизвестной функции приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_{\pm m}(t) + i\omega_{\pm m}y_{\pm m}(t) &= -ig_{\pm m}u_k(t), \quad y_{\pm m}(0) = y_{\pm m}^0 \\ k &= \begin{cases} j, & j \leq N, \\ 2N - m \bmod N, & j > N, \end{cases} \quad j = m \bmod 2N \\ u_0(t) &\equiv 0, \quad m \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (6.7)$$

7. Пример помодового управления движением стержня. Можно предложить различные стратегии управления системой (6.7), учитывая ее декомпозицию на группы мод. Исключая неуправляемую нулевую группу, каждая из остальных N групп представляют собой счетное множество линейных осцилляторов с одним скалярным управлением u_k , входящем в уравнение каждой моды с индексом $\pm m$ с определенным коэффициентом усиления $g_{\pm m}$. Если на исходные управляющие сигналы $s_n(t)$, $n = 1, \dots, N$ не накладываются какие-либо ограничения и выбран целевой функционал, который декомпозируется на эти же группы по функциям состояния $y_{\pm m}$ и управления u_k , можно рассматривать N полученных подсистем независимо.

Управляемость этих подсистем связана с темпом убывания коэффициентов $g_{\pm m}$ и собственных частот $\omega_{\pm m}$. Доказательство управляемости осложняется еще и тем, что в каждой подсистеме существует две ветви колебаний. При определенном выборе параметров задачи могут совпасть частоты ω_{-m_1} и ω_{+m_2} для разных номеров $m_1 > m_2$ некой группы мод. В этом случае подсистема будет неуправляема из-за существования двух одинаковых осцилляторов при одном управляющем входе.

Вопросы о стратегиях управления целиком каждой подсистемой выходят за рамки этой статьи и представляются не столь актуальными, потому что полученные системы уравнений дают лишь приближенное решение исходной пространственно трехмерной динамической задачи линейной теории упругости. Таким образом прецизионное управление высокими модами колебаний может оказаться неэффективным и даже ухудшить итоговое качество управления. Поэтому предложим в качестве примера функционально простой способ гашения колебаний только конечного числа низших мод.

Выберем функцию управления u_k как многочлен от времени четной степени:

$$u_k(t) = \sum_{n=0}^{N_k-1} a_{2n}^k t^{2n} + a_{2N_k+1}^k t^{2N_k+1}; \quad k = 1, \dots, N, \quad (7.1)$$

где $a_j^k \in \mathbb{R}$ – неопределенные коэффициенты многочлена. Эти параметры можно использовать, чтобы выполнить, например, N_k терминальных комплексных условий:

$$y_{-m(k)}(T) = 0, \quad m(k) \leq M_k; \quad k = 1, \dots, N$$

$$M_k = \begin{cases} N_k N - k, & k \neq N, \quad N_k \bmod 2 = 0 \\ (N_k - 1)N + k, & k \neq N, \quad N_k \bmod 2 = 1 \\ (2N_k - 1)N, & k = N \end{cases} \quad (7.2)$$

для нижней ветви в каждой (исключая нулевую) группе мод.

Рассмотрим в качестве примера расчета управляемых движений случай стержня с геометрическими и механическими параметрами (5.1) и тремя пьезоактуаторами ($N = 3$). Поставим задачу гашения первых трех мод колебаний с помощью полиномиального управления (7.1). Для этого нам достаточно выбрать в качестве входных сигналов линейные многочлены:

$$u_k(t) = a_0^k + a_1^k t; \quad k = 1, 2, 3 \quad (7.3)$$

Терминальные условия (7.2) конкретизируются как

$$y_{-1}(T) = y_{-2}(T) = y_{-3}(T) = 0 \quad (7.4)$$

Для демонстрации правильного выбора шести параметров управления (7.3) в достижении предписанного состояния выберем следующее начальное состояние:

$$y_{-1}(0) = y_{-2}(0) = y_{-3}(0) = \frac{1}{2}, \quad y_j(0) = 0; \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1, -2, -3\} \quad (7.5)$$

Эти условия означают, что первые три моды, которые мы хотим привести в нулевое положение с нулевым импульсом, в момент времени $t = 0$ полностью определяют некоторые упругие перемещения точек системы и нулевую плотность импульса. При этом начальные деформации таковы, что, согласно нормировке (4.12) на каждую моду приходится единичная энергия. Моды с номерами $m = 2Nj$, $j \in \mathbb{N}$, не возбуждаются вовсе. Колебания остальных мод будут определять остаточные движения, энергия которых и покажет качество управления.

Частота самой низшей моды колебаний равна $\omega_{-1} = 0.00936$, а соответствующий период $T_{-1} = 671$. Чтобы управляющие сигналы не были чрезмерно большими, выберем время управления больше этого периода: $T = 700$. На рис. 6 показаны амплитуды поперечных перемещений центральной линии стержня $v_{-m}(t) = \max_{x_1 \in [0, a]} v_2^{-m}(x_1, 0, 0, t)$ первых пяти мод колебаний управляемых, согласно (7.3), линейно. Моды с номерами $m = 1, 2, 3$, показанные на графике соответственно пунктирной, штрихпунктирной и штриховой линиями точно приходят в нулевое терминальное состояние. Их начальные значения разнятся, так как поперечные отклонения для мод с одинаковой энергией монотонно уменьшаются с увеличением номера. Поведение четвертой и пятой моды, отложенные на рис. 6 длинной штриховой и сплошной линиями соответственно, носят колебательный характер и для выбранного закона управления по энергии сравнимы с приводимыми модами. Для уменьшения остаточных колебаний необходимо повышать степени полиномов управления, используя появившиеся параметры либо для повышения их гладкости на начальном этапе, либо для гашения дополнительных мод.

Заключение. Рассмотрены управляемые изгибные перемещения и напряжения тонкого прямолинейного упругого стержня с присоединенной периодической структурой пьезоэлектрических элементов. Дана обобщенная формулировка начально-краевой задачи и соответствующей краевой задачи на собственные значения, решение кото-

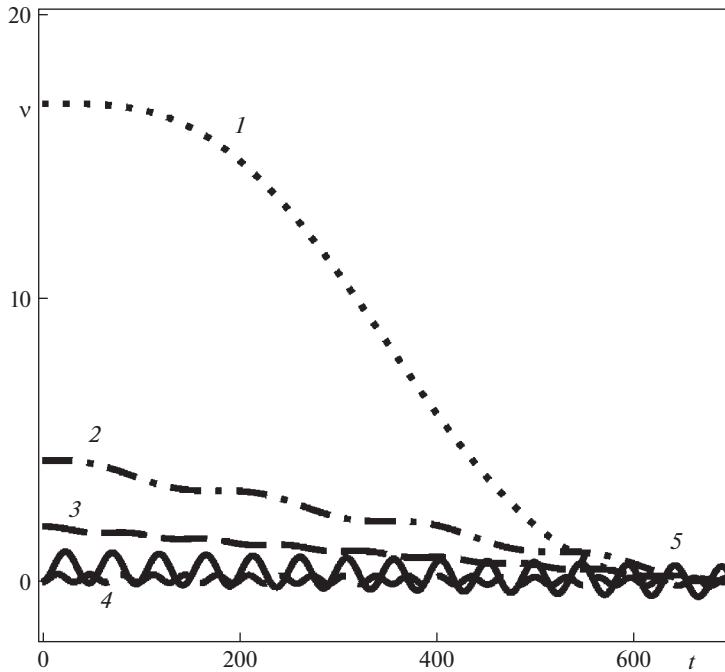


Рис. 6. Максимальные поперечные перемещения пяти низших мод управляемых колебаний системы.

рых ищется относительно как кинематической и так динамической переменных в энергетическом пространстве. Предложенные в работе аппроксимации полей перемещений и напряжений позволяют точно выполнить закон изменения импульса и граничные условия, а также найти в аналитическом виде для случая шарнирно закрепленного стержня собственные частоты и формы колебаний. Полученные формы используются для построения приближенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей динамику вынужденных движений. Для случая стержня, управляемого с помощью дискретно распределенных в пространстве продольных механических напряжений, которые возникают в присоединенных пьезоэлектрических элементах, предложен алгоритм гашения низших мод колебаний при заданном полиномиальном законе воздействия.

Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 21-51-12004).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с.
2. Стрэтт Дж.В. (Лорд Релей) Теория звука. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1940. 500 с.
3. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. 379 с.
4. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. V. 12. P. A69–A77.
5. Levinson M. On Bickford's consistent higher order beam theory // Mech. Res. Commun. 1985. V. 12. P. 1–9.
6. Костин Г.В., Саурин В.В. Интегриродифференциальный подход к решению задач линейной теории упругости // Докл. РАН. 2005. Т. 404. № 5. С. 628–631.

7. Костин Г.В., Саурин В.В. Моделирование и анализ собственных колебаний упругой призматической балки на основе проекционного подхода // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 6. С. 995–1010.
8. Kostin G.V., Saurin V.V. Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.
9. Kostin G. Projection approach to spectral analysis of thin axially symmetric elastic solids // in: Recent Trends in Wave Mechanics and Vibrations. Ed. by Dimitrovová Z. et al. WMVC 2022. Mechanisms and Machine Science. V. 125. Springer, 2023. P. 285–295.
10. Akulenko L.D., Nesterov S.V. High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: Charman and Hall/CRC, 2005. 260 p.
11. Гавриков А.А., Костин Г.В. Оптимизация продольных движений упругого стержня с помощью периодически распределенных пьезоэлектрических сил // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 5.
12. Bruant I., Coffignal G., Lene F., Verge M. A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures // J. Sound&Vibr. 2001. V. 243. № 5. P. 861–882.
13. Gupta V., Sharma M., Thakur N. Optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure: A technical review // J. Intell. Mater. Syst.&Struct. 2010. V. 21. № 12. P. 1227–1243.
14. Kostin G., Gavrikov A. Controllability and optimal control design for an elastic rod actuated by piezoelements // IFAC-PapersOnLine. 2022. V. 55. № 16. P. 350–355.
15. Gavrikov A., Kostin G. Optimal LQR control for longitudinal vibrations of an elastic rod actuated by distributed and boundary inputs // in: Recent Trends in Wave Mechanics and Vibrations. Ed. by Dimitrovová Z. et al. WMVC 2022. Mechanisms and Machine Science, V. 125. Springer, 2023. P. 285–295.
16. Kucuk I., Sadek I., Yilmaz Y. Optimal control of a distributed parameter system with applications to beam vibrations using piezoelectric actuators // J. Franklin Inst. 2014. V. 351. P. 656–666.
17. Mead D.J., Markus S. The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions // J. Sound&Vibr. 1969. V. 10. № 2. P. 163–175.
18. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature // Compos. Struct. 2017. V. 171. P. 486–504.

Bending Vibrations of an Elastic Rod Controlled by Piezoelectric Forces

A. A. Gavrikov^{a,#} and G. V. Kostin^{a,##}

^aIshlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

[#]e-mail: gavrikov@ipmnet.ru

^{##}e-mail: kostin@ipmnet.ru

Bending vibrations of a thin elastic rod of rectangular cross-section are studied. A number of piezoelectric actuators (elements) is symmetrically attached without gaps to two opposite sides of the rod. Each element is glued to the neighboring ones, forming with the rod a single elastic body in the form of a rectangular parallelepiped. The body is hinged at both ends relative to the cross-sectional axis parallel to the piezoelectric layers. In opposite piezoelements, homogeneous fields of normal stresses are set antisymmetrically as functions of time. These stresses are parallel to the axis of the rod and force the elastic system to perform bending motions. Within the framework of the linear theory of elasticity for the considered system, generalized formulations of the initial-boundary value problem and the corresponding eigenvalue problem are given. These problems are defined through unknown displacements and the time integrals of mechanical stresses. An approximation of the displacement and stress fields, which is polynomial in transverse coordinates, is proposed. This approximation exactly satisfies the homogeneous boundary conditions for stresses on the lateral sides and takes into account the symmetry properties of the bending motions. For the chosen approximation, the boundary value problem for eigenvalues is exactly solved. Two branches of eigenvalues are found and used to reduce the initial-boundary value problem to a countable system of first-order ordinary differential equations with respect to complex variables. The dynamical system is decomposed into independent infinite-dimensional subsystems with a

scalar control input. One of these subsystems is not controllable. For the remaining subsystems, each corresponding to a pair of piezoelectric elements, a control law for vibration damping is proposed for a specific number of the lower modes associated with the lower branch.

Keywords: elastic beam, piezoelectric force, piezoactuators, controlled vibrations

REFERENCES

1. *Donnell L.H.* Beams, Plates and Shells. N.Y.: McGraw-Hill, 1976.
2. *Strutt J.W. (Baron Rayleigh)* Theory of Sound. Vol. 1. L.: MacMillan, 1926.
3. *Timoshenko S.* Strength of Materials. Pt 1. Elementary Theory and Problems. Princenton: D. Van Nostrand Reinhold, 1956.
4. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech., 1945, vol. 12, pp. A69–A77.
5. *Levinson M.* On Bickford's consistent higher order beam theory // Mech. Res. Commun., 1985, vol. 12, pp. 1–9.
6. *Kostin G.V., Saurin V.V.* Integro-differential approach to solving problems of linear elasticity theory // Dokl. Phys., 2005, vol. 50, no. 10, pp. 535–538.
7. *Kostin G.V., Saurin V.V.* Modelling and analysis of the natural vibrations of a prismatic elastic beam based on a projection approach // JAMM, 2011, vol. 75, no. 6, pp. 700–710.
8. *Kostin G.V., Saurin V.V.* Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.
9. *Kostin G.* Projection approach to spectral analysis of thin axially symmetric elastic solids. // Recent Trends in Wave Mechanics and Vibrations. WMVC 2022. Mechanisms and Machine Science, vol. 125 / Ed. by *Dimitrovová Z. et al.* Springer, 2023. pp. 285–295.
10. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: Charman and Hall/CRC, 2005.
11. *Gavrikov A.A., Kostin G.V.* Optimization of longitudinal motions of an elastic rod with the help of periodically distributed piezoelectric forces // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2023, vol. 62, no. 5, pp. 788–804. (in Press)
12. *Bruant I., Coffignal G., Lene F., Verge M.* A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures // J. Sound&Vibr., 2001, vol. 243, no. 5, pp. 861–882.
13. *Gupta V., Sharma M., Thakur N.* Optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure: A technical review // J. Intell. Mater. Syst.&Struct., 2010, vol. 21, no. 12, pp. 1227–1243.
14. *Kostin G., Gavrikov A.* Controllability and optimal control design for an elastic rod actuated by piezoelements // IFAC-PapersOnLine, 2022, vol. 55, no. 16, pp. 350–355.
15. *Gavrikov A., Kostin G.* Optimal LQR control for longitudinal vibrations of an elastic rod actuated by distributed and boundary inputs // Recent Trends in Wave Mechanics and Vibrations. WMVC 2022. Mechanisms and Machine Science, vol. 125 / Ed. by *Dimitrovová Z. et al.* Springer, 2023. pp. 285–295.
16. *Kucuk I., Sadek I., Yilmaz Y.* Optimal control of a distributed parameter system with applications to beam vibrations using piezoelectric actuators // J. Franklin Inst., 2014, vol. 351, pp. 656–666.
17. *Mead D.J., Markus S.* The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions // J. Sound&Vibr., 1969, vol. 10, no. 2, pp. 163–175.
18. *Sayyad A.S., Ghugal Y.M.* Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature // Compos. Struct., 2017, vol. 171, pp. 486–504.

УДК 517.956.223

*Светлой памяти Л.Д. Акуленко***ОГРАНИЧЕННЫЕ И ГЛАДКИЕ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ
В СИСТЕМАХ, ЗАДАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ
И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ**© 2023 г. Т. Н. Бобылева^{1,*}, И. М. Гусев^{2,**}, А. С. Шамаев^{3,***}¹*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
Москва, Россия*²*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*³*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

*e-mail: tatyana2211@outlook.com

**e-mail: gusevilya94@yandex.ru

***e-mail: sham@rambler.ru

Поступила в редакцию 29.05.2023 г.

После доработки 02.08.2023 г.

Принята к публикации 10.08.2023 г.

В работе рассматривается задача о гашении колебаний мембраны и пластины с помощью сил, распределенных по всей площади мембраны и пластины. Предлагаемый метод позволяет рассматривать ограничения не только на абсолютную величину управления, но и на абсолютную величину производных от функций, задающих управление. Приводятся достаточные условия на начальные условия, при которых задача приведения системы в покой за конечное время разрешима, оценивается время приведения в покой.

Ключевые слова: управление, колебательная система, распределенные и сосредоточенные силы, малые управляющие силы, интегро-дифференциальные системы

DOI: 10.31857/S0032823523050053, **EDN:** QHPNCH

1. Введение. Вопрос о гашении колебаний упругих систем с помощью граничных и распределенных сил является одним из классических вопросов теории управления. Исследованиям в этой области посвящено очень большое количество работ как российских, так и зарубежных авторов. Впервые систематически такие задачи рассматривались в [1], подробный и довольно полный обзор приведен в [2]. В этих работах рассматриваются в основном задачи граничного управления. В работе [3] рассматривается вопрос о приведении различных систем, заданных дифференциальными уравнениями, в состояние покоя за конечное время с помощью распределенных малых по абсолютной величине сил. В этой работе с помощью разложений в ряд Фурье по собственным функциям задача сводится к счетной системе простейших колебательных звеньев, для каждого из которых строится синтез оптимального по быстродействию управления. Задача о гашении колебаний квадратной пластины с помощью граничного управления была рассмотрена в [4]. В этой работе задача управления также сводится к счетной системе связанных между собой простейших колебательных звеньев.

Аналогичные вопросы рассматривались и для интегро-дифференциальных уравнений с интегральными слагаемыми типа свертки. В работах [5–10] показано, что для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений задача о гашении колебаний может и не иметь решения, но при этом с помощью сколь угодно малых возмущений в ядрах свертки для нелокальных членов система может быть приведена к вполне управляемой. Это означает, что для указанных интегро-дифференциальных систем свойство полной управляемости не является устойчивым.

В настоящей работе предложен метод, с помощью которого можно показать, что колебательные системы, соответствующие мембране и пластине, могут быть приведены в состояние покоя распределенным управлением, у которого ограничена не только абсолютная величина управляющей силы, но и абсолютная величина ее производных от функции, которая задает эту силу. Мы полагаем, что такое же свойство имеет место и для систем с граничным управлением, однако этот результат еще не опубликован. Системы же с интегро-дифференциальными операторами, как правило, не являются вполне управляемыми с помощью граничных сил, на что впервые было указано в работе [10].

2. Управление колебаниями маятника с помощью внешней силы. Рассмотрим задачу управления

$$\ddot{u} + \omega^2 u = f(t), \quad (2.1)$$

$|f(t)| \leq \varepsilon$, $f(t)$ – внешняя управляющая сила, $\varepsilon = \text{const} > 0$, с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1 \quad (2.2)$$

Задача: Найти $T > 0$ и $f(t)$, $|f(t)| \leq \varepsilon$ такие, чтобы $u(T) = \dot{u}(T) = 0$ и $f(t) \equiv 0$ для всех $t \geq T$.

Решение этой задачи даже в случае поиска оптимального по быстродействию решения хорошо известно [15]. Управляющая функция содержит конечное число переключений. В настоящей работе мы получим неоптимальное по быстродействию, но гладкое и явное выражение для управляющей функции.

Теорема 1. Существует решение поставленной задачи управления, именно, существует $T > 0$, такое что функция $f(t, T) = C_1(T) \sin(\omega t) + C_2(T) \cos(\omega t)$ удовлетворяет неравенству $|f(t, T)| \leq \varepsilon$, $u(t) \equiv 0$ при $t \geq T$. Кроме того, справедлива оценка

$$|f(t)| \leq \frac{2}{T} [(1 + \omega)|u_0| + 2|u_1|] + \frac{1}{2T^2} \left(|u_0| + \frac{|u_1|}{\omega} \right)$$

Доказательство: На основании хорошо известных формул решения линейного неоднородного уравнения (2.1) условия гашения колебаний принимают вид

$$0 = u(T) = u_0 \cos \omega T - \frac{u_1}{\omega} \sin \omega T + \int_0^T \frac{\sin \omega(T - \tau)}{\omega} \{C_1(T) \sin(\omega \tau) + C_2(T) \cos(\omega \tau)\} d\tau \quad (2.3)$$

$$0 = \dot{u}(T) = u_0 \omega \sin \omega T + u_1 \cos \omega T + \int_0^T \cos \omega(T - \tau) \{C_1(T) \sin(\omega \tau) + C_2(T) \cos(\omega \tau)\} d\tau \quad (2.4)$$

Будем искать управляющую силу $f(t)$ в виде

$$f(\tau, T) = C_1(T) \sin(\omega \tau) + C_2(T) \cos(\omega \tau),$$

постоянные $T, C_1(T), C_2(T)$ подлежат определению.

Введем обозначения

$$\bar{U} = \begin{vmatrix} -\omega u_0 \cos \omega t + u_1 \sin \omega t \\ \omega u_0 \sin \omega t - u_1 \cos \omega t \end{vmatrix} - \text{вектор размерности 2,}$$

$\bar{C} = \begin{pmatrix} C_1(T) \\ C_2(T) \end{pmatrix}$ – вектор размерности 2,

$$A = \begin{pmatrix} \int_0^T \sin \omega(T - \tau) \sin(\omega\tau) d\tau & \int_0^T \cos \omega(T - \tau) \sin(\omega\tau) d\tau \\ \int_0^T \cos \omega(T - \tau) \sin(\omega\tau) d\tau & \int_0^T \cos \omega(T - \tau) \cos(\omega\tau) d\tau \end{pmatrix} \text{ – матрица размерности } 2 \times 2.$$

Тогда уравнение для определения постоянных $T, C_1(T), C_2(T)$ можно записать в виде

$$A\bar{C} = \bar{U} \quad (2.5)$$

Используя хорошо известные тригонометрические формулы, матрицу A можно записать в виде

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{T}{2} \cos \omega T + \frac{\sin \omega T}{2\omega} & \frac{T}{2} \sin \omega T \\ \frac{T}{2} \sin \omega T & \frac{T}{2} \cos \omega T + \frac{\sin \omega T}{2\omega} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\det A = \frac{\sin^2 \omega T}{4\omega^2} - \frac{T^2}{4}, \quad (2.6)$$

откуда

$$|\det A| \geq \frac{T^2}{4} - \frac{1}{4\omega^2}, \quad (2.7)$$

и, следовательно, для достаточно больших T система (2.5) разрешима.

Найдем теперь постоянные $C_1(T), C_2(T)$, пользуясь правилом Крамера. Для этого обозначим $M_1(T)$ и $M_2(T)$ определители матриц, полученных заменой в матрице A первого и второго столбцов на вектор $\bar{U}$ соответственно. Тогда

$$C_1(T) = \frac{M_1(T)}{\det A}, \quad C_2(T) = \frac{M_2(T)}{\det A}$$

Вычисления показывают, что

$$C_1(T) = (\det A)^{-1} \left\{ \frac{T}{2} [\omega u_0 - 2u_1 \sin(2\omega T)] + \frac{u_1}{2\omega} \sin^2(\omega T) - \frac{u_0}{2} \sin(2\omega T) \right\} \quad (2.8)$$

$$C_2(T) = (\det A)^{-1} \left\{ -\frac{T}{2} u_1 \cos(2\omega T) - \frac{u_0}{2} \sin^2(\omega T) + \frac{u_1}{2\omega} \sin(2\omega T) \right\} \quad (2.9)$$

Отсюда при достаточно больших T очевидно вытекают неравенства

$$|C_1(T)|, |C_2(T)| \leq (\det A)^{-1} \left\{ \frac{T}{2} [(1 + \omega)|u_0| + 2|u_1|] + \frac{1}{2} \left(|u_0| + \frac{|u_1|}{\omega} \right) \right\} \quad (2.10)$$

С учетом формулы (2.6) можно утверждать, что

$$|f(t)| \leq \frac{2}{T} [(1 + \omega)|u_0| + 2|u_1|] + \frac{1}{2T^2} \left(|u_0| + \frac{|u_1|}{\omega} \right),$$

поэтому для больших $T > 0$ выполнено требуемое неравенство $|f(t)| \leq \varepsilon$.

Следствие. Время остановки колебаний $T \sim C\varepsilon^{-1}$, для малых $\varepsilon > 0$, где $C = \text{const}$ не зависит от $\varepsilon > 0$.

3. Задача остановки колебаний мембраны и пластины с помощью малой и гладкой внешней силы. Рассмотрим теперь задачу об оптимальном управлении колебательными процессами, которые задаются системами уравнений с частными производными с краевыми условиями в области Ω , которая может иметь размерность $d = 2, 3$. Границу области будем считать гладкой. Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\ddot{u} = \Delta u + f(t, x) \text{ в } \Omega \quad (3.1)$$

$$\ddot{u} + \Delta^2 u = f(t, x) \text{ в } \Omega \quad (3.2)$$

Функция $f(t, x)$ является управляющим воздействием, приводящим системы в покой и которую необходимо найти как гладкую функцию. Краевые условия: $u|_{\partial\Omega} = 0$ для уравнения (3.1) и $u|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta u|_{\partial\Omega} = 0$ для уравнения (3.2), начальные условия для уравнений (3.1)–(3.2) имеют вид: $u|_{t=0} = u_0(x)$, $\dot{u}|_{t=0} = u_1(x)$.

Для случая уравнения колебания пластины мы для простоты формулировки ограничиваемся начальным условием типа шарнирного закрепления, все полученные результаты будут верны и для случая общих граничных условий, удовлетворяющих условию Шапиро–Лопатинского, поскольку приводимая ниже оценка для модуля собственных функций справедлива в самом общем случае.

Ниже будет исследован вопрос о том, при каких начальных условиях u_0, u_1 существуют гладкая функция $f(t, x)$ по абсолютной величине меньше $\varepsilon > 0$ и постоянная $T > 0$, такие что $u \equiv 0$ при $t > T$.

4. Вспомогательные математические утверждения. *Определение 1.* Будем обозначать

$$f \in H_D^k(\Omega), \text{ если } f \in H^k(\Omega) \text{ и } f|_{\partial\Omega} = \dots = \Delta^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} f|_{\partial\Omega} = 0.$$

Теорема 2. Если $f \in H_D^k(\Omega)$, то $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 |\lambda_n|^k < \infty$, где f_n – коэффициенты ряда Фурье при разложении по собственным функциям задачи Дирихле для уравнения Лапласа, λ_n – собственные значения $\Delta u_n = \lambda_n u_n$ в Ω [12].

Определение 2. Будем обозначать $f \in A_p$, если $|c_n| \leq \frac{C}{n^p}$, c_n – коэффициенты в разложении в ряд Фурье функции f по собственным функциям соответствующих задач на собственные значения и собственные функции.

Утверждение 1. Связь между параметрами p и k в определении пространств A_p и $H_D^k(\Omega)$ имеет вид: $p = k/2$ (для оператора Лапласа).

Утверждение 1 является следствием асимптотики Куранта–Вейля, $\lambda_n \sim n^{\frac{2m}{d}}$, $2m$ – порядок оператора, d – размерность пространства.

Теорема 3. Пусть $\{\Phi_k(x)\}$ – собственные функции задачи Дирихле для уравнения Лапласа, $\|\Phi_k(x)\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Тогда $\max_{\Omega} |\Phi_k(x)| \leq \omega_k^{\frac{d-1}{2}} \ln \omega_k$, $\omega_k^2 \equiv \lambda_k$ [13].

Теорема 4. Пусть $\{\Phi_k(x)\}$ – семейство собственных функций оператора L порядка $2m$, $\omega_k^{2m} = \lambda_k$, $\|\Phi_k(x)\|_{L_2(\Omega)} = 1$, с краевыми условиями, удовлетворяющими общим граничным условиям Шапиро–Лопатинского. Тогда $\max_{\Omega} |\Phi_k(x)| \leq \omega_k^{\frac{d}{2}} [14]$.

Таблица 1.

	Произвольная мембрана	Квадратная мембрана	Произвольная пластина	Квадратная пластина
Гашение начального отклонения	$p > 1\frac{3}{4}$	$p > 1\frac{1}{2}$	$p > 3$	$p > 2$
Гашение начальной скорости	$p > 1\frac{1}{4}$	$p > 1$	$p > 2$	$p > 1$

Теорема 5. Пусть $f(z)$ — целая функция, $\{\mu_k\}$ — совокупность ее нулей. Пусть $\Pi(\{\mu_k\}) \equiv \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2r} \int_0^r \frac{n(s)}{s} ds$, где $n(s)$ — количество нулей в круге радиуса s . Если $\Pi(\{\mu_k\}) = \infty$, то по некоторому направлению $f(z)$ растет быстрее любой экспоненты [17].

5. Достаточные условия разрешимости задач управления. **Теорема 6.** В таблице, приведенной ниже, даны условия для начальных функций $u_0(x)$, $u_1(x)$, при которых колебания мембраны и пластины можно погасить (табл. 1).

Числа в данной таблице указывают на принадлежности начальных функций классу A_p , которые для указанных значений p обеспечивают возможность приведения мембраны и пластинки в состояние покоя (достаточные условия). С помощью Утверждения 1 можно переформулировать эти достаточные условия в терминах принадлежности пространствам Соболева с дополнительными граничными условиями.

Доказательство. Введем собственные значения ω_k^2 и собственные функции Φ_k задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_k + \omega_k^2 \Phi_k &= 0 \text{ в } \Omega \\ \|\Phi_k\|_{L_2(\Omega)} &= 1 \end{aligned}$$

Обозначим $m_k = \sup_{x \in \Omega} |\Phi_k(x)|$. Будем искать решения $f(t, x)$ задач управления (3.1)–(3.2) в виде разложения $f(t, x)$, а также решения уравнений $u(t, x)$ в ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\Phi_k\}$.

Пусть

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \Phi_k(x), & u(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \Phi_k(x) \\ u_0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_0^k \Phi_k(x), & u_1(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_1^k \Phi_k(x) \end{aligned}$$

Подставляя данные разложения в уравнения (3.1)–(3.2), а также в начальные условия для этих уравнений, получим системы из колебательных звеньев, которые связаны только через ограничения на управляющие воздействия, которые в сумме по абсолютной величине не должны превосходить $\varepsilon > 0$.

Управление каждым маятником по отдельности было уже построено в явном виде (Теорема 1), нужно только выдержать суммарное условие на абсолютную величину управления всех колебательных звеньев. Для волнового уравнения эти условия принимают вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T_k} (1 + |\omega_k|) (|u_0^k| + 2|u_1^k|) m_k \leq \varepsilon \quad (5.1)$$

Пусть $\{\varepsilon_k\}$ — последовательности положительных чисел, таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \varepsilon$.

Условие (5.1) будет выполнено, если

$$(1 + |\omega_k|) (|u_0^k| + 2|u_1^k|) m_k \leq \varepsilon_k$$

в силу ранее полученных оценок (член порядка T^2 в знаменателе был отброшен, в силу его малости при больших T). Тогда

$$T_k \geq \frac{2(1 + |\omega_k|) (|u_0^k| + 2|u_1^k|) m_k}{\varepsilon_k} \quad (5.2)$$

Нам необходимо, чтобы время успокоения каждого маятника в системе было ограничено числом, не зависящим от номера колебательного звена (маятника). Нетрудно видеть, что в (5.2) независимость от k в оценке T_k можно обеспечить за счет достаточно быстрого убывания коэффициентов в разложении в ряд Фурье начальных условий. Это, в свою очередь, обеспечивается гладкостью $u_0(x), u_1(x)$ и некоторыми дополнительными краевыми условиями для этих функций на $\partial\Omega$.

Величина m_k оценивалась в указанной выше работе (Теоремы 3, 4), согласно которой для задачи Дирихле для уравнения Лапласа имеет место неравенство $m_k \leq C \omega_k^{\frac{d-1}{2}} \ln \omega_k$, где d — размерность пространства, постоянная $C > 0$ не зависит от k .

Пользуясь классическими асимптотическими формулами для величины собственных значений задачи Дирихле, имеем:

$$\omega_k \sim k^{\frac{1}{d}}, \quad m_k \leq C k^{\frac{d-1}{2d}} \ln k$$

Отсюда видно, что для существования решения задачи (3.1) достаточно

$$|u_0^k| \sim k^{\frac{2d}{1-5d}}, \quad |u_1^k| \sim k^{\frac{2d}{1-3d}}$$

Для времени остановки колебаний в задаче (3.1) имеет место оценка $C\varepsilon^{-1}$.

Согласно Утверждению 1 определенные скорости убывания коэффициентов Фурье начальных условий отвечают принадлежности к пространствам $H^s(\Omega)$ с некоторыми дополнительными краевыми условиями. Таким образом, можно переформулировать достаточные условия возможности гашения колебаний на начальные функции в терминах их гладкости по Соболеву и наличия некоторых дополнительных граничных условий на $\partial\Omega$. Для случая пластины доказательство проводится аналогично, только вместо Теоремы 2 следует применить Теорему 3.

Замечание. Если в исходной постановке задачи ввести ограничения на абсолютную величину конечного числа производных по времени от управляющей функции, то, очевидно, для разрешимости задачи управления нужно просто ужесточить условия на начальные значения смещения и скорости в терминах пространств A_p . Это можно сделать простым расчетом.

6. Уравнение Гуртина—Пипкина. Рассмотрим теперь для сравнения с приведенными результатами интегро-дифференциальное уравнение Гуртина—Пипкина и аналогичную задачу управления для него, имеющую следующий вид:

$$\dot{u} = \int_0^t K(t - \tau) \Delta u(x, \tau) d\tau + f(t, x) \text{ в } \Omega$$

$$|f| \leq \varepsilon, \quad K(t - \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\mu_k(t-\tau)}; \quad \mu_k \geq 0, \quad \mu_k \rightarrow \infty$$

$$u(0) = u_0, \quad u \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \geq T, \quad f - \text{управление}$$

Интегро-дифференциальное уравнение Гуртина–Пипкина является интересным объектом исследований, поскольку в зависимости от свойств ядра свертки имеет качественные свойства как параболических, так и гиперболических уравнений, см., например [10]. Приведем следующее утверждение о разрешимости данной задачи в целях сравнения с доказанными выше результатами для волнового уравнения и уравнения колебаний пластины.

Теорема 7. Если ряд для ядра свертки $K(t - \tau)$ конечен, то задача управления разрешима. Если ряд для $K(t - \tau)$ содержит бесконечное число членов, то μ_k можно выбрать так, что задача управления не будет иметь решения. Именно, выберем μ_k так, что $\Pi(\{\mu_k\}) = \infty$, тогда система не будет вполне управляемой.

Доказательство приведено в [17]. Оно основано на теореме 4 из разд. 4.

7. Числовой пример. Пусть начальные условия для волнового уравнения

$$u_1^0 = 1, \quad u_2^0 = \frac{1}{2}, \quad u_3^0 = \frac{1}{4}, \quad u_3^0 = \dots = u_k^0 = \dots = 0, \quad u_k' = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда время гашения трех мод колебаний в соответствии с методом Ф.Л. Черноусько

$$T^* \leq \frac{5.08}{\varepsilon} \text{ для квадратной мембраны. Согласно методу настоящей работы } T^* \leq \frac{10.1}{\varepsilon}.$$

Увеличение времени быстрогодействия связано, конечно, с тем, что в работе [3] для каждого колебательного звена применяется метод оптимального управления, а в нашем случае управление приводит звено в покой, но оптимальным по быстрдействию не является. При этом метод настоящей работы может быть без труда распространен и на случай, когда ограниченной по абсолютной величине является и производная от функции управления, только время приведения в покой будет большим, чем случай без ограничения на производную, и потребуются наложить некоторые дополнительные условия на гладкость начальных функций, а также дополнительные краевые условия для этих функций.

Заключение. В работе предложен метод исследования задач остановки колебаний мембраны и пластины, позволяющий установить важное качественное свойство этих задач. Именно, если повышать требования к гладкости управляющей функции с ограничением на абсолютную величину производных от нее, то задача приведения в полный покой будет разрешима, нужно только повысить требования к гладкости в смысле Соболева для начальных функций и потребовать выполнения некоторых дополнительных краевых условий для начальных функций на границе области. Можно назвать этот эффект свойством “повышения гладкости”. Есть основания полагать, что для задач граничного управления эффект “повышения гладкости” также имеет место. Статья с доказательством этого утверждения еще не вышла, сейчас готовится к печати.

Для сравнения нами приведен пример задачи об управлении интегро-дифференциального уравнения Гуртина–Пипкина с помощью распределенной ограниченной силы и некоторые ранее полученные результаты, относящиеся к этой задаче. Здесь ситуация иная: такая задача с ограничением только на абсолютную величину управляющей функции может быть неразрешимой, свойство полной управляемости не является устойчивым по отношению к малым возмущениям ядра свертки нелокального члена в уравнении.

Метод, предлагаемый в данной работе, применим и к системам с диссипацией механической энергии (трение о внешнюю среду, трение Кельвина–Фойгхта), здесь вполне вероятно, что эффект “повышения гладкости” также имеет место, доказательство этого в стадии оформления.

Благодарности. Авторы посвящают эту работу памяти профессора Л.Д. Акуленко, работы которого в области теории управления системами с распределенными параметрами существенно повлияли на работы коллектива отдела механики управляемых систем ИПМех РАН в данной области.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00151).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
2. Lions J.L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30. № 1. P. 1–68.
<https://doi.org/10.1137/1030001>
3. Черноусько Ф.Л. Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1992. Т. 56. № 5. С. 810–826.
4. Romanov I., Shamaev A. Exact controllability of the distributed system, governed by string equation with memory // J. Dyn.&Control Syst. 2013. V. 19. № 4. P. 611–623.
5. Romanov I., Shamaev A. Noncontrollability to rest of the two-dimensional distributed system governed by the integrodifferential equation // J. Optimiz. Theory&Appl. 2016. V. 170. P. 772–782.
6. Romanov I., Shamaev A. Some problems of distributed and boundary control for systems with integral aftereffect // J. Math. Sci. 2018. V. 234. № 4. P. 470–484.
7. Романов И.В. Точное управление колебаниями двумерной мембраны ограниченным силовым воздействием, приложенным к границе // Докл. РАН. Теория управления. 2016. Т. 170. № 1. С. 22–25.
8. Romanov I., Shamaev A. Suppression of oscillations of thin plate by bounded control acting to the boundary // J. Comput.&Syst. Sci. Int. 2020. V. 59. № 3. P. 371–380.
<https://doi.org/10.1134/S1064230720030144>
9. Romanov I., Shamaev A. Exact bounded boundary controllability to rest for the two-dimensional wave equation // J. Optimiz. Theory&Appl. 2021. V. 188. № 3. P. 925–938.
10. Ivanov S., Pandolfi L. Heat equation with memory: lack of controllability to rest // J. Math. Anal.&Appl. 2009.
11. Акуленко Л.Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // ПММ. 2000. Т. 45. № 6. С. 1095–1103.
12. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
13. Эйдус Д.М. Некоторые неравенства для собственных функций // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107. № 6. С. 796–798.
14. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. О некоторых оценках собственных функций эллиптического оператора // Вестн. МГУ, Сер. 1. Мат. и мех. 1985. № 4. С. 32–34.
15. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
16. Левин Б.Я. Распределение нулей целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.
17. Романов И.В. Исследование управляемости для некоторых систем с распределенными параметрами, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 2. С. 58–61.

Limited and Smooth Controls of Oscillations in Systems Given by Differential and Integro-Differential Equations

T. N. Bobyleva^{a,#}, I. M. Gusev^{b,##}, and A. S. Shamaev^{c,###}

^a*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

^b*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^c*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: tatyana2211@outlook.com*

^{##}*e-mail: gusevilya94@yandex.ru*

^{###}*e-mail: sham@rambler.ru*

The paper considers the problem of damping vibrations of a membrane and a plate with the help of forces distributed over their entire area. The proposed method allows us to consider restrictions not only on the absolute value of the control, but also on the absolute value of the derivatives of the functions that specify the control. Sufficient conditions are given for the initial conditions under which the problem of bringing the system to rest in a finite time is solvable, and the time of bringing to rest is estimated.

Keywords: control, oscillatory system, distributed and concentrated forces, small control forces, integro-differential systems

REFERENCES

1. Butkovsky A.G. Control Methods of the Systems with Distributed Parameters. Moscow: Nauka, 1965. 474 p. (in Russian)
2. Lions J.L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev., 1988, vol. 30, no. 1, pp. 1–68.
3. Chernous'ko F.L. Bounded controls in distributed-parameter systems // JAMM, 1992, vol. 56, no. 3, pp. 707–723.
4. Romanov I., Shamaev A. Exact controllability of the distributed system, governed by string equation with memory // J. Dyn.&Control Syst., 2013, vol. 19, no. 4, pp. 611–623.
5. Romanov I., Shamaev A. Noncontrollability to rest of the two-dimensional distributed system governed by the integro-differential equation // J. Optimiz. Theory&Appl., 2016, vol. 170, pp. 772–782.
6. Romanov I., Shamaev A. Some problems of distributed and boundary control for systems with integral aftereffect // J. Math. Sci., 2018, vol. 234, no. 4, pp. 470–484.
7. Romanov I.V., Shamaev A.S. Exact bounded boundary controllability of vibrations of a two-dimensional membrane // Dokl. Math., 2016, vol. 94, no. 2, pp. 607–610.
8. Romanov I., Shamaev A. Suppression of oscillations of thin plate by bounded control acting to the boundary // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2020, vol. 59, no. 3, pp. 371–380.
9. Romanov I., Shamaev A. Exact bounded boundary controllability to rest for the two-dimensional wave equation // J. Optimiz. Theory&Appl., 2021, vol. 188, no. 3, pp. 925–938.
10. Ivanov S., Pandolfi L. Heat equation with memory: lack of controllability to rest // J. Math. Anal.&Appl., 2009, vol. 355, no. 1, pp. 1–11.
11. Akulenko L.D. Bringing an elastic system to a given state by means of a force boundary impact // JAMM, 1981, vol. 45, iss. 6, pp. 1095–1103.
12. Mikhailov V.P. Partial Differential Equations. Moscow: Mir, 1978. 396 p.
13. Eidus D.M. Some inequalities for eigenfunctions // DAN USSR, 1956, vol. 107, no. 6, pp. 796–798.
14. Kondratiev V.A., Egorov Yu.V. Some estimates for eigenfunctions of an elliptic operator // Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 1985, no. 4, pp. 32–34.
15. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.: Wiley&Sons, 1962. 360 p.
16. Levin B. Ya. Distribution of Zeros of Entire Functions. N.Y.: Amer. Math. Soc., Providence, 1980. 523 p.
17. Romanov I.V. Investigation of controllability for some dynamic systems with distributed parameters described by integro-differential equations // J. Comp. Sys. Sci. Int., 2022, vol. 61, no. 2, pp. 191–194.

УДК 517.977.58

**ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВОРОНКАХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ, ИЗМЕНЯЕМЫХ
НА НЕСКОЛЬКИХ МАЛЫХ ПРОМЕЖУТКАХ ВРЕМЕНИ****© 2023 г. В. Н. Ушаков^{1,*}, А. А. Ершов^{1,**}, А. В. Ушаков^{1,***}**¹*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия***e-mail: ushak@imm.uran.ru****e-mail: ale10919@yandex.ru*****e-mail: aushakov.pk@gmail.com*

Поступила в редакцию 14.11.2022 г.

После доработки 19.06.2023 г.

Принята к публикации 15.07.2023 г.

Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени, динамика которой претерпевает существенные изменения на нескольких малых участках из заданного промежутка времени. Изучается степень изменения множеств достижимости и интегральных воронок рассматриваемой системы при ее варьировании на этих участках. Соответствующие изменения оцениваются в хаусдорфовой метрике.

Ключевые слова: управляемая система, дифференциальное включение, множество достижимости, интегральная воронка, переменная структура, вариация системы, хаусдорфово расстояние

DOI: 10.31857/S00032823523050156, **EDN:** UZKZIZ

1. Введение. Статья посвящена одной из задач теории управления [1, 2] – задаче управления интегральными воронками управляемых систем, зависящих от параметра. Рассматриваемую задачу можно рассматривать как частный случай задачи управления множеством достижимости динамической системы с изменяющейся матрицей (посредством управления аппроксимирующим эллипсоидом), которая была рассмотрена в статье [3]. Управляемые системы рассматриваются на конечном промежутке времени и конечномерном евклидовом пространстве. Ряд задач управления (в общей постановке) и, в частности, задачи о сближении управляемых систем с целевыми множествами (с фиксированным моментом окончания) естественным образом связаны с задачами выделения интегральных воронок и множеств разрешимости управляемых систем в пространстве позиций систем. Эти задачи дуальны в том смысле, что множество разрешимости (множество управляемости) исходной управляемой системы есть интегральная воронка этой системы, записанной в так называемом обратном времени. Так же, как и в теории управления (в задачах управления без помех), в теории дифференциальных игр [2, 4] многие задачи могут быть сформулированы как задачи о сближении конфликтно управляемой системы с целевым множеством. В некоторых из них при их решении возникает необходимость выделения множеств разрешимости (т.е. необходимость аналитического описания множеств). Однако это описание возможно лишь в достаточно простых задачах. В связи с этим актуальны вопросы, относящиеся к разработке алгоритмов приближенного конструирования этих множеств. Опыт решения задач подсказывает, что один из эффективных алгоритмов приближен-

ного конструирования множеств разрешимости в задачах о сближении должен включать в себя переход от исходной управляемой системы к ее представлению в терминах обратного времени. Это дает возможность записать аппроксимирующие конструкции (т.е. аппроксимации множеств разрешимости) исключительно на языке множеств достижимости управляемой системы, записанной в обратном времени (см., напр., [5–7]). В результате множество достижимости (как понятие) становится ключевым компонентом при приближенном конструировании множеств разрешимости задач о сближении. Однако привлечение множеств достижимости в разрешающие конструкции еще недостаточно для окончательного решения задачи о сближении, поскольку они не могут быть (точно) вычислены. В связи с этим возникают принципиальные вопросы, относящиеся к разработке методов и алгоритмов приближенного вычисления множеств достижимости. Они многочисленны и некоторые из них сопрягаются с такими областями математики, как выпуклый анализ, негладкий анализ и вычислительная геометрия. Очевидно, что нет универсальных методов и алгоритмов конструирования приближенных решений задач управления: они должны отражать специфику отдельных классов управляемых систем и даже отдельных конкретных систем. Укажем некоторые исследования, которые посвящены изучению упомянутых вопросов. Так, созданы содержательная теория и алгоритмы приближенного вычисления и оценок множеств достижимости и интегральных воронок [8–12], основанные на технологии эллипсоидальных оценок [13, 14]. Использование этой технологии оказалось весьма эффективным при оценке множеств достижимости и интегральных воронок линейных управляемых систем. Эта технология получила распространение на некоторые билинейные и нелинейные управляемые системы [15, 16]. При рассмотрении нелинейных многомерных управляемых систем и дифференциальных включений перспективны, на наш взгляд, пиксельные методы приближенного вычисления множеств достижимости, а также методы, основанные на аппроксимации множеств достижимости управляемых систем полиэдрами [17–19]. Применение пиксельных методов (см., напр., [20]) в обсуждаемых здесь задачах очевидным образом удобно, поскольку просты пиксельные представления множеств и реализации теоретико-множественных операций (объединения, пересечения и т.д.). Заметим, что пиксельная дискретизация фазового пространства управляемой системы должна быть дополнена той или иной дискретизацией вектограмм скоростей системы или дискретизацией вектограмм скоростей соответствующего дифференциального включения. К этой тематике дискретизации множеств достижимости относятся весьма важные работы [21, 22].

Пример в разд. 5 подтверждает, что тематика настоящей статьи близка к работам [23–27], в которых рассматриваются управляемые системы с параметром, а также колебательные управляемые системы.

2. Множества достижимости и интегральные воронки управляемых систем с переменной структурой. На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$ заданы управляемые системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u); \quad u \in P^f \quad (2.1)$$

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x, u); \quad u \in P^g, \quad (2.2)$$

здесь $x \in \mathbb{R}^m$ – фазовый вектор системы, $P^f \in \text{comp}(\mathbb{R}^r)$, $P^g \in \text{comp}(\mathbb{R}^r)$ – ограничения на управления u ; $\text{comp}(\mathbb{R}^k)$, $k \in \mathbb{N}$ – пространство компактов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ с хаусдорфовой метрикой $d(X_*, X^*) = \max(h(X_*, X^*), h(X^*, X_*))$, где $h(X_*, X^*) = \max_{x_* \in X_*} \rho(x_*, X^*)$, $\rho(x_*, X^*) = \min_{x^* \in X^*} \|x_* - x^*\|$, $\|h\|$ – норма вектора h в $\mathbb{R}^k$.

Предполагается, что системы (2.1) и (2.2) стеснены следующими условиями.

А. Вектор-функции $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$ определены и непрерывны на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P^f$ и $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P^g$ соответственно и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ найдутся числа L^f и L^g из $(0, \infty)$, функции $\omega^f(\delta)$ и $\omega^g(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$ ($\omega^f(\delta) \downarrow 0$ и $\omega^g(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} \|f(t, x_*, u) - f(t, x^*, u)\| &\leq L^f \|x_* - x^*\| \\ \|g(t, x_*, u) - g(t, x^*, u)\| &\leq L^g \|x_* - x^*\|, \end{aligned} \quad (2.3)$$

(t, x_*, u) и (t, x^*, u) из $D \times P^f$ или $D \times P^g$ соответственно,

$$\begin{aligned} \|f(t_*, x_*, u) - f(t^*, x^*, u)\| &\leq \omega^f(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|) \\ \|g(t_*, x_*, u) - g(t^*, x^*, u)\| &\leq \omega^g(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|), \end{aligned} \quad (2.4)$$

(t_*, x_*) и (t^*, x^*) из D , $u \in P^f$ или $u \in P^g$ соответственно.

Б. Найдутся такие γ^f и γ^g из $(0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leq \gamma^f(1 + \|x\|), \quad \|g(t, x, u)\| \leq \gamma^g(1 + \|x\|),$$

$(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, $u \in P^f$ или $u \in P^g$ соответственно.

Введем многозначные отображения

$$(t, x) \mapsto F(t, x) = \text{co } F_*(t, x) \in \text{comp}(\mathbb{R}^m), \quad (t, x) \mapsto G(t, x) = \text{co } G_*(t, x) \in \text{comp}(\mathbb{R}^m),$$

здесь $F_*(t, x) = \{f(t, x, u) : u \in P^f\}$, $G_*(t, x) = \{g(t, x, u) : u \in P^g\}$, $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$.

Отображения $(t, x) \mapsto F(t, x)$ и $(t, x) \mapsto G(t, x)$ удовлетворяют следующим условиям, индуцируемым условиями А и Б.

А*. Для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ числа L^f и L^g из $(0, \infty)$, $\omega^f(\delta)$ и $\omega^g(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$ из условий А и Б таковы, что

$$d(F(t, x_*), F(t, x^*)) \leq L^f \|x_* - x^*\|, \quad d(G(t, x_*), G(t, x^*)) \leq L^g \|x_* - x^*\|, \quad (2.5)$$

(t_*, x_*) и (t^*, x^*) из D ;

$$d(F(t_*, x_*), F(t^*, x^*)) \leq \omega^f(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|),$$

$$d(G(t_*, x_*), G(t^*, x^*)) \leq \omega^g(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|),$$

(t_*, x_*) и (t^*, x^*) из D .

Б*. Числа γ^f и γ^g из условия Б удовлетворяют неравенствам

$$h(F(t, x), \{0\}) \leq \gamma^f(1 + \|x\|), \quad h(G(t, x), \{0\}) \leq \gamma^g(1 + \|x\|),$$

$(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$; здесь 0 — нуль в $\mathbb{R}^m$.

Предваряя формулировки задач управления системами (2.1) и (2.2), введем дифференциальные включения (д.в.)

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x); \quad t \in [t_0, \vartheta] \quad (2.6)$$

$$\frac{dx}{dt} \in G(t, x); \quad t \in [t_0, \vartheta] \quad (2.7)$$

и некоторые обозначения.

Пусть t_* и t^* из $[t_0, \vartheta]$ и $t_* \leq t^*$, $x_* \in \mathbb{R}^m$, $X_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Полагаем $X(t^*, t_*, x_*)$ ($Y(t^*, t_*, x_*)$) — множество достижимости д.в. (2.6) ((2.7)) в момент t^* с начальной точкой $x(t_*) = x_*$;

$X(t^*, t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} X(t^*, t_*, x_*) \left(Y(t^*, t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} Y(t^*, t_*, x_*) \right)$ — множество достижимости д.в. (2.6) ((2.7)) с начальным множеством (t_*, X_*) ;

$X(t_*, x_*) = \bigcup_{t \in [t_*, \vartheta]} (t, X(t, t_*, x_*)) \left(Y(t_*, x_*) = \bigcup_{t \in [t_*, \vartheta]} Y(t, t_*, x_*) \right)$ — интегральная воронка д.в. (2.6) ((2.7)) с начальной точкой $x(t_*) = x_*$;

$X(t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} X(t_*, x_*) \left(Y(t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} Y(t_*, x_*) \right)$ — интегральная воронка д.в. (2.6) ((2.7)) с начальным множеством (t_*, X_*) ; здесь принято обозначение $(t, X) = \{(t, x) : x \in X\}$, $X \subset \mathbb{R}^m$.

Как известно (см., напр., [2, 15]), справедливо включение $X(t^*, t_*, X_*) \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ ($Y(t^*, t_*, X_*) \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$) и отображение $(t^*, t_*, X_*) \mapsto X(t^*, t_*, X_*)$ ($(t^*, t_*, X_*) \mapsto Y(t^*, t_*, X_*)$) непрерывно по t^* на промежутке $[t_*, \vartheta]$ при фиксированных $t_* \in [t_0, \vartheta]$, X_* в хаусдорфовой метрике и непрерывно зависит от X_* при фиксированных t_* и t^* .

Принимая во внимание условия А* и Б*, можем также утверждать, что множество $X(t^*, t_*, X_*)$ представимо в виде

$$X(t^*, t_*, X_*) = \lim_{\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0} X_\Gamma(t^*), \quad (2.8)$$

здесь множество $X_\Gamma(t^*) \subset \mathbb{R}^m$, отвечающее разбиению $\Gamma = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \dots, \tau_k, \dots, \tau_{N-1}, \tau_N = t^*\}$ ($\tau_{k+1} - \tau_k = \Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(t^* - t_*)$, $k = \overline{0, N-1}$) промежутка $[t_*, t^*]$, определяются рекуррентными соотношениями

$$X_\Gamma(\tau_0) = X_*, \quad X_\Gamma(\tau_{k+1}) = \tilde{X}(\tau_{k+1}, \tau_k, X_\Gamma(\tau_k)); \quad k = \overline{0, N-1},$$

где обозначено

$$\tilde{X}(\tau^*, \tau_*, Y_*) = \bigcup_{y_* \in Y_*} \tilde{X}(\tau^*, \tau_*, y_*), \quad (2.9)$$

$\tilde{X}(\tau^*, \tau_*, y_*) = y_* + (\tau^* - \tau_*)F(\tau_*, y_*) = \{x = y_* + (\tau^* - \tau_*)f : f \in F(\tau_*, y_*)\}$, $t_* \leq \tau_* < \tau^* \leq t^*$, $Y_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Аналогично, множество $Y(t^*, t_*, X_*)$ представимо в виде

$$Y(t^*, t_*, X_*) = \lim_{\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0} Y_\Gamma(t^*),$$

здесь множество $Y_\Gamma(t^*) \subset \mathbb{R}^m$, отвечающее разбиению Γ промежутка $[t_*, t^*]$, определяется рекуррентными соотношениями

$$Y_\Gamma(\tau_0) = X_*, \quad Y_\Gamma(\tau_{k+1}) = \tilde{Y}(\tau_{k+1}, \tau_k, Y_\Gamma(\tau_k)); \quad k = \overline{0, N-1},$$

где обозначено

$$\tilde{Y}(\tau^*, \tau_*, Y_*) = \bigcup_{y_* \in Y_*} \tilde{Y}(\tau^*, \tau_*, y_*),$$

$$\tilde{Y}(\tau^*, \tau_*, y_*) = y_* + (\tau^* - \tau_*)G(\tau_*, y_*) = \{x = y_* + (\tau^* - \tau_*)g : g \in G(\tau_*, y_*)\}, \quad t_* \leq \tau_* < \tau^* \leq \leq t^*, \quad Y_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^m).$$

Зная размеры компакта X_* и принимая во внимание условие Б*, можем указать ограниченную и замкнутую область $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, которая будет содержать в себе все возникающие в ходе рассуждений множества из $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$.

Считаем, что присутствующие ниже в оценках числа $K^f = \max\{\|f(t, x, u)\| : (t, x, u) \in D \times P^f\}$, $K^g = \max\{\|g(t, x, u)\| : (t, x, u) \in D \times P^g\}$ и функции $\omega^f(\delta)$, $\omega^g(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$ соответствуют именно этой области D .

После того, как сформулированы условия на управляемые системы (2.1) и (2.2) и введены некоторые базовые понятия, приступим к формулировке задач динамики системы (2.1). Эти задачи охарактеризуем предварительно как некоторые задачи оптимизации интегральных воронок управляемой системы (2.1) с переменной динамикой, обусловленной подменной системы (2.1) на систему (2.2) на некотором коротком промежутке времени.

Уточним, что понимаем под управляемой системой на промежутке $[t_0, \vartheta]$ с переменной динамикой.

Обозначим для простоты изложения символом $\Sigma^{(f)}$ управляемую систему (2.1) на промежутке $[t_0, \vartheta]$, обладающую неизменной динамикой. С этой системой связываем д.в. (2.6).

Обозначим символом $\Sigma^{(\alpha)}$, где $\alpha \in [t_*, t^*]$, управляемую систему с переменной динамикой на промежутке $[t_0, \vartheta]$, возникшую на базе системы $\Sigma^{(f)}$, которую определяем следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(t, x, u); \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (2.10)$$

здесь

$$\Phi(t, x, u) = \begin{cases} f(t, x, u), & u \in P^f \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_*) \\ g(t, x, u), & u \in P^g \quad \text{при} \quad t \in [t_*, t^*) \\ f(t, x, u), & u \in P^f \quad \text{при} \quad t \in [t^*, \vartheta] \end{cases} \quad (2.11)$$

Управляемая система $\Sigma^{(\alpha)}$ является вариацией системы $\Sigma^{(f)}$. С системой $\Sigma^{(\alpha)}$ связываем дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in \Phi(t, x); \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (2.12)$$

где множество $\Phi(t, x) \subset \mathbb{R}^m$ определено соотношением

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} F(t, x) & \text{при} \quad t \in [t_0, t_*) \\ G(t, x) & \text{при} \quad t \in [t_*, t^*) \\ F(t, x) & \text{при} \quad t \in [t^*, \vartheta] \end{cases} \quad (2.13)$$

Множества достижимости и интегральные воронки системы $\Sigma^{(f)}$ и д.в. (2.6) связаны между собой: множества достижимости и интегральные воронки д.в. (2.6) являются соответственно замыканиями множеств достижимости и интегральных воронок системы $\Sigma^{(f)}$. Также множества достижимости и интегральные воронки д.в. (2.12) являются соответственно замыканиями множеств достижимости и интегральных воронок системы $\Sigma^{(a)}$.

Ниже выводятся оценки сверху рассогласований между множествами достижимости дифференциальных включений (2.6) и (2.12) и между интегральными воронками этих включений.

Для множеств достижимости и интегральных воронок д.в. (2.12) введем обозначения, аналогичные принятым для множеств достижимости и интегральных воронок д.в. (2.6):

$$X^{(a)}(t^*, t_*, x_*) \text{ и } X^{(a)}(t^*, t_*, X_*) \text{ в } \mathbb{R}^m, \quad X^{(a)}(t_*, x_*) \text{ и } X^{(a)}(t_*, X_*) \text{ в } D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$$

Интегральные воронки $X^{(a)}(t_*, x_*)$ и $X^{(a)}(t_*, X_*)$ будем трактовать как *вариации* интегральных воронок $X(t_*, x_*)$ и $X(t_*, X_*)$ управляемой системы $\Sigma^{(f)}$, имеющей неизменную динамику на $[t_0, \vartheta]$.

Пусть задано $X^{(0)} \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$, $(t_0, X^{(0)}) \in D$, отвечающее начальному моменту t_0 .

Сформулируем следующий вопрос, относящийся к интегральным воронкам $X(t_0, X^{(0)})$ и $X^{(a)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$: “Насколько велико хаусдорфово расстояние $d(X(t_0, X^{(0)}), X^{(a)}(t_0, X^{(0)}))$?”

Этот вопрос можно свести к вопросу об оценке сверху хаусдорфово расстояния на промежутке $[t_0, \vartheta]$ между множествами достижимости $X(t, t_0, X^{(0)})$ и $X^{(a)}(t, t_0, X^{(0)})$ и зависимостями этой оценки от промежутка α .

Упростим обозначения: $X(t) = X(t, t_0, X^{(0)})$, $Y(t) = Y(t, t_0, X^{(0)})$, $X^{(a)}(t) = X^{(a)}(t, t_0, X^{(0)})$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Множества $X(t)$ и $X^{(a)}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ связаны следующим соотношением:

$$X^{(a)}(t) = \begin{cases} X(t) & \text{при } t \in [t_0, t_*) \\ Z^{(a)}(t) & \text{при } t \in [t_*, t^*) \\ X(t, t^*, Z^{(a)}(t^*)) & \text{при } t \in [t^*, \vartheta], \end{cases}$$

здесь $Z^{(a)}(t) = Y(t, t^*, X_*)$, где $X_* = X(t_*)$.

Приступим к оценке сверху величины

$$d(X(t), X^{(a)}(t)); \quad t \in [t_0, \vartheta] \quad (2.14)$$

Так как $X(t) = X^{(a)}(t)$ на $[t_0, t_*)$, то справедливо $d(X(t), X^{(a)}(t)) = 0$ на $[t_0, t_*)$ и, значит, вопрос об оценке величины (2.14) сводится к оценке этой величины на $[t^*, \vartheta]$.

Сначала оценим величину (2.14) на промежутке $[t_*, t^*]$. Для этого задействуем конечное разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \dots, \tau_k, \dots, \tau_{N-1}, \tau_N = t^*\}$ промежутка $[t_*, t^*]$, $\tau_{k+1} - \tau_k = \Delta_k = \Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(t^* - t_*)$ и отвечающие разбиению Γ системы $\{X_\Gamma(\tau_k) : \tau_k \in \Gamma\}$ и $\{Y_\Gamma(\tau_k) : \tau_k \in \Gamma\}$ множеств $X_\Gamma(\tau_k)$ и $Y_\Gamma(\tau_k)$, где $X_\Gamma(\tau_k) = Y_\Gamma(\tau_k) = X_*$.

Для таких систем в $\mathbb{R}^m$ проведем пошаговое рекуррентное оценивание сверху величины

$$d(X_\Gamma(\tau_k), Y_\Gamma(\tau_k)); \quad k = \overline{1, N} \quad (2.15)$$

последовательно по моментам τ_k , $k = 1, 2, \dots, N$.

Имеет место $d(X_\Gamma(\tau_0), Y_\Gamma(\tau_0)) = 0$. Оценим сверху величину $d(X_\Gamma(\tau_1), Y_\Gamma(\tau_1))$. Для этого выберем произвольную точку $x^{(0)} \in X_\Gamma(\tau_0) = Y_\Gamma(\tau_0) = X_*$ и рассмотрим множества $\tilde{X}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)}) = x^{(0)} + \Delta F(\tau_0, x^{(0)})$ и $\tilde{Y}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)}) = x^{(0)} + \Delta G(\tau_0, x^{(0)})$.

Справедливо равенство

$$d(\tilde{X}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)}), \tilde{Y}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)})) = \Delta_0 d(F(\tau_0, x^{(0)}), G(\tau_0, x^{(0)}))$$

Для получения последующих оценок введем неотрицательную функцию

$$\gamma(t) = \max_{x \in D(t)} d(F(t, x), G(t, x)); \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (2.16)$$

здесь $D(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in D\}$.

Эта неотрицательная непрерывная на $[t_0, \vartheta]$ функция будет задействоваться при оценке хаусдорфовых расстояний между некоторыми множествами в $\mathbb{R}^m$.

Принимая во внимание (2.16), получаем

$$d(\tilde{X}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)}), \tilde{Y}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)})) \leq \gamma(\tau_0) \Delta_0$$

Так как $X_\Gamma(\tau_1) = \bigcup_{x^{(0)} \in X_*} \tilde{X}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)})$ и $Y_\Gamma(\tau_1) = \bigcup_{x^{(0)} \in X_*} \tilde{Y}(\tau_1, \tau_0, x^{(0)})$, то из последнего неравенства получаем

$$d(X(\tau_1), Y(\tau_1)) \leq \Delta_0 \gamma(\tau_0) \quad (2.17)$$

Оценкой (2.17) воспользуемся при выводе оценки сверху величины $d(X(\tau_2), Y(\tau_2))$.

Для оценки этой величины выберем произвольную точку $x^{(1)} \in X(\tau_1)$ и ближайшую к ней в $Y(\tau_1)$ точку $y^{(1)}$. Справедлива оценка

$$\|x^{(1)} - y^{(1)}\| \leq h(X_\Gamma(\tau_1), Y_\Gamma(\tau_1)) \leq d(X_\Gamma(\tau_1), Y_\Gamma(\tau_1)) \leq \Delta_0 \gamma(\tau_0) \quad (2.18)$$

Рассмотрим множества $\tilde{X}(\tau_2, \tau_1, x^{(1)}) = x^{(1)} + \Delta F(\tau_1, x^{(1)})$ и $\tilde{Y}(\tau_2, \tau_1, y^{(1)}) = y^{(1)} + \Delta G(\tau_1, y^{(1)})$.

Справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} d(\tilde{X}(\tau_2, \tau_1, x^{(1)}), \tilde{Y}(\tau_2, \tau_1, y^{(1)})) &= \|x^{(1)} - y^{(1)}\| + \Delta_1 d(F(\tau_1, x^{(1)}), G(\tau_1, y^{(1)})) \leq \\ &\leq \|x^{(1)} - y^{(1)}\| + \Delta_1 (d(F(\tau_1, x^{(1)}), F(\tau_1, y^{(1)})) + d(F(\tau_1, y^{(1)}), G(\tau_1, y^{(1)}))) \leq \\ &\leq \|x^{(1)} - y^{(1)}\| + \Delta_1 L^{(f)} \|x^{(1)} - y^{(1)}\| + \Delta_1 \gamma(\tau_1) \leq e^{L^{(f)} \Delta_1} \|x^{(1)} - y^{(1)}\| + \Delta_1 \gamma(\tau_1) \end{aligned}$$

Принимая во внимание (2.18), получаем

$$d(\tilde{X}(\tau_2, \tau_1, x^{(1)}), \tilde{Y}(\tau_2, \tau_1, y^{(1)})) \leq e^{L^{(f)} \Delta_1} \Delta_0 \gamma(\tau_0) + \Delta_1 \gamma(\tau_1) \quad (2.19)$$

Очевидно при этом, что имеет место

$$h(\tilde{X}(\tau_2, \tau_1, x^{(1)}), \tilde{Y}(\tau_2, \tau_1, y^{(1)})) \leq e^{L^{(f)} \Delta_1} \Delta_0 \gamma(\tau_0) + \Delta_1 \gamma(\tau_1) \quad (2.20)$$

Из включения $y^{(1)} \in Y_\Gamma(\tau_1)$ и (2.20) следует

$$\min_{y \in Y_\Gamma(\tau_1)} h(\tilde{X}(\tau_2, \tau_1, x^{(1)}), \tilde{Y}(\tau_2, \tau_1, y)) \leq h(\tilde{X}(\tau_2, \tau_1, x^{(1)}), \tilde{Y}(\tau_2, \tau_1, y^{(1)})) \quad (2.21)$$

Из (2.20), (2.21) и равенства $Y_\Gamma(\tau_2) = \tilde{Y}(\tau_2, \tau_1, Y_\Gamma(\tau_1)) = \bigcup_{y \in Y_\Gamma(\tau_1)} \tilde{Y}(\tau_2, \tau_1, y)$ следует оценка

$$h(\tilde{X}(\tau_2, \tau_1, x^{(1)}), Y_\Gamma(\tau_2)) \leq e^{L^{(f)}\Delta_1} \Delta_0 \gamma(\tau_0) + \Delta_1 \gamma(\tau_1) \quad (2.22)$$

Так как точка $x^{(1)}$ выбрана в $X_\Gamma(\tau_1)$ произвольно и так как $X_\Gamma(\tau_2) = \bigcup_{x \in X_\Gamma(\tau_1)} \tilde{X}(\tau_2, \tau_1, x)$, то из (2.22) следует оценка

$$h(X_\Gamma(\tau_2), Y_\Gamma(\tau_2)) \leq e^{L^{(f)}\Delta_1} \Delta_0 \gamma(\tau_0) + \Delta_1 \gamma(\tau_1) \quad (2.23)$$

Аналогично выводится оценка

$$h(Y_\Gamma(\tau_2), X_\Gamma(\tau_2)) \leq e^{L^{(g)}\Delta_1} \Delta_0 \gamma(\tau_0) + \Delta_1 \gamma(\tau_1) \quad (2.24)$$

Из (2.23), (2.24) получаем

$$d(X_\Gamma(\tau_2), Y_\Gamma(\tau_2)) \leq e^{L^{(f)}\Delta_1} \Delta_0 \gamma(\tau_0) + \Delta_1 \gamma(\tau_1), \quad (2.25)$$

здесь $L = \max(L^{(f)}, L^{(g)})$.

Рассмотрим следующий промежуток $[\tau_2, \tau_3]$ и приступим к выводу оценки сверху величины $d(X_\Gamma(\tau_3), Y_\Gamma(\tau_3))$. При этом проводим рассуждения, аналогичные предыдущим, и используем оценку (2.25).

В итоге получаем

$$\begin{aligned} d(X_\Gamma(\tau_3), Y_\Gamma(\tau_3)) &\leq e^{L\Delta_2} d(X_\Gamma(\tau_2), Y_\Gamma(\tau_2)) + \Delta_2 \gamma(\tau_2) \leq \\ &\leq e^{L\Delta_2} (e^{L\Delta_1} \Delta_0 \gamma(\tau_0) + \Delta_1 \gamma(\tau_1)) + \Delta_2 \gamma(\tau_2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Оценку (2.26) запишем в виде

$$d(X_\Gamma(\tau_3), Y_\Gamma(\tau_3)) \leq e^{L(\Delta_1+\Delta_2)} \Delta_0 \gamma(\tau_0) + e^{L\Delta_2} \Delta_1 \gamma(\tau_1) + \Delta_2 \gamma(\tau_2) \quad (2.27)$$

Теперь, очевидно, можем обсудить вывод оценки сверху величины $d(X_\Gamma(\tau_{k+1}), Y_\Gamma(\tau_{k+1}))$, $k = \overline{0, N-1}$.

Справедлива оценка, аналогичная оценке (2.25), (2.27)

$$\begin{aligned} d(X_\Gamma(\tau_{k+1}), Y_\Gamma(\tau_{k+1})) &\leq e^{L\Delta_k} \Delta_0 \gamma(\tau_0) + e^{L\Delta_2} d(X_\Gamma(\tau_k), Y_\Gamma(\tau_k)) + \Delta_k \gamma(\tau_k) \leq \\ &\leq e^{L(\Delta_k+\dots+\Delta_2+\Delta_1)} \Delta_0 \gamma(\tau_0) + e^{L(\Delta_k+\dots+\Delta_3+\Delta_2)} \Delta_1 \gamma(\tau_1) + \dots + e^{L\Delta_k} \Delta_{k-1} \gamma(\tau_{k-1}) + \Delta_k \gamma(\tau_k) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Оценку (2.28) заменим более грубой оценкой

$$d(X_\Gamma(\tau_{k+1}), Y_\Gamma(\tau_{k+1})) \leq e^{L(\tau_{k+1}-\tau_0)} \sum_{j=0}^k \gamma(\tau_j) \Delta_j; \quad k \in \overline{0, N-1} \quad (2.29)$$

Полагая, в частности, $k = N-1$, получаем

$$d(X_\Gamma(t^*), Y_\Gamma(t^*)) \leq e^{L(t^*-t_0)} \sum_{k=0}^{N-1} \gamma(\tau_k) \Delta_k \quad (2.30)$$

Воспользуемся далее соотношениями (2.8) и (2.9):

$$X(t^*) = X(t^*, t_*, X_*) = \lim_{\Delta=\Delta(\Gamma)\downarrow 0} X_\Gamma(t^*), \quad Y(t^*) = Y(t^*, t_*, X_*) = \lim_{\Delta=\Delta(\Gamma)\downarrow 0} Y_\Gamma(t^*),$$

здесь имеется в виду сходимость в хаусдорфовой метрике.

Уточним эту сходимость, выписав известные оценки

$$\begin{aligned} d(X(t^*), X_\Gamma(t^*)) &\leq e^{L^f(t^*-t_*)}(t^* - t_*)\omega^f((1 + K^f)\Delta) \\ d(X^{(\alpha)}(t^*), Y_\Gamma(t^*)) &\leq e^{L^g(t^*-t_*)}(t^* - t_*)\omega^g((1 + K^g)\Delta) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Правые части оценок (2.31) стремятся к нулю при $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$, и скорость сходимости правых частей определяется скоростями сходимости функций $\omega^f(\delta)$ и $\omega^g(\delta)$ при $\delta \downarrow 0$.

Справедлива следующая оценка при любых, указанных выше разбиениях Γ промежутка $[t_*, t^*]$

$$\begin{aligned} d(X(t^*), X^{(\alpha)}(t^*)) &\leq d(X(t^*), X_\Gamma(t^*)) + d(X_\Gamma(t^*), Y_\Gamma(t^*)) + \\ &+ d(Y_\Gamma(t^*), X^{(\alpha)}(t^*)) \leq e^{L(t^*-t_*)} \sum_{k=0}^{N-1} \gamma(\tau_k) \Delta_k + \\ &+ e^{L(t^*-t_*)}(t^* - t_*) \left(\omega^f((1 + K^f)\Delta) + \omega^g((1 + K^g)\Delta) \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Выбирая разбиения Γ промежутка $[t_*, t^*]$ такие, что $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$, и переходя в правой части оценки (2.32) к пределу при $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$, получаем оценку

$$d(X(t^*), X^{(\alpha)}(t^*)) \leq e^{L(t^*-t_*)} \int_{t_*}^{t^*} \gamma(t) dt, \quad (2.33)$$

здесь $\int_{t_*}^{t^*} \gamma(t) dt$ — интеграл Римана.

Очевидно, что справедлива и более общая оценка

$$d(X(t), X^{(\alpha)}(t)) \leq e^{L(t-t_*)} \int_{t_*}^t \gamma(\tau) d\tau; \quad t \in [t_*, t^*] \quad (2.34)$$

Нам осталось оценить величину $d(X(t), X^{(\alpha)}(t))$ на промежутке $[t^*, \vartheta]$.

Поскольку на $[t^*, \vartheta]$ системы $\Sigma^{(f)}$ и $\Sigma^{(\alpha)}$ имеют одну и ту же динамику — динамику системы $\Sigma^{(f)}$ и, стало быть, соответствующие д.в. имеют одну и ту же динамику, то нетрудно оценить величину $d(X(t), X^{(\alpha)}(t))$ на $[t^*, \vartheta]$.

Справедлива следующая оценка (см., например, [2])

$$d(X(t), X^{(\alpha)}(t)) \leq e^{L^f(t-t^*)} d(X(t^*), X^{(\alpha)}(t^*)); \quad t \in [t^*, \vartheta] \quad (2.35)$$

Из (2.33) и (2.35) получаем

$$d(X(t), X^{(\alpha)}(t)) \leq e^{L^f(t-t^*)} e^{L(t^*-t_*)} \int_{t_*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \leq e^{L(t-t_*)} \int_{t_*}^t \gamma(\tau) d\tau; \quad t \in [t^*, \vartheta] \quad (2.36)$$

Объединим оценки (2.34) и (2.36) в одну оценку, для чего введем функцию

$$d^*(t) = \begin{cases} e^{L(t-t_*)} \int_{t_*}^t \gamma(\tau) d\tau & \text{при } t \in [t_*, t^*] \\ e^{L(t-t_*)} \int_{t_*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau & \text{при } t \in [t^*, \vartheta] \end{cases}$$

В итоге получаем оценку, которую сформулируем в виде следующего утверждения.

Лемма 1. Хаусдорфово расстояние между множествами достижимости исходной системы (2.1) и проварьированной системы (2.10) удовлетворяет неравенству

$$d(X(t), X^{(a)}(t)) \leq d^*(t); \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (2.37)$$

при условии выполнения условий А и Б, налагаемых на функции $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$, из которых по формуле (2.11) сконструирована функция $\varphi(t, x, u)$, являющаяся правой частью системы (2.10).

Из (2.37) вытекает следующая оценка.

Следствие. Хаусдорфово расстояние между интегральными воронками исходной системы (2.1) и проварьированной системы (2.10) удовлетворяет неравенству

$$d(X(t_0), X^{(a)}(t_0), X^{(0)}) \leq \max_{t \in [t_0, \vartheta]} d^*(t) \quad (2.38)$$

при условии выполнения условий А и Б, налагаемых на функции $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$, из которых по формуле (2.11) сконструирована функция $\varphi(t, x, u)$, являющаяся правой частью системы (2.10).

Рассуждения и оценки, которые будем проводить в последующих параграфах, связаны также с оценкой рассогласования между множествами $X^{(a)}(t_i) = X^{(a)}(t_i, t_0, X^{(0)})$, $t_i \in \Gamma$, отвечающими моментам из разбиения $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_{N^*} = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$, и множествами $X_\Gamma^{(a)}(t_i)$. Множества $X_\Gamma^{(a)}(t_i)$ заданы рекуррентно с начальным множеством $X_\Gamma^{(a)}(t_0) = X^{(0)}$ подобно тому, как задавались множества $X_\Gamma^{(a)}(t_i)$ для разбиения Γ промежутка $[t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$.

Здесь считается, что разбиение Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$ совпадает с упоминавшимся ранее разбиением Γ промежутка $[t_*, t^*]$, т.е. является продолжением разбиения Γ промежутка $[t_*, t^*]$.

Таким образом, в системе $\{X_\Gamma^{(a)}(t_i) : t_i \in [t_*, t^*]\}$, входящей в систему $\{X_\Gamma^{(a)}(t_i) : t_i \in [t_0, \vartheta]\}$, начальным множеством является $X_* = X_\Gamma^{(a)}(t_*)$, а последним, — множество $X_\Gamma^{(a)}(t^*)$.

Множества $X_\Gamma^{(a)}(t_i)$, $t_i \in [t_*, t^*]$ определены соотношениями

$$X_\Gamma^{(a)}(t_{i+1}) = \tilde{Y}(t_{i+1}, t_i, X_\Gamma^{(a)}(t_i)), \quad t_i \text{ и } t_{i+1} \text{ из } [t_*, t^*]$$

Для удобства обозначим $X_\Gamma^{(a)}(t^*) = Y_\Gamma(t^*, t_*, X_*)$, подчеркнув тем самым зависимость этих множеств от множества $X_* = X_\Gamma^{(a)}(t_*)$ и системы $\Sigma^{(g)}$ (2.2).

Оценку величины $d(X^{(a)}(t_i), X_\Gamma^{(a)}(t_i))$, $t_i \in \Gamma$ проведем в три этапа, соответствующие промежуткам $[t_0, t_*]$, $[t_*, t^*]$, $[t^*, \vartheta]$.

Рассмотрим первый промежуток $[t_0, t_*]$.

Справедливы соотношения при $t_i \in [t_0, t_*] \cap \Gamma$

$$X^{(\alpha)}(t_i) = X(t_i), \quad X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i) = X_\Gamma(t_i)$$

При этом имеем, согласно теории,

$$d(X^{(\alpha)}(t_i), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)) = d(X(t_i), X_\Gamma(t_i)) \leq e^{L^f(t_i-t_0)}(t_i - t_0) \omega^f((1 + K^f)\Delta)$$

$$t_i \in [t_0, t_*] \cap \Gamma, \quad \Delta = \Delta(\Gamma) = (N^*)^{-1}(\vartheta - t_0)$$

В частности, справедлива оценка

$$d(X^{(\alpha)}(t_*), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_*)) \leq e^{L^f(t_*-t_0)}(t_* - t_0) \omega^f((1 + K^f)\Delta) \quad (2.39)$$

Рассмотрим второй промежуток $[t_*, t^*]$ из $[t^*, \vartheta]$. Введем обозначения

$$d(t_*) = d(X^{(\alpha)}(t_*), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_*)), \quad d(t^*) = d(X^{(\alpha)}(t^*), X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*))$$

Оценим сверху величину $d(t^*)$, используя оценку (2.39) для величины $d(t_*)$. Для этого введем промежуточное (в оценках) множество $X^{(\sigma)}(t^*) = Y(t^*, t_*, X_*)$.

Справедлива оценка

$$d(t^*) \leq d(X^{(\alpha)}(t^*), X^{(\sigma)}(t^*)) + d(X^{(\sigma)}(t^*), X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*))$$

Учитывая ранее принятые обозначения для множеств $X^{(\alpha)}(t^*)$, $X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*)$ и $X^{(\sigma)}(t^*)$, эту оценку запишем в виде

$$\begin{aligned} d(t^*) &\leq d(Y(t^*, t_*, X^{(\alpha)}(t_*)), Y(t^*, t_*, X_\Gamma^{(\alpha)}(t_*))) + d(Y(t^*, t_*, X_*), Y_\Gamma(t^*, t_*, X_*)) \leq \\ &\leq e^{L^g(t^*-t_*)} d(X^{(\alpha)}(t_*), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_*)) + e^{L^g(t^*-t_*)}(t^* - t_*) \omega^g((1 + K^g)\Delta) \leq \\ &\leq e^{L^g(t^*-t_*)} e^{L^f(t^*-t_0)}(t^* - t_0) \omega^f((1 + K^f)\Delta) + e^{L^g(t^*-t_*)}(t^* - t_*) \omega^g((1 + K^g)\Delta) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Принимая во внимание $L = \max(L^f, L^g)$, получаем

$$d(t^*) \leq e^{L(t^*-t_0)} \left((t^* - t_0) \omega^f((1 + K^f)\Delta) + (t^* - t_*) \omega^g((1 + K^g)\Delta) \right) \quad (2.41)$$

Введем обозначения: $K = \max(K^f, K^g)$, $\omega^*((1 + K)\Delta) = \max\left(\omega^f((1 + K^f)\Delta), \omega^g((1 + K^g)\Delta)\right)$, $\Delta \in (0, \infty)$.

При введенных обозначениях из (2.41) следует

$$d(t^*) \leq e^{L(t^*-t_0)}(t^* - t_0) \omega^*((1 + K)\Delta); \quad \Delta = \Delta(\Gamma) \quad (2.42)$$

Рассмотрим промежуток $[t^*, \vartheta] \subset [t_0, \vartheta]$ и оценим сверху $d(\vartheta) = d(X^{(\alpha)}(\vartheta), X_\Gamma^{(\alpha)}(\vartheta))$.

Множества $X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)$, $t_i \in \Gamma \cap [t^*, \vartheta]$ определяются рекуррентно: $X_\Gamma^{(\alpha)}(t_{i+1}) = \tilde{X}(t_{i+1}, t_i, X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i))$, t_i и t_{i+1} из $[t^*, \vartheta]$.

Для удобства обозначим $X_\Gamma^{(\alpha)}(\vartheta) = \tilde{X}(\vartheta, t^*, X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*))$, подчеркнув зависимость $X_\Gamma^{(\alpha)}(\vartheta)$ от множества $X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*)$ и системы $\Sigma^{(f)}$, а также $X^{(\rho)}(\vartheta) = X(\vartheta, t^*, X_\Gamma^{(\alpha)}(t^*))$.

Справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 d(\vartheta) &= d(X^{(\alpha)}(\vartheta), X^{(\rho)}(\vartheta)) + d(X^{(\rho)}(\vartheta), X_{\Gamma}^{(\alpha)}(\vartheta)) = \\
 &= d(X(\vartheta, t^*, X^{(\alpha)}(t^*)), X(\vartheta, t^*, X_{\Gamma}^{(\alpha)}(t^*))) + \\
 &+ d(X(\vartheta, t^*, X_{\Gamma}^{(\alpha)}(t^*)), X_{\Gamma}(\vartheta, t^*, X_{\Gamma}^{(\alpha)}(t^*))) \leq \\
 &\leq e^{L^f(\vartheta-t^*)} d(X^{(\alpha)}(t^*), X_{\Gamma}^{(\alpha)}(t^*)) + e^{L^f(\vartheta-t^*)} (\vartheta - t^*) \omega^f((1 + K^f)\Delta) \leq \\
 &\leq e^{L^f(\vartheta-t^*)} e^{L(t^*-t_0)} (t^* - t_0) \omega^* ((1 + K)\Delta) + e^{L^f(\vartheta-t^*)} (\vartheta - t^*) \omega^f((1 + K^f)\Delta) \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

Заменим в правой части этого неравенства $e^{L^f(\vartheta-t^*)}$ на $e^{L(\vartheta-t^*)}$, функцию $\omega^f((1 + K^f)\Delta)$ на $\omega^* ((1 + K)\Delta)$ и в результате замены получим

$$d(\vartheta) \leq e^{L(\vartheta-t_0)} (t^* - t_0) \omega^* ((1 + K)\Delta) + e^{L(\vartheta-t_0)} (\vartheta - t^*) \omega^* ((1 + K)\Delta)$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть выполнены условия А и Б на функции $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$, из которых по формуле (2.11) сконструирована функция $\varphi(t, x, u)$, являющаяся правой частью системы $\Sigma^{(\alpha)}$ (2.10). Тогда хаудорфово расстояние между множеством достижимости $X^{(\alpha)}(\vartheta) = X^{(\alpha)}(\vartheta, t_0, X^{(0)})$ системы $\Sigma^{(\alpha)}$ и аппроксимацией $X_{\Gamma}^{(\alpha)}(\vartheta)$ этого множества удовлетворяет неравенству

$$d(X^{(\alpha)}(\vartheta), X_{\Gamma}^{(\alpha)}(\vartheta)) \leq e^{L(\vartheta-t_0)} (\vartheta - t_0) \omega^* ((1 + K)\Delta), \quad (2.44)$$

где $\Delta = \Delta(\Gamma)$ — диаметр разбиения Γ , функция $\omega^*(\cdot)$ и постоянная K определены при формулировке неравенства (2.42).

Замечание 1. Проведенные выше рассуждения показывают, что верна более общая оценка, чем (2.44), а именно,

$$d(X^{(\alpha)}(t_i), X_{\Gamma}^{(\alpha)}(t_i)) \leq e^{L(t_i-t_0)} (t_i - t_0) \omega^* ((1 + K)\Delta); \quad t_i \in \Gamma \quad (2.45)$$

Заметим, что также для любого промежутка $[t_i, t_{i+1}]$ разбиения Γ и любого $t \in [t_i, t_{i+1}]$ справедлива оценка

$$d(X^{(\alpha)}(t), X_{\Gamma}^{(\alpha)}(t_i)) \leq (1 + K)\Delta \quad (2.46)$$

Принимая во внимание оценки (2.45) и (2.46), получаем, что для любого промежутка $[t_i, t_{i+1}]$ разбиения Γ и любого $t \in [t_i, t_{i+1}]$ имеет место

$$d(X^{(\alpha)}(t), X_{\Gamma}^{(\alpha)}(t_i)) \leq e^{L(t_i-t_0)} \omega^* ((1 + K)\Delta) + (1 + K)\Delta; \quad \Delta = \Delta(\Gamma) \quad (2.47)$$

Введем в рассмотрение множество $X_{\Gamma}^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{t_i \in \Gamma} (t_i, \tilde{X}_{\Gamma}^{(\alpha)}(t_i)) \subset D$.

Из (2.47) следует оценка

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X_{\Gamma}^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})) \leq e^{L(t_i-t_0)} \omega^* ((1 + K)\Delta) + (1 + K)\Delta; \quad \Delta = \Delta(\Gamma) \quad (2.48)$$

В оценке (2.48) множество $X_{\Gamma}^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$ есть дискретная (по t) аппроксимация интегральной воронки $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$ в пространстве $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$.

Замечание 2. При выводе оценки (2.44) был осуществлен в промежуточных оценках ряд замен констант L^f , L^g , K^f , K^g и функций $\omega^f((1 + K^f)\Delta)$, $\omega^g((1 + K^g)\Delta)$ на кон-

станты L , K и функцию $\omega^*((1+K)\Delta)$. Также были в итоге заменены величины $t_* - t_0$, $t^* - t_*$, $\vartheta - t^*$ на $\vartheta - t_0$.

В результате получена загрубленная оценка (2.44) величины $d(X^{(\alpha)}(\vartheta), X_\Gamma^{(\alpha)}(\vartheta))$, в которой выхолащена персонификация констант L^f , L^g , K^f , K^g , моментов t_* , t^* и функций $\omega^f((1+K^f)\Delta)$, $\omega^g((1+K^g)\Delta)$.

Оценка (2.44) достаточна для проведения последующих рассуждений, и, тем не менее, выпишем более точную оценку величины $d(\vartheta)$. А именно, в оценке (2.43) заменяем $d(t^*)$ на правую часть оценки (2.40) и получаем

$$d(X^{(\alpha)}(\vartheta), X_\Gamma^{(\alpha)}(\vartheta)) \leq e^{L_*(\alpha)}(\vartheta - t_0)\omega^f((1+K^f)\Delta) + e^{L^*(\alpha)}(t^* - t_*)\omega^g((1+K^g)\Delta) \quad (2.49)$$

Здесь обозначено

$$L_*(\alpha) = L^f(t_* - t_0) + L^g(t^* - t_*) + L^f(\vartheta - t^*)$$

$$L^*(\alpha) = L^g(t^* - t_*) + L^f(\vartheta - t^*)$$

Справедлива и более общая оценка

$$d(X^{(\alpha)}(t_i), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_i)) \leq e^{L_*(\alpha)}(\vartheta - t_0)\omega^f((1+K^f)\Delta) + e^{L^*(\alpha)}(t^* - t_*)\omega^g((1+K^g)\Delta); \quad t_i \in \Gamma, \quad (2.50)$$

а также вытекающая из нее оценка

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X_\Gamma^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})) \leq e^{L_*(\alpha)}(\vartheta - t_0)\omega^f((1+K^f)\Delta) + e^{L^*(\alpha)}(t^* - t_*)\omega^g((1+K^g)\Delta) \quad (2.51)$$

3. О сравнении интегральных воронок д.в., отвечающих двум вариациям системы Σ .

В этом параграфе рассмотрим вариации $\Sigma^{(\alpha)}$ и $\Sigma^{(\beta)}$ системы $\Sigma^{(f)}$, отвечающие промежуткам $\alpha = [t_*, t^*]$ и $\beta = [\tau_*, \tau^*]$ из $[t_0, \vartheta]$. Здесь полагаем, что управляемая система $\Sigma^{(\beta)}$ представима в виде

$$\frac{dx}{dt} = h(t, x, u); \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (3.1)$$

здесь

$$h(t, x, u) = \begin{cases} f(t, x, u), u \in P^f & \text{при } t \in [t_0, \tau_*) \\ g(t, x, u), u \in P^g & \text{при } t \in [\tau_*, \tau^*) \\ f(t, x, u), u \in P^f & \text{при } t \in [\tau^*, \vartheta], \end{cases}$$

где $t_0 \leq \tau_* \leq \tau^* \leq \vartheta$.

Системе $\Sigma^{(\beta)}$ сопоставим д.в.

$$\frac{dx}{dt} \in H(t, x); \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (3.2)$$

где множество $H(t, x) \subset \mathbb{R}^m$ определено соотношением

$$H(t, x) = \begin{cases} F(t, x) & \text{при } t \in [t_0, \tau_*) \\ G(t, x) & \text{при } t \in [\tau_*, \tau^*) \\ F(t, x) & \text{при } t \in [\tau^*, \vartheta] \end{cases}$$

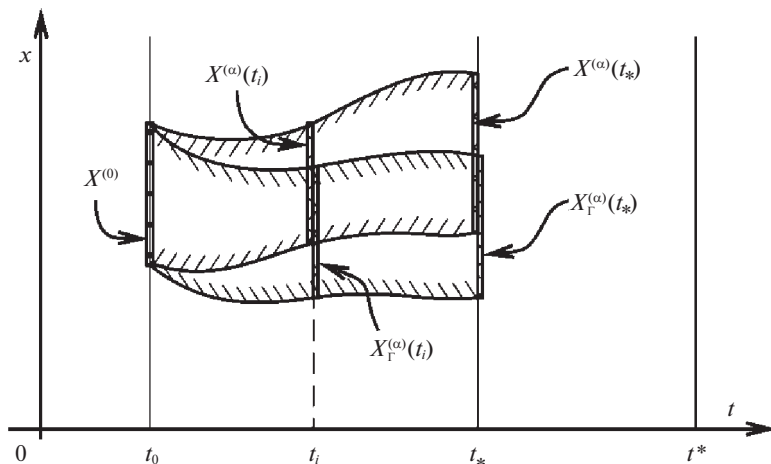


Рис. 1.

Рис. 2. Расположение промежутков α и β в варианте 1.

Для множеств достижимости и интегральных воронок д.в. (3.2) введем обозначения, аналогичные обозначениям множеств достижимости и интегральных воронок д.в., соответствующих системам $\Sigma^{(f)}$ и $\Sigma^{(a)}$ (рис. 1):

$$X^{(\beta)}(\eta^*, \eta_*, x_*), \quad X^{(\beta)}(\eta^*, \eta_*, X_*) \text{ в } \mathbb{R}^m$$

$$X^{(\beta)}(\eta_*, x_*), \quad X^{(\beta)}(\eta_*, X_*) \text{ в } \mathbb{R}^m$$

$$t_0 \leq \eta_* \leq \eta^* \leq \vartheta, \quad X_* \in \text{compr}(\mathbb{R}^m) \quad \text{и} \quad (\eta_*, X_*) \subset D$$

Пусть $X^{(0)} \in \text{compr}(\mathbb{R}^m)$ — начальное множество, $(t_0, X^{(0)}) \subset D$.

Возникает вопрос об оценках рассогласований между интегральными воронками $X^{(a)}(t_0, X^{(0)})$ и $X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})$: “Насколько велико хаусдорфово расстояние $d(X^{(a)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)}))$?”

С этим вопросом связан вопрос об оценке сверху величины $d(X^{(a)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)}))$.

В связи с этим рассмотрим всевозможные варианты расположения промежутков $\alpha = [t_*, t^*]$ и $\beta = [\tau_*, \tau^*]$ в $[t_0, \vartheta]$.

Вариант 1. $t_0 \leq \tau_* \leq t_* \leq \tau^* \leq t^* \leq \vartheta$ (рис. 2).

Вариант 2. $t_0 \leq t_* \leq \tau_* \leq \tau^* \leq t^* \leq \vartheta$ (рис. 3).

Вариант 3. $t_0 \leq t_* \leq \tau_* \leq t^* \leq \tau^* \leq \vartheta$ (рис. 4).

Вариант 4. $t_0 \leq t_* \leq t^* \leq \tau_* \leq \tau^* \leq \vartheta$ (рис. 5).

Рис. 3. Расположение промежутков α и β в варианте 2.Рис. 4. Расположение промежутков α и β в варианте 3.Рис. 5. Расположение промежутков α и β в варианте 4.

Этими вариантами исчерпываются фактически другие варианты взаимного расположения α и β в $[t_0, \vartheta]$, так как получаются из указанных четырех с помощью замены $t_* \leftrightarrow \tau_*, t^* \leftrightarrow \tau^*$.

Оценку сверху величины $d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)}))$ сведем к оценке величины $d^{\alpha, \beta}(t) = d(X^{(\alpha)}(t), X^{(\beta)}(t)), t \in [t_0, \vartheta]$ между сечениями $X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t_0, X^{(0)})$ и $X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t_0, X^{(0)})$ интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$ и $X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})$.

Начнем вывод с варианта 1. Рассмотрим промежуток $[t_0, \tau_*]$. При $t \in [t_0, \tau_*]$ имеем

$$X^{(\alpha)}(t) = X(t, t_0, X^{(0)}), \quad X^{(\beta)}(t) = X(t, t_0, X^{(0)})$$

Следовательно, при $t \in [t_0, \tau_*]$ имеет место $d^{\alpha, \beta}(t) = 0$ и, следовательно,

$$X^{(\alpha)}(\tau_*) = X^{(\beta)}(\tau_*)$$

Рассмотрим промежуток $[\tau_*, t_*]$. Имеем при $t \in [\tau_*, t_*]$

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*)) = X(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*)) = Y(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*))$$

Учитывая эти соотношения, по аналогии с разд. 2, получаем при $t \in [\tau_*, t_*]$

$$d^{\alpha, \beta}(t) \leq e^{L(t-\tau_*)} \int_{\tau_*}^t \gamma(\tau) d\tau$$

В частности, справедливо

$$d^{\alpha, \beta}(t_*) \leq e^{L(t_*-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{t_*} \gamma(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

Рассмотрим промежуток $[t_*, \tau^*]$.

Справедливы представления при $t \in [t_*, \tau^*]$

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t_*, X^{(\alpha)}(t_*)) = Y(t, t_*, X^{(\alpha)}(t_*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t_*, X^{(\beta)}(t_*)) = Y(t, t_*, X^{(\beta)}(t_*))$$

Учитывая эти соотношения, получаем при $t \in [t_*, \tau^*]$

$$d^{\alpha, \beta}(t) \leq e^{L^g(t-t_*)} d^{\alpha, \beta}(t_*) \leq e^{L(t-\tau^*)} d^{\alpha, \beta}(t_*)$$

В частности, справедливо неравенство

$$d^{\alpha, \beta}(\tau^*) \leq e^{L(\tau^*-t_*)} d^{\alpha, \beta}(t_*) \quad (3.4)$$

Рассмотрим промежуток $[\tau^*, t^*]$. Имеем при $t \in [\tau^*, t^*]$:

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*)) = Y(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*)) = X(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*))$$

Справедлива при $t \in [\tau^*, t^*]$ оценка

$$\begin{aligned} d^{\alpha, \beta}(t) &\leq d(Y(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*)), Y(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*))) + \\ &+ d(Y(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*)), X(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*))) \leq e^{L^g(t-\tau^*)} d^{\alpha, \beta}(\tau^*) + e^{L(t-\tau^*)} \int_{\tau^*}^t \gamma(\tau) d\tau \end{aligned}$$

В частности, справедливо неравенство

$$d^{\alpha, \beta}(t^*) \leq e^{L^g(t^*-\tau^*)} d^{\alpha, \beta}(\tau^*) + e^{L(t^*-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

Рассмотрим промежуток $[t^*, \vartheta]$. Имеем при $t \in [t^*, \vartheta]$:

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t^*, X^{(\alpha)}(t^*)) = X(t, t^*, X^{(\alpha)}(t^*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t^*, X^{(\beta)}(t^*)) = X(t, t^*, X^{(\beta)}(t^*))$$

и, значит,

$$d^{\alpha, \beta}(t) \leq e^{L^g(t-t^*)} d^{\alpha, \beta}(t^*) \leq e^{L(t-\vartheta)} d^{\alpha, \beta}(t^*)$$

В частности, справедливо неравенство

$$d^{\alpha, \beta}(\vartheta) \leq e^{L(\vartheta-t^*)} d^{\alpha, \beta}(t^*) \quad (3.6)$$

Учитывая предыдущие оценки, получаем при $t \in [t_0, \vartheta]$

$$\begin{aligned} d^{\alpha, \beta}(t) &\leq e^{L(\vartheta-t^*)} \left(e^{L(t^*-\tau^*)} d^{\alpha, \beta}(\tau^*) + e^{L(t^*-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \right) = \\ &= e^{L(\vartheta-\tau^*)} d^{\alpha, \beta}(\tau^*) + e^{L(\vartheta-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \leq e^{L(\vartheta-\tau^*)} e^{L(\tau^*-t_*)} d^{\alpha, \beta}(t_*) + e^{L(\vartheta-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \leq \\ &\leq e^{L(\vartheta-t_*)} e^{L(t_0-\tau_*)} \int_{\tau_0}^{t_0} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Итак, получаем при $t \in [t_0, \vartheta]$ оценку

$$d^{\alpha, \beta}(t) \leq e^{L(\vartheta - \tau_*)} \int_{\tau_*}^{t_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta - \tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

В рассматриваемом варианте 1 из (3.7) вытекает оценка

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})) \leq e^{L(\vartheta - \tau_*)} \int_{\tau_*}^{t_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta - \tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

Обратимся к варианту 2. Рассмотрим промежуток $[t_0, t_*]$. При $t \in [t_0, t_*]$ имеем

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t_0, X^{(0)}) = X(t, t_0, X^{(0)})$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t_0, X^{(0)}) = X(t, t_0, X^{(0)})$$

Из этих равенств следует

$$d^{\alpha, \beta}(t) = 0; \quad t \in [t_0, t_*]$$

Рассмотрим промежуток $[t_*, \tau_*] \subset [t_0, \tau_*]$. При $t \in [t_*, \tau_*]$ имеет место оценка

$$d^{\alpha, \beta}(t) \leq e^{L(\tau_* - t_*)} \int_{t_*}^t \gamma(\tau) d\tau$$

В частности,

$$d^{\alpha, \beta}(\tau_*) \leq e^{L(\tau_* - t_*)} \int_{t_*}^{\tau_*} \gamma(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

Рассмотрим промежуток $[\tau_*, \tau^*] \subset [t_*, \tau^*]$. При $t \in [\tau_*, \tau^*]$ имеем

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*)) = Y(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*)) = Y(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*))$$

Отсюда следует при $t \in [\tau_*, \tau^*]$ оценка

$$d^{\alpha, \beta}(t) \leq e^{L^g(t - \tau_*)} d^{\alpha, \beta}(\tau_*) \leq e^{L(t - \tau_*)} d^{\alpha, \beta}(\tau_*)$$

В частности, имеет место

$$d^{\alpha, \beta}(\tau^*) \leq e^{L(\tau^* - \tau_*)} d^{\alpha, \beta}(\tau_*) \quad (3.10)$$

Далее, рассмотрим промежуток $[\tau^*, t^*]$. При $t \in [\tau^*, t^*]$ имеем

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*)) = Y(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*)) = Y(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*))$$

Справедлива при $t \in [\tau^*, t^*]$ оценка

$$\begin{aligned} d^{\alpha, \beta}(t) &\leq d(Y(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*)), Y(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*))) + \\ &+ d(Y(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*)), X(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*))) \leq e^{L^g(t - \tau^*)} d^{\alpha, \beta}(\tau^*) + e^{L(t - \tau^*)} \int_{\tau^*}^t \gamma(\tau) d\tau \end{aligned}$$

В частности, справедлива оценка

$$d^{\alpha,\beta}(t^*) \leq e^{L(t^*-\tau^*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*) + e^{L(t^*-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

Рассмотрим промежуток $[t^*, \vartheta]$. При $t \in [t^*, \vartheta]$ имеют место соотношения

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t^*, X^{(\alpha)}(t^*)) = X(t, t^*, X^{(\alpha)}(t^*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t^*, X^{(\beta)}(t^*)) = X(t, t^*, X^{(\beta)}(t^*))$$

Из этих соотношений получаем при $t \in [t^*, \vartheta]$

$$d^{\alpha,\beta}(t) \leq e^{L(t-t^*)} d^{\alpha,\beta}(t^*) \leq e^{L(t-t^*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*) \quad (3.12)$$

В итоге, в варианте 2 получаем на $[t_0, \vartheta]$ оценку

$$\begin{aligned} d^{\alpha,\beta}(t) &\leq e^{L(t-t^*)} \left(e^{L(t^*-\tau^*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*) + e^{L(t^*-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \right) = \\ &= e^{L(t-\tau^*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*) + e^{L(t-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \leq e^{L(t-\tau^*)} e^{L(\tau^*-\tau_*)} d^{\alpha,\beta}(\tau_*) + e^{L(t-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau = \\ &= e^{L(t-\tau_*)} d^{\alpha,\beta}(\tau_*) + e^{L(t-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \leq e^{L(t-\tau_*)} e^{L(\tau_*-t_*)} \int_{t_*}^{\tau_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(t-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \end{aligned}$$

То есть, в итоге получаем при $t \in [t_0, \vartheta]$

$$d^{\alpha,\beta}(t) \leq e^{L(t-t_*)} \int_{t_*}^{\tau_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(t-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau$$

Отсюда вытекает в варианте 2 оценка

$$\begin{aligned} d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})) &\leq \max_{t \in [t_0, \vartheta]} d^{\alpha,\beta}(t) \leq \\ &\leq e^{L(\vartheta-t_*)} \int_{t_*}^{\tau_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.13)$$

Обратимся к варианту 3. Совершенно очевидно, что этот вариант получается из варианта 1 с помощью упомянутой выше замены $t_* \leftrightarrow \tau_*$, $t^* \leftrightarrow \tau^*$. Тогда получаем оценку

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})) \leq e^{L(\vartheta-t_*)} \int_{t_*}^{\tau_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-t^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

Рассмотрим теперь вариант 4. При $t \in [t_0, t_*]$ имеют место соотношения

$$X^{(\alpha)}(t) = X^{(\alpha)}(t, t_0, X^{(0)}) = Y(t, t_0, X^{(\alpha)}(t_*))$$

$$X^{(\beta)}(t) = X^{(\beta)}(t, t_0, X^{(0)}) = X(t, t_0, X^{(0)})$$

Из этих соотношений получаем

$$d^{\alpha,\beta}(t) = 0; \quad t \in [t_0, t_*]$$

При $t \in [t_*, t^*]$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} X^{(\alpha)}(t) &= X^{(\alpha)}(t, t_0, X^{(0)}) = Y(t, t_0, X^{(0)}) \\ X^{(\beta)}(t) &= X^{(\beta)}(t, t_0, X^{(0)}) = X(t, t_0, X^{(0)}), \end{aligned}$$

из которых следует при $t \in [t_*, t^*]$

$$d^{\alpha, \beta}(t) \leq e^{\int_{t_*}^{t} \gamma(\tau) d\tau}$$

В частности выполняется

$$d^{\alpha, \beta}(t^*) \leq e^{\int_{t_*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau} \quad (3.15)$$

При $t \in [t^*, \tau_*]$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} X^{(\alpha)}(t) &= X^{(\alpha)}(t, t^*, X^{(\alpha)}(t^*)) = X(t, t^*, X^{(\alpha)}(t^*)) \\ X^{(\beta)}(t) &= X^{(\beta)}(t, t^*, X^{(\beta)}(t^*)) = X(t, t^*, X^{(\beta)}(t^*)), \end{aligned}$$

из которых следует

$$d^{\alpha, \beta}(t) \leq e^{\int_{t^*}^t \gamma(\tau) d\tau} d^{\alpha, \beta}(t^*) \leq e^{\int_{t_*}^t \gamma(\tau) d\tau} d^{\alpha, \beta}(t^*),$$

и, в частности,

$$d^{\alpha, \beta}(\tau_*) \leq e^{\int_{t_*}^{\tau_*} \gamma(\tau) d\tau} d^{\alpha, \beta}(t^*) \quad (3.16)$$

При $t \in [\tau_*, \tau^*]$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} X^{(\alpha)}(t) &= X^{(\alpha)}(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*)) = X(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*)) \\ X^{(\beta)}(t) &= X^{(\beta)}(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*)) = Y(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*)), \end{aligned}$$

из которых следует при $t \in [\tau_*, \tau^*]$

$$\begin{aligned} d^{\alpha, \beta}(t) &\leq d(Y(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*)), X(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*))) + \\ &\quad + d(X(t, \tau_*, X^{(\beta)}(\tau_*)), Y(t, \tau_*, X^{(\alpha)}(\tau_*))) \leq \\ &\leq e^{\int_{\tau_*}^t \gamma(\tau) d\tau} d^{\alpha, \beta}(\tau_*) + e^{\int_{\tau_*}^t \gamma(\tau) d\tau} d^{\alpha, \beta}(\tau_*) \leq e^{\int_{\tau_*}^t \gamma(\tau) d\tau} d^{\alpha, \beta}(\tau_*) + e^{\int_{\tau_*}^t \gamma(\tau) d\tau} d^{\alpha, \beta}(\tau_*) \end{aligned}$$

В частности, выполняется

$$d^{\alpha, \beta}(\tau^*) \leq e^{\int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau} d^{\alpha, \beta}(\tau_*) + e^{\int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau} d^{\alpha, \beta}(\tau_*) \quad (3.17)$$

При $t \in [\tau^*, \vartheta]$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} X^{(\alpha)}(t) &= X^{(\alpha)}(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*)) = X(t, \tau^*, X^{(\alpha)}(\tau^*)) \\ X^{(\beta)}(t) &= X^{(\beta)}(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*)) = X(t, \tau^*, X^{(\beta)}(\tau^*)), \end{aligned}$$

из которых следует при $t \in [\tau^*, \vartheta]$

$$d^{\alpha, \beta}(t) \leq e^{\int_{\tau^*}^t \gamma(\tau) d\tau} d^{\alpha, \beta}(\tau^*) \leq e^{\int_{\tau_*}^t \gamma(\tau) d\tau} d^{\alpha, \beta}(\tau^*)$$

В частности, имеет место

$$d^{\alpha,\beta}(\vartheta) \leq e^{L(\vartheta-\tau^*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*) \quad (3.18)$$

Принимая во внимание в рассматриваемом случае варианта 4 оценки (3.15)–(3.18), а также предшествующие им оценки величины $d^{\alpha,\beta}(t)$, получаем при $t \in [\tau^*, \vartheta]$

$$\begin{aligned} d^{\alpha,\beta}(t) &\leq e^{L(t-\tau^*)} \left(e^{L(\tau^*-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\tau^*-\tau_*)} d^{\alpha,\beta}(\tau^*) \right) \leq \\ &= e^{L(t-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(t-\tau_*)} d^{\alpha,\beta}(\tau_*) \leq e^{L(t-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(t-\tau_*)} e^{L(\tau_*-t^*)} d^{\alpha,\beta}(t^*) \leq \\ &\leq e^{L(t-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(t-t_*)} \int_{t_*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.19)$$

Учитывая, что в рассматриваемом варианте 4 правая часть оценки (3.19) монотонно возрастает на промежутке $[t_0, \vartheta]$, получаем

$$d^{\alpha,\beta}(\vartheta) \leq e^{L(\vartheta-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-t_*)} \int_{t_*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau,$$

и, значит,

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})) \leq e^{L(\vartheta-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-t_*)} \int_{t_*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \quad (3.20)$$

Для того, чтобы было удобнее анализировать оценки величины $d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)}))$, $t \in [t_0, \vartheta]$, сведем вместе правые части этих оценок:

Вариант 1. $t_0 \leq \tau_* \leq t_* \leq \tau^* \leq t^* \leq \vartheta$,

$$e^{L(\vartheta-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-t^*)} \int_{t^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau;$$

Вариант 2. $t_0 \leq t_* \leq \tau_* \leq \tau^* \leq t^* \leq \vartheta$,

$$e^{L(\vartheta-t_*)} \int_{t_*}^{\tau_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-\tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau;$$

Вариант 3. $t_0 \leq t_* \leq \tau_* \leq t^* \leq \tau^* \leq \vartheta$,

$$e^{L(\vartheta-t_*)} \int_{t_*}^{\tau_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-t^*)} \int_{t^*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau;$$

Вариант 4. $t_0 \leq t_* \leq t^* \leq \tau_* \leq \tau^* \leq \vartheta$,

$$e^{L(\vartheta-\tau_*)} \int_{\tau_*}^{\tau^*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta-t_*)} \int_{t_*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau;$$

Еще не рассмотрены три варианта взаимного расположения промежутков α и β в $[t_0, \vartheta]$:

Вариант 5. $t_0 \leq \tau_* \leq t_* \leq t^* \leq \tau^* \leq \vartheta$;

Вариант 6. $t_0 \leq \tau_* \leq t_* \leq \tau^* \leq t^* \leq \vartheta$;

Вариант 7. $t_0 \leq \tau_* \leq \tau^* \leq t_* \leq t^* \leq \vartheta$.

Заметим, однако, что каждый из этих вариантов получается из одного из вариантов 1–4 путем замены $t_* \leftrightarrow \tau_*$, $t^* \leftrightarrow \tau^*$. Вместе с этим правые части оценок величины $d^{\alpha, \beta}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ получаются из соответствующих правых частей оценок величины в вариантах 1–4 путем указанной замены.

Введем обозначение: $\rho(\alpha, \beta)$ — хаусдорфово расстояние между отрезками α и β на прямой $\mathbb{R}^1$.

Задача теперь заключается в том, чтобы найти универсальную мажоранту в виде функции, зависящей от $\rho(\alpha, \beta)$ для правых частей оценок величины $d^{\alpha, \beta}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ во всех четырех вариантах 1–4.

Очевидно, что во всех четырех вариантах 1–4, отрезки $\alpha = [t_*, t^*]$ и $\beta = [\tau_*, \tau^*]$ из $[t_0, \vartheta]$ стеснены оценками:

Вариант 1. $t_* - \tau_* \leq \rho(\alpha, \beta)$, $t^* - \tau^* \leq \rho(\alpha, \beta)$;

Вариант 2. $\tau_* - t_* \leq \rho(\alpha, \beta)$, $t^* - \tau^* \leq \rho(\alpha, \beta)$;

Вариант 3. $\tau_* - t_* \leq \rho(\alpha, \beta)$, $\tau^* - t^* \leq \rho(\alpha, \beta)$;

Вариант 4. $t^* - t_* \leq \tau_* - t_* \leq \rho(\alpha, \beta)$, $\tau^* - \tau_* \leq \tau^* - t^* \leq \rho(\alpha, \beta)$.

Введем также параметр $\rho \in (0, \vartheta - t_0]$, множество $T^{(\rho)} = \{[t^{(1)}, t^{(2)}] \subset [t_0, \vartheta] : t^{(2)} - t^{(1)} \leq \rho\}$, функцию

$$\kappa(\rho) = \max_{[t^{(1)}, t^{(2)}] \in T^{(\rho)}} \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \gamma(t) dt, \quad \rho \in (0, \vartheta - t_0], \quad (3.21)$$

и калибровочную функцию

$$\kappa^*(\rho) = 2e^{L(\vartheta - t_0)} \kappa(\rho); \quad \rho \in (0, \vartheta - t_0] \quad (3.22)$$

Выполняется $\kappa^*(\rho) \downarrow 0$ при $\rho \downarrow 0$.

Заметим также, что в любом из вариантов правая оценка величины $d^{\alpha, \beta}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ не превосходит величины $\kappa^*(\rho(\alpha, \beta))$.

Покажем это для варианта 1. Для этого варианта при $t \in [t_0, \vartheta]$ имеем

$$d^{\alpha, \beta}(t) \leq e^{L(\vartheta - \tau_*)} \int_{\tau_*}^{t_*} \gamma(\tau) d\tau + e^{L(\vartheta - \tau^*)} \int_{\tau^*}^{t^*} \gamma(\tau) d\tau \leq 2e^{L(\vartheta - t_0)} \kappa(\rho(\alpha, \beta)) = \kappa^*(\rho(\alpha, \beta))$$

Аналогично доказывается неравенство

$$d^{\alpha, \beta}(t) \leq \kappa^*(\rho(\alpha, \beta)); \quad t \in [t_0, \vartheta] \quad (3.23)$$

для других вариантов взаимного расположения промежутков α и β из $[t_0, \vartheta]$.

Учитывая (3.23), можем сформулировать основной результат.

Теорема. Для интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$ и $X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})$ дифференциальных включений (2.10) и (3.2), соответствующих управляемым системам $\Sigma^{(\alpha)}$ и $\Sigma^{(\beta)}$, являющимися вариациями системы $\Sigma^{(f)}$, выполняется оценка сверху

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})) \leq \kappa^*(\rho(\alpha, \beta)), \quad (3.24)$$

выраженная в виде функции, зависящей от хаусдорфова расстояния между отрезками отрезки α и β из $[t_0, \vartheta]$ и заданной соотношениями (2.16), (3.21) и (3.22).

Теперь приведем рассуждения, относящиеся к калибровочной функции $\kappa^*(\rho)$ и весьма полезные для приложений. В связи с этим обратимся к вектор-функциям $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$, (t, x, u) из $D \times P^f$ и $D \times P^g$ соответственно.

Допустим, что расстояние $\rho(f, g)$ между функциями $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$ удовлетворяется неравенству

$$\rho(f, g) = \max_{t \in [t_0, \vartheta]} \max_{x \in D(t), \bar{u} \in P^f, \bar{u} \in P^g} \|f(t, x, \bar{u}) - g(t, x, \bar{u})\| \leq \max_{t \in [t_0, \vartheta]} \gamma(t) \leq \gamma^*, \quad \gamma^* \in (0, \infty) \quad (3.25)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\kappa(\rho(\alpha, \beta)) = \max_{[t^{(1)}, t^{(2)}] \in T^{(\rho(\alpha, \beta))}} \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \gamma(t) dt \leq \rho(\alpha, \beta) \gamma^*,$$

из которого следует

$$\kappa^*(\rho(\alpha, \beta)) \leq 2e^{L(\vartheta-t_0)} \gamma^* \rho(\alpha, \beta) \quad (3.26)$$

Значит, при ограничении (3.25), наложенном на вектор-функции $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$, справедлива оценка

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})) \leq 2e^{L(\vartheta-t_0)} \gamma^* \rho(\alpha, \beta), \quad (3.27)$$

где $\rho(\alpha, \beta)$ — хаусдорфово расстояние между промежутками α и β из $[t_0, \vartheta]$.

Оценки (3.25)–(3.27) будут использованы при решении некоторых задач управления интегральными воронками в следующем параграфе.

4. Задачи о сближении и уклонении интегральных воронок с целевым множеством в $\mathbb{R}^m$.

В этом параграфе будет рассмотрена управляемая система $\Sigma^{(f)}$ на $[t_0, \vartheta]$, а также управляемая система $\Sigma^{(\alpha)}$, $\alpha = [t_*, t^*]$ на $[t_0, \vartheta]$. Наряду с ними рассматриваются начальное множество $X^{(0)}$, $(t_0, X^{(0)}) \subset D$ и целевое множество $M \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$, отвечающее моменту ϑ .

Сформулируем и изучим несколько задач сближения и уклонения систем $\Sigma^{(f)}$ и $\Sigma^{(\alpha)}$ с M в момент ϑ , выраженных на языке интегральных воронок $X(t_0, X^{(0)})$, $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$ дифференциальных включений, соответствующих системам $\Sigma^{(f)}$ и $\Sigma^{(\alpha)}$.

При этом интегральные воронки $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$ трактуются как вариации интегральной воронки $X(t_0, X^{(0)})$, возникшие в результате варьирования системы $\Sigma^{(f)}$ на промежутке $\alpha = [t_*, t^*]$ на $[t_0, \vartheta]$.

Это варьирование трактуется как своеобразное управление системой $\Sigma^{(f)}$ и соответствующей ей воронкой $X(t_0, X^{(0)})$ путем выбора управляющего параметра $\alpha = [t_*, t^*]$.

Сформулируем несколько задач, связанных с управлением интегральной воронкой $X(t_0, X^{(0)})$.

Задача 1. В $\mathbb{R}^m$ заданы компакты $X^{(0)}$ и M . Требуется вычислить $\rho(X(\vartheta), M) = \min_{(x, y) \in X(\vartheta) \times M} \|x - y\|$ — расстояние между множествами $X(\vartheta) = X(\vartheta, t_0, X^{(0)})$ и M .

В задаче 1 будем интересоваться, насколько близко “подходит” “последнее” (отвечающее моменту ϑ из $[t_0, \vartheta]$) сечение $X(\vartheta)$ интегральной воронки $X(t_0, X^{(0)})$ к целевому множеству M . Этот интерес связан задачей “подвести” интегральную воронку $X(t_0, X^{(0)})$ к множеству M . Для этого будем варьировать интегральную воронку $X(t_0, X^{(0)})$, то есть применять к ней управления $\alpha = [t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$ и выяснять, насколько близко к M “подходят” в момент ϑ интегральные воронки $X^{(a)}(t_0, X^{(0)})$.

В связи с этим возникает задача об оптимальном сближении интегральных воронок $X^{(a)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t^*] \subset M$.

Задача 2 (о сближении). Заданы компакты $X^{(0)}$ и M в $\mathbb{R}^m$ и число $\lambda = N_\lambda^{-1}(\vartheta - t_0)$, $N_\lambda \in \mathbb{N}$. Требуется определить промежуток $\alpha = [t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$, удовлетворяющий

$$\rho(X^{(a)}(\vartheta), M) = \min \{ \rho(X^{(\beta)}(\vartheta), M) : \beta = [\eta_*, \eta^*] \subset [t_0, \vartheta], \eta^* - \eta_* = \lambda \}$$

Представляет интерес и дуальная к задаче 2 задача об оптимальном уклонении интегральных воронок $X^{(a)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t^*]$ от M .

Задача 3 (об уклонении). Заданы компакты $X^{(0)}$ и M в $\mathbb{R}^m$ и число $\lambda = N_\lambda^{-1}(\vartheta - t_0)$, $N_\lambda \in \mathbb{N}$. Требуется определить такой промежуток $\alpha = [t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$, $t^* - t_* = \lambda$, что

$$\rho(X^{(a)}(\vartheta), M) = \max \{ \rho(X^{(\beta)}(\vartheta), M) : \beta = [\eta_*, \eta^*] \subset [t_0, \vartheta], \eta^* - \eta_* = \lambda \}$$

Наряду с λ зафиксируем еще число $\rho = N_\rho^{-1}(\vartheta - t_0)$, $N_\rho \in \mathbb{N}$. При этом ρ выбираем таким, что отрезок длины ρ укладывается в отрезок длины λ целое число раз:

$$\frac{\lambda}{\rho} = \frac{N_\rho}{N_\lambda} \in \mathbb{N}.$$

После определения чисел λ и ρ введем конечное разбиение $\Gamma^{(\rho)} = \{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_{N_\rho-1}, t_{N_\rho} = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ и систему отрезков $\beta_k = [t_k, t_k + \lambda]$, $k \in \overline{0, N_\rho - 1}$, содержащихся в $[t_0, \vartheta]$. Очевидно, что таких отрезков длины λ будет меньше, чем N_ρ . Эту систему будем называть для краткости изложения β -системой.

Возьмем произвольный промежуток $\alpha = [t_*, t_* + \lambda] \subset [t_0, \vartheta]$. Очевидно, что найдется такой промежуток β_k из β -системы, для которого $t_* \in [t_k, t_{k+1}]$ и, значит, $d(\alpha, \beta_k) = t_* - t_k \leq t_{k+1} - t_k = \rho$.

Следовательно, можем сказать, что β -система — конечная система отрезков в $[t_0, \vartheta]$ длины λ представляет собой совокупность всех отрезков α в $[t_0, \vartheta]$ длины λ с точностью до величины ρ (в хаусдорфовой метрике).

Отсюда вытекает, что для любой интегральной воронки $X^{(a)}(t_0, X^{(0)})$, отвечающей отрезку $\alpha = [t_*, t_* + \lambda]$, найдется в β -системе такой отрезок $\beta_k = [t_k, t_k + \lambda]$, что

$$d(X^{(a)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})) \leq 2e^{L(\vartheta-t_0)} \rho \gamma^* \quad (4.1)$$

Далее, отметим, что при решении задач 1–3 с конкретными управляемыми системами $\Sigma^{(f)}$ отсутствует возможность иметь дело с идеальными интегральными воронками $X^{(a)}(t_0, X^{(0)}) \subset D$, так как не в состоянии их вычислить. Более реально иметь дело с их дискретными (по t) аппроксимациями $X_\Gamma^{(a)}(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{t_i \in \Gamma} (t_i, X_\Gamma^{(a)}) \subset D$. Это

относится и к интегральным воронкам $X^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})$, которые заменены в неравенстве (4.1), учитывая (2.48), их аппроксимациями $X_{\Gamma}^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)}) \subset D$, отвечающими разбиению Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$. А именно, от оценки (4.1) переходим к оценке

$$\begin{aligned} & d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X_{\Gamma}^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})) \leq \\ & \leq d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})) + d(X^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)}), X_{\Gamma}^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})) \leq \\ & \leq 2e^{L(\vartheta-t_0)}\rho\gamma^* + e^{L(\vartheta-t_0)}(\vartheta-t_0)\omega^*((1+K)\Delta) + (1+K)\Delta; \quad \Delta = \Delta(\Gamma) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Тогда справедливо утверждение, что для любой интегральной воронки $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, отвечающей отрезку $\alpha = [t_*, t_* + \lambda]$ из $[t_0, \vartheta]$, в β -системе найдется такой отрезок $\beta_k = [t_k, t_k + \lambda]$, что имеет место (4.2).

Далее, зафиксируем $\varepsilon^* \in (0, \infty)$. По ε^* определим числа ρ и $\Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(\vartheta - t_0)$ так, чтобы

$$2e^{L(\vartheta-t_0)}\rho\gamma^* \leq \frac{\varepsilon^*}{2} \quad \text{и} \quad e^{L(\vartheta-t_0)}(\vartheta-t_0)\omega^*((1+K)\Delta) + (1+K)\Delta \leq \frac{\varepsilon^*}{2}, \quad (4.3)$$

т.е. ρ и $\Delta = \Delta(\Gamma)$ определим удовлетворяющими неравенствам

$$\begin{aligned} \rho & \leq \frac{1}{4}e^{L(t_0-\vartheta)}\gamma^{*-1}\varepsilon^* \\ \omega^*((1+K)\Delta) + e^{L(t_0-\vartheta)}(\vartheta-t_0)^{-1}(1+K)\Delta & \leq \frac{1}{2}e^{L(t_0-\vartheta)}(t_0-\vartheta)\varepsilon^* \end{aligned} \quad (4.4)$$

Кроме того, число ρ должно удовлетворять включению $\frac{\lambda}{\rho} \in \mathbb{N}$. Так выбранному ρ сопоставим разбиение Γ^p промежутка $[t_0, \vartheta]$ и конечную β -систему отрезков $\beta_k = [t_k, t_k + \lambda]$, $t_k \in \Gamma^p$, удовлетворяющих включению $\beta_k \in [t_0, \vartheta]$.

Эта конечная β -система и отвечающие ее элементам β_k множества $X_{\Gamma}^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})$ представляют совокупность всех интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t_* + \lambda] \subset [t_0, \vartheta]$, $t^* - t_* = \lambda$ с точностью до величины $\varepsilon^* \in (0, \infty)$. То есть для любой интегральной воронки $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t_* + \lambda] \subset [t_0, \vartheta]$, $t^* - t_* = \lambda$ найдется $\beta_k = [t_k, t_k + \lambda]$ из β -системы, такой, что

$$d(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X_{\Gamma}^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})) \leq \varepsilon^*. \quad (4.5)$$

Учитывая это, вместо задачи 2, сформулированной для бесконечного семейства интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t_* + \lambda] \subset [t_0, \vartheta]$, можем сформулировать задачу об оптимальном сближении, более приемлемую для конструирования решения. Эта задача формируется уже для конечного семейства множеств $X_{\Gamma}^{(\beta_k)}(t_0, X^{(0)})$, где β_k из β -системы.

Задача 2,а (о сближении). Пусть $X^{(0)}$, M — компакты в $\mathbb{R}^m$ и $\varepsilon^* \in (0, \infty)$. Заданы также $\lambda = N_{\lambda}^{-1}(\vartheta - t_0)$, $N_{\lambda} \in \mathbb{N}$, конечные разбиения Γ , Γ^p промежутка $[t_0, \vartheta]$, удовлетворяющие (4.4), и соответствующая разбиению Γ^p конечная β -система отрезков $\beta_k = [t_k, t_k + \lambda] \subset [t_0, \vartheta]$, $t_k \in \Gamma^p$.

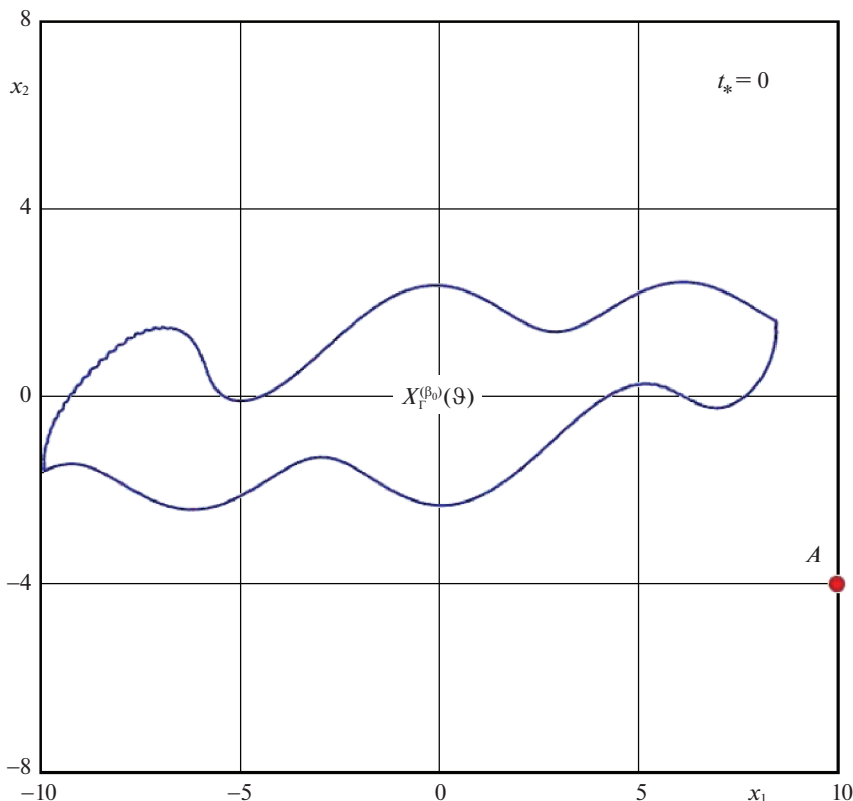


Рис. 6. $X_{\Gamma}^{(\beta_0)}(\vartheta)$ — аппроксимация множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ при $x^{(0)} = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, $[t_*, t^*] = [t_0, t_{30}] = [0, 3]$.

Требуется определить промежуток β_{k^*} из β -системы, удовлетворяющий соотношению

$$\rho(X_{\Gamma}^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) = \min_{\beta_k \in \beta} \rho(X_{\Gamma}^{(\beta_k)}(\vartheta), M) \quad (4.6)$$

Допустим теперь, что задача 2, а решена и найден отрезок β_{k^*} из β -системы, удовлетворяющий (4.5). Из этого следует

$$\rho(X_{\Gamma}^{(\beta_k)}(\vartheta), M) \leq \rho(X^{(\alpha)}(\vartheta), M) + d(X^{(\alpha)}(\vartheta), X_{\Gamma}^{(\beta_k)}(\vartheta)) \leq \rho(X^{(\alpha)}(\vartheta), M) + \varepsilon^*$$

и, принимая во внимание, что $\rho(X_{\Gamma}^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) \leq \rho(X_{\Gamma}^{(\beta_k)}(\vartheta), M)$, получаем

$$\rho(X_{\Gamma}^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) \leq \rho(X^{(\alpha)}(\vartheta), M) + \varepsilon^* \quad (4.7)$$

Так как $d(X_{\Gamma}^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), X^{(\beta_{k^*})}(\vartheta)) \leq \varepsilon^*$, то

$$\rho(X^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) \leq \rho(X_{\Gamma}^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) + \varepsilon^* \quad (4.8)$$

Из (4.7), (4.8) следует

$$\rho(X^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) \leq \rho(X^{(\alpha)}(\vartheta), M) + 2\varepsilon^* \quad (4.9)$$

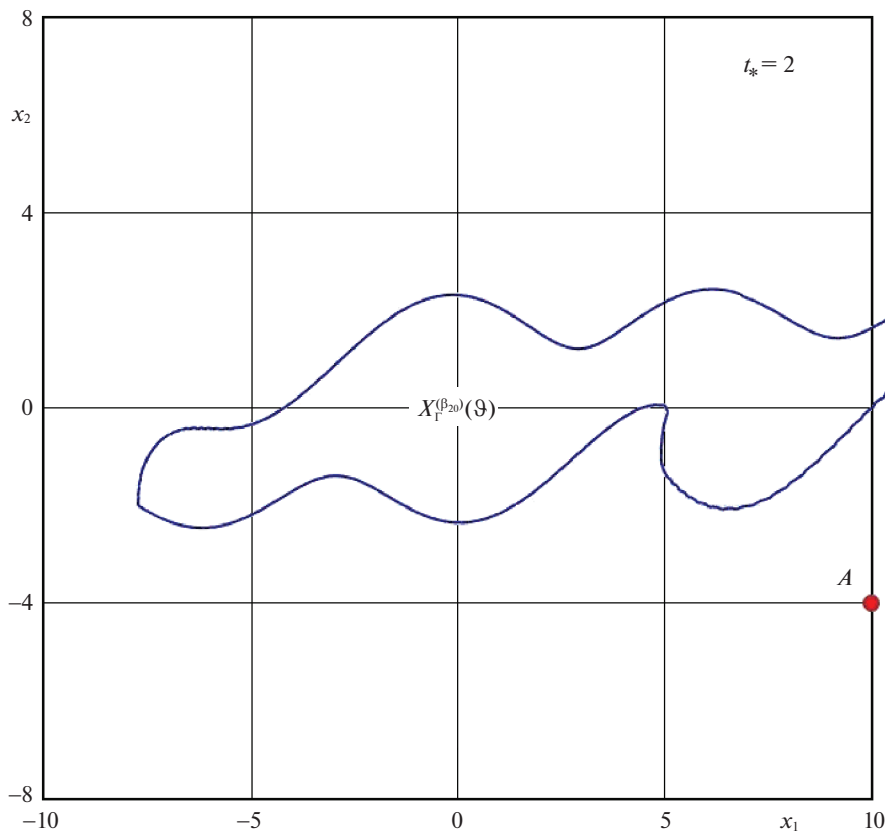


Рис. 7. $X_G^{(\beta_{20})}(\vartheta)$ — аппроксимация множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ при $x^{(0)} = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, $[t_*, t^*] = [t_{20}, t_{50}] = [2, 5]$.

Неравенство (4.9) означает, что промежуток β_{k*} из β -системы, являющийся решением задачи 2,а, доставляет оптимальный результат с точностью до $2\varepsilon^*$ и в задаче 2 об оптимальном сближении с M интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \subset [t_0, \vartheta]$.

Так же, как и при решении задач о сближении, вместо задачи 3 об оптимальном уклонении, сформулированной для бесконечного семейства интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t_* + \lambda] \subset [t_0, \vartheta]$, сформулируем задачу об оптимальном уклонении от M для конечного семейства множеств $X_G^{(\beta_k)}(\vartheta)$, $\beta_k \in \beta$. Эта задача более приемлема для конструирования решения.

Задача 3,а (об уклонении). Пусть $X^{(0)}$, M — компакты в $\mathbb{R}^m$ и $\varepsilon^* \in (0, \infty)$. Также заданы число $\lambda = N_\lambda^{-1}(\vartheta - t_0)$, $N_\lambda \in \mathbb{N}$, конечные разбиения Γ , Γ^p промежутка $[t_0, \vartheta]$, удовлетворяющие (4.4), и соответствующая разбиению Γ^p конечная β -система отрезков $\beta_k = [t_k, t_k + \lambda] \subset [t_0, \vartheta]$, $t_k \in \Gamma^p$.

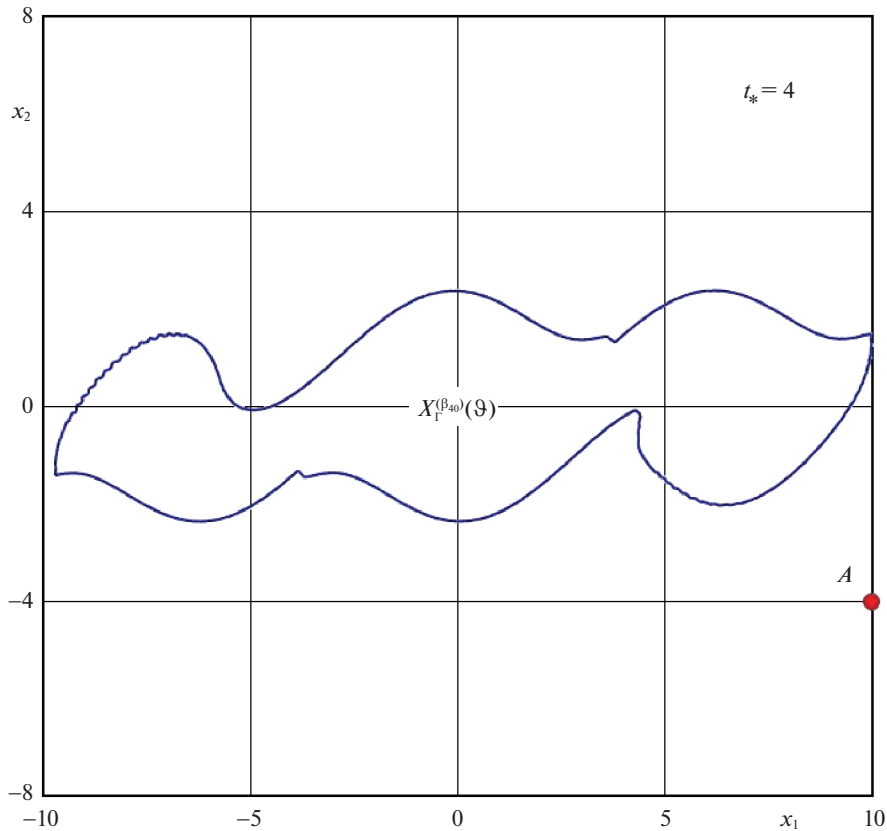


Рис. 8. $X_{\Gamma}^{(\beta_{40})}(\vartheta)$ – аппроксимация множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ при $x^{(0)} = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, $[t_*, t^*] = [t_{40}, t_{70}] = [4, 7]$.

Требуется определить промежуток β_{k^*} из β -системы, удовлетворяющий соотношению

$$\rho(X_{\Gamma}^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) = \max_{\beta_k \in \beta} \rho(X_{\Gamma}^{(\beta_k)}(\vartheta), M) \quad (4.10)$$

Неравенство (4.10) означает, что промежуток β_{k^*} из β -системы, являющийся решением задачи 3,а, доставляет оптимальный результат с точностью до $2\varepsilon^*$ в задаче 3 об оптимальном уклонении интегральных воронок $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t_* + \lambda] \subset [t_0, \vartheta]$ от M .

5. Пример. Пусть на промежутке времени $t \in [t_0, \vartheta] = [0, 10]$ задана управляемая система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha(t)x_1 - \sin x_1 + u(t) \\ x(0) &= x^{(0)} = (0, 1), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где управление $u(t) \in [-1, 1]$, функция

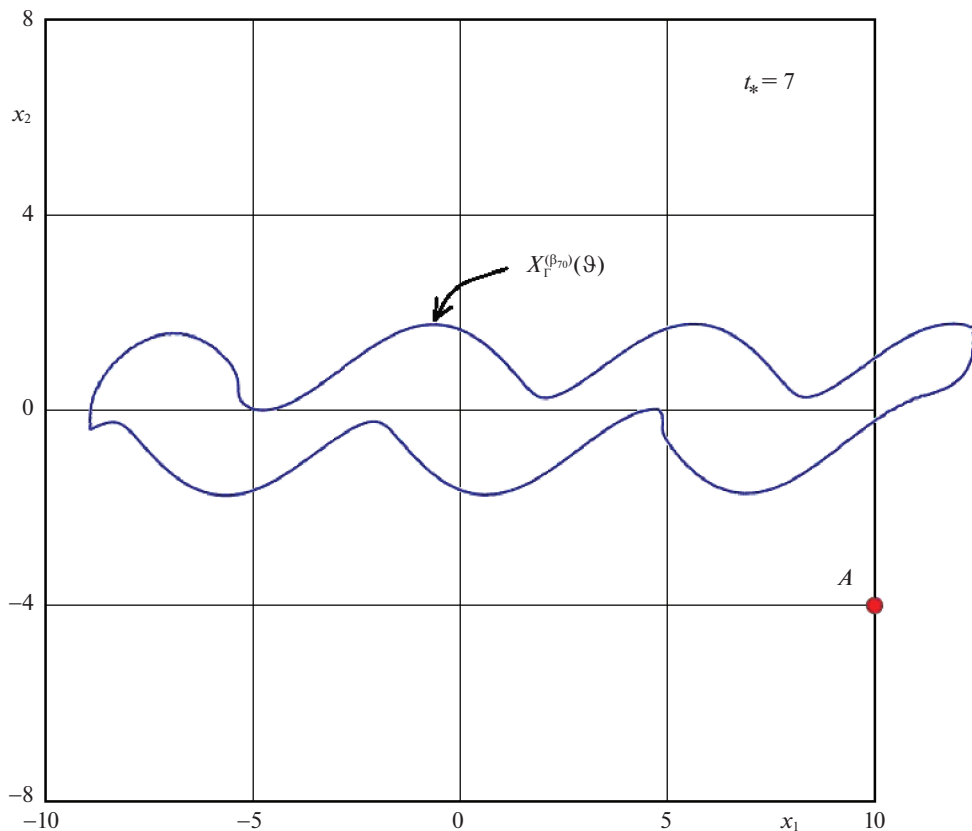


Рис. 9. $X_G^{(\beta_{70})}(\vartheta)$ – аппроксимация множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ при $x^{(0)} = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, $[t_*, t^*] = [t_{70}, t_{100}] = [7, 10]$.

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1] \setminus [t_*, t^*] \\ 1, & t \in [0, 1] \cap [t_*, t^*], \end{cases}$$

где $t^* = t_* + 3$.

На промежутке $[t_0, \vartheta] = [0, 10]$ заданы разбиение $\Gamma = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_N = \vartheta\}$ с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma) = 0.1$ и соответствующая разбиению Γ конечная β -система отрезков $\beta_k = [t_k, t_k + 3] \subset [t_0, \vartheta]$, $t_k \in \Gamma$.

Символами $X^{(\beta_k)}(\vartheta)$, $k = \overline{0, N-30}$ обозначим (в соответствии с предыдущим разделом) множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ системы (5.1) в конечный момент времени ϑ , соответствующие начальной позиции $(t_0, x^{(0)})$ и промежуткам $[t_*, t^*]$, $t_* = t_k$, $k = \overline{0, N-30}$.

Определим целое одноточечное множество $M = \{A\}$, где точка $A = (20, -18)$.

Для системы (5.1) сформулируем задачи 2,а и 3,а.

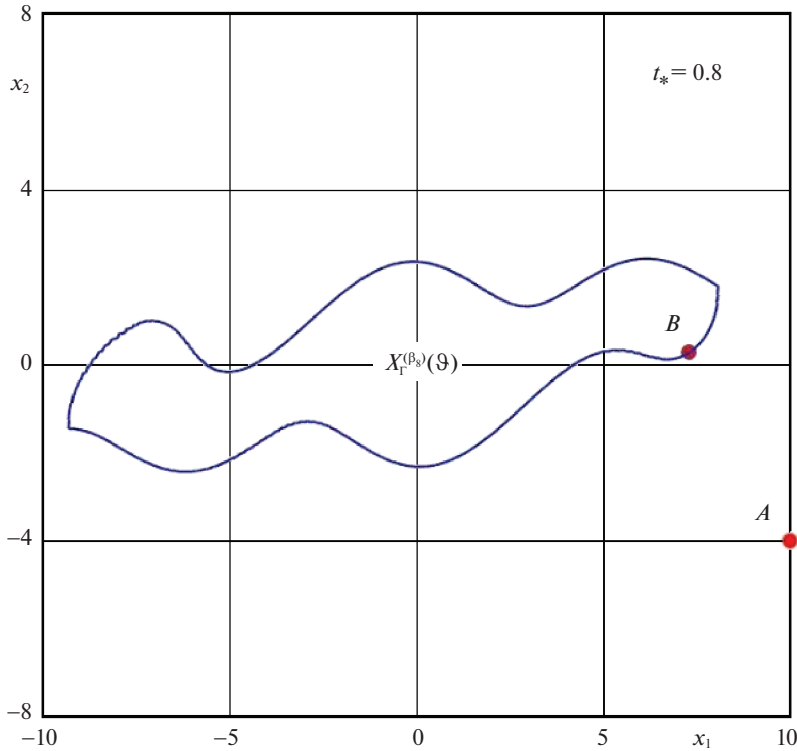


Рис. 10. $X_G^{(\beta_8)}(\vartheta)$ – аппроксимация множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ при $x^{(0)} = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, $[t_*, t^*] = [t_8, t_{38}] = [0.8, 3.8]$; точка A и ближайшая к ней точка B из $X_G^{(\beta_8)}(\vartheta)$.

Задача 2,а (о сближении). Требуется определить промежуток β_{k^*} из β -системы $\{[t_*, t^*]: t_* = t_k, k = \overline{0, N-30}\}$, удовлетворяющий соотношению

$$\rho(X_G^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) = \min_{\beta_k \in \beta} \rho(X_G^{(\beta_k)}(\vartheta), M)$$

Задача 3,а (об уклонении). Требуется определить промежуток β_{k^*} из β -системы, удовлетворяющий соотношению

$$\rho(X_G^{(\beta_{k^*})}(\vartheta), M) = \max_{\beta_k \in \beta} \rho(X_G^{(\beta_k)}(\vartheta), M)$$

На рис. 6–9 изображены $X^{(\beta_k)}(\vartheta)$, соответствующие $k = 0, 20, 40, 70$. На рис. 10 и 11 изображены решения задач 2,а и 3,а, символом B обозначены проекции точки A соответственно на ближайшее к A и наиболее удаленное от A множества $X^{(\beta_k)}(\vartheta)$.

Заключение. В работе рассмотрена нелинейная управляемая система на конечном промежутке времени в конечномерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^m$. Изучена устойчивость ее интегральной воронки (последнего временного сечения интегральной воронки) в зависимости от скачкообразного изменения динамики системы на нескольких малых промежутках времени. Степень возмущения интегральной воронки (ее послед-

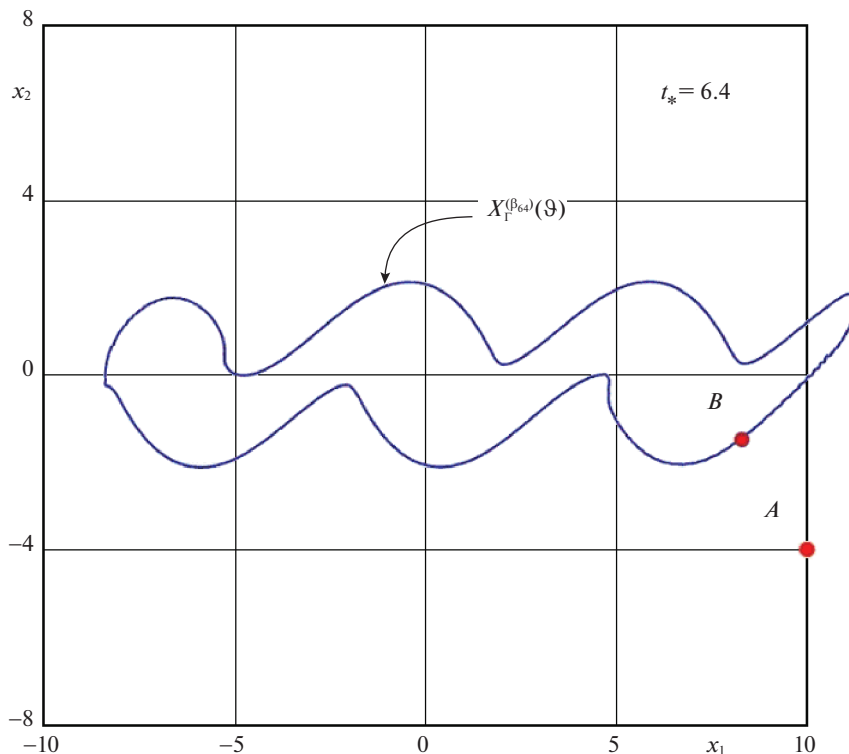


Рис. 11. $X_G^{(\beta_{64})}(\vartheta)$ — аппроксимация множества достижимости $X(\vartheta, t_0, x^{(0)})$ при $x^{(0)} = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, $[t_*, t^*] = [t_{64}, t_{94}] = [6.4, 9.4]$; точка A и ближайшая к ней точка B из $X_G^{(\beta_{64})}(\vartheta)$.

них временных сечений) оценивается в хаусдорфовой метрике: получены экспоненциальные оценки степени возмущения. Кроме задач, связанных с получением упомянутых выше оценок, рассмотрены задачи о наведении интегральной воронки на целевое множество, либо, наоборот уклонении от него с помощью оптимального выбора одного временного промежутка с измененной по заранее известному закону динамической систем. В заключительной части работы приведен пример колебательной механической управляемой системы, иллюстрирующий теорию.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00105, <https://rscf.ru/project/19-11-00105/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. Куржанский А.Б. Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009. 756 с.
3. Шматков А.М. Об управлении ансамблем траекторий при наличии ограниченной помехи // Изв. РАН. ТиСУ. 1995. № 4. С. 82–87.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.

5. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Паршиков Г.В. Метод построения разрешающего управления задачи о сближении, основанный на притягивании к множеству разрешимости // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 2. С. 270–284.
6. Матвийчук А.Р., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Ушаков В.Н. Задача о сближении нелинейной управляемой системы на конечном промежутке времени // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 165–187.
7. Ершов А.А., Ушаков В.Н. О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 9. С. 56–99.
8. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
9. Черноусько Ф.Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов // Изв. АН СССР. Технич. киберн. 1980. № 3. С. 3–11.
10. Черноусько Ф.Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов. Ч. II // Изв. АН СССР. Технич. киберн. 1980. № 4. С. 4–11.
11. Черноусько Ф.Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов. Ч. III // Изв. АН СССР. Технич. киберн. 1980. № 5. С. 5–11.
12. Kurjanskii A., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Systems & Control: Foundations & Applications. Basel: Birkhäuser Basel and IASA, 1997. 321 p.
13. Schweppe F.C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. AC-13. № 1. P. 22–28.
14. Bertsekas D.P., Rhodes J.B. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. AC-16. № 2. P. 117–128.
15. Гусев М.И. Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94.
16. Филиппова Т.Ф. Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 223–232.
17. Черноусько Ф.Л. Оценка множеств достижимости линейных систем с неопределенной матрицей // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 1. С. 32–34.
18. Рокитянский Д.Я. Возмущенные линейные отображения множеств // Изв. РАН. ТиСУ. 1996. № 6. С. 110–116.
19. Костоусова Е.К. Об ограниченности и неограниченности внешних полиэдральных оценок множеств достижимости линейных дифференциальных систем // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 134–145.
20. Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // ПММ. 1998. Т. 62. № 2. С. 179–187.
21. Никольский М.С. Об аппроксимации множества достижимости дифференциального включения // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1987. № 4. С. 31–34.
22. Lempio F., Veliov V.M. Discrete approximation of differential inclusions // Bayr. Math. Schriften. 1998. V. 54. P. 149–232.
23. Ананьевский И.М. Управление нелинейной колебательной системой четвертого порядка с неизвестными параметрами // Автомат. и телемех. 2001. № 3. С. 3–15.
24. Ананьевский И.М. Синтез управления линейными системами с помощью методов теории устойчивости движения // Дифференц. уравн. 2003. Т. 39. № 1. С. 3–11.
25. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: Ленанд, 2014. 560 с.
26. Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В. и др. Управление маятником при помощи маховика. Спецпрактикум по теоретической и прикладной механике / Под ред. В.В. Александрова. М.: Изд-во МГУ, 2009. С. 170–195.
27. Горнов А.Ю., Тятюшкин А.И., Финкельштейн Е.А. Численные методы для решения терминальных задач оптимального управления // ЖВММФ. 2016. Т. 56. № 2. С. 224–237.

On Integral Funnel of Control Systems, Changed at Several Small Time Interval

V. N. Ushakov^{a,#}, A. A. Ershov^{a,##}, and A. V. Ushakov^{a,###}

^a*N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russia*

[#]*e-mail: ushak@imm.uran.ru*

^{##}*e-mail: ale10919@yandex.ru*

^{###}*e-mail: aushakov.pk@gmail.com*

A nonlinear control system in a finite-dimensional Euclidean space and on a finite time interval is considered, the dynamics of which changes significantly over several small sections from a given time interval. We study the degree of change in the reachable sets and integral funnels of the system under consideration when it varies in these sections. The corresponding changes are estimated in the Hausdorff metric.

Keywords: control system, differential inclusion, reachable set, integral funnel, variable structure, system variation, Hausdorff distance

REFERENCES

1. *Krasovskii N.N.* Dynamical System Control. Moscow: Nauka, 1985. 520 p. (in Russian)
2. *Kurjanskii A.B.* Selected Works. Moscow: MSU Publ., 2009. 756 p. (in Russian)
3. *Shmatkov A.M.* Control of systems with interference of bounded magnitude // *J. Comput.&Syst. Sci. Int.*, 1995, vol. 33, no. 5, pp. 57–63. <https://elibrary.ru/item.asp?id=31080527>
4. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Positional Differential Games. Moscow: Fizmatlit, 1974. 456 p. (in Russian)
5. *Ushakov V.N., Matviichuk A.R., Parshikov G.V.* A method for constructing a resolving control in an approach problem based on attraction to the feasibility set // *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, suppl. 1, pp. S135–S144.
6. *Matviychuk A.R., Ukhobotov V.I., Ushakov A.V., Ushakov V.N.* The approach problem of a nonlinear controlled system in a finite time interval // *JAMM*, 2017, vol. 81, no. 2, pp. 114–128.
7. *Ershov A.A., Ushakov V.N.* An approach problem for a control system with an unknown parameter // *Sb.: Math.*, 2017, vol. 208, no. 9, pp. 1312–1352.
8. *Chernous'ko F.L.* State Estimation for Dynamic Systems. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994. 320 p.
9. *Chernous'ko F.L.* Optimal guaranteed estimates of indeterminacies with the aid of ellipsoids. I // *Eng. Cybern.*, 1980, vol. 18, no. 3, pp. 1–9.
10. *Chernous'ko F.L.* Optimal guaranteed estimates of indeterminacy with the aid of ellipsoids. II // *Eng. Cybern.*, 1980, vol. 18, no. 4, pp. 1–9.
11. *Chernous'ko F.L.* Optimal guaranteed estimates of indeterminacy with the aid of ellipsoids. III // *Eng. Cybern.*, 1980, vol. 18, no. 5, pp. 3–9.
12. *Kurjanskii A., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Systems & Control: Foundations & Applications. Basel: Birkhäuser Basel and IIASA, 1997. 321 p.
13. *Schweppe F.C.* Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs // *IEEE Trans. Automat. Control*, 1968, vol. AC-13, no. 1, pp. 22–28.
14. *Bertsekas D.P., Rhodes J.B.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // *IEEE Trans. Automat. Control*, 1971, vol. AC-16, no. 2, pp. 117–128.
15. *Gusev V.I.* Estimates of reachable sets of multidimensional control systems with nonlinear interconnections // *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S134–S146.
16. *Filippova T.F.* Differential equations for ellipsoidal estimates for reachable sets of a nonlinear dynamical control system // *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 271, suppl. 1, pp. S75–S84.
17. *Chernousko F.L.* Estimation of the attainability sets of linear systems with an indeterminate matrix // *Dokl. Math.*, 1996, vol. 54, no. 1, pp. 634–636.
18. *Rokityanskii D.Y.* Perturbed linear mapping of sets // *J. Comput.&Syst. Sci. Int.*, 1996, vol. 35, no. 6, pp. 948–954.

19. *Koustousova E.K.* On the boundedness and unboundedness of external polyhedral estimates for reachable sets of linear differential systems // *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S162–S173.
20. *Guseinov K.G., Moiseyev A.A., Ushakov V.N.* The approximation of reachable domains of control systems // *JAMM*, 1998, vol. 62, no. 2, pp. 169–175.
21. *Nikol'skii M.S.* On the approximation of the reachable set of a differential inclusion // *Moscow Univ. Bull. Ser. 15. Comput. Math.&Cybern.*, 1987, no. 4, pp. 31–34. (in Russian)
22. *Lempio F., Veliov V.M.* Discrete approximation of differential inclusions // *Bayr. Math. Schriften*, 1998, vol. 54, pp. 149–232.
23. *Anan'evskii I.M.* Control of a nonlinear vibratory system of the fourth order with unknown parameters // *Automat.&Remote Control*, 2001, vol. 62, pp. 343–355.
24. *Anan'evskii I.M.* Control synthesis for linear systems by methods of stability theory of motion // *Differ. Eqns.*, 2003, vol. 39, pp. 1–10.
25. *Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Control of Linear Systems under External Disturbances: Technique of Linear Matrix Inequalities. Moscow: Lenand, 2014. 560 p.
26. *Beznos A.V., Grishin A.A., Lenskiy A.V. et al.* Control of the Pendulum Using a Flywheel. Special workshop on theoretical and applied mechanics / Ed. by *V.V. Alexandrov*. Moscow: MSU Publ., 2009. pp. 170–195. (in Russian)
27. *Gornov A.Yu., Tyatyushkin A.I., Finkelstein E.A.* Numerical methods for solving terminal optimal control problems // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 2, pp. 221–234.

УДК 532.612.4

КРАЕВЫЕ УГЛЫ ЛЕЖАЩЕЙ КАПЛИ И ПОДЖАТОГО ПУЗЫРЬКА С УЧЕТОМ РАЗМЕРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ© 2023 г. А. А. Сокуров^{1,*}¹Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

*e-mail: asokuroff@gmail.com

Поступила в редакцию 02.03.2023 г.

После доработки 19.05.2023 г.

Принята к публикации 26.05.2023 г.

Построены качественно новые математические модели лежащей капли и поджатого пузырька, учитывающие размерную зависимость поверхностного натяжения. Хорошо известная модель Башфорта–Адамса является частным случаем построенных моделей, если длину Толмена устремить к нулю. Проведены численные расчеты краевых углов при различных значениях равновесного объема. Показано, что размерная зависимость поверхностного натяжения приводит к нарушению условия согласованности краевых углов капли и пузырька, находящихся во внешнем силовом поле.

Ключевые слова: поверхностное натяжение, капиллярный мениск, размерная зависимость, лежащая капля, поджатый пузырек, краевой угол

DOI: 10.31857/S0032823523050144, EDN: QPFIEO

1. Введение. Равновесные капли и пузырьки являются объектами теоретических и экспериментальных исследований на протяжении многих десятилетий [1]. Их результаты находят широкое применение во многих важных областях науки и техники. В литературе и в настоящее время можно наблюдать повышенный интерес к изучению вопросов, связанных с каплями и пузырьками. Обусловлено это, в первую очередь, интенсивным развитием нанотехнологий. Такие направления в нанотехнологиях, как нанолитография, нанофлюидика, наноэлектроника, создание и производство материалов с супергидрофильными и супергидрофобными свойствами практически целиком основаны на использовании особенностей поведения очень малых объемов жидкости и газа. Отметим, что новые термодинамические модели лежащей капли и поджатого пузырька были разработаны недавно в [2, 3].

Несмотря на давнюю историю и серьезные успехи физики межфазных явлений, остаются вопросы, по которым мнения исследователей расходятся. Один из них касается условия согласованности краевых углов для капель и пузырьков. В классической теории считается, что в зоне трехфазного контакта

$$\theta_d = \pi - \theta_b, \quad (1.1)$$

где θ_d и θ_b — краевые углы для капли и пузырька. Имеются, однако, основания полагать, что в общем случае соотношение (1.1) может не выполняться. Такой вывод для малых объемов сделан, например, в [4] с применением метода молекулярной динамики. Результаты данной работы были критически проанализированы в [5, 6]. Так, в [6] показано, что даже в случае идеальной сферической поверхности раздела фаз усло-

ние (1.1) может нарушаться вследствие различных значений поверхностного натяжения капли и пузырька. Согласно [7], поверхностное натяжение выпуклой поверхности должно быть меньше, чем плоской или вогнутой поверхности. Физически это объясняется тем, что на выпуклой поверхности атомы дополнительно “оголяются”, поэтому их потенциальная энергия становится меньше, чем на плоской и вогнутой поверхностях.

Хорошо известно [1], что в присутствии внешнего силового поля свернутые капиллярные мениски перестают иметь сферическую форму. В этом случае вопрос о согласованности углов θ_b и θ_d , как отмечается в [6], остается пока без ответа. Решению этого вопроса посвящена настоящая статья. Продолжая идеи [6], впервые предлагается исследовать вопрос о согласованности краевых углов равновесных капель и пузырьков, находящихся во внешнем силовом поле.

Будем рассматривать равновесную систему “жидкость–пар”. Для учета размерной зависимости поверхностного натяжения воспользуемся следующей формулой [7, 8]:

$$\sigma = \frac{\sigma^{(\infty)}}{1 \pm \delta \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)},$$

где $\sigma^{(\infty)}$ — поверхностное натяжение на границе жидкость–пар в случае плоской поверхности раздела фаз, r_1 и r_2 — радиусы кривизны поверхности раздела фаз в главных направлениях, δ — неотрицательный параметр, характеризующий толщину межфазной области (т.н. длина Толмена), знак “+” относится к капле, а “–” к пузырьку. Формула (1.2) определяет поверхностное натяжение разделяющей поверхности с произвольной геометрией. Она выводится из термодинамики [8], а также может быть формально выписана как обобщение известной формулы Толмена, если в ней среднюю кривизну сферической поверхности $1/r$ заменить на среднюю кривизну поверхности вращения $(1/r_1 + 1/r_2)/2$ ([9], с. 20). Как легко видеть, из (1.2) при $r_1 = r_2$ и $r_1 \gg r_2$ получаются соответственно случаи сферической и цилиндрической межфазных поверхностей. Прямая проверка справедливости формулы (1.2) экспериментальными методами связана с определенными трудностями. В частности, в литературе до сих пор отсутствуют достоверные сведения о значениях длины Толмена δ . Но необходимо отметить, что формула вида (1.2) достаточно точно воспроизводит результаты моделирования нанокapлей и нанопузырьков методом молекулярной динамики [10].

В настоящей работе с учетом условия механического равновесия при наличии внешней силы и формулы (1.2) строятся математические модели лежащей капли и поджатого пузырька. Предполагается, что поверхностное натяжение в термодинамической системе устанавливается в каждой точке вместе с ее геометрической формой, что обеспечивает требуемое постоянство химического потенциала.

2. Расчет краевых углов. Забегая вперед, обратим внимание на следующее. Обычно о размерной зависимости поверхностного натяжения принято говорить, когда объемы конденсированной фазы достаточно малы. В классических моделях влияние силы тяжести на форму мениска, напротив, существенно проявляется в области больших размеров. То есть там, где учитывается размерная зависимость поверхностного натяжения, наличие силы тяжести можно игнорировать, и наоборот. Но с возрастанием температуры толщина межфазного вместе с параметром δ увеличиваются вплоть до бесконечности. Поэтому зависимость поверхностного натяжения от кривизны поверхности, по-видимому, должна сказываться и в макроскопических системах, например, вблизи критической точки. С другой стороны, в уравнениях капиллярности присутствует ускорение свободного падения g , которое может иметь произвольные (в том числе и большие) значения. Так, под этим параметром и соответствующей силой

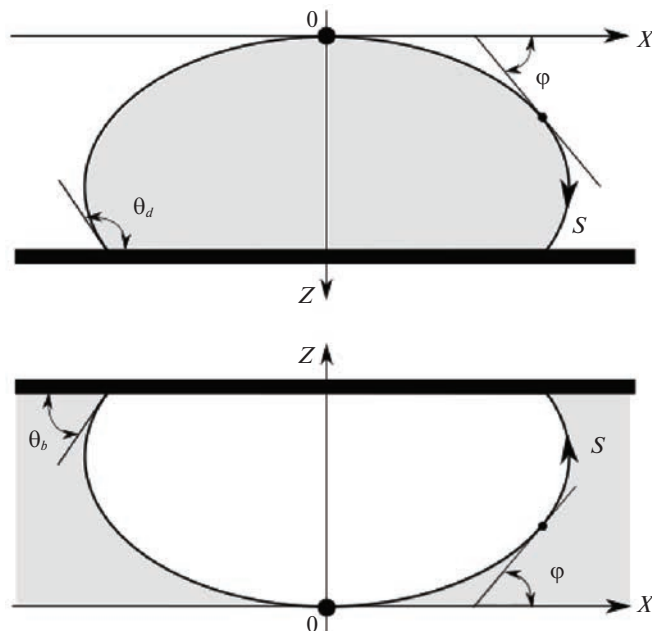


Рис. 1. Капля и пузырек на плоской поверхности.

необязательно подразумевать наличие именно гравитации. Для очень малых капель (высота ~ 1 нм) под g можно понимать некий условный параметр, который характеризует влияние подложки. Для таких капель давление за счет силы притяжения со стороны подложки может составлять сотни—тысячи паскалей. Таким образом, исходя из наиболее общих уравнений, возникает задача провести анализ лежащей капли и поджатого пузырька на предмет выполнения условия (1.1).

Рассмотрим лежащую каплю и поджатый (сидячий) пузырек на поверхности твердой недеформируемой подложки в состоянии термодинамического равновесия. Связанные с ними системы координат и принятые обозначения приведены на рис. 1: s — длина дуги, отмеряемая от вершины мениска, ϕ — угол наклона касательной к профилю мениска с положительным направлением горизонтальной оси x , (x, z) — координаты произвольной точки профиля.

В поле силы тяжести условие механического равновесия капли и пузырька определяется формулой Лапласа для избыточного давления [1, 11]:

$$\sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \Delta p_0 + \Delta \rho g z, \quad (2.1)$$

где Δp_0 — разность давлений в фазах в вершине мениска, $\Delta \rho$ — разность плотностей жидкой и газообразной фаз. Далее будем иметь в виду, что поверхностное натяжение σ зависит от средней кривизны поверхности согласно (1.2). В результате подстановки (1.2) в (2.1) получаем

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{\lambda + cz}{1 \pm \delta(\lambda + cz)}, \quad (2.2)$$

где $\lambda = \Delta p_0 / \sigma^{(\infty)}$, $c = \Delta \rho g / \sigma^{(\infty)}$ — капиллярная постоянная. В отличие от (1.2) здесь и далее знаки “+” и “−” относятся к пузырьку и капле соответственно.

Для главных кривизн поверхностей с вращательной симметрией справедливы выражения

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{\sin \varphi}{x} \quad (2.3)$$

Тогда из (2.3) найдем

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\lambda + cz}{1 \pm \delta(\lambda + cz)} - \frac{\sin \varphi}{x} \quad (2.4)$$

Для решения (2.4) целесообразен переход к безразмерным координатам. В качестве характерной длины выберем радиус кривизны в вершине мениска r_0 . Умножая обе части (2.4) на r_0 и имея в виду соотношения

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dz}{ds} = \sin \varphi,$$

справедливые для гладкой плоской кривой, окончательно получим

$$\frac{dX}{d\varphi} = \frac{[1 \pm \alpha(\gamma + \beta Z)] X \cos \varphi}{(\gamma + \beta Z) X - [1 \pm \alpha(\gamma + \beta Z)] \sin \varphi} \quad (2.5)$$

$$\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{[1 \pm \alpha(\gamma + \beta Z)] X \sin \varphi}{(\gamma + \beta Z) X - [1 \pm \alpha(\gamma + \beta Z)] \sin \varphi} \quad (2.6)$$

$$\frac{dV}{d\varphi} = \frac{\pi [1 \pm \alpha(\gamma + \beta Z)] X^3 \sin \varphi}{(\gamma + \beta Z) X - [1 \pm \alpha(\gamma + \beta Z)] \sin \varphi}, \quad (2.7)$$

где $X = x/r_0$, $Z = z/r_0$, V — безразмерный (отнесенный к r_0^3) объем, $\alpha = \delta/r_0$, $\gamma = 2/(1 \pm 2\alpha)$, $\beta = cr_0^2$ — число Бонда. В дополнение к уравнениям (2.5) и (2.6), которые определяют координаты профиля мениска, в систему включено дифференциальное выражение для объема (2.7). Оно требуется для расчета углов смачивания капли и пузырька с одинаковыми объемами. Присоединим к (2.5)–(2.7) начальные условия

$$X(\varphi = 0) = 0, \quad Z(\varphi = 0) = 0, \quad V(\varphi = 0) = 0 \quad (2.8)$$

Таким образом находим, что равновесные профили лежащей капли и поджатого пузырька с учетом размерной зависимости поверхностного натяжения описываются решениями задач Коши (2.5)–(2.8).

В качестве независимой переменной при параметризации профилей исследуемых менисков нами выбран угол наклона касательной φ к профилю. На то есть несколько причин. Во-первых, мениски выпуклы, а значит угол φ все время растет по мере удаления от их вершины. Это позволяет избежать неудобств, связанных с интегрированием неоднозначно заданных функций (подобное имеет место при параметризации по радиусу x). Во-вторых, конечные уравнения лишены неустраимых особенностей. И в третьих, область, где ищется решение, заведомо ограничена отрезком $[0, \pi]$.

Прежде всего заметим, что в отсутствие размерных эффектов, когда параметр δ полагается равным нулю, основное соотношение (2.2) переходит в уравнение Башфорта–Адамса [1]. В таком случае профили капли и пузырька описываются одинаковыми уравнениями, из чего сразу следует согласованность краевых углов в соответствии с условием (1.1). Иными словами, наличие внешнего силового поля не нарушает условие (1.1).

Пусть далее $\delta \neq 0$. Фиксированному набору параметров α и β в рассматриваемой модели обязаны соответствовать капли и пузырьки с одним и тем же значением объе-

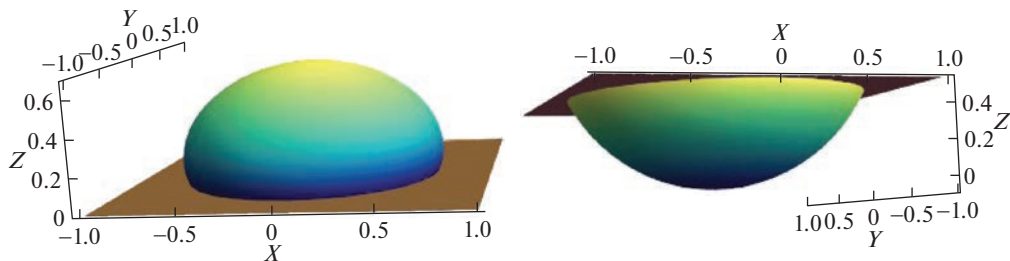


Рис. 2. Капля (слева) и пузырек (справа) с одинаковыми объемами.

ма V . Поэтому вычислительная процедура здесь заключается в том, чтобы при заданном объеме капли и пузырька определить углы смачивания θ_d и θ_b . Выбор объема осуществляется путем изменения области интегрирования по переменной φ . Максимальному объему капли и пузырька $V_{\max}$ соответствует интегрирование уравнения (2.7) на промежутке от 0 до предельно возможного угла $\varphi = \pi$.

Система (2.5)–(2.7) относится к классу нежестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, в связи с чем ее численное интегрирование удобно проводить явными разностными методами. В работе для этого использовался метод Рунге–Кутты 4-го порядка точности, а корректировка шага интегрирования осуществлялась согласно правилу Рунге. В итоге максимальная погрешность решения задачи Коши (2.5)–(2.8) не превышала $\varepsilon = 10^{-6}$. Равенство объемов капли и пузырька обеспечивалось также с указанной точностью.

На рис. 2 в качестве примера показаны капля и пузырек одинакового объема, полученные численным решением задачи (2.5)–(2.8). Данный пример наглядно демонстрирует, что при одинаковом объеме капля и пузырек имеют разную геометрическую форму и, соответственно, разные краевые углы. Меру отклонения от условия (1.1) удобно задавать числовым параметром $K = (\theta_d + \theta_b)/\pi$. Полученные в ходе вычислительного эксперимента результаты для диапазона краевых углов от $\pi/18$ до $5\pi/6$ с равномерным шагом $\Delta\theta = \pi/18$ при разных α представлены в виде графиков на рис. 3.

Из рис. 3 видно, что учет размерной зависимости поверхностного натяжения приводит к нарушению условия (1.1) и в присутствии внешнего силового поля. Причем чем больше значения параметра α или фактически значения толщины межфазного слоя, тем сильнее оно нарушается. Если же в уравнениях (2.5)–(2.7) пренебречь размерной зависимостью поверхностного натяжения ($\alpha \rightarrow 0$), то, как это и требуется, получается предельное значение параметра $K = 1$.

На приведенных графиках обращает на себя внимание монотонное возрастание величины K с увеличением объема. Такое поведение функции диктуется формулой (1.2) и интерпретируется следующим образом. По мере удаления от вершины гидростатическое давление внутри капли и пузырька возрастает. Значит, должна расти и локальная кривизна капиллярной поверхности. В свою очередь, увеличение кривизны приводит к усилению разницы в значениях поверхностного натяжения для капли и пузырька. Поэтому в области больших объемов, где наблюдаются заметные изменения кривизны поверхностей капли и пузырька, отклонения от условия (1.1) становятся существенными. Для нанок капель заметные изменения кривизны следует ожидать вблизи поверхности подложки, где эффективно действуют межатомные силы взаимодействия.

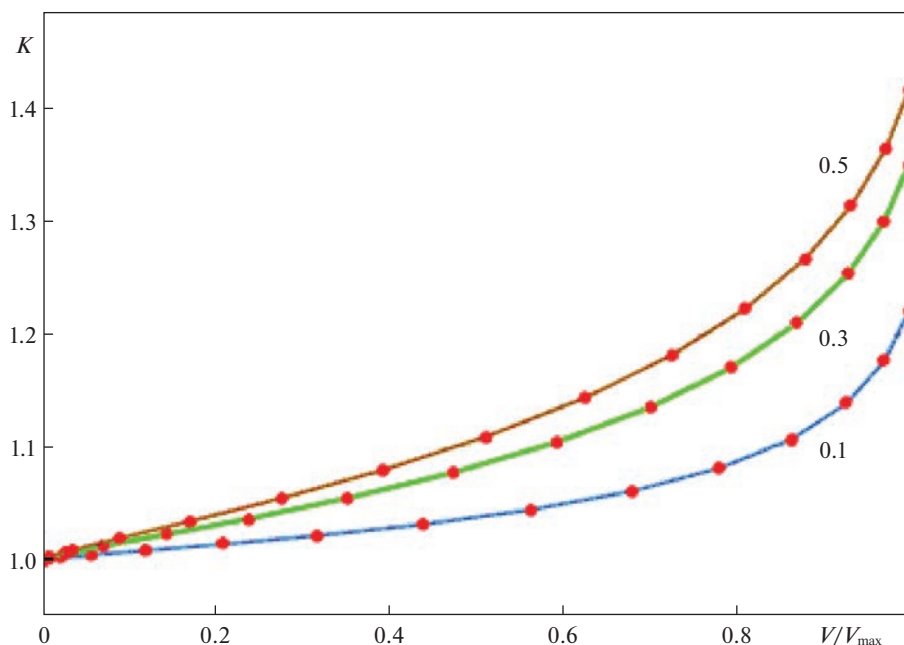


Рис. 3. Функции, характеризующие нарушение условия (1.1).

Выводы. В настоящей работе построены и численно реализованы математические модели равновесных поверхностей лежащей капли и поджатого пузырька. В результате вычислительных экспериментов показано, что при наличии размерной зависимости поверхностного натяжения нарушается условие согласованности краевых углов. Физически это объясняется тем, что у капли и пузырька поверхностные натяжения могут различаться даже для одной и той же жидкости. В рамках построенных моделей был сделан вывод о том, что внешнее силовое поле без учета размерной зависимости поверхностного натяжения не нарушает условие согласованности краевых углов. Данный вывод, однако, не представляется достаточно общим, и в этой части требуются дальнейшие исследования. Кроме того, предполагалось, что для капли и пузырька длина Толмена δ имеет одно и то же значение. Но в реальных термодинамических системах значения δ могут оказаться различными. Какие-либо сравнительные оценки δ для равнообъемных капель и пузырьков, находящихся в одинаковых термодинамических условиях, в литературе, к сожалению, отсутствуют.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Русанов А.И., Прохоров В.А. Межфазная тензиометрия. СПб.: Химия, 1994. 400 с.
2. Татьянаенко Д.В., Шекин А.К. Термодинамический анализ вкладов адсорбции и линейного натяжения в краевой угол малых сидячих капель // Коллоид. ж. 2019. Т. 81. № 4. С. 517–531.
3. Русанов А.И. Термодинамика краевого угла сидячего пузырька // Коллоид. ж. 2020. Т. 82. № 3. С. 354–362.
4. Zhang H., Zhang X. Size dependence of bubble wetting on surfaces: breakdown of contact angle match between small sized bubbles and droplets // Nanoscale. 2019. V. 11. № 6. P. 2823–2828.
5. Rusanov A.I., Tatyanyenko D.V., Shchekin A.K. Comment on “Size dependence of bubble wetting on surfaces: breakdown of contact angle match between small sized bubbles and droplets” by H. Zhang and X. Zhang, Nanoscale, 2019, 11, 2823 // Nanoscale. 2021. V. 13. № 7. P. 4308–4310.

6. *Рехвиашвили С.Ш.* Некоторые вопросы о малом сидячем пузырьке // Коллоид. ж. 2021. Т. 83. № 6. С. 738–740.
7. *Рехвиашвили С.Ш.* Размерная зависимость поверхностного натяжения малой капли в предположении постоянства длины Толмена: критический анализ // Коллоид. ж. 2020. Т. 82. № 3. С. 386–390.
8. *Rekhyashvili S.Sh., Sokurov A.A.* Modeling of a sessile droplet with the curvature dependence of surface tension // Turk. J. Phys. 2018. V. 42. № 6. P. 699–705.
9. *Русанов А.И.* Фазовые равновесия и поверхностные явления. Л.: Химия, 1967. 388 с.
10. *Wen J., Dini D., Hu H., Smith E.R.* Molecular droplets vs bubbles: Effect of curvature on surface tension and Tolman length // Phys. Fluids. 2021. V. 33. № 6. P. 072012.
11. *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989. 310 с.

On the Contact Angles of a Small Sessile Drop and a Captive Bubble in View of the Size Dependence of Surface Tension

A. A. Sokurov^{a, #}

^a*Institute of Applied Mathematics and Automation – the filial branch of Federal Scientific Center
“Kabardin-Balkar Scientific Center of the RAS, Nalchik, Russia*

[#]*e-mail: asokuroff@gmail.com*

New mathematical models of a sessile drop and a captive bubble are constructed taking into account the size dependence of surface tension. If the Tolman length tends to zero the well-known Bashforth–Adams model can be considered as a special case of the constructed models. Numerical calculations of the contact angles are carried out for various numeric values of the equilibrium volume. The study shows that the size dependence of the surface tension leads to a violation of the consistency condition between the contact angles of a drop and a bubble in an external force field.

Keywords: surface tension, capillary meniscus, size dependence, sessile drop, captive bubble, contact angle

REFERENCES

1. *Rusanov A.I., Prokhorov V.* Interfacial Tensiometry. St. Petersburg: Khimija; 1994. 400 p. (in Russian)
2. *Tatyanenko D.V., Shchekin A.K.* Thermodynamic analysis of adsorption and line-tension contributions to contact angles of small sessile droplets // Colloid J., 2019, vol. 81, no. 4, pp. 517–531.
3. *Rusanov A.I.* Thermodynamics of the contact angle of a sessile bubble // Colloid J., 2020, vol. 82, no. 3, pp. 303–310.
4. *Zhang H., Zhang X.* Size dependence of bubble wetting on surfaces: breakdown of contact angle match between small sized bubbles and droplets // Nanoscale, 2019, vol. 11, no. 6, pp. 2823–2828.
5. *Rusanov A.I., Tatyanenko D.V., Shchekin A.K.* Comment on “Size dependence of bubble wetting on surfaces: breakdown of contact angle match between small sized bubbles and droplets” by H. Zhang and X. Zhang, Nanoscale, 2019, 11, 2823 // Nanoscale, 2021, vol. 13, no. 7, pp. 4308–4310.
6. *Rekhyashvili S.Sh.* Some questions concerning a small sessile bubble // Colloid J., 2021, vol. 83, no. 6, pp. 816–818.
7. *Rekhyashvili S.Sh.* Size Dependence of the surface tension of a small droplet under the assumption of a constant tolman length: critical analysis // Colloid J., 2020, vol. 82, no. 3, pp. 342–345.
8. *Rekhyashvili S.Sh., Sokurov A.A.* Modeling of a sessile droplet with the curvature dependence of surface tension // Turk. J. Phys., 2018, vol. 42, no. 6, pp. 699–705.
9. *Rusanov A.I.* Phase Equilibria and Surface Phenomena. Leningrad: KHimija, 1967. 388 p. (in Russian)
10. *Wen J., Dini D., Hu H., Smith E.R.* Molecular droplets vs bubbles: Effect of curvature on surface tension and Tolman length // Phys. Fluids, 2021, vol. 33, no. 6, pp. 072012.
11. *Finn R.* Equilibrium Capillary Surfaces. N.Y.: Springer, 1986. 245 p.

УДК 533.6

ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТИПОЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВОГО УДАРА

© 2023 г. А. А. Корняков¹, В. Г. Судаков^{1,*}, А. С. Щеглов¹¹Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

*e-mail: vit_soudakov@tsagi.ru

Поступила в редакцию 18.05.2023 г.

После доработки 30.07.2023 г.

Принята к публикации 30.07.2023 г.

В настоящей работе разработана модификация метода мультипольного разложения, которая позволяет связать распределение избыточного давления в ближнем поле сверхзвукового пассажирского самолета (СПС) с распределением в дальнем поле, которое необходимо для решения задачи распространения звукового удара от СПС. Выполнено обобщение способа решения интегральных уравнений, возникающих при мультипольном разложении. Разработан алгоритм для мультипольной коррекции сигнатур звукового удара, получаемых в численных расчетах ближнего возмущенного поля, проведено тестирование.

Ключевые слова: звуковой удар, мультипольное разложение, сверхзвуковой пассажирский самолет, ближнее поле, дальнее поле

DOI: 10.31857/S0032823523050089, EDN: VCJLNO

1. Введение. Проектирование гражданского сверхзвукового самолета требует оценки громкости звукового удара у поверхности земли, т.е. на большом расстоянии от самолета [1]. Для расчета характеристик звукового удара необходимо определять сигнатуры избыточного давления, генерируемые летательным аппаратом. Наиболее предпочтительным сценарием их получения является прямой расчет с использованием методов вычислительной аэродинамики от самолета до поверхности земли, т.к. он имеет наименьшее количество дополнительных предположений. Например, в [2] проведен расчет звукового удара от простого осесимметричного тела в рамках уравнений Эйлера, с последовательным разбиением пространства от самолета до земли на относительно небольшие полосы по высоте. Однако такой подход является чрезвычайно затратным, поэтому его заменяют упрощенными постановками [3].

В настоящее время одним из наиболее часто употребляемых подходов является проведение численного моделирования в ближнем возмущенном поле в рамках уравнений Эйлера или Рейнольдса, а затем использование полученных распределений избыточного давления для моделирования распространения волны звукового удара в атмосфере на основе классической квазилинейной теории и подходов геометрической акустики [4, 5] или с использованием дополненного уравнения Бюргерса [6]. Такую процедуру иногда называют двухслойной. Для корректного расчета распространения звукового удара начальное распределение следует брать на таком удалении от обтекаемого тела, где азимутальные возмущения малы относительно продольных [3, 7], т.е. начальное распределение должно быть локально осесимметричным с пренебрежимо малым поперечным течением.

Для реальных компоновок самолетов с крылом, воздухозаборниками и другими особенностями [6], способными порождать поперечное течение на значительных удалениях от тела, эти условия могут быть обычно удовлетворены на расстояниях больше пяти длин самолета L . Однако, параметрические расчеты полной трехмерной компоновки в рамках уравнений Рейнольдса с определением возмущений давления, которые малы по сравнению с величинами в набегающем потоке, на расстоянии $5-10L$ также является процедурой, требующей большой точности и очень существенных вычислительных ресурсов. Это связано с тем, что при удалении от летательного аппарата диссипативные свойства численной схемы приводят к увеличению погрешности расчета. Поэтому на практике часто берут избыточное давление на относительно близком расстоянии порядка $1-3L$, что ведет к погрешностям в определении сигнатур звукового удара около земли из-за неучета существенного поперечного течения.

Чтобы уменьшить погрешность расчета и уменьшить расстояние, на котором необходимо определить начальное избыточное давление для задачи распространения звукового удара, можно применить трехслойную процедуру [8]. В этом случае избыточное давление можно брать на более близких расстояниях от летательного аппарата, потом применить процедуру коррекции этой эпюры для учета поперечного течения, а затем скорректированные возмущения использовать для задачи распространения звукового удара до земли. В настоящей работе для этой цели используется метод мультипольного разложения.

2. Метод мультипольного разложения. Метод мультипольного разложения [9] основан на точном решении линеаризованного уравнения для потенциала возмущенной скорости φ от сверхзвукового пассажирского самолета:

$$-\beta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} = 0, \quad (2.1)$$

где в цилиндрической системе координат x — продольная координата, r — радиальная координата, θ — азимутальная; $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$, M — число Маха набегающего потока. Следует отметить, что данное уравнение предполагает малость возмущений скорости относительно скорости набегающего потока, и в нем оставлено только линейное приближение.

Решение уравнения (2.1) можно записать, разместив так называемые мультиполи с плотностью $A_n(x)$, $B_n(x)$ непрерывным образом вдоль оси x [9]:

$$\varphi(x, r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{x-\beta r} (A_n(\xi) \cos(n\theta) + B_n(\xi) \sin(n\theta)) g_n(x - \xi, r) d\xi, \quad (2.2)$$

где ξ — переменная интегрирования, n — номер мультиполя, а функция интенсивности мультиполя g_n :

$$g_n(x, r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cosh\left(n \cosh^{-1}(x/\beta r)\right)}{\sqrt{x^2 - \beta^2 r^2}} \quad (2.3)$$

В характеристических переменных ($\eta = x - \beta r$)

$$g_n(\eta, r) = g_{\infty}(\eta, r) G_n(\eta, r); \quad g_{\infty}(\eta, r) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{2\beta r\eta}}$$

$$G_n(\eta, r) = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta/(2\beta r)}} \cosh\left(n \cosh^{-1}\left(1 + \frac{\eta}{\beta r}\right)\right)$$

F -функцию Уитема [3] можно определить из линеаризованного соотношения для малых возмущений давления Δp :

$$\frac{\Delta p}{p_\infty} = \frac{\gamma M^2}{\sqrt{2\beta} r} F(r, \eta, \theta), \quad (2.4)$$

где p_∞ — давление окружающего воздуха, γ — отношение удельных теплоемкостей. Тогда

$$F(r, \eta, \theta) = \frac{1}{2\pi u_\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\eta} \frac{(A_n(\xi) \cos(n\theta) + B_n(\xi) \sin(n\theta)) G_n(\eta - \xi, r)}{\sqrt{\eta - \xi}} d\xi, \quad (2.5)$$

где u_∞ — скорость набегающего потока.

Следует отметить, что похожие формулы указаны, например, в [10, 11], однако там дифференцирование и интегрирование по η проводилось иначе, что ведет к некоторым различиям.

Пусть из CFD-расчета известно поле возмущений давления $\Delta p(x, R, \theta)$ на некоторой цилиндрической поверхности радиуса R вокруг летательного аппарата, на которой течение еще не является локально осесимметричным, но возмущения можно считать малыми. Из соотношения (2.4) можно найти F -функцию Уитема на цилиндре R . Раскладывая ее в ряд Фурье

$$F(\eta, \theta, R) = F_{c,n}(\eta, R) \cos(n\theta) + F_{s,n}(\eta, R) \sin(n\theta) \quad (2.6)$$

и вычислив интегралы, отвечающие за симметричную и несимметричную части,

$$H_{c,n} = \int_0^{\eta} F_{c,n}(\xi, R) d\xi, \quad H_{s,n} = \int_0^{\eta} F_{s,n}(\xi, R) d\xi, \quad (2.7)$$

можно получить интегральные уравнения для A_n, B_n :

$$\begin{aligned} H_{c,n}(\eta, R) &= \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_0^{\eta} A_n(\xi) \frac{G_n(\eta - \xi, R)}{\sqrt{\eta - \xi}} d\xi \\ H_{s,n}(\eta, R) &= \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_0^{\eta} B_n(\xi) \frac{G_n(\eta - \xi, R)}{\sqrt{\eta - \xi}} d\xi \end{aligned} \quad (2.8)$$

Несколько отличающиеся интегральные уравнения указаны в [10, 11], где дальнейшее их решение основано на разложении функции G_n в ряд Тэйлора

$$G_n(\eta, r) = \sum_{j=0}^J f_j \left(\frac{\eta}{\beta r} \right)^j; \quad f_0(n) = 1, \quad f_j(n) = \frac{n^2 - (j - 1/2)^2}{j(2j - 1)} f_{j-1}(n)$$

Такое разложение становится некорректным по мере уменьшения радиуса цилиндра R , т.к. при приближении к поверхности летательного аппарата ряд начинает расходиться. Кроме того, чем больше порядок мультиполя, тем больше требуется членов ряда Тэйлора. В результате расчетов авторы [11] получили расходимость решения при уменьшении R , по мере увеличения n и J .

В настоящей работе интегральные уравнения (2.8) решаются прямым численно-аналитическим методом второго порядка точности без дополнительных упрощений и асимптотических разложений, что позволяет избежать расходимости метода [10, 11]. Для этого в интегральных уравнениях относительно неизвестной функции $A(\xi)$ (2.8) вида

$$\int_0^{\eta} A(\xi) \frac{G(\eta - \xi)}{\sqrt{\eta - \xi}} d\xi = H(\eta)$$

производится переинтерполяция известных функций на равномерное разбиение $[\eta_1, \dots, \eta_K]$ с шагом $\Delta\eta$ (обычно производится разбиение не менее, чем на 500 отрезков). При этом функции предполагаются кусочно-линейными на каждом из отрезков. Тогда в каждой из точек η_k , $k = 2, \dots, K$:

$$H_k = \sum_{z=2}^k \int_{\eta_{z-1}}^{\eta_z} A(\xi) \frac{G(\eta_k - \xi)}{\sqrt{\eta_k - \xi}} d\xi =$$

$$= \sum_{z=2}^k \int_{\eta_{z-1}}^{\eta_z} \left(A_{z-1} + \frac{A_z - A_{z-1}}{\Delta\eta} (\xi - \eta_{z-1}) \right) \left(\frac{G_{k-z+2} - G_{k-z+1}}{\Delta\eta} (\eta_z - \xi) + G_{k-z+1} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{\eta_k - \xi}},$$

где $A_z = A(\eta_z)$, $H_k = H(\eta_k)$, $G_{k-z+1} = G(\eta_{k-z+1}) = G(\eta_k - \eta_z)$. Обозначим

$$\frac{G_{k-z+2} - G_{k-z+1}}{\Delta\eta} = P_{k,z}, \quad H_k = \sum_{z=2}^k (A_{z-1} D_{k,z-1} + A_z M_{k,z}); \quad k = 2, \dots, K,$$

где

$$D_{k,z-1} = - \int_{\eta_{z-1}}^{\eta_z} \frac{\xi - \eta_z}{\Delta\eta} (P_{k,z} (\eta_z - \xi) + G_{k-z+1}) \frac{d\xi}{\sqrt{\eta_k - \xi}}$$

$$M_{k,z} = \int_{\eta_{z-1}}^{\eta_z} \frac{\xi - \eta_{z-1}}{\Delta\eta} (P_{k,z} (\eta_z - \xi) + G_{k-z+1}) \frac{d\xi}{\sqrt{\eta_k - \xi}}$$

Интегралы $M_{k,z}$ вычисляются аналитически:

$$M_{k,z} = \frac{1}{15\Delta\eta} \left[4(\eta_k - \eta_{z-1})^{3/2} (5G_{k-z+1} - 4\eta_k P_{k,z} + 5\eta_z P_{k,z} - \eta_{z-1} P_{k,z}) - \right.$$

$$\left. - 2(\eta_k - \eta_z)^{1/2} (10\eta_k G_{k-z+1} + 5G_{k-z+1} \eta_z - 15\eta_{z-1} G_{k-z+1} - \right.$$

$$\left. - 8\eta_k^2 P_{k,z} + 2\eta_z^2 P_{k,z} + 6\eta_k \eta_z P_{k,z} + 10\eta_{z-1} \eta_k P_{k,z} - 10\eta_{z-1} \eta_z P_{k,z}) \right]$$

Интегралы $D_{k,z}$ вычисляются аналогично. В результате получается система алгебраических уравнений, которая решается стандартным методом.

Найдя A_n, B_n можно получить асимптотику при $r \rightarrow \infty$, которая соответствует локально осесимметричному полю и нужна для решения задачи распространения звукового удара:

$$F^\infty(\eta, \theta) = \frac{1}{2\pi u_\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^\eta \frac{A_n(\xi) \cos(n\theta) + B_n(\xi) \sin(n\theta)}{\sqrt{\eta - \xi}} d\xi \right) \quad (2.9)$$

Следует отметить, что возмущение давления, соответствующее этой F -функции, приписывается обратно цилиндру радиуса R . Это связано с тем, что возмущения в ближнем поле ищутся обычно при однородном набегающем потоке, и асимптотика соответствует именно такой постановке. Но в реальности при удалении от самолета играет роль изменение атмосферы с высотой и нелинейность, которые не учитываются данной асимптотикой.

Таким образом, алгоритм использования мультипольного разложения для коррекции эпюр избыточного давления следующий:

- 1) из соотношения (2.4) определить $F(\eta, \theta, R)$ на цилиндре радиуса R по результатам численного моделирования в рамках уравнений Эйлера или Рейнольдса;
- 2) разложить F в ряд Фурье на цилиндре по формуле (2.6);
- 3) вычислить интегралы (2.7);

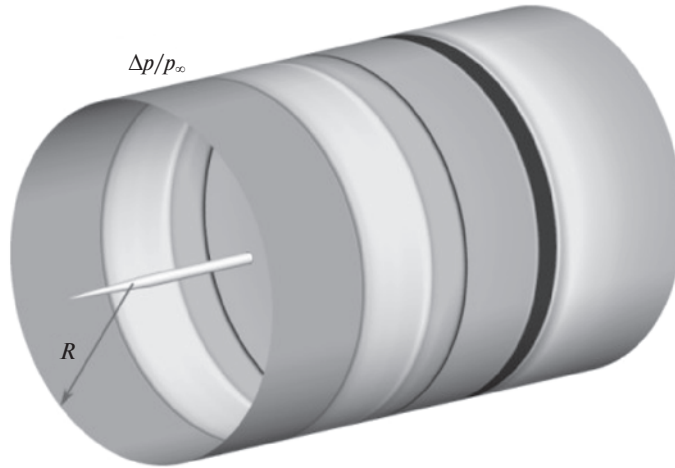


Рис. 1. Распределение избыточного давления на цилиндрической поверхности радиуса R для простого осесимметричного тела SEEB-ALR на расстоянии $R/L = 1.2$.

- 4) найти A_n, B_n из интегральных уравнений (2.8);
- 5) определить асимптотику $F^\infty(\eta, \theta)$ в дальнем поле по формуле (2.9);
- 6) найти скорректированное значение избыточного давления по формуле (2.4) и приписать его цилиндру радиуса R .

Далее скорректированную сигнатуру избыточного давления можно использовать в программах распространения звукового удара до земли, т.к. она будет соответствовать асимптотике дальнего поля, где течение локально осесимметрично (отсутствует азимутальное перетекание) и будет выполняться закон затухания $\sim r^{-1/2}$.

По данным результатам была разработана программа MPDtool для коррекции эпюр избыточного давления с помощью метода мультипольного разложения. Ниже представлены результаты ее использования для расчета звукового удара простых тел, которые рассматривались в First Sonic Boom Prediction Workshop (SBPW) в качестве тестовых случаев [12]: SEEB-ALR – простое осесимметричное тело и DWB-69 – компоновка фюзеляж–треугольное крыло с углом стреловидности 69° .

3. Расчетные исследования обтекания осесимметричного тела. Проведены исследования звукового удара от простого осесимметричного тела SEEB-ALR [12] (рис. 1), которое моделирует носовую часть СПС. Сначала предполагалось, что модель длиной $L = 0.4491$ м расположена в аэродинамической трубе [12] с нулевым углом атаки при параметрах набегающего потока $M = 1.6$, $T_\infty = 198.43$ К (температура набегающего потока), $p_\infty = 16148.93$ Па, что соответствует числу Рейнольдса по длине модели $Re = 4.36 \times 10^6$. Данные параметры выбраны для валидации ближнего поля возмущений модели, которое было измерено в аэродинамической трубе [12].

Проводился расчет ближнего поля в рамках уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью модели турбулентности Спалара–Аллмараса [13]. В расчетной области использовалась многоблочная структурированная сетка с семью миллионами ячеек, которая позволяет хорошо разрешить течение около поверхности тела. Размеры пристенных ячеек задавались так, чтобы Y^+ первой ячейки по нормали к поверхности был меньше 1. Численная задача решалась стандартной программой с помощью неяв-

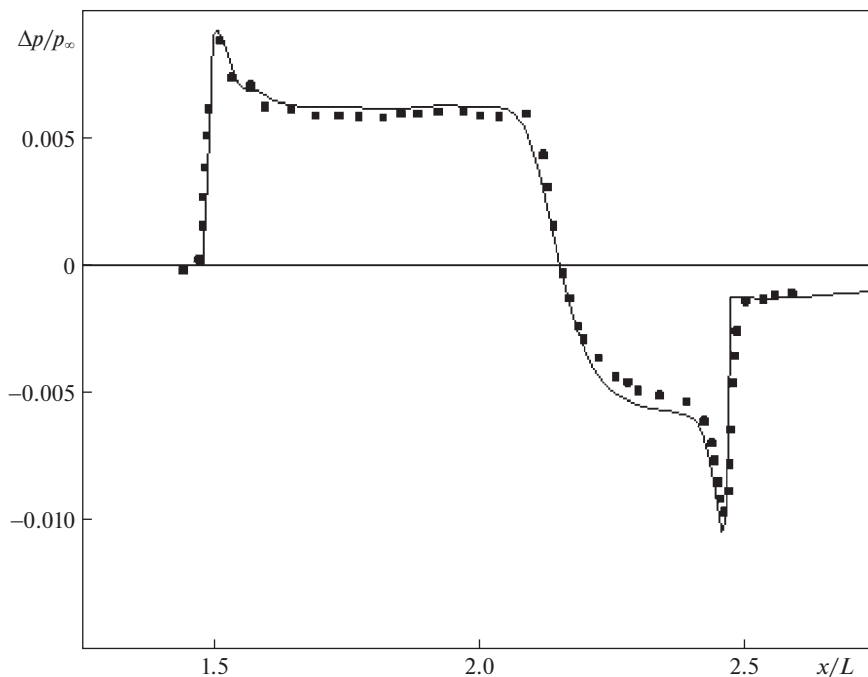


Рис. 2. Сравнение избыточного давления в ближнем поле на расстоянии $R/L = 1.2$ для простого осесимметричного тела SEEB-ALR; сплошная кривая – расчет, маркеры – эксперимент [12].

ного метода конечного объема сквозного счета. Схема имеет второй порядок точности по пространству. Численный алгоритм аналогичен используемому в [14].

Сравнение результатов численного моделирования в ближнем поле на расстоянии $R/L = 1.2$ вниз от модели с результатами эксперимента [12] приведено на рис. 2. Видно, что результаты расчета возмущений в ближнем поле лежат близко к экспериментальным данным.

Для задачи распространения звукового удара были сделаны предположения [12], что данное оживальное тело имеет длину $L = 74.8$ м и летит на высоте $H = 16764$ м с тем же числом Маха 1.6. Ближнее поле считалось аналогично, в результате чего были получены возмущения давления на цилиндрах радиуса $R/L = 0.25, 0.5, 1, 1.2, 2.38$.

Затем избыточное давление на этих цилиндрах корректировалось с помощью программы MPDtool на основе мультипольного разложения. Дискретизация по азимутальному углу составляла 2° . После этого полученная эпюра задавалась в качестве исходных данных для задачи распространения звукового удара до земли, которая решалась в рамках классического подхода [4, 5] с помощью собственной программы sbProp.

Результаты расчетов сигнатуры звукового удара на земле от осесимметричного тела SEEB-ALR представлены на рис. 3 для наибольшего и наименьшего из рассмотренных цилиндров $R/L = 2.38$ и 0.25 . Видно, что если не использовать мультипольное разложение, то эпюры на земле заметно отличаются для случаев расчета от ближнего поля на $R/L = 2.38$ (кривая 3 на рис. 3) и $R/L = 0.25$ (кривая 1 на рис. 3). Кривая 1 лежит заметно ниже под плато и отличается перед задним скачком. С увеличением R/L результаты сходятся к корректному решению, которое не зависит от R/L .

Использование мультипольной коррекции с $R/L = 2.38$ (кривая 4 на рис. 3) ведет к практически такой же сигнатуре на земле, как и без мультипольной коррекции (кри-

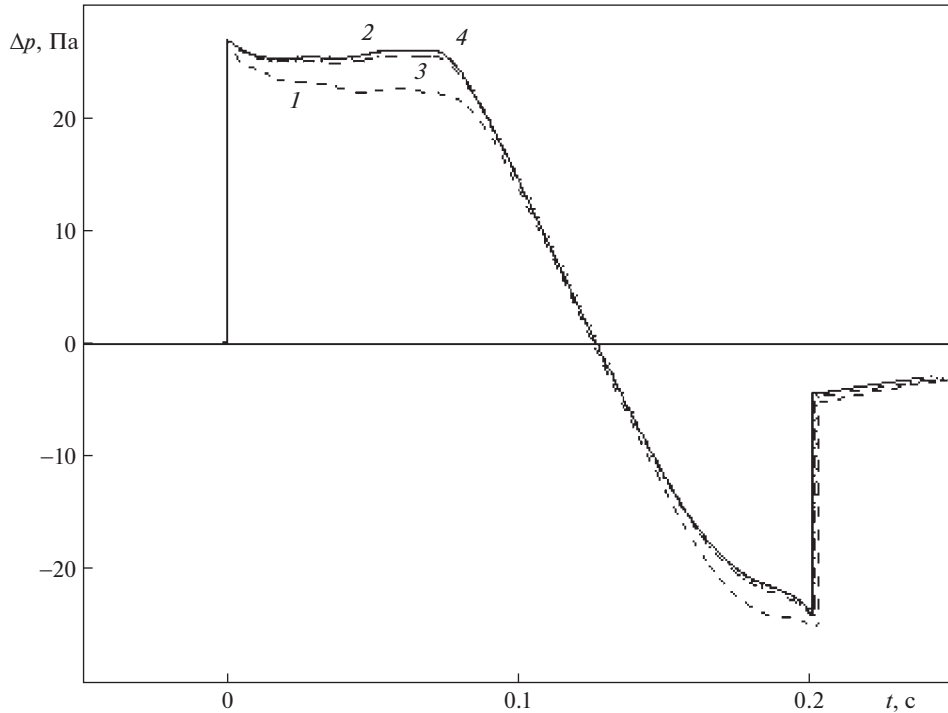


Рис. 3. Сигнатура звукового удара от SEEB-ALR на земле с использованием и без использования мультипольного разложения.

вая 3). Это говорит о том, что кривая 3 практически совпадает с корректным (предельным) решением, т.к. толщина рассматриваемого тела мала, крыла нет и возмущения осесимметричны. Поэтому сигнатура с $R/L = 2.38$ без мультипольной коррекции и с ней практически сливаются.

Применение мультипольной коррекции для эпюры избыточного давления с $R/L = 0.25$ и последующее решение задачи распространения звукового удара до земли приводят к кривой 2, которая ложится на кривую 4 с $R/L = 2.38$. Это говорит о возможности считать ближнее поле возмущений от этого тела до $R/L = 0.25$ и применять его для задачи распространения звукового удара.

Следует отметить, что данное тело является практически осесимметричным (с точностью до изготовления [12]). Поэтому ближнее поле осесимметрично и мультипольное разложение по азимутальному углу не дает коррекции. Однако коррекция происходит из-за разложения по r , т.к. ближнее поле еще не соответствует асимптотике $\sim r^{-1/2}$, которая используется при решении задачи распространения звукового удара до земли.

4. Расчетные исследования компоновки крыло–фюзеляж. Проведены исследования звукового удара от компоновки DWB-69 фюзеляж–треугольное крыло с углом стреловидности 69° [12] (рис. 4). Крыло имеет ромбовидную форму с толщиной 5%. Сначала предполагалось, что модель длиной $L = 0.1752$ м расположена в аэродинамической трубе [12] с нулевым углом атаки при параметрах набегающего потока $M = 1.7$, $T_0 = 308.2$ К (полная температура набегающего потока), $p_0 = 110235$ Па (полное давление). Как и в случае оживального тела, проведена валидация ближнего поля моде-

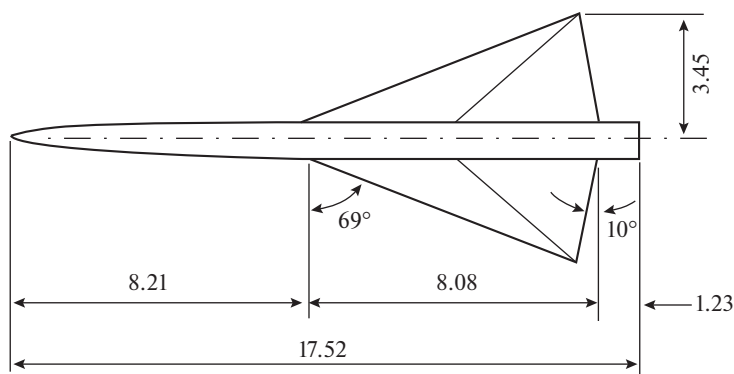


Рис. 4. Модель DWB-69 [12], размеры в сантиметрах.

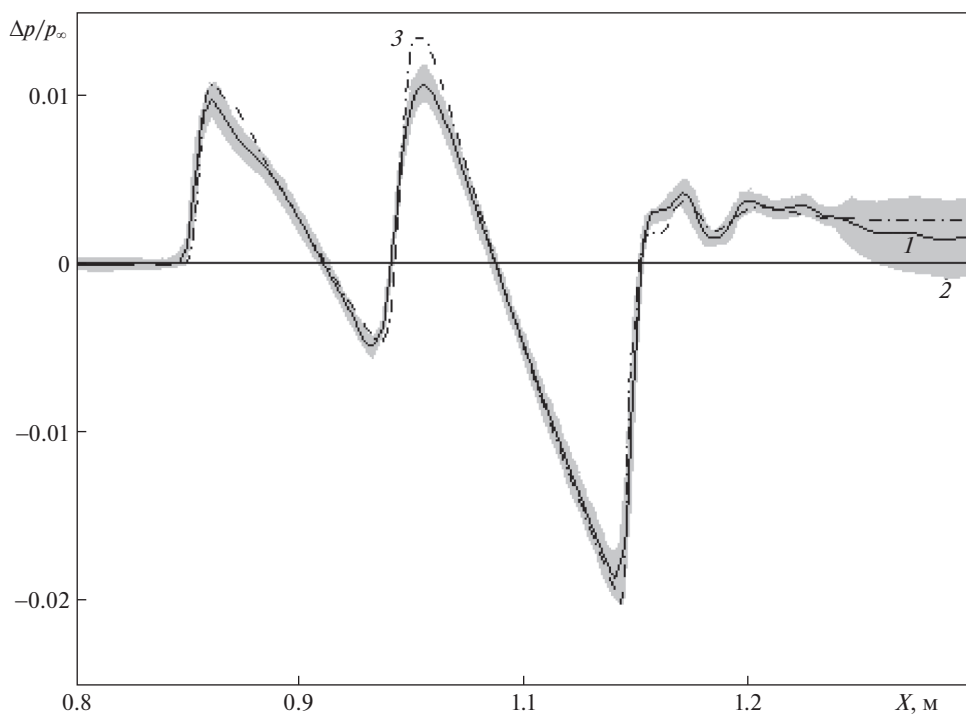


Рис. 5. Сравнение избыточного давления в ближнем поле на расстоянии $R/L = 3.6$ для компоновки крыло–фюзеляж DWB-69; сплошная кривая 1 – эксперимент [12], серая область 2 – разброс экспериментальных данных, 3 – расчет.

ли [12], которое рассчитывалось для половины симметричной модели аналогично предыдущему пункту. Использовалась многоблочная структурированная сетка с пятьюдесятью миллионами ячеек с Y^+ первой ячейки по нормали к поверхности меньше 1.

На рис. 5 представлено сравнение численного решения в рамках уравнений Рейнольдса (кривая 3) на расстоянии $R/L = 3.6$ вниз от модели с результатами эксперимента [12] (сплошная кривая 1 и разброс экспериментальных данных, обозначенный серой областью 2). Результаты расчета (кривая 3) ближнего поля лежат близко к экспериментальным данным и попадают в разброс расчетных значений других авторов [12].

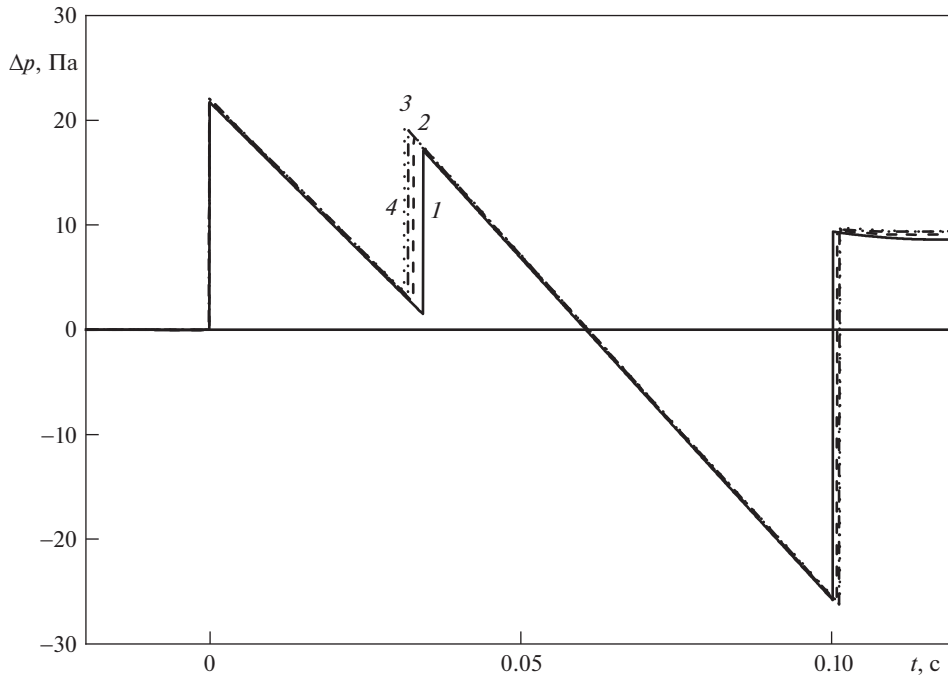


Рис. 6. Сигнатура звукового удара от DWB-69 на земле без использования мультипольного разложения, 1 – от $R/L = 0.5$, 2 – $R/L = 1$, 3 – $R/L = 2$, 4 – $R/L = 3.6$.

Для задачи распространения звукового удара были сделаны предположения [12], что данная компоновка имеет длину $L = 26.95$ м и летит на высоте $H = 16764$ м с тем же числом Маха 1.7. Ближнее поле считалось аналогично, в результате чего были получены возмущения давления на цилиндрах радиуса $R/L = 0.5, 1, 2, 3, 3.6$.

Затем, как и ранее, избыточное давление на этих цилиндрах корректировалось с помощью программы MPDtool на основе мультипольного разложения, а полученная эпюра задавалась в качестве исходных данных для задачи распространения звукового удара до земли по программе sbProp. Количество мультиполей в разложении было $n = 10$.

Результаты расчетов сигнатуры звукового удара на земле от компоновки DWB-69 представлены на рис. 6 для расчетов от $R/L = 0.5, 1, 2, 3.6$ без использования мультипольной коррекции. Эпюры сходятся к предельному корректному значению при увеличении R/L , как это хорошо видно на промежуточном и замыкающем скачке (передний скачок для всех эпюр совмещен с началом координат).

Использование мультипольной коррекции (рис. 7) ведет к тому, что на земле все сигнатуры (при расчете от $R/L = 0.5, 1, 2, 3.6$) практически сливаются. Кроме того, эпюра от $R/L = 3.6$ без коррекции (кривая 4 на рис. 6) очень близка к эпюрам после коррекции (все кривые на рис. 7). Это говорит о сходимости метода и возможности использования ближнего поля от $R/L = 0.5$ с применением мультипольного разложения.

5. Применение интеграла Жилина. Ранее в [15] был разработан подход для определения звукового удара на земле от СПС с использованием интеграла Жилина. В этом случае ближнее поле может быть рассчитано в рамках, например, уравнений Эйлера или Рейнольдса. Предполагается, что возмущения, вносимые летательным аппаратом в набегающий поток, малы, и используется линейное приближение.

В [15] проведена контрольная поверхность из плоскостей S_1-S_4 (рис. 8). S_1 отделяет возмущенный поток от невозмущенного (конус Маха). S_2 обычно параллельна плоскости XZ , лежит ниже тела и не пересекает его. Точки A и B лежат на линии пересече-

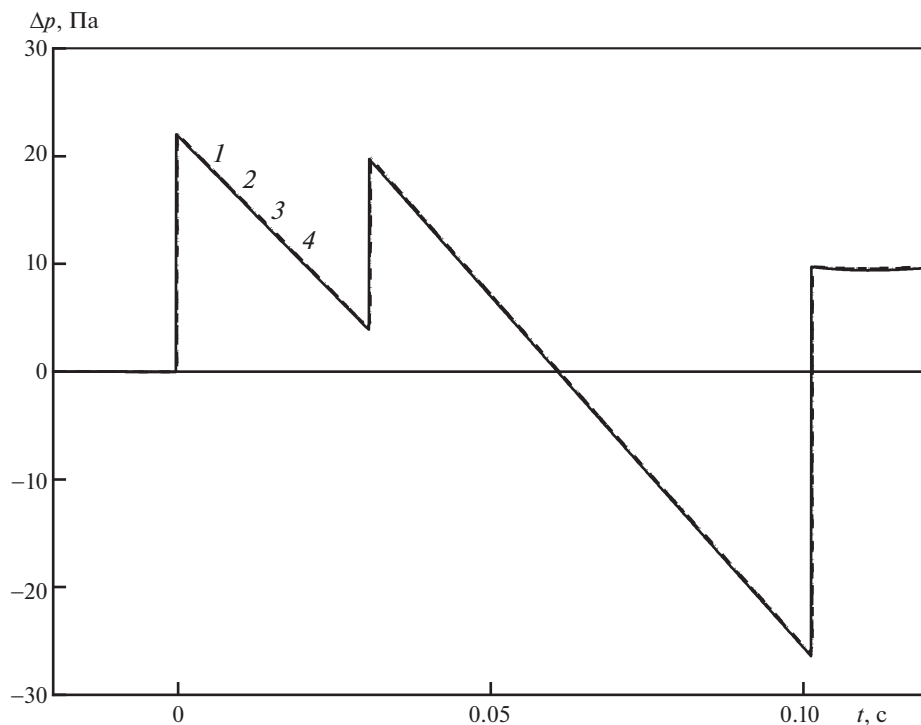


Рис. 7. Сигнатура звукового удара от DWB-69 на земле с использованием мультипольного разложения, 1 – от $R/L = 0.5$, 2 – $R/L = 1$, 3 – $R/L = 2$, 4 – $R/L = 3.6$.

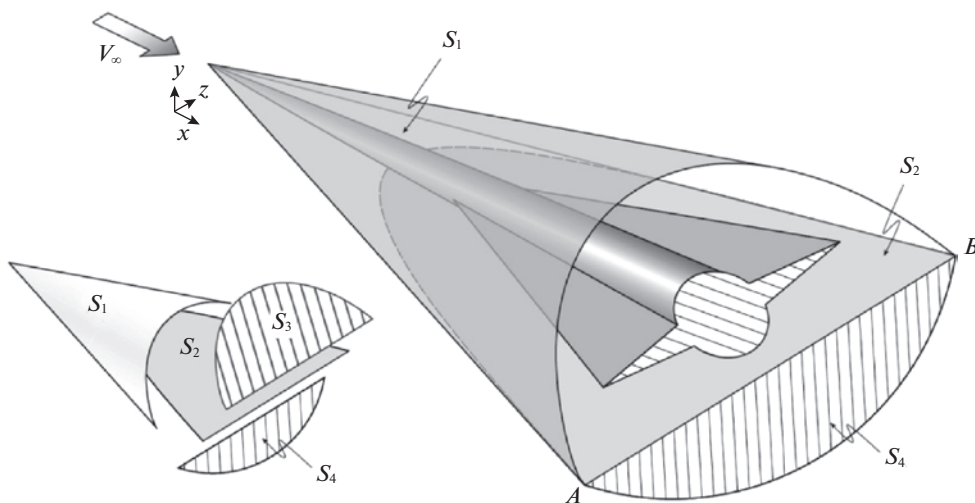


Рис. 8. Плоскости для определения интегралов Жилина [15].

ния плоскости S_2 и поверхности S_1 , S_3 и S_4 – огибающие обратных конусов Маха, проходящие через отрезок AB .

Из интегральных теорем сохранения массы и импульса в линейном приближении, записанных для данной контрольной поверхности, получены интегралы Жилина, позволяющие найти площадь эквивалентного тела вращения S_e :

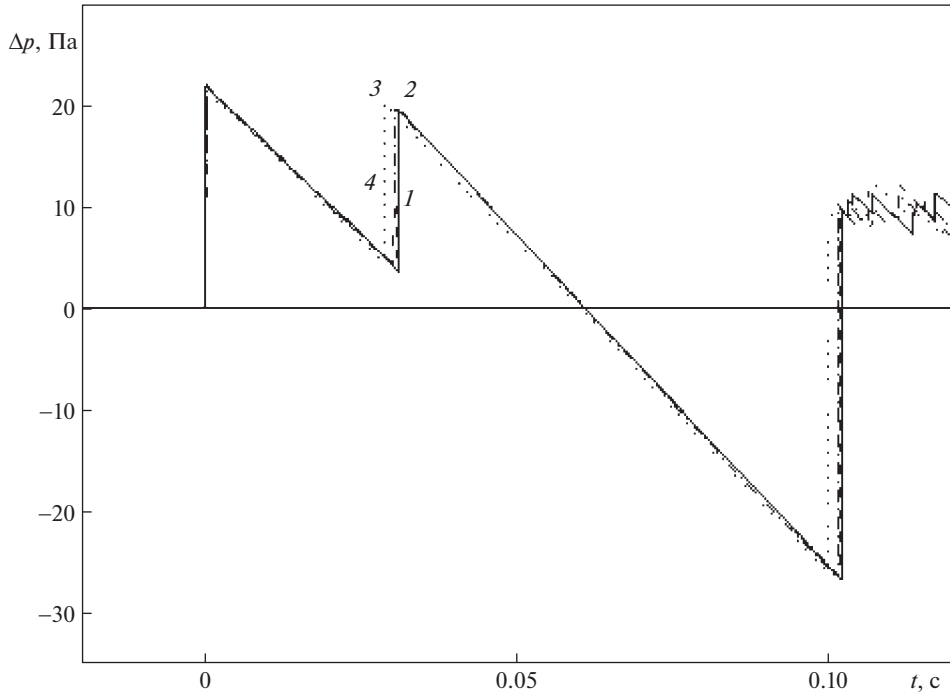


Рис. 9. Сигнатура звукового удара от DWB-69 на земле с использованием интеграла Жилина, 1 – от $R/L = 0.3$, 2 – $R/L = 0.5$, 3 – $R/L = 1$, 4 – $R/L = 3$.

$$S_e(x_0) = -\frac{2\beta}{u_\infty} \iint_{S_2} u dS = -\frac{2}{u_\infty} \iint_{S_2} v dS,$$

где u , v – возмущения продольной и вертикальной компоненты скорости соответственно; x_0 – координата точки пересечения S_3 с осью x . Выписанные формулы верны для направления под самолетом, а для других азимутальных углов они усложняются. Также можно записать:

$$\frac{dS_e(x_0)}{dx_0} = -\frac{2\beta}{u_\infty} \int_A^B u dz = -\frac{2}{u_\infty} \int_A^B v dz, \quad (5.1)$$

где интегралы вычисляются вдоль отрезка AB .

Далее для расчетов будет использоваться второй из этих интегралов относительно v . Тогда F -функцию Уитема можно вычислить по стандартной формуле [3]:

$$F(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{S_e''(\xi)}{\sqrt{\eta - \xi}} d\xi$$

Для сравнения такого подхода с предыдущими проведены расчеты звукового удара от компоновки DWB-69 с длиной $L = 26.95$ м, которая летит на высоте $H = 16764$ м с числом Маха 1.7 (как в разд. 3). Расчет ближнего поля представлен в разд. 3. В результате были получены возмущения давления в плоскостях $H/L = 0.3, 0.5, 1, 2, 3$. Затем при помощи второго интеграла (5.1) находилась F -функция Уитема, которая использовалась для решения задачи распространения звукового удара до земли.

Результаты расчетов сигнатуры звукового удара на земле представлены на рис. 9 для разных вариантов H/L . Эпюры сходятся к предельному значению при увеличении H/L , как это видно на промежуточном скачке (передний скачок для всех эпюр совмещен с

началом координат). Однако, избыточное давление для $H/L = 0.3$ заметно отличается от случая $H/L = 3$.

Таким образом, в [15] были получены интегральные соотношения для возмущенных скоростей, которые можно использовать для задачи распространения звукового удара до земли. Но такой подход, в целом, имеет схожие недостатки, что и двухслойный подход, указанный во введении. Как указано в [15], способом решения задачи может служить прямой расчет пространственного обтекания тела с выходом на асимптотическое решение, где оно развивается в каждой меридиональной плоскости независимо с зависимостью $\sim r^{-1/2}$. Такое поведение для сложных компоновок достигается обычно после 5 длин летательного аппарата.

Другой вариант, указанный, например, в [3] содержит расчет ближнего поля в рамках уравнений Эйлера с определением интеграла Жилина на плоскости $H/L = 0.3-0.5$, затем расчет распространения избыточного давления по закону Келлера [16] до $\sim 5L$. После чего проводится расчет распространения звукового удара до земли в атмосфере по классической теории [4].

Таким образом, для надежного предсказания эпюры избыточного давления на земле исходные данные для задачи распространения звукового удара надо брать на расстоянии больше $5L$ даже в случае использования интеграла Жилина.

Заключение. Разработан метод расчета звукового удара от СПС с использованием мультипольного разложения с численно-аналитическим прямым способом решения возникающих интегральных уравнений второго порядка точности. Метод не имеет расходимости даже на малых расстояниях от летательного аппарата ~ 0.25 его длины.

Проведено сравнение интенсивности звукового удара для простого осесимметричного тела и компоновки крыло-фюзеляж с использованием мультипольного разложения и без него. Показано, что разработанный метод сходится к корректному решению и позволяет применять избыточное давление из ближнего поля с расстояния до 1 длины летательного аппарата для задачи распространения звукового удара до земли.

Авторы благодарят Ю.С. Суворову и К.Г. Хайруллина за помощь при проведении расчетов.

Публикация подготовлена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня “Сверхзвук” на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение о предоставлении гранта в форме субсидий из федерального бюджета на осуществление государственной поддержки создания и развития научных центров мирового уровня, выполняющих исследования и разработки по приоритетам научно-технологического развития от 17 мая 2022 г. № 075-15-2022-1023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения // ПММ. 1945. Т. 9. № 4. С. 286–292.
2. Yamashita R., Wutschitz L., Nikiforakis N. A full-field simulation methodology for sonic boom modelling on adaptive Cartesian cut-cell meshes // J. Comput. Phys. 2020. V. 408. № 109271. P. 1–19.
3. Чернышев С.Л. Звуковой удар. М.: Наука, 2011. 351 с.
4. Жилин Ю.Л. О звуковом ударе // Уч. зап. ЦАГИ. 1971. Т. 2. № 3. С. 1–11.
5. Thomas C.L. Extrapolation of sonic boom pressure signatures by the waveform parameter method // NASA TN D-6832. 1972. 35 p.
6. Chernyshev S.L., Gorbovskoy V.S., Kazhan A.V., Korunov A.O. Re-entry vehicle sonic boom issue: modelling and calculation results in windy atmosphere based on the augmented Burgers equation // Acta Astron. 2022. V. 194. P. 450–460.
7. Maglieri D.J., Bobbitt P.J., Plotkin K.J., Shepherd K.P., Coen P.G., Richwine D.M. Sonic boom. Six decades of research // NASA-SP-2014-622. 2014. 539 p.

8. *Page J.A., Plotkin K.J.* An efficient method for incorporating computational fluid dynamics into sonic boom prediction // AIAA Paper 1991-3275. 1991.
9. *George A.* Reduction of sonic boom by azimuthal redistribution of overpressure // AIAA J. 1969. V. 7. № 2. P. 291–297.
10. *Rallabhandi S.K., Mavris D.N.* New computational procedure for incorporating computational fluid dynamics into sonic boom prediction // J. Aircraft. 2007. V. 44. № 6. P. 1964–1971.
11. *Kanamori M., Makino Y., Ishikawa H.* Extension of multipole analysis to laterally asymmetric flow-field around supersonic flight vehicle // AIAA J. 2019. V. 56. № 1. P. 191–204.
12. *Park M.A., Morgenstern J.M.* Summary and statistical analysis of the first AIAA sonic boom prediction workshop // J. Aircraft. 2016. V. 53. № 2. P. 578–598.
13. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper 1992-0439. 1992.
14. *Fedorov A.V., Soudakov V.G., Malmuth N.D.* Theoretical modeling of two-body interaction in supersonic flow // AIAA J. 2010. V. 48. № 2. P. 258–266.
15. *Жилин Ю.Л., Коваленко В.В.* О связывании ближнего и дальнего полей в задаче о звуковом ударе // Уч. зап. ЦАГИ. 1998. Т. XXIX. № 3–4. С. 111–122.
16. *Keller J.B.* Geometrical acoustics. I. The theory of weak shock waves // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. № 8. P. 938–947.

Application of Multipole Decomposition for Sonic Boom Propagation Problems

A. A. Korniyakov^{a, #}, V. G. Soudakov^{a, #}, and A. S. Shcheglov^a

^aCentral Aerohydrodynamic Institute named after prof. N.E. Zhukovsky, Zhukovsky, Russia

[#]e-mail: vit_soudakov@tsagi.ru

In the present work a modification of the multipole decomposition method is developed, which makes it possible to relate the overpressure distribution in the near-field of a supersonic transport (SST) with a far-field distribution, which is needed for the solution of sonic boom propagation problem from SST. A generalization of the method for solving the integral equations arising from multipole decomposition is performed. An algorithm for multipole correction of near-field overpressure signatures obtained in numerical simulations has been developed and tested.

Keywords: sonic boom, multipole decomposition, supersonic transport, near field, far field

REFERENCES

1. *Landau L.D.* On shock waves at long distances from their origin // PMM, 1945, vol. 9, no. 4, pp. 286–292. (in Russian)
2. *Yamashita R., Wutschitz L., Nikiforakis N.* A full-field simulation methodology for sonic boom modelling on adaptive Cartesian cut-cell meshes // J. Comput. Phys., 2020, vol. 408, no. 109271, pp. 1–19.
3. *Chernyshev S.L.* Sound Impact. Moscow: Nauka, 2011. 351 p. (in Russian)
4. *Zhilin Yu.L.* On sonic boom // Uch. Zap. TsAGI, 1971, vol. 2, no. 3, pp. 1–11. (in Russian)
5. *Thomas C.L.* Extrapolation of sonic boom pressure signatures by the waveform parameter method // NASA TN D-6832, 1972, 35 p.
6. *Chernyshev S.L., Gorbovskey V.S., Kazhan A.V., Korunov A.O.* Re-entry vehicle sonic boom issue: modelling and calculation results in windy atmosphere based on the augmented Burgers equation // Acta Astron., 2022, vol. 194, pp. 450–460.
7. *Maglieri D.J., Bobbitt P.J., Plotkin K.J., Shepherd K.P., Coen P.G., Richwine D.M.* Sonic boom. Six decades of research // NASA-SP-2014-622, 2014, 539 p.
8. *Page J.A., Plotkin K.J.* An efficient method for incorporating computational fluid dynamics into sonic boom prediction // AIAA Paper 1991-3275, 1991.
9. *George A.* Reduction of sonic boom by azimuthal redistribution of overpressure // AIAA J., 1969, vol. 7, no. 2, pp. 291–297.

10. *Rallabhandi S.K., Mavris D.N.* New computational procedure for incorporating computational fluid dynamics into sonic boom prediction // *J. Aircraft*, 2007, vol. 44, no. 6, pp. 1964–1971.
11. *Kanamori M., Makino Y., Ishikawa H.* Extension of multipole analysis to laterally asymmetric flow field around supersonic flight vehicle // *AIAA J.*, 2019, vol. 56, no. 1, pp. 191–204.
12. *Park M.A., Morgenstern J.M.* Summary and statistical analysis of the first AIAA sonic boom prediction workshop // *J. Aircraft*, 2016, vol. 53, no. 2, pp. 578–598.
13. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // *AIAA Paper* 1992-0439, 1992.
14. *Fedorov A.V., Soudakov V.G., Malmuth N.D.* Theoretical modeling of two-body interaction in supersonic flow // *AIAA J.*, 2010, vol. 48, no. 2, pp. 258–266.
15. *Zhilin Yu.L., Kovalenko V.V.* On the coupling of the near and far fields in the problem of a sonic boom // *Uch. Zap. TsAGI*, 1998, vol. XXIX, no. 3–4, pp. 111–122. (in Russian)
16. *Keller J.B.* Geometrical acoustics. I. The theory of weak shock waves // *J. Appl. Phys.*, 1954, vol. 25, no. 8, pp. 938–947.

УДК 539.374

К РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ИЗОГНУТОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ

© 2023 г. Г. М. Севастьянов^{1,*}¹Институт машиноведения и металлургии ХФИЦ ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия

*e-mail: akela.86@mail.ru

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.

После доработки 05.06.2023 г.

Принята к публикации 15.07.2023 г.

В работе приведено замкнутое аналитическое решение задачи плоской деформации о релаксации напряжений в пластине, вязкие свойства которой различаются при растяжении и сжатии. Обратимые и необратимые деформации полагаются конечными. Используется линейно-вязкая модель на основе эквивалентного напряжения, которое является кусочно-линейной функцией главных напряжений с параметром разносопротивляемости. Обсуждаются характерные для этой модели особенности решения.

Ключевые слова: вязкоупругость, ползучесть, изгиб, разносопротивляемость

DOI: 10.31857/S0032823523050132, EDN: QPGCOZ

1. Введение. Механические свойства материалов могут заметно различаться при растяжении и сжатии. Упругие эффекты такого рода обсуждались в различных работах [1–7], для их описания были созданы специальные разномодульные теории упругости. Упомянем недавнее исследование, в котором такая теория строится для нелинейно-упругих материалов [8]. В теории пластичности также известны модели, способные учитывать асимметрию в поведении материала [9–11]. Описание материалов, для которых вязкие свойства различаются при сжатии и растяжении (см., например, [12–19]), может быть дано на основе специального выбора эквивалентного напряжения в потенциальных законах ползучести [20–22].

На рис. 1 приведена иллюстрация разносопротивляемости вязкой деформации растяжения и сжатия. Изображены диаграммы “скорость деформации–напряжение” для двух линейно-вязких материалов. Для каждого из них эффективные коэффициенты вязкости при сжатии и растяжении различаются в четыре раза, но для одного из них выше вязкость при сжатии, а для второго наоборот.

В недавнем исследовании [23] получены аналитические решения о релаксации напряжений в изогнутой в условиях плоской деформации пластине для двух линейно-вязких моделей разносопротивляющегося материала с гладкими потенциалами ползучести. В отличие от [23], здесь проведено исследование той же задачи для кусочно-линейного потенциала ползучести и обсуждаются качественные различия решений.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 приведена постановка задачи. В разд. 3 приведены общие соотношения модели материала. В разд. 4 кратко изложено известное решение об упругом изгибе несжимаемой нелинейно-упругой пластины. В исследовании используется несжимаемая упругая модель Генки, как наиболее простая и, вместе с тем, корректно описывающая достаточно широкий спектр материалов

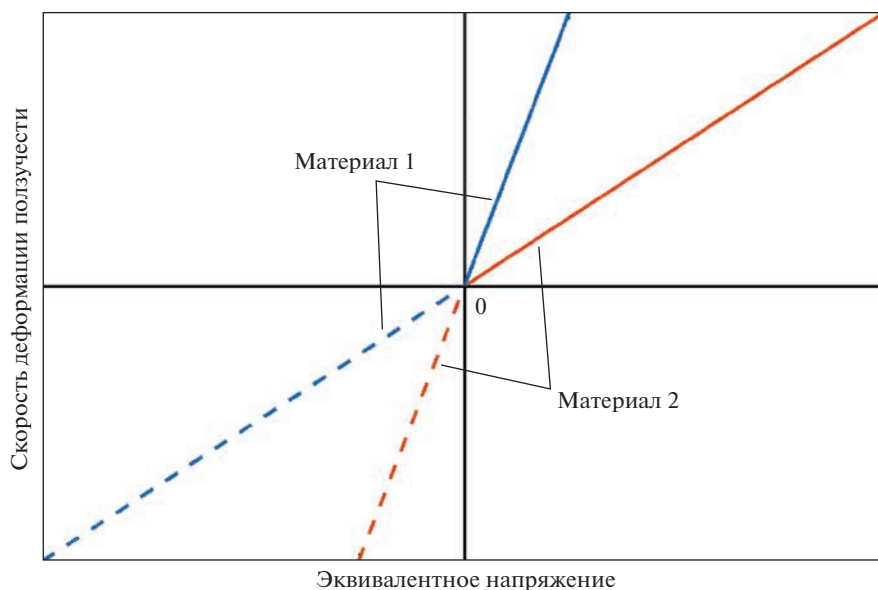


Рис. 1. Разносопротивляемость вязкой деформации сжатия/растяжения.

при умеренных упругих деформациях. Далее разносопротивляемость материала при чисто упругой деформации не учитывается, что позволяет сосредоточиться исключительно на вязких эффектах. В разд. 5 получено решение задачи релаксации пластины для тензорно-линейного закона ползучести материала с эквивалентным напряжением σ_{eq} , описывающим разносопротивляемость вязкой деформации. Это эквивалентное напряжение представляет собой кусочно-линейную функцию главных напряжений, в которую входит параметр материала, отвечающий за разносопротивляемость. Поверхность $\sigma_{eq} = \text{const}$ представляет собой шестигранник лежащий на гидростатической оси (для двух предельных значений параметра разносопротивляемости шестигранник вырождается в треугольную призму) [20–22]. Процесс релаксации напряжений в изогнутой пластине проходит в две стадии. На первой стадии напряженное состояние в той части изогнутой пластины, которая сжата в продольном направлении X_2 (см. рис. 2), соответствует одной из граней шестигранника, а напряженное состояние в точках растянутой части пластины соответствует противоположной грани шестигранника. В определенный момент времени напряженное состояние каждой точки пластины выходит на смежное с соответствующей гранью шестигранника ребро и начинается вторая стадия релаксации. В конце разд. 5 приведено замкнутое аналитическое решение для релаксации изгибающего момента. В разд. 6 обсуждаются свойства полученного решения в сравнении с другими моделями разносопротивляемости.

2. Постановка задачи. Прямоугольная пластина в недеформированном состоянии в декартовой системе координат $OX_1X_2X_3$ с базисными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ограничена неравенствами $0 \leq X_1 \leq H, -L/2 \leq X_2 \leq +L/2, -1/2 \leq X_3 \leq +1/2$ (рис. 2). К пластине приложен изгибающий момент M , вследствие чего пластина деформируется симметрично относительно плоскости OX_1X_3 . Деформированная пластина может быть описана в цилиндрической системе координат $O r \varphi z$ с базисными векторами $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$.

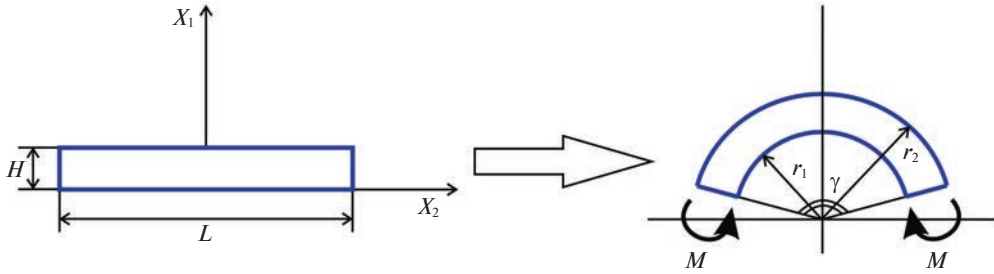


Рис. 2. Изгиб пластины в условиях плоской деформации.

Полагается, что изгиб происходит в условиях плоской деформации (для чего требуются ограничения на торцах пластины, находящихся в плоскости OX_1X_2). Активное нагружение полагается достаточно быстрым, чтобы можно было пренебречь действием вязких эффектов при деформировании.

Изогнутая пластина зафиксирована от перемещений и рассматривается процесс релаксации напряжений за счет вязких эффектов, в частности, определяется эволюция изгибающего момента.

3. Модель материала. Кинематика больших деформаций принимается в виде мультипликативного разложения [24] тензора градиента деформации $\mathbf{F}$ на обратимую (упругую) $\mathbf{F}^e$ и необратимую (вязкую) $\mathbf{F}^c$ составляющие

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^c \quad (3.1)$$

Ниже используется простейшая модель несжимаемого материала Генки с упругим законом

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{h}^e \quad \text{или} \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - (1/3)\mathbf{I} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{h}^e \quad (3.2)$$

Здесь μ имеет тот же смысл, что модуль сдвига в линейной теории упругости; $\boldsymbol{\sigma}$ есть тензор напряжений Коши; $\mathbf{I}$ есть единичный тензор; $\mathbf{s}$ есть девиатор напряжений; $\mathbf{h}^e = \ln \mathbf{V}^e$ есть упругий логарифмический тензор деформации Генки, $(\mathbf{V}^e)^2 = \mathbf{B}^e = \mathbf{F}^e (\mathbf{F}^e)^T$, где $\mathbf{B}^e$ есть упругий левый тензор деформации Коши–Грина, $\mathbf{V}^e$ есть упругий левый (пространственный) тензор растяжений; учтено, что для несжимаемого материала $\operatorname{tr} \mathbf{h}^e = 0$; скалярная функция p вводится из-за ограничений несжимаемости.

Необратимая (вязкая) деформация материала описывается линейным законом ползучести вида

$$\mathbf{W} = \frac{\sigma_{\text{eq}}^2}{2\eta}, \quad \mathbf{D}^c = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{d\mathbf{W}}{d\sigma_{\text{eq}}} \frac{\partial \sigma_{\text{eq}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{\text{eq}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.3)$$

Здесь $\mathbf{W} = W(\sigma_{\text{eq}})$ есть потенциал ползучести; σ_{eq} есть эквивалентное напряжение; $\mathbf{D}^c$ есть тензор скорости необратимой деформации; η есть коэффициент вязкости. Если положить $\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{J_2}$, где $J_2 = (1/2) \operatorname{tr} \mathbf{s}^2$, или, альтернативно, $\sigma_{\text{eq}} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, где σ_1 и σ_3 есть наибольшее и наименьшее главные напряжения, то получим обычную линейную вязкоупругую модель без разносопротивляемости растяжению/сжатию.

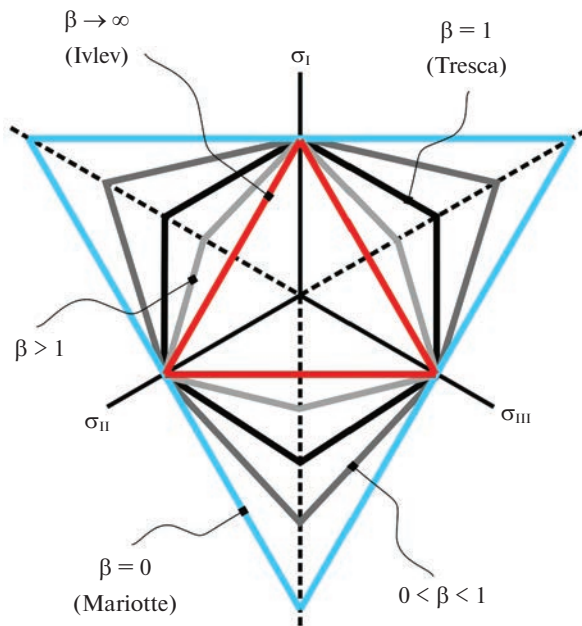


Рис. 3. Сечение девиаторной плоскостью поверхностей $\sigma_{eq} = \text{const}$ (формула (3.4)).

Будем использовать следующее определение эквивалентного напряжения [20–22]

$$\sigma_{eq} = \frac{3}{2} \frac{s_1 - \beta s_3}{2 + \beta} = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 + \frac{-1 + \beta}{2 + \beta} \sigma_2 + \frac{-1 - 2\beta}{2 + \beta} \sigma_3 \right), \quad (3.4)$$

где параметр материала $\beta \geq 0$ отвечает за разнсопротивляемость вязкой деформации, s_1 и s_3 есть наибольшее и наименьшее собственные значения девиатора напряжений $\mathbf{s}$. Сечения поверхностей $\sigma_{eq} = \text{const}$ девиаторной плоскостью при различных значениях параметра β изображены на рис. 3. При $\beta = 1$ эквивалентное напряжение $\sigma_{eq} = (s_1 - s_3)/2$ соответствует призме Треска (материал не проявляет разнсопротивляемость). Предельным значениям параметра разнсопротивляемости $\beta = 0$ и $\beta \rightarrow \infty$ соответствуют треугольные призмы Мариотта и Ивлева [25] с $\sigma_{eq} = 3s_1/4$ и $\sigma_{eq} = -3s_3/2$. Для этих предельных поверхностей эквивалентные напряжения при одноосных напряженных состояниях сжатия и растяжения одинаковой по модулю нагрузкой различаются в два раза (при $\beta = 0$ больше эквивалентное напряжение в случае растяжения, при $\beta \rightarrow \infty$ наоборот). Промежуточным значениям β соответствуют шестиугольные призмы.

Используемая модель с эквивалентным напряжением (3.4) описывает разнсопротивляемость вязкой деформации. Действительно, при одноосном растяжении $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = T > 0$, $s_1 = 2\sigma_1/3$, $s_2 = s_3 = -\sigma_1/3$. При одноосном сжатии $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = T < 0$, $s_1 = s_2 = -\sigma_3/3$, $s_3 = 2\sigma_3/3$. Тогда по (3.4) при растяжении $\sigma_{eq} = T/2$ и скорость деформации ползучести в направлении действия растягивающей силы есть

$$D_{\text{tens}}^c = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{\text{eq}}}{\partial \sigma_1} = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\eta} \left(\frac{\partial \sigma_{\text{eq}}}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \sigma_{\text{eq}}}{\partial s_3} \frac{\partial s_3}{\partial \sigma_1} \right) = \frac{T}{4\eta},$$

а при сжатии $\sigma_{\text{eq}} = -\frac{1+2\beta}{2+\beta} \frac{T}{2} > 0$ и скорость деформации ползучести в направлении действия сжимающей силы есть

$$D_{\text{comp}}^c = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{\text{eq}}}{\partial \sigma_3} = \frac{\sigma_{\text{eq}}}{\eta} \left(\frac{\partial \sigma_{\text{eq}}}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \sigma_3} + \frac{\partial \sigma_{\text{eq}}}{\partial s_3} \frac{\partial s_3}{\partial \sigma_3} \right) = \frac{T}{4\eta} \left(\frac{1+2\beta}{2+\beta} \right)^2$$

Здесь T есть нормальное напряжение на площадке, перпендикулярной направлению сжатия/растяжения; $T > 0$ для растяжения, $T < 0$ для сжатия.

Если $\beta = B > 1$, то скорости необратимой деформации при одноосном нагружении сжатия и растяжения одинаковой по модулю нагрузкой соотносятся как

$$\left| \frac{D_{\text{comp}}^c}{D_{\text{tens}}^c} \right| = \left(\frac{1+2B}{2+B} \right)^2 = A > 1$$

Если же $\beta = 1/B < 1$, то

$$\left| \frac{D_{\text{comp}}^c}{D_{\text{tens}}^c} \right| = \left(\frac{2+B}{1+2B} \right)^2 = \frac{1}{A} < 1$$

То есть, если для материала 2 на рис. 1 $\beta = B$, то для материала 1 $\beta = 1/B$. Учитывая, что $\beta \geq 0$, используемая модель способна описать разносопротивляемость вязкой деформации в ограниченном, хотя и достаточно широком, диапазоне: при $\beta = 0$ $|D_{\text{comp}}^c/D_{\text{tens}}^c| = 1/4$, при $\beta \rightarrow \infty$ $|D_{\text{comp}}^c/D_{\text{tens}}^c| = 4$.

4. Предварительная упругая деформация изгиба в несжимаемой нелинейно-упругой пластине. Кинематика изгиба в условиях плоской деформации описывается уравнениями [26–28]:

$$r = \sqrt{B + \frac{2X_1}{A}}, \quad \varphi = AX_2, \quad z = X_3$$

Внутренний и внешний радиусы кривизны изогнутой пластины могут быть выражены в виде

$$r_1 = \sqrt{B}, \quad r_2 = \sqrt{B + \frac{2H}{A}}; \quad A = \frac{\gamma}{L}, \quad B = \frac{1}{A^2} \left(\sqrt{1 + (AH)^2} - AH \right)$$

Здесь γ угол изгиба, L и H — длина и толщина пластины соответственно (см. рис. 2).

Кроме того, справедливо равенство $r_1 r_2 = A^{-2}$ [26].

Градиент деформации диагональный, $\mathbf{F} = (Ar)^{-1} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_1 + Ar \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_3$. Тензор деформации Генки также диагональный, имеет вид $\mathbf{h} = -\ln(Ar) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \ln(Ar) \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi$.

Замечание. Поскольку градиент деформации $\mathbf{F}$ в рассматриваемой задаче диагональный (в смешанном координатном базисе), то, полагая, что это свойство имеют также $\mathbf{F}^e$ и $\mathbf{F}^c$, из (3.1) дифференцированием по времени можно получить

$$\dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} = \mathbf{D} - \mathbf{D}^c,$$

где $\mathbf{D} = \text{sym}(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1})$, $\mathbf{D}^c = \text{sym}(\dot{\mathbf{F}}^c (\mathbf{F}^c)^{-1})$, $2 \text{sym}(\) = (\) + (\)^T$. Здесь точка над символом означает полную производную по времени.

С другой стороны, для диагональных $\mathbf{F}^e$ и $\mathbf{h}^e = \ln \left[\mathbf{F}^e (\mathbf{F}^e)^T \right]^{1/2}$ верно, что

$$\dot{\mathbf{h}}^e = \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1}$$

Приравнивая последние формулы, имеем

$$\dot{\mathbf{h}}^e = \mathbf{D} - \mathbf{D}^c \quad (4.1)$$

Везде далее вместо формулы (3.1) будет использоваться (4.1).

Учитывая, что при чисто упругом деформировании $\mathbf{h}^e = \mathbf{h}$, имеем

$$s_{rr} = -s_{\phi\phi} = -2\mu \ln(Ar), \quad s_{zz} = 0 \quad (4.2)$$

Изгибающий момент на единицу длины в направлении $z = X_3$ есть

$$\begin{aligned} M &= \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\phi\phi} r dr = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{rr} r dr + 2\mu \int_{r_1}^{r_2} (h_{\phi\phi}^e - h_{rr}^e) r dr = \frac{1}{2} \underbrace{\left[r^2 \sigma_{rr} \right]_{r_1}^{r_2}}_0 - \\ &- \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} r^2 dr + 2\mu \int_{r_1}^{r_2} (h_{\phi\phi}^e - h_{rr}^e) r dr = -\mu \int_{r_1}^{r_2} (h_{\phi\phi}^e - h_{rr}^e) r dr + \\ &+ 2\mu \int_{r_1}^{r_2} (h_{\phi\phi}^e - h_{rr}^e) r dr = \mu \int_{r_1}^{r_2} (h_{\phi\phi}^e - h_{rr}^e) r dr = \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} (s_{\phi\phi} - s_{rr}) r dr \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь в первой строке использован упругий закон (3.2); во второй строке использовано интегрирование по частям и тот факт, что поверхности пластины свободны от напряжений, т.е. $\sigma_{rr}(r_1) = \sigma_{rr}(r_2) = 0$; в третьей строке использовано уравнение равновесия $r d\sigma_{rr}/dr = \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr}$.

Формула (4.3) верна и при релаксации напряжений; релаксация изгибающего момента однозначно определяется изменением функции $(s_{\phi\phi} - s_{rr})$ во времени. Начальная величина изгибающего момента определяется по (4.3) с учетом упругого решения (4.2):

$$M_0 = 2\mu \int_{r_1}^{r_2} \ln(Ar) r dr$$

5. Релаксация напряжений в пластине

5.1. Начальный этап релаксации. С момента времени $t = 0$ начинается релаксация напряжений в пластине, которая приводит к снижению приложенного изгибающего момента. Поскольку материал полностью зафиксирован от перемещений, то в формуле (4.1) $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, а полная производная по времени совпадает с частной производной:

$$\frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial t} = -\mathbf{D}^c$$

Используя упругий закон $\mathbf{s} = 2\mu \mathbf{h}^e$, можно записать предыдущее равенство в виде

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = -2\mu \mathbf{D}^c \quad (5.1)$$

Согласно (4.2) в упруго изогнутой пластине в начальный момент времени во внутреннем слое ($r < 1/A$) $s_{rr} = s_1 > 0$, $s_{\phi\phi} = s_3 < 0$, $s_{zz} = s_2 = 0$. Во внешнем слое ($r > 1/A$) наоборот, $s_{rr} = s_3 < 0$, $s_{\phi\phi} = s_1 > 0$, $s_{zz} = s_2 = 0$. Тогда по (3.3) и (3.4) имеем следующие равенства для компонент скорости необратимой деформации.

Во внутреннем слое

$$D_{rr}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta} > 0, \quad D_{\varphi\varphi}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta} \frac{-1-2\beta}{2+\beta} < 0, \quad D_{zz}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta} \frac{-1+\beta}{\beta+2} \quad (5.2)$$

Во внешнем слое

$$D_{rr}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta} \frac{-1-2\beta}{\beta+2} < 0, \quad D_{\varphi\varphi}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta} \frac{2+\beta}{\beta+2} > 0, \quad D_{zz}^c = \frac{\sigma_{eq}}{2\eta} \frac{-1+\beta}{\beta+2} \quad (5.3)$$

Знак D_{zz}^c определяется величиной β : если $\beta > 1$, то $D_{zz}^c > 0$; если $0 \leq \beta < 1$, то $D_{zz}^c < 0$. При этом поскольку $-1-2\beta < -1+\beta < 2+\beta$, то D_{zz}^c в любом случае является промежуточным главным значением тензора скорости необратимой деформации. Во внутреннем слое $D_{rr}^c = D_1^c$, $D_{\varphi\varphi}^c = D_3^c$; во внешнем слое наоборот, $D_{rr}^c = D_3^c$, $D_{\varphi\varphi}^c = D_1^c$. Здесь и далее D_1^c , D_3^c , D_2^c есть наибольшее, наименьшее и промежуточные главные значения тензора $\mathbf{D}^c$. Выражения (5.2) и (5.3) верны до тех пор, пока s_{zz} остается промежуточным главным значением девиатора напряжений. Пока это верно, координатное направление, соответствующее максимальному главному значению девиатора напряжений, совпадает с координатным направлением максимального главного значения тензора скорости необратимой деформации (и то же самое для минимальных главных значений). В этом случае из (5.1) с учетом (3.3) и (3.4) для произвольных чисел a и b можно получить

$$\frac{\partial(as_1 - bs_2 - cs_3)}{\partial t} = -2\mu(aD_1^c - bD_2^c - cD_3^c) = -\sigma_{eq} \frac{\mu}{\eta} \left(a + b \frac{1-\beta}{2+\beta} + c \frac{1+2\beta}{2+\beta} \right) \quad (5.4)$$

Если в (5.4) выбрать $a = \frac{3}{2} \frac{1}{2+\beta}$, $b = 0$ и $c = \frac{3}{2} \frac{\beta}{2+\beta}$, то имеем

$$\frac{\partial\sigma_{eq}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} \frac{s_1 - \beta s_3}{2+\beta} \right) = -\sigma_{eq} \frac{\mu}{\eta} \frac{3(1+\beta+\beta^2)}{(2+\beta)^2} \quad (5.5)$$

а если выбрать $a = 1$, $b = 0$ и $c = 1$, то можно получить

$$\frac{\partial(s_1 - s_3)}{\partial t} = -3\sigma_{eq} \frac{\mu}{\eta} \frac{1+\beta}{2+\beta} \quad (5.6)$$

Первое из этих уравнений есть обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, которое позволяет найти эволюцию эквивалентного напряжения (3.4):

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}^0 e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)\mu}{(2+\beta)^2} \frac{t}{\eta}}, \quad \sigma_{eq}^0(r) = 3\mu \frac{1+\beta}{2+\beta} |\ln(Ar)| \quad (5.7)$$

Здесь для определения константы интегрирования использовано начальное условие — распределение эквивалентного напряжения в начальный момент времени $\sigma_{eq}(r, 0) = \sigma_{eq}^0(r)$, которое определяется упругим решением (4.2).

Уравнение (5.6) удовлетворяется непосредственным интегрированием и позволяет найти разность $(s_1 - s_3)$ как функцию времени:

$$s_1 - s_3 = 4\mu \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{(1+\beta)^2}{1+\beta+\beta^2} \left[e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)\mu}{(2+\beta)^2} \frac{t}{\eta}} - 1 \right] \right\} |\ln(Ar)|$$

Начальное условие при этом также определяется упругим решением (4.2): в момент времени $t = 0$ разница максимального и минимального главных напряжений есть $4\mu |\ln(Ar)|$.

Во внутреннем слое ($r < 1/A$) $s_{\phi\phi} - s_{rr} = -(s_1 - s_3)$, во внешнем слое ($r > 1/A$) $s_{\phi\phi} - s_{rr} = s_1 - s_3$. Следовательно, по формуле (4.3) может быть найдена релаксация изгибающего момента:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} (s_{\phi\phi} - s_{rr}) r dr = -\frac{1}{2} \int_{r_1}^{1/A} (s_1 - s_3) r dr + \frac{1}{2} \int_{1/A}^{r_2} (s_1 - s_3) r dr = \\ &= M_0 \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{(1+\beta)^2}{1+\beta+\beta^2} \left[e^{\frac{3(1+\beta+\beta^2)\mu_t}{(2+\beta)^2 \eta}} - 1 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $M_0 = 2\mu \int_{r_1}^{r_2} \ln(Ar) r dr$. Для материала без разнсопротивляемости вязкой деформации

($\beta = 1$) формула выше принимает вид $M = M_0 e^{-\mu t/\eta}$.

Далее нам потребуются также формулы, описывающие эволюцию величин $(s_1 - s_2)$ и $(s_2 - s_3)$. Из (5.4) при $a = 1, b = 1, c = 0$ и $a = 0, b = -1, c = 1$ с учетом (5.5) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial(s_1 - s_2)}{\partial t} &= -\frac{\mu}{\eta} \frac{3}{2+\beta} \sigma_{eq} = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial t} \frac{2+\beta}{1+\beta+\beta^2} \\ \frac{\partial(s_2 - s_3)}{\partial t} &= -\frac{\mu}{\eta} \frac{3\beta}{2+\beta} \sigma_{eq} = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial t} \frac{\beta(2+\beta)}{1+\beta+\beta^2} \end{aligned}$$

Интегрируя эти выражения с учетом (5.7) и начальных условий $(s_1 - s_2)|_{t=0} = (s_2 - s_3)|_{t=0} = 2\mu |\ln(Ar)| = \frac{2}{3} \frac{2+\beta}{1+\beta} \sigma_{eq}^0$, имеем

$$\begin{aligned} s_1 - s_2 &= \sigma_{eq}^0 \frac{2+\beta}{1+\beta+\beta^2} \left(e^{\frac{3(1+\beta+\beta^2)\mu_t}{(2+\beta)^2 \eta}} - \frac{(1+2\beta)(1-\beta)}{3(1+\beta)} \right) \\ s_2 - s_3 &= \sigma_{eq}^0 \frac{\beta(2+\beta)}{1+\beta+\beta^2} \left(e^{\frac{3(1+\beta+\beta^2)\mu_t}{(2+\beta)^2 \eta}} - \frac{(\beta+2)(\beta-1)}{3\beta(1+\beta)} \right) \end{aligned}$$

4.2. Конечный этап релаксации. Из формул выше следует, что если $\beta > 1$, то в момент времени

$$t^* = \frac{\eta}{\mu} \frac{(2+\beta)^2}{3(1+\beta+\beta^2)} \ln \frac{3\beta(1+\beta)}{(\beta+2)(\beta-1)}, \quad (5.9)$$

напряженное состояние выходит на ребро поверхности ползучести с $s_2 = s_3$; а если $0 \leq \beta < 1$, то в момент времени

$$t^* = \frac{\eta}{\mu} \frac{(2+\beta)^2}{3(1+\beta+\beta^2)} \ln \frac{3(1+\beta)}{(1+2\beta)(1-\beta)} \quad (5.10)$$

напряженное состояние выходит на ребро поверхности ползучести с $s_2 = s_1$. Причем это происходит одновременно во всех точках пластины.

После этого начинается второй этап релаксации. Изгибающий момент, соответствующий переходу во вторую стадию релаксации, может быть найден по формуле (5.8):

$$M^* = M(t^*) = \begin{cases} \frac{\beta-1}{2\beta} M_0, & \beta > 1 \\ \frac{1-\beta}{2} M_0, & 0 \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

На втором этапе релаксации, если $\beta > 1$, то $s_2 = s_3 = -s_1/2$ и

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = -2\mu D_1^c = -2\mu \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_1} = -\mu \frac{\sigma_{eq}}{\eta} = -\frac{3\mu}{4\eta} s_1$$

Здесь учтено, что в этом случае $\sigma_{eq} = 3s_1/4$. Интегрируя, имеем

$$s_1 = s_1|_{t=t^*} e^{-\frac{3\mu}{4\eta}(t-t^*)} = \frac{4}{3} \sigma_{eq}^* e^{-\frac{3\mu}{4\eta}(t-t^*)} = \frac{4(\beta+2)(\beta-1)}{9\beta(1+\beta)} \sigma_{eq}^0 e^{-\frac{3\mu}{4\eta}(t-t^*)}, \quad \sigma_{eq}^* = \sigma_{eq}(t^*)$$

И далее, во внутреннем слое ($r < 1/A$) $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = -(s_1 - s_3) = -3s_1/2$, а во внешнем слое ($r > 1/A$) $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = s_1 - s_3 = 3s_1/2$. По формуле (4.3):

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (s_{\varphi\varphi} - s_{rr}) r dr = -\frac{3}{4} \int_{\eta_1}^{1/A} s_1 r dr + \frac{3}{4} \int_{1/A}^{\eta_2} s_1 r dr = \\ &= \frac{(\beta+2)(\beta-1)}{3\beta(1+\beta)} e^{-\frac{3\mu}{4\eta}(t-t^*)} \left(\int_{1/A}^{\eta_2} \sigma_{eq}^0 r dr - \int_{\eta_1}^{1/A} \sigma_{eq}^0 r dr \right) = \frac{\beta-1}{2\beta} e^{-\frac{3\mu}{4\eta}(t-t^*)} M_0 \end{aligned}$$

Если $0 \leq \beta < 1$, то на втором этапе релаксации $s_1 = s_2 = -s_3/2$ и

$$\frac{\partial s_3}{\partial t} = -2\mu D_3^c = -2\mu \frac{\sigma_{eq}}{\eta} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma_3} = \frac{\mu(1+2\beta)}{\eta(2+\beta)} \sigma_{eq} = -\frac{3\mu}{4\eta} \left(\frac{1+2\beta}{2+\beta} \right)^2 s_3$$

Здесь учтено, что $\sigma_{eq} = -\frac{3(1+2\beta)}{4(2+\beta)} s_3$. Интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} s_3 &= s_3|_{t=t^*} e^{-\frac{3\mu}{4\eta} \left(\frac{1+2\beta}{2+\beta} \right)^2 (t-t^*)} = -\frac{4(2+\beta)}{3(1+2\beta)} \sigma_{eq}^* e^{-\frac{3\mu}{4\eta} \left(\frac{1+2\beta}{2+\beta} \right)^2 (t-t^*)} = \\ &= -\frac{4(2+\beta)(1-\beta)}{9(1+\beta)} \sigma_{eq}^0 e^{-\frac{3\mu}{4\eta} \left(\frac{1+2\beta}{2+\beta} \right)^2 (t-t^*)} \end{aligned}$$

И далее, во внутреннем слое ($r < 1/A$) $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = -(s_1 - s_3) = 3s_3/2$, во внешнем слое ($r > 1/A$) $s_{\varphi\varphi} - s_{rr} = s_1 - s_3 = -3s_3/2$. По формуле (4.3):

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (s_{\varphi\varphi} - s_{rr}) r dr = \frac{3}{4} \int_{\eta_1}^{1/A} s_3 r dr - \frac{3}{4} \int_{1/A}^{\eta_2} s_3 r dr = \\ &= \frac{(2+\beta)(1-\beta)}{3(1+\beta)} e^{-\frac{3\mu}{4\eta} \left(\frac{1+2\beta}{2+\beta} \right)^2 (t-t^*)} \left(\int_{1/A}^{\eta_2} \sigma_{eq}^0 r dr - \int_{\eta_1}^{1/A} \sigma_{eq}^0 r dr \right) = \frac{1-\beta}{2} e^{-\frac{3\mu}{4\eta} \left(\frac{1+2\beta}{2+\beta} \right)^2 (t-t^*)} M_0 \end{aligned}$$

Итак, эволюция изгибающего момента в процессе релаксации в целом описывается уравнениями:

– при $0 \leq \beta < 1$:

$$\frac{M}{M_0} = \begin{cases} 1 + \frac{3}{4} \frac{(1+\beta)^2}{1+\beta+\beta^2} \left[e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)}{(2+\beta)^2} \frac{\mu}{\eta} t} - 1 \right], & t \leq t^* \\ \frac{1-\beta}{2} e^{-\frac{3\mu}{4\eta} \left(\frac{1+2\beta}{2+\beta} \right)^2 (t-t^*)}, & t \geq t^*, \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\text{где } t^* = \frac{\eta}{\mu} \frac{(2+\beta)^2}{3(1+\beta+\beta^2)} \ln \frac{3(1+\beta)}{(1+2\beta)(1-\beta)};$$

– при $\beta > 1$:

$$\frac{M}{M_0} = \begin{cases} 1 + \frac{3}{4} \frac{(1+\beta)^2}{1+\beta+\beta^2} \left[e^{-\frac{3(1+\beta+\beta^2)}{(2+\beta)^2} \frac{\mu}{\eta} t} - 1 \right], & t \leq t^* \\ \frac{\beta-1}{2\beta} e^{-\frac{3\mu}{4\eta} (t-t^*)}, & t \geq t^*, \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\text{где } t^* = \frac{\eta}{\mu} \frac{(2+\beta)^2}{3(1+\beta+\beta^2)} \ln \frac{3\beta(1+\beta)}{(\beta+2)(\beta-1)}.$$

В частности, для предельных значений параметра разнсопротивляемости:

– при $\beta = 0$:

$$\frac{M}{M_0} = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{-\frac{3\mu}{4\eta} t}, & t \leq \frac{4 \ln 3 \eta}{3 \mu} \\ \frac{3^{1/4}}{2} e^{-\frac{3\mu}{16\eta} t}, & t \geq \frac{4 \ln 3 \eta}{3 \mu} \end{cases}$$

– при $\beta \rightarrow \infty$:

$$\frac{M}{M_0} = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{-\frac{3\mu}{\eta} t}, & t \leq \frac{\ln 3 \eta}{3 \mu} \\ \frac{3^{1/4}}{2} e^{-\frac{3\mu}{4\eta} t}, & t \geq \frac{\ln 3 \eta}{3 \mu} \end{cases}$$

Траектория напряженного состояния в пространстве девиаторных напряжений изображена на рис. 4.

6. Обсуждение результатов. В [23] рассмотрены две линейно-вязкие модели, основанные на различном определении эквивалентного напряжения [9, 10]:

$$W = \frac{\sigma_{\text{eq}}^2}{2\eta_{\text{I}}}; \quad \sigma_{\text{eq}} = \left[J_2^{3/2} - (3\sqrt{3}/2) \alpha J_3 \right]^{1/3}, \quad \alpha \in [-1, 1],$$

где $J_3 = \det \mathbf{s}$, α отвечает за ТСА (при $\alpha = 0$: $\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{J_2}$); и

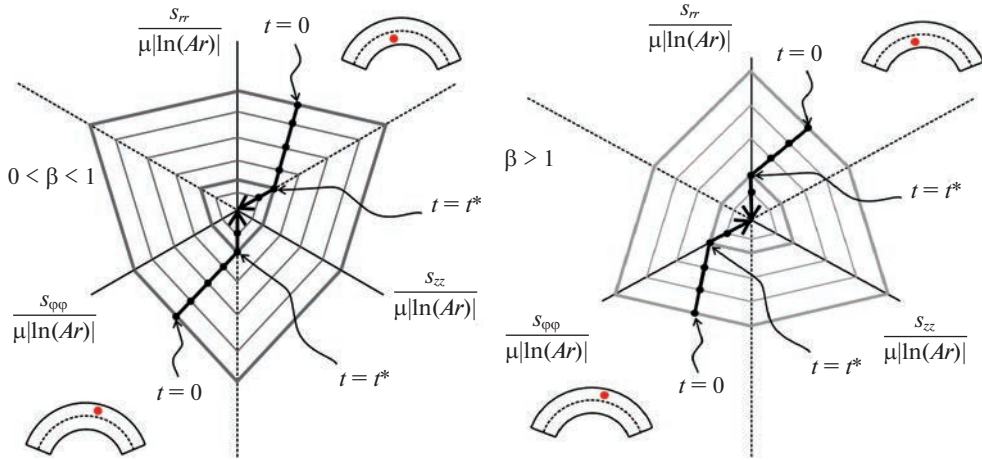


Рис. 4. Траектория напряженного состояния произвольной точки пластины. Слева для материала с $0 \leq \beta < 1$, справа для материала с $\beta > 1$. Верхняя траектория на каждом графике соответствует точкам пластины внутренней области $Ar < 1$, нижняя – точкам внешней области $Ar > 1$ (точки на нейтральной поверхности $Ar = 1$ свободны от напряжений).

$$W = \frac{\sigma_{eq}^2}{2\eta_2}, \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_3 s_3^2)}, \quad n_k = \begin{cases} n^+, & s_i \geq 0; \\ n^-, & s_i < 0 \end{cases}; \quad i = 1, 2, 3$$

$$n^+ = (1 - k)^2, \quad n^- = (1 + k)^2; \quad k \in [-1, 1],$$

где s_1, s_2, s_3 есть упорядоченные по убыванию главные значения девиатора напряжений.

При одноосном нагружении сжатия или растяжения скорость деформации ползучести в направлении действия силы для первой модели описывается равенствами

$$D_{\text{tens}}^c = \frac{T}{3\eta_1} (1 - \alpha)^{2/3}, \quad D_{\text{comp}}^c = \frac{T}{3\eta_1} (1 + \alpha)^{2/3}$$

Для второй модели

$$D_{\text{tens}}^c = \frac{2n^+ + n^-}{9\eta_2} T, \quad D_{\text{comp}}^c = \frac{n^+ + 2n^-}{9\eta_2} T$$

Здесь T есть нормальное напряжение на площадке, перпендикулярной направлению сжатия/растяжения; $T > 0$ для растяжения, $T < 0$ для сжатия.

Отсюда очевидно, что два материала, схематично изображенные на рис. 1, при описании с помощью первой из этих моделей различаются только знаком параметра α , а при описании с помощью второй модели – знаком параметра k .

Релаксация изгибающего момента пластины по первой модели определяется в параметрическом виде [23]

$$\frac{M}{M_0} = \exp \left\{ -\frac{1}{\sqrt{6}\alpha} \int_0^1 \frac{1 + \sqrt{6}\alpha\zeta}{1/3 - (5/2)\zeta^2 + 3\zeta^4} d\zeta \right\}$$

$$\frac{\mu}{\eta_1} = \frac{1}{\sqrt{6}\alpha} \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1 + 3\sqrt{6}\alpha\zeta(1/2 - \zeta^2)}}{1/3 - (5/2)\zeta^2 + 3\zeta^4} d\zeta,$$

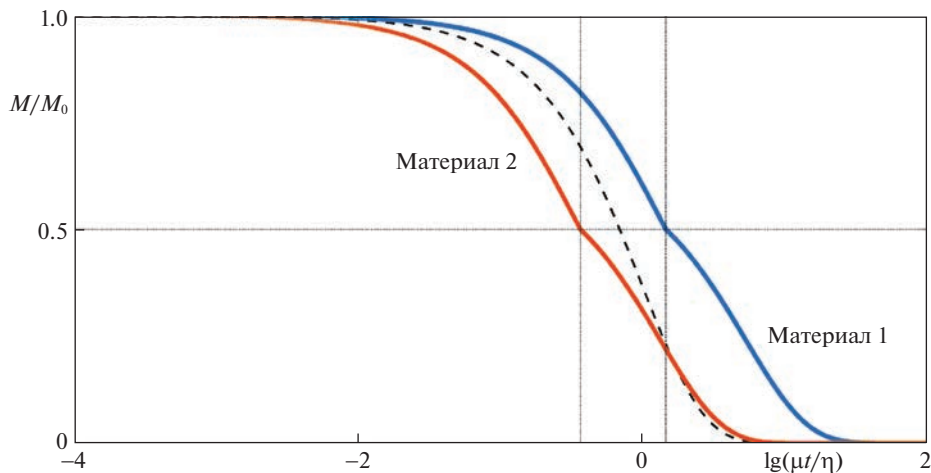


Рис. 5. Релаксация изгибающего момента M в пластине. Линейная модель с разносопротивляемостью вязкой деформации (3.3), (3.4); решение по формулам (5.12), (5.13). Параметры материалов: для материала 1 $\beta = 0$, для материала 2 $\beta \rightarrow \infty$. Пунктирная линия соответствует решению для материала без разносопротивляемости $M/M_0 = e^{-\mu t/\eta}$. Вертикальные линии соответствуют моментам времени t^* перехода между этапами релаксации (формулы (5.9) и (5.10)), когда напряженное состояние выходит на ребро функции ползучести; горизонтальная линия соответствует значениям M в эти моменты времени (формула (5.11)).

где M_0 есть начальный изгибающий момент, γ параметр решения, противоположный по знаку с α , t время, μ модуль сдвига. При $\alpha = 0$ (для материала без ТСА) формулы выше приводят к выражению $M/M_0 = e^{-\mu t/\eta_1}$.

Для второй модели в явном виде [23]

$$\frac{M}{M_0} = \frac{1}{4} \exp \left\{ -n_{\text{sup}} \frac{\mu t}{\eta_2} \right\} + \frac{3}{4} \exp \left\{ -\frac{n_{\text{sup}} + 2n_{\text{inf}}}{3} \frac{\mu t}{\eta_2} \right\}$$

$$n_{\text{sup}} = \max \{n^+, n^-\}, \quad n_{\text{inf}} = \min \{n^+, n^-\}$$

Здесь для материала без ТСА $n^+ = n^- = 1$ и так же $M/M_0 = e^{-\mu t/\eta_2}$.

Оба решения имеют одну особенность: они прогнозируют идентичную релаксацию для, вообще говоря, разных материалов, схематично представленных на рис. 1. То есть для этих решений имеет значение, во сколько раз различается эффективная вязкость материала при растяжении и сжатии, но не имеет значения, какая из них больше, а какая меньше [23]. Эту особенность непросто проверить экспериментально, поскольку для этого нужны два материала с одинаковым упругим модулем, вязкая деформация которых соответствует схеме на рис. 1. Тем не менее, такое поведение решений кажется достаточно странным.

В отличие от них, полученное в предыдущем разделе решение прогнозирует разную релаксацию для этих материалов. Графики релаксации изгибающего момента, рассчитанные по формулам (5.12), (5.13) для обоих материалов, приведены на рис. 5.

Рассматриваемая модель прогнозирует, что в материале 1 (см. рис. 1), для которого сопротивление вязкой деформации растяжения ниже, чем деформации сжатия (скорость деформации при растяжении выше, чем при сжатии, при одинаковой по модулю нагрузке), релаксация изгибающего момента происходит медленнее, чем в материале 2.

На обоих графиках (см. рис. 5) прослеживаются точки перегиба, соответствующие переходу между этапами релаксации, в которых напряженное состояние пластины выходит на ребро кусочно-линейной функции ползучести.

Поскольку линейно-вязкая модель, вообще говоря, только приближенно описывает поведение реальных материалов, на практике часто используется обобщенная вязкоупругая модель Максвелла (см., например, [29, 30]). Эта модель представляет собой параллельно соединенные линейно-вязкие элементы с разными свойствами. В каждом таком элементе общая деформация одна и та же, а общее напряжение в системе есть сумма напряжений в каждой ветви. Полученные здесь решения (5.12) и (5.13) могут рассматриваться как решения в каждой ветви обобщенной модели Максвелла, учитывающей разносопротивляемость вязкому деформированию.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. ж. МТТ. 1966. № 2. С. 44–53.
2. Шапиро Г.С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. ж.: МТТ. 1966. № 2. С. 123–125.
3. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. К разномодульной теории упругости // Инж. ж. МТТ. 1966. № 6. С. 64–67.
4. Маслов В.П., Мосолов П.П. Общая теория решения уравнений движения разномодульной упругой среды // ПММ. 1985. Т. 49, Вып. 3. С. 419–437.
5. Мясников В.П., Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разносопротивляющейся среды // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322. № 1. С. 44–53.
6. Олейников А.И., Могильников Е.В. Единственность решения краевых задач и устойчивость для разномодульного нелинейного материала // Дальневост. матем. ж. 2002. Т. 3. № 2. С. 242–253.
7. Tselodub I. Yu. Multimodulus elasticity theory // J. Appl. Mech.&Tech. Phys. 2008. V. 49. P. 129–135. <https://doi.org/10.1007/s10808-008-0019-1>
8. Du Z., Zhang G., Guo T., Tang Sh., Guo X. Tension-compression asymmetry at finite strains: A theoretical model and exact solutions // J. Mech.&Phys. Solids. 2020. V. 143. Art. no. 104084. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104084>
9. Cazacu O., Barlat F. A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals // Int. J. Plasticity. 2004. V. 20(11). P. 2027–2045. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.11.021>
10. Cazacu O., Plunkett B., Barlat F. Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals // Int. J. Plasticity. 2006. V. 22(7). P. 1171–1194. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.06.001>
11. Cazacu O., Revil-Baudard B. Tension-compression asymmetry effects on the plastic response in bending: new theoretical and numerical results // Mech. Res. Commun. 2021. V. 114. Art. no. 103596. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2020.103596>
12. Pirnia F. Experimental Analyses on XLPE under Tension and Compression / Master's Degree Thesis. Dep. Mech. Engng., Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden. 2014.
13. Guo Y., Liu G., Huang Y. A complemented multiaxial creep constitutive model for materials with different properties in tension and compression // Europ. J. Mech. A/Solids. 2022. V. 93. Art. no. 104510. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104510>
14. Zolochovsky A., Voyiadjis G.Z. Theory of creep deformation with kinematic hardening for materials with different properties in tension and compression // Int. J. Plasticity. 2005. V. 21(3). P. 435–462. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.12.007>
15. Banskchikova I.A. Construction of constitutive equations for orthotropic materials with different properties in tension and compression under creep conditions // J. Appl. Mech.&Tech. Phys. 2020. V. 61. P. 87–100. <https://doi.org/10.1134/S0021894420010101>
16. Al'tenbakh Kh.I., Zolochevskii A.A. Energy version of creep and stress-rupture strength theory for anisotropic and isotropic materials which differ in resistance to tension and compression // J. Appl. Mech.&Tech. Phys. 1992. V. 33. P. 101–106. <https://doi.org/10.1007/BF00864514>

17. Gorev B.V., Rubanov V.V., Sosnin O.V. Construction of the creep equations for materials with different extension and compression properties // J. Appl. Mech.&Tech. Phys. 1979. V. 20(4). P. 487–492. <https://doi.org/10.1007/BF00905605>
18. Teixeira L., Gillibert J., Sayet T., Blond E. A creep model with different properties under tension and compression: Applications to refractory materials // Int. J. Mech. Sci. 2021. V. 212. Art. no. 106810. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106810>
19. Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычисл. методы и програм. 2008. Т. 9. С. 346–365.
20. Быковцев Г.И., Ярушина В.М. Об особенностях модели неустановившейся ползучести, основанной на использовании кусочно-линейных потенциалов // В сб.: Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций (к 60-летию со дня рожд. проф. Г.И. Быковцева). Владивосток: Дальнаука, 1998. С. 9–26.
21. Буренин А.А., Ярушина В.М. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // В сб.: Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию Е.И. Шемякина / Ред. Ивлев Д.Д., Морозов Н.Ф. М.: Физматлит, 2006. С. 100–106.
22. Ярушина В.М. К моделированию ползучести разносопротивляющихся материалов // Докл. РАН. 2005. Т. 403. № 2. С. 198–200.
23. Севастьянов Г.М., Бормотин К.С. Релаксация напряжений в изогнутой вязкоупругой пластине с различными свойствами при сжатии и растяжении // ПМТФ. 2023. (в печати)
24. Sidoroff F. Un modele viscoelastique non lineaire avec configuration intermediaire // J. de Mécanique. 1974. V. 13(4). P. 679–713.
25. Ивлев Д.Д. К теории разрушения твердых тел // ПММ. 1959 Т. 23. № 3. С. 618–624.
26. Rivlin R. Large elastic deformations of isotropic materials – V: The problem of flexure // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Math.&Phys. Sci. 1949. V. 195. P. 463–473. <https://doi.org/10.1098/rspa.1949.0004>
27. Destrade M., Murphy J.G., Rashid B. Differences in tension and compression in the nonlinearly elastic bending of beams // Int. J. Struct. Changes in Solids – Mech.&Appl. 2009. V. 1(1). P. 73–81.
28. Destrade M., Gilchrist M.D., Motherway J.A., Murphy J.G. Bimodular rubber buckles early in bending // Mech. Mater. 2010. V. 42(4). P. 469–476. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2009.11.018>
29. Ghobady E., Shutov A., Steeb H. Parameter identification and validation of shape-memory polymers within the framework of finite strain viscoelasticity // Materials (Basel). 2021. V. 14(8). 2049. <https://doi.org/10.3390/ma14082049>
30. Sevastyanov G.M. Creep relaxation in nonlinear viscoelastic twisted rods // ZAMM. 2022. e202100552. <https://doi.org/10.1002/zamm.202100552>

Stress Relaxation in Bended Viscoelastic Plate with Tension-Compression Asymmetry

G. M. Sevastyanov^{a, #}

^aInstitute of Machinery and Metallurgy KhFRC FEB RAS, Komsomolsk-on-Amure, Russia

[#]e-mail: akela.86@mail.ru

The paper presents closed-form analytical solution to the plane-strain problem of stress relaxation in a bended plate with tension-compression asymmetry (TCA) in viscous properties. Reversible and irreversible strains are assumed to be finite. We utilize a linear viscous model with equivalent stress that is piecewise linear function of the principal stresses with TCA parameter. The specific features of the solution are discussed.

Keywords: viscoelasticity, creep, bending, tension-compression asymmetry

REFERENCES

1. *Ambartsumyan S.A., Khachatryan A.A.* Basic equations of the theory of elasticity for materials having different elastic moduli in tension and compression // Engng. J.: Mech. Solids, 1966, no. 2, pp. 44–53. (in Russian)
2. *Shapiro G.S.* On deformations of solids with different elastic moduli in tension and compression // Engng. J.: Mech. Solids, 1966, no. 2, pp. 123–125. (in Russian)
3. *Ambartsumyan S.A., Khachatryan A.A.* On bimodular elasticity theory // Engng. J.: Mech. Solids, 1966, no. 6, pp. 64–67. (in Russian)
4. *Maslov V.P., Mosolov P.P.* General theory of the equations of motion of an elastic medium of different moduli // JAMM, 1985, vol. 49, no. 3, pp. 322–336. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(85\)90031-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(85)90031-0)
5. *Myasnikov V.P., Oleinikov A.I.* Fundamental general relationships for a model of an isotropically elastic heteromodular medium // Dokl. Phys., 1992, vol. 322, no. 1, pp. 44–53. (in Russian)
6. *Oleinikov A.I., Mogilnikov E.V.* Uniqueness and stability of the solutions for boundary value problems for bimodular nonlinear materials // Far Eastern Math. J., 2002, vol. 3, no. 2, pp. 242–253. (in Russian)
7. *Tsvlodub I.Yu.* Multimodulus elasticity theory // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2008, vol. 49, pp. 129–135. <https://doi.org/10.1007/s10808-008-0019-1>
8. *Du Z., Zhang G., Guo T., Tang Sh., Guo X.* Tension-compression asymmetry at finite strains: A theoretical model and exact solutions // J. Mech.&Phys. Solids, 2020, vol. 143, art. no. 104084. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2020.104084>
9. *Cazacu O., Barlat F.* A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals // Int. J. Plasticity, 2004, vol. 20(11), pp. 2027–2045. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.11.021>
10. *Cazacu O., Plunkett B., Barlat F.* Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals // Int. J. Plasticity, 2006, vol. 22(7), pp. 1171–1194. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.06.001>
11. *Cazacu O., Revil-Baudard B.* Tension-compression asymmetry effects on the plastic response in bending: new theoretical and numerical results // Mech. Res. Commun., 2021, vol. 114, art. no. 103596. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2020.103596>
12. *Pirnia F.* Experimental Analyses on XLPE under Tension and Compression / Master's Degree Thesis. Dep. Mech. Engng., Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden. 2014.
13. *Guo Y., Liu G., Huang Y.* A complemented multiaxial creep constitutive model for materials with different properties in tension and compression // Europ. J. Mech. A/Solids, 2022, vol. 93, art. no. 104510. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104510>
14. *Zolochovsky A., Voyiadjis G.Z.* Theory of creep deformation with kinematic hardening for materials with different properties in tension and compression // Int. J. Plasticity, 2005, vol. 21(3), pp. 435–462. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.12.007>
15. *Banshchikova I.A.* Construction of constitutive equations for orthotropic materials with different properties in tension and compression under creep conditions // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2020, vol. 61, pp. 87–100. <https://doi.org/10.1134/S0021894420010101>
16. *Al'tenbakh Kh.I., Zolochovskii A.A.* Energy version of creep and stress-rupture strength theory for anisotropic and isotropic materials which differ in resistance to tension and compression // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 1992, vol. 33, pp. 101–106. <https://doi.org/10.1007/BF00864514>
17. *Gorev B.V., Rubanov V.V., Sosnin O.V.* Construction of the creep equations for materials with different extension and compression properties // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 1979, vol. 20(4), pp. 487–492. <https://doi.org/10.1007/BF00905605>
18. *Teixeira L., Gillibert J., Sayet T., Blond E.* A creep model with different properties under tension and compression: Applications to refractory materials // Int. J. Mech. Sci., 2021, vol. 212, art. no. 106810. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106810>
19. *Korobeinikov S.N., Oleinikov A.I., Gorev B.V., Bormotin K.S.* Mathematical simulation of creep processes in metal products made of materials with different properties in tension and compression // Comput. Meths.&Progr., 2008, vol. 9, pp. 346–365. (in Russian)
20. *Bykovtsev G.I., Yarushina V.M.* On the features of the unsteady creep model based on the use of piecewise linear potentials // In: Problems of Mechanics of Continuous Media and Structural Elements (to the 60th Anniversary of Prof. G.I. Bykovtsev). Vladivostok, Dalnauka, 1998. pp. 9–26. (in Russian)

21. *Burenin A.A., Yarushina V.M.* On modeling the deformation of materials with different properties in tension and compression // In: Problems of Mechanics of Deformable Solids and Rocks. Collection of articles dedicated to the 75th anniversary of E.I. Shemyakin / Ed. by: *Ivlev D.D., Morozov N.F.* Moscow: Fizmatlit, 2006. pp. 100–106. (in Russian)
22. *Yarushina V.M.* Simulation of the creep of materials with different strengths // *Dokl. Phys.*, 2005, vol. 50, no. 7, pp. 385–387. <https://doi.org/10.1134/1.2005366>
23. *Sevastyanov G.M., Bormotin K.S.* Stress relaxation in bended viscoelastic plate with tension-compression asymmetry // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2023. (in Press).
24. *Sidoroff F.* Un modele viscoelastique non lineaire avec configuration intermediaire // *J. de Mécanique*, 1974, vol. 13(4), pp. 679–713.
25. *Ivlev D.D.* The theory of fracture of solids // *JAMM*, 1959, vol. 23, no. 3, pp. 884–895. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(59\)90185-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90185-6)
26. *Rivlin R.* Large elastic deformations of isotropic materials – V: The problem of flexure // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Math.&Phys. Sci.*, 1949, vol. 195, pp. 463–473. <https://doi.org/10.1098/rspa.1949.0004>
27. *Destrade M., Murphy J.G., Rashid B.* Differences in tension and compression in the nonlinearly elastic bending of beams // *Int. J. Struct. Changes in Solids – Mech.&Appl.*, 2009, vol. 1(1), pp. 73–81.
28. *Destrade M., Gilchrist M.D., Motherway J.A., Murphy J.G.* Bimodular rubber buckles early in bending // *Mech. Mater.*, 2010, vol. 42(4), pp. 469–476. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2009.11.018>
29. *Ghobady E., Shutov A., Steeb H.* Parameter identification and validation of shape-memory polymers within the framework of finite strain viscoelasticity // *Materials (Basel)*, 2021, vol. 14(8), 2049. <https://doi.org/10.3390/ma14082049>
30. *Sevastyanov G.M.* Creep relaxation in nonlinear viscoelastic twisted rods // *ZAMM*. 2022. e202100552. <https://doi.org/10.1002/zamm.202100552>