

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ПММ)

т. 88, вып. 1



Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 88. Iss. 1

EDITORIAL BOARD

I.G. Goryacheva (editor-in-chief, Professor, RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)

V.G. Baydulov (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia)

J. Awrejcewicz (Professor, Politechnika Łódzka, Łódź, Poland),

N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),

A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),

A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute
(TsAGI), Zhukovsky, Russia),

M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),

Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),

A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),

A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk, Russia),

V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),

A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic
University, St. Petersburg, Russia),

A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),

Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),

T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),

F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member,
Technische Universität München, Munich, Germany),

V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
RAS, Novosibirsk, Russia),

G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),

S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),

Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F.E. Udowadia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),

S.E. Yakush (Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko,
A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov,
S.V. Nesterov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian,
I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов — отв. секретарь

Е.В. Есина — зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала «Прикладная математика и механика» в каталоге Роспечати 39388

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov — executive secretary

E.V. Esina — head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245,
119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 39388

ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

Об устойчивости линейных систем с квадратичным интегралом <i>В. В. Козлов</i>	5
Нерегулярная прецессия осесимметричного тела в трех однородных полях <i>В. Ю. Ольшанский</i>	17
О прецессии волчка Лагранжа <i>Г. М. Розенблат</i>	34
Оптимальное движение тела, управляемого посредством внутренней массы, в среде с сопротивлением <i>Т. В. Глазков, Ф. Л. Черноусько</i>	53
Задача уклонения траекторий конфликтно управляемых систем от разреженных терминальных множеств <i>Л. П. Югай</i>	67
Особенности фотофоретического движения испаряющейся капли в вязкой неизотермической бинарной газовой среде <i>Н. В. Малай, П. В. Сохань, Ю. И. Шостак</i>	79
Разгон сдвигового течения в вязкопластической полуплоскости с переменным по глубине пределом текучести <i>Д. В. Георгиевский, В. А. Банько</i>	95
Локализация собственных колебаний тонких упругих прокладок <i>С. А. Назаров</i>	104
Исследование упрочнения полых сферических заготовок с помощью комбинации гидравлического и температурного автофретирования <i>А. Н. Прокудин</i>	139

CONTENTS

On the Stability of Linear Systems with a Quadratic Integral <i>V. V. Kozlov</i>	5
Nonregular Precession of a Rigid Body in Three Uniform Fields <i>V. Yu. Ol'shanskii</i>	17
On Precession of Lagrange's Top <i>G. M. Rozenblat</i>	34
Optimal Motion of a Body Controlled by an Internal Mass in the Resistive Environment <i>T. V. Glazkov, F. L. Chernousko</i>	53
The Problem of Trajectories Avoiding from Rarefied Terminal Sets <i>L. P. Yugay</i>	67
Features of the Photophoretic Motion of an Evaporating Droplet in a Viscous Non-Isothermal Binary Gas Medium <i>N. V. Malai, P. V. Sohan, Yu. I. Shostak</i>	79
Acceleration of Shear Flow in a Viscoplastic Half-Plane with a Depth-Varying Yield Stress <i>D. V. Georgievskii, V. A. Banko</i>	95
Localization of Natural Oscillations of Thin Elastic Gaskets <i>S. A. Nazarov</i>	104
Strengthening of Hollow Spheres Using Combined Method of Hydraulic and Thermal Autofrettage <i>A. N. Prokudin</i>	139

УДК 531.36+517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
С КВАДРАТИЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ© 2024 г. В. В. Козлов^{1,*}¹Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

*e-mail: vvkozlov@presidium.ras.ru

Поступила в редакцию 10.11.2023 г.

После переработки 15.12.2023 г.

Принята к публикации 15.12.2023 г.

Рассмотрена задача об устойчивости невырожденных линейных систем, допускающих первый интеграл в виде невырожденной квадратичной формы. Установлены новые алгебраические критерии устойчивости, а также полной неустойчивости таких систем в виде равенства нулю следов произведений матриц, куда входит дополнительная симметрическая матрица. Эти условия тесно связаны с симплектической геометрией фазового пространства, которая определяется матрицей исходной линейной системы и симметрической матрицей, задающей первый интеграл. Результаты общего характера применяются к нахождению условий полной неустойчивости линейных гироскопических систем.

Ключевые слова: линейные системы, квадратичные интегралы, след, симплектическая структура, гамильтоновы системы, нормальные формы Вильямсона, степени устойчивости и неустойчивости, полная неустойчивость, пучки квадратичных форм, гироскопические системы

DOI: 10.31857/S0032823524010017 EDN: YUZUZH

1. Условия устойчивости. Предположим, что линейная система

$$\dot{x} = Ax; \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (1.1)$$

допускает квадратичный первый интеграл

$$f = (Bx, x) / 2, \quad B^* = B \quad (1.2)$$

Матрицы A и B связаны следующим соотношением:

$$BA = -A^*B \quad (1.3)$$

В дальнейшем предполагается *невырожденность* матриц A и B . В частности, m четно. Действительно, согласно (1.3), матрица BA кососимметрическая. Она может быть невырожденной только при четном m . Положим $m = 2n$. Если $|AB| \neq 0$, то система (1.1) на самом деле *гамильтонова*, причем f будет функцией Гамильтона [1]. Но только она представлена не в канонических переменных. Согласно [2], система (1.1) допускает семейство квадратичных первых интегралов

$$f_k = \left(A^{k*} B A^k x, x \right) / 2; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.4)$$

Конечно, не все они независимы. В типичном случае, когда матрица A не имеет кратных собственных значений, функции

$$f_0 = f, f_1, \dots, f_{n-1} \quad (1.5)$$

независимы (см. [2]). Более того, они попарно находятся в инволюции относительно естественной симплектической структуры, относительно которой система (1.1) будет гамильтоновой. Спектр матрицы A симметричен не только относительно вещественной, но и относительно чисто мнимой оси. Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &= |A - \lambda E| = |B^{-1}| |BA - \lambda B| = |B^{-1}| \times \\ &\times |-A^* B - \lambda B| = |A^* + \lambda E| = |A + \lambda E| \end{aligned}$$

Степенью устойчивости s системы (1.1) назовем число пар чисто мнимых собственных значений матрицы A , а *степень неустойчивости* u — это количество собственных значений A в правой комплексной полуплоскости. Если матрица A невырождена, то

$$s + u = n \quad (1.6)$$

Пусть i^- , i^+ — индексы инерции квадратичной формы (1.2). Если эта форма невырождена, то, очевидно,

$$i^- + i^+ = 2n \quad (1.7)$$

Так как $-f$ также квадратичный интеграл системы (1.1), то без ущерба для общности можно считать, что

$$i^- \leq i^+ \quad (1.8)$$

В [3] установлено неравенство

$$i^+ - i^- \leq 2s \quad (1.9)$$

Точнее, в [3] доказано более сильное неравенство, но в дальнейшем оно нам не понадобится. С другой стороны, в [2] доказано неравенство

$$u \leq i^- \quad (1.10)$$

Его частные варианты были известны ранее (см., например, [4]). С учетом соотношений (1.6), (1.7) и соглашения (1.8), неравенства (1.9) и (1.10) на самом деле эквивалентны (хотя их доказательства в [2] и [3] основаны на разных идеях).

Систему (1.1) назовем *вполне неустойчивой*, если $s = 0$ и $u = n$. В этом случае степень неустойчивости принимает максимально возможное значение и (согласно (1.8) и (1.10)) $i^- = i^+ = n$. Так что в этом случае фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с квадратичной формой (1.2) в качестве псевдоевклидовой метрики будет *пространством Артина*.

В «противоположном» случае, когда $u = 0$, а $u = n$, систему (1.1) будем называть *устойчивой*. В типичном случае, когда спектр матрицы A простой (именно его в дальнейшем и будем рассматривать), положение равновесия $x = 0$ устойчивой системы устойчиво по Ляпунову (как в прошлом, так и в будущем).

В [1] показано, что линейная система с квадратичным интегралом устойчива тогда и только тогда, когда она допускает первый интеграл в виде положительно определенной квадратичной формы. С другой стороны, рассмотрим конус в $\mathbb{R}^{2n}$:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : f_0(x) = \dots = f_{n-1}(x) = 0\}$$

Как было показано [2], критерий устойчивости системы (1.1) состоит в выполнении условия $K = \{0\}$. Более того, в этом случае положительно определенный квадратичный интеграл можно найти в виде пучка квадратичных интегралов (1.4)

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f_i; \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Укажем несколько необычные алгебраические критерии полной неустойчивости и устойчивости линейной системы с квадратичным интегралом. Будем предполагать, что матрица A не имеет кратных собственных значений. Это означает, что дискриминант ее характеристического многочлена отличен от нуля.

Теорема 1. Система (1.1) вполне неустойчива тогда и только тогда, когда найдется положительно (или отрицательно) определенная симметрическая матрица S такая, что

$$\operatorname{tr}\left(SA^k{}^*BA^k\right)=0 \quad (1.11)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, n-1$.

В силу соотношения (1.3) условие (1.11) эквивалентно условию

$$\operatorname{tr}\left(SBA^{2k}\right)=0 \quad (1.12)$$

Выбирая в качестве S единичную матрицу, сразу получаем:

Следствие. Если

$$\operatorname{tr}\left(BA^{2k}\right)=0 \quad (1.13)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, n-1$, то линейная система вполне неустойчива.

Конечно, условие (1.13) редко выполняется. Однако если A не имеет чисто мнимых собственных значений, то в нормальных канонических переменных Вильямсона матрица B вполне неустойчивой системы имеет нулевую диагональ. Как показано в [2], этим же свойством обладают и все матрицы BA^{2k} .

Теорема 2. Система (1.1) устойчива тогда и только тогда, когда для любой симметрической матрицы $S \neq 0$, удовлетворяющей условию (1.11), квадратичная форма (Sy, y) , $y \in \mathbb{R}^{2n}$ принимает значения разных знаков.

Следствие. Система (1.1) неустойчива тогда и только тогда, когда найдется ненулевая симметрическая матрица S такая, что $(Sy, y) \geq 0$ (или ≤ 0) для всех $y \in \mathbb{R}^{2n}$.

Теорема 3. Среди симметрических невырожденных матриц S , удовлетворяющих соотношениям (1.11), всегда найдется такая, что индексы инерции квадратичной формы (Sy, y) равны s и $2u + s$.

Если система вполне неустойчива, то $s = 0$ и матрица S будет дефинитной (что соответствует заключению теоремы 1). В устойчивом случае $u = 0$, и поэтому квадратичная форма (Sy, y) будет артиновой формой (очевидно принимающей значения разных знаков). Теорема 3 не допускает обращения. Это показывает простой пример линейной системы на плоскости ($n = 1$). Система

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2$$

имеет квадратичный интеграл $f = x_1x_2$. Здесь $s = 0$, а $u = 1$. Соотношению (1.11), очевидно, удовлетворяют симметрические матрицы

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Индексы инерции квадратичной формы (S_1y, y) равны $i^+ = 2$, $i^- = 0$ (что отвечает заключению теоремы 3), а квадратичная форма (S_2y, y) будет артиновой ($i^+ = i^- = 1$).

Каков инвариантный смысл соотношения (1.11) (или (1.12))? При линейной подстановке $x \mapsto Cx$ матрицы A и B преобразуются по следующим правилам:

$$A \mapsto C^{-1}AC, \quad B \mapsto C^*BC$$

Если симметрическая матрица S преобразуется по правилу

$$S \mapsto C^{-1}SC^{*-1}, \quad (1.14)$$

то

$$SBA^{2k} \mapsto C^{-1}SBA^{2k}C,$$

и, следовательно, $\text{tr}(SBA^{2k})$ не изменится.

Введем векторное пространство $R^{2n*} = \{y\}$, сопряженное к $R^{2n} = \{x\}$. Каноническое спаривание $y \cdot x$ (значение ковектора на векторе) будет инвариантом, если векторы из R^{2n*} преобразуются по ковариантному закону:

$$y \mapsto C^{*-1}y \quad (1.15)$$

Следовательно, согласно (1.14), симметрическую матрицу S следует считать матрицей квадратичной формы в сопряженном пространстве. Подчеркнем, что в результате линейной подстановки (1.15) сохраняется дефинитность, полудефинитность или знакопеременность квадратичной формы (Sy, y) .

2. Доказательства. Теоремы 1–3 доказываются с помощью теории вещественных нормальных форм линейных дифференциальных уравнений Гамильтона, к которым невырожденным линейным преобразованием приводится линейная система (1.1) с квадратичным интегралом (1.2). Согласно Вильямсону, фазовое пространство R^{2n} распадается в прямую сумму косоортогональных (относительно соответствующей симплектической структуры) подпространств так, что гамильтониан представляется в виде суммы квадратичных форм (частичных гамильтонианов) на этих подпространствах, при этом:

а) вещественной паре $\pm a$ ($a \neq 0$) собственных чисел отвечает гамильтониан $-apq$ (здесь и далее p, q обозначают пару сопряженных канонических переменных),

б) чисто мнимой паре $\pm ib$ ($b \neq 0$) — $b(p^2 + q^2) / 2$,

в) четверке собственных значений $\pm a \pm ib$ ($ab \neq 0$) —

$$-a(p_1q_1 + p_2q_2) + b(p_1q_2 - p_2q_1).$$

При сделанных в разд. 1 предположениях о невырожденности системы (1.1) с гамильтонианом (1.2) и об отсутствии кратных корней других частичных гамильтонианов нет. В этих переменных матрица квадратичного интеграла f имеет блочно-диагональный вид, где по диагонали расположены матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & b \\ -a & 0 & -b & 0 \\ 0 & -b & 0 & -a \\ b & 0 & -a & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

отвечающие случаям (а–в). Как показано в [2], симметрическая матрица $A^m BA^m$ в этих координатах имеет тот же вид, что и матрица B , но только в случаях (а) и (б) перед блоками на диагонали присутствуют множители $(-1)^m a^{2m}$ и b^{2m} соответственно. Что касается случая (в), то ограничение квадратичного интеграла f_m на плоскость с каноническими координатами p_1, q_1, p_2, q_2 принимает следующий вид:

$$\mu_m(p_1q_1 + p_2q_2) + \nu_m(p_1q_2 - p_2q_1),$$

где

$$\mu_m = \text{Re}(-1)^{m+1}(a - ib)^{2m+1}, \quad \nu_m = \text{Im}(-1)^{m+1}(a - ib)^{2m+1}$$

Следует отметить, что число $a - ib$ является одним из четверки собственных значений матрицы A .

После этих предварительных замечаний докажем сначала более простую теорему 3. Используя нормальные канонические координаты, будем искать невырожденную симметрическую матрицу S в диагональном виде. Для блоков, отвечающих случаям (а) и (в), на диагонали матрицы S поместим 1, а в каждом блоке случая (б) на диагонали поместим 1 и -1 . Ясно, что в нормальных канонических переменных выполнены все n соотношений (1.11). Поскольку каждому блоку вида (а) и (в) отвечает пара вещественных и четверка комплексных собственных значений матрицы A , а блоку вида (б) отвечает пара чисто мнимых собственных значений, то сигнатура квадратичной формы (S, y) есть $2u + s$ и s . Остается воспользоваться замечаниями из разд. 1 и вспомнить, что сигнатура квадратичной формы не меняется при невырожденных линейных заменах переменных.

Докажем теперь теорему 1. Согласно теореме 3, если линейная система вполне неустойчива (то есть $s = 0$), то найдется дефинитная симметрическая матрица S , удовлетворяющая всем соотношениям (1.11).

Обратно, пусть найдется такая дефинитная симметрическая матрица S . Покажем, что $S = 0$. Предположим противное, что $s \geq 1$. Воспользуемся нормальными каноническими координатами Вильямсона. Если $s \geq 1$, то найдется двумерная инвариантная плоскость, отвечающая случаю (б).

Пусть симметрическая матрица S удовлетворяет всем n соотношениям (1.11) или, что то же самое, (1.12)). Поскольку матрицы BA^{2k} имеют описанный выше блочный вид (2.1), то матрицу S тоже следует считать блочно-диагональной с теми же размерами, что и размеры блоков матрицы B . Остальные элементы матрицы S (вне этих блоков) не участвуют в соотношениях (1.11).

Итак, пусть

$$BA^{2k} = \text{diag}[D_1^{(k)}, D_2^{(k)}, \dots], \quad S = \text{diag}[S_1, S_2, \dots],$$

причем квадратичные симметрические матрицы $D_j^{(k)}$ и S_j имеют одинаковые размеры (2×2 или 4×4). Соотношения (1.11) принимают следующий вид:

$$\sum_j \text{tr}(S_j D_j^{(k)}) = 0; \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.2)$$

Если матрица $D_j^{(k)}$ отвечает случаю (а), то

$$\text{tr}(S_j D_j^{(k)}) = -a^{2k+1} (2s_{12}^{(j)}), \quad (2.3)$$

где $s_{12}^{(j)}$ — внедиагональный элемент симметрической 2×2 -матрицы S_j .

В случае (б) этот след, очевидно, равен

$$b^{2k+1} \text{tr} S_j \quad (2.4)$$

В случае (в) имеем

$$\text{tr}(S_j D_j^{(k)}) = 2\mu_k (s_{12}^{(j)} + s_{34}^{(j)}) + 2\nu_k (-s_{14}^{(j)} + s_{23}^{(j)}), \quad (2.5)$$

где $s_{pq}^{(j)}$ — элементы симметрической 4×4 -матрицы S_j .

Учитывая формулы (2.3)-(2.5), заключаем, что n соотношений (2.2) дают замкнутую однородную систему n линейных уравнений для нахождения комбинаций элементов матриц S_j :

$$s_{12}^{(j)}, \quad \text{tr} S_j, \quad s_{12}^{(j)} + s_{34}^{(j)}, \quad -s_{14}^{(j)} + s_{23}^{(j)}$$

Так как спектр матрицы A простой, то определитель $n \times n$ — матрицы коэффициентов этой системы отличен от нуля (этот факт уже установлен при доказательстве функциональной независимости квадратичных форм $f_0 = f, f_v, \dots, f_{n-1}$). В частности, rS_j в случае (б). Значит, если матрица A имеет хотя бы одну пару чисто мнимых собственных значений (то есть $s \geq 1$), то симметрическая матрица S не может быть дефинитной, поскольку (по критерию Сильвестра) все диагональные элементы должны иметь один знак. Однако этот вывод противоречит нашему предположению о дефинитности матрицы S , что доказывает теорему 1.

Нам осталось доказать теорему 2. Пусть линейная система (1.1) устойчива. Тогда в нормальных канонических координатах Вильямсона матрица B имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$\text{diag} \left(\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \dots \right),$$

причем вещественные числа $b_1, b_2, \dots$ (и их квадраты) все различны и не равны нулю. Матрица BA^{2k} имеет тот же вид:

$$\text{diag} \left(\begin{bmatrix} b_1^{2k+1} & 0 \\ 0 & b_1^{2k+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_2^{2k+1} & 0 \\ 0 & b_2^{2k+1} \end{bmatrix}, \dots \right)$$

Пусть s_1, s_2, s_{2n} — диагональные элементы матрицы S . Тогда соотношения (1.11) дают нам следующую линейную систему

$$b_1^{2k+1}(s_1 + s_2) + b_2^{2k+1}(s_3 + s_4) + \dots = 0; \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Так как $b_1, b_2, \dots$ различны, то определитель этой системы (определитель Вандермонда) отличен от нуля. Следовательно,

$$s_1 + s_2 = 0, \quad s_3 + s_4 = 0, \dots$$

Но в этом случае квадратичная форма (Sy, y) принимает значения разных знаков, если, конечно, $S \neq 0$.

Обратно, предположим, что всякая квадратичная форма (Sy, y) принимает как положительные, так и отрицательные значения, если ненулевая симметрическая матрица S удовлетворяет соотношениям (1.11) и при этом линейная система (1.1) неустойчива. Это означает, что в специальных нормальных координатах Вильямсона матрица B имеет диагональный блок вида (а) или (в). Такой же по виду блок имеют и все матрицы $D^{(k)} = BA^{2k}$. В качестве соответствующего блока S_j матрицы S возьмем единичную матрицу. Тогда

$$\text{tr}(S_j D_j^{(k)}) = 0; \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Полагая остальные блоки матрицы S равными нулю, получаем ненулевую симметрическую матрицу S , удовлетворяющую всем соотношениям (1.11), однако $(Sy, y) \geq 0$ для всех y . Таким образом, в этом случае найдется ненулевая симметрическая матрица S такая, что выполнено условие (1.11), но квадратичная форма (Sy, y)

не принимает значения разных знаков. Полученное противоречие доказывает устойчивость линейной системы (1.1). Что и требовалось.

Замечание. В работах [4,5] (см. также обзор [6]) рассмотрена задача о наличии в пучке симметрических матриц $T_1, \dots, T_{\text{tau}}$ (он состоит из линейных комбинаций $\sum \mu_j T_j$, $\mu_j \in \mathbb{R}$) дефинитной матрицы. Для этого необходимо и достаточно, чтобы из условий $\text{tr}(ST_j) = 0$, $1 \leq j \leq r$ вытекала индефинитность симметрической матрицы S . Это утверждение можно было бы использовать для доказательства теоремы 2 (вместе с тем фактом, что матрица любого квадратичного интеграла линейной системы (1.1) принадлежит пучку симметрических матриц BA^{2k} , $0 \leq k \leq n-1$). Там же указаны условия существования в пучке матриц индефинитной и полудефинитной матриц. Однако все эти условия не пригодны для доказательства теорем 1 и 3, которые (как и теорема 2) имеют симплектическую природу.

3. Ганкелевы формы. Укажем еще один алгебраический критерий устойчивости линейных систем с квадратичным интегралом. Как уже было сказано в разд. 1, характеристический многочлен матрицы A не содержит нечетных степеней спектрального параметра:

$$\lambda^{2n} + \alpha_1 \lambda^{2n-2} + \dots + \alpha_n \quad (3.1)$$

Поскольку (согласно предположению) этот многочлен не имеет кратных корней, то его дискриминант отличен от нуля.

Равновесие $x = 0$ системы (1.1) устойчиво тогда и только тогда, когда все корни многочлена n -й степени

$$\mu^n + \alpha_1 \mu^{n-1} + \dots + \alpha_n \quad (3.2)$$

вещественные отрицательные числа. Следовательно, *необходимое* условие устойчивости заключается в выполнении неравенств $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$.

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ — простые корни многочлена (3.2). Положим

$$h_k = \mu_1^k + \dots + \mu_n^k, \quad h_0 = n$$

Числа h_k выражаются через коэффициенты по следующим формулам Ньютона:

$$2h_m + h_{m-1}\alpha_1 + \dots + h_1\alpha_{m-1} + m\alpha_m = 0; \quad m \leq n$$

$$h_m + h_{m-1}\alpha_1 + \dots + h_{m-n}\alpha_n = 0; \quad m > n$$

Отсюда $h_1 = -\alpha_1$, $h_2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_2$, $h_3 = -\alpha_1^3 + 3\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_3, \dots$ Введем симметрическую матрицу n -го порядка

$$H = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & h_n \\ \dots & & \\ h_{n-1} & h_n & h_{2n-2} \end{bmatrix}$$

и ганкелеву квадратичную форму $\Phi(z) = (Hz, z)$, $z \in \mathbb{R}^n$. Хорошо известно, что $D = |H|$.

Теорема 4. Равновесие $x = 0$ системы (1.1) устойчиво тогда и только тогда, когда $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$ и функция Φ имеет в точке $z = 0$ строгий минимум.

Доказательство. Так как $D \neq 0$, то многочлен (3.2) не имеет кратных корней. В этом случае критерий вещественности всех корней многочлена (3.2) есть условие положительной определенности квадратичной формы Φ [7]. Остается воспользоваться следующим фактом, вытекающим из правила Декарта: многочлен (3.2) без комплексных корней имеет n отрицательных корней тогда и только тогда, когда все его коэффициенты положительны. Что и требовалось.

Пусть I^+ , I^- — индексы инерции ганкелевой формы Φ . Так как $D = |\Phi| \neq 0$, то $I^+ + I^- = n$. В этом случае разность $n - |I^+ - I^-|$ всегда четна.

Теорема 5. Пусть ганкелева форма Φ невырождена. Тогда в спектре матрицы A имеется ровно $(n - |I^+ - I^-|) / 2$ различных комплексных четверок (чисел $\pm a \pm ib$, $ab \neq 0$).

В технической литературе наличие комплексных четверок в спектре линейной системы принято связывать с неустойчивостью типа *флаттера*. Если же в правой комплексной полуплоскости имеются только вещественные собственные значения, то в этом случае говорят о неустойчивости типа *дивергенции* (см., напр., [8, 9]).

Следствие 1. Пусть ганкелева форма Φ не имеет в начале координат минимума. Тогда в линейной системе будет неустойчивость типа флаттера.

Следствие 2. Если $D = |H| < 0$, то $x = 0$ — неустойчивое равновесие, имеющее тип флаттера.

Действительно, в этом случае ганкелева форма Φ невырождена, но не имеет минимума (согласно критерию Сильвестра).

Следствие 3. Пусть форма Φ положительно определена, а хотя бы один из коэффициентов характеристического многочлена (3.1) отрицательный. Тогда равновесие $x = 0$ системы (1.1) неустойчиво, причем эта неустойчивость имеет тип дивергенции.

Это утверждение вытекает из теорем 4 и 5. Вообще, если Φ положительно определена, то степень неустойчивости системы (1.1) равна числу перемен знаков коэффициентов многочлена (3.1).

Сама теорема 5 является следствием известного результата о ганкелевых квадратичных формах [7]: если $D \neq 0$, то количество вещественных корней многочлена (3.2) равно $|I^+ - I^-|$. Далее вещественному корню (3.2) отвечает либо пара вещественных, либо пара чисто мнимых корней многочлена (3.1). А каждой паре комплексных корней $\alpha \pm i\beta$ ($\beta \neq 0$) многочлена (3.2) (таких пар $(n - |I^+ - I^-|) / 2$) отвечает комплексная четверка корней (3.1). Что и требовалось.

4. Пример из теории гироскопической стабилизации. В качестве примера рассмотрим классическую задачу о гироскопической стабилизации неустойчивого равновесия линейной механической системы с двумя степенями свободы. Она описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_1 + \gamma \dot{x}_2 - ax_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 - \gamma \dot{x}_1 - bx_2 = 0 \quad (4.1)$$

Здесь a и b — положительные постоянные, параметр γ определяет интенсивность гироскопических сил. Размерность фазового пространства равна четырем; так что $n = 2$.

Уравнения (4.1) допускают квадратичный интеграл энергии

$$f = (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - ax_1^2 - bx_2^2) / 2$$

Дополнительный интеграл (1.4):

$$f_1 = [(-\gamma \dot{x}_2 + ax_1)^2 + (\gamma \dot{x}_1 + bx_2)^2 - a\dot{x}_1^2 - b\dot{x}_2^2] / 2$$

Оба интеграла имеют одинаковые индексы инерции: $i^+ = i^- = 2$. Согласно [1], степень неустойчивости u и индекс инерции i^- имеют одинаковую четность.

Следовательно, если система (4.1) неустойчива, то $u = 2$. В этом случае свойства неустойчивости и полной неустойчивости линейной системы совпадают.

Условия гироскопической стабилизации системы (4.1) хорошо известны (см., например, [9, гл. 6]). Воспроизведем диаграмму степеней устойчивости в удобном для нас виде. Характеристический многочлен линейной системы (4.1) есть

$$\lambda^4 + \lambda^2(\gamma^2 - a - b) + ab \quad (4.2)$$

Считая $\gamma \neq 0$, положим $b = b'\gamma^2$, $a = a'\gamma^2$ и $\lambda = \lambda'\lambda^2$. Тогда (4.2) принимает следующий вид:

$$\gamma^4[\lambda'^4 + \lambda'^2(1 - a' - b') + a'b']$$

Для задачи об устойчивости наличие множителя γ^4 не играет никакой роли. Диаграмма степеней устойчивости на плоскости параметров a' , b' изображена на рис. 1. Дискриминантная кривая (где дискриминант $D = (a' - b')^2 - 2(a' + b' + 1)$ обращается в нуль) является параболой, которая касается осей a' и b' точках (1, 0) и (0, 1) соответственно. В каждой из областей изображено расположение собственных значений (кратные собственные значения более «жирные»). Точки $a' = 1, b' = 0$ и $a' = 0, b' = 1$ отвечают нулевому корню кратности 4. Рисунок наглядно показывает смену расположения характеристических корней при переходе через бифуркационные кривые. Область параметров, отвечающих полной неустойчивости системы (4.1), заштрихована. Кстати сказать, области устойчивости и неустойчивости, а также области флаттера и дивергенции сразу же определяются из заключений теорем 4 и 5 (и их следствий).

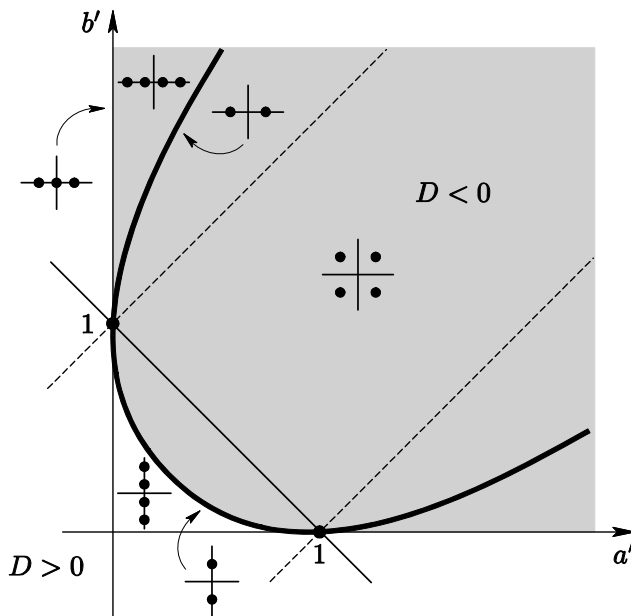


Рис. 1

Исследуем вопрос об условиях полной неустойчивости системы (4.1), опираясь на теорему 1. Матрицы квадратичных форм f_0 и f_1 суть

$$B = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } BA^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 & a\gamma \\ 0 & b^2 & -b\gamma & 0 \\ 0 & -b\gamma & \gamma^2 - a & 0 \\ a\gamma & 0 & 0 & \gamma^2 - b \end{bmatrix}$$

Будем искать симметрическую матрицу S в следующем виде:

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & s_5 \\ 0 & s_2 & s_6 & 0 \\ 0 & s_6 & s_3 & 0 \\ s_5 & 0 & 0 & s_4 \end{bmatrix}$$

Условие ее положительной определенности сводится к четырем неравенствам:

$$s_1 > 0, \quad s_2 > 0, \quad s_2 s_3 > s_6^2, \quad s_1 s_4 > s_5^2 \quad (4.3)$$

При этом, конечно, $s_3 > 0$ и $s_4 > 0$. Запишем в явном виде два соотношения:

$$as_1 + bs_2 = s_3 + s_4 \quad (4.4)$$

$$a^2 s_1 + b^2 s_2 + (\gamma^2 - a)s_3 + (\gamma^2 - b)s_4 + 2a\gamma s_5 - 2b\gamma s_6 = 0 \quad (4.5)$$

Надо найти решения этих двух уравнений, удовлетворяющих неравенствам (4.3).

Положим

$$s_3 = bs_2, \quad s_4 = as_1 \quad (4.6)$$

Если при этом $s_5 = s_6 = 0$, то уравнение (4.5)

$$a(\gamma^2 - b + a)s_1 + b(\gamma^2 - a + b)s_2 = 0 \quad (4.7)$$

имеет решение с положительными s_1, s_2 при условии

$$\gamma^2 < |a - b| \quad (4.8)$$

Но тогда диагональная матрица S будет положительно определенной и линейная система (4.1) оказывается вполне неустойчивой (по теореме 1). На диаграмме степеней устойчивости условие (4.8) задает две связные области, расположенные выше и ниже двух прямых, обозначенных пунктиром. При этом спектр линейной системы (4.1) может состоять из двух пар вещественных чисел, или быть четверкой комплексных чисел.

В общем случае (когда s_5 и s_6 отличны от нуля) соотношение (4.7) принимает следующий вид:

$$a(\gamma^2 - b + a)s_1 + b(\gamma^2 - a + b)s_2 + 2a\gamma s_5 - 2b\gamma s_6 = 0$$

Положим

$$(\gamma^2 - a + b)s_2 - 2\gamma s_6 = 0 \text{ и } (\gamma^2 - b + a)s_1 + 2\gamma s_5 = 0$$

Учитывая (4.6), получаем, что два последних неравенства (4.3) удовлетворяются, если

$$(\gamma^2 - a + b)^2 < 4b\gamma^2 \text{ и } (\gamma^2 - b + a)^2 < 4a\gamma^2 \quad (4.9)$$

соответственно. Но эти оба неравенства совпадают и определяют на диаграмме степеней устойчивости область $D < 0$. Таким образом, объединение областей, задаваемых неравенствами (4.8) и (4.9), совпадает с областью полной неустойчивости линейной гироскопической системы (4.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В.В. Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 900–906.
2. Kozlov V.V. Linear hamiltonian systems: quadratic integrals, singular subspaces and stability // R&C Dyn. 2018. V. 23. № 1. P. 26–46.
3. Каранетян А.А., Козлов В.В. О степени устойчивости // Дифф. ур-я. 2005. Т. 41. № 2. С. 186–192.
4. John F. A note on the maximum principle for elliptic differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1938. V. 44. P. 268–271.
5. Dines L.L. On linear combinations of quadratic forms // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. V. 49. P. 388–393.
6. Uhlig F. A Recurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions: a survey // Linear Algebra and Its Appl. 1979. V. 25. P. 219–237.
7. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
8. Kirillov O.N. Nonconservative Stability Problems of Modern Physics. Berlin: De Gruyter, 2013.
9. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2009. 399 с.

On the Stability of Linear Systems with a Quadratic Integral

V. V. Kozlov^{a, #}

^a*Steklov Mathematical Institute RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: vvkozlov@presidium.ras.ru*

The problem of stability of non-degenerate linear systems admitting a first integral in the form of a non-degenerate quadratic form is considered. New algebraic criteria for stability, as well as complete instability of such systems, have been established in the form of equality to zero of traces of products of matrices, which include an additional symmetric matrix. These conditions are closely related to the symplectic geometry of the phase space, which is determined by the matrix of the original linear system and the symmetric matrix defining the first integral. General results are applied to finding conditions for complete instability of linear gyroscopic systems.

Keywords: linear systems, quadratic integrals, trace, symplectic structure, Hamiltonian systems, Williamson normal forms, degrees of stability and instability, complete instability, bundles of quadratic forms, gyroscopic systems

REFERENCES

1. Kozlov V.V. Linear systems with a quadratic integral // JAMM, 1992, vol. 56, iss. 6, pp. 803–809. DOI: 10.1016/0021-8928(92)90114-N
2. Kozlov V.V. Linear hamiltonian systems: quadratic integrals, singular subspaces and stability // R.&C. Dyn., 2018, Vol. 23, no 1, pp. 26–46.
3. Kozlov V.V., Karapetyan A.A. On the stability degree // Differ. Eqns., 2005, vol. 41, no. 2, pp. 195–201.

4. *John F.* A note on the maximum principle for elliptic differential equations // *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1938, vol. 44, pp. 268–271.
5. *Dines L.L.* On linear combinations of quadratic forms // *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1943, vol. 49, pp. 388–393.
6. *Uhlig F.* A Reccurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions: a survey // *Linear Algebra and Its Appl.*, 1979, vol. 25, pp. 219–237.
7. *Gantmakher F.R.* Matrix Theory. Moscow: Fizmatlit, 2004. 560 p. (in Russian)
8. *Kirillov O.N.* Nonconservative Stability Problems of Modern Physics. Berlin: De Gruyter, 2013.
9. *Mailybaev A.A., Seyranyan A.P.* Multiparameter Stability Problems. Theory and Applications in Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2009. 399 p. (in Russian)

УДК 531.381

НЕРЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛЯХ

В. Ю. Олышанский^{1,*}¹ ИПТМУ РАН, Саратов, Россия

* e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru

Поступила в редакцию 07.11.2023 г.

После доработки 15.01.2024 г.

Принята к публикации 20.01.2024 г.

В статье приведено решение задачи об условиях нерегулярной прецессии твердого тела в трех однородных полях, при которой отношение скоростей прецессии и собственного вращения постоянно. Показано, что прецессия динамически симметричного тела возможна при скорости прецессии, равной, вдвое большей или вдвое меньшей скорости собственного вращения. Для каждого из случаев указано множество допустимых положений центров приведения сил и найдена связь между моментами инерции тела и постоянным углом нутации.

Ключевые слова: твердое тело, движение вокруг неподвижной точки, три однородных поля, нерегулярная прецессия

DOI: 10.31857/S0032823524010026 EDN: YUVXUJ

1. Введение. Задача о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки имеет много обобщений при движении в различных силовых полях. Большое количество исследований посвящено случаю, когда силовое поле одно или действуют несколько полей с общей осью симметрии. Были найдены [1] решения для тяжелого твердого тела в магнитном поле, для гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [2, 3].

Важным случаем движения является прецессия. Регулярная прецессия симметричного тяжелого тела хорошо известна. Гриоли в 1947 году была доказана [4] возможность регулярной прецессии несимметричного тела вокруг оси, отклоненной от вертикали. В задаче о движении тела в жидкости позже было найдено [5] решение вида [4]. Отметим, что прецессия тела с полостью, заполненной жидкостью, также возможна при отсутствии динамической симметрии [6–9]. Обзор прецессий твердого тела и гиростата под действием сил различной природы приведен в [10, 11].

В значительно меньшей степени изучен случай, когда направления полей заданы двумя или тремя векторами в инерциальном пространстве. Первые примеры регулярной прецессии несимметричного твердого тела и гиростата в двух [12] и трех [13] однородных полях были построены Х. Яхья, причем, как отмечено автором, решение [13] было первым решением уравнений движения тела в трех полях, отличным от случаев равновесий.

В решениях [12, 13] оси прецессии и собственного вращения ортогональны, а скорости прецессии и собственного вращения совпадают; эти решения можно считать аналогами для двух и трех полей прецессии Гриоли [4] в поле тяжести. В наших рабо-

тах описаны все возможные случаи прецессии твердого тела и гиростата в двух [14] и трех [15] однородных полях; найден новый случай, когда оси прецессии и собственного вращения не ортогональны и скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения.

Была рассмотрена [16] регулярная прецессия гиростата в трех полях, одно из которых — осесимметричное, и для частного случая, когда скорости прецессии и собственного вращения равны, поля ортогональны и ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля, получены условия, связывающие параметры системы. В работе [17] выполнено исследование всех возможных случаев регулярной прецессии в данной суперпозиции трех полей, найдены конфигурационные условия и центры приведения сил. Показано [17], что прецессия возможна при скорости прецессии равной, вдвое большей или вдвое меньшей скорости собственного вращения.

Задача о нерегулярной прецессии, при которой отношение скоростей прецессии и собственного вращения постоянно [18–20], расширяет множество известных точных решений [13, 15–17], описывающих вращение тела в трех полях. Исследования [18–20] выполнены для случая, когда поля ортогональны и ось прецессии совпадает с направлением одного из полей; получены условия прецессии в случае динамической симметрии тела.

В настоящей статье при использовании методов [15, 17] проанализированы возможные случаи нерегулярной прецессии динамически симметричного тела с неподвижной точкой в суперпозиции трех независимых однородных полей с постоянным отношением скоростей прецессии и собственного вращения. Задача решается при произвольных углах между силовыми линиями полей и с произвольным направлением оси прецессии в инерциальном пространстве. Показано, что, как и в задаче [17], прецессия возможна при скорости прецессии, равной, вдвое большей или вдвое меньшей скорости собственного вращения. Для каждого из случаев найдены связь между моментами инерции тела и постоянным углом нутации и множество допустимых положений центров приведения сил. Выделен частный случай ортогональных полей и указано множество положений центров приведения сил, при которых движение тела в трех полях экспоненциально быстро со временем приближается к состоянию покоя.

2. Постановка задачи. Для описания движения твердого тела вокруг неподвижной точки под действием трех полей используем уравнения [13]

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \alpha_1 \times \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \times \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \times \mathbf{u}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M} \quad (2.1)$$

$$\dot{\alpha}_i + \boldsymbol{\omega} \times \alpha_i = 0; i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Здесь $(\cdot)^*$ — производная по времени в системе отсчета, связанной с телом, $\mathbf{I}$ — оператор инерции тела в неподвижной точке O , $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, единичные векторы α_i задают направления сил каждого из полей, $\mathbf{u}_i = p_i \mathbf{OC}_i$, C_i — центры приведения сил.

Прецессия тела задается равенством

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r \mathbf{m} + \omega_p \mathbf{p} \quad (2.3)$$

Единичные векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{p}$ постоянны, соответственно, в подвижной и инерциальной системах. Скалярные функции $\omega_r(t)$ и $\omega_p(t)$ — это величины скоростей собственного вращения и прецессии.

Рассмотрим, как и в работе [18], прецессии, для которых отношение скоростей постоянно

$$\omega_p / \omega_r = \kappa = \text{const} \quad (2.4)$$

Векторная функция $\mathbf{p}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.2), которое, при учете равенства (2.3), становится линейным

$$\dot{\mathbf{p}} + \omega_r(t) \mathbf{m} \times \mathbf{p} = 0 \quad (2.5)$$

Пусть (I_1, I_2, I_3) — некоторый связанный с телом ортонормированный правый базис и $I_3 = \mathbf{m}$. Решение уравнения (2.5) можно записать в виде

$$\mathbf{p} = \sin\theta(\sin\tau I_1 + \cos\tau I_2) + \cos\theta I_3, d\tau = \omega_r(t) dt \quad (2.6)$$

Произвольный параметр θ — это постоянный угол между осями собственного вращения и прецессии (угол нутации), $\cos\theta = (\mathbf{m}, \mathbf{p})$.

Векторные функции $\mathbf{\omega}(t), \mathbf{\alpha}_i(t)$, как и ранее [15, 17], задаются в связанном с телом ортонормированном базисе (I_1, I_2, I_3) равенствами:

$$\mathbf{\omega} = \Omega \tilde{\mathbf{\omega}}, \tilde{\mathbf{\omega}} = \kappa \sin\theta(\sin\tau I_1 + \cos\tau I_2) + (1 + \kappa \cos\theta) I_3, \Omega = \omega_r(t) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{\alpha}_i = -\mathbf{R} \mathbf{s}_i; i = 1, 2, 3, \mathbf{p} = -\mathbf{R} I_3 \quad (2.8)$$

Элементы матрицы оператора поворота $\mathbf{R}$ в базисе (I_i) следующие:

$$\begin{aligned} r_{11} &= -\cos^2 \frac{\theta}{2} \cos(\kappa + 1)\tau - \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos(\kappa - 1)\tau, r_{13} = -\sin\theta \sin\tau \\ r_{12} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin(\kappa + 1)\tau + \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin(\kappa - 1)\tau, r_{31} = -\sin\theta \sin\kappa\tau \\ r_{21} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin(\kappa + 1)\tau - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin(\kappa - 1)\tau, r_{23} = -\sin\theta \cos\tau, r_{33} = -\cos\theta \\ r_{22} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos(\kappa + 1)\tau - \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos(\kappa - 1)\tau, r_{32} = -\sin\theta \cos\kappa\tau \end{aligned} \quad (2.9)$$

Функции $\mathbf{\alpha}_i(t)$, заданные равенствами (2.8), являются решениями линейных (при заданной формулой (2.7) функции $\mathbf{\omega}(t)$) уравнений (2.2) при произвольных постоянных (в связанной с телом системе отсчета) векторах $\mathbf{s}_i$.

Определим условия обращения в тождество равенства (2.1) при функциях $\mathbf{\omega}, \mathbf{\alpha}_i$, заданных равенствами (2.7) и (2.8). Из формул (2.6) и (2.7) получим

$$\dot{\mathbf{\omega}} = \dot{\Omega} \tilde{\mathbf{\omega}} + \Omega^2 \kappa \sin\theta(\cos\tau I_1 - \sin\tau I_2) \quad (2.10)$$

Уравнение (2.1) записывается в виде

$$\dot{\Omega} \mathbf{a} + \Omega^2 \mathbf{b} = \mathbf{M} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{I} \tilde{\mathbf{\omega}}, \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{\omega}} \times \mathbf{I} \tilde{\mathbf{\omega}} + \kappa \sin\theta \mathbf{I}(\cos\tau I_1 - \sin\tau I_2) \quad (2.12)$$

При $\dot{\Omega} = 0$ имеем регулярную прецессию, условия которой в трех однородных полях получены ранее [15]. При $\dot{\Omega} \neq 0$ необходимо выполнение условия компланарности:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{M} \rangle = 0 \quad (2.13)$$

Если $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle \neq 0$, то из уравнения (2.11) находим

$$\dot{\Omega} = \frac{\langle \mathbf{M}, \mathbf{b}, I_3 \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle}, \Omega^2 = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{M}, I_3 \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle} \quad (2.14)$$

Так как $\dot{\Omega} = \Omega d\Omega / d\tau$, то для совместности равенств (2.14) необходимо выполнение условия

$$\frac{\langle \mathbf{M}, \mathbf{b}, I_3 \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{M}, I_3 \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle}$$

или

$$2\langle \mathbf{M}, \mathbf{b}, I_3 \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{M}, I_3 \rangle' \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{M}, I_3 \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle' \quad (2.15)$$

Таким образом, для того чтобы тело могло совершать в трех однородных полях прецессию с постоянным отношением скоростей (2.4), необходимо (и достаточно), чтобы тождественно выполнялись равенства (2.13) и (2.15) для функций $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{M}, \tilde{\omega}$ переменной τ , заданных равенствами (2.7), (2.8) и (2.12).

Если рассматривать осесимметричное тело, ось собственного вращения которого совпадает с осью динамической симметрии (как в работе [18]), то есть случай

$$I_{ij} = 0; i \neq j, I_1 = I_2, \quad (2.16)$$

то из формул (2.7), (2.12) получим

$$\mathbf{a} = \kappa \sin\theta I_1 (\sin\tau I_1 + \cos\tau I_2) + (1 + \kappa \cos\theta) I_3 I_3 \quad (2.17)$$

$$\mathbf{b} = \lambda (\cos\tau I_1 - \sin\tau I_2), \lambda = \kappa \sin\theta ((1 + \kappa \cos\theta) I_3 - \kappa \cos\theta I_1) \quad (2.18)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, I_3 \rangle = -\lambda \kappa \sin\theta I_1 \quad (2.19)$$

Условие (2.15) совместности равенств (2.14) с учетом формулы (2.19) (при $\lambda \neq 0$) упрощается и записывается в виде

$$2\langle \mathbf{M}, \mathbf{b}, I_3 \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{M}, I_3 \rangle' \quad (2.20)$$

Нижe решается задача определения условий совместного выполнения тождеств (2.13) и (2.20) для тела с осевой симметрией.

3. Предварительный анализ. В рассматриваемом далее случае осевой симметрии из формулы (2.14) при учете формул (2.17)–(2.19) получим

$$\Omega^2 = \frac{\cos\tau M_1 - \sin\tau M_2}{\lambda} \quad (3.1)$$

Условия (2.13) и (2.20) записываются в виде

$$(1 + \kappa \cos\theta) I_3 (\sin\tau M_1 + \cos\tau M_2) \equiv \kappa \sin\theta I_1 M_3 \quad (3.2)$$

$$2\lambda(\sin\tau M_1 + \cos\tau M_2) \equiv \kappa \sin\theta I_1(\cos\tau M_1 - \sin\tau M_2)' \quad (3.3)$$

Для получения условий выполнения тождеств (3.2), (3.3) будем использовать, как и в работе [17], запись момента внешних сил, удобную при произвольных (неортогональных) полях.

Зададим векторы $\mathbf{n}_i$ и оператор $\mathbf{G}$ равенствами

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3}{\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \rangle} (1\,2\,3) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{G}\mathbf{n}_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

Здесь $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $(1\,2\,3)$ — знак циклической перестановки.

Всюду рассматриваем случай неприводимых полей и считаем векторы α_i некомпланарными, тогда, в силу равенств (2.8), $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \rangle \neq 0$.

Имеем формулу [17] для суммы моментов внешних сил

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \alpha_1 \times \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \times \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{G}l_1 \times \mathbf{R}l_1 + \mathbf{G}l_2 \times \mathbf{R}l_2 + \mathbf{G}l_3 \times \mathbf{R}l_3 = \\ &= \mathbf{G}l_1 \times \mathbf{R}l_1 + \mathbf{G}l_2 \times \mathbf{R}l_2 + \mathbf{G}l_3 \times \mathbf{R}l_3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Учитывая равенства (2.9), запишем формулу (3.6) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{C}_{10} + \mathbf{C}_{11}\cos\tau + \mathbf{C}_{21}\sin\tau + \mathbf{C}_{12}\cos\kappa\tau + \mathbf{C}_{22}\sin\kappa\tau + \mathbf{C}_{13}\cos(\kappa-1)\tau + \\ &+ \mathbf{C}_{23}\sin(\kappa-1)\tau + \mathbf{C}_{14}\cos(\kappa+1)\tau + \mathbf{C}_{24}\sin(\kappa+1)\tau \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{C}_{10} = -\cos\theta \mathbf{G}l_3 \times l_3, \mathbf{C}_{i1} = -\sin\theta \mathbf{G}l_3 \times l_{3-i}, \mathbf{C}_{i2} = -\sin\theta \mathbf{G}l_{3-i} \times l_3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ij} &= (-1)^{3ij} \frac{1 + (-1)^j \cos\theta}{2} \times (\mathbf{G}l_2 \times l_{3-i} + (-1)^{i+j} \mathbf{G}l_1 \times l_i) \\ i &= 1, 2, j = 3, 4 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \sin\tau M_1 + \cos\tau M_2 &= \cos\theta(G_{13}\cos\tau - G_{23}\sin\tau) + G_{32}\sin\kappa\tau - G_{31}\cos\kappa\tau + \\ &+ \frac{\sin\theta}{2}((G_{12} + G_{21})\cos(\kappa+1)\tau + (G_{11} - G_{22})\sin(\kappa+1)\tau) + \\ &+ (G_{12} - G_{21})\cos(\kappa-1)\tau + (G_{11} + G_{22})\sin(\kappa-1)\tau \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \cos\tau M_1 - \sin\tau M_2 &= -\cos\theta(G_{23}\cos\tau + G_{13}\sin\tau + G_{32}\cos\kappa\tau + G_{31}\sin\kappa\tau) + \\ &+ \frac{\sin\theta}{2}(2G_{33} + (G_{11} - G_{22})\cos(\kappa+1)\tau - (G_{12} + G_{21})\sin(\kappa+1)\tau - \\ &- (G_{11} + G_{22})\cos(\kappa-1)\tau + (G_{12} - G_{21})\sin(\kappa-1)\tau) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
M_3 = & \sin\theta(-G_{13}\cos\tau + G_{23}\sin\tau) + \\
& + \sin^2\frac{\theta}{2}((G_{21} - G_{12})\cos(\kappa - 1)\tau - \\
& - (G_{11} + G_{22})\sin(\kappa - 1)\tau) + \\
& + \cos^2\frac{\theta}{2}\left((G_{12} + G_{21})\cos(\kappa + 1)\tau + \right. \\
& \left. + (G_{11} - G_{22})\sin(\kappa + 1)\tau\right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Тождества (3.2) и (3.3) принимают вид

$$\begin{aligned}
& \lambda_1(G_{13}\cos\tau - G_{23}\sin\tau) + \\
& + \lambda_2(G_{32}\sin\kappa\tau - G_{31}\cos\kappa\tau) + \\
& + \lambda_3\left((G_{12} - G_{21})\cos(\kappa - 1)\tau + \right. \\
& \left. + (G_{11} + G_{22})\sin(\kappa - 1)\tau\right) + \\
& + \lambda_4\left((G_{12} + G_{21})\cos(\kappa + 1)\tau + \right. \\
& \left. + (G_{11} - G_{22})\sin(\kappa + 1)\tau\right) \equiv 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_5(G_{13}\cos\tau - G_{23}\sin\tau) + \\
& + \lambda_6(G_{32}\sin\kappa\tau - G_{31}\cos\kappa\tau) + \\
& + \lambda_7\left((G_{12} - G_{21})\cos(\kappa - 1)\tau + \right. \\
& \left. + (G_{11} + G_{22})\sin(\kappa - 1)\tau\right) + \\
& + \lambda_8\left((G_{12} + G_{21})\cos(\kappa + 1)\tau + \right. \\
& \left. + (G_{11} - G_{22})\sin(\kappa + 1)\tau\right) \equiv 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\kappa}\lambda + \kappa I_1 \\
\lambda_2 &= (1 + \kappa \cos\theta)I_3 \\
\lambda_{3,4} &= \frac{1}{2\kappa}(\lambda \pm \kappa^2 \sin\theta I_1) \\
\lambda_5 &= \cos\theta(2\lambda + \kappa \sin\theta I_1) \\
\lambda_6 &= 2\lambda - \kappa^2 \sin\theta \cos\theta I_1 \\
\lambda_7 &= \sin\theta\left(\lambda - \frac{\sin\theta}{2}\kappa(\kappa - 1)I_1\right) \\
\lambda_8 &= \sin\theta\left(\lambda + \frac{\sin\theta}{2}\kappa(\kappa + 1)I_1\right)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Рассмотрим возможность выполнения тождеств (3.12) и (3.13) в общем случае, когда все частоты разные. Необходимо выполнение условий

$$\lambda_1 G_{i3} = 0, \lambda_5 G_{i3} = 0, \lambda_2 G_{3i} = 0, \lambda_6 G_{3i} = 0; i = 1, 2 \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 (G_{12} - G_{21}) &= \lambda_7 (G_{12} - G_{21}) = 0 \\ \lambda_3 (G_{11} + G_{22}) &= \lambda_7 (G_{11} + G_{22}) = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \lambda_4 (G_{12} + G_{21}) &= \lambda_8 (G_{12} + G_{21}) = 0 \\ \lambda_4 (G_{11} - G_{22}) &= \lambda_8 (G_{11} - G_{22}) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Если $\lambda_3^2 + \lambda_7^2 > 0$ и $\lambda_4^2 + \lambda_8^2 > 0$, то из условий (3.15), (3.16) следует

$$G_{11} = G_{22} = G_{12} = G_{21} = 0$$

Матрица $\mathbf{G}$ в этом случае вырожденная, и система приводимая. Для прецессии в трех неприводимых полях необходимо одно из условий

$$\lambda_3 = \lambda_7 = 0 \quad (3.18)$$

$$\lambda_4 = \lambda_8 = 0 \quad (3.19)$$

Пусть выполнено условие (3.18). Из формул (3.14) получаем

$$\begin{aligned} (1 + \kappa \cos \theta) I_3 + \kappa (1 - \cos \theta) I_1 &= 0 \\ (1 + \kappa \cos \theta) I_3 - \kappa \cos \theta I_1 - \frac{\kappa - 1}{2} I_1 &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует $\kappa = 1/3$ и $\cos \theta = (3I_3 + I_1) / (I_1 - I_3)$. В этом случае $|\cos \theta| > 1$ при $I_{1,3} > 0$. Аналогично проверяем, что при условиях (3.19) необходимо $\kappa = -1/3$ и условие $|\cos \theta| < 1$ также не может быть выполнено.

Таким образом, рассматриваемая нерегулярная прецессия осесимметричного тела в трех неприводимых полях невозможна, если все частоты в тождествах (3.12) и (3.13) различные, то есть в случае, когда различны числа $1, |\kappa|, |\kappa - 1|, |\kappa + 1|$.

При $\kappa > 0$ возможны три случая совпадения частот:

1) $\kappa = 1$; 2) $\kappa = 2$; 3) $\kappa = 1/2$.

Ниже рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

После определения допустимых значений параметров G_{ij} определяем $\Omega(\tau)$ по формулам (3.1) и (3.10). Зависимость $\tau = \tau(t)$ найдем, интегрируя равенство

$$dt = \frac{d\tau}{\Omega(\tau)} \quad (3.20)$$

Замечание 1. Всюду рассматривается случай $\lambda \neq 0$. При $\lambda = 0$ из формулы (2.18) получаем $\mathbf{b} = 0$ и уравнение (2.11) принимает вид $\dot{\Omega} \mathbf{a} = \mathbf{M}$, для существования его решения необходимо, чтобы векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{M}$ были коллинеарны. Была выполнена проверка условия $\mathbf{a} \times \mathbf{M} = 0$. В общем случае, при несовпадении частот, это условие выполнено только при $\mathbf{G} = 0$, тогда $\mathbf{M} = 0$. В случае $\kappa = 1$ необходимы условия $G_{11} = G_{22} = G_{33}, G_{ij} = 0; i \neq j$. Так как при $\kappa = 1$ оператор поворота $\mathbf{R}$ — симме-

трический, то для $\mathbf{G} = c\mathbf{E}$ из формулы (3.6) получаем снова $\mathbf{M} = 0$. При $\kappa = 2$ для коллинеарности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{M}$ необходимо $G_{31} = G_{32} = G_{33} = 0$, а при $\kappa = 1/2$ необходимо $G_{13} = G_{23} = G_{33} = 0$. В обоих случаях матрица $\mathbf{G}$ — вырожденная, задача приводимая (к двум полям). Таким образом, при $\lambda = 0$ нет решений поставленной задачи о прецессии с постоянным отношением скоростей в трех неприводимых однородных полях.

Замечание 2. При осевой динамической симметрии из условий (2.16) получаем условие (2.19) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{l}_3 \rangle = \text{const}$, что упрощает тождество (2.15). Была решена обратная задача — определение конфигураций тела, при которых возможно условие $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{l}_3 \rangle = \text{const}$. Проверка показала, что если $1 + \kappa \cos\theta \neq 0$, то необходима осевая симметрия тела. При $1 + \kappa \cos\theta = 0$ условие $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{l}_3 \rangle = \text{const}$ выполнено при любой диагональной матрице $\mathbf{I}$, но условия (2.13) и (2.20) в этом случае выполняются, только если $G_{31} = G_{32} = G_{33} = 0$. Матрица $\mathbf{G}$ вырожденная, нерегулярная прецессия в трех неприводимых полях с постоянным отношением скоростей в случае $1 + \kappa \cos\theta = 0$ не существует в случае $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{l}_3 \rangle = \text{const}$.

4. Прецессия с равными скоростями прецессии и собственного вращения. Для выполнения тождеств (3.12) и (3.13) при $\kappa = 1$ необходимо и достаточно условий

$$\begin{aligned} \lambda_1 G_{13} - \lambda_2 G_{31} &= \lambda_5 G_{13} - \lambda_6 G_{31} = \\ &= \lambda_1 G_{23} - \lambda_2 G_{32} = \lambda_5 G_{23} - \lambda_6 G_{32} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\lambda_3 (G_{12} - G_{21}) = \lambda_7 (G_{12} - G_{21}) = 0 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \lambda_4 (G_{12} + G_{21}) &= \lambda_8 (G_{12} + G_{21}) = \\ &= \lambda_4 (G_{11} - G_{22}) = \lambda_8 (G_{11} - G_{22}) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь параметры λ_k заданы формулами (3.14) с $\kappa = 1$.

Так как $\lambda_3^2 + \lambda_7^2 > 0$ и $\lambda_4^2 + \lambda_8^2 > 0$, то из условий (4.2) и (4.3) следует

$$G_{12} = G_{21} = 0, \quad G_{11} = G_{22} \quad (4.4)$$

Если $\lambda_2 \lambda_5 - \lambda_1 \lambda_6 \neq 0$, то из условий (4.1) следует

$$G_{13} = G_{31} = G_{23} = G_{32} = 0$$

В этом случае $\mathbf{G} = \text{diag}(G_{11}, G_{11}, G_{33})$, из формул (3.1) и (3.10) следует $\Omega = \text{const}$ и получаем регулярную прецессию [15].

Нерегулярная прецессия с равными скоростями прецессии и собственного вращения возможна только условия

$$\lambda_2 \lambda_5 - \lambda_1 \lambda_6 = 0$$

Это условие при учете формул (3.14) записывается в виде

$$(1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 2)I_3 + 3\cos\theta(1 - \cos\theta)I_1 = 0 \quad (4.5)$$

Отметим некоторые частные случаи выполнения условия (4.5)

$$1) I_1 = I_2 = I_3, \cos\theta = \frac{1}{2}, 2) I_1 = I_2 = 2I_3, \cos\theta = \frac{1}{3}$$

Условие (4.5) при ограничении $I_3 < 2I_1$ может быть выполнено, если

$$0 < \cos\theta < (\sqrt{73} - 5) / 6 \approx 0,590667 \quad (4.6)$$

При условии (4.5) связи (4.1) записываются в виде

$$\begin{aligned} (2 - \cos\theta)G_{13} &= 3\cos\theta G_{31}, \\ (2 - \cos\theta)G_{23} &= 3\cos\theta G_{32} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Условия (4.4) и (4.7) позволяют задать матрицу $\mathbf{G}$ четырьмя параметрами

$$\begin{aligned} G_{11} &= G_{22} = v_1 \\ G_{33} &= v_1 + v_2 \\ G_{12} &= G_{21} = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} G_{13} &= 3\cos\theta v_3 \\ G_{31} &= (2 - \cos\theta) v_3 \\ G_{23} &= 3\cos\theta v_4 \\ G_{32} &= (2 - \cos\theta) v_4 \end{aligned}$$

Из формулы (3.10) при условиях (4.8) получаем

$$\begin{aligned} \cos\tau M_1 - \sin\tau M_2 &= \\ &= \sin\theta(G_{33} - G_{11}) - \cos\theta((G_{23} + G_{32})\cos\tau + \\ &\quad + (G_{13} + G_{31})\sin\tau) = \\ &= \sin\theta v_2 - 2\cos\theta(1 + \cos\theta)(v_4\cos\tau + v_3\sin\tau) \end{aligned}$$

Параметр λ задан формулой (2.18), учитывая связь (4.5), запишем

$$\lambda = \sin\theta((1 + \cos\theta)I_3 - \cos\theta I_1) = \frac{\sin\theta \cos\theta}{2 - 3\cos\theta} I_1$$

Формула (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= (2 - 3\cos\theta) \times \\ &\times \frac{v_2\sin\theta - 2\cos\theta(1 + \cos\theta)(v_4\cos\tau + v_3\sin\tau)}{\sin\theta \cos\theta I_1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Положения центров приведения получаем из формул (3.5) и (4.8).

Прецессия с равными скоростями прецессии и собственного вращения является, в терминологии [10], прецессионно-изоконическим движением. Такое движение рассмотрено в работе [19] в случае ортогональных полей, когда прецессия происходит вокруг вертикали.

5. Прецессия со скоростью прецессии, вдвое большей скорости собственного вращения. Для выполнения тождеств (3.12) и (3.13) при $\kappa = 2$ необходимо и достаточно условий

$$\begin{aligned} \lambda_1 G_{13} + \lambda_3 (G_{12} - G_{21}) &= 0 \\ \lambda_5 G_{13} + \lambda_7 (G_{12} - G_{21}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 G_{23} - \lambda_3 (G_{11} + G_{22}) &= 0 \\ \lambda_5 G_{23} - \lambda_7 (G_{11} + G_{22}) &= 0\end{aligned}\quad (5.2)$$

$$\lambda_2 G_{32} = \lambda_6 G_{32} = 0, \lambda_2 G_{31} = \lambda_6 G_{31} = 0 \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}\lambda_4 (G_{12} + G_{21}) &= \lambda_8 (G_{12} + G_{21}) = \\ &= \lambda_4 (G_{11} - G_{22}) = \lambda_8 (G_{11} - G_{22}) = 0\end{aligned}\quad (5.4)$$

Параметры λ_k заданы формулами (3.14) с $\kappa = 2$.

Так как $\lambda_2^2 + \lambda_6^2 > 0$ и $\lambda_4^2 + \lambda_8^2 > 0$, то из условий (5.2) и (5.3) следует

$$\begin{aligned}G_{31} &= G_{32} = 0 \\ G_{11} &= G_{22} \\ G_{12} &= -G_{21}\end{aligned}\quad (5.5)$$

Если $\lambda_3 \lambda_5 - \lambda_1 \lambda_7 \neq 0$, то из условий (5.1) и (5.5) получим

$$G_{13} = G_{23} = G_{11} = G_{22} = G_{12} = G_{21} = 0$$

Матрица $\mathbf{G}$ — вырожденная в этом случае, поэтому необходимо

$$\lambda_3 \lambda_5 - \lambda_1 \lambda_7 = 0$$

Данное условие при учете формул (3.14) записывается в виде

$$\begin{aligned}(1 + 2\cos\theta)(3\cos\theta - 2)I_3 + \\ + (1 - \cos\theta)(1 + 6\cos\theta)I_1 = 0\end{aligned}\quad (5.6)$$

Условие (5.6) при $I_3 < 2I_1$ может быть выполнено, только если

$$-\frac{1}{6} < \cos\theta < \frac{1}{2} \quad (5.7)$$

Отметим частные случаи выполнения условия (5.6)

$$1) I_1 = I_2 = I_3, \cos\theta = \frac{1}{4}, \quad 2) I_1 = I_2 = 2I_3, \cos\theta = 0$$

При условиях (5.5) и (5.6) связи (5.1) записываются в виде

$$\begin{aligned}(4 - \cos\theta)G_{13} + 5\sin\theta G_{12} &= 0 \\ (4 - \cos\theta)G_{23} - 5\sin\theta G_{11} &= 0\end{aligned}\quad (5.8)$$

Полученные условия (5.5) и (5.8) позволяют задать матрицу $\mathbf{G}$ тремя параметрами v_i :

$$\begin{aligned}G_{11} &= G_{22} = (4 - \cos\theta)v_1 \\ G_{23} &= 5\sin\theta v_1, G_{31} = G_{32} = 0 \\ G_{12} &= -G_{21} = (4 - \cos\theta)v_2 \\ G_{13} &= -5\sin\theta v_2, G_{33} = v_3\end{aligned}\quad (5.9)$$

Найдем скорость $\Omega(\tau)$. Из формул (3.10) и (5.9) получаем

$$\begin{aligned} \cos\tau M_1 - \sin\tau M_2 = \\ = \sin\theta(v_3 + 4(1 + \cos\theta)(v_2\sin\tau - v_1\cos\tau)) \end{aligned}$$

Если учесть связь (5.6), то из формулы (3.14) получим

$$\lambda = (1 + 2\cos\theta)I_3 - 2\cos\theta I_1 = \frac{1 + \cos\theta}{2 - 3\cos\theta}I_1$$

Формула (3.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Omega^2 = \frac{\sin\theta(2 - 3\cos\theta)}{I_1(1 + \cos\theta)} \times \\ \times (v_3 + 4(1 + \cos\theta)(v_2\sin\tau - v_1\cos\tau)) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Множество допустимых положений центров приведения получаем из формул (3.5) и (5.9).

Отметим, что условия (5.6) и (5.7) указаны в работе [18]. Вывод [18] об ортогональности векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ справедлив только для рассмотренного в этой работе частного случая ортогональных полей при оси прецессии, коллинеарной силовым линиям поля номер три.

6. Прецессия со скоростью прецессии, вдвое меньшей скорости собственного вращения. Для выполнения тождеств (3.12) и (3.13) при $\kappa = 1/2$ необходимо и достаточно условий

$$\lambda_1 G_{13} = \lambda_1 G_{23} = \lambda_5 G_{13} = \lambda_5 G_{23} = 0 \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 G_{31} - \lambda_3 (G_{12} - G_{21}) &= 0 \\ \lambda_6 G_{31} - \lambda_7 (G_{12} - G_{21}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 G_{32} - \lambda_3 (G_{11} + G_{22}) &= 0 \\ \lambda_6 G_{32} - \lambda_7 (G_{11} + G_{22}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \lambda_4 (G_{12} + G_{21}) &= \lambda_8 (G_{12} + G_{21}) = \\ = \lambda_4 (G_{11} - G_{22}) &= \lambda_8 (G_{11} - G_{22}) = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Проверяем, используя формулы (3.14) с $\kappa = 1/2$, что если $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_5 \neq 0$ и, если $\lambda_4 = 0$, то $\lambda_8 \neq 0$, тогда из условий (6.1) и (6.4) следует

$$G_{13} = G_{23} = 0, G_{11} = G_{22}, G_{12} = -G_{21} \quad (6.5)$$

Если $\lambda_2\lambda_7 - \lambda_3\lambda_6 \neq 0$, то из условий (6.2), (6.3) и (6.5) получим

$$G_{31} = G_{32} = G_{11} = G_{22} = G_{12} = G_{21} = 0$$

Матрица $\mathbf{G}$ — вырожденная в этом случае, поэтому необходимо

$$\lambda_2\lambda_7 - \lambda_3\lambda_6 = 0$$

Данное условие при учете формул (3.14) записывается в виде

$$\begin{aligned} (2 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)I_3 + \\ + 3(1 - \cos\theta)\cos\theta I_1 = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Условие (6.6) при $I_3 < 2I_1$ может быть выполнено, только если

$$0,075604 \approx \frac{1}{6}(\sqrt{181} - 13) < \cos\theta < \frac{1}{3} \quad (6.7)$$

Частные случаи выполнения условия (6.6):

$$1) I_1 = I_2 = I_3, \cos\theta = \frac{1}{4}, 2) I_1 = I_2 = \frac{10}{3}I_3, \cos\theta = \frac{1}{7}$$

При условиях (6.5) связи (6.3) и (6.4) записываются в виде

$$3\cos\theta G_{31} - \sin\theta G_{12} = 3\cos\theta G_{32} - \sin\theta G_{11} = 0 \quad (6.8)$$

Полученные условия позволяют задать матрицу $\mathbf{G}$ тремя параметрами

$$\begin{aligned} G_{11} = G_{22} = 3\cos\theta v_1, G_{32} = \sin\theta v_1, G_{13} = G_{23} = 0 \\ G_{12} = -G_{21} = 3\cos\theta v_2, G_{31} = \sin\theta v_2, G_{33} = v_3 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Параметр λ при условии (6.6) равен

$$\lambda = \frac{\sin\theta \cos\theta I_1}{2(1 - 3\cos\theta)}$$

Из формулы (3.10) при условиях (6.9) получим

$$\begin{aligned} \cos\tau M_1 - \sin\tau M_2 = \\ = \sin\theta \left(v_3 - 4\cos\theta \left(v_1 \cos \frac{\tau}{2} + v_2 \sin \frac{\tau}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Формула (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \Omega^2 = \frac{2(1 - 3\cos\theta)}{\cos\theta I_1} \times \\ \times \left(v_3 - 4\cos\theta \left(v_1 \cos \frac{\tau}{2} + v_2 \sin \frac{\tau}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Отметим, что прецессия осесимметричного тела со скоростью прецессии, вдвое меньшей скорости собственного вращения, рассматривалась в работе [20] в частном случае, когда силовые линии полей взаимно ортогональны и ось прецессии совпадает с силовой линией одного из полей.

7. Случай ортогональных полей. Запишем полученные в пп. 4–6 условия в частном случае ортогональных полей. Пусть единичные векторы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ образуют правую ортогональную тройку, тогда в соответствии с формулами (2.8) единичные векторы s_1, s_2, s_3 образуют левую ортогональную тройку. Из формул (3.4) получим

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{s}_i; i = 1, 2, 3 \quad (7.1)$$

Рассмотрим теперь для сравнения с результатами работы [18] частный случай $\rho = \alpha_3$. Из формул (2.8) в этом случае получим $\mathbf{s}_3 = \mathbf{l}_3$. Всюду выше векторы $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ правого ортогонального базиса пока не определены. Так как (s_i) — левая тройка, то можно положить $\mathbf{l}_1 = \mathbf{s}_1, \mathbf{l}_2 = -\mathbf{s}_2, \mathbf{l}_3 = \mathbf{s}_3$. Из формулы (7.1) тогда получим $\mathbf{n}_1 = \mathbf{l}_1, \mathbf{n}_2 = -\mathbf{l}_2, \mathbf{n}_3 = \mathbf{l}_3$. Формула (3.5) определяет при известной матрице $\mathbf{G}$ положения центров приведения сил

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{G}\mathbf{l}_1, \mathbf{u}_2 = -\mathbf{G}\mathbf{l}_2, \mathbf{u}_3 = \mathbf{G}\mathbf{l}_3 \quad (7.2)$$

В случае $\kappa = 1$ из формул (7.2) и (4.8) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= v_1 \mathbf{l}_1 + (2 - \cos\theta) v_3 \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{u}_2 &= -v_1 \mathbf{l}_2 - (2 - \cos\theta) v_4 \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{u}_3 &= 3\cos\theta(v_3 \mathbf{l}_1 + v_4 \mathbf{l}_2) + (v_1 + v_2) \mathbf{l}_3 \end{aligned} \quad (7.3)$$

В случае $\kappa = 2$ из формул (7.2) и (5.9) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (4 - \cos\theta)(v_1 \mathbf{l}_1 - v_2 \mathbf{l}_2) \\ \mathbf{u}_2 &= -(4 - \cos\theta)(v_2 \mathbf{l}_1 + v_1 \mathbf{l}_2) \\ \mathbf{u}_3 &= -5\sin\theta(v_2 \mathbf{l}_1 - v_1 \mathbf{l}_2) + v_3 \mathbf{l}_3 \end{aligned} \quad (7.4)$$

В случае $\kappa = 1/2$ из формул (7.2) и (6.9) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= 3\cos\theta(v_1 \mathbf{l}_1 - v_2 \mathbf{l}_2) + \sin\theta v_2 \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{u}_2 &= -3\cos\theta(v_2 \mathbf{l}_1 + v_1 \mathbf{l}_2) - \sin\theta v_1 \mathbf{l}_3, \mathbf{u}_3 = v_3 \mathbf{l}_3 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Формулы (3.20), (4.9), (5.10), (6.10) позволяют выразить зависимость от времени скоростей прецессии и собственного вращения через эллиптические функции. Выделим случаи, когда эта зависимость определяется элементарными функциями. В этих случаях происходит экспоненциально быстрое стремление к нулю указанных скоростей.

Для указания более ясного смысла связей между положениями центров приведения в названных выделенных случаях запишем формулы (7.3)–(7.5) по-другому.

В формулах (7.3) обозначим $\mu_3 \mathbf{e} = (2 - \cos\theta)(v_3 \mathbf{l}_1 + v_4 \mathbf{l}_2)$, где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, $\mu_{1,2} = v_{1,2}$, $\mathbf{l}_i = \mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$, и запишем формулы в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_3 \mathbf{e} \times \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_2 = -\mu_1 \mathbf{e}_2 + \mu_3 \mathbf{e} \times \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{3\cos\theta}{2 - \cos\theta} \mu_3 \mathbf{e} + (\mu_1 + \mu_2) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.6)$$

В формулах (7.4) выполним замены

$$\begin{aligned} (4 - \cos\theta) v_1 &= \mu_1 \cos\xi \\ (4 - \cos\theta) v_2 &= \mu_1 \sin\xi, v_3 = \mu_2 \\ \cos\xi \mathbf{l}_1 - \sin\xi \mathbf{l}_2 &= \mathbf{e}_1 \\ \sin\xi \mathbf{l}_1 + \cos\xi \mathbf{l}_2 &= \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{l}_3 &= \mathbf{e}_3, \cos 2\xi \mathbf{e}_2 - \sin 2\xi \mathbf{e}_1 = \mathbf{e} \end{aligned}$$

и запишем эти формулы в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mu_1 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= -\mu_1 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{5\sin\theta}{4 - \cos\theta} \mu_1 \mathbf{e} + \mu_2 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Аналогичными преобразованиями формулы (7.5) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mu_1 \left(\mathbf{e}_1 + \frac{\operatorname{tg} \theta \sin \xi}{3} \mathbf{e}_3 \right) \\ \mathbf{u}_2 &= -\mu_1 \left(\mathbf{e}_2 + \frac{\operatorname{tg} \theta \cos \xi}{3} \mathbf{e}_3 \right) \\ \mathbf{u}_3 &= \mu_2 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.8)$$

В формулах (7.6)–(7.8) μ_i, ξ — произвольные параметры, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — правая ортонормированная тройка, где $\mathbf{e}_3$ направлен по оси динамической симметрии, $\mathbf{e}$ — произвольный единичный вектор в экваториальной плоскости эллипсоида инерции.

Формулы (4.9), (5.10) и (6.10) для скорости собственного вращения запишем, используя параметры, входящие в описания (7.6)–(7.8) векторов $\mathbf{u}_i$:

$$\begin{aligned} \kappa &= 1 \\ \Omega^2 &= \frac{1}{I_1} (2 - 3 \cos \theta) \times \\ &\times \left(\frac{\mu_2}{\cos \theta} - \frac{2(1 + \cos \theta)}{(2 - \cos \theta) \sin \theta} \mu_3 \sin(\tau + \varepsilon) \right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \kappa &= 2 \\ \Omega^2 &= \frac{\sin \theta (2 - 3 \cos \theta)}{I_1 (1 + \cos \theta)} \times \\ &\times \left(\mu_2 - \frac{4(1 + \cos \theta)}{4 - \cos \theta} \mu_1 \cos(\tau + \xi) \right) \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2} \\ \Omega^2 &= \frac{2(1 - 3 \cos \theta)}{\cos \theta I_1} \times \\ &\times \left(\mu_2 - \frac{4}{3} \mu_1 \left(\cos \frac{\tau}{2} - \xi \right) \right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

В формуле (7.9) ε — угол между $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}_1$.

В случаях

$$\begin{aligned} \kappa &= 1 \\ \mu_2 &= \pm \frac{2(1 + \cos \theta) \cos \theta}{(2 - \cos \theta) \sin \theta} \mu_3 \\ \kappa &= 2 \\ \mu_2 &= \pm \frac{4(1 + \cos \theta)}{4 - \cos \theta} \mu_1 \end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{1}{2}, \mu_2 = \pm \frac{4}{3}\mu_1 \quad (7.12)$$

уравнение (3.21) интегрируется в элементарных функциях.

Например, в случае $\kappa = 2$ при соответствующем условии (7.12) получим

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\tau + \xi}{2}\right) &= \frac{\exp(rt + c) - 1}{\exp(rt + c) + 1} \\ \Omega^2 &= r^2 \sin^2\left(\frac{\tau + \xi}{2}\right) \\ r^2 &= \frac{8\sin\theta(2 - \cos\theta)}{(4 - \cos\theta)I_1} \end{aligned}$$

При $t \rightarrow +\infty$ получаем $\Omega \rightarrow 0$. Такой же результат получаем и в других случаях (7.12). Формулы (7.6)–(7.8) при условиях (7.12) записываются в виде

$$\begin{aligned} \kappa = 1, \mathbf{u}_1 &= \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_3 \mathbf{e} \times \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_2 = -\mu_1 \mathbf{e}_2 + \mu_3 \mathbf{e} \times \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{u}_3 &= \mu_1 \mathbf{e}_3 + \frac{3\cos\theta}{2 - \cos\theta} \mu_3 \left(\mathbf{e} \pm \frac{2(1 + \cos\theta)}{3\sin\theta} \mathbf{e}_3 \right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\kappa = 2$$

$$\frac{\mathbf{u}_1}{\mu_1} = \mathbf{e}_1$$

$$\frac{\mathbf{u}_2}{\mu_1} = -\mathbf{e}_2 \quad (7.14)$$

$$\frac{\mathbf{u}_3}{\mu_1} = \frac{5\sin\theta}{4 - \cos\theta} \left(\mathbf{e} \pm \frac{4(1 + \cos\theta)}{5\sin\theta} \mathbf{e}_3 \right)$$

$$\kappa = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\mathbf{u}_1}{\mu_1} = \mathbf{e}_1 + \frac{\operatorname{tg}\theta \sin\xi}{3} \mathbf{e}_3$$

$$\frac{\mathbf{u}_2}{\mu_1} = -\mathbf{e}_2 - \frac{\operatorname{tg}\theta \cos\xi}{3} \mathbf{e}_3 \quad (7.15)$$

$$\frac{u_3}{\mu_1} = \pm \frac{4}{3} e_3$$

Таким образом, если центры приведения заданы формулами (7.13)–(7.15), то нерегулярная прецессия тела с постоянным отношением скоростей в трех однородных полях экспоненциально быстро затухает со временем, приближаясь к состоянию покоя.

Заключение. Известные точные решения задачи о вращении твердого тела в суперпозиции трех полей описывают регулярную прецессию [13, 15–17] либо нерегулярную прецессию с постоянным отношением скоростей прецессии и собствен-

ного вращения [18–20]. Задача о нерегулярной прецессии рассмотрена [18–20] для осесимметричного тела, совершающего прецессию вокруг силовой линии одного из трех однородных ортогональных полей. В настоящей работе описаны все возможные случаи нерегулярной прецессии с постоянным отношением скоростей симметричного тела в трех неприводимых однородных полях. Конфигурационные условия прецессии получены без предположения о взаимной ортогональности полей и при произвольном направлении оси прецессии. Показано, что прецессия динамически симметричного тела возможна при скорости прецессии, равной, вдвое большей или вдвое меньшей скорости собственного вращения. Выделены положения центров приведения сил, для которых прецессионное движение экспоненциально быстро со временем приближается к состоянию покоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogoyavlensky O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // *Math. Phys. Commun.* 1984. V. 95. P. 307–315.
2. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I. The equations of motion and their transformation // *J. Theor. & Appl. Mech.* 1986. V. 5. № 5. P. 747–754.
3. *Yehia H.M., El-kenani H.N.* Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrost at with principal axes on a circular orbit // *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. V. 7(4). P. 2120–2128.
4. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // *Ann. Mat. Pura e Appl.* 1947. V. 26. Iss. 3–4. P. 271–281.
5. *Рубановский В.Н.* Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // *ПММ.* 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 212–219.
6. *Ольшанский В.Ю.* О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // *ПММ.* 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 559–571.
7. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2019. V. 131. Iss. 12. Art. № 57.
8. *Ol'shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2020. V. 132. Iss. 9. Art. № 46.
9. *Ольшанский В.Ю.* Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением // *ПММ.* 2021. Т. 85. Вып. 5. С. 547–564.
10. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
11. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДНГУ, 2009.
12. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // *Egypt. J. Bas. Appl. Sci.* 2015. V. 2. Iss. 3. P. 200 — 205.
13. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrost at) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // *J. Egypt. Math. Soc.* 2017. V. 25. Iss. 2. P. 216 — 219.
14. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a rigid body in two uniform fields // *Mech. Res. Commun.* 2023. V. 127. Art. № 104041.
15. *Ольшанский В.Ю.* Регулярная прецессия гиростата в суперпозиции трех однородных полей // *ПММ.* 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 872–886.
16. *Hussein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2019. V. 15. Iss. 3. P. 285–292.
17. *Ольшанский В.Ю.* Регулярная прецессия гиростата в трех силовых полях // *ПММ.* 2023. Т. 87. Вып. 4. С. 571–588.
18. *Горр Г.В.* Один класс резонансных прецессионных движений твердого тела под действием трех однородных силовых полей // *ПММ.* 2023. Т. 87. Вып. 1. С. 3–18.
19. *Горр Г.В.* Постановка задачи о прецессиях твердого тела с неподвижной точкой в трех однородных силовых полях. Прецессионно-изоконические движения твердого тела // *Изв. РАН МТТ.* 2023. № 3. С. 123–134.
20. *Gorr G.V.* On a class of precessions of a rigid body with a fixed point under the action of forces of three homogeneous force field // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2023. V.19. Iss. 2. P. 249–264.

Nonregular Precession of a Rigid Body in Three Uniform Fields

V. Yu. Ol'shanskii ^{a, #}

^a *Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, Saratov, Russia*
[#] *e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru*

This article presents a solution to the problem of the conditions of nonregular precession of a rigid body in three homogeneous fields, in which the ratio of precession and proper rotation velocities is constant. It is shown that the precession of a dynamically symmetric body is possible at a precession velocity equal to, twice as large as, or twice as small as the proper rotation velocity. For each of the cases, the set of admissible positions of the centres of the forces and the relation between the body moments of inertia and constant nutation angle are given.

Keywords: rigid body, motion around a fixed point, three uniform fields, irregular precession

REFERENCES

1. Bogoyavlensky *O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // *Math. Phys. Commun.*, 1984, vol. 95, pp. 307–315.
2. Yehia *H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I. The equations of motion and their transformation // *J. Theor. & Appl. Mech.*, 1986, vol. 5, no. 5, pp. 747–754.
3. Yehia *H.M.*, El-kenani *H.N.* Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrost at with principal axes on a circular orbit // *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021, vol. 7(4), pp. 2120 – 2128.
4. Grioli *G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // *Ann. Mat. Pura e Appl.*, 1947, vol. 26, iss. 3–4, pp. 271–281.
5. Rubanovskii *V.N.* On a new particular solution of the equations of motion of a heavy solid in liquid // *JAMM*, 1985, vol. 49, iss. 2, pp. 160–165. (in Russian)
6. Ol'shanskii *V.Yu.* On the regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Mech. Solids*, 2018, vol. 53 (Suppl. 2), pp. 95–106.
7. Ol'shanskii *V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2019, vol. 131, iss. 12, art. no. 57.
8. Ol'shanskii *V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2020, vol. 132, iss. 9, art. no. 46.
9. Ol'shanskii *V.Yu.* Semi-regular precession of an asymmetrical rigid body filled with a liquid // *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, iss. 8, pp. 1500–1513.
10. Gorr *G.V.*, Kovalev *A.M.* Motion of a Gyrostat. Kyev: Naukova Dumka, 2013. 408 p. (in Russian)
11. Gorr *G.V.*, Maznev *A.V.*, Shchetinina *E.K.* Precession Motions in Rigid Body Dynamics and Dynamics of Linked Rigid Bodies Systems. Donetsk: Donetsk National Univ., 2009. 222 p. (in Russian)
12. Yehia *H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // *Egypt. J. Bas. Appl. Sci.* 2015, vol. 2, iss.3, pp. 200 – 205.
13. Yehia *H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // *J. Egypt. Math. Soc.*, 2017, vol. 25, iss. 2, pp. 216 – 219.
14. Ol'shanskii *V.Yu.* Regular precession of a rigid body in two uniform fields // *Mech. Res. Commun.*, 2023, vol.127, art. no. 104041.
15. Ol'shanskii *V.Yu.* Regular precession of a gyrostat in three uniform fields // *Mech. Solids*, 2022, vol.57, iss. 8, pp. 1873 – 1884.
16. Hussein *A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2019, vol. 15, iss. 3, pp. 285–292.
17. Ol'shanskii *V.Yu.* Regular precession of a gyrostat in three force fields // *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, iss. 7, pp. 2515 – 2530.
18. Gorr *G.V.* One class of resonance precession motions of a rigid body under the action of three homogeneous force fields // *JAMM*, 2023, vol. 87, iss. 1, pp. 3 – 18.
19. Gorr *G.V.* Statement of the problem on precessions of a rigid body with a fixed point in three homogeneous force fields. Precession-isoconic motions of a rigid body // *Izv. RAS. Mech. Solids*, 2023, no. 3, pp. 123–134. (in Russian)
20. Gorr *G.V.* On a class of precessions of a rigid body with a fixed point under the action of forces of three homogeneous force field // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2023, vol.19, iss. 2, pp. 249–264.

УДК 531

О ПРЕЦЕССИИ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА

© 2024 г. Г. М. Розенблат^{1,*}¹Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Москва, Россия

*e-mail: gr51@mail.ru

Поступила в редакцию 12.12.2023 г.

После доработки 25.12.2023 г.

Принята к публикации 27.12.2023 г.

В статье получены гарантированные оценки снизу и сверху для приращения угла прецессии за период по углу нутации при невырожденных движениях динамически симметричного твердого тела (волчка) вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа для произвольных значений начальных условий и параметров тела. Вся область начальных условий задачи разбита на два множества: в одном из этих множеств имеет место прецессия, среднее направление которой совпадает с направлением закрутки тела вокруг оси динамической симметрии, а в другом множестве — направление прецессии противоположно направлению этой закрутки.

Ключевые слова: волчок Лагранжа, нутация, прецессия, гарантированные оценки, динамика твердого тела

DOI: 10.31857/S0032823524010035 **EDN:** YUSNWJ

1. Введение. Как известно, волчком Лагранжа называется тяжелое твердое тело с закрепленной точкой O , центром тяжести в точке G , имеющее динамическую ось симметрии, проходящую через линию OG . Иными словами, эллипсоид инерции тела, построенный для неподвижной точки O , является эллипсоидом вращения, а центр тяжести G тела лежит на положительной части оси динамической симметрии этого эллипсоида.

Движение тела определяется при помощи трех углов Эйлера θ, ψ, φ , где θ — угол нутации (угол, образуемый положительной частью динамической оси симметрии тела с восходящей вертикалью в неподвижной точке); ψ — угол прецессии (угол, образуемый подвижной плоскостью, проходящей через ось динамической симметрии тела и восходящую вертикаль в неподвижной точке, и каким-либо начальным положением этой плоскости); φ — угол собственного вращения (поворота) твердого тела вокруг оси динамической симметрии.

Любое невырожденное движение такого волчка (вырожденные асимптотические движения были указаны Клейном и Зоммерфельдом [1]) представляет собой T — периодическое изменение угла нутации $\theta(t)$ в некоторых пределах: $\theta_2 \leq \theta(t) \leq \theta_3$. Величины T, θ_2, θ_3 определяются начальными условиями задачи и значениями параметров волчка, а сама функция $\theta(t)$ выражается через эллиптические функции.

Изменение угла прецессии $\psi(t)$ происходит таким образом, что его производная по времени $\dot{\psi}(t)$ является также T -периодической функцией времени и выражается

через эллиптические интегралы 3-го рода. Поэтому для произвольного момента времени t , считая, что $\psi(0) = 0$, можно записать следующие равенства

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \int_0^t \dot{\psi}(s) ds = \int_0^{nT} \dot{\psi}(s) ds + \\ &+ \int_{nT}^t \dot{\psi}(s) ds = \int_0^{nT} \dot{\psi}(s) ds + \int_0^{\tau} \dot{\psi}(s) ds = nT\dot{\psi} + \psi(\tau) \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\psi}(s) ds = \frac{\psi(T) - \psi(0)}{T} = \frac{\Delta\psi}{T} \\ t &= nT + \tau, \tau \in [0, T]\end{aligned}$$

Согласно приведенным соотношениям, представляет интерес задача определения приращения $\Delta\psi = \psi(T) - \psi(0)$ угла $\psi(t)$ за указанный период времени T изменения угла нутации $\theta(t)$. Это эквивалентно определению средней (за период времени T) угловой скорости прецессии волчка.

В данной работе для произвольных значений начальных условий и параметров тела получены гарантированные оценки снизу и сверху приращения $\Delta\psi$, выраженные через вещественные корни кубического уравнения, коэффициенты которого определяются параметрами волчка и начальными условиями задачи. Кроме того, получены необходимые и достаточные соотношения на начальные условия задачи, которые определяют направление средней прецессии волчка. Работа является расширением и развитием результатов, полученных ранее в статье автора [2].

Отметим, что ранее такого рода задача об оценках решалась при исследовании эффекта Магнуса для симметричного гироскопа в подвесе Кардана. Были получены [3] гарантированные оценки снизу и сверху для средней угловой скорости прецессии внешней рамки подвеса такого гироскопа. Более подробное обсуждение этой задачи содержится в книге [4, стр. 51].

2. Обозначения и основные уравнения задачи. Пусть $O\xi\eta\zeta$ — подвижная, жестко связанная с телом, правая система координат, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела. Ось $O\zeta$ направлена по положительной части оси динамической симметрии тела, проходит через центр тяжести G и ориентирована так, что $OG = \zeta_0 > 0$. Обозначим A, A, C — главные моменты инерции тела относительно, соответственно, осей $O\xi, O\eta, O\zeta$. Ось $O\zeta$ — это ось динамической симметрии тела или гироскопическая ось. Пусть $Oxyz$ — неподвижная правая система координат, ось Oz которой направлена по вертикали вверх, M — масса тела, g — ускорение силы тяжести, θ, ψ, φ — углы Эйлера (см. выше), ω — вектор угловой скорости тела.

В этом случае имеют место следующие классические первые интегралы движения:

1. Интеграл энергии

$$A(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + C\omega_\zeta^2 + 2Mg\zeta_0 \cos\theta = h = \text{const}$$

или в углах Эйлера

$$A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + C\omega_\zeta^2 + 2Mg\zeta_0 \cos\theta = h$$

2. Интеграл проекции момента количества движения тела на неподвижную вертикальную ось Oz

$$A \sin \theta (\omega_\xi \sin \varphi + \omega_\eta \cos \varphi) + \\ + C \omega_\zeta \cos \theta = K = \text{const}$$

или в углах Эйлера

$$A \dot{\psi} \sin^2 \theta + C \omega_\zeta \cos \theta = K$$

3. Интеграл проекции момента количества движения тела на подвижную ось динамической симметрии тела $O\xi$ (интеграл Лагранжа)

$$C \omega_\zeta = \text{const} \leftrightarrow \omega_\zeta = \text{const}$$

или в углах Эйлера

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} = \omega_\zeta = \text{const}$$

Константы h, K, ω_ζ первых интегралов определяются начальными условиями задачи: $\theta(0), \dot{\theta}(0), \psi(0), \dot{\psi}(0), \phi(0), \dot{\phi}(0)$. Углы ψ, ϕ являются циклическими (“скрытыми”) координатами данной задачи, поэтому полагаем всегда $\psi(0) = \phi(0) = 0$.

Далее будем предполагать без ограничения общности, что $\omega_\zeta = \text{const} > 0$.

Вводим следующие параметры

$$a = 2Mg\zeta_0 / A, \quad b = C / A$$

$$\alpha = (h - C\omega_\zeta^2) / A$$

$$\beta = K / A, \quad u_0 = K / (C\omega_\zeta)$$

Отметим, что параметры (константы) a, b , определяемые формой и массовыми характеристиками твердого тела, должны удовлетворять условиям физической реализуемости $0 \leq a \leq a_0, 0 \leq b \leq 2$, где a_0 находится из условия Яхьи [5]:

$$a_0 = g \sqrt{\frac{2M(2-b)}{A}} \rightarrow \zeta_0 < \sqrt{\frac{2A-C}{2M}}$$

Параметры (константы) $\alpha, \beta, u_0, \omega_\zeta$ однозначно определяются заданными начальными условиями задачи: $\theta(0), \dot{\theta}(0), \psi(0), \dot{\psi}(0), \phi(0), \dot{\phi}(0)$. Параметры же a, b определяются заданным динамически симметричным распределением масс тела (волчка Лагранжа).

Из приведенных интегралов и кинематических уравнений Эйлера получим следующие дифференциальные соотношения для трех углов Эйлера θ, ψ, ϕ

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 &= af(u), \quad \dot{\psi} = b\omega_\zeta \frac{u_0 - u}{1 - u^2}, \quad \dot{\phi} = \omega_\zeta - u\dot{\psi} \\ af(u) &= (\alpha - au)(1 - u^2) - b^2\omega_\zeta^2(u_0 - u)^2 \\ u &= \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть $u_{00} = \cos \theta_0, \theta_0 = \theta(0)$ — некоторое начальное условие задачи для угла нутации θ (остальные начальные условия для скоростей $\dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0), \dot{\phi}(0)$ являются произвольными). Тогда кубический полином $f(u)$ в правой части первого уравнения системы (2.1), коэффициенты которого определяются начальными условиями и параметрами волчка, обладает следующими свойствами:

$$f(\pm 1) < 0, f(u_{00}) > 0, f(+\infty) > 0, f(-\infty) < 0$$

Отсюда получаем, что кубическое уравнение $f(u) = 0$ имеет три вещественных корня u_1, u_2, u_3 , которые удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} -1 < u_3 \leq u_0 \leq u_2 < 1 < u_1 < +\infty \\ f(u) > 0; u \in (u_3, u_2) \cup (u_1, +\infty) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из первого уравнения (2.1) и неравенств (2.2) следует, что функция $\theta(t) = \arccos u(t)$ изменяется периодическим образом от нижнего угла $\theta_3 = \arccos u_3$ до верхнего угла $\theta_2 = \arccos u_2$ и находится путем интегрирования дифференциального уравнения первого порядка вида

$$\frac{du}{\sqrt{a(u_1 - u)(u_2 - u)(u - u_3)}} = \pm dt; u \in [u_3, u_2] \quad (2.3)$$

В уравнении (2.3) знак “+” соответствует проходу функции $u(t)$ от меньшего значения u_3 до большего значения u_2 , а знак “-” соответствует обратному проходу функции $u(t)$ от значения u_2 до значения u_3 . Ясно, что по времени эти проходы равны между собой, а полный период функций $u(t)$ и $\theta(t)$ дается формулой

$$T = 2 \int_{u_3}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{a(u_1 - u)(u_2 - u)(u - u_3)}} \quad (2.4)$$

Решая уравнение (2.3) и подставляя результат во второе и третье уравнения системы (2.1), найдем законы изменения функций $\psi(t)$, $\phi(t)$.

3. Постановка и обсуждение задачи. В работе рассматривается задача об оценках снизу и сверху приращения $\Delta\psi$ угла прецессии $\psi(t)$ на интервале времени, равном периоду T из формулы (2.4), то есть на интервале времени, соответствующем одному полному колебанию угла нутации $\theta(t)$ волчка. Согласно второму уравнению системы (2.1), эта величина определяется из следующего соотношения

$$\Delta\psi = b\omega_\zeta \int_0^T \frac{u_0 - u(t)}{1 - u^2(t)} dt \quad (3.1)$$

Соотношение (3.1) можно переписать в таком виде

$$\Delta\psi = \frac{b\omega_\zeta}{2} \left[(1 + u_0) \int_0^T \frac{dt}{1 + u(t)} - (1 - u_0) \int_0^T \frac{dt}{1 - u(t)} \right] \quad (3.2)$$

Отметим, что ранее функция $\psi(t)$ находилась при помощи квадратур из второго уравнения системы (2.1) и выражалась через эллиптические интегралы 3-го рода [6, 7]. Соответственно, для получения конкретных оценок приращения этой функции за какой-либо промежуток времени требовались дополнительные исследования эллиптических интегралов. В частности, используя эти формулы, сложно аналитически определить знак рассматриваемой величины $\Delta\psi$ в зависимости от параметра u_0 , который дается формулой

$$u_0 = \frac{K}{C\omega_\zeta} = \frac{A}{C\omega_\zeta} \dot{\psi} \sin^2 \theta + \cos \theta,$$

в том случае, когда $u_0 \in (u_3, u_2)$.

Из формулы (3.1), очевидно, следует, что при $u_0 > u_2$ имеем $\Delta\psi > 0$ (знак $\Delta\psi$ совпадает со знаком ω_ζ), а при $u_0 < u_3$ будет $\Delta\psi < 0$ (знак $\Delta\psi$ не совпадает со знаком ω_ζ). В частности (т.к. $u_3 > -1$), последнее обстоятельство будет наверняка

соблюдаться при $u_0 < -1$. Далее будет показано, что в силу специфики кубического полинома $f(u)$ из (2.1) неравенства $-1 < u_0 < u_3$ не могут быть реализованы. Поэтому условие $u_0 < u_3$, на самом деле, следует заменить неравенством $u_0 < -1$. Далее в статье будет показано, что неравенство $u_0 < -1$ является необходимым и достаточным условием для реализации “попятной” (обратной) прецессии.

Отметим, что во всех, известных автору, источниках, кроме статьи [8], изучавших задачу о волчке Лагранжа, нереализуемость неравенств $-1 < u_0 < u_3$ не обсуждалась (возможно, что авторам этих источников этот факт не был известен). В работе [8, стр. 118, лемма 2], где этот факт был отмечен, нереализуемость неравенств $-1 < u_0 < u_3$ была показана при помощи методов контурного интегрирования из теории функций комплексного переменного (теорема Коши). В настоящей статье доказательство этого факта осуществляется при помощи элементарных алгебраических средств.

Адамаром [9] было дано краткое доказательство того факта, что $\Delta\psi \neq 0$, и знак $\Delta\psi$ совпадает со знаком ω_ζ также и при $u_0 \in (u_3, u_2)$ (т.е. $\Delta\psi > 0$ при $\omega_\zeta > 0$). Для этого были использованы методы контурного интегрирования из теории функций комплексного переменного (теорема Коши и теория вычетов). Более подробно результат Адамара был изложен в известной книге В.Д. Мак-Миллана [10]. Предложены, [11, 12] качественные объяснения этого факта, использующие теорему об изменении кинетического момента, которые, однако, весьма расплывчаты, запутанны и не лишены (на наш взгляд) некоторых неточностей (см. ниже обсуждение в разд. 5 настоящей статьи).

Полученные в данной работе оценки позволяют, в частности, элементарно обосновать результат Адамара о том, что $\Delta\psi > 0$ при $\omega_\zeta > 0$ в некоторых случаях (“попутная” прецессия). Метод, который был использован в данной статье для получения оценок средней угловой скорости прецессии волчка, аналогичен методу, предложенному ранее в работах [13, 14].

Кроме того, в настоящей работе получены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять начальные данные задачи $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$, $\psi(0)$, $\dot{\psi}(0)$, чтобы имел место противоположный факт, то есть $\omega_\zeta > 0$, $\Delta\psi < 0$ (“попятная” прецессия). Таким образом, вся область начальных условий $\{\theta(0), \dot{\theta}(0), \psi(0), \dot{\psi}(0)\}$ данной задачи (при $\omega_\zeta > 0$) разбивается на два множества: в одном из этих множеств имеет место “попутная”, а в другом — “попятная” прецессии оси волчка.

4. Формулировка и обоснование результатов. Для интегралов из (3.2), используя соотношение (2.3), получим:

$$I_1 = \int_0^T \frac{dt}{1+u(t)} = \int_0^{T/2} \frac{dt}{1+u(t)} + \int_{T/2}^T \frac{dt}{1+u(t)} = 2 \int_{u_3}^{u_2} \frac{du}{(1+u)\sqrt{af(u)}} \quad (4.1)$$

$$I_2 = \int_0^T \frac{dt}{1-u(t)} = \int_0^{T/2} \frac{dt}{1-u(t)} + \int_{T/2}^T \frac{dt}{1-u(t)} = 2 \int_{u_3}^{u_2} \frac{du}{(1-u)\sqrt{af(u)}} \quad (4.2)$$

В (4.1) и (4.2) функция $f(u)$ дается формулой

$$f(u) = (u_1 - u)(u_2 - u)(u - u_3); \quad u \in [u_3, u_2], \quad (4.3)$$

где u_1, u_2, u_3 — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам (2.2).

Делаем в интегралах из (4.1) и (4.2) замену переменной $u \rightarrow \gamma$:

$$u(\gamma) = \frac{1}{2}(u_2 + u_3) + \frac{1}{2}(u_2 - u_3)\sin\gamma; \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (4.4)$$

Тогда, используя (4.3), получим

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1+u)\sqrt{u_1-u}}, \quad I_2 = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1-u)\sqrt{u_1-u}} \quad (4.5)$$

В (4.5) функция $u = u(\gamma)$ дается выражением из (4.4). Таким образом, равенство (3.2) принимает следующий вид

$$\Delta\Psi = \alpha_0 \left[(1+u_0) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1+u)\sqrt{u_1-u}} - (1-u_0) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1-u)\sqrt{u_1-u}} \right]; \alpha_0 = \frac{b\omega_\zeta}{\sqrt{a}}, \quad (4.6)$$

где функция $u = u(\gamma)$ также дается выражением из (4.4). При $\gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ из (4.4) имеем $u_3 \leq u(\gamma) \leq u_2$. В (4.6) необходимо заменить параметр $u_0 = K / (C\omega_\zeta)$ функцией от величин u_1, u_2, u_3 , которая находится из следующего соотношения (см. [10]):

$$\left(\frac{1-u_0}{1+u_0} \right)^2 = \mu, \mu = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad (4.7)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{u_1-1}{u_1+1} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{1-u_2}{1+u_2} > 0, \quad \lambda_3 = \frac{1-u_3}{1+u_3} > 0$$

Из уравнения (4.7) находим два возможных значения для u_0 : u_{01}, u_{02} , определяемые формулами:

$$u_{01} = \frac{1-\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}} = \frac{\sqrt{q_1}-\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}, \quad u_{02} = \frac{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}-\sqrt{q_2}} \quad (4.8)$$

$$q_1 = (u_1+1)(1+u_2)(1+u_3), \quad q_2 = (u_1-1)(1-u_2)(1-u_3)$$

Далее, используя (4.8), несложно показать, что при любых u_1, u_2, u_3 , удовлетворяющих неравенствам (2.2), выполнены следующие неравенства и включения:

$$1) \text{ если } u_2 + u_3 > 0, \text{ то } \lambda_0 = \lambda_2 \lambda_3 \in (0, 1), \quad u_{01} \in (u_5, 1), \quad u_{02} \in (1, 1/u_5), \quad u_1 \in (1, +\infty)$$

$$2) \text{ если } u_2 + u_3 < 0, \text{ то } \lambda_0 = \lambda_2 \lambda_3 \in (1, +\infty), \quad u_{01} \in (u_5, 1), \quad u_1 \in (1, +\infty) \quad (4.9)$$

$$u_{02} \in (1, +\infty) \text{ при } u_1 \in (1, u_6); \quad u_{02} \in (-\infty, 1/u_5) \text{ при } u_1 \in (u_6, +\infty)$$

$$u_5 = (1 - \sqrt{\lambda_0}) / (1 + \sqrt{\lambda_0}) \in (u_3, u_2); \quad u_6 = (\lambda_0 + 1) / (\lambda_0 - 1) \in (1, +\infty)$$

Отметим, что соотношение (4.7) получается из условия тождественности кубических многочленов

$$(\alpha - au)(1-u^2) - b^2\omega_\zeta^2(u_0 - u)^2 = a(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) = af(u),$$

где надо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях u . Подробности изложены в [10] и здесь опускаются (см. Приложение).

Соотношения (4.6) — (4.9) с учетом замены (4.4) являются основными для получения оценок сверху и снизу величины $\Delta\psi$. Ясно, что эти оценки существенно зависят от значений параметра u_0 . Поэтому сформулируем лемму, определяющую все возможные значения параметра u_0 в зависимости от допустимых значений корней u_1, u_2, u_3 .

Лемма. Для произвольных значений корней u_1, u_2, u_3 , удовлетворяющих неравенствам (2.2), возможные значения параметра u_0 , определяемого из (4.7) и принимающего значения u_{01} , либо u_{02} из (4.8), могут находиться в следующих интервалах:

1. $u_0 = u_{01} \in (u_5, 1) \subseteq (u_3, 1)$, $u_1 \in (1, +\infty)$, независимо от знака $u_2 + u_3$
2. $u_0 = u_{02} \in (1, 1/u_5) \subseteq (1, +\infty)$, при $u_2 + u_3 > 0$, $u_1 \in (1, +\infty)$
3. $u_0 = u_{02} \in (1, +\infty)$, при $u_2 + u_3 < 0$, $u_1 \in (1, u_6)$
4. $u_0 = u_{02} \in (-\infty, 1/u_5) \subseteq (-\infty, -1)$, при $u_2 + u_3 < 0$, $u_1 \in (u_6, +\infty)$

Здесь u_{01} , u_{02} , u_5 , u_6 определены в (4.7) — (4.9), причем, как было отмечено в (4.9), выполняется включение $u_5 \in (u_3, u_2)$.

Доказательство леммы следует из соотношений (4.9) и осуществляется непосредственной проверкой.

Замечание 1. Из леммы следует, что параметр $u_0 = u_{01}$ в области 1 удовлетворяет неравенствам $-1 < u_3 < u_5 < u_{01} < 1$, в областях 2 и 3 леммы параметр $u_0 = u_{02}$ удовлетворяет неравенству $u_{02} > 1$, а в области 4 леммы параметр $u_0 = u_{02}$ удовлетворяет неравенствам $-\infty < u_{02} < 1/u_5 < -1$.

Таким образом, параметр u_0 не может находиться в следующих областях.

$$\begin{aligned} & 1) \text{ Если } u_2 + u_3 > 0, \text{ то } u_0 \notin (-1, u_5), \\ & u_5 = \frac{1 - \sqrt{\lambda_0}}{1 + \sqrt{\lambda_0}}, \lambda_0 = \lambda_2 \lambda_3 \in (0, 1), u_5 \in (u_3, u_2) \end{aligned}$$

$$2) \text{ Если } u_2 + u_3 < 0, \text{ то } u_0 \notin \left(\frac{1}{u_5}, u_5\right),$$

$$u_5 = \frac{1 - \sqrt{\lambda_0}}{1 + \sqrt{\lambda_0}}, \lambda_0 = \lambda_2 \lambda_3 \in (1, +\infty), u_5 \in (u_3, u_2) \cup (-1, 0), \frac{1}{u_5} \in (-\infty, -1)$$

Из приведенных соотношений следует, что во всех допустимых случаях имеем $u_0 \notin (-1, u_5)$. А отсюда, т.к. $u_5 \in (u_3, u_2)$, в частности, следует, что $u_0 \notin (-1, u_3)$. Это доказывает также, что угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$ не может обращаться в нуль при максимальном (нижнем) угле нутации θ_3 (т.е. при минимальном значении $u = u_3$).

Замечание 2. Из приведенной леммы следует, что параметр u_0 , удовлетворяющий соотношению (4.7), может находиться только в следующих областях-интервалах:

1. При $u_2 + u_3 < 0$ (тогда $\lambda_0 \in (1, +\infty)$):

$$\begin{cases} u_0 \in (-\infty, 1/u_5), & \text{если } u_1 > u_6 \\ u_0 \in (u_5, +\infty), & \text{если } 1 < u_1 < u_6 \end{cases}$$

2. При $u_2 + u_3 \geq 0$ (тогда $\lambda_0 \in (0,1]$): $u_0 \in (u_5, 1 / u_5)$

$$u_5 = \frac{1 - \sqrt{\lambda_0}}{1 + \sqrt{\lambda_0}} \in (u_3, u_2), u_6 = \frac{\lambda_0 + 1}{\lambda_0 - 1}, \lambda_0 = \lambda_2 \lambda_3, \lambda_k = \frac{1 - u_k}{1 + u_k}; k = 2, 3$$

Кроме того, при $u_2 + u_3 \rightarrow \pm 0$ имеем $u_5 \rightarrow \pm 0$.

Теперь сформулируем и докажем теорему об оценках снизу и сверху для величины $\Delta\psi$ из (4.6). Сначала вычислим интегралы

$$S_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{1 + u(\gamma)}, S_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{1 - u(\gamma)} \quad (4.10)$$

$$u(\gamma) = \frac{1}{2}(u_2 + u_3) + \frac{1}{2}(u_2 - u_3)\sin \gamma; \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Для этого воспользуемся неопределенным табличным интегралом

$$\int \frac{d\gamma}{m - n \sin \gamma} = \frac{2}{m\sqrt{1 - \lambda^2}} \arctg \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right]; \lambda = \frac{n}{m}, |\lambda| < 1 \quad (4.11)$$

Тогда для интегралов из (4.10), используя (4.11), получим выражения

$$S_1 = \frac{\pi}{\sqrt{(1 + u_2)(1 + u_3)}}, S_2 = \frac{\pi}{\sqrt{(1 - u_2)(1 - u_3)}} \quad (4.12)$$

Справедлива следующая теорема об оценках величины $\Delta\psi$.

Теорема 1. 1) В области 1 леммы, определяемой соотношениями:

$$u_0 = u_{01} \in (u_5, 1) \subseteq (u_3, 1)$$

при $u_1 \in (1, +\infty)$, $u_2 + u_3 > 0$ или $u_2 + u_3 < 0$

$$u_5 = \frac{1 - \sqrt{\lambda_0}}{1 + \sqrt{\lambda_0}} \in (u_3, u_2), \lambda_0 = \frac{(1 - u_2)(1 - u_3)}{(1 + u_2)(1 + u_3)}$$

имеют место оценки

$$\alpha_0 \left(S_1 \frac{1 + u_{01}}{\sqrt{u_1 - u_3}} - S_2 \frac{1 - u_{01}}{\sqrt{u_1 - u_2}} \right) < \Delta\psi < \alpha_0 \left(S_1 \frac{1 + u_{01}}{\sqrt{u_1 - u_2}} - S_2 \frac{1 - u_{01}}{\sqrt{u_1 - u_3}} \right) \quad (4.13)$$

2) В областях 2 и 3 леммы, определяемых соотношениями:

$$u_0 = u_{02} \in (1, 1 / u_5) \subseteq (1, +\infty), \text{ при } u_2 + u_3 > 0, u_1 \in (1, +\infty)$$

или

$$u_0 = u_{02} \in (1, +\infty), \text{ при } u_2 + u_3 < 0, u_1 \in (1, u_6), u_6 = \frac{\lambda_0 + 1}{\lambda_0 - 1} \in (1, +\infty),$$

имеют место оценки

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{u_1 - u_3}} [(1 + u_{02})S_1 + (-1 + u_{02})S_2] &< \Delta\psi < \\ &< \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{u_1 - u_2}} [(1 + u_{02})S_1 + (-1 + u_{02})S_2] \end{aligned} \quad (4.14)$$

3) В области 4 леммы, определяемой соотношениями:

$$u_0 = u_{02} \in (-\infty, 1 / u_5) \subseteq (-\infty, -1), \text{ при } u_2 + u_3 < 0, u_1 \in (u_6, +\infty),$$

имеют место оценки

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha_0}{\sqrt{u_1 - u_2}} [(-1 - u_{02})S_1 + (1 - u_{02})S_2] &< \Delta\psi < \\ &< -\frac{\alpha_0}{\sqrt{u_1 - u_3}} [(-1 - u_{02})S_1 + (1 - u_{02})S_2] \end{aligned} \quad (4.15)$$

В формулах (4.13) — (4.15) параметр α_0 определен вторым из равенств (4.6), величины S_1, S_2 — из (4.12), u_{01} и u_{02} — из (4.7), (4.8). Отметим, что все значения параметра u_0 , не вошедшие в перечисленные выше области, не могут быть реализованы ни при каких корнях u_1, u_2, u_3 , удовлетворяющих неравенствам из (2.2).

Доказательство теоремы 1 следует непосредственно из формул (4.6) — (4.10), (4.12) и неравенств

$$\frac{1}{\sqrt{u_1 - u_3}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_1 - u}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_1 - u_2}}, \text{ при } u_3 \leq u \leq u_2 < 1 < u_1$$

Отметим, что полученные оценки являются более точными, чем оценки [13–15]

$$\frac{1}{\sqrt{u_1 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_1 - u}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_1 - 1}}, \text{ при } -1 \leq u \leq 1 \leq u_1$$

Следствие 1. Для теоремы 1 часть 1) выпишем более конкретные формулы оценок (выраженные только через значения корней u_1, u_2, u_3), используя соотношения (4.8) для параметра u_{01} и формулы (4.12) для интегралов S_1, S_2 . Кроме того, используем формулу для параметра $\alpha_0 = b\omega_\zeta / \sqrt{a}$ из равенств (4.6), которая получается из приравнивания коэффициентов при первой степени u в равенстве

$$(\alpha - au)(1 - u^2) - b^2\omega_\zeta^2(u_{01} - u)^2 = a(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) = af(u)$$

Эта формула имеет вид

$$\alpha_0 = \alpha_{01} = \sqrt{\frac{b^2\omega_\zeta^2}{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q_1 - q_2}{u_{01}}} = \frac{1}{2} (\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}),$$

где q_1, q_2 определены в (4.8).

Приведем окончательные результаты, опуская промежуточные алгебраические выкладки

$$\Delta\psi > \pi \frac{u_1(2 + u_3 - u_2) - u_2 - u_3}{\sqrt{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \left[\sqrt{(u_1 + 1)(u_1 - u_2)} + \sqrt{(u_1 - 1)(u_1 - u_3)} \right]} \quad (4.16)$$

$$\Delta\psi < \pi \frac{u_1(2 + u_2 - u_3) - u_2 - u_3}{\sqrt{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \left[\sqrt{(u_1 + 1)(u_1 - u_3)} + \sqrt{(u_1 - 1)(u_1 - u_2)} \right]}, \quad (4.17)$$

где $u_1 \in (1, +\infty)$.

Тогда, используя неравенства

$$u_1(2 + u_3 - u_2) - u_2 - u_3 > 2 - 2u_2 > 0, \quad u_1(2 + u_2 - u_3) - u_2 - u_3 > 2 - 2u_3 > 0,$$

из (4.16) и (4.17), в частности, получаем результат Адамара [9]: знак приращения угла прецессии за период положителен и совпадает со знаком $\omega_\zeta > 0$ (см. также [10, стр. 223]). Отметим, что для теоремы 1 часть 2) результат Адамара очевиден.

Аналогичные формулам (4.16), (4.17) выражения для оценок только через корни u_1, u_2, u_3 могут быть выписаны и для теоремы 1 части 2) и 3). Приведем здесь конечные результаты, которые получаются после подстановки в (4.14), (4.15) формул (4.12), соотношения из (4.8) для величины u_{02} и следующего равенства для соответствующего α_0 :

$$\alpha_0 = \alpha_{02} = \sqrt{\frac{b^2 \omega_\zeta^2}{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q_1 - q_2}{u_{02}}} = \frac{|\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}|}{2}$$

Для теоремы 1 часть 2) имеем

$$\pi \frac{\sqrt{u_1 + 1} + \sqrt{u_1 - 1}}{\sqrt{u_1 - u_3}} < \Delta\psi < \pi \frac{\sqrt{u_1 + 1} + \sqrt{u_1 - 1}}{\sqrt{u_1 - u_2}}$$

Причем здесь: при неравенстве $u_2 + u_3 > 0$ корень u_1 изменяется в интервале $1 < u_1 < +\infty$, а при неравенстве $u_2 + u_3 < 0$ корень u_1 изменяется в интервале $1 < u_1 < u_6 = (\lambda_0 + 1) / (\lambda_0 - 1) = -(1 + u_2 u_3) / (u_2 + u_3)$.

Для теоремы 1 часть 3) имеем

$$-\pi \frac{\sqrt{u_1 + 1} + \sqrt{u_1 - 1}}{\sqrt{u_1 - u_2}} < \Delta\psi < -\pi \frac{\sqrt{u_1 + 1} + \sqrt{u_1 - 1}}{\sqrt{u_1 - u_3}}$$

Причем здесь обязательно соблюдается неравенство $u_2 + u_3 < 0$, а корень u_1 изменяется в интервале $1 < u_6 < u_1 < +\infty$, где, как и выше,

$$u_6 = (\lambda_0 + 1) / (\lambda_0 - 1) = -(1 + u_2 u_3) / (u_2 + u_3)$$

Следствие 2. В части 3) теоремы 1, согласно последним неравенствам из Следствия 1, знак приращения угла прецессии за период не совпадает со знаком ω_ζ (“попятная” прецессия). Это можно получить также из (4.15) и неравенства $u_0 = u_{02} < 1 / u_5 < -1$, справедливого для этого пункта, т.к. квадратные скобки в неравенствах (4.15) в этом случае положительны. Таким образом, условие $u_2 + u_3 < 0$ является необходимым (но не достаточным) для реализации “попятной” прецессии волчка Лагранжа. Для достаточности нужно еще выполнение неравенства $u_0 = u_{02} < 1 / u_5 < -1$, где u_{02} дается формулой из (4.8).

Отметим, однако, что эти необходимые и достаточные условия для “попятной” прецессии даются через корни полинома 3-го порядка $f(u)$ из (2.1), а не через исходные начальные условия задачи, что затрудняет их практическое использование.

Как известно (см., напр., [11]), условие $u_2 + u_3 < 0$ всегда выполнено при колебаниях сферического маятника. Следовательно, для реализации “попятной” прецессии необходимо, чтобы волчок Лагранжа осуществлял движения типа сферического маятника.

Теперь сформулируем и докажем результаты, касающиеся необходимых и достаточных условий для начальных данных задачи, при которых реализуется “попятная” прецессия волчка Лагранжа.

Теорема 2. Пусть заданы начальные условия $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$, $\dot{\psi}(0)$, $\dot{\phi}(0)$ для некоторого движения волчка Лагранжа. Предположим, что интеграл Лагранжа $C\omega_\zeta = \text{const}$ для этих начальных условий удовлетворяет неравенству $\dot{\psi}(0)\cos\theta(0) + \dot{\phi}(0) = \omega_\zeta > 0$ (т.е. проекция кинетического момента тела на ось динамической симметрии $O\zeta$ является положительной). Этим начальным условиям соответствует полином 3-го порядка $f(u)$ из (2.1), коэффициенты которого зависят известным образом от начальных условий $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$, $\dot{\psi}(0)$, $\dot{\phi}(0)$ и распределения масс волчка в соответствии с введенными выше обозначениями. В выражении для полинома $f(u)$ (2.1) параметр u_0 вычисляется по формуле

$$u_0 = \frac{K}{C\omega_\zeta} = \frac{1}{b\omega_\zeta} \dot{\psi}(0)\sin^2\theta(0) + \cos\theta(0) \quad (4.18)$$

Тогда для реализации “попятной” прецессии необходимо и достаточно выполнения следующих четырех неравенств

$$f(u_0) < 0, f'(u_0) > 0, f''(u_0) < 0, \dot{\psi}(0) < 0 \quad (4.19)$$

Штрих означает производную по переменной u .

Доказательство теоремы 2 следует из геометрических соображений и специфического вида функции $f(u)$ (рис. 1), которая является полиномом третьего порядка и имеет локальные максимум и минимум, соответственно, на отрезках $[u_3, u_2]$ и $[u_2, u_1]$ (рис. 1). Из теоремы 1 следует, что для “попятной” прецессии необходимо и достаточно выполнения неравенства $u_0 < u_3$ (так как по доказанному в теореме 1, при $u_0 > u_3$ средняя прецессия всегда “попутная”). В таком случае (так как $f(u) \geq 0$, $u \in [u_3, u_2]$) должно быть выполнено неравенство $f(u_0) < 0$. Чтобы исключить случай $u_2 < u_0 < u_1$, при котором также реализуется неравенство $f(u_0) < 0$, нужно потребовать (рис. 1), чтобы $u_0 < u_{\max}$, где $u_{\max} \in (u_3, u_2)$ — точка локального максимума функции $f(u)$, в которой $f'(u_{\max}) = 0$. Следовательно (так как $f'(u)$ квадратный полином — парабола с “усами” вверх), должно быть выполнено неравенство $f'(u_0) > 0$. Наконец, чтобы исключить для параболы $f'(u)$ случай $u_{\min} < u_0 < u_1$, где $u_{\min}$ — точка локального минимума функции $f(u)$, для которой имеем $f'(u_{\min}) = 0$ и для которой $f'(u)$ — квадратный полином с “усами” вверх, уже необходимо и достаточно потребовать $f''(u_0) < 0$ (ведь ясно, что $f''(u_0) > 0$ при $u_{\min} < u_0 < u_1$).

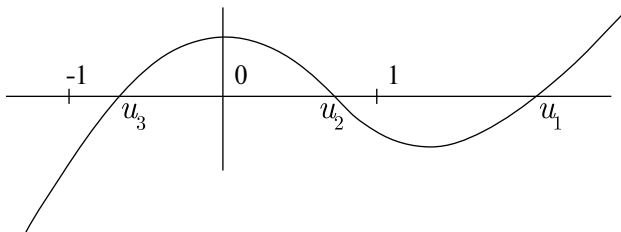


Рис. 1. Вид гироскопической функции $f(u)$. $-1 < u_3 < u_2 < 1 < u_1 < +\infty$, $u_0 \notin (-1, u_3]$.

Условие $\dot{\psi}(0) < 0$, фигурирующее в (4.19), является, вообще говоря, условием согласованности, так как при $\dot{\psi}(0) > 0$ из второго уравнения соотношений (2.1) следует неравенство $u_0 > u(0) = \cos\theta(0) > u_3$. А в этом случае, как было указано выше в Теореме 1, средняя прецессия обязательно является “попутной”. Теорема 2 полностью доказана.

Следствие 3. Необходимые и достаточные условия для реализации “попятной” прецессии в явном виде (через начальные условия задачи).

Для реализации “попятной” прецессии волчка Лагранжа при $\omega_\zeta > 0$ необходимо и достаточно выполнения неравенства $u_0 < -1$, где u_0 дается формулой

$$u_0 = K / (C\omega_\zeta) = \frac{\dot{\psi}(0)\sin^2\theta(0)}{b[\dot{\phi}(0) + \dot{\psi}(0)\cos\theta(0)]} + \cos\theta(0)$$

Доказательство Следствия 3: используя неравенства из (4.19), можно получить необходимые и достаточные условия для реализации “попятной” прецессии (при $\omega_\zeta > 0$) в явном виде. Действительно, используя явный вид функции $f(u)$ из (2.1), получим формулы

$$af(u) = (\alpha - au)(1 - u^2) - b^2\omega_\zeta^2(u_0 - u)^2$$

$$af'(u) = 3au^2 - 2\alpha u - a + 2b^2\omega_\zeta^2(u_0 - u)$$

$$af''(u) = 6au - 2\alpha - 2b^2\omega_\zeta^2$$

Тогда первые три неравенства из (4.19) примут следующий вид

$$(\alpha - au_0)(1 - u_0^2) < 0, \quad 3au_0^2 - 2\alpha u_0 - a > 0, \quad 3au_0 - \alpha - b^2\omega_\zeta^2 < 0 \quad (4.20)$$

Можно показать, что для “попятной” прецессии соблюдается неравенство $u_0^2 > 1$. Действительно, при $u_0^2 < 1$ из первого неравенства в (4.20) получим неравенство $u_0 > \alpha / a$. Вспоминая явный вид параметров u_0, α ,

$$u_0 = \cos\theta(0) + \frac{\dot{\psi}(0)\sin^2\theta(0)}{b\omega_\zeta}, \quad \frac{\alpha}{a} = \cos\theta(0) + \frac{\dot{\psi}^2(0)\sin^2\theta(0) + \dot{\theta}^2(0)}{a}, \quad (4.21)$$

получим неравенство

$$\frac{\dot{\psi}(0)}{b\omega_\zeta} \sin^2\theta(0) > \frac{\dot{\psi}^2(0)\sin^2\theta(0) + \dot{\theta}^2(0)}{a} > 0,$$

которое противоречиво при $\dot{\psi}(0) < 0$ (см. четвертое неравенство в (4.19)).

При $u_0^2 > 1$ можно утверждать, что обязательно должно быть $u_0 < -1$ (при $u_0 > +1$, как это следует из второго соотношения в (2.1), будет всегда $\dot{\psi}(t) > 0$, то есть “попутная” прецессия). С учетом неравенства $u_0 < -1$ три соотношения (4.20) приобретают вид

$$u_0 < \frac{\alpha}{a}, \quad u_0 < \frac{\alpha}{3a} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{9a^2} + \frac{1}{3}}, \quad u_0 < \frac{\alpha + b^2\omega_\zeta^2}{3a}$$

Ясно, что последние три неравенства эквивалентны двум (третье неравенство есть следствие второго)

$$u_0 < \frac{\alpha}{a}, u_0 < \frac{\alpha}{3a} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{9a^2} + \frac{1}{3}} \quad (4.22)$$

Рассматривая различные значения для параметра $z = \alpha/a$ на всей вещественной оси, приходим к следующим двум неравенствам, эквивалентным неравенствам (4.22):

$$u_0 < z, \text{ при } -\infty < z < -1 \quad (4.23)$$

$$u_0 < \frac{z}{3} - \sqrt{\frac{z^2}{9} + \frac{1}{3}}, \text{ при } -1 \leq z < +\infty \quad (4.24)$$

Покажем, что неравенство (4.23) не может быть выполнено. Действительно, используя вторую формулу из (4.21), из (4.23) получим неравенство

$$\begin{aligned} z = \cos\theta(0) + \frac{\dot{\psi}^2(0)\sin^2\theta(0) + \dot{\theta}^2(0)}{b\omega_\zeta} < -1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\dot{\psi}^2(0)\sin^2\theta(0) + \dot{\theta}^2(0)}{b\omega_\zeta} < -1 - \cos\theta(0) < 0 \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречиво, так как в левой его части стоит положительная величина.

Таким образом, остается исследовать только неравенство (4.24), имеющее вид

$$u_0 < h(z) = \frac{1}{3} \left(z - \sqrt{z^2 + 3} \right); \quad z > -1 \quad (4.25)$$

Покажем, что функция $h(z)$ является монотонно возрастающей. Имеем

$$h'(z) = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{z^2 + 3} - z}{\sqrt{z^2 + 3}} > 0$$

Следовательно, при $z > -1$ получим $h(z) > h(-1) = -1 > u_0$. Таким образом, неравенства (4.25) выполнены заведомо при условиях $u_0 < -1$, $z = \alpha/a > -1$. Полученные условия (т.е. неравенства $u_0 < -1$ и $\alpha/a > -1$) и являются необходимыми и достаточными условиями реализации “попятной” прецессии. Выпишем эти условия, используя формулы (4.21)

$$u_0 = \cos\theta(0) + \frac{\dot{\psi}(0)\sin^2\theta(0)}{b\omega_\zeta} < -1, \quad \frac{\alpha}{a} = \cos\theta(0) + \frac{\dot{\psi}^2(0)\sin^2\theta(0) + \dot{\theta}^2(0)}{a} > -1$$

Второе неравенство, очевидно, выполняется тождественно. Таким образом, в качестве необходимого и достаточного условия реализации “попятной” прецессии остается всего лишь одно неравенство $u_0 < -1$, которое в исходных начальных условиях задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\psi}(0)\sin^2\theta(0)}{b\omega_\zeta} < -(1 + \cos\theta(0)) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\dot{\psi}(0)\sin^2\left[\frac{\theta(0)}{2}\right] < -b\omega_\zeta = -b[\dot{\phi}(0) + \dot{\psi}(0)\cos\theta(0)] \end{aligned}$$

Итак, получаем следующее необходимое и достаточное условие реализации “попятной” прецессии, которое выражено только через начальные условия задачи и параметр $b = C/A$ ($b \in (0, 2)$) волчка Лагранжа,

$$\dot{\psi}(0)\left[2\sin^2\frac{\theta(0)}{2} + b\cos\theta(0)\right] + b\dot{\phi}(0) < 0 \quad (4.26)$$

Отметим, что неравенство (4.26), совместно с наложенным ранее условием положительности проекции кинетического момента тела на ось динамической симметрии $O\zeta$, которое имеет вид $\dot{\psi}(0)\cos\theta(0) + \dot{\phi}(0) = \omega_\zeta > 0$, дает следующее *двухстороннее* неравенство для реализации “попятной” прецессии

$$-\dot{\psi}(0)\cos\theta(0) < \dot{\phi}(0) < -\dot{\psi}(0)\cos\theta(0) - \frac{2}{b}\dot{\psi}(0)\sin^2\frac{\theta(0)}{2} \quad (4.27)$$

Нарушение одного из неравенств в (4.27) указывает на то, что либо происходит “попутная” прецессия, либо проекция кинетического момента тела на ось динамической симметрии $O\zeta$ является отрицательной. Следствие 3 доказано.

Отметим, что неравенство (4.27) при фиксированном $\dot{\psi}(0) < 0$ дает интервал $\Delta\dot{\phi}(0)$ изменения начального условия $\dot{\phi}(0)$, при котором реализуется “попятная” прецессия:

$$\Delta\dot{\phi}(0) = \frac{2}{b}|\dot{\psi}(0)|\sin^2\frac{\theta(0)}{2}$$

Как видим, этот интервал тем больше, чем больше модуль угловой скорости начальной прецессии $\dot{\psi}(0)$, и тем меньше, чем меньше начальный угол нутации $\theta(0)$. Например, при $\theta(0) = \pi/2$ (горизонтальный волчок) получим из (4.27) неравенства

$$0 < \dot{\phi}(0) < -\frac{\dot{\psi}(0)}{b}$$

При соблюдении этих строгих неравенств волчок будет совершать прецессию в “попятном” направлении.

Замечание 3. Результат следствия 3 показывает, что при $u_0 > -1$, $\omega_\zeta > 0$ прецессия (может быть, в среднем при $u_0 \in (u_3, u_2)$) будет “попутной”. Однако при $-1 < u_0 < u_3$ (где $u_3 \in (-1, +1)$ — меньший корень уравнения $f(u) = 0$) прецессия, согласно второму уравнению из (2.1), будет “попятной”. Такое утверждение часто встречается в литературе, посвященной волчку Лагранжа (см., напр., [15–17]). Таким образом, если соблюдается условие $-1 < u_0 < u_3$, то знак прецессии $\dot{\psi}$ определяется неоднозначно. Следовательно, мы должны заключить, что неравенства $-1 < u_0 < u_3$ не могут быть реализованы, а в действительности могут реализоваться лишь неравенства $-1 < u_3 < u_0$. Этот факт подтверждается также результатами вышеприведенной леммы (см. неравенства для области 4 в формулировке леммы, а также результаты, приведенные в Замечании 1 к лемме). Можно, наконец, и непосредственно доказать следующее утверждение.

Утверждение. Если $u_0 > -1$, то обязательно выполнено неравенство $u_0 > u_3$, где $u_3 \in (-1, +1)$ — меньший корень уравнения $f(u) = 0$.

Действительно, положим $u_0 = -1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малая величина. Тогда имеем $af(-1) = -b^2\omega_\zeta^2\varepsilon^2 < 0$, $af(-1 + \varepsilon) = 2\varepsilon(\alpha + a) + O(\varepsilon^2) > 0$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$, с учетом того, что

$$\alpha + a = a(1 + \cos\theta(0)) + \dot{\psi}^2(0)\sin^2\theta(0) + \dot{\theta}^2(0) > \dot{\theta}^2(0) > 0$$

Следовательно, корень u_3 уравнения $f(u) = 0$ находится в интервале $(-1, -1 + \varepsilon)$, и, значит, выполнено неравенство $-1 < u_3 < u_0 = -1 + \varepsilon$. Далее постепенно увеличиваем ε и пользуемся тем известным фактом, что равенство $u_0 = u_3$ невозможно (см., напр., [11], но, кстати, равенство $u_0 = u_2$ возможно). Тогда из свойства непрерывности следует, что $u_0 > u_3$ при всех допустимых $\varepsilon > 0$. Утверждение доказано.

Замечание 4. Неравенство $u_0 = K / (C\omega_\zeta) < -1$ для части 3) теоремы 1 может быть реализовано при любом $\omega_\zeta > 0$, за счет выбора соответствующего K (константа интеграла кинетического момента тела относительно вертикальной оси Oz). Таким образом, установлено, что при $u_0 < -1$ приращение угла прецессии за период имеет знак, противоположный знаку ω_ζ , за счет допустимого выбора соответствующих начальных условий для других компонентов вектора угловой скорости ω , то есть величин $\omega_\zeta(0)$, $\omega_\eta(0)$. Более подробное выбор начальных условий волчка при заданных корнях гироскопической функции приведен ниже, в разд. *Приложение*.

5. Некорректные объяснения Валле Пуссена в его учебнике [12] о “попутной” прецессии волчка Лагранжа. В учебнике [12] содержатся некорректные (на наш взгляд) качественные объяснения о прецессии волчка Лагранжа в попутном направлении. Действительно, автор цитируемого учебника приписывает повороту конца вектора кинетического момента волчка попутному действию момента силы тяжести относительно точки подвеса волчка (теорема Резаля). На основании этого делается вывод о попутной же прецессии также и оси динамической симметрии волчка. Однако если начальные условия для волчка в неподвижной системе координат таковы, что ось динамической симметрии изначально поворачивается в попятном направлении (начальная угловая скорость прецессии $\dot{\psi}(0)$ отрицательна), то направление момента силы тяжести (в неподвижной системе координат) меняется, и результирующий поворот вектора кинетического момента может происходить также и в попятном направлении. Правильные качественные и количественные выводы дают уравнения Эйлера, которые, по сути, корректно записывают теорему Резаля в подвижной системе координат, связанной жестко с волчком. Как показано в настоящей статье, для обоснования среднего направления прецессии приходится преодолевать некоторые аналитические трудности, которые следуют из интегралов точных динамических уравнений Эйлера.

Закключение. В работе для произвольных невырожденных движений волчка Лагранжа получены следующие результаты.

Даны доказательства формул (4.13)–(4.15) (в элементарных функциях) для гарантированных оценок снизу и сверху средней угловой скорости прецессии, не использующие эллиптические функции и методы теории функций комплексного переменного. Эти оценки выражены через вещественные корни кубического уравнения, коэффициенты которого определяются параметрами волчка и начальными условиями задачи.

Из полученных оценок следует известный результат Адамара о совпадении (в некоторых случаях) знаков средней угловой скорости прецессии и проекции угловой скорости волчка на ось динамической симметрии.

Получены необходимые и достаточные условия (4.27), которым должны удовлетворять начальные данные задачи и параметры волчка, чтобы имела место “попятная”

прецессия волчка при положительной его закрутке вокруг оси динамической симметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisel. New York: E.A. Johnson Repr. Ccorp., 1965. 966 p.
2. Розенблат Г.М. Об оценках средней угловой скорости прецессии волчка Лагранжа // Докл. РАН. 2019. Т. 485. № 2. С. 176–181.
3. Журавлёв В.Ф. К вопросу об оценках эффекта Магнуса // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 3. С. 541–543.
4. Журавлёв В.Ф., Розенблат Г.М. Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике. М.: ЛЕНАНД, 2017. 240 с.
5. Yehia H.M. On the relation between the first and second moments of distributions // J. Phys. A: Math.&General. V. 35. 2002. № 30. P. 6505–6508.
6. Scarpello G.M., Ritelli D. Motions about a fixed point by hypergeometric functions: new non-complex analytical solutions and integration of the herpolhode. // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2018. V. 130. Art. № 42. DOI: 10. 1007/s10569-018-9837-5
7. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
8. Kohn W. Contour integration in the theory of spherical pendulum and the heavy symmetrical top. // Trans. Amer. Math. Soc. 1946. V. 59. pp. 107–131.
9. Hadamard J. Sur la precession dans le mouvement d'un corps pesant de revolution fixe par un point de son axe. // Bul l. des Sci. Math. 1895. V. 19. P. 228–230.
10. Мак-Миллан В.Д. Динамика твердого тела. М.; Л.: Изд-во иностр. лит., 1951. 468 с.
11. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с.
12. Валле Пуссен Ш.Ж. Лекции по теоретической механике. Т. 2. М.: ИЛ, 1949. 327 с.
13. Diaz J.B., Metcalf F.T. On a result of Hadamard concerning the sign of precession of a heavy symmetrical top // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 669–670.
14. Diaz J.B., Metcalf F.T. Upper and lower bounds for the apsidal angle in the theory of the heavy symmetrical top // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. V. 16. P. 214–229.
15. Leimanis E. The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point. New York: Springer, 1965. 337 p.
16. Лидов М.Л. Курс лекций по теоретической механике. М.: Физматлит, 2001. 478 с.
17. Четаев Н.Г. Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 368 с.

Приложение. Определим все начальные условия задачи $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$, $\psi(0)$, $\dot{\psi}(0)$, $\phi(0)$, $\dot{\phi}(0)$, которые соответствуют заданным заранее корням u_1 , u_2 , u_3 гироскопической функции $f(u)$, удовлетворяющим условиям

$$-1 < u_3 < u_2 < 1 < u_1 < +\infty$$

Начальное условие $\theta(0) \in (0, \pi)$ выбираем произвольно так, чтобы $\cos \theta(0) \in (u_3, u_2)$. Далее, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях u в равенстве

$$(\alpha / a - u)(1 - u^2) - k(u_0 - u)^2 = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) = f(u), \quad (\text{П.1})$$

где обозначено

$$\begin{aligned} k &= b^2 \omega_\zeta^2 / a > 0, \quad u_0 = \cos \theta(0) + [\psi(0) \sin^2 \theta(0)] / (b \omega_\zeta) \\ \alpha &= a \cos \theta(0) + [\dot{\psi}^2(0) \sin^2 \theta(0) + \dot{\theta}^2] \\ a &= 2Mg\zeta_0 / A \quad (\zeta_0 > 0), \quad b = C / A, \quad \omega_\zeta = \dot{\psi}(0) \cos \theta(0) + \dot{\phi}(0), \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= \alpha / a + k \\ 1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_3 u_2 &= 2u_0 k \\ u_1 u_2 u_3 &= -\alpha / a + k u_0^2 \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Решим систему (П.3) относительно трех неизвестных $\{u_0, k, \alpha / a\}$. Система (П.3) частично решалась ранее [10]. Решение, однако, не было доведено до своего логического конца, т.е., до полного выражения всех начальных условий задачи через заданные три корня гироскопической функции.

Сложив первое и третье уравнения системы (П.3), получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 &= (u_0^2 + 1)k \\ 1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_3 u_2 &= 2u_0 k \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Воспользовавшись обозначениями для q_1, q_2 из (4.8) и легко проверяемыми тождествами

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3) \\ q_1 - q_2 &= 2(1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_3 u_2), \end{aligned}$$

получим из (П.4) уравнения

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 2(u_0^2 + 1)k \\ q_1 - q_2 &= 4u_0 k \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Из (П.5) получаем два решения для u_0 : u_{01}, u_{02} , которые даются формулами из (4.8), и, соответственно, два значения для k , которые даются формулами

$$k_i = \frac{q_1 - q_2}{4u_{0i}}; \quad i = 1, 2 \quad (\text{П.6})$$

Из (П.6), используя обозначение для k из (П.2), получим два значения для начального условия $\omega_\zeta > 0$

$$\omega_{\zeta 1} = \frac{\sqrt{a}}{2b}(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}), \quad \omega_{\zeta 2} = \frac{\sqrt{a}}{2b}|\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}| \quad (\text{П.7})$$

Используя обозначение для u_0 из (П.2) и формулы (П.7), получим следующие два значения для начального условия $\dot{\psi}(0)$

$$\dot{\psi}(0)_{1,2} = \frac{\sqrt{a}}{2\sin^2 \theta(0)} \left[(\sqrt{q_1} \mp \sqrt{q_2}) - (\sqrt{q_1} \pm \sqrt{q_2}) \cos \theta(0) \right] \quad (\text{П.8})$$

Далее, используя (П.7, П.8) и обозначение для ω_ζ из (П.2), получим следующие два значения для начального условия $\dot{\phi}(0)$

$$\dot{\phi}(0)_{1,2} = \omega_{\zeta 1,2} - \dot{\psi}(0)_{1,2} \cos \theta(0) \quad (\text{П.9})$$

В (П.9) $\omega_{\zeta 1,2}, \dot{\psi}(0)_{1,2}$ даются формулами (П. 7), (П. 8).

Нам осталось определить последнее начальное условие $\dot{\theta}(0)$. Чтобы это сделать, воспользуемся, например, третьим уравнением системы (П.3), из которого находим

$$\frac{\alpha}{a} = ku_0^2 - u_1 u_2 u_3 \quad (\text{П.10})$$

Воспользовавшись формулами (П.6) и обозначениями из (П.2), из (П.10) получим

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}(0)^2}{a} + \cos\theta(0) + \frac{1}{4\sin^2\theta(0)} [(\sqrt{q_1} \mp \sqrt{q_2}) - (\sqrt{q_1} \pm \sqrt{q_2})\cos\theta(0)]^2 = \\ = \frac{1}{4}(\sqrt{q_1} \mp \sqrt{q_2})^2 - u_1 u_2 u_3 \end{aligned}$$

Проводя несложные алгебраические выкладки, из последнего соотношения получим

$$\dot{\theta}(0)^2 \sin^2\theta(0) = a(u_1 - \cos\theta(0))(u_2 - \cos\theta(0))(\cos\theta(0) - u_3) > 0$$

Последнее соотношение корректно определяет начальное условие $\dot{\theta}(0)$. Отметим, что начальная угловая скорость нутации $\dot{\theta}(0)$ не зависит от того, какое начальное условие для u_0 мы выбрали (т.е. $u_0 = u_{01}$ или $u_0 = u_{02}$), в отличие от угловых скоростей прецессии и собственного вращения $\dot{\psi}(0)$, $\dot{\phi}(0)$, которые (см. формулы (П. 8, П. 9)) зависят от выбора значения для u_0 .

On Precession of Lagrange's Top

G. M. Rozenblat ^{a, #}

^aMoscow State Automobile and Road Technical University (MADI), Moscow, Russia

[#]e-mail: gr51@mail.ru

The article describes the results obtained for the upper and lower bounds (estimates) for the apsidal angle (precession angle) in the theory of the motion of the heavy symmetrical solid body about fixed point (Lagrange's case) for arbitrary initial conditions and parameters of the body. All regions of initial conditions is divided into two sets. In the first set there is a direct precession of the top, in the second set there is a retrograde precession of the top.

Keywords: Lagrange's top, nutation, precession, guaranteed estimates, rigid body dynamics

REFERENCES

1. Klein F., Sommerfeld A. *Über die Theorie des Kreisel.* N.Y.: E.A. Johnson Reprint Corp., 1965. 966 p.
2. Rozenblat G.M. Estimates of the average angular velocity of the precession of Lagrange's top // Dokl. Phys., 2019, vol. 64, no. 3, pp. 114–119.
3. Zhuravlev V.Ph. К вопросу об оценках эффекта Magnusa // Dokl. AN SSSR, 1976, vol. 226, no. 3, pp. 541–543. (in Russian)
4. Zhuravlev V.Ph., Rozenblat G.M. *Paradoxes, Counterexamples and Mistakes in Mechanics.* Moscow: Lenand, 2017. 240 p. (in Russian)
5. Yehia H.M. On the Relation between the First and Second Moments of Distributions // J. Phys. A: Math.&General, 2002, vol. 35, no. 30, pp. 6505–6508.
6. Scarpello G.M., Ritelli D. Motions about a fixed point by hypergeometric functions: new non-complex analytical solutions and integration of the herpolhode // Celest. Mech. Dyn. Astr., 2018, vol. 130, art. no. 42. DOI: 10.1007/s10569-018-9837-5
7. Arhangelsky Yu.A. *Analytical Dynamics of Rigid Body.* Moscow: Nauka, 1977, 328 p. (in Russian)
8. Kohn W. Contour integration in the theory of spherical pendulum and the heavy symmetrical top // Trans. Amer. Math. Soc., 1946, vol. 59, pp. 107–131.

9. *Hadamard J.* Sur la precession dans le mouvement d'un corps pesant de revolution fixe par un point de son axe // *Bull. des Sci. Math.*, 1895, vol. 19, pp. 228–230.
10. *MacMillan W.D.* Dynamics of Rigid Bodies. N.Y.; London: 1936. 478 p.
11. *Golubev Yu.Ph.* Fundamentals of Theoretical Mechanics. Moscow: MSU Publ., 2000. 719 p. (in Russian)
12. *De la Vallee Poussin Ch.-J.* Lecons de Mecanique Analytique. 1925. T. 2, 328 p.
13. *Diaz J.B., Metcalf F.T.* On a result of Hadamard concerning the sign of precession of a heavy symmetrical top // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1962, vol. 13, pp. 669–670.
14. *Diaz J.B., Metcalf F.T.* Upper and lower bounds for the apsidal angle in the theory of the heavy symmetrical top // *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1964, vol. 16, pp. 214–229.
15. *Leimanis E.* The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point. Berlin: Springer, 1965. 337 p.
16. *Lidov M.L.* Course of Lectures on Theoretical Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2001. 478 p. (in Russian)
17. *Chetaev N.G.* Theoretical Mechanics. Moscow: Nauka, 1987. 368 p. (in Russian)

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, УПРАВЛЯЕМОГО ПОСРЕДСТВОМ ВНУТРЕННЕЙ МАССЫ, В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

© 2024 г. Т. В. Глазков^{1,*}, Ф. Л. Черноусько^{1,**}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: t.glazkov@bk.ru

**e-mail: chern@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 27.12.2023 г.

После доработки 15.01.2024 г.

Принята к публикации 20.01.2024 г.

Рассматривается поступательное движение тела, управляемое при помощи периодических перемещений внутренней массы, в среде с квадратичным сопротивлением. В зависимости от наложенных ограничений оценена средняя скорость движения и найдены условия, при которых достигается наибольшая средняя скорость.

Ключевые слова: мобильные роботы, нелинейные системы, квадратичное сопротивление, оптимизация

DOI: 10.31857/S0032823524010046 EDN: YUQAMC

1. Введение. Мобильные роботы, управляемые посредством подвижных внутренних масс, в последнее время привлекают значительное внимание. Такие системы, называемые капсульными роботами или вибророботами, не имеют внешних подвижных элементов, а их корпуса могут быть гладкими и герметичными. Миниатюрные капсульные роботы нашли применение в медицине для диагностики и доставки медикаментов. Такие роботы могут использоваться для перемещения в различных средах.

Одной из первых работ по этой тематике была статья [1]. Периодические движения виброробота в среде с квадратичным сопротивлением изучались в работах [2, 3]. Динамика мобильных систем с внутренними массами в средах с сопротивлением, включая оптимизацию таких движений, исследовалась в статьях [4–8].

В данной работе, продолжающей исследования [9–11], рассматривается поступательное движение твердого тела, управляемое посредством внутренней подвижной массы. Предполагается, что внутренняя масса перемещается относительно тела с кусочно-постоянной скоростью. Движение тела происходит во внешней среде при сопротивлении, пропорциональном квадрату скорости тела и зависящем от направления движения. Построены периодические движения системы, и оценена средняя скорость ее перемещения. В зависимости от наложенных ограничений, определена наибольшая средняя скорость перемещения.

2. Управляемая система. Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух твердых тел: корпуса массы M и внутреннего подвижного тела массы m (рис. 1). Внутреннее тело снабжено актюатором и движется в полости внутри тела. Оба тела

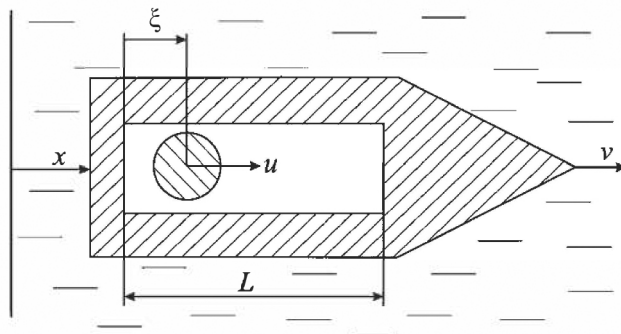


Рис. 1. Механическая система.

движутся прямолинейно и поступательно. Обозначим через x смещение корпуса, а через ξ смещение внутренней массы относительно корпуса. Через v обозначим скорость корпуса, а через u и w — скорость и ускорение внутренней массы относительно корпуса соответственно. Тогда кинематические соотношения можно представить в виде:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{\xi} = u, \quad \dot{u} = w \quad (2.1)$$

Обозначим через F силу, с которой корпус действует на внутреннюю массу, а через R силу сопротивления среды, действующую на корпус и пропорциональную квадрату его скорости v . Предполагается, что, кроме сил F и R , нет других сил, действующих на систему. Уравнения движения системы имеют вид:

$$M\dot{v} = R - F, \quad m(\dot{v} + w) = F \quad (2.2)$$

Введем обозначения

$$r = \frac{R}{M + m}, \quad \mu = \frac{m}{M + m} \quad (2.3)$$

Складывая уравнения (2.2) и принимая во внимание обозначения (2.3), получим уравнение

$$\dot{v} = -\mu w + r(v) \quad (2.4)$$

Нормированная сила сопротивления $r(v)$ равна

$$r(v) = \begin{cases} -c_+ v^2 & \text{при } v \geq 0 \\ c_- v^2 & \text{при } v < 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

где c_+ и c_- — коэффициенты сопротивления при движении корпуса вперед (вдоль оси x) и назад (против оси x) соответственно.

Заметим, что коэффициенты c_+ и c_- имеют размерность, обратную длине, и могут быть представлены в виде

$$c_+ = L_+^{-1}, \quad c_- = L_-^{-1} \quad (2.6)$$

Здесь величины L_+ и L_- характеризуют расстояния, на которых скорость тела уменьшается в e раз при движении тела по инерции вперед и назад соответственно [11]. Предпочитая движение вперед и выбирая соответствующую обтекаемую форму тела, имеем $c_+ < c_-$ и $L_+ > L_-$. Введем безразмерный параметр

$$\sigma = c_+/c_- = L_-/L_+ < 1 \quad (2.7)$$

3. Периодическое движение. Рассматриваем простейшее периодическое движение системы с периодом T , при котором относительная скорость $u(t)$ внутренней массы m кусочно-постоянна и задается соотношениями

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1 > 0; & t \in (0, t_1) \\ u(t) &= -u_2 < 0; & t \in (t_1, t_1 + t_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь u_1 и u_2 — положительные постоянные, а t_1 и t_2 — длительности интервалов времени движения массы m вперед и назад соответственно. В начале и в конце периода (при $t = 0$ и $t = T$) внутренняя масса находится на левом конце полости (при этом $\xi = 0$), а в момент $t = t_1$ — на ее правом конце, при $\xi = L$, где L — длина полости. Зависимости $u(t)$ и $\xi(t)$ изображены на рис. 2.

Справедливы соотношения

$$u_1 t_1 = u_2 t_2 = L, \quad t_1 + t_2 = T, \quad (3.2)$$

откуда вытекает равенство

$$L(u_1 + u_2) = T u_1 u_2 \quad (3.3)$$

Сделанное допущение (3.1) представляет собой упрощение реальной ситуации и предполагает ударное взаимодействие тел при крайних положениях внутренней массы на концах полости. Однако при этом допущении получаем замкнутые расчетные формулы.

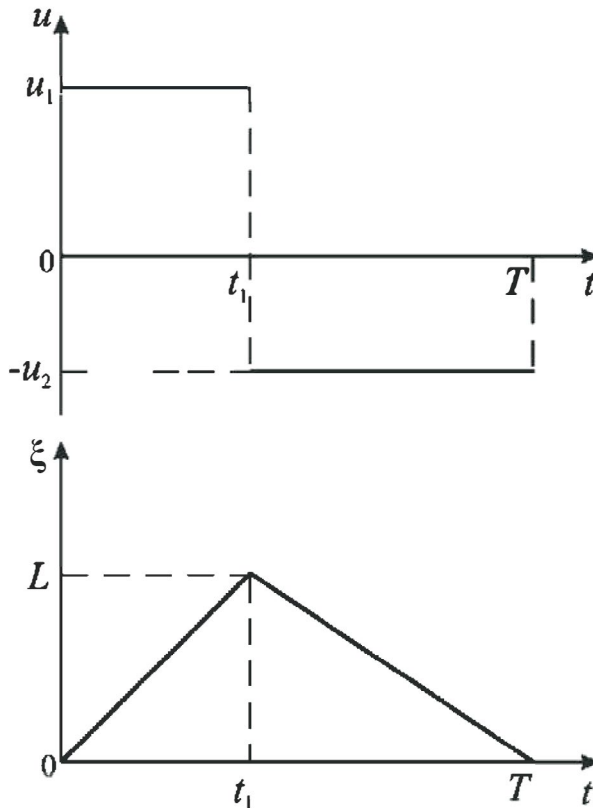


Рис. 2. Движение внутренней массы.

Относительное ускорение $w(t)$ внутреннего тела в силу соотношений (3.1) представляется как сумма дельта-функций

$$w(t) = (u_1 + u_2)[\delta(t) - \delta(t - t_1)] \quad (3.4)$$

Из уравнений (2.4) и (3.4) вытекает, что скорость корпуса $v(t)$ испытывает в моменты $t = 0$ и $t = t_1$ разнонаправленные скачки, равные по величине $\mu(u_1 + u_2)$.

Будем для определенности рассматривать периодическую зависимость $v(t)$ от момента непосредственно перед $t = 0$ до момента непосредственно перед $t = T$ и введем обозначения

$$\begin{aligned} v_0 &= v(-0), \quad v_1 = v(+0), \quad v_2 = v(t_1 - 0) \\ v_3 &= v(t_1 + 0), \quad v_4 = v(T - 0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тогда условия на скачках примут вид

$$v_1 = v_0 - U, \quad v_3 = v_2 + U, \quad (3.6)$$

где введено обозначение

$$U = \mu(u_1 + u_2) \quad (3.7)$$

Ниже будет построено решение, при котором скорость $v(t)$ изменяется по схеме, изображенной на рис. 3, при этом

$$\begin{aligned} v(t) &< 0 \text{ при } t \in (0, t_1); \quad v(t) > 0 \text{ при } t \in (t_1, T) \\ 0 &< v_0 < U, \quad v_1 < v_2 < 0, \quad v_3 > v_4 > 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

4. Вычисление скорости. Путем интегрирования уравнения (2.4) с учетом равенств (3.4) — (3.8) определим скорость $v(t)$ на интервале $(0, T)$.

На интервале $(0, t_1)$ имеем

$$\dot{v} = c_- v^2$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $v(+0) = v_1$ из (3.5), получим

$$v(t) = \frac{v_1}{1 - c_- v_1 t}; \quad t \in (0, t_1) \quad (4.1)$$

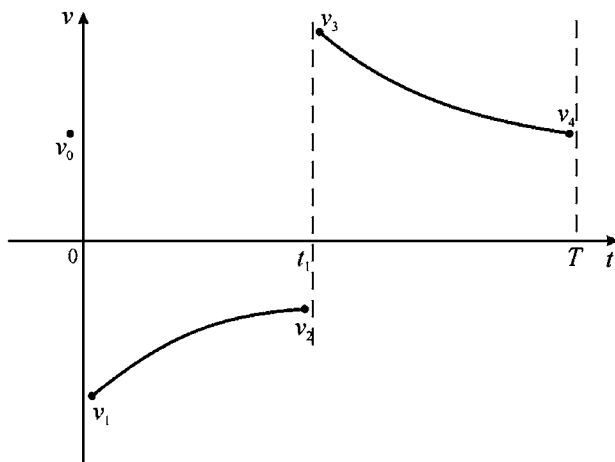


Рис. 3. Скорость корпуса.

Подставляя $t = t_1$ в соотношение (4.1) и используя (3.5), найдем

$$v_2 = \frac{v_1}{1 - c_- v_1 t_1} \quad (4.2)$$

На интервале (t_1, T) имеем уравнение

$$\dot{v} = -c_+ v^2$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $v(t_1 + 0) = v_3$ из (3.5), находим

$$v(t) = \frac{v_3}{1 + c_+ v_3(t - t_1)}; \quad t \in (t_1, T) \quad (4.3)$$

Подставим $t = t_1 + t_2$ в соотношение (4.3) и примем во внимание равенство $v_4 = v(T-0)$ из (3.5). Получим

$$v_4 = \frac{v_3}{1 + c_+ v_3 t_2} \quad (4.4)$$

Введем обозначения

$$a_1 = c_- t_1, \quad a_2 = c_+ t_2 \quad (4.5)$$

и определим последовательно v_i , $i = \overline{0, 4}$, используя равенства (3.6), (4.2) и (4.4). Получим

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 - U \\ v_2 &= \frac{v_0 - U}{1 - a_1(v_0 - U)} \\ v_3 &= \frac{v_0(1 - a_1 U) + a_1 U^2}{1 - a_1(v_0 - U)} \\ v_4 &= \frac{v_0(1 - a_1 U) + a_1 U^2}{v_0(a_2 - a_1 - a_1 a_2 U) + 1 + a_1 U + a_1 a_2 U^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Условие периодичности скорости $v(t)$ выражается равенством $v_4 = v_0$, которое в силу последнего равенства (4.6) приводит к квадратному уравнению для v_0 :

$$(a_1 - a_2 + a_1 a_2 U) v_0^2 - a_1 U(2 + a_2 U) v_0 + a_1 U^2 = 0 \quad (4.7)$$

Следуя работе [11], введем безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1}, \quad \beta = a_2 U, \quad V = \frac{v_0}{U} \quad (4.8)$$

и с их помощью выразим корни квадратного уравнения (4.7) в виде

$$V_{\pm} = \frac{2 + \beta \pm \sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2(1 - \alpha + \beta)} \quad (4.9)$$

Из первого неравенства (3.8) следует, что искомое значение безразмерной скорости V должно удовлетворять неравенствам $0 < V < 1$. Как показано в [11], только решение V_- из (4.9) удовлетворяет этим условиям при любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Итак, искомое периодическое решение для скорости $v(t)$ полностью определено соотношениями (4.1), (4.3) и формулами (4.5), (4.6) и (4.8). Безразмерная начальная скорость V задана соотношением из (4.9) в виде

$$V = \frac{2 + \beta - \sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2(1 - \alpha + \beta)}; \quad \beta \neq \alpha - 1 \quad (4.10)$$

В случае $\beta = \alpha - 1$ в соотношении (4.10) имеет место неопределенность вида $0/0$. Для разрешения неопределенности положим $\beta = \alpha - 1 + \varepsilon$ в равенстве (4.10) и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получим

$$V = (\alpha + 1)^{-1} < 1 \quad \text{при} \quad \beta = \alpha - 1$$

Таким образом, в особом случае $\beta = \alpha - 1$ также выполняются условия $0 < V < 1$.

5. Вычисление перемещения. Определим полное перемещение системы $x(T)$ за период движения T . Интегрируя скорость $v(t)$, заданную равенствами (4.1) и (4.3) на соответствующих интервалах $(0, t_1)$ и (t_1, T) , получим

$$x(T) = -\frac{1}{c_-} \ln(1 - a_1 v_1) + \frac{1}{c_+} \ln(1 + a_2 v_3) \quad (5.1)$$

Здесь использованы обозначения (4.5). В полученное равенство (5.1) подставим соотношения (4.6) для v_1 и v_3 и выразим параметры a_1, a_2 и v_0 через α, β и V при помощи равенств (4.8). Затем в полученное выражение для $x(T)$ подставим равенство (4.10) для V . В результате получим

$$x(T) = -\frac{1}{c_-} f_1(\alpha, \beta) + \frac{1}{c_+} f_2(\alpha, \beta), \quad (5.2)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} f_1(\alpha, \beta) &= \ln \frac{2\alpha(1 - \alpha) + \beta^2 + \beta\sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2\alpha(1 - \alpha + \beta)} \\ f_2(\alpha, \beta) &= \ln \frac{(2\alpha + \beta^2)(1 - \alpha) + \beta^3 + 2\alpha\beta + \beta(1 - \alpha + \beta)\sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2\alpha(1 - \alpha) + \beta^2 + \beta\sqrt{4\alpha + \beta^2}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Введем безразмерный параметр

$$\lambda = L/L_+, \quad (5.4)$$

равный отношению длины полости внутри корпуса к характерному расстоянию, проходимому системой по инерции в сопротивляющейся среде. С учетом соотношений (2.6), (2.7) и (5.4) равенство (5.2) примет вид

$$x(T) = \frac{L}{\lambda} F(\alpha, \beta, \sigma), \quad (5.5)$$

где введено обозначение

$$F(\alpha, \beta, \sigma) = -\sigma f_1(\alpha, \beta) + f_2(\alpha, \beta) \quad (5.6)$$

Средняя скорость движения определяется формулой

$$\bar{v} = \frac{x(T)}{T} = \frac{L}{\lambda T} F(\alpha, \beta, \sigma) \quad (5.7)$$

6. Ограничения и параметры. Естественно считать скорость внутренней массы относительно корпуса ограниченной некоторой постоянной величиной u_0 :

$$0 \leq u_1 \leq u_0, \quad 0 \leq u_2 \leq u_0 \quad (6.1)$$

Введем безразмерные скорости z_1 и z_2 соотношениями

$$z_1 = u_1/u_0, \quad z_2 = u_2/u_0 \quad (6.2)$$

Тогда ограничения (6.1) примут вид

$$0 \leq z_1 \leq 1, \quad 0 \leq z_2 \leq 1 \quad (6.3)$$

Из равенства (3.3) вытекает соотношение

$$z_1 + z_2 = (u_0 T/L) z_1 z_2 \quad (6.4)$$

Выразим параметры α и β , введенные соотношениями (4.8), через z_1 и z_2 , используя равенства (4.5), (2.7), (3.2), (3.7) и (5.4):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a_2}{a_1} = \frac{c_+ t_2}{c_- t_1} = \sigma \frac{u_1}{u_2} = \sigma \frac{z_1}{z_2} \\ \beta &= a_2 U = \frac{c_+ L \mu}{u_2} (u_1 + u_2) = \mu \lambda \frac{z_1 + z_2}{z_2} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Заметим, что параметры α и β , определяемые соотношениями (6.5), и зависящие от них функции f_1 и f_2 , заданные формулами (5.3), зависят от следующих безразмерных параметров:

- 1) конструктивных параметров σ , μ и λ ;
 - 2) управляющих параметров z_1 и z_2 , определяющих движение внутренней массы.
- При этом в соотношениях (6.5) параметры μ и λ входят только в виде комбинации

$$\mu_1 = \mu \lambda, \quad (6.6)$$

поэтому можно считать, что есть только два конструктивных параметра: σ и μ_1 . Величины параметров σ и λ зависят от сил сопротивления и тем самым от формы тела. Чем меньше эти параметры, тем более эффективным будет рассматриваемый способ перемещения тела. Можно полагать, что эти параметры существенно меньше единицы.

Что касается параметра μ , введенного в (2.3), то обычно он предполагается малым, так как внутренняя масса рассматривается как вспомогательная. Однако внутренняя масса может использоваться для размещения некоторых полезных грузов, например источников энергии. Поэтому представляет интерес рассмотреть различные значения μ и тем самым не только малые μ_1 .

Управляющие параметры z_1 и z_2 целесообразно выбрать с целью оптимизации средней скорости перемещения системы. Ниже задача оптимизации скорости $\bar{v}$ из (5.7) по параметрам z_1 и z_2 при ограничениях (6.3) рассматривается в двух случаях: при фиксированном и нефиксированном периоде движения T .

7. Случай фиксированного T . Введем еще безразмерный параметр

$$k = u_0 T/L, \quad (7.1)$$

который следует добавить к конструктивным параметрам σ и μ_1 в случае фиксированного T . Из равенства (6.4) получим

$$z_2 = \frac{z_1}{k z_1 - 1} \quad (7.2)$$

Из соотношений (6.4) и (7.1) вытекает неравенство

$$k = z_1^{-1} + z_2^{-1} \geq 2 \quad (7.3)$$

Подставляя соотношение (7.2) в равенства (6.5), получим

$$\alpha = \sigma(kz_1 - 1), \quad \beta = \mu_1 kz_1 \quad (7.4)$$

Таким образом, выражение (5.5) и средняя скорость (5.7) зависят, помимо конструктивных параметров, от одной переменной $z_1 \in (0,1)$, подлежащей выбору. Анализ показал [11], что в случае малого μ (или μ_1) максимум средней скорости достигается при $z_1 = 1$.

Как показали численные расчеты при различных $\sigma < 1$, $k \geq 2$ и $\mu_1 < 1$, искомый максимум скорости (5.7) по $z_1 \in (0,1)$ при фиксированном T всегда достигается при $z_1 = 1$. Следовательно, оптимальные значения параметров z_1 и z_2 в силу (7.2) равны

$$z_1 = 1, \quad z_2 = (k - 1)^{-1} \leq 1 \quad (7.5)$$

Итак, максимальная средняя скорость поступательного движения реализуется, если внутренняя масса движется с наибольшей допустимой скоростью относительно корпуса вперед, как бы отталкиваясь от среды. Этот вывод представляется естественным.

В силу равенств (7.4) имеем при $z_1 = 1$:

$$\alpha = \sigma(k - 1), \quad \beta = \mu_1 k, \quad \mu_1 = \mu \lambda \quad (7.6)$$

Для вычисления наибольшей средней скорости $\bar{v}$ при малом μ_1 подставим равенства (7.6) в соотношения (5.3) и разложим функции f_1 и f_2 в ряды по $\mu_1 \ll 1$. Ограничиваясь первым приближением по μ_1 , в результате по формулам (5.5) — (5.7) получим [11]:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{kL\mu(\sqrt{k-1} - \sqrt{\sigma})}{T\sqrt{k-1}\left[1 + \sqrt{\sigma(k-1)}\right]} = \\ &= \frac{\mu u_0(\sqrt{k-1} - \sqrt{\sigma})}{\sqrt{k-1}\left[1 + \sqrt{\sigma(k-1)}\right]} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Расчет максимальной скорости $\bar{v}$ при различных значениях параметров проводился численно. При помощи формул (7.1) и (7.6) равенство (5.7) можно представить в виде

$$\bar{v} = \frac{LF}{\lambda T} = \frac{u_0}{k\lambda} F[\sigma(k-1), \mu_1 k, \sigma] = \frac{u_0}{\lambda} \Phi, \quad (7.8)$$

где введено обозначение

$$\Phi(\sigma, k, \mu_1) = k^{-1} F[\sigma(k-1), \mu_1 k, \sigma] \quad (7.9)$$

Значения величины Φ из (7.9) при различных значениях параметров σ , k и μ_1 показаны на рис. 4–6. Исходя из зависимостей, представленных на этих рисунках, можно сделать следующие выводы.

При любых допустимых параметрах k и μ_1 значение максимальной скорости $\bar{v}$ монотонно убывает с ростом параметра σ . С механической точки зрения это соответствует тому факту, что при большем коэффициенте сопротивления движению вперед c_+ и меньшем коэффициенте сопротивления движению назад c_- максимальная средняя скорость движения корпуса за период будет меньше.

Как видно из рис. 4 и 5, при любых допустимых параметрах σ и k значение максимальной скорости $\bar{v}$ монотонно возрастает с ростом параметра μ_1 .

Как видно из рис. 6, графики зависимостей $\Phi(\sigma)$, соответствующие разным значениям k , пересекаются, что, в свою очередь, говорит о немонотонном характере

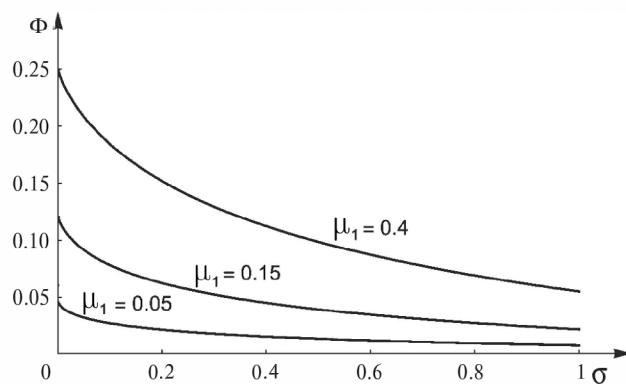


Рис. 4. Зависимость Φ от параметра σ при $k = 3.5$.

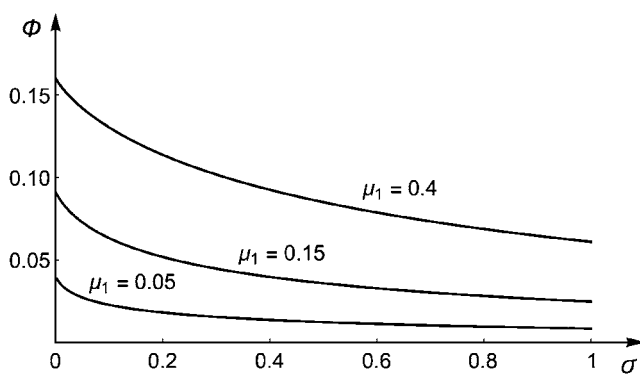


Рис. 5. Зависимость Φ от параметра σ при $k = 10$.

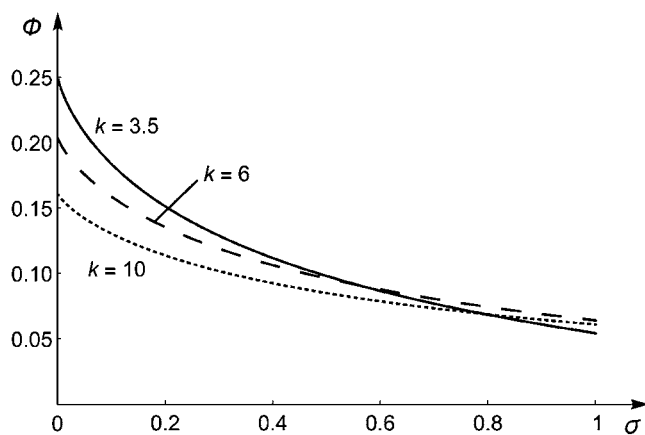


Рис. 6. Зависимость Φ от параметра σ при $\mu_1 = 0.4$.

зависимости величины максимальной скорости $\bar{v}$ от k , при фиксированных значениях параметров σ и μ_1 .

8. Случай нефиксированного T . В этом случае следует выбирать параметры z_1 и z_2 , удовлетворяющие ограничениям (6.3) и доставляющие максимум средней скорости (5.7). Введем новый безразмерный параметр

$$\eta = z_1/z_2 \quad (8.1)$$

и запишем равенства (6.5) в виде

$$\alpha = \sigma\eta, \quad \beta = \mu_1(\eta + 1) \quad (8.2)$$

Равенство (6.4) с учетом обозначений (6.2) и (8.1) примет вид

$$T = \frac{L(\eta + 1)}{u_0 z_1} \quad (8.3)$$

Теперь выражение (5.7), принимая во внимание соотношения (5.6) и (8.3), можно представить в форме

$$\bar{v} = \frac{u_0 z_1 (-\sigma f_1 + f_2)}{\lambda(\eta + 1)} \quad (8.4)$$

Функции f_1 и f_2 в силу соотношений (8.2) зависят от переменной η . Поэтому максимум скорости (8.4) по z_1 и z_2 сводится к независимой максимизации ее по переменным z_1 и η . Очевидно, что максимум выражения (8.4) по z_1 при условиях (6.3) достигается при $z_1 = 1$. Согласно равенствам (8.2), выражение (8.4) для $\bar{v}$ примет вид:

$$\bar{v} = \frac{u_0}{\lambda} Q(\eta), \quad (8.5)$$

где введено обозначение

$$Q(\eta) = \frac{-\sigma f_1[\sigma\eta, \mu_1(\eta + 1)] + f_2[\sigma\eta, \mu_1(\eta + 1)]}{\eta + 1} \quad (8.6)$$

Наибольшая средняя скорость $\bar{v}$ из (8.5) определяется из условия

$$\bar{v}_{\max} = \frac{u_0}{\lambda} \max Q(\eta); \quad \eta \geq 1, \quad (8.7)$$

где функция $Q(\eta)$ задана соотношением (8.6), а максимум следует искать по η при $\eta \geq 1$. Искомое оптимальное значение параметра $\eta = \eta_*$ определяется условием

$$\eta_* = \arg \max Q(\eta); \quad \eta \geq 1 \quad (8.8)$$

Заметим, что соответствующее оптимальное значение периода в случае, когда этот период не фиксирован, определяется из условия (8.3) в виде

$$T = \frac{L(\eta_* + 1)}{u_0} \quad (8.9)$$

Рассмотрим сначала случай малого μ_1 . Разложим функции f_1 и f_2 в (8.6) в ряды по малому μ_1 и получим в первом приближении

$$Q(\eta) = \frac{\mu_1(\sqrt{\eta} - \sqrt{\sigma})}{\sqrt{\eta}(1 + \sqrt{\sigma\eta})} \quad (8.10)$$

Максимум функции $Q(\eta)$ из (8.10) по $\eta \geq 1$ достигается при

$$\eta = \eta_* = \left(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma + 1} \right)^2 \quad (8.11)$$

и равен

$$Q(\eta_*) = \frac{\mu_1}{\left(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma + 1} \right)^2} = \frac{\mu\lambda}{\eta_*} \quad (8.12)$$

Оптимальные значения переменных z_1 и z_2 , согласно равенствам (8.1) и (8.11), равны

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \eta_*^{-1} = \left(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma + 1} \right)^{-2} < 1 \quad (8.13)$$

Максимальная средняя скорость определяется соотношениями (8.7) и (8.12) в виде

$$\bar{v} = u_0 \mu \left(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma + 1} \right)^{-2}$$

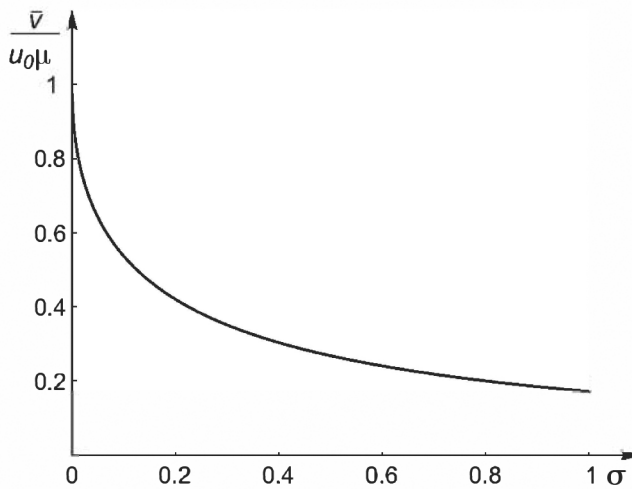


Рис. 7. Зависимость нормированной максимальной скорости $\bar{v}$ от параметра σ при $\mu \ll 1$.

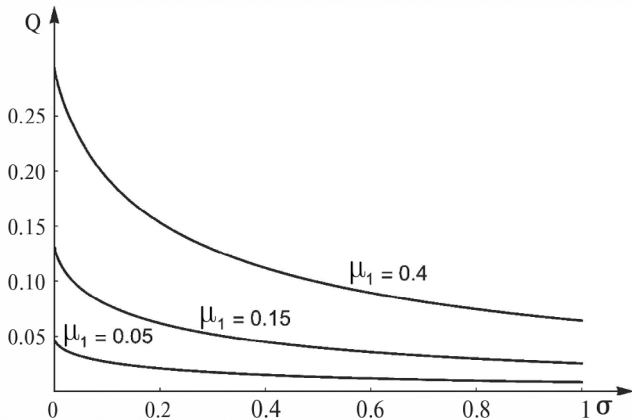


Рис. 8. Зависимость величины Q от параметра σ .

Зависимость нормированной максимальной скорости $\bar{v}$ от параметра σ показана на рис. 7.

В общем случае немало μ_1 максимум функции $Q(\eta)$ из (8.6) определяется численно. Графики зависимости величины Q от безразмерного параметра σ при различных μ_1 представлены на рис. 8. Из графика видно, что величина Q и, следовательно, максимальная скорость $\bar{v}$ монотонно убывают с ростом параметра σ , а с ростом параметра μ_1 монотонно возрастают.

9. Предельный случай $\sigma = 0$. Из численных расчетов, проиллюстрированных на рис. 4–8, следует, что величина максимальной средней скорости $\bar{v}$ растет с убыванием параметра σ . Таким образом, при более обтекаемой передней части корпуса и менее обтекаемой задней части расстояние, пройденное корпусом за период, становится больше (в пределе $L_- \rightarrow 0$ и $c_- \rightarrow \infty$). Это означает, что движение корпуса назад (влево) практически не происходит в силу особой формы корпуса. Тогда в случае фиксированного и нефиксированного периода движения в силу формул (7.6) и (8.2) имеем $\alpha = 0$. Учитывая это равенство, выражение для средней скорости (5.7) с учетом равенств (5.5), (5.6) и (5.3) принимает следующий вид

$$\bar{v} = \frac{x(T)}{T} = \frac{L}{\lambda T} \left[-\sigma \ln \frac{\beta^2}{\alpha(1+\beta)} + \ln(1+\beta) \right]$$

В первом слагаемом этого выражения при $\sigma = 0$, $\alpha = 0$ имеет место неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Для определения максимальной средней скорости при $\sigma = 0$ рассмотрим пределы функций (7.8) и (8.7) при $\sigma \rightarrow 0$ для случаев фиксированного и нефиксированного периода движения соответственно.

В случае фиксированного периода движения, учитывая формулы (5.3) и (5.6), вычисляя предел функции (7.8) при $\sigma \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{v}_{\max} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{u_0}{\lambda k} F[\sigma(k-1), \mu_1 k, \sigma] = \\ &= \frac{u_0}{\lambda k} \ln(1 + \mu_1 k) \end{aligned} \quad (9.1)$$

Отметим, что значение предела убывает с ростом параметра $k \geq 2$.

Теперь рассмотрим случай нефиксированного периода движения. Учитывая обозначение (8.6), найдем сначала предел функции Q при $\sigma \rightarrow 0$, а затем вычислим максимальную среднюю скорость $\bar{v}$ согласно (8.7).

В результате получим

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{v} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{u_0}{\lambda(\eta+1)} Q[\sigma\eta, \mu_1(\eta+1), \sigma] = \\ &= \frac{u_0}{\lambda(\eta+1)} \ln[1 + \mu_1(\eta+1)] \end{aligned} \quad (9.2)$$

Нетрудно проверить, что значение предела (9.2) убывает с ростом параметра $\eta \geq 1$. Таким образом, максимум средней скорости при $\sigma \rightarrow 0$ достигается при $\eta_* = 1$ и равен

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{v}_{\max} = \frac{u_0}{2\lambda} \ln(1 + 2\mu_1) \quad (9.3)$$

Значения пределов (9.1) и (9.3) в случае фиксированного и нефиксированного периода движения совпадают при $k = 2$.

10. Численные примеры. В табл. 1 и 2 приведены значения максимальной средней скорости $\bar{v}$ в зависимости от конструктивных параметров в случае фиксированного и нефиксированного периода движения соответственно. Для всех расчетов, представленных в табл. 1 и 2, значения параметров L (длина полости), m (масса внутреннего подвижного тела) и M (масса корпуса) брались равными $L = 1 \text{ м}$, $m = 1 \text{ кг}$, $M = 9 \text{ кг}$. Тогда в силу (2.3) и (7.1) безразмерные параметры μ и k равны: $\mu = 0.1$ и $k = 3$.

Отметим, что в случае нефиксированного T период движения меняется в зависимости от выбранных параметров, указанных в табл. 2, в диапазоне от 2.4 с до 4.73 с.

Таблица 1. Значения максимальной скорости $\bar{v}$ в м/с в случае фиксированного T ($u_0 = 1 \text{ м/с}$, $T = 3 \text{ с}$)

L_+ , м	λ	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.25$	$\sigma = 0.5$
1	1	0.0628	0.0530	0.0376	0.0249
5	0.2	0.0639	0.0536	0.0379	0.0250

Таблица 2. Значения максимальной скорости $\bar{v}$ в м/с в случае нефиксированного T ($u_0 = 1 \text{ м/с}$)

L_+ , м	λ	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.25$	$\sigma = 0.5$
1	1	0.0633	0.0531	0.0379	0.0266
5	0.2	0.0641	0.0536	0.0382	0.0268

Закключение. Построено периодическое прямолинейное движение механической системы, управляемой посредством внутренней массы, в среде с квадратичным сопротивлением при различных коэффициентах сопротивления при движении в положительном и отрицательном направлении. Для случаев фиксированного и нефиксированного периода движения найдено значение максимальной средней скорости за период и исследовано ее поведение в зависимости от конструктивных параметров. Полученные результаты могут представлять интерес для управления аппаратами, перемещающимися в жидкости.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00128 <https://rscf.ru/project/23-11-00128/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагаев Р.Ф., Тамм Е.А. Вибрационное перемещение в среде с квадратичным сопротивлением движению // Машиновед. 1980. № 4. С. 3–8.
2. Герасимов С.А. О вибрационном полете симметричной системы // Изв. вузов. Машиностр. 2005. № 8. С. 3–7.
3. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой среде // Изв. вузов. Математика. 2012. № 2. С. 57–64.
4. Liu Y., Wiercigroch M., Pavlovskaya E., Yu. Y. Modeling of a vibro-impact capsule system // Int. J. Mech. Sci. 2013. V. 66. P. 2–11.
5. Liu Y., Pavlovskaya E., Hendry D., Wiercigroch M. Optimization of the vibroimpact capsule system // J. Mech. Engng. 2016. V. 62. P. 430–439.

6. Fang H.B., Xu J. Dynamics of a mobile system with an internal acceleration-controlled mass in a resistive medium // J. Sound&Vibr. 2011. V. 330. P. 4002–4018.
7. Xu J., Fang H. Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // Nonlin. Dyn. 2019. V. 98. P. 2651–2669.
8. Tahmasian S. Dynamic analysis and optimal control of a drag-based vibratory systems using averaging // Nonlin. Dyn. 2021. V. 104. P. 2201–2217.
9. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 202–215.
10. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н. Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: Физматлит, 2022. 464 с.
11. Черноусько Ф.Л. Оптимизация движения тела с внутренней массой при квадратичном сопротивлении // Докл. РАН. Физика, технич. науки. 2023. Т. 513. С. 80–86.

Optimal Motion of a Body Controlled by an Internal Mass in the Resistive Environment

T. V. Glazkov^{a,#}, F. L. Chernousko^{a,##}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: t.glazkov@bk.ru*

^{##}*e-mail: chern@ipmnet.ru*

Translational movement of a body controlled by means of periodical motions of an internal mass within the environment with the quadratic resistance is considered. The average speed of motion depending on the constraints imposed is evaluated, and the conditions are found that correspond to the maximum average speed.

Keywords: mobile robots, nonlinear systems, quadratic resistance, optimization

REFERENCES

1. Nagaev R.F., Tamm E.A. Vibrational displacement in a medium with quadratic resistance to motion // Mashinoved., 1980, no. 4, pp. 3–8. (in Russian)
2. Gerasimov S.A. On vibrational flight of a symmetric system // Izv. vuzov. Mashinostr., 2005, no. 8, pp. 3–7. (in Russian)
3. Yegorov A.G., Zakharova O.S. Optimal quasistationary motion of a vibro-robot in a viscous medium // Izv. vuzov. Matematika, 2012, no. 2, pp. 57–64. (in Russian)
4. Liu Y., Wiercigroch M., Pavlovskaya E., Yu. Y. Modeling of a vibro-impact capsule system // Int. J. Mech. Sci., 2013, vol. 66, pp. 2–11.
5. Liu Y., Pavlovskaya E., Hendry D., Wiercigroch M. Optimization of the vibroimpact capsule system // J. Mech. Engng., 2016, vol. 62, pp. 430–439.
6. Fang H.B., Xu J. Dynamics of a mobile system with an internal acceleration-controlled mass in a resistive medium // J. Sound&Vibr., 2011, vol. 330, pp. 4002–4018.
7. Xu J., Fang H. Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // Nonlin. Dyn., 2019, vol. 98, pp. 2651–2669.
8. Tahmasian S. Dynamic analysis and optimal control of a drag-based vibratory systems using averaging // Nonlin. Dyn., 2021, vol. 104, pp. 2201–2217.
9. Chernousko F.L. The optimal periodic motions of a two-mass system in a resistant medium // JAMM, 2008, vol. 72, iss. 2, pp. 116–125.
10. Chernousko F.L., Bolotnik N.N. Dynamics of Mobile Systems with Controlled Configuration. Moscow: Fizmatlit, 2022. 464 p. (in Russian)
11. Chernousko F.L. Optimization of motion of a body with an internal mass under quadratic resistance // Dokl. Phys., 2023, vol. 513, pp. 80–86. (in Russian)

УДК: 517.9

ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ КОНФЛИКТНО УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ОТ РАЗРЕЖЕННЫХ ТЕРМИНАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Л. П. Юрай^{1,*}¹Узбекский государственный университет физической культуры и спорта, Чирчик, Узбекистан
*e-mail: yugailp@mail.ru

Поступила в редакцию 30.03.2023 г.

После доработки 25.01.2024 г.

Принято к публикации 27.01.2024 г.

Для нелинейных конфликтно управляемых процессов (дифференциальных игр) рассматривается задача уклонения траекторий в постановке Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко. Терминальное множество имеет разреженную структуру. В отличие от известных работ оно может иметь предельную точку. Получены новые достаточные условия и методы уклонения, позволяющие решить задачи уклонения траекторий нелинейных колебательных систем. В качестве примера приведено решение задачи о раскачке обобщенного математического маятника.

Ключевые слова: уклонение, убежание, преследователь, уклоняющийся игрок, управление, разреженное, дискретное, терминальное множество, маятник

DOI: 10.31857/S0032823524010058 EDN: YUOZH

1. Введение. Постановка глобальной задачи уклонения траекторий. Пусть конфликтно управляемый процесс описывается уравнением

$$\dot{z} = f(z, u, v), \quad (1.1)$$

где $z \in R^n$, $\dot{z} \in R^n$, точка над z означает производную по времени, $u \in P \subset R^p$, $v \in Q \subset R^q$, P и Q — компакты с началами своих несущих пространств ($0_p \in P$ и $0_q \in Q$). Функция $f(z, u, v)$ непрерывна по $(z, u, v) \in X = R^n \times P \times Q$ и удовлетворяет условиям:

1) Для каждого компакта $K \subset X$ найдется константа Липшица $L = L(K) > 0$, такая, что при всех $(z_1, u, v), (z_2, u, v) \in K$ выполняется условие Липшица:

$$|f(z_2, u, v) - f(z_1, u, v)| \leq L(K)|z_2 - z_1| \quad (1.2)$$

2) Для любых компактов $K_1 \subset K_2 \subset X$ найдутся такие константы Липшица $L(K_1)$ и $L(K_2)$, что $L(K_1) \leq L(K_2)$ (монотонность $L(K)$ по включению).

3) Для всех $(z, u, v) \in X$ выполняется неравенство (оценка) Филиппова:

$$\langle z, f(z, u, v) \rangle \leq C(1 + |z|^2); \quad C = \text{const} \geq 0 \quad (1.3)$$

Терминальное множество M имеет вид:

$$M = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_i, \dots\} \quad (1.4)$$

$$m_i \in R^n, \quad i \in N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Параметры u и v в (1.1) выбираются двумя сторонами (игроками) в виде измеримых функций $u = u(t) \in P$, $v = v(t) \in Q$; $t \geq 0$, при этом каждый игрок решает свою задачу. Игрок, выбирающий $v = v(t) \in Q$ (уклоняющийся игрок), стремится при любом допустимом $u(t) \in P$ уклонить соответствующую выбранным управлениям траекторию $z(t)$ уравнения (1.1), $z(0) = z_0 \notin M$, от терминального множества M при всех $t \geq 0$. Такую задачу называют глобальной задачей уклонения (убегания) от M . Задача второго игрока (преследующего) заключается в приведении траектории в некоторый конечный момент времени на терминальное множество при любом допустимом поведении уклоняющейся стороны. Впервые глобальная задача уклонения (убегания) была изложена в работе Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко [1, стр. 335–338], при этом постановка задачи существенно отличалась от постановок дифференциальных игр в [2, 3].

Множества вида (1.4) имеют разреженную структуру. Задачи управления и конфликтного управления траекториями (1.1) относительно таких терминальных множеств возникают при исследовании различных колебательных процессов [3–13]. Действительно, при исследовании конфликтно управляемых колебательных систем важным является приведение траектории системы в одно из ее положений равновесия (задача преследования) или уклонение траектории от всех положений равновесия исследуемой системы (задача уклонения). В совокупности указанные положения равновесия образуют терминальное множество, которое для многих колебательных систем является дискретным (разреженным), и имеют вид (1.4), соответствующий пример приведен и исследован ниже.

В данной работе исследуется глобальная задача уклонения траекторий (1.1) от разреженного терминального множества (1.4). Предполагается, что уклоняющийся игрок при формировании управления уклонения $v(t) \in Q$ знает начальную позицию, терминальное множество, параметры (1.1) и значение управления $u(t) \in P$ в тот же момент времени, но не знает значения $u(s) \in P$ при $s > t$. Заметим, что выбранное управление преследователя $u(t) \in P$ и конструируемое управление уклоняющегося игрока $v(t) \in Q$ в паре должны порождать единственную траекторию системы (1.1), удовлетворяющую заданным начальным условиям. Такие пары управлений называются совместными. Все типы совместных пар управлений (стратегий) для позиционных дифференциальных игр рассмотрены в [17].

В настоящей статье решена глобальная задача уклонения, указано правило построения стратегии уклонения на основе локальных управлений маневров обхода точек терминального множества (Теорема 4.1) и приведен пример.

2. Основные определения и леммы

2.1. Свойства решений на компактах. Пусть $B(a, r)$ и $S(a, r)$, соответственно, замкнутый шар и сфера радиусов $r \geq 0$ с центрами в точке $a \in R^n$, $S = S(0_n, 1)$, $B = B(0_n, 1)$, 0_n – начало R^n , $\text{co}\{X\}$ – выпуклая оболочка множества X , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – знак скалярного произведения, $\text{Int}_{R^n} A$ – внутренность множества A относительно R^n , $|a|^2 = \langle a, a \rangle$, $a \in R^n$. Всюду ниже константами будут называться положительные числа, зависящие от исходных параметров процесса (1.1) ($P, Q, M, L = L(K), C$ и др.), но не зависящие от управлений и хода процесса уклонения.

Лемма 2.1. (о выборе компакта). Пусть в задаче уклонения (1.1) – (1.4) точка $m_i \in M$, $z(t)$ – некоторое допустимое решение (1.1), $z(0) = z_0 \notin M$. Тогда для всех $t \in I = [0, 1]$ выполняется:

$$1) \max\{|z(t)|, |z(t) - m_i|, |z(t) - z_0|\} \leq \rho_i(t), \quad (2.1)$$

где $\rho_i(t) = 2(1 + |z_0 - m_i| + |m_i|)e^{Ct}$

2) Решение $z(t) \in B(0_n, \rho_i(1))$ и будет единственным на отрезке I .

Доказательство. Пусть $z(t)$ — любое допустимое решение (1.1), определенное при $t \in [0, t_*]$, $t_* > 0$. Тогда из (1.1) и (1.3) получаем:

$$\langle z(t), \dot{z}(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (1 + |z(t)|^2) \leq C(1 + |z(t)|^2)$$

Интегрирование последнего неравенства приводит к оценкам:

$$|z(t)|^2 \leq 1 + |z(t)|^2 \leq (1 + |z_0|^2) e^{2Ct} \leq (1 + |z_0|)^2 e^{2Ct},$$

из которых следует неравенство для $|z(t)|$ в (2.1):

$$|z(t)| \leq (1 + |z_0|) e^{Ct} \leq (1 + |z_0 - m_i| + |m_i|) e^{Ct} \quad (2.2)$$

Второе неравенство из (2.1) для оценки $|z(t) - m_i|$ легко следует из (2.2):

$$|z(t) - m_i| \leq |z(t)| + |m_i| \leq 2(1 + |z_0 - m_i| + |m_i|) e^{Ct} \leq \rho_i(t) \quad (2.3)$$

Из (2.2) следует, что траектория $z(t)$ за конечное время не сможет “уйти в бесконечность”, поэтому она продолжаема вправо при всех $t \geq 0$, тем самым будет существовать и при всех $t \in I = [0, 1]$.

Оставшееся неравенство из (2.1) доказывается аналогично.

Выберем в (1.2) компакт $K = B(0_n, \rho_i(1)) \times P \times Q$, и пусть $L(K)$ — соответствующая константа Липшица. Тогда (1.2) и (2.2) обеспечивают существование и единственность решения $z(t)$, $z(0) = z_0 \notin M$ и условие $z(t) \in B(0_n, \rho_i(1))$ при всех $t \in I = [0, 1]$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Если в Лемме 2.1 дополнительно положить, что $|z_0 - m_i| \leq \delta_i$, где константа $\delta_i \in (0; 1]$, то найдутся константы d_{1i} и d_{2i} , для которых при всех $t \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$|z(t) - m_i| \leq d_{1i} \delta_i + d_{2i} t \quad (2.4)$$

Доказательство. Пусть $z(t)$ — решение (1.1), удовлетворяющее начальным условиям $z(0) = z_0$ и определенное при $t \in I = [0, 1]$. По лемме 2.1 $z(t) \in B(0_n, \rho_i)$, $\rho_i = \rho_i(1)$. Пусть далее $K_i = B(0_n, \rho_i) \times P \times Q$, $L_i = L(K_i)$ — константа Липшица для K_i . Тогда из интегрального представления решения (1.1) равенства

$$f(z(s), u(s), v(s)) = f(z(s), u(s), v(s)) - f(m_i, u(s), v(s)) + f(m_i, u(s), v(s))$$

и условия Липшица (1.2) имеем неравенство

$$|z(t) - m_i| \leq |z_0 - m_i| + \int_0^t [L_i |z(s) - m_i| ds + \beta_i] ds, \quad (2.5)$$

где $\beta_i = \max_{(u, v) \in P \times Q} |f(m_i, u, v)|$. Применение к (2.5) известного неравенства Гронуолла—

Беллмана [13] приводит к неравенству

$$|z(t) - m_i| \leq e^{L_i t} |z_0 - m_i| + \frac{\beta_i}{L_i} (e^{L_i t} - 1); \quad t \in I,$$

отсюда можно видеть, что

$$|z(t) - m_i| \leq e^{L_i t} |z_0 - m_i| + \beta_i e^{L_i t} t \quad (2.6)$$

Положим $\rho_{i0} = 2(2 + |m_i|)e^C$ и $K_i^0 = B(0_n, \rho_{i0}) \times P \times Q$. Поскольку $\rho_i < \rho_{i0}$, то $K_i \subset K_i^0$, поэтому по условию монотонности констант Липшица будет $L_i \leq L_{i0}$, где $L_{i0} = L(K_i^0)$ является, очевидно, константой. С учетом этих замечаний, заменяя в (2.6) L_i на L_{i0} , получим (2.4), в котором за константы можно принять $d_{1i} = e^{L_{i0}}$, $d_{2i} = \beta_i e^{L_{i0}}$. Лемма доказана.

Замечание 2.1. Неравенства (2.3) и (2.4) дают различные верхние оценки для $|z(t) - m_i|$, что необходимо для использования в следующих целях: (2.3) позволяет траектории находиться внутри определенного компакта, а “более тонкое” неравенство (2.4) понадобится ниже при доказательстве локального маневра уклонения (обхода) траектории от точки m_i внутри того же компакта. Кроме того, оценка (2.3) зависит от ρ_i и L_i , не являющихся, вообще говоря, константами (они зависят от z_0), в то время как в (2.4) входят только константы.

2.2. Свойства наборов Каратеодори. Пусть $m_i \in M$, $i \in N$. Введем обозначения:

$$g(m_i, u, v) = f(m_i, u, v) - f(m_i, {}^0p, {}^0q)$$

$$A_{1i} = \text{co} \left\{ \psi \in S : \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle \psi, g(m_i, u, v) \rangle > 0 \right\} \quad (2.7)$$

$$A_{2i} = \text{co} \left\{ \psi \in S : \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle \psi, g(m_i, u, v) \rangle > 0 \right\} \quad (2.8)$$

Определение 2.1. [14, стр.6]. Набор векторов $\{\psi_j \in R^n, j = 1, 2, \dots, n+1\}$ называется аффинно независимым, если линейно независимы векторы

$$\psi_2 - \psi_1, \psi_3 - \psi_1, \dots, \psi_{n+1} - \psi_1$$

Определение 2.2. Множество векторов $\{\psi_j \in R^n, j = 1, 2, \dots, n+1\}$ называется набором Каратеодори (или K -набором), если эти векторы аффинно независимы и их выпуклая комбинация равна 0_n . Множество всех наборов Каратеодори, составленных из векторов множеств A_{li} ((2.7) — (2.8)) обозначим через K_{li} , $i \in N$, $l = 1, 2$.

Определение 2.3. Пусть $N_{li} = \sup_{K_\alpha \in K_{li}} \min_{1 \leq k \leq n+1} \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle \psi_k^\alpha, g(m_i, u, v) \rangle$,

$$N_{2i} = \sup_{K_\beta \in K_{2i}} \min_{1 \leq k \leq n+1} \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle \psi_k^\beta, g(m_i, u, v) \rangle,$$

где $K_\alpha = \{\psi_k^\alpha, k = 1, 2, \dots, n+1\} \in K_{1i}$, $K_\beta = \{\psi_k^\beta, k = 1, 2, \dots, n+1\} \in K_{2i}$.

Ясно, что если $K_{li} \neq \emptyset$, то числа $N_{li} > 0$. Условия, при которых числа N_{li} и N_{2i} положительны, даются в нижеследующей лемме.

Лемма 2.3. Пусть $0_n \in \text{co} A_{li}$ ($l = 1, 2$; $i \in N$). Тогда $\dim \text{co} A_{li} = n$, $K_{li} \neq \emptyset$, $0_n \in \text{Int}_{R^n} \text{co} A_{li}$.

Доказательство. Непрерывная функция $\langle \psi, g(m_i, u, v) \rangle$ после операций минимума и максимума на компакте $P \times Q$ будет непрерывной по $\psi \in S$, поэтому для каждого $\psi_0 \in A_{li}$ найдется число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\psi_0) > 0$, такое, что при каждом

$\psi \in S(\psi_0, \varepsilon_0) = B(\psi_0, \varepsilon_0) \cap S$ строгое неравенство в определении A_{li} будет сохраняться, тем самым будет выполняться включение

$$\psi \in S(\psi_0, \varepsilon_0) \subset A_{li} \quad (2.9)$$

$S(\psi_0, \varepsilon_0)$ является окрестностью радиуса $\varepsilon_0 > 0$ точки $\psi_0 \in A_{li}$ на сфере S , тогда $\text{co}S(\psi_0, \varepsilon_0)$ представляет собой n -мерный “шаровой сегмент”, поэтому из (2.9) будет следовать включение

$$\text{co}S(\psi_0, \varepsilon_0) \subset \text{co}A_{li} \subset R^n, \quad (2.10)$$

отсюда в силу $\dim \text{co}S(\psi_0, \varepsilon_0) = n$ (размерность “шарового сегмента”) и (2.10) следует, что $\dim \text{co}A_{li} = n$. Здесь под размерностью множества понимается размерность его несущего пространства.

Теперь легко показать, что $K_{li} \neq \emptyset$. Действительно, в силу $\dim \text{co}A_{li} = n$, в A_{li} можно выбрать систему из n линейно независимых векторов. Добавление к этой системе любого вектора из A_{li} , не равного выбранным векторам, приведет к системе из $n + 1$ векторов, которая, очевидно, образует K — набор из A_{li} .

Докажем, что $0_n \in \text{Int}_{R^n} \text{co}A_{li}$. Пусть при выбранных $l = 1, 2; i \in N$, будет $0_n \in \text{co}A_{li}$. Тогда по теореме Каратеодори [14, 15] для некоторых

$$\lambda_k \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} = 1, \varphi_k \in \text{co}A_{li} \quad (2.11)$$

будет справедливо представление

$$\lambda_1 \varphi_k + \lambda_2 \varphi_k + \dots + \lambda_{n+1} \varphi_k = 0_n \quad (2.12)$$

Далее, для каждого φ_k найдется такое число $\omega_k > 0$, что в силу (2.9)

$$\text{co}S(\varphi_k, \omega_k) \subset \text{co}A_{li}; \quad k = 1, 2, \dots, n + 1 \quad (2.13)$$

Очевидно, что в каждый “шаровой сегмент” $\text{co}S(\varphi_k, \omega_k)$ можно вписать шар радиуса $\delta_k = \omega_k^2 / 4 < 1$, с центром, расположенным на векторе φ_k . Пусть $\min_{1 \leq k \leq n+1} \delta_k = \delta$. Из простых геометрических соображений следует, что

$$\begin{aligned} (1 - \delta)\varphi_k + \delta B &\subset (1 - \delta_k)\varphi_k + \delta_k B, 1 \leq k \leq n + 1 \\ B((1 - \delta)\varphi_k, \delta) &\subset B((1 - \delta_k)\varphi_k, \delta_k) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из (2.13) и (2.14) имеем включения

$$B((1 - \delta)\varphi_k, \delta_k) \subset \text{co}S(\varphi_k, \delta_k) \subset \text{co}S(\varphi_k, \omega_k) \subset \text{co}A_{li} \quad (2.15)$$

Далее, из (2.11)–(2.15) получаются соотношения

$$\begin{aligned} 0_n + \delta B &= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k (\varphi_k + \delta B) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k [(1 - \delta)\varphi_k + \delta \varphi_k + \delta B] = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k B((1 - \delta)\varphi_k, \delta) + \delta \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k B((1 - \delta)\varphi_k, \delta) \subset \\ &\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k B((1 - \delta_k)\varphi_k, \delta_k) \subset \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \text{co}S(\varphi_k, \omega_k) \subset \text{co}A_{li}, \end{aligned}$$

которые показывают, что $0_n \in \text{Int}_{R^n} \text{co}A_{li}$. Лемма доказана.

3. Теорема о локальном уклонении

Предположение 3.1 (о разреженности M). Существует число $r_0 \geq 0$ такое, что множество $M \cap B(0_n, r) = \emptyset$ при $r \in [0; r_0)$, а при каждом $r \geq r_0$ состоит из конечного числа точек терминального множества M .

Предположение 3.2. $n = \dim R^n \geq 2$ и $0_n \in A_1 \cup A_2$, где $A_1(A_2)$ является пересечением всех множеств $A_{1i}(A_{2i}); i \in N$.

Теорема 3.1 (о локальном уклонении). Пусть для конфликтно управляемого процесса (1.1)–(1.4) выполняются Предположения 3.1, 3.2 и $m_i \in M$ — фиксированная точка. Тогда существуют такие константы $\delta_i, \varepsilon_i, \theta_i, \sigma_i$, что для любой начальной позиции $z(0) = z_0 \notin M$ с условием $|z_0 - m_i| \leq \delta_i$ и любого допустимого управления $u(t) \in P$ существует специально конструируемое измеримое управление $\tilde{v}(t) \in Q$, такое, что траектория $z(t)$ уравнения (1.1), $z(0) = z_0$, соответствующая управлениям $u(t) \in P$ и $\tilde{v}(t) \in Q$, удовлетворяет при всех $t \in (0; \theta_i]$ неравенствам:

$$1) z(t) \in B(0_n, \rho_i), \rho_i = 2(1 + |z_0 - m_i| + |m_i|)e^C \quad (3.1)$$

$$2) \frac{\varepsilon_i}{2} \geq |z(t) - m_i| \geq \frac{1}{3} N_{2i} t > 0 \quad (3.2)$$

$$3) |z(\theta_i) - m_i| > \sigma_i \quad (3.3)$$

Далее, неравенства (3.1)–(3.3) обеспечивают уклонение траектории $z(t)$ от терминального множества M на “малом” отрезке времени $[0; \theta_i]$.

Доказательство. Пусть $K_i = B(0_n, \rho_i) \times P \times Q$ и $L_i = L(K_i)$ — константа Липшица для K_i . В силу выбора ρ_i и Леммы 2.1, точки z_0 и m_i находятся внутри шара $B(0_n, \rho_i)$. Будем считать, что в Предположении 3.2 $0_n \in A_2$ (случай $0_n \in A_1$ рассматривается аналогично). Тогда по Лемме 2.3 $K_{2i} \neq \emptyset$ и $N_{2i} > 0$, поэтому найдется набор $K_{i0} = \{\psi_{ij}^0, j = 1, 2, \dots, n+1\} \notin K_{2i}$, для которого

$$\min_{1 \leq j \leq n+1} \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle \psi_{ij}^0, g(m_i, u, v) \rangle \geq \frac{2}{3} N_{2i} > 0 \quad (3.4)$$

Для выбранной точки $m_i \in M$ зафиксируем K -набор $K_{i0} \in K_{2i}$ и выберем в этом наборе вектор $\psi_{ik}^0 \in K_{i0}$, для которого при всех $t \in [0, 1]$ имеет место неравенство:

$$\langle \psi_{ik}^0, z_0 - m_i + tf(m_i, 0_p, 0_q) \rangle \geq 0 \quad (3.5)$$

Такой вектор $\psi_{ik}^0 \in K_{i0}$ существует, потому что K_{i0} является набором Каратеодори и $n \geq 2$ (Предположение 3.2). Далее, для вектора ψ_{ik}^0 и управления $u(t) \in P$, согласно Лемме Филиппова об измеримом выборе для дифференциальных игр [15], найдется такая измеримая функция $\tilde{v}(t) \in Q$, что справедливо неравенство

$$\langle \psi_{ik}^0, g(m_i, u(t), \tilde{v}(t)) \rangle \geq \frac{2}{3} N_{2i} > 0; t \in [0, 1] \quad (3.6)$$

Управление $\tilde{v}(t) \in Q$ называется специальным управлением уклонения от точки $m_i \in M$ при $t \in [0, 1]$, а процесс применения $\tilde{v}(t) \in Q$ — локальным маневром

уклонения (обхода) [1]. Рассмотрим решение $z(t)$, $z(0) = z_0 \notin M$, соответствующее выбранному преследователем допустимому управлению $u(t) \in P$ и специальному управлению уклонения $\tilde{v}(t) \in Q$. По лемме 2.1 для построенных K_i и $L_i = L(K_i)$ траектория $z(t)$ будет находиться в шаре $B(0_n, \rho_i)$ при всех $t \in [0, 1]$.

Из интегрального представления решения уравнения (1.1), равенства

$$f(z, u, v) = f(z, u, v) - f(m_i, u, v) + \\ + f(m_i, u, v) - f(m_i, 0_p, 0_q) + f(m_i, 0_p, 0_q)$$

условия Липшица (1.2) и неравенств (3.4)–(3.6) вытекает, что

$$\langle \Psi_{ik}^0, z(t) - m_i \rangle \geq \frac{2}{3} N_{2i} t - \int_0^t L_i |z(s) - m_i| ds \quad (3.7)$$

Для интеграла в (3.7), согласно неравенству (2.4) Леммы 2.2, имеем оценку:

$$\int_0^t L_i |z(s) - m_i| ds \leq L_i (d_{1i} \delta_i t + \frac{1}{2} d_{2i} t^2) \quad (3.8)$$

Введем следующие константы:

$$\gamma_i = \min_{j \neq i} |m_i - m_j| > 0, \quad \varepsilon_i = \min \left\{ 1; \frac{1}{2} \gamma_i \right\}, \quad \theta_i = \min \left\{ 1; \frac{N_{2i}}{6\beta_i e^{2L_{i0}}}; \frac{\varepsilon_i}{2\beta_i e^{L_{i0}}} \right\} \quad (3.9)$$

$$\delta_i = \min \left\{ 1; \frac{N_{2i}}{6\beta_i e^{L_{i0}}}; \frac{\varepsilon_i}{2e^{L_{i0}}} \right\}, \quad \sigma_i = \min \left\{ 1; \frac{1}{8} N_{2i} \theta_i; \frac{\varepsilon_i}{4} \right\} \quad (3.10)$$

В (3.9) константы γ_i существуют в силу Предположения 1 о разреженности M , константа L_{i0} введена в Лемме 2.2 (формула (2.4)).

Далее, непосредственное применение к неравенствам (3.7) и (3.8) результатов Леммы 2.2 с выбранными константами (3.9)–(3.10) приводит к выполнению при всех $t \in [0, \theta_i]$ следующих неравенств:

$$|z(t) - m_i| \leq d_{1i} \delta_i + d_{2i} \theta_i \leq \frac{\varepsilon_i}{2} \quad (3.11)$$

$$\langle \Psi_{ik}^0, z(t) - m_i \rangle \geq \frac{2}{3} N_{2i} t - \\ - L_i (d_{1i} \delta_i t + \frac{1}{2} d_{2i} t^2) \geq \frac{1}{3} N_{2i} t \\ |z(t) - m_i| \geq \langle \Psi_{ik}^0, z(t) - m_i \rangle \geq \frac{1}{3} N_{2i} t; \quad t \in [0, \theta_i] \quad (3.12)$$

Объединяя (3.11) и (3.12), получаем доказательство аналогов неравенств (3.2) и (3.3):

$$0 < \frac{1}{3} N_{2i} t \leq |z(t) - m_i| \leq \frac{\varepsilon_i}{2}; \quad t \in [0, \theta_i] \quad (3.13)$$

$$|z(\theta_i) - m_i| \geq \frac{1}{4} N_{2i} \theta_i > \frac{1}{8} N_{2i} \theta_i \geq \sigma_i > 0 \quad (3.14)$$

Неравенства (3.13) и (3.14) показывают, что при $t \in [0, \theta_i]$ траектория $z(t)$ не будет совпадать с точкой m_i , оставаясь в $\varepsilon_i/2$ -окрестности точки m_i , а в момент θ_i

траектория покидает σ_i -окрестность точки m_i , но остается по-прежнему в ее $\varepsilon_i/2$ – окрестности, значит, не будет находиться в $\varepsilon_i/4$ -окрестностях остальных точек M и не попадает на все M , тем самым уклоняясь от него при всех $t \in [0, \theta_i]$. Таким образом, специальное управление уклонения $\tilde{v}(t) \in Q$ обеспечивает локальное уклонение траектории (1.1) от M “на малом” положительном отрезке времени $[0, \theta_i]$ при этом, за время локального уклонения от точки $m_i \in M$ траектория $z(t)$ не покидает шар $B(0_n, \rho_i)$. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Специальное управление уклонения формируется на основе (3.4)–(3.6) в виде измеримой функции $\tilde{v}(t) \in Q$, $t \in [0, \theta_i]$, которая в каждый момент времени $t \in [0, \theta_i]$ зависит еще от начальной позиции z_0 , точки $m_i \in M$ и значения управления $u(t) \in P$.

Замечание 3.2. В дальнейшем при $t > \theta_i$ уклоняющемуся игроку предлагается полагать $v(t) = 0_q \in Q$ до тех пор, пока при некотором $j = 1, 2, \dots$, в некоторый первый момент $t_j > \theta_i$ будет выполняться неравенство

$$|z(t_j) - m_j| = \sigma_j$$

Тогда значения t_j и $z(t_j)$ выбираются за новые начальные данные, и уклоняющийся игрок совершает при $t \geq t_j$ маневр уклонения от точки m_j , при этом локальное управление обхода точки m_j строится в соответствии с (3.4)–(3.6). Здесь возможен случай, когда $j = i$, что соответствует повторному маневру обхода точки $m_i \in M$.

4. Глобальное уклонение (основной результат)

Теорема 4.1 (о глобальном уклонении). Пусть для конфликтно управляемого процесса (1.1) с разреженным терминальным множеством (1.4) выполняются Предположения 3.1 и 3.2. Тогда из любой начальной позиции $z_0 \notin M$, при всех $t \geq 0$ возможно уклонение от M траектории $z(t)$, $z(0) = z_0$, уравнения (1.1). Доказательство будет следовать идеям [1, 4, 12] и заключаться в применении Теоремы 3.1 о локальном уклонении к возможности глобального уклонения траектории при всех $t \geq 0$.

Выберем константу $r_1 > 0$ такой, что $M_1 = B(0_n, r_1) \cap M \neq \emptyset$ (Предположение 3.1) и пусть

$$M_1 = \left\{ \begin{array}{l} m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1q_1} \\ m_{1j} \in M, j = 1, 2, \dots, q_1 < \infty \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

Дополнительно выберем $r_1 > 0$ так, чтобы для точек z_0 и $m_{1j} \in M_1$ выполнялись условия Леммы 2.1 о выборе компакта, для этого достаточно взять

$$r_1 = 2 \max_{1 \leq j \leq q_1} (|z_0 - m_{1j}| + 1 + |m_{1j}|) e^C \quad (4.2)$$

В силу (4.2) и Леммы 2.1 все точки z_0 и m_{1j} находятся в шаре $B(0_n, r_1)$. Для каждой точки $m_{1j} \in M_1 \subset M$ можно определить в соответствии с Теоремой 3.1 набор констант $\delta_{1j}, \varepsilon_{1j}, \theta_{1j}, \sigma_{1j}$, которые обеспечивают локальный маневр уклонения от каждой точки $m_{1j} \in M_1$; $j = 1, 2, \dots, q_1$.

Введем для каждого $j = 1, 2, \dots, q_1$ следующие множества:

$$D_{1j} = \{z \in B(0_n, r_1) : |z - m_{1j}| \leq \sigma_{1j}\}, \quad F_{1j} = D_{1j} \setminus \partial D_{1j}, \quad (4.3)$$

где ∂ — символ границы множества. Заметим, что в силу выбора констант σ_{1j} (3.9)–(3.10) множества D_{1j} попарно не пересекаются при $j \neq k$. Из открытых множеств F_{1j} выделим те, для которых

$$\text{Int}_{R^n} \{F_{1j} \cap (R^n \setminus B(0_n, r_1))\} \neq \emptyset \quad (4.4)$$

Пусть это будут множества F_{1j} при $j = p_1 + 1, \dots, q_1$, $p_1 \leq q_1$, при этом, увеличивая, если нужно r_1 , можно добиться выполнения включений

$$D_{1j} \subset B(0_n, r_1), \text{ при } j = 1, 2, \dots, p_1, p_1 \leq q_1 \quad (4.5)$$

Введем следующие множества: F_1 — объединение F_{1j} при $j = p_1 + 1, \dots, q_1$; D_1 есть объединение D_{1j} при $j = 1, 2, \dots, p_1$; $B_1 = B(0_n, r_1) \setminus F_1$. В силу открытости множеств F_{1j} B_1 будет компактным и содержать точки $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1p_1}$ из M (остальные точки исключены из B_1 по построению). По существу B_1 представляет собой шар $B(0_n, r_1)$ с удаленными из него открытыми шарами F_{1j} радиусов σ_{1j} с центрами в точках m_{1j} , $j = p_1 + 1, \dots, q_1$, $p_1 \leq q_1$, имеющими непустые пересечения с границей множества $B(0_n, r_1)$.

Организуем первый цикл процесса уклонения, которое будет происходить в множестве B_1 . Пусть $z(t)$ — некоторая допустимая траектория конфликтно управляемой системы (1.1) с начальным условием $z(0) = z_0 \in B_1 \setminus M_1$.

Для поведения $z(t)$ в B_1 возможны следующие два случая:

E_1) Траектория $z(t)$ начинается и находится внутри B_1 , не выходя на границу ∂B_1 при всех $t \geq 0$. При этом во время пребывания в B_1 и формирования $z(t)$ уклоняющийся игрок может совершить конечное или бесконечное число маневров обхода точек из M_1 . Напомним, что в периоды между маневрами уклоняющийся игрок может применять любое допустимое управление, например, равное нулевому вектору;

E_2) Траектория $z(t)$ начинается внутри B_1 , и в некоторый первый конечный момент времени $t_1 > 0$ выходит на границу B_1 . При этом до выхода на границу уклоняющийся игрок может совершить конечное число маневров обхода точек из M_1 .

Рассмотрим случай E_1). Здесь каждый маневр обхода (если он имеет место) уклоняет траекторию от некоторой точки из M_1 , значит, и от всего M (Теорема 3.1). Конечное число маневров не приводит траекторию $z(t)$ на M , а пребывание в множестве B_1 при всех $t \geq 0$ указывает на то, что $z(t) \notin M$ при всех $t \geq 0$, то есть из точки z_0 возможно уклонение. Если же уклоняющийся игрок, находясь в B_1 , совершает бесконечное число маневров обхода от точек конечного множества M_1 , то найдется точка M_1 , относительно которой происходит бесконечное число маневров обхода с фиксированным временем обхода. Тогда общее время обхода будет бесконечным, значит, в рассматриваемом случае из начальной точки возможно уклонение от M при всех $t \geq 0$.

Рассмотрим случай (E_2). Прежде всего заметим, что уклоняющийся игрок в этом случае может совершить лишь конечное число маневров обхода, поскольку бесконечное число маневров обхода потребует бесконечного времени (см. E_1)), и тогда конечного времени выхода на границу ∂B_1 не будет. Таким образом, уклоняющийся игрок после конечного числа маневров обхода выходит на границу ∂B_1 в некоторый момент времени $t_1 > 0$, т.е. $z(t_1) \in \partial B_1$.

На этом первый цикл уклонения во множестве $B_1 \subset B(0_n, r_1)$ завершается и начинается организация второго цикла уклонения. В этом случае принимаем за

новые начальные данные $t_1 = 0$, $z(t_1) = z(0) = z_0$. Заметим, что новое начальное значение $z(t_1) \notin M$, поскольку граница ∂B_1 по построению множества B_1 не содержит точек из M . Далее, все построения производятся аналогично первому циклу. Сначала определяется шар $B(0_n, r_2)$, такой, что $M_2 = B(0_n, r_2) \cap M \neq \emptyset$ и

$$M_2 = \left\{ \begin{array}{c} m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2q_2} \\ m_{2j} \in M, j = 1, 2, \dots, q_2 < \infty \end{array} \right\},$$

для этого можно положить $r_2 = 2 \max_{1 \leq j \leq q_2} (|z_0 - m_{2j}| + 1 + |m_{2j}|)e^C + r_1 + 2$.

Для M_2 повторяем все рассуждения, аналогичные (4.1)–(4.5), и строим множество B_2 (аналог B_1), для которого рассматривают два случая типа E_1) и E_2). Очевидно, что по построению $B_1 \subset B_2$. Продолжая индуктивно этот процесс, получаем для случаев типа E_2) (случаи типа E_1) легко анализируются) последовательность вложенных множеств

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n \subset B_{n+1} \subset \dots \quad (4.6)$$

с радиусами $r_{n+1} \geq r_n + 2, n \in N$. Процесс уклонения траектории $z(t), z(0) = z_0 \notin M$, на n -м цикле состоит в уклонении $z(t)$ внутри множества B_n и выходом ее в случае E_2) на границу ∂B_n в первый момент времени $t_n > 0$, который принимается за начало следующего цикла. Заметим, что в (4.6) цепочка включений может оказаться конечной, т.е. на некотором конечном цикле выхода на границу множества не происходит, и процесс бесконечного уклонения разрешается случаем E_1). Покажем, что в случае бесконечной цепочки включений (4.6), когда каждый цикл завершается выходом траектории на границу множества (случай E_2)), траектория $z(t), z_0 \notin M$, не попадет на M при всех $t \geq 0$. Время перехода из $z_0 \notin M$ на границу ∂B_n за n циклов уклонения будет равно $T_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$, где все слагаемые положительны. Ясно, что по построению траектория $z(t) \notin M$ при всех $t \in [0, T_n]$.

Покажем, что $T_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Допустим противное: $T_n \rightarrow T < +\infty$. Тогда траектория $z(t)$ не выйдет из шара $B(0_n, R_0)$, где $R_0 = \max_{0 \leq t \leq T} z(t) < +\infty$, что противоречит тому, что радиусы r_n шаров B_n неограниченно возрастают. Поскольку $T_n \rightarrow +\infty$, при $n \rightarrow +\infty$, то убегание из точки $z_0 \notin M$ возможно при всех $t \geq 0$. Теорема доказана.

5. Пример. Задача о раскатке обобщенного математического маятника. Уравнения движения конфликтно управляемой системы (обобщенного математического маятника) имеют вид (ср. [3, 4]):

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -a \sin(z_1 + \mu z_1^2) + u + v, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $z = (z_1, z_2) \in R^2$; $a > 0$, $|u| \leq \alpha$, $|v| \leq \beta$; $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\mu \geq 0$.

Терминальное множество M есть объединение положений равновесия (5.1), имеющих вид $m_k = (z_1^k; 0)$, где z_1^k — неотрицательные корни уравнения $z_1 + \mu z_1^2 = \pi k$; $k = 0, 1, 2, \dots$. Нетрудно показать, что для корней этого уравнения справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\sqrt{1 + 8\pi(k+1)}} &\leq |z_1^{k+1} - z_1^k| \leq \\ &\leq \frac{2\pi}{\sqrt{1 + 8\pi k}}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.2)$$

из которой легко следует, что M имеет предельную точку на бесконечности.

Рассмотрим для (5.1) задачу уклонения (раскачки маятника) от M [3,4]. Проверим выполнимость Предположений 3.1 и 3.2 теоремы 4.1 об уклонении. Предположение 3.1 (о дискретности) выполнено в силу (5.2). Далее, для (5.1) в условиях (1.2) и (1.3) можно положить (ср. [3,4]) $C = (1 + a + \alpha + \beta)$, $L(K) = L(B(0_2, r)) = (1 + a + 2\mu ar + \alpha + \beta)$, отсюда видна их выполнимость. Предположение 3.2 выполнено, если $\beta > \alpha$. Поэтому по Теореме 4.1 задача о раскачке обобщенного математического маятника (5.1) разрешима.

Замечание 5.1. Для (5.1) при $\mu > 0$ не выполняются условия разрешимости задачи о раскачке маятника из работ [3, 4], в которых требуется строгая дискретность терминального множества (отсутствие предельных точек). При $\mu = 0$ условия разрешимости данной работы и [3, 4] совпадают.

Замечание 5.2. Выбор аргумента синуса в (5.1) связан с возможными неточностями при его измерении либо с неопределенностью в точном определении самих значений синуса (см. например [16]).

Закключение. Для глобальной задачи уклонения траекторий от разреженных множеств получены эффективные достаточные условия уклонения, указаны способы построения управления уклонения и приведен пример (обобщенный математический маятник). Основные результаты статьи изложены в [12].

Автор выражает глубокую благодарность Академику РАН Ф.Л. Черноусько за поддержку и советы, способствовавшие улучшению полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. Избранные труды. М.: МАКС Пресс, 2004. 552 с.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир., 1967. 480 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 496 с.
4. Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н. Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц // Тр. МИАН. 1977. Вып. 143. С. 105–128.
5. Мищенко Е.Ф., Сатимов Н. Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх с нелинейными управлениями // Дифф. ур-я. 1973. Т. 9. № 10. С. 1792–1797.
6. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука. 1980. 484 с.
7. Reshmin S.A., Chernousko F.L. Properties of the time-optimal feedback control for a pendulum-like system // JOTA. 2014. V.163. № 1. P. 230–252.
8. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные конфликтно управляемые процессы // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 3–14.
9. Bolotnik N.N., Nunuparov A.M., Chashchukhin V.G. Capsule-type vibration-driven robot an electromagnetic actuator and an opposing spring: dynamics and control of motion // J. Comput.&Syst. Sci. Int. 2016. V. 55. № 6. P. 986–1000.
10. Гусятников П.Б., Югай Л.П. Об одной задаче убегания в нелинейных дифференциальных играх с терминальным множеством сложной структуры // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1977. № 2. С. 8–13.
11. Мамадалиев Н. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сиб. матем. ж. 2015. Т. 56. № 1. С. 129–148.
12. Югай Л.П. Задача уклонения траекторий от разреженного терминального множества // Докл. РАН. Матем. Инф. Проц. упр. 2020. Т. 495. С. 80–84. DOI: 10.31857/S268695432006020X
13. Yugay L.P. Nonlinear integral inequalities and differential games of avoiding encounter // in: Recent Developments in Automatic Control Systems. Alsbergvej: River Pub., 2022. P. 97–111.
14. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 336 с.
15. Половинкин Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения. М.: Физматлит. 2014. 524 с.

16. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
17. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизации гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.

The Problem of Trajectories Avoiding from Rarefied Terminal Sets

L. P. Yugay^{1, #}

¹*Uzbek State University of Physical Culture and Sport, Chirchik, Uzbekistan*

[#]*e-mail: yugailp@mail.ru*

The problem of trajectories avoiding in nonlinear conflict-controlled processes (differential games) in L.S. Pontrjagin and E.F. Mishchenko statement is considered. Terminal sets have a particular rarefied structure. Unlike other works, they consist of countable points and may have a limit points. New sufficient conditions and evasion methods are obtained, which make it possible to solve a number of avoiding trajectory problems of oscillatory systems, including the swinging problem of the generalized mathematical pendulum.

Keywords: avoiding, evasion, pursuer, evader, control, rare, discrete terminal set, pendulum

REFERENCES

1. Pontrjagin L.S. Selected Proceedings. Moscow: MAKSS Press, 2004. 552 p. (in Russian)
2. Isaacs R. Differential Games. N.Y.: Wiley, 1965.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Positional Differential Games. Moscow: Nauka, 1974. 496 p.
4. Mishchenko E.F., Nikolskii M.S., Satimov N. The problem of avoiding encounter in several person differential games // Proc. Steklov Inst. of Math., 1977, iss. 143, pp. 105–128. (in Russian)
5. Mishchenko E.F., Satimov N. The problem of avoiding encounter in differential games with nonlinear controls // Diff. Eqns., 1973, vol. 9, no. 10, pp. 1792–1797. (in Russian)
6. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N. Control of Oscillations. Moscow: Nauka, 1980. 484 p. (in Russian)
7. Reshmin S.A., Chernousko F.L. Properties of the time-optimal feedback control for a pendulum-like system // JOTA, 2014, vol. 163, no. 1, pp. 230–252.
8. Pilipenko Yu.V., Chikrii A.A. The oscillatory conflict controlled processes // JAMM, 1993, vol. 57, iss. 3, pp. 3–14. (in Russian)
9. Bolotnik N.N., Nunuparov A.M., Chashchukhin V.G. Capsule-type vibration-driven robot an electromagnetic actuator and an opposing spring: dynamics and control of motion // J. Comput. & Syst. Sci. Int., 2016, vol. 55, no. 6, pp. 986–1000.
10. Gussyatnikov P.B., Yugay L.P. On an evasion problem in nonlinear differential games with terminal set of compound structure // Izv. AN SSSR Techn. Kibernet., 1977, no. 2, pp. 8–13. (in Russian)
11. Mamadaliev N. On an one pursuit problem with integral restrictions on control of players // Sib. Math. J., 2015, vol. 56, no. 1, pp. 129–148. (in Russian)
12. Yugay L.P. The problem of trajectories avoiding from rarefied terminal set // Dokl. Math., Inform., Control Proc., 2020, vol. 495, pp. 80–84.
DOI: 10.31857/S268695432006020X
13. Yugay L.P. Nonlinear integral inequalities and differential games of avoiding encounter // in: Recent Developments in Automatic Control Systems. Alsbergvej: River Pub., 2022, pp. 97–111.
14. Lehtweis K. Convex Sets. Moscow: Nauka, 1985. 336 p. (in Russian)
15. Polovinkin E.S. Multi-Valued Analysis and Differential Inclusions. Moscow: Fizmatlit, 2014. 524 p. (in Russian)
16. Kurzhanskii A.B. Control and Observation under Uncertainty. Moscow: Nauka, 1977. 392 p. (in Russian)
17. Subbotin A.I., Chentsov A.G. Optimization of Guarantee in Control Problems. Moscow: Nauka, 1981. 288 p. (in Russian)

УДК 533.72

ОСОБЕННОСТИ ФОТОФОРЕТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ В ВЯЗКОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ БИНАРНОЙ ГАЗОВОЙ СРЕДЕ© 2024 г. Н. В. Малай^{1,*}, П. В. Сохань^{1,**}, Ю. И. Шостак^{1,***}¹Белгородский государственный национальный исследовательский университет,

Белгород, Россия

*e-mail: malay@bsu.edu.ru,

**e-mail: sokhanp95@gmail.com,

***e-mail: juliashostak@mail.ru

Поступила в редакцию 01.10.2023 г.

После доработки 26.11.2023 г.

Принята к публикации 15.12.2023 г.

В квазистационарном приближении при малых числах Рейнольдса и Пекле проведено теоретическое описание фотофоретического движения в вязкой неизотермической бинарной газовой среде крупной испаряющейся капли сферической формы при значительных относительных перепадах температуры в ее окрестности. При описании свойств газообразной среды учитывался степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, диффузии и теплопроводности) и плотности от температуры. Проведенные численные оценки показали нелинейный характер зависимости фотофоретической силы и скорости от средней температуры поверхности капли.

Ключевые слова: фотофорез крупной нагретой испаряющейся капли

DOI: 10.31857/S0032823524010066 EDN: YUOSEM

1. Введение. В термодинамически неравновесных по температуре и концентрации бинарных газовых средах возникает упорядоченное движение взвешенных в них аэрозольных частиц, обусловленное силами молекулярной природы. В частности, фотофоретическое движение [1, 2]. При анализе этого явления следует различать три взаимосвязанные задачи: электродинамическую задачу (расчет характеристик поглощенного электромагнитного поля в объеме частицы), тепловую задачу (расчет температурных полей в объеме и на поверхности частицы) и газокINETическую задачу (описание тепло— и массопереноса в газовой фазе, вычисление полей сил, давлений, скоростей движения частиц и т.д.).

Традиционное понимание природы фотофореза сводится к следующему: находящаяся в поле направленного излучения твердая частица поглощает электромагнитную энергию, которая преобразуется в тепло и вызывает неоднородный нагрев ее поверхности. В свою очередь, на неоднородно нагретую частицу, помещенную в газ, действует фотофоретическая сила, приводящая ее в движение. Появление этой силы обусловлено тем, что молекулы газа, окружающие частицу после соударения с ее поверхностью, отражаются от нагретой стороны

с большим импульсом, чем от холодной. Частица начинает двигаться за счет нескомпенсированного импульса.

Первые расчеты распределения плотности электромагнитного поля в объеме крупных твердых сферических частиц, рассчитанные по теории Ми [3], качественно объяснили природу положительного и отрицательного фотофореза (движение частиц по и против направления распространения излучения). Однако расчеты интенсивности внутреннего поля еще не дают однозначной информации о направлении и величине фотофоретической силы и скорости движения частиц. Стало понятно, что исследование явления фотофореза должно проводиться комплексно.

Дальнейшее развитие теории фотофореза пошло по нескольким направлениям, во-первых, построение теории фотофореза для несферических частиц (цилиндрических, сфероидальных и т.п.). В этом случае возникает момент сил, приводящий к сложному и далеко не всегда прямолинейному движению частиц в поле направленного излучения [4]; во-вторых, развитие численных методов, позволяющих более точно рассчитывать распределение тепловых источников внутри частицы, например, [2, 5–7] и, в-третьих, построение теории фотофореза для летучих частиц (капель жидкости), которые широко встречаются как в природе, так и применяются в промышленности.

Интерес к исследованию этого явления (несмотря на то, что оно было открыто в начале XX века) не ослабевает, а только растет. Открываются все новые области применения этого явления, например, [8–12]. Все это делает фотофорез привлекательным методом как для фундаментальных исследований, так и для практических приложений.

Фотофоретическая сила может оказывать значительное влияние на процесс осаждения частиц в каналах; на движение частиц в зонах просветления аэродисперсных систем; при проведении тонкой очистки небольших объемов газов; отборе аэрозольных проб; нанесении заданной толщины специальных покрытий и т.д.

В связи с расширением приложений фотофореза возрос интерес к исследованию этого явления для твердых частиц при значительных относительных перепадах температуры в их окрестности, т.е. при температурах, близких к температурам плавления частиц. Температурное поле в этом случае существенно влияет на распределения полей скорости, давления и т.д. в окрестности частицы и в конечном итоге на силу и скорость фотофореза. В частности, гравитационное движение нагретых твердых частиц и капель рассмотрено в [13, 14], фото- и термофорез нагретых крупных твердых частиц в [15, 16].

При построении теории фотофореза нагретых твердых частиц мы сталкиваемся с большими математическими трудностями. Уравнения гидродинамики и теплопереноса с учетом зависимости коэффициентов переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности от температуры становятся нелинейными. Например, вязкость и теплопроводность для большинства газов степенным образом зависят от температуры. Эти трудности в конечном итоге были преодолены. Например, при решении уравнений гидродинамики использовался метод интегрирования дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов, доказаны теоремы сходимости этих рядов [17]. Проведенные численные оценки показали нелинейный характер зависимости силы и скорости фотофореза от средней температуры поверхности частицы. Показано также, что использование формул для силы и скорости фотофореза при малых относительных перепадах температуры приводят к существенным погрешностям.

Вданной работе ставится задача исследования фотофореза крупных испаряющихся капель при значительных относительных перепадах температуры в их окрестности.

2. Постановка задачи. Рассматривается испаряющаяся капля сферической формы радиусом R с плотностью ρ_i , теплопроводностью λ_i , вязкостью μ_i . Капля взвешена

в вязкой бинарной газовой смеси с плотностью ρ_e , теплопроводностью λ_e , коэффициентом взаимной диффузии D_{12} и вязкостью μ_e .

На частицу падает электромагнитное излучение, которое неоднородно нагревает ее поверхность. Нагрев приводит к тому, что средняя температура поверхности частицы по величине существенно отличается от температуры газообразной среды вдали от нее. Газ начинает двигаться вдоль поверхности в направлении возрастания температуры. Это явление называется тепловым скольжением газа, и оно вызывает появление фотофоретической силы. Под действием фотофоретической силы частица начинает двигаться. Наряду с фотофоретической силой на частицу действует сила вязкого сопротивления среды. Когда обе эти силы уравниваются по величине, частица начинает двигаться равномерно с постоянной скоростью, которую называют фотофоретической.

Бинарная газовая среда описывается двумя относительными компонентами. Первый компонент C_1 по своему физико-химическому составу совпадает с веществом жидкой капли. Граничная поверхность для него непрерывна. Второй компонент C_2 считается основным (несущим), и граничная поверхность для него непроницаема. Граница сред предполагается геометрической. Здесь $C_1 = n_1 / n_e$, $C_2 = n_2 / n_e$, $n_e = n_1 + n_2$ — полное количество молекул в единице объема смеси, $\rho_1 = n_1 m_1$, $\rho_2 = n_2 m_2$, $\rho_e = \rho_1 + \rho_2$, m_1, n_1 и m_2, n_2 — масса и численная концентрация молекул первого и второго компонентов смеси.

При математическом описании фотофореза предполагается: первая компонента удовлетворяет условию $C_1 \ll C_2$, что означает диффузионный режим испарения, т.е. когда основное влияние на процесс тепло- и массопереноса в окрестности капли определяется молекулярной диффузией [18, 19]. Молекулы конденсированной фазы испаряются или конденсируются при числах Маха, много меньших единицы, и учитывается влияние циркуляции вещества внутри капли. Испарение предполагается медленным. Радиус капли считается неизменным (время заметного изменения радиуса капли значительно больше времени релаксации диффузионных и тепловых неоднородностей вблизи нее). При движении капля сохраняет свою сферическую форму, т.е. силы поверхностного натяжения значительно больше силы вязкого сопротивления. Учитывается реактивный эффект, обусловленный испарением. В силу малости времени тепловой и диффузионной релаксации процесс тепло- и массопереноса в системе частица–газ протекает квазистационарно и свободной конвекцией пренебрегаем (число Грасгофа мало). Задача решается гидродинамическим методом, т.е. решаются уравнения гидродинамики и тепло- и массопереноса с соответствующими граничными условиями.

При описании свойств бинарной газовой смеси учитывается степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса от температуры [19, 20]:

$$\mu_e(t_e) = \mu_\infty t_e^\beta, \lambda_e(t_e) = \lambda_\infty t_e^\alpha, D_{12}(t_e) = D_\infty t_e^{1+\omega}$$

$$\lambda_i(t_i) = \lambda_{i0} t_i^\gamma, \rho_e = \rho_\infty / t_e, t_e = T_e / T_\infty, t_i = T_i / T_\infty, \quad (2.1)$$

где $\mu_\infty = \mu_e(T_\infty)$, $\rho_\infty = \rho_e(T_\infty)$, $\lambda_\infty = \lambda_e(T_\infty)$, $D_\infty = D_{12}(T_\infty)$, $\lambda_{i0} = \lambda_i(T_\infty)$, $0.5 \leq \alpha, \beta, \omega \leq 1$, $-1 \leq \gamma \leq +1$. Индексы “e” и “i” здесь и далее относятся к бинарной газовой смеси и частице соответственно; индексом “s” обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы, и индексом “ ∞ ” — физические величины, характеризующие газовую среду вдали от капли.

Фотофорез будем описывать в сферической системе координат (r, θ, φ) , связанной с центром масс испаряющейся капли. Ось Oz направим в направлении вектора интенсивности электромагнитного поля. Таким образом, наша задача сводится к

анализу обтекания испаряющейся капли бесконечным плоскопараллельным потоком газа, скорость которого U_∞ подлежит определению ($U_\infty \parallel Oz$).

Распределения скоростей, давлений, относительных концентраций и температур обладают аксиальной симметрией относительно оси Oz . При указанном выборе начала системы координат каплю можно считать неподвижной, а внешнюю среду (газ) — движущейся в сторону, противоположную направлению ее фактического движения со скоростью $U_{ph} = U_\infty$ (U_{ph} — скорость фотофореза).

В рамках сформулированных допущений решается следующая система газодинамических уравнений [18], описывающая распределение полей массовой скорости U_e и давления P_e в бинарной газовой смеси (2.2) и внутри испаряющейся капли (2.3), полей температур T_e, T_i и относительной концентрации первого компонента C_1 (2.4):

$$\frac{\partial}{\partial x_k} P_e = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu_e \left[\frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_k^j \frac{\partial U_n^e}{\partial x_n} \right] \right\}, \quad \text{div}(\rho_e U_e) = 0, \quad P_e = n_e k_B T_e \quad (2.2)$$

$$\mu_i \Delta U_i = \nabla P_i, \quad \text{div} U_i = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{div}(\lambda_e \nabla T_e) = 0, \quad \text{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i, \quad \text{div} \left(\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e} D_{12} \nabla C_1 \right) = 0 \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.2) — (2.4) решалась с краевыми условиями (2.5) — (2.12). На бесконечности ($y \rightarrow \infty$), граничной поверхности ($y = 1$) и при $y \rightarrow 0$ справедливы условия:

$$y = 1 : n_2 U_r^e + D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{\rho_e R} \frac{\partial C_1}{\partial y} = 0, \quad n_1 U_r^e - D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{\rho_e R} \frac{\partial C_1}{\partial y} = n_{1i} U_r^i \quad (2.5)$$

$$U_\theta^e - U_\theta^i = K_{TS}^{(o)} \frac{\nu_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + K_{DS}^{(o)} \frac{D_{12}}{R} \frac{\partial C_1}{\partial \theta}; \quad T_e = T_i \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & -\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} = \\ & = L \frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e} D_{12} \frac{\partial C_1}{\partial y} - \sigma_0 \sigma_1 R (T_i^4 - T_\infty^4) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{y} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial T_i} \frac{\partial T_i}{\partial \theta} = \\ & = \mu_i \left(\frac{\partial U_\theta^i}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^i}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^i}{y} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$y \rightarrow \infty : U_r^e = U_\infty \cos \theta, \quad U_\theta^e = -U_\infty \sin \theta, \quad P_e = P_\infty, \quad T_e = T_\infty, \quad C_1 = C_{1\infty} \quad (2.9)$$

$$y \rightarrow 0 : T_i \neq \infty, \quad P_i \neq \infty, \quad |U_i| \neq \infty \quad (2.10)$$

Здесь x_k — декартовы координаты, U_k^e — компоненты массовой скорости, $y = r/R$, $K_{TS}^{(0)}$, $K_{DS}^{(0)}$ — коэффициенты теплового и диффузионного скольжения,

которые определяются из решения в слое Кнудсена уравнения Больцмана. В общем случае их вид зависит как от модели межмолекулярного взаимодействия, так и от масс молекул и средней температуры поверхности частицы [21, 22]. При коэффициентах аккомодации по энергии и тангенциального импульса, равных единице, $K_{TS}^{(0)} = 1.161$, $K_{DS}^{(0)} = 0.3$ [21, 22], σ – коэффициент поверхностного натяжения, σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана, σ_1 – интегральная степень черноты частицы, L – удельная теплота фазового перехода, U_∞ – величина скорости набегающего потока ($U_\infty = |U_\infty|$), n_{i1} – число молекул в единице объема капли, ν_e – кинематическая вязкость, k_B – постоянная Больцмана, $q_i = \frac{4\pi n_k a_k}{n_s \lambda_0} I_0 B_k$ – объемная плотность внутренних источников тепла, $m_k = n_k + i a_k$ – комплексный показатель преломления капли, n_s – показатель преломления среды, λ_0, I_0 – длина волны и интенсивность падающего излучения, B_k – функция координат, рассчитываемая по теории Ми [2, 5, 6, 7]. Если капля поглощает излучение как черное тело, то поглощение излучения происходит в тонком слое с толщиной $\delta \ll R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности капли. В этом случае объемная плотность тепловых источников внутри слоя толщиной δ равна

$$q_i = \begin{cases} -\frac{I_0}{\delta} \cos \theta, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, R - \delta \leq r \leq R \\ 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Численная относительная концентрация молекул первого (испытывающего фазовый переход) компонента внешней смеси $C_1 = C_{1S}(T_{iS})$ у поверхности капли в линейном приближении по возмущению температуры $\delta T_i(y, \theta)$ должна удовлетворять условию, $C_1 = C_{1S}^{(H)}(T_{iS}) + C_{1S}^*(T_{iS}) \delta T_i$. Здесь $C_{1S}^{(H)}(T_{iS}) = n_{1S}^{(H)} / n_e$, $n_{1S}^{(H)}$ – насыщенная концентрация молекул первого (испытывающего фазовый переход) компонента бинарной смеси, зависящая от средней температуры поверхности капли T_{iS} ,

$$C_{1S}^* = \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_{1S}^{(H)}}{\partial T_i} - \text{производная от насыщенной концентрации насыщенных паров}$$

капли, взятая при средней температуре поверхности капли, $\delta T_i(y, \theta)$ находится из граничных условий на поверхности капли.

Указанные выше краевые условия имеют следующий физический смысл. На поверхности капли ($y = 1$): непроницаемость поверхности для второго и непрерывность радиального потока для первого компонентов бинарной газовой

смеси (2.5). Здесь $n_1 U_r^e$, $n_2 U_r^e$ и $D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{\rho_e R} \frac{\partial C_1}{\partial y}$, $D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{\rho_e R} \frac{\partial C_1}{\partial y}$ – радиальные

конвективные и диффузионные потоки первой и второй компоненты соответственно; разность касательных составляющих скоростей внутренней и внешней сред, равная сумме тепловой и диффузионной скоростей скольжений, и равенство температур учтены в (2.6); в (2.7) учтены непрерывность радиальных потоков тепла с учетом тепла, идущего на фазовый переход вещества капли в первый компонент бинарной газовой смеси и на излучение, и непрерывность касательных составляющих тензора вязких напряжений с учетом зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры учтено в (2.8).

На большом расстоянии от испаряющейся капли (при $y \rightarrow \infty$) справедливы граничные условия (2.9). На бесконечности осесимметричный поток внешней среды однороден в пространстве и имеет скорость U_∞ в направлении положительных значений оси Oz , а поля температуры T_e , давления и относительной концентрации C_1 летучего компонента газовой смеси не возмущены. Конечность физических величин (при $y \rightarrow 0$), характеризующих каплю, учтено в (2.10).

Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные $\mu_\infty, \lambda_\infty$ и сохраняющиеся в процессе движения частицы R, T_∞ и U_∞ . Из этих параметров можно составить безразмерную комбинацию, которую в литературе называют числом Рейнольдса $Re_\infty = (\rho_\infty R U_\infty) / \mu_\infty \ll 1$. В нашей задаче число Рейнольдса играет роль малого параметра ($\epsilon = Re_\infty$). При нахождении силы и скорости фотофореза ограничимся первой поправкой малости, что достаточно для практических приложений.

При $\epsilon \ll 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние, поэтому решение уравнений газовой динамики будем искать в виде разложения по малому параметру.

Вид граничных условий указывает на то, что выражения для компонент массовых скоростей можно искать в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [23]. Известно [23], что для определения общей силы, действующей на частицу, достаточно определить первые члены этих разложений. С учетом вышесказанного выражения для компонент массовой скорости в сферической системе координат будем искать в виде:

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty G(y) \cos \theta, \quad U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty g(y) \sin \theta$$

Здесь $G(y)$ и $g(y)$ – функции, зависящие от координаты y .

3. Поля скоростей, давлений, температур и относительной концентрации первого компонента. Исследование линеаризованной по скорости системы уравнений Навье–Стокса (2) в сферической системе координат показало, что для большинства газов коэффициент теплопроводности капли по величине много больше коэффициента теплопроводности газа (слабая угловая асимметрия распределения температуры). Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью от угла θ в системе “частица–газообразная среда” и считать, что вязкость бинарной смеси зависит только от температуры $t_{e0}(y)$, т.е. $\mu_e(t_e(y, \theta)) \approx \mu_e(t_{e0}(y))$. При этом $t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \delta t_e(y, \theta)$, где $\delta t_e(y, \theta) \ll t_{e0}(y)$, $\delta t_e(y, \theta)$ и $t_{e0}(y)$ определяются из решения тепловой задачи.

При таком допущении можно рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой и диффузионной части, а связь между ними осуществляется с помощью граничных условий. После этого был применен метод, разработанный в работах [13–17]. В этих работах показано, что линеаризованную по скорости систему уравнений Навье–Стокса (2.2) в конечном итоге можно свести к неоднородному линейному дифференциальному уравнению третьего порядка с изолированной особой точкой. Решение полученного дифференциального уравнения ищется в виде обобщенных степенных рядов, и доказана теорема существования полученного решения [17]. Таким образом, имеем следующие выражения для компонент массовой скорости U_e и давления P_e , удовлетворяющие краевым условиям (2.9):

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos \theta G(y) \\ G(y) = A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y) + G_3(y)$$

$$U_{\theta}^e(y, \theta) = -U_{\infty} \sin \theta g(y) \\ g(y) = A_1 G_4(y) + A_2 G_5(y) + G_6(y)$$

$$P_e(y, \theta) = P_{\infty} + \frac{\mu_{\infty} U_{\infty}}{R} t_{e0}^{\beta} \times \\ \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{y^2}{2} G''' + y \left[3 + \frac{\beta - 1}{2} y f \right] G'' + \\ & + \left[2 - y^2 f' - \frac{\beta}{2} y^2 f^2 + (\beta - 2) y f \right] G' + \\ & + \left[\frac{f}{3} - \frac{y^2 f''}{2} - y f' \left(2 + \frac{y \beta f}{2} \right) \right] G \end{aligned} \right\},$$

где

$$G_1(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} \ell^n, \quad G_3(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)} \ell^n + \omega_3 \ln(y) G_1(y)$$

$$f(y) = \frac{1}{t_{e0}(y)} \frac{dt_{e0}(y)}{dy}, \quad G_2(y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} \ell^n + \omega_2 \ln(y) G_1(y), \quad \ell(y) = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}$$

$$g(y) = G(y) + \frac{y}{2} (G'(y) - f(y)G(y))$$

$$G_k(y) = \left(1 + \frac{\ell}{2(1 + \alpha)} \right) G_{k-3}(y) + \frac{1}{2} y G'_{k-3}(y) \quad (k = 4, 5, 6), \quad f'(y), f''(y),$$

$G'_1(y)$, $G'_2(y)$ и т.д. первая, вторая и третья производные от соответствующих функций.

Значения коэффициентов $C_n^{(1)} (n \geq 1)$, $C_n^{(2)} (n \geq 3)$ и $C_n^{(3)} (n \geq 4)$ определяются с помощью рекуррентных соотношений:

$$C_n^{(1)} = \frac{1}{n(n+3)(n+5)} \times \\ \times \left\{ \begin{aligned} & \left[(n-1)(3n^2 + 13n + 8) + \gamma_1(n+2)(n+3) + \right. \\ & + \gamma_2(n+2) \left. \right] C_{n-1}^{(1)} - \left[(n-1)(n-2)(3n+5) + \right. \\ & + 2\gamma_1(n^2 - 4) + \gamma_2(n-2) + \gamma_3(n+3) \left. \right] C_{n-2}^{(1)} + \\ & + (n-2) \left[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3 \right] C_{n-3}^{(1)} \end{aligned} \right\}$$

$$C_n^{(2)} = \frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)} \times \left\{ \begin{aligned} & \left[(n-1)(3n^2 + n - 6) + \gamma_1 n(n+1) + n\gamma_2 \right] \times \\ & \times C_{n-1}^{(2)} - \left[\gamma_3(n+1) + (n-1)(n-2)(3n-1) + \right. \\ & \left. + 2\gamma_1 n(n-2) + \gamma_2(n-2) \right] C_{n-2}^{(2)} + (n-2) \times \\ & \times \left[(n-1)(n-3) + \gamma_3 + \gamma_1(n-3) \right] \times \\ & \times C_{n-3}^{(2)} + \frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) S_k^{(1)} \\ & - 6(-1)^n \frac{\gamma_4!}{(\gamma_4 - n)!n!} \end{aligned} \right\}$$

$$C_n^{(3)} = \frac{1}{n(n+2)(n-3)} \times \left\{ \begin{aligned} & (n-1) \left[3n^2 - 5n - 4 + \gamma_1 n + \gamma_2 \right] C_{n-1}^{(3)} - \\ & - \left[(n-1)(n-2)(3n-4) + \right. \\ & \left. + 2\gamma_1(n-1)(n-2) + \gamma_2(n-2) + n\gamma_3 \right] \times \\ & \times C_{n-2}^{(3)} + (n-2) \left[(n-1)(n-3) + \right. \\ & \left. + \gamma_1(n-3) + \gamma_3 \right] C_{n-3}^{(3)} + \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} \times \\ & \times \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1) S_k^{(1)} \end{aligned} \right\}$$

$$S_k^{(1)} = (3k^2 + 16k + 15) C_k^{(1)} - ((k-1)(6k+13) + \\ + \gamma_1(2k+5) + \gamma_2) C_{kk-1}^{(1)} + \left(\begin{aligned} & 3(k-1)(k-2) + \\ & + 2\gamma_1(k-2) + \gamma_3 \end{aligned} \right) C_{k-2}^{(1)}$$

При вычислении коэффициентов $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$ и $C_n^{(3)}$ по рекуррентным формулам необходимо учитывать, что

$$C_0^{(1)} = 1, \quad C_0^{(2)} = 1, \quad C_0^{(3)} = 1, \quad C_1^{(3)} = 0, \quad C_2^{(2)} = 1, \quad C_3^{(3)} = 1$$

$$C_1^{(2)} = -\frac{1}{8}(2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\gamma_4), \quad \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} = -\frac{\gamma_3}{60}(10 + 3\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\gamma_1 = \frac{1-\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_2 = 2\frac{1+\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_3 = \frac{2+2\alpha-\beta}{(1+\alpha)^2}, \quad \gamma_4 = \frac{\beta}{1+\alpha}$$

$$\frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} = \frac{1}{15} \left[3\gamma_3 - (8 + 6\gamma_1 + 2\gamma_2) \times \right. \\ \left. \times C_1^{(2)} + 3\gamma_4(\gamma_4 - 1) \right], \quad C_2^{(3)} = \frac{\gamma_3}{4},$$

а коэффициенты $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$ и $C_n^{(3)}$ при $n < 0$ равны нулю.

Общее решение системы уравнений (2.3), описывающей поле скорости и давления внутри испаряющейся капли, имеет вид [18, 23]

$$U_r^i(y, \theta) = U_\infty \cos \theta (A_3 + A_4 y^2), \quad U_\theta^i(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta (A_3 + 2A_4 y^2)$$

$$P_i(y, \theta) = P_0 + 10 \frac{\mu_i}{R} U_\infty \cos \theta A_4 y^2$$

Постоянные интегрирования $A_1, A_2, A_3, A_4, \Gamma_0$ определяются из краевых условий задачи.

Решения уравнений теплопроводности вне и внутри капли ищутся методом разделения переменных, а решение уравнения диффузии сводится к неоднородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка с изолированной особой точкой. Решение полученного дифференциального уравнения ищется в виде обобщенных степенных рядов [24]. Таким образом, общие решения уравнений тепло- и массопереноса, удовлетворяющие краевым условиям (2.9) — (2.10), имеют вид:

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{el}(y, \theta), \quad t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{il}(y, \theta)$$

$$C_1(y, \theta) = C_{10}(y) + \varepsilon C_{11}(y, \theta)$$

Здесь

$$t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad t_{el}(y, \theta) = \frac{\cos \theta}{t_{e0}^\alpha} \frac{\Gamma_1}{y^2}, \quad C_{10}(y) = C_{1\infty} + M_0 (t_{e0}^{(1+\alpha-\omega)} - 1)$$

$$t_{i0}(y) = \left(B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y} \int_y^1 \psi_0 dy + \int_y^1 \frac{\psi_0}{y} dy \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}$$

$$H_0 = \frac{(1+\gamma)R^2}{3\lambda_{i0}T_\infty} J_0, \quad H_1 = \frac{RJ_1}{3\lambda_{i0}T_\infty}, \quad \psi_0(y) = -\frac{R^2(1+\gamma)}{2\lambda_{i0}T_\infty} y^2 \int_{-1}^1 q_1 dx$$

$$C_{11}(y, \theta) = \cos \theta \left(M_1 \Phi_1(y) + \frac{1+\alpha-\omega}{t_{e0}^\omega} M_0 \frac{\Gamma_1}{y^2} \right)$$

$$t_{il}(y, \theta) = \frac{\cos \theta}{t_{i0}^\gamma} \left[\begin{aligned} & B_1 y + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{3} \times \\ & \times \left(y \int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y \psi_1 y dy \right) \end{aligned} \right]$$

$$J_0 = \frac{1}{V} \int_V q_i dV, \quad J_1 = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV, \quad \Psi_1(y) = -\frac{3R^2}{2\lambda_{i0}T_\infty} y^2 \int_{-1}^{+1} q_1 x dx$$

$$\Delta_0^{(1)} = 1, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad x = \cos\theta, \quad z = r \cos\theta, \quad \Phi_1(y) = \frac{1}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n^{(1)} \ell^n$$

$$\delta T_i(y, \theta) = t_{i1}(y, \theta) T_\infty, \quad \delta T_i(y, \theta)|_{y=1} = \frac{\cos\theta}{t_{is}^\gamma} T_\infty (B_1 + H_1)$$

$\int_V q_i z dV$ – дипольный момент плотности тепловых источников [2, 13–16], где

$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$, интегрирование ведется по всему объему испаряющейся капли.

Коэффициенты $\Delta_n^{(1)}$ ($n \geq 1$) определяются из рекуррентных соотношений

$$\Delta_n^{(1)} = \frac{1}{n(n+3)} \left\{ \begin{aligned} & (n+1) \left[2(n-1) - \frac{\omega}{1+\alpha} \right] \Delta_{n-1}^{(1)} - \\ & - (n-2) \left[n-1 - \frac{\omega}{1+\alpha} \right] \Delta_{n-2}^{(1)} \end{aligned} \right\},$$

коэффициенты $\Delta_n^{(1)}$ при $n < 0$ равны нулю.

Среднее значение температуры поверхности капли T_{iS} находится из решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} t_{iS} &= t_{eS}, \quad \Gamma_0 = t_{eS}^{1+\alpha} - 1, \quad M_0 = \frac{C_{1S}^{(H)} - C_{1\infty}}{t_{eS}^{(1+\alpha-\omega)} - 1} \\ \frac{\ell^{(S)}}{1+\alpha} t_{eS} &= \frac{R^2}{3\lambda_{eS}T_\infty} J_0 - L \frac{n_\infty^2 m_1 m_2 D_{12}^{(S)}}{\rho_\infty T_\infty \lambda_{eS}} \times \\ &\times \frac{1+\alpha-\omega}{1+\alpha} M_0 \ell^{(S)} t_{eS}^{\alpha-\omega} - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_\infty^3}{\lambda_{eS}} (t_{eS}^4 - 1) \end{aligned}$$

Здесь $T_{iS} = T_\infty t_{iS}$, $T_{eS} = T_\infty t_{eS}$, $t_{iS} = t_{i0}(y=1)$, $t_{eS} = t_{e0}(y=1)$, $\lambda_{eS} = \lambda_\infty t_{eS}^\alpha$, $\lambda_{iS} = \lambda_{i0} t_{iS}^\gamma$, $n_\infty = n_e(T_\infty)$, $\rho_\infty = \rho_e(T_\infty)$, $D_{12}^{(S)} = D_\infty t_{eS}^{1+\omega}$, $\ell^{(S)} = \ell(y=1)$.

4. Фотофоретическая сила и скорость. Анализ полученных результатов. Результирующая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности [18]:

$$F_z = \int_{(S)} \left(\begin{aligned} & -P_e \cos\theta + \sigma_{rr} \times \\ & \times \cos\theta - \sigma_{rq} \sin\theta \end{aligned} \right) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \Big|_{r=R} \quad (4.1)$$

Здесь $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений [18].

После подстановки в (4.1) выше полученных выражений и интегрирования получаем, что результирующая сила складывается из силы вязкого сопротивления

среды F_μ и фотофоретической силы F_{ph} , где n_z — единичный вектор в направлении оси Oz ,

$$F_\mu = 6\pi R\mu_\infty f_\mu U_\infty n_z, \quad F_{ph} = -6\pi R\mu_\infty f_{ph} J_1 n_z \quad (4.2)$$

Значения коэффициентов f_μ и f_{ph} могут быть оценены с помощью следующих формул:

$$f_\mu = \frac{2}{3} \frac{N_2(1) + N_3(1) \frac{\mu_{eS}}{3\mu_{iS}}}{N_1(1) + N_4(1) \frac{\mu_{eS}}{3\mu_{iS}}}, \quad N_1(1) = G_1(1)G_2'(1) - G_2(1)G_1'(1)$$

$$N_3(1) = G_3(1)G_1''(1) - G_1(1)G_3''(1) + \\ + \left(2 + \frac{\ell^{(S)}}{1+\alpha}\right) \left(G_3(1)G_1'(1) - G_1(1)G_3'(1)\right)$$

$$N_4(1) = G_2(1)G_1''(1) - G_1(1)G_2''(1) + \\ + \left(2 + \frac{\ell^{(S)}}{1+\alpha}\right) \left(G_2(1)G_1'(1) - G_1(1)G_2'(1)\right)$$

$$N_2(1) = G_1(1)G_3'(1) - G_3(1)G_1'(1), \quad a_0 = 1 + 4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_\infty^3 t_{iS}^3}{\lambda_{iS}}, \quad v_{eS} = v_e(T_{eS})$$

$$\delta = a_0 + 2 \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} - L \frac{n_\infty^2 m_1 m_2}{\rho_\infty T_\infty \lambda_{iS} t_{eS}} D_{12}^{(S)} \frac{\Phi_1'(1)}{\Phi_1(1)} \times \\ \times \left(C_{1S}^* T_\infty - (1 + \alpha - \omega)(1 + 2 \frac{\Phi_1(1)}{\Phi_1'(1)}) M_0 t_{eS}^{\alpha-\omega} \right)$$

$$a_1 = \frac{m_1 G_4(1)}{\rho_\infty G_1(1)} \left(1 - \frac{\mu_{eS}}{3\mu_{iS}} \frac{G_4'(1) + G_1(1) - G_4(1)}{G_4(1)} \right), \quad \mu_{eS} = \mu_e(T_{iS}), \quad \mu_{iS} = \mu_i(T_{iS})$$

$$f_{ph} = \frac{4}{3} \frac{G_1(1)}{\delta \lambda_{iS} T_\infty \left(N_1(1) + N_4(1) \frac{\mu_{eS}}{3\mu_{iS}} \right)} \times \\ \times \left[K_{TS}^{(0)} \frac{v_{eS}}{t_{eS}} + K_{DS}^{(0)} D_{12}^{(S)} C_{1S}^* T_\infty + \frac{R}{3\mu_{iS}} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} - \right. \\ \left. - \frac{D_{12}^{(S)} n_\infty^2}{n_{2\infty}} \frac{\Phi_1'(1)}{\Phi_1(1)} \left[C_{1S}^* T_\infty \left(\frac{1}{n_{1i} t_{eS}} - a_1 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (1 + \alpha - \omega) M_0 t_{eS}^{1+\alpha-\omega} \left(\left(\frac{1}{n_{1i} t_{eS}} - a_1 \right) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left(1 + 2 \frac{\Phi_1(1)}{\Phi_1'(1)} \right) - \frac{\ell^{(S)}}{1+\alpha} \frac{\Phi_1(1)}{\Phi_1'(1)} a_1 \right) \right] \right] \right]$$

Здесь через $G_1(1)$, $G_2(1)$ и т.д. обозначены значения соответствующих функций, взятые при $y = 1$, а через G_1' , G_1'' и т.д. первые и вторые производные от соответствующих функций.

Приравнявая полную силу к нулю (капля движется прямолинейно и равномерно: силы вязкого сопротивления среды уравниваются фотофоретической силой), получаем выражение для фотофоретической скорости крупной испаряющейся капли сферической формы

$$U_{ph} = -\frac{f_{ph}}{f_{\mu}} J_1 n_z \quad (4.3)$$

Из формул (4.2) — (4.3) видно, что величина и направление скорости фотофореза определяются величиной и направлением дипольного момента плотности тепловых источников $\int_V q_i z dV n_z$, т.е. может иметь место как положительный фотофорез, так и

отрицательный. При постоянной величине дипольного момента увеличение радиуса R приводит к уменьшению фотофоретической скорости, которое происходит обратно пропорционально R^3 . Фотофоретическая сила и скорость существенно зависят от теплопроводности вещества частицы. При λ_i , стремящемся к бесконечности, сила и скорость фотофореза при фиксированной величине дипольного момента стремятся к нулю.

Входящий в силу и скорость фотофореза коэффициент f_{ph} состоит из суммы четырех слагаемых: первое слагаемое, которое пропорционально коэффициенту теплового скольжения $K_{TS}^{(0)}$ и за счет которого испаряющаяся капля стремится двигаться в сторону падения температуры во внешней среде, т.е. из области с более высокой температурой в область с более низкой температурой; четвертое слагаемое (описывающего реактивную часть импульса, действующего на каплю) связано с фазовым переходом и циркуляцией вещества внутри капли (внутреннее течение). Они входят в коэффициент f_{ph} с разными знаками. Капля может двигаться как в сторону роста, так и в сторону падения температур; третье слагаемое обусловлено переменным межфазовым поверхностным натяжением на поверхности капли. В силу того, что для большинства жидкостей поверхностное натяжение уменьшается с ростом температуры $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T_i} < 0\right)$, то третье слагаемое дает вклад в силу и скорость, на-

правленный в сторону роста температуры во внешней к капле среде; за счет второго слагаемого (диффузионного скольжения, которое пропорционально коэффициенту $K_{DS}^{(0)}$) капля может двигаться как в сторону роста, так и в сторону падения температуры, в зависимости от масс компонентов бинарной газовой смеси. Если масса молекул компонента внешней смеси, испытывающей фазовый переход на поверхности капли $m_1 < m_2$, то $K_{DS}^{(0)} > 0$. В противном случае — $K_{DS}^{(0)} < 0$. Рассмотренные выше качественно слагаемые показывают, что сила и скорость фотофореза могут меняться не только по величине, но и по направлению, в зависимости от конкретных значений физических величин. Кроме того, в выражение для коэффициента f_{ph} входят функции G_1, G_2, G_3, Φ и их производные, которые зависят как от средней температуры поверхности капли, так и от показателей $\alpha, \beta, \omega, \gamma$. Как показали конкретные численные оценки, они также влияют на величину силы и скорости фотофореза.

Полученные в работе формулы (4.2) — (4.3) для силы сопротивления, силы и скорости фотофореза можно использовать и при малых относительных перепадах

температуры. Можно оценивать, например, силу и скорость фотофореза для капель воды. В этом случае средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей газообразной среды вдали от нее и при $\Gamma_0 \rightarrow 0$ имеем:

$$G_1 = 1, G_1' = -3, G_1'' = 12, G_2 = 1, G_2' = -1, G_2'' = 2, G_3 = 1, G_3' = 0, G_3'' = 0, N_1 = 2, N_2 = 3, N_3 = 6, N_4 = 6, G_4 = -1/2, G_4' = 3/2, \Phi_1 = -1, \Phi_1' = -2.$$

В частности, в предельном случае ($\Gamma_0 \rightarrow 0$) формулы (4.2) — (4.3) переходят в соответствующие выражения при малых относительных перепадах температуры [1, 2, 25].

Для иллюстрации (в качестве примера) влияния нагрева поверхности испаряющейся капли на силу фотофореза на рис. 1. приведены графики зависимости функций $f_{ph}^* = f_{ph} / f_{ph}|_{T_{is}=800K}$, $f_{phm}^* = f_{phm} / f_{phm}|_{T_{is}=800K}$ от

средней температуры поверхности частицы T_{is} ($800K \leq T_{is} \leq 1300K$) крупной капли лития радиусом $R = 30 \cdot 10^{-6}$ м, взвешенной в воздухе ($T_\infty = 288K$, $P_\infty = 10^5$ Па, $C_{1\infty} = 0.01$, $\alpha = 0.765$, $\beta = 0.693$, $\omega = 0.652$). Функция f_{phm}^* (сплошная линия на рис. 1.) оценивалась по формулам при малых относительных перепадах температуры [25], но при этом коэффициенты молекулярного переноса брались при средней температуре поверхности капли. Это сделано для того, чтобы понять, можно ли пользоваться формулами при малых относительных перепадах температуры в нашем случае или нет. Из графиков видно, что формулы для силы и скорости фотофореза, полученные при малых относительных перепадах температуры, дают существенную погрешность в случае значительных относительных перепадов температур.

Заключение. В статье получены формулы, позволяющие оценивать силу сопротивления и силу и скорость фотофореза крупных испаряющихся капель сферической формы в вязкой неизотермической бинарной газовой среде при произвольных относительных перепадах температуры в их окрестности, и они носят наиболее общий характер. При описании свойств газовой среды учитывался степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности, диффузии) и плотности от температуры. Численные оценки показали нелинейный характер зависимости силы и скорости фотофореза от средней температуры поверхности частицы.

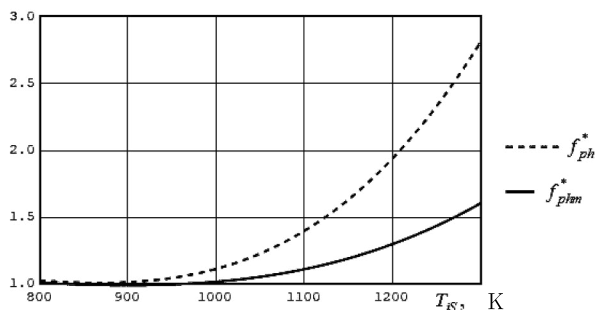


Рис. 1. Графики зависимости функций f_{ph}^* и f_{phm}^* от средней температуры поверхности частицы T_{is} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yalamov Yu.I., Kutukov V.B., Shchukin E.R.* Theory of the photophoretic motion of the large-size volatile aerosol particle // *J. Colloid&Interface Sci.* 1976. V. 57(3). P. 564–571.
2. *Береснев С.А., Кочнева Л.Б.* Фактор асимметрии поглощения излучения и фотофорез аэрозолей // *Оптика атмосферы и океана.* 2003. Т. 16. № 2. С. 134 — 141.
3. *Greene W.M., Spjut R.E., Bar-Ziv E. et al.* Photophoresis of irradiated spheres: absorption centers // *J. Opt. Soc. Amer. B.* 1985. V. 2. № 6. P. 998–1004.
4. *Preining O.* Photophoresis // in *Aerosol Science* / Ed. by *Davis C.N.* New York: Acad. Press, 1966. P. 111–135.
5. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 384 с.
6. *Волковицкий О.А., Седунов Ю.С., Семенов Л.П.* Распространение интенсивного лазерного излучения в облаках. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 312 с.
7. *Рязанов К.С., Попов И.В., Малай Н.В.* Вычисление распределения поглощаемой электромагнитной энергии внутри частиц сферической формы // *Свид. о гос. рег. прогр. для ЭВМ* № 2010616043 14.09.2010.
8. *Hitoshi W., Hideaki M., Satoshi T., Masayori S. et al.* Migration analysis of micro-particles in liquids using microscopically designed external fields // *Anal. Sci. Japan Soc. for Anal. Chem.* 2004. V. 20 (3). P. 423–434.
9. *Cheremisin A.A., Kushnarenko A.V.* Photophoretic interaction of aerosol particles and its effect on coagulation in rarefied gas medium // *J. Aerosol Sci.* 2013. V. 62. P. 26–39.
10. *Smith D., Woods C., Seddon A., Hoerber H.* Photophoretic separation of single-walled carbon nanotubes: a novel approach to selective chiral sorting // *Phys. Chem. Chem. Phys. Roy. Soc. of Chem. (RSC).* 2014. V. 16(11). P. 5221–5228.
11. *Cortes J., Stanczak C., Azadi M., Narula M. et al.* Photophoretic levitation: photophoretic levitation of macroscopic nanocardboard plates // *Adv. Mater.* 2020. V. 32 (16). P. 207–227.
12. *Schafer B., Kim J., Vlassak J., Keith D.* Towards photophoretically levitating macroscopic sensors in the stratosphere // *Appl. Phys.* 2022. P. 1–39.
13. *Малай Н.В., Шукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С.* Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде // *ПМТФ.* 2008. Т. 49. № 1. С. 74 — 80.
14. *Малай Н.В., Рязанов К.С., Шукин Е.Р., Стукалов А.А.* О силе, действующей на нагретую сферическую каплю, движущуюся в газообразной среде // *ПМТФ.* 2011. Т. 52. № 4. С. 63 — 71.
15. *Малай Н.В., Лиманская А.В., Шукин Е.Р.* Термофоретическое движение нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы // *ПМТФ.* 2016. Т. 57. № 2(336). С. 164–171.
16. *Малай Н.В., Лиманская А.В., Шукин Е.Р., Стукалов А.А.* Фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы // *ЖТФ.* 2012. Т. 82. Вып. 10. С. 42–50.
17. *Малай Н.В., Лиманская А.В., Шукин Е.Р.* Решение краевой задачи для линеаризованного по скорости уравнения Навье–Стокса в случае неизотермического обтекания равномерно нагретой сферы газообразной средой // *Дифф. ур-я.* 2015. Т. 51. № 10. С. 1328–1337.
18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2003. 736 с.
19. *Бретинайдер Ст.* Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966. 535 с.
20. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
21. *Юшканов А.А., Савков С.А., Яламов Ю.И.* О зависимости коэффициентов скольжения от модели межмолекулярного взаимодействия // *Инж.-физ. ж.* 1986. Т. 51. № 4. С. 686–687.
22. *Яламов Ю.И., Поддоскин А.Б., Юшканов А.А.* О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны // *Докл. АН СССР.* 1980. Т. 237. № 2. С. 1047–1050.
23. *Хэппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
24. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Лань, 2003. 576 с.

25. Малай Н.В., Щукин Е.Р., Лиманская А.В. Фотофорез крупной летучей сферической капли при малых перепадах температуры в ее окрестности с учетом термодиффузии // Научн. вестн. Белгород. гос. ун-та. Математика и Физика. 2009. Т. 17. № 13(65). С. 84–99.

Features of the Photophoretic Motion of an Evaporating Droplet in a Viscous Non-Isothermal Binary Gas Medium

N. V. Malai^{a,*}, P. V. Sohan^{a,##}, Yu. I. Shostak^{a,###}

^a*Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia*

^{*}*e-mail: malay@bsu.edu.ru,*

^{##}*e-mail: sokhanp95@gmail.com,*

^{###}*e-mail: juliashostak@mail.ru*

A theoretical description of the photophoretic motion in a viscous nonisothermal binary gas mixture of a large evaporating spherical droplet with significant relative temperature differences in its vicinity is carried out in the quasi-stationary approximation for small Reynolds and Pecle numbers. When describing the properties of a gaseous medium, a power-law type of dependence of the coefficients of molecular transport (viscosity, diffusion and thermal conductivity) and density on temperature was taken into account. Numerical estimates have shown the nonlinear nature of the dependence of the photophoretic force and velocity on the average temperature of the droplet surface.

Keywords: photophoresis of a large heated evaporating droplet.

REFERENCES

1. Yalamov Yu.I., Kutukov V.B., Shchukin E.R. Theory of the photophoretic motion of the large-size volatile aerosol particle // J. Colloid&Interface Sci., 1976, vol. 57(3), pp. 564–571.
2. Beresnev S.A., Kochneva L.B. The factor of asymmetry of radiation absorption and aerosol photophoresis // Optics Atmosph.&Ocean, 2003, vol. 16, no. 2, pp.134 — 141.
3. Greene W.M., Spjut R.E., Bar-Ziv E. *et al.* Photophoresis of irradiated spheres: absorption centers // J. Opt. Soc. Amer. B, 1985, vol. 2, no. 6, pp. 998–1004.
4. Preining O. Photophoresis //in: Aerosol Science / Ed. by Davis C.N. N.Y.: Acad. Press, 1966. pp. 111–135.
5. Boren K., Hafman D. Absorption and Scattering of Light by Small Particles. Moscow: Mir, 1986. 384 p. (in Russian)
6. Volkovitsky O.A., Sedunov Yu.S., Semenov L.P. Propagation of Intense Laser Radiation in Clouds. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1982. 312 p. (in Russian)
7. Ryazanov K.S., Popov I.V., Malai N.V. Calculation of the distribution of absorbed electromagnetic energy inside spherical particles // Svid. about the State Reg. of the Comput. Progr. no. 2010616043 14.09.2010.
8. Hitoshi W., Hideaki M., Satoshi T., Masayori S. *et al.* Migration analysis of micro-particles in liquids using microscopically designed external fields // Anal. Sci. Japan Soc. for Anal. Chem., 2004, vol. 20 (3), pp. 423–434.
9. Cheremisin A.A., Kushnarenko A.V. Photophoretic interaction of aerosol particles and its effect on coagulation in rarefied gas medium // J. Aerosol Sci., 2013, vol. 62, pp. 26–39.
10. Smith D., Woods C., Seddon A., Hoerber H. Photophoretic separation of single-walled carbon nanotubes: a novel approach to selective chiral sorting // Phys. Chem. Chem. Phys. Roy. Soc. Chem. (RSC), 2014, vol. 16(11), pp. 5221–5228.
11. Cortes J., Stanczak C., Azadi M., Narula M. *et al.* Photophoretic levitation: photophoretic levitation of macroscopic nanocardboard plates // Adv. Mater., 2020, vol. 32 (16), pp. 207–227.
12. Schafer B., Kim J., Vlassak J., Keith D. Towards photophoretically levitating macroscopic sensors in the stratosphere // Appl. Phys., 2022, pp. 1–39.
13. Malai N.V., Shchukin E.R., Stukalov A.A., Ryazanov K.S. Gravitational motion of a uniformly heated solid particle in a gaseous medium // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2008, vol. 49, no. 1, pp. 74–80.

14. *Malai N.V., Ryazanov K.S., Shchukin E.R., Stukalov A.A.* On the force acting on a heated spherical drop moving in a gaseous medium // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2011, vol. 52, no. 4, pp. 63 — 71.
15. *Malai N.V., Limanskaya A.V., Shchukin E.R.* Thermophoretic motion of heated large aerosol particles of spherical shape // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 2(336), pp. 164—171.
16. *Malai N.V., Limanskaya A.V., Shchukin E.R., Stukalov A.A.* Photophoresis of heated large aerosol particles of spherical shape // *Tech. Phys.*, 2012, vol. 82, no. 10, pp. 42—50.
17. *Malai N.V., Limanskaya A.V., Shchukin E.R.* Solution of the boundary value problem for the Navier—Stokes equation linearized by velocity in the case of non-isothermal flow around a uniformly heated sphere by a gaseous medium // *Diff. Eqns.*, 2015, vol. 51, no. 10, pp. 1328—1337.
18. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Vol. VI. Hydrodynamics. Moscow: Fizmatlit, 2003. 736 p. (in Russian)
19. *Bretschneider St.* Properties of Gases and Liquids. Engineering Methods of Calculation. Moscow: Chemistry, 1966. 535 p. (in Russian)
20. *Vargaftik N.B.* Handbook of Thermophysical Properties of Gases and Liquids. Moscow: Nauka, 1972. 720 p. (in Russian)
21. *Yushkanov A.A., Savkov S.A., Yalamov Yu.I.* On the dependence of slip coefficients on the model of intermolecular interaction // *J. Engng. Phys.& Thermophys.*, 1986, vol. 51, no. 4, pp. 686—687.
22. *Yalamov Yu.I., Poddoskin A.B., Yushkanov A.A.* On boundary conditions in the flow of inhomogeneously heated gas around a spherical surface of small curvature // *Dok I. AN USSR*, 1980, vol. 237, no. 2, pp. 1047—1050.
23. *Happel J., Brenner G.* Hydrodynamics at Small Reynolds Numbers. Moscow: Mir, 1976. 630 p. (in Russian)
24. *Kamke E.* Handbook of Ordinary Differential Equations. Moscow: Lan, 2003. 576 p. (in Russian)
25. *Malai N.V., Shchukin E.R., Limanskaya A.V.* Photophoresis of a large volatile spherical droplet at small temperature differences in its vicinity, taking into account thermal diffusion // *Sci. Bull. Belgorod State Univ. Math.&Phys.*, 2009, vol. 17, no. 13(65), pp. 84—99.

УДК 539.376

РАЗГОН СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ В ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПО ГЛУБИНЕ ПРЕДЕЛОМ ТЕКУЧЕСТИ

© 2024 г. Д. В. Георгиевский^{1-3,*}, В. А. Банько^{1,**}¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия³Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

**e-mail: mr.banko.vlad@mail.ru

Поступила в редакцию 19.05.2023 г.

После доработки 08.12.2023 г.

Принята к публикации 10.12.2023 г.

Аналитически исследуется задача о разгоне из состояния покоя сдвигового течения в вязкопластической полуплоскости при задании на границе касательного напряжения. Предполагается, что динамическая вязкость и плотность среды постоянны, а предел текучести может меняться непрерывным либо разрывным образом в зависимости от глубины. Вся полуплоскость в любой момент времени состоит из заранее неизвестных слоев, где реализуется сдвиговое течение, и жестких зон. Последние могут перемещаться как жесткое целое, а могут быть неподвижны, как, например, полуплоскость, до которой возмущения, вызванные действием касательных усилий, еще не дошли. Для нахождения полей напряжения и скорости развивается метод, основанный на квазиавтомодельных диффузионно-вихревых решениях параболических задач в областях с движущимися границами. Обсуждается вопрос о том, какие выводы о распределении предела текучести по глубине можно сделать по доступным измерениям скорости границы полуплоскости.

Ключевые слова: вязкопластическая среда, предел текучести, разгон, касательное напряжение, интенсивность напряжений, одномерное сдвиговое течение, жесткая зона, диффузия вихревого слоя

DOI: 10.31857/S0032823524010071 EDN: YUONUJ

1. Диффузия вихревого слоя в вязкопластической полуплоскости. В работе [1] ставится и исследуется начально-краевая задача о нестационарном сдвиговом течении несжимаемой вязкопластической среды с плотностью ρ , динамической вязкостью μ и пределом текучести σ_s в полуплоскости

$$\begin{aligned}\Omega_\infty &= \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 > 0\} \\ \partial\Omega_\infty &= \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 = 0\}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Тензорно-линейные определяющие соотношения двухконстантного тела Бингама, связывающие декартовы компоненты девиатора напряжений s_{ij} и тензора скоростей деформаций v_{ij} , в силу несжимаемости совпадающего со своим девиатором, принимаются в виде

$$s_{ij} = \left(\frac{\sigma_s}{v_u} + 2\mu \right) v_{ij}; \quad v_u = \sqrt{v_{kl}v_{kl}} \quad (1.2)$$

Кинематика и напряженное состояние при нестационарном одномерном сдвиге в условиях плоской деформации характеризуются единственной отличной от нуля компонентой скорости $v_1(x_2, t) \equiv v(x, t)$ и единственной ненулевой компонентой девиатора напряжений $s_{12}(x_2, t) \equiv \sigma(x, t)$. Интенсивность скоростей деформаций имеет вид $v_u = |\partial v / \partial x| / \sqrt{2}$.

Изначально вся полуплоскость Ω_∞ покоилась, а начиная с момента времени $t = 0$ на границе $\partial\Omega_\infty$ действует заданное касательное напряжение

$$\sigma(0, t) = S(t)h(t), \quad (1.3)$$

где $h(t)$ — функция Хевисайда, $S(t)$ — неотрицательная, кусочно-непрерывная, монотонно неубывающая функция, ограниченная при конечных t . Обозначим через $t_0 \geq 0$ момент времени такой, что $S(t) > \sigma_s / \sqrt{2} = \tau_s$ при $t > t_0$. Величину τ_s называют пределом текучести при сдвиге.

Вся полуплоскость Ω_∞ (1.1) в любой момент $t > t_0$ состоит из двух частей [2]: Ω_f и Ω_r . Зона сдвигового течения Ω_f представляет собой расширяющийся со временем слой

$$\Omega_f = \{-\infty < x_1 < \infty, 0 < x < x^*(t)\}, \quad (1.4)$$

где $x^*(t)$ — определяемая в процессе решения монотонно возрастающая функция; $x^*(t_0) = 0$. При $t \leq t_0$ подобласть Ω_f отсутствует.

Остальная часть полуплоскости Ω_∞ — неподвижная полуплоскость

$$\Omega_r = \{-\infty < x_1 < \infty, x \geq x^*(t)\}, \quad (1.5)$$

занятая жесткой зоной. В ней $|\sigma(x, t)| \equiv \tau_s$ вплоть до бесконечности по x .

Таким образом, в зоне сдвига имеет место система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} \\ \sigma &= \tau_s \operatorname{sign} \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 &< x < x^*(t), \quad t > t_0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

с граничными условиями (1.3) и

$$|\sigma(x^*(t), t)| = \tau_s \quad (1.7)$$

Начальных условий ставить не требуется, поскольку в момент начала сдвига $t = t_0$ толщина слоя Ω_f равна нулю, т. е. $\lim_{t \rightarrow t_0 + 0} x^*(t) = 0$.

В жесткой зоне вместо уравнений (1.6) справедлива система

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

$$x \geq x^*(t), \quad t > t_0$$

с одним граничным условием $\lim_{x \rightarrow \infty} v = 0$. Разыскиваются функции $\sigma(x, t)$ и $v(x, t)$ соответственно классов C_0 и C_1 во всей полуплоскости Ω_∞ (1.1), занятой вязкопластическим материалом. Из указанных требований непрерывности и системы (1.8) следует неподвижность жесткой полуплоскости и равенство $|\sigma| = \tau_s$ всюду в ней.

В качестве дополнительного условия для нахождения подвижной границы $x^*(t)$ принимается следующее альтернативное в теории задач Стефана [3] требование к решению. Оно при любых фиксированных x и t должно стремиться к решению соответствующей задачи вязкого течения (задачи о диффузии вихревого слоя в ньютоновской вязкой полуплоскости) в предельном переходе $\tau_s \rightarrow 0$. Это означает, что вязкое течение должно быть устойчивым по отношению к малому возмущению предела текучести среды.

Выпишем [1] точное решение поставленной начально-краевой задачи в области сдвигового течения в случае, когда в (1.3)

$$S(t) \equiv S_0, \quad (1.9)$$

где S_0 — приложенное касательное напряжение, разумеется, большее чем τ_s . При этом $\text{sign } \sigma = \text{sign}(\partial v / \partial x) = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= S_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\eta^2} d\eta \right) \equiv \\ &\equiv S_0 \operatorname{erfc} \xi; \quad 0 < x < x^*(t) = 2\xi^* \sqrt{vt}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $\nu = \mu / \rho$ — кинематическая вязкость; $\xi = x / (2\sqrt{vt})$ — классическая в параболических задачах автомодельная переменная; $\operatorname{erfc} \xi$ — дополнительная функция ошибок; ξ^* — постоянная величина ($0 < \xi^* \leq \infty$), которая находится из алгебраического уравнения

$$\operatorname{erfc} \xi^* = \gamma; \quad \gamma = \frac{\tau_s}{S_0} < 1 \quad (1.11)$$

Интегрируя второе уравнение (1.6) $\partial v / \partial x = (\sigma - \tau_s) / \mu$ с граничным условием $v(x^*(t), t) = 0$, найдем профиль скорости

$$v(x, t) = \frac{2S_0}{\mu} \sqrt{vt} \left[\xi (\operatorname{erfc} \xi - \gamma) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\xi^2} - e^{-\xi^{*2}} \right) \right]; \quad 0 < x < x^*(t) \quad (1.12)$$

$$v(0, t) = -\frac{2S_0}{\mu} \sqrt{\frac{vt}{\pi}} \left(1 - e^{-\xi^{*2}} \right) \quad (1.13)$$

Скорость границы $x = 0$ слоя Ω_f (1.4) неограниченно растет пропорционально $\sqrt{t}$.

Заметим, что известное автомодельное решение, называемое диффузией вихревого слоя в ньютоновской вязкой жидкости, получается из (1.10), (1.12) и (1.13) в пределе $\xi^* \rightarrow \infty$. При этом в любой момент времени области Ω_∞ (1.1) и Ω_f (1.4) совпадают, а жесткая зона Ω_r (1.5) отсутствует.

2. Зависимость предела текучести от глубины. Рассмотрим случай неоднородной вязкопластической среды, занимающей область Ω_∞ (1.1), когда предел текучести при сдвиге τ_s — заданная неотрицательная кусочно-непрерывная функция координаты x , в то время как динамическая вязкость μ , плотность ρ , а следовательно, и кинематическая вязкость ν — как и ранее, постоянные величины. На границе полуплоскости Ω_∞ , по-прежнему, задано касательное напряжение (1.3), (1.9) в виде ступеньки Хевисайда.

Распределение жестких зон по глубине в каждый момент времени $t > 0$, естественно, зависит от вида функции $\tau_s(x)$, в частности от ее монотонности. Вязкопластический сдвиг может реализовываться не только в расширяющемся со временем слое Ω_f (1.4), но и в более сложных образованиях, состоящих из нескольких слоев, способных смыкаться и расходиться друг от друга. То же можно сказать и о наборе жестких зон по толщине.

В любой момент $t > 0$ сдвиговое течение имеет место при значениях x , удовлетворяющих алгебраическому неравенству

$$\operatorname{erfc} \xi > \frac{\tau_s(x)}{S_0}; \quad \xi = \frac{x}{2\sqrt{\nu t}} \quad (2.1)$$

Точки, находящиеся внутри жестких зон, неподвижных либо движущихся поступательно как твердое целое, имеют координаты x , удовлетворяющие обратному к (2.1) неравенству

$$\operatorname{erfc} \xi < \frac{\tau_s(x)}{S_0} \quad (2.2)$$

В зонах сдвигового течения вид касательного напряжения $\sigma(x, t)$, как следует из системы уравнений (1.6), совпадает с распределением (1.10). Из системы же (1.8) можно заключить, что в жестких зонах касательное напряжение — линейная функция от x , восстанавливаемая очевидным образом так, чтобы функция $\sigma(x, t)$ была непрерывной на всей полуоси $x > 0$.

Поясним сказанное графически. На рис. 1 для двух моментов времени t_1 и t_2 ($0 < t_1 < t_2$) и фиксированного непрерывного по глубине распределения предела текучести $\tau_s(x)$ приведены профили касательного напряжения $\sigma(x, t_1)$ и $\sigma(x, t_2)$. Пря-

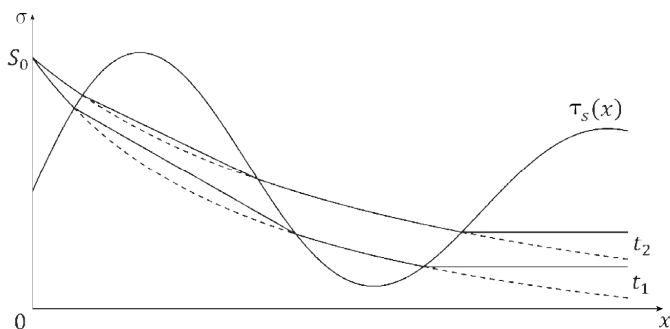


Рис. 1

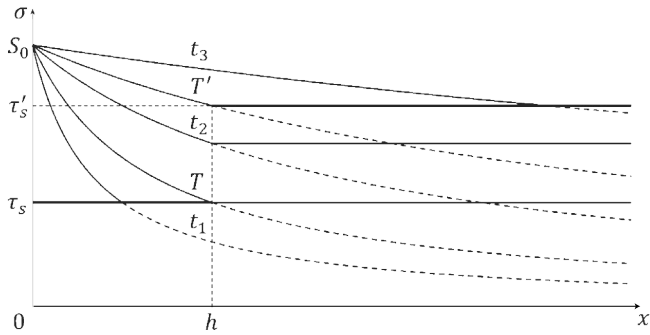


Рис. 2

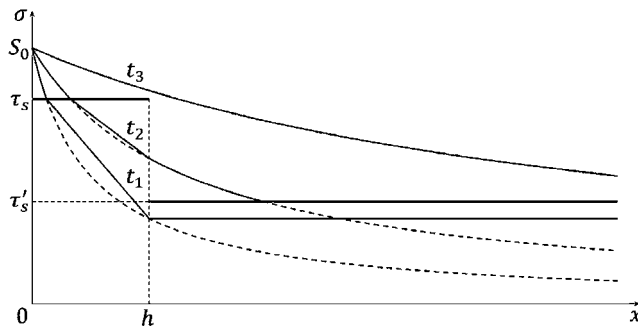


Рис. 3

молинейные отрезки и предельные горизонтальные лучи на графиках соответствуют областям жестких зон, а криволинейные участки — областям вязкопластического сдвига, в которых решение $\sigma(x, t)$ описывается выражением (1.10).

На рис. 2 и 3 приведены случаи кусочно-постоянных функций $\tau_s(x)$, т. е. слоистых композитов. Выбраны три характерных момента t_1 , t_2 и t_3 ($0 < t_1 < t_2 < t_3$), для которых построены профили касательного напряжения $\sigma(x, t_1)$, $\sigma(x, t_2)$ и $\sigma(x, t_3)$. Эти профили на определенных интервалах по x включают в себя прямолинейные отрезки и предельные лучи, соответствующие жестким слоям и полуплоскостям.

Поскольку рассматриваемая задача статически определима, по известной функции $\sigma(x, t)$ из определяющего соотношения (1.6) и требования того, что в жесткой зоне скорость постоянна по x , восстанавливается профиль скорости $v(x, t)$. Для любого конечного момента времени t_1 интегрирование уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mu} (\sigma(x, t_1) - \tau_s(x)) \quad (2.3)$$

с уже известной правой частью начинается с последней по глубине зоны сдвигового течения, у которой одна из границ примыкает к неподвижной полуплоскости. Непрерывно-дифференцируемая по x функция $v(x, t_1)$ находится последовательно по слоям по направлению из глубины к границе $x = 0$. Характерный профиль скорости $v(x, t_1)$ в случае непрерывного распределения предела текучести $\tau_s(x)$ приведен на рис. 4.

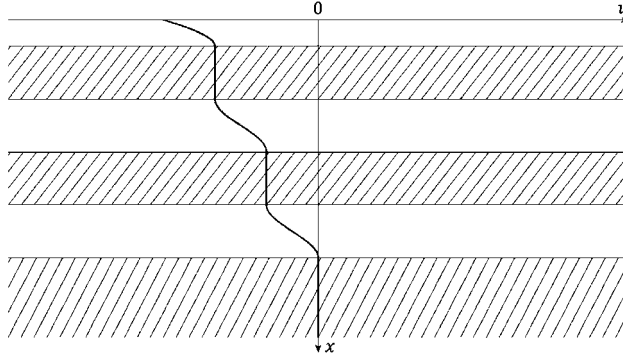


Рис. 4

3. Определение недоступных для измерения параметров по движению границы. Рассмотрим аналитически подробнее случай слоистого композита (рис. 2) с кусочно-постоянным распределением предела текучести

$$\tau_s = \begin{cases} \tau_s, & 0 < x < h \\ \tau'_s, & h < x < \infty \end{cases} \quad \tau_s < \tau'_s < S_0, \quad (3.1)$$

где h — неизвестная толщина примыкающего к границе $\partial\Omega_\infty$ менее жесткого слоя, причем параметры h и τ'_s не доступны для прямого измерения.

Выделим три интервала времени: $0 < t < T$, $T < t < T'$ и $T' < t < \infty$, где моменты T и T' находятся из условий

$$x^*(T) = h \text{ или } T = \frac{h^2}{4v\xi^{*2}}, \quad \operatorname{erfc} \frac{h}{2\sqrt{vT'}} = \frac{\tau'_s}{S_0}, \quad (3.2)$$

а ξ^* — по-прежнему корень уравнения (1.11). На рис. 2 кривые $\sigma(x, T)$ и $\sigma(x, T')$ проходят соответственно через нижнюю и верхнюю точки разрыва функции (3.1).

1°. На первом интервале времени $0 < t < T$ решения для касательного напряжения $\sigma_{(1)}(x, t)$ и продольной скорости $v_{(1)}(x, t)$ совпадают с (1.10) и (1.12). При этом скорость $v_{(1)}(0, t)$ границы $\partial\Omega_\infty$ имеет вид (1.13).

2°. На втором интервале $T < t < T'$ толщина области сдвига Ω_f не меняется со временем и равна h . Непрерывный по x профиль касательного напряжения следующий:

$$\sigma_{(2)}(x, t) = \begin{cases} S_0 \operatorname{erfc} \xi, & 0 < x < h \\ S_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h/(2\sqrt{vt})} e^{-\eta^2} d\eta \right), & h \leq x < \infty \end{cases} \quad (3.3)$$

Как видно из (3.2) и (3.3), с момента $t = T$ до момента $t = T'$ функция времени $\sigma(h, t)$ возрастает от значения τ_s до τ'_s .

Поскольку на втором временном интервале оба граничных условия для функции v заданы на фиксированных по x границах и не зависят от t :

$$v_{(2)}|_{x=h} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_{(2)}}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{\mu}(S_0 - \tau_s), \quad (3.4)$$

профиль скорости перестраивается с (1.12) и начинает стремиться к отрезку

$$v_{(2)}^{\infty}(x) = -\frac{1}{\mu}(S_0 - \tau_s)(h - x) \equiv -\frac{S_0}{\mu}(1 - \gamma)(h - x), \quad (3.5)$$

соответствующему стационарному сдвиговому движению среды.

Точное решение для $v_{(2)}(x, t)$ имеет следующий вид:

$$v_{(2)}(x, t) = \frac{2S_0}{\mu}\sqrt{vt} \times \left[\xi \operatorname{erfc} \xi + \frac{1}{2\sqrt{vt}} \left(\gamma(h - x) - h \operatorname{erfc} \frac{h}{2\sqrt{vt}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\xi^2} - e^{-h^2/(4vt)} \right) \right] \\ 0 < x < h, \quad (3.6)$$

$$v_{(2)}(0, t) = -\frac{2S_0}{\mu}\sqrt{\frac{vt}{\pi}} \left(1 - e^{-h^2/(4vt)} \right) - \\ - \frac{S_0 h}{\mu} \left(\operatorname{erfc} \frac{h}{2\sqrt{vt}} - \gamma \right) \quad (3.7)$$

Сравнивая выражения (1.12) и (3.6), заметим, что

$$\lim_{t \rightarrow T-0} v_{(1)}(x, t) = \lim_{t \rightarrow T+0} v_{(2)}(x, t); \quad 0 < x < h \quad (3.8)$$

Кроме того, если $\tau'_s \geq S_0$, т.е. $T' = \infty$, то имеет место стремление к прямолинейному профилю (3.5):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_{(2)}(x, t) = v_{(2)}^{\infty}(x) \quad (3.9)$$

3°. На третьем интервале $t > T'$ толщина области Ω_f вновь начинает увеличиваться, начиная с $x = h$. Профиль касательного напряжения имеет вид

$$\sigma_{(3)}(x, t) = \begin{cases} S_0 \operatorname{erfc} \xi, & 0 < x < x^{*'}(t) = 2\xi^{*'}\sqrt{vt} \\ \tau'_s, & x^{*'}(t) < x < \infty \end{cases}, \quad (3.10)$$

где $\xi^{*'}$ — постоянная величина, определяемая из алгебраического уравнения

$$\operatorname{erfc} \xi^{*'} = \gamma'; \quad \gamma' = \frac{\tau'_s}{S_0} < 1 \quad (3.11)$$

Так как $\tau'_s > \tau_s$, то $\xi^{*'} < \xi^*$.

Продольная скорость $v(x, t)$ находится в результате интегрирования по x уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mu}(\sigma_{(3)}(x, t) - \tau_s(x)); \quad 0 < x < x^{*'}(t) \quad (3.12)$$

с граничным условием $v(x^*(t), t) = 0$ и разрывным пределом текучести (3.1).

Таким образом, в момент $t = T'$ происходит еще одна после $t = T$ перестройка профиля скорости и, в частности, скорости границы $v(0, t)$, считающейся доступной для измерения. Характерный график функции $v(0, t)$ на всем временном интервале $t > 0$ приведен на рис. 5. Находя из наблюдения за движением границы $x = 0$ времена T и T' , можно из формул (3.2) последовательно вычислить сначала h , а затем τ_s , т. е. не доступные для прямого измерения толщину вязкопластического слоя, примыкающего к границе, и предел текучести глубинно залегающей среды. Эти данные могут быть полезны в различного рода гидро- и геофизических приложениях.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00077).

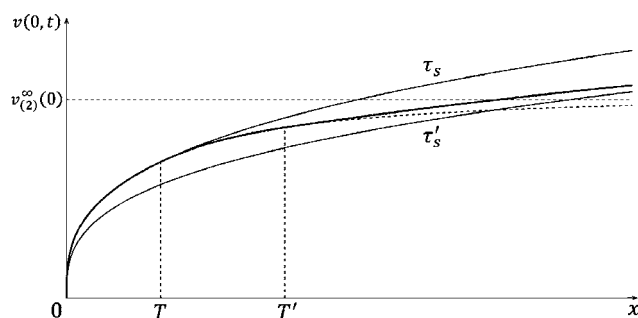


Рис. 5

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банько В.А., Георгиевский Д.В. Квазиавтомодельные решения некоторых параболических задач в теории вязкопластического течения // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2023. № 4. С. 39–45.
2. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1977. 372 с.
3. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 240 с.

Acceleration of Shear Flow in a Viscoplastic Half-Plane with a Depth-Varying Yield Stress

D. V. Georgievskii^{a-c, #}, V. A. Banko^{a, ##}

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^bIshlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

^cMoscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

[#]e-mail: georgiev@mech.math.msu.su,

^{##}e-mail: mr.banko.vlad@mail.ru

The problem of acceleration from a state of rest of a shear flow in a viscoplastic half-plane is studied analytically when a tangential stress is specified at the boundary. It is assumed that the dynamic viscosity and density of the medium are constant, and the yield stress can change in a continuous or discontinuous manner depending on the depth. The entire half-plane at any moment

of time consists of previously unknown layers where shear flow occurs and rigid zones. The latter can move as a rigid whole, or they can be motionless, such as, for example, a half-plane, to which disturbances caused by the action of tangential forces have not yet reached. To find the stress and velocity fields, a method is developed based on quasi-self-similar diffusion-vortex solutions of parabolic problems in areas with moving boundaries. The question of what conclusions about the depth distribution of the yield stress can be drawn from available measurements of the velocity of the half-plane boundary is discussed.

Keywords: viscoplastic medium, yield stress, acceleration, shear stress, stress intensity, one-dimensional shear flow, rigid zone, diffusion of vortex layer

REFERENCES

1. *Banko V.A., Georgievskii D.V.* Quasi-self-similar solutions of some parabolic problems in the theory of viscoplastic flow // *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2023, vol. 78, no. 4, pp. 102–109.
2. *Ogibalov P.M., Mirzadzhanzade A.Kh.* Nonsteady Motions of Viscoplastic Media. Moscow: Moscow Univ. Press, 1977. (in Russian)
3. *Meirmanov A.M.* The Stefan Problem. Novosibirsk: Nauka, 1986. (in Russian)

УДК 519.958:531.33:517.956.8

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ УПРУГИХ ПРОКЛАДОК

©2024 С. А. Назаров^{1,*}¹Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия^{*}e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 19.07.2023 г.

После доработки 18.01.2024 г.

Принята к публикации 18.01.2024 г.

Изучены собственные колебания тонких изотропных однородных пластин постоянной и переменной толщины, основания которых жестко зашлемлены. Показано, что лишь для пластины постоянной толщины с дополнительно зафиксированной боковой поверхностью двумерная модель — спектральная задача Дирихле для двумерной системы Ламе с измененным коэффициентом Пуассона — правильно описывает частоты собственных колебаний тонкого трехмерного тела. В остальных случаях асимптотический анализ предоставляет иные модели пониженной размерности, в частности разнообразные обыкновенные дифференциальные уравнения, а для соответствующих мод собственных колебаний характерна концентрация около всей боковой поверхности или некоторых точек на границе. При неплоских основаниях локализация собственных мод происходит около точек максимума толщины пластины и описывается обобщенными уравнениями гармонического осциллятора. Обсуждается случай несжимаемого изотропного материала пластины.

Ключевые слова: тонкая изотропная однородная пластина, зафиксированные основания, прокладка между жесткими штампами, модели пониженной размерности, локализация собственных колебаний.

DOI: 10.31857/S0032823524010083 EDN: YULWJG

1. Постановка задачи. Тонкая пластина (рис. 1)

$$\Omega_H^h = \left\{ \begin{array}{l} x = (y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : \\ y = (y_1, y_2) \in \omega, z \in \Upsilon_H^h(y) := (0, hH(y)) \end{array} \right\}, \quad (1.1)$$

изготовленная из однородного изотропного материала с постоянными Ламе $\lambda \geq 0, \mu > 0$ и плотностью $\rho > 0$, жестко зашлемлена вдоль оснований

$$\begin{aligned} \Sigma^0 &= \{x : y \in \omega, z = x_3 = 0\} \\ \Sigma_H^h &= \{x : y \in \omega, z = hH(y)\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

но свободна от внешних воздействий на боковой поверхности

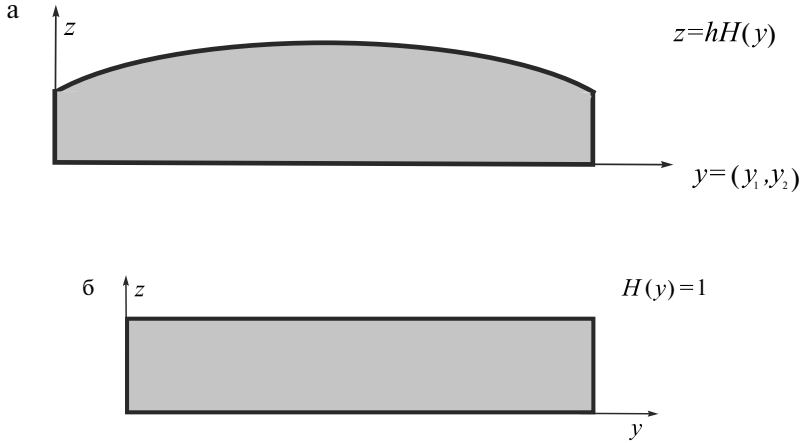


Рис. 1. Поперечные сечения пластин переменной (а) и постоянной толщины (б).

$$\Gamma_H^h = \{x = (x_1, x_2, x_3) : y \in \partial\omega, z \in \Upsilon_H^h(y)\} \quad (1.3)$$

Сечение ω — область на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y$, ограниченная простым связным замкнутым гладким (класса C^∞ ; ср. разд. 8, 2⁰) контуром $\partial\omega$, H — гладкая положительная профильная функция на замкнутом множестве $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$, а h — малый положительный параметр. Масштабированием сведем характерный размер области ω к единице, т.е. сделаем декартову систему координат x и все геометрические параметры безразмерными; кроме того, положим $\rho = 1$.

Собственные колебания пластины (1.1) описываются системой дифференциальных уравнений Ламе в частных производных и краевыми условиями в смещениях и напряжениях

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{jk}(u^h; x) &= \\ &= \Lambda^h u^h(x); x \in \Omega_H^h, k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$u_k^h(x) = 0; x \in \Sigma^0 \cup \Sigma_H^h, k = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^3 n_j(x) \sigma_{jk}(u^h; x) = 0; x \in \Gamma_H^h, k = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

Здесь Λ^h — спектральный параметр (квадрат частоты собственных колебаний), u_k^h — декартовы компоненты вектора смещений u^h , т.е. моды собственных колебаний или собственной вектор-функции, а в формуле для декартовых компонент тензора напряжений фигурирует символ Кронекера $\delta_{j,k}$

$$\sigma_{jk}(u^h) = \mu \left(\frac{\partial u_j^h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^h}{\partial x_j} \right) + \lambda \delta_{j,k} \left(\frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^h}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^h}{\partial x_3} \right) \quad (1.7)$$

Вариационная формулировка задачи (1.4) — (1.6) апеллирует к интегральному тождеству [1,2]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u^h, \psi^h; \Omega_H^h) &= \Lambda^h(u^h, \psi^h)_{\Omega_H^h} \\ \psi^h &\in H_0^1(\Omega_H^h; \Sigma^0 \cup \Sigma_H^h)^3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

При этом $(\cdot, \cdot)_{\Omega_H^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega_H^h)$, скалярном или векторном, $H_0^1(\Omega_H^h; \Sigma_H^h)$ — пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на поверхности $\Sigma_H^h \subset \partial\Omega_H^h$, а последний верхний индекс 3 в формуле (1.8) указывает количество компонент пробной вектор-функции $\psi^h = (\psi_1^h, \psi_2^h, \psi_3^h)$. Наконец, $\mathcal{E}(u^h, u^h; \Omega_H^h)$ — удвоенная упругая энергия, запасенная пластиной (1.1), а симметричная билинейная форма

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u^h, \psi^h; \Omega_H^h) &= \\ &= \frac{1}{2\mu} \left(\sum_{j,k=1}^3 (\sigma_{jk}(u^h), \sigma_{jk}(\psi^h))_{\Omega_H^h} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \left(\sum_{j=1}^3 \sigma_{jj}(u^h), \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk}(\psi^h) \right)_{\Omega_H^h} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

замкнута и положительно определена на пространстве $H_0^1(\Omega_H^h; \Sigma^0 \cup \Sigma_H^h)^3$. Таким образом, вариационная задача (1.8) (или краевая задача (1.4) — (1.6)) обладает дискретным спектром, образующим монотонную неограниченную положительную последовательность нормальных собственных чисел

$$0 < \Lambda_1^h \leq \Lambda_2^h \leq \Lambda_3^h \leq \dots \leq \Lambda_m^h \leq \dots \rightarrow \cdot \quad (1.10)$$

Основная цель работы — исследовать асимптотическое поведение собственных частот и соответствующих мод колебаний пластины в трех ситуациях:

1) профильная функция H имеет глобальный строгий максимум в точке y^0 внутри области ω ;

2) $H(y) = H_0$ — постоянная и ω — круг $B_1 = \{y : |y| < 1\}$;

3) $H(y) = H_0$ — постоянная и кривизна к контура γ имеет глобальный строгий экстремум (максимум или минимум; см. разд. 6) в точке $y^0 \in \omega$.

В последних двух случаях положим $H_0 = 1$ (рис. 1б), обозначив пластину и ее боковую поверхность через Ω^h и Γ^h соответственно. Кроме того, поместим начало $\mathcal{O}$ двумерной системы декартовых координат y в точку y^0 .

Краевые условия (1.5), (1.11) и (1.6) далее называем условиями Дирихле и Неймана соответственно.

Пластина играет роль тонкой упругой прокладки между двумя абсолютно жесткими штампами, прикрепленной к их поверхностям, однако общепринятый подход к асимптотическому анализу тонких деформируемых тел (см. [3–7] и многие другие публикации) дает правильный ответ — какую-то двумерную задачу на сечении ω для определения собственных пар {число; вектор-функция} — только в случае пластины

постоянной толщины с полностью зафиксированной поверхностью, т.е. при замене краевого условия (1.6) в напряжениях условиями в смещениях

$$u_k^h(x) = 0; \quad x \in \Gamma_H^h, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.11)$$

Собственные вектор-функции задач Дирихле (1.4), (1.5), (1.11) и смешанной краевой (1.4) — (1.6) подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$\left(u_{(p)}^h, u_{(q)}^h \right)_{\Omega^h} = \delta_{p,q}; \quad p, q \in N := \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1.12)$$

В разд. 4–7 показано, что начальные члены последовательности (1.10) собственных чисел смешанной краевой задачи (1.4) — (1.6) находятся из совершенно иных задач, а для собственных вектор-функций характерна сугубая локализация около экстремальных точек кривизны к контура $d\omega$ (ситуация (iii)) или в малой окрестности всей круговой кромки Γ^h (ситуация (ii)). В ситуации (i) локализация происходит около точек экстремумов профильной функции H .

Двумерная модель [8] пластины Ω^h с полностью зафиксированной поверхностью $\partial\Omega^h$ указана в разд. 3. Эффекты концентрации мод собственных колебаний обусловлены явлением пограничного слоя, информация о котором приведена в разд. 2. К сожалению, полное исследование спектральной задачи теории упругости в полубесконечной полосе (далее полуполосе; рис. 2)

$$\Pi = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1 < 0, \xi_2 \in (0, 1)\} \quad (1.13)$$

посредством аналитических выкладок невозможно и требует применения вычислительных методов, а часть результатов в статье получена при рассмотрении возможных разных случаев.

Одномерные модели, описывающие, в частности, локализацию собственных вектор-функций в цилиндрической пластине Ω^h , найдены в разд. 5 и разд. 6. Пластина Ω^h переменной толщины $hH(y)$ рассмотрена в разд. 7, где выведена и исследована предельная система дифференциальных уравнений на плоскости с растущими на бесконечности коэффициентами — векторный аналог уравнения гармонического осциллятора [9]. В разд. 8 собраны доступные обобщения и перечислены открытые вопросы, относящиеся, например, к численным решениям модельных задач теории упругости в полуполосе. Кроме того, кратко обсуждаются пластины, изготовленные из несжимаемого материала.

2. Спектр задачи о пограничном слое. В этом разделе рассматриваем пластину (1.1) постоянной толщины, т.е. $H(y) = 1$ (рис. 1б). При некотором $d > 0$

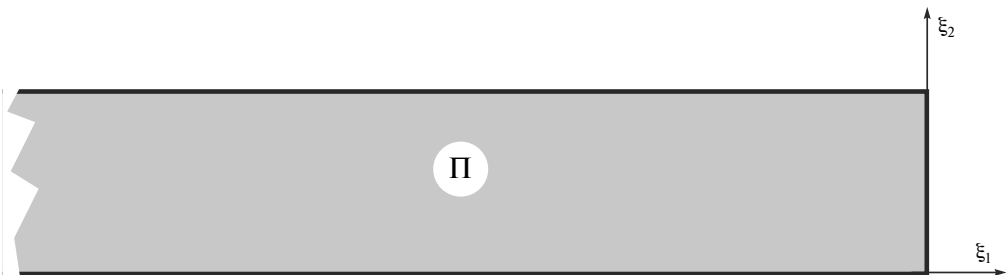


Рис. 2. Полубесконечная упругая полоса, служащая для описания явления пограничного слоя.

в d -окрестности N_d контура $\partial\omega$ введем естественную систему криволинейных координат (n, s) , где n — ориентированное расстояние до $\partial\omega$, $n < 0$ в $\omega \cap N_d$, а s — длина дуги, измеренная вдоль контура против часовой стрелки. Проекция тензора напряжений $\sigma(u^h)$ на оси n , s и z имеют вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{nn}(u^h) &= (\lambda + 2\mu)\partial_n u_n^h + \\
 &+ \lambda \left(J^{-1}(\partial_s u_s^h + \kappa u_n^h) + \partial_z u_z^h \right) \\
 \sigma_{ss}(u^h) &= (\lambda + 2\mu)J^{-1}(\partial_s u_s^h + \kappa u_n^h) + \\
 &+ \lambda(\partial_n u_n^h + \partial_z u_z^h) \\
 \sigma_{zz}(u^h) &= (\lambda + 2\mu)\partial_z u_z^h + \\
 &+ \lambda(\partial_n u_n^h + J^{-1}(\partial_s u_s^h + \kappa u_n^h)) \\
 \sigma_{ns}(u^h) &= \sigma_{sn}(u^h) = \\
 &= \mu(\partial_n u_s^h + J^{-1}(\partial_s u_n^h - \kappa u_s^h)) \\
 \sigma_{sz}(u^h) &= \sigma_{zs}(u^h) = \\
 &= \mu(J^{-1}\partial_s u_z^h + \partial_z u_s^h) \\
 \sigma_{zn}(u^h) &= \sigma_{nz}(u^h) = \mu(\partial_n u_z^h + \partial_z u_n^h)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

При этом $\kappa(s)$ — кривизна контура переменного знака, т.е. отрицательная на вогнутых участках дуги $\partial\omega \ni s$, а $J(n, s) = 1 + n\kappa(s)$ — якобиан. Кроме того, n_i — проекция на ось y_i единичного вектора двумерной нормали к границе сечения ω , $i = 1, 2$, а проекции вектора смещений u^h на оси криволинейной системы координат заданы формулами

$$u_n^h = n_1 u_1^h + n_2 u_2^h, \quad u_s^h = -n_2 u_1^h + n_1 u_2^h, \quad u_z^h = u_3^h$$

Наконец, запишем в координатах n, s и z систему уравнений (1.4)

$$\begin{aligned}
 &-\partial_n \sigma_{nn}(u^h) - J^{-1} \left(\partial_s \sigma_{ns}(u^h) + \right. \\
 &\quad \left. + \kappa(\sigma_{nn}(u^h) - \sigma_{ss}(u^h)) \right) - \\
 &\quad - \partial_z \sigma_{nz}(u^h) = \Lambda^h u_n^h \\
 &-\partial_n \sigma_{sn}(u^h) - J^{-1} \left(\partial_s \sigma_{ss}(u^h) + 2\kappa \sigma_{sn}(u^h) \right) - \\
 &\quad - \partial_z \sigma_{sz}(u^h) = \Lambda^h u_s^h
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$-\partial_n \sigma_{zn}(u^h) - J^{-1} \left(\partial_s \sigma_{zs}(u^h) + \kappa \sigma_{zn}(u^h) \right) - \\ - \partial_z \sigma_{zz}(u^h) = \Lambda^h u_z^h$$

Для построения пограничного слоя, как обычно, произведем растяжение координат

$$n \mapsto \eta = h^{-1}n, z \mapsto \zeta = h^{-1}z, \quad (2.3)$$

но сохраним прежний масштаб для длины дуги s на контуре $\partial\omega$. В результате (3×3) -матрица L^h дифференциальных операторов второго порядка из левых частей уравнений (2.2), действующая на вектор (u_n^h, u_z^h, u_s^h) , допускает расщепление

$$L^h(n, z, s, \partial_n, \partial_z, \partial_s) = \\ = h^{-2} L^{(0)}(\partial_\eta, \partial_\zeta) + h^{-1} L^{(1)}(s, \partial_\eta, \partial_\zeta, \partial_s) + \\ + L^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_\zeta, \partial_s) + \dots \quad (2.4)$$

При этом

$$L^{(0)}(\partial_\eta, \partial_\zeta) = - \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_\eta^2 + \mu\partial_\zeta^2 & (\lambda + \mu)\partial_\eta\partial_\zeta & 0 \\ (\lambda + \mu)\partial_\zeta\partial_\eta & (\lambda + 2\mu)\partial_\zeta^2 + \mu\partial_\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\partial_\eta^2 + \mu\partial_\zeta^2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$L^{(1)}(s, \partial_\eta, \partial_\zeta, \partial_s) = - \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu)\kappa(s)\partial_\eta & 0 & (\lambda + \mu)\partial_s\partial_\eta \\ (\lambda + \mu)\kappa(s)\partial_\zeta & \mu\kappa(s)\partial_\eta & (\lambda + \mu)\partial_s\partial_\zeta \\ (\lambda + \mu)\partial_\eta\partial_s & (\lambda + \mu)\partial_\zeta\partial_s & -\mu\kappa(s)\partial_\eta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$L^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_\zeta, \partial_s) = \\ = \begin{pmatrix} -\mu\partial_s^2 + 2(\lambda + \mu)\kappa(s)^2\eta\partial_\eta - 2\mu\kappa(s)^2 & 0 & L_{sn}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) \\ (\lambda + \mu)\kappa(s)^2\eta\partial_\zeta & -\mu\partial_s^2 + \mu\kappa(s)^2\eta\partial_\eta & L_{sz}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) \\ L_{sn}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) & L_{sz}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) & L_{ss}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Следующие скалярные операторы из матрицы (2.7) востребованы в вычислениях не будут:

$$L_{ns}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) = 2(\lambda + \mu)\kappa(s)\partial_\eta\partial_s + \\ + (\lambda + \mu)\kappa(s)\eta\partial_s - \mu\partial_s\kappa(s)$$

$$\begin{aligned}
L_{sn}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) &= -(\lambda + 2\mu)\partial_s \kappa(s) + \\
&\quad + (\lambda + \mu)\kappa(s)\eta\partial_\eta\partial_s - \mu\kappa(s)\partial_s \\
L_{zs}^{(2)}(\eta, s, \partial_z, \partial_s) &= (\lambda + \mu)\kappa(s)\eta\partial_\xi\partial_s \\
L_{sz}^{(2)}(\eta, s, \partial_\xi, \partial_s) &= (\lambda + \mu)\kappa(s)\partial_\xi\partial_s \\
L_{ss}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) &= -(\lambda + 2\mu)\partial_s^2 + \\
&\quad + \mu\kappa(s)^2\eta\partial_\eta + \mu\kappa(s)^2
\end{aligned}$$

Аналогичные, но более простые расщепления верны для дифференциальных операторов первого порядка из формул (2.1) для напряжений. Далее понадобятся соотношения

$$\begin{aligned}
B^h(n, z, s, \partial_n, \partial_z, \partial_s) &= h^{-1}B^{(0)}(\partial_\eta, \partial_\xi) + \\
&\quad + B^{(1)}(s, \partial_s) + hB^{(2)}(\eta, s, \partial_s) + \dots \\
B^{(0)}(\partial_\eta, \partial_\xi) &= \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_\eta & \lambda\partial_\xi & 0 \\ \mu\partial_\xi & \mu\partial_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \mu\partial_\eta \end{pmatrix} \\
B^{(1)}(s, \partial_s) &= \begin{pmatrix} \lambda\kappa(s) & 0 & \lambda\partial_s \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu\partial_s & 0 & -\mu\kappa(s) \end{pmatrix} \\
B^{(2)}(\eta, s, \partial_s) &= \begin{pmatrix} -\lambda\kappa(s)^2\eta & 0 & -\lambda\kappa(s)\eta\partial_s \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mu\kappa(s)\eta\partial_s & 0 & -\mu\kappa(s)^2\eta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

для матрицы дифференциальных операторов из выражения

$$B^h u^h = \left(\sigma_{nn}(u^h), \sigma_{nz}(u^h), \sigma_{ns}(u^h) \right) \text{ в левой части краевого условия Неймана (1.6).}$$

После выделения главных асимптотических частей (2.4) дифференциальных операторов и замены $h^2 \Lambda^h \mapsto M$ нормированного спектрального параметра получим из системы (1.4) двумерную систему уравнений теории упругости для вектора смещений $U' = (U_1, U_2)$ в полуполосе Π (формула (1.13) и рис. 2)

$$-\mu\Delta_\xi U' - (\lambda + \mu)\nabla_\xi \cdot \nabla_\xi U' = MU' \text{ в } \Pi, \tag{2.9}$$

а также уравнение Гельмгольца для скаляра U_3 (депланации)

$$-\mu\Delta_\xi U_3 = MU_3 \text{ в } \Pi \tag{2.10}$$

При этом M — новое обозначение спектрального параметра, координаты $\eta = \xi_1$ и $\zeta = \xi_2$ интерпретируем как декартовы на плоскости $\mathbb{R}^2 \supset \Pi$, а U_1, U_2 и U_3 — как образы компонент u_n, u_z и u_s вектора смещений. Вместе с тем в разд. 5 и 6 при операциях с трехмерным вектором U обозначаем проекции на оси криволинейной системы координат через U_n, U_z и U_s .

Уравнение (2.10) с проистекающими от исходных условий (1.5) и (1.6) смешанными краевыми условиями

$$U_3(\xi_1, 0) = U_3(\xi_1, 1) = 0; \xi_1 < 0 \quad (2.11)$$

$$\mu \frac{\partial U_3}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) = 0; \xi_2 \in (0, 1) \quad (2.12)$$

изучается посредством метода Фурье. В частности, дискретный спектр задачи (2.10) — (2.12) пуст, а ее непрерывный спектр — луч с точкой отсечки

$$M_{\dagger} = \pi^2 \mu \quad (2.13)$$

При $M = M_{\dagger}$ у задачи (2.10) — (2.12) есть ограниченное, стабилизирующееся на бесконечности решение

$$U_3^{\dagger}(\xi) = \sin(\pi \xi_2) \quad (2.14)$$

Иными словами, наблюдается пороговый резонанс [10], простой и правильный по терминологии [11]. Наконец, при постановке условия Дирихле

$$U_3 = 0; \xi \in \partial \Pi \quad (2.15)$$

всюду на границе полуполосы непрерывный и дискретный спектры скалярной задачи Дирихле остаются без изменений, но пороговый резонанс исчезает, так как у задачи с параметром (2.13) нет ограниченных решений, а только линейно растущее $c \xi_1 \sin(\pi \xi_2)$ и счетный набор малоинтересных решений с экспоненциальным ростом при $\xi_1 \rightarrow -\infty$.

Изучен [12–15] спектр $\wp$ двумерной системы (2.9) в упругой изотропной полуполосе Π с разнообразными краевыми условиями на ее боковых сторонах и торце

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}_j &= \{\xi : \xi_1 < 0, \xi_2 = j\} \\ j = 0, 1, \text{ и } \mathfrak{w}_* &= \{\xi : \xi_1 = 0, \xi_2 \in (0, 1)\} \end{aligned}$$

Сократим обозначение производных: $\partial_j = \partial / \partial \xi_j; j = 1, 2$. Для вытекающих из формул (1.5) и (1.6) смешанных краевых условий

$$U_1(\xi) = U_2(\xi) = 0; \xi \in \mathfrak{w}_0 \cup \mathfrak{w}_1 \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(U; \xi) &:= (\lambda + 2\mu) \partial_1 U_1(\xi) + \\ &+ \lambda \partial_2 U_2(\xi) = 0; \xi \in \mathfrak{w}_* \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\sigma_{12}(U; \xi) := \mu \partial_2 U_1(\xi) + \mu \partial_1 U_2(\xi) = 0; \xi \in \mathfrak{w}_*$$

проверено [14], что непрерывный спектр $\wp_c$ оператора системы Ламе — луч $[M_{\dagger}, +\infty)$ с точкой отсечки (2.13), а дискретный спектр $\wp_d$ содержит по крайней мере одну

точку $M_1 \in (0, M_+)$, причем сопутствующая захваченная волна $\bar{U}_{(1)} \in H_0^1(\Pi; \bar{\omega}_0 \cup \bar{\omega}_1)^2$ затухает на бесконечности с экспоненциальной скоростью.

Краевые условия (2.17) и (2.12) получены при учете расщепления (2.8). Косвенная аргументация, основанная на геометрической и материальной симметрии задачи подсказывает, что M_1 — единственная точка в $\wp_d$. Далее используем это свойство дискретного спектра, хотя его строгое обоснование до сих пор не найдено.

Вариационная постановка задачи (2.9), (2.16), (2.17) сводится к интегральному тождеству [1,2]

$$E(U', \Psi; \Pi) = M(U', \Psi)_{\Pi}, \quad \Psi \in H_0^1(\Pi; \partial\P \setminus \bar{\omega})^2 \quad (2.18)$$

В плоском случае удвоенная упругая энергия, порожденная вектором смещений $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ в полуполосе, имеет вид

$$E(\Psi, \Psi; \Pi) = \int_{\Pi} \left(2\mu \left| \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_1} \right|^2 + 2\mu \left| \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi_2} \right|^2 + \mu \left| \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi_1} \right|^2 + \lambda \left| \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi_2} \right|^2 \right) d\xi \quad (2.19)$$

Собственную вектор-функцию $U'_{(1)}$ нормируем в пространстве Лебега $L^2(\Pi)^2$.

При помощи классического приема [16] доказано [13], что при постановке на торце условия Дирихле

$$\bar{U}(\xi) = 0; \quad \xi \in \bar{\omega}_\bullet \quad (2.20)$$

у задачи (2.9), (2.16), (2.20) захваченных волн нет на любых частотах, т.е. пуст и точечный спектр (дискретный спектр плюс собственные числа, вкрапленные в непрерывный спектр). Более того, отсутствует пороговый резонанс.

Вопрос о реализации порогового резонанса в смешанной краевой задаче (2.9), (2.16), (2.17), т.е. наличии у нее при $M = M_+$ ограниченного (вещественного) решения

$$U^\dagger(\xi) = K_+ \sin(\pi \xi_2) e_{(1)} + \tilde{U}^\dagger(\xi) \quad (2.21)$$

с экспоненциально затухающим остатком $\tilde{U}^\dagger(\xi)$, коэффициентом K_+ и ортом $e_{(1)}$ оси ξ_1 , остается открытым, но ответ на него в данной работе не востребован по существу. Из-за наличия собственного числа $M_1 \in \wp_d$ правдоподобна гипотеза: пороговый резонанс отсутствует и у смешанной краевой задачи, и вместо ограниченного решения (2.21) появляется имеющее линейный рост на бесконечности (опять-таки вещественное) решение

$$U^\#(\xi) = (\xi_1 + K_\#) \sin(\pi \xi_2) e_{(1)} + \tilde{U}^\#(\xi) \quad (2.22)$$

с каким-то коэффициентом $K_\#$ и экспоненциально затухающим остатком $\tilde{U}^\# \in H_0^1(\Pi; \bar{\omega}_0 \cup \bar{\omega}_1)^2$. При этом в принципе не исключено возникновение затухающего ($K_+ = 0$) решения (2.21), т.е. захваченной волны, при которой M_+ — истинное собственное число, а сам пороговый резонанс — мнимый (терминология

[11]). Если же $K_{\dagger} \neq 0$, то решение (2.22) заведомо отсутствует, а почти стоячая волна (2.21) порождает правильный пороговый резонанс. Таким образом, в скалярной задаче (2.10) — (2.12) пороговый резонанс правильный, а почти стоячая волна (2.14) устроена очень просто, так как остаток $U^{\dagger}$ нулевой.

3. Двумерная модель тонкой пластины с полностью зафиксированной поверхностью. Изложим с некоторыми исправлениями результат [8] для задачи Дирихле (1.4), (1.5), (1.11) в цилиндрической пластине $\Omega^h = \omega \times (0, h)$ — сопутствующие вычисления используются и далее в статье. Подставим асимптотические разложения ее собственных пар (малые остатки обозначены многоточием)

$$\Lambda^h = h^{-2} M_{\dagger} + \beta + \dots = h^{-2} \mu \pi^2 + \beta + \dots \quad (3.1)$$

$$u^h(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=1,2} \left(v_i(y) \sin(\pi \zeta) e_{(i)} + h V_i'(\zeta, y) \right) + V_3(\zeta) \nabla_y v(y) e_{(3)} + \dots \quad (3.2)$$

в систему уравнений (1.4) и соберем множители при одинаковых степенях малого параметра h . В результате при учете условия Дирихле на основаниях пластины получим скалярную задачу для функции V_3 из разложения (3.2)

$$\begin{aligned} -(\lambda + 2\mu) \partial_{\zeta}^2 V_3(\zeta) - M_{\dagger} V_3(\zeta) &= \\ &= (\lambda + \mu) \pi \cos(\pi \zeta); \quad \zeta \in (0, 1) \\ V_3(0) &= V_3(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

и явное выражение

$$\begin{aligned} V_3(\zeta) &= \frac{1}{\pi} \left(\cos(\pi \zeta) - \cos(\pi \alpha \zeta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + \cos(\pi \alpha)}{\sin(\pi \alpha)} \sin(\pi \alpha \zeta) \right) \\ \alpha &= \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

При этом $s \in (\pi \alpha \zeta) > 0$.

Условия разрешимости

$$\int_0^1 \sin(\pi \zeta) F'(y, \zeta) d\zeta = 0 \in \mathbb{R}^2$$

очередной задачи для вектора $V' = (V_1', V_2')$

$$\begin{aligned} -\mu \Delta_y V' - M_{\dagger} V' &= \\ = F' &:= (\beta v + \mu \Delta_y v + (\lambda + \mu) \nabla_y \nabla_y v) \sin(\pi \zeta) + \\ &+ (\lambda + \mu) \partial_{\zeta} V_3 \nabla_y \nabla_y v \text{ при } \zeta \in (0, 1) \end{aligned}$$

$$V'(0) = V'(1) = 0$$

принимает вид двумерной системы дифференциальных уравнений Ламе для ингредиентов $v = (v_1, v_2)$ и β разложений (3.2) и (3.1)

$$-\mu \Delta_y v(y) - 2\theta \nabla_y \nabla_y v(y) = \beta v(y); y \in \omega \quad (3.5)$$

В самом деле, согласно равенствам (2.13) и (3.3) имеем

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) \int_0^1 \sin(\pi \zeta) \partial_\zeta V_3(\zeta) d\zeta = \\ & = -(\lambda + 2\mu) \frac{1}{\pi} \int_0^1 \partial_\zeta \cos(\pi \zeta) \partial_\zeta V_3(\zeta) d\zeta + \\ & \quad + \mu \int_0^1 \sin(\pi \zeta) \partial_\zeta V_3(\zeta) d\zeta = \\ & = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(\pi \zeta) \partial_\zeta^2 V_3(\zeta) d\zeta + \theta + \\ & \quad + \mu \pi \int_0^1 \cos(\pi \zeta) V_3(\zeta) d\zeta = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 (\lambda + \mu) \pi \cos^2(\pi \zeta) d\zeta + \theta = \\ & = \frac{1}{2}(\lambda + \mu) + b \\ & \theta = \theta(\alpha) := (\lambda + 2\mu) \frac{1}{\pi} \left(\frac{dV_3}{d\zeta}(1) + \frac{dV_3}{d\zeta}(0) \right) = \\ & = (\lambda + 2\mu) \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1 + \cos \pi \alpha}{\sin \pi \alpha} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, при формировании системы (3.5) коэффициент (3.6) при $\nabla_y \nabla_y v$ умножается на два и уничтожается последнее слагаемое в следующей простой формуле для оставшейся части выражения F' :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin(\pi \zeta) (\beta v + \mu \Delta_y v + (\lambda + \mu) \nabla_y \nabla_y v) \times \\ & \quad \times \sin(\pi \zeta) d\zeta = \frac{1}{2} (\beta v + \mu \Delta_y v) + \\ & \quad + \frac{1}{2} (\lambda + \mu) \nabla_y \nabla_y v \end{aligned}$$

Функция $\left[0, 2^{-\frac{1}{2}} \right] \ni \alpha \mapsto \lambda_*(\alpha) := 2\theta(\alpha) - \mu$ монотонно убывает от $+\infty$ до

отрицательного значения, чуть меньшего $-\mu/9$. Таким образом, новые постоянная Ламе $\lambda_*(\alpha)$ и коэффициент Пуассона $\nu_*(\alpha) = \frac{\lambda_*(\alpha)}{2(\lambda_*(\alpha) + \mu)}$ в системе (3.5) становятся

отрицательными при малом коэффициенте Пуассона $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + 2\mu)}$ самого материала пластины, хотя сумма $\lambda_*(\alpha) + \mu$ всегда положительна.

Найденную систему (3.5) замыкаем краевыми условиями

$$v_j(y) = 0; y \in \partial\omega, j = 1, 2 \quad (3.7)$$

Гипотетически появление условий Дирихле (3.7) объясняется исходными краевыми условиями (1.11) на боковой поверхности пластины, но правильный их вывод [8], основанный на методе сращиваемых асимптотических разложений (см. монографии [17–19, гл. 2], а также разд. 8, 1°) учитывает одновременное отсутствие дискретного спектра и порогового резонанса в задачах об упругой полуполосе (1.12), плоской (2.9), (2.16), (2.20) и антиплоской (2.10), (2.15).

Поскольку $\lambda_*(\alpha) + \mu > 0$, задача Дирихле (3.5), (3.7) имеет дискретный спектр, образующий положительную монотонную неограниченную последовательность собственных чисел, составленную при учете их кратностей

$$0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \dots \leq \beta_m \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (3.8)$$

Проверено [8], что для любого натурального m найдутся положительные величины h_m и c_m , при которых собственные числа (1.10) и (3.8) соответственно задач (1.4), (1.5), (1.11) и (3.5), (3.7) находятся в отношении

$$\left| \Lambda_m^h - h^{-2} M_{\dagger} - \beta_m \right| \leq c_m h^{\frac{1}{2}} \text{ при } h \in (0, h_m] \quad (3.9)$$

Оценка погрешности (3.9) показывает, что двумерная модель тонкой прокладки с полностью закрепленной поверхностью построена корректно. На первый взгляд кажется, что в случае прокладки с боковой поверхностью, свободной от внешнего воздействия, краевые условия Неймана (1.6) дают в качестве предельной задачи систему двумерных уравнений (3.5) с обычными краевыми условиями в напряжениях. Этот вывод скоропалителен по двум причинам. Во-первых, в очередных разделах установлено, что низкочастотный диапазон спектра задачи (1.4) — (1.6) о цилиндрической пластине $\Omega^h = \omega \times (0, h)$ определяется одномерными (а вовсе не двумерной) задачами на контуре $\partial\omega$ или на целой оси $\mathbb{R}$. Во-вторых, в разд. 8, 1° пояснено, что тип краевых условий для системы (3.5), которая в некотором смысле служит для описания среднечастотного диапазона спектра трехмерной задачи, определен не исходными краевыми условиями на боковой поверхности Γ^h , а явлением порогового резонанса в задачах (2.9), (2.16), (2.17) и (2.10) — (2.12) о пограничных слоях.

4. О затухании собственных мод вне окрестности кромки прокладки. Для цилиндрической пластины $\Omega^h = \omega \times (0, h)$ с боковой поверхностью, свободной от внешних воздействий, доказано [8], что при ограничении

$$\Lambda_m^h \leq \frac{M_{\dagger}}{h^2} - \frac{\varepsilon}{h^2} \quad (4.1)$$

с некоторыми $m \in N$ и $\varepsilon > 0$ найдется такая положительная величина $h_m(\varepsilon)$, что для

$h \in (0, h_m(\varepsilon)]$ и $p = 1, \dots, m$ собственные моды $u_{(p)}^h$ затухают при удалении от боковой поверхности (1.3) с экспоненциальной скоростью $e^{-\delta_p \text{dist}(y, \partial\omega)/h}$ при положительных показателях δ_p .

У задачи Дирихле (1.4), (1.6), (1.11) собственных чисел (4.1) нет по причине одномерного неравенства Фридрихса

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\partial_\zeta W(\zeta)|^2 d\zeta &\geq \\ &\geq \pi^2 \int_0^1 |W(\zeta)|^2 d\zeta; W \in H^1(0,1) \\ W(0) = W(1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

проинтегрированного по переменным $y \in \omega$, и совпадения функционалов упругой энергии (1.9) и так называемой квазиэнергии [2]

$$\int_{\Omega^h} \left(\mu |\nabla_x u^h(x)|^2 + (\lambda + \mu) |\nabla_x u^h(x)|^2 \right) dx$$

Убедимся в том, что начальные члены последовательности (1.10) собственных чисел задачи (1.4) — (1.6) в самом деле удовлетворяют неравенству (4.1).

Поскольку билинейная форма (1.9) из левой части интегрального тождества (1.8) симметрична, положительно определена и замкнута в пространстве Соболева $H_0^1(\Omega^h; \Sigma^0 \cup \Sigma^h)^3$, задаче (1.4) — (1.6) ставится в соответствие [20, гл. 10, § 1] неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор A^h в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega^h)^3$. Дискретный спектр (1.10) этого оператора вычисляется при помощи максиминимального принципа [20, теорема 10.2.2]

$$\Lambda_m^h = \max_{L_m^h} \inf_{\psi^h \in L_m^h \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{E}(\psi^h, \psi^h; \Omega^h)}{\|\psi^h; L^2(\Omega^h)\|^2}; m \in \mathbb{N}, \quad (4.3)$$

в котором L_m^h — любое подпространство в пространстве $H_0^1(\Omega^h; \Sigma^0 \cup \Sigma^h)^3$ с коразмерностью $m - 1$, в частности, $L_1^h = H_0^1(\Omega^h; \Sigma^0 \cup \Sigma^h)^3$.

Зафиксируем натуральное число $m \in \mathbb{N}$ и выделим на контуре $\partial\omega$ непустые попарно непересекающиеся открытые дуги $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. Для нетривиальных функций $\phi_p \in C_c^\infty(\gamma_p)$; $p = 1, \dots, m$, обращающихся в нуль около концевых точек дуг, определим проекции вектор-функций $\Phi_{(p)}^h$ на оси n, z и s равенствами

$$\begin{aligned} \Phi_{(p)n}^h(x) &= \chi_\omega(y) \phi_p(s) U_{(1)n}(h^{-1}n, h^{-1}z) \\ \Phi_{(p)z}^h(x) &= \chi_{\omega(y)\phi_p(s)} U_{(1)z}(h^{-1}n, h^{-1}z), \Phi_{(p)s}^h(x) = 0 \end{aligned}$$

При этом χ_ω — гладкая срезающая функция, равная единице при $y \in N_{d/2}$ и нулю вне окрестности N_d контура $\partial\omega$, а $U_{(1)}' \in H_0^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \mathfrak{A}_\bullet)^2$ — собственная вектор-функция задачи (2.9), (2.16), (2.17), отвечающая собственному числу $M_1 < M_\dagger$ и нормированная в пространстве Лебега $L^2(\Pi)^2$. В силу равенства (2.18) при $\Psi = U_{(1)}' u$ $M = M_1$ имеем

$$\begin{aligned}
 \| \Phi_{(p)}^h; L^2(\Omega^h) \|^2 &= \int_{\partial\omega} \int_{-d}^0 \int_0^h |\chi_{\omega(y)}|^2 |\Phi_p(s)|^2 \times \\
 &\quad \times \left| U_{(1)}' \left(\frac{n}{h}, \frac{z}{h} \right) \right|^2 J(n, s) dn dz ds = \\
 &= h^2 \| \Phi_p; L^2(\gamma_p) \|^2 \left(\| U_{(1)}'; L^2(\Pi) \|^2 + O(h) \right) = \\
 &= h^2 \| \Phi_p; L^2(\gamma_p) \|^2 (1 + O(h)) \\
 \mathcal{E}(\Phi_{(p)}^h, \Phi_{(p)}^h; \Omega^h) &= \| \Phi_p; L^2(\gamma_p) \|^2 \times \\
 &\quad \times \left(E(U_{(1)}', U_{(1)}'; \Pi) + O(h) \right) = \\
 &= \| \Phi_p; L^2(\gamma_p) \|^2 \left(M_1 \| U_{(1)}'; L^2(\Pi) \|^2 + O(h) \right) = \\
 &= \| \Phi_p; L^2(\gamma_p) \|^2 (M_1 + O(h))
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь были учтены представление для якобиана $J(n, s) = 1 + O(|n|)$ и экспоненциальное затухание моды $U_{(1)}'(\xi)$ при $h^{-1}n = \xi_1 \rightarrow -\infty$.

Положив $\Psi_{(p)}^h = \| \Phi_{(p)}^h; L^2(\Omega^h) \|^{-1} \Phi_{(p)}^h$, получим набор ортонормированных в пространстве $L^2(\Omega^h)^3$ пробных вектор-функций $\Psi_{(1)}^h, \dots, \Psi_{(m)}^h \in H_0^1(\Omega^h; \Sigma^0 \cup \Sigma^h)^3$, причем согласно соотношениям (4.4) для любой линейной комбинации $\Psi^h = a_1^h \Psi_{(1)}^h + \dots + a_m^h \Psi_{(m)}^h$ с нормированным столбцом коэффициентов $(a_1^h, \dots, a_m^h) \in \mathbb{R}^m$ выполнена оценка

$$E(\Psi^h, \Psi^h; \Omega^h) \leq (M_1 h^{-2} + C_m h^{-1}) \| \Psi^h; L^2(\Omega^h) \|^2 \tag{4.5}$$

с некоторым общим множителем C_m . Итак, любое подпространство $L_m^h \subset H_0^1(\Omega^h; \Sigma^0 \cup \Sigma^h)^3$ с коразмерностью $m-1$ содержит свою нетривиальную линейную комбинацию $\Psi^h(L_m^h)$ построенных вектор-функций. В результате выводим из формул (4.3) и (4.5) соотношение

$$\Lambda_m^h \leq \max_{L_m^h} \frac{\mathcal{E}(\Psi^h(L_m^h), \Psi^h(L_m^h); \Omega^h)}{\|\Psi^h(L_m^h); L^2(\Omega^h)\|^2} \leq \frac{M_1}{h^2} + \frac{C_m}{h}$$

Отсюда вытекает неравенство (4.1) при любом $\varepsilon \in \left(0, \frac{M_1 - M_1}{2}\right)$ и достаточно малом $h > 0$.

5. Прокладка в форме кругового цилиндра. В ситуации (ii) сечение ω — единичный круг $\mathbb{B}_1$, а $(r, \varphi, z) = (1 + n, s, z)$ — система цилиндрических координат. Кроме того, кривизна κ постоянная, но ее значение $\kappa(s) = \kappa_0 = 1$ часто не конкретизируем для использования формул в очередном разделе.

Собственные пары задачи (1.4) — (1.6) ищем в виде

$$\Lambda^h = h^{-2} M_1 + h^{-1} A + \beta + \dots \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} u^h(x) &= U_{(1)}(\eta, \zeta) v(s) + \\ &+ h W(\eta, \zeta, s; v) + h^2 Z(\eta, \zeta, s; v) + \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

Как и ранее, многоточие замещает младшие асимптотические члены, $\{M_1; U_{(1)}'\}$ — первая собственная пара задачи (2.9), (2.16), (2.17), экспоненциально затухающая вектор-функция $U_{(1)}' = (U_{(1)1}, U_{(1)2}) := (U_{(1)n}, U_{(1)z})$ нормирована в пространстве $L^2(\Pi)^2$, а компонента $U_{(1)s}$ вектора $U_{(1)}$ взята нулевой в формуле (5.2). Остальные ингредиенты введенных разложений подлежат определению.

Подставим соотношения (5.1), (5.2) и (2.4) в систему (1.4) и соберем множители при h^{-2} и h^{-1} . При учете формул (2.9) и (2.5), (2.6) видим, что старшие асимптотические члены взаимно уничтожаются. Первое поправочное слагаемое представим в виде

$$\begin{aligned} W(\eta, \zeta, s; v) &= \\ &= (v(s) W_n(\eta, \zeta), v(s) W_z(\eta, \zeta), \partial_s v(s) W_s(\eta, \zeta)) \end{aligned} \quad (5.3)$$

В итоге для двумерного вектора $W' = (W_1, W_2) := (W_n, W_z)$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} -\mu \Delta_\xi W'(\xi) - (\lambda + \mu) \nabla_\xi \nabla_\xi W'(\xi) - M_1 W'(\xi) &= \\ &= A U_{(1)}'(\xi) + \kappa(s) F'(\xi); \xi \in \Pi \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} F' &= (F_1', F_2'), F_1' = 2(\lambda + \mu) \partial_\eta U_{(1)1} \\ F_2' &= (\lambda + \mu) \partial_\zeta U_{(1)2} + \mu \partial_\eta U_{(1)2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Однородные условия Дирихле (2.16) для вектор-функции W' на боковых сторонах полуполосы очевидны, а формулы (2.8), (2.17) и (5.3) обеспечивают следующие краевые условия на ее торце $\partial_\bullet$:

$$\sigma_{1j}(W'; 0, \xi_2) = \kappa(s) G_j'(\xi_2); \xi_2 \in (0, 1), j = 1, 2 \quad (5.6)$$

$$G' = (G_1', G_2'), G_1(\xi_2) = -\lambda U_{(1)1}(0, \xi_2), G_2(\xi_2) = 0 \quad (5.7)$$

В случае простого собственного числа M_1 задача (2.16), (5.4), (5.6) имеет решение при выполнении соотношения

$$A \int_{\Pi} |U_{(1)}(\xi)|^2 d\xi + \kappa_0 \times \left(\int_{\Pi} U_{(1)}'(\xi) F'(\xi) d\xi - \int_0^1 U_{(1)}'(0, \xi_2) G'(\xi_2) d\xi_2 \right) = 0, \quad (5.8)$$

которое при помощи формулы интегрирования по частям, а также соотношений (5.5), (5.7) и $\|U_{(1)}'; L^2(\Pi)\| = 1$ превращаем в равенство

$$A = -\frac{\kappa_0}{2} \int_{\mathfrak{W}_*} \left(2\mu |U_{(1)1}(\xi)|^2 + \mu |U_{(1)2}(\xi)|^2 \right) d\xi_2 < 0 \quad (5.9)$$

Интеграл по торцу $\mathfrak{W}_*$ положителен в силу теоремы о единственности продолжения [21, гл. 4], означающей, что вектор $U_{(1)}'$ не может целиком обратиться в нуль всюду на и, кроме того, $\kappa_0 = 1$. Таким образом, равенство (5.9) определяет первый поправочный член в разложении (5.9) собственного числа, и он отрицательный.

Согласно формулам (2.6) и (2.8), для последней компоненты вектора (5.3) получим неоднородное уравнение Гельмгольца

$$-\mu \Delta_{\xi} W_s(\xi) - M_1 W_s(\xi) = (\lambda + \mu) \nabla_{\xi} U_{(1)}'(\xi); \xi \in \Pi \quad (5.10)$$

вместе с краевыми условиями Дирихле (2.11) и Неймана

$$\mu \partial_{\eta} W_s(0, \xi_2) = -\mu U_{(1)n}(0, \xi_2); \xi_2 \in (0, 1) \quad (5.11)$$

Поскольку $M_1 < M_+$, задача (5.10), (2.11), (5.11) имеет единственное решение, затухающее на бесконечности с экспоненциальной скоростью.

Скалярная задача для слагаемого Z_s , третьей компоненты вектор-функции Z из разложения (5.2) однозначно разрешима — она не играет роли в вычислениях из данного раздела. В силу формул (5.1), (5.2) и (2.5) — (2.8) вектор $Z' = (Z_1', Z_2') := (Z_n', Z_z')$, образованный первыми двумя компонентами, удовлетворяет задаче вида (5.4), (2.16), (2.17) с правыми частями $F'' = (F_1'', F_2'')$ в системе уравнений на полуполосе Π и $G'' = (G_1'', G_2'')$ в краевом условии на ее торце $\mathfrak{W}_*$.

$$\begin{aligned} F'' &= \beta U_{(1)}' - L^{(1)'}(W'v) - \\ &- L_{(s)}^{(1)}(W_s \partial_s v) - L^{(2)'}(U'v) = \\ &= \beta U_{(1)}' v + \left(\mu U_{(1)} + (\lambda + \mu) \nabla_{\xi} W_s \right) \partial_s^2 v + f'' v \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} G_1'' &= -\lambda W_s \partial_s^2 v + g_1'' v, G_2'' = \\ &= 0; g_1'' = -\lambda \kappa W_1 - \lambda \kappa^2 \eta U_{(1)1} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Здесь $L^{(1)'}$, $L^{(2)'}$ и $L_{(s)}^{(1)}$, $L_{(s)}^{(2)}$ — верхние левые (2×2) -блоки и правые столбцы высотой два в матрицах (2.6), (2.7) соответственно. Условие разрешимости такой задачи

$$\begin{aligned} 0 &= \beta \int_{\Pi} \left| U_{(1)}'(\xi) \right|^2 d\xi v(s) - \int_{\Pi} U_{(1)}'(\xi) F''(\xi) d\xi - \\ &\quad - \int_{\mathfrak{M}} U_{(1)}'(0, \zeta) G''(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (5.14)$$

принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения на единичной окружности

$$-B \partial_s^2 v(s) + b v(s) = \beta v(s); s \in \partial \omega = \partial \mathbb{B}_1 \quad (5.15)$$

Поясним проделанные вычисления. Первое слагаемое в правой части равенства (5.14) превращается в левую часть уравнения (5.15) по причине нормировки собственной вектор-функции $U_{(1)}'$ в пространстве Лебега $L^2(\Pi)^2$. Согласно формулам (2.6), (2.7) и (5.3), первая производная $\partial_s v$ отсутствует в выражениях (5.12) и (5.13), где отделена вторая производная $\partial_s^2 v$, появляющаяся только в слагаемых $L_s^{(1)'} W_s \partial_s v$, $L^{(2)'} U' v$ и G_1' . Поэтому выполнены соотношения

$$\begin{aligned} B &= \mu \int_{\Pi} \left| U_{(1)}'(\xi) \right|^2 d\xi + \\ &+ (\lambda + \mu) \int_{\Pi} U_{(1)}'(\xi) \nabla_{\xi} W_s(\xi) d\xi - \\ &- \lambda \int_0^1 U_{(1)}'(0, \xi_2) W_s(0, \xi_2) d\xi_2 = \mu - D \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} D &= (\lambda + \mu) \int_{\Pi} W_s(\xi) \nabla_{\xi} \cdot U_{(1)}'(\xi) d\xi - \\ &- \mu \int_0^1 U_{(1)}'(0, \xi_2) W_s(0, \xi_2) d\xi_2 = \\ &= - \int_{\Pi} W_s(\xi) (\mu \Delta_{\xi} W_s(\xi) + M W_s(\xi)) d\xi - \\ &- \mu \int_0^1 U_{(1)}'(0, \xi_2) W_s(0, \xi_2) d\xi_2 = \\ &= \int_{\Pi} \left(\mu \left| \nabla_{\xi} W_s(\xi) \right|^2 - M_1 \left| W_s(\xi) \right|^2 \right) d\xi > 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

В выкладке (5.17) помимо равенств (5.10) и (5.11) использованы формулы интегрирования по частям, включение $M_1 \in (0, \mu \pi^2)$, а также неравенство Фридрихса (4.2).

Постоянный коэффициент

$$\begin{aligned} b &= \int_{\Pi} U_{(1)}'(\xi) f''(\xi) d\xi - \\ &- \int_0^1 U_{(1)}'(0, \xi_2) g''(0, \xi_2) d\xi_2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

вычисленный при учете равенств (2.6) — (2.8) и (5.12), (5.13), не играет существенной роли в формулах для собственных чисел и функций обыкновенного дифференциального уравнения (5.15)

$$\begin{aligned}\beta_k &= \mathbf{B}^{-1}k^2 - \mathbf{b}, \quad v_k(s) = e^{iks} \\ k \in \mathbb{Z} &:= \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad i = \sqrt{-1}\end{aligned}\quad (5.19)$$

Вместе с тем принципиально важен знак разности

$$\mathbf{B} = \mu - \int_{\Pi} \left(\mu |\nabla_{\xi} W_s(\xi)|^2 - M_1 |W_s(\xi)|^2 \right) d\xi \quad (5.20)$$

Именно, при $\mathbf{B} > 0$ собственные числа β_j неограниченно возрастают при $j \rightarrow +\infty$, но при $\mathbf{B} < 0$ они убывают. Отметим, что равенство $\mathbf{B} = 0$ возможно лишь для изолированных значений постоянной Ламе $\lambda > 0$ ввиду аналитической зависимости величины (5.20) от коэффициента Пуассона ν .

К сожалению, из-за незнания собственного числа M_1 выяснение знака величины (5.20) остается открытым вопросом. Так, простые выкладки, доступные без какой-либо информации о собственной паре $\{M_1; U_{(1)}\}$ задачи (5.20) в полуполосе Π

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \|\nabla_{\xi} U'_{(1)}; L^2(\Pi)\|^2 &\leq E(U'_{(1)}; U'_{(1)}; \Pi) = \\ &= M_1 \|U'_{(1)}; L^2(\Pi)\|^2 = M_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T^2 &:= \mu \|\nabla_{\xi} W_s; L^2(\Pi)\|^2 - M_1 \|W_s; L^2(\Pi)\|^2 = \\ &= \lambda (W_s, \nabla_{\xi} U')_{\Pi} - \mu (\nabla_{\xi} W_s, U')_{\Pi} \leq \\ &\leq \lambda \|W_s; L^2(\Pi)\| \|\nabla_{\xi} U'; L^2(\Pi)\| + \\ &+ \mu \|\nabla_{\xi} W_s; L^2(\Pi)\| \|U'; L^2(\Pi)\| \leq \\ &\leq \lambda \|W_s; L^2(\Pi)\| \|\nabla_{\xi} U'; L^2(\Pi)\| + \\ &+ \mu \|\nabla_{\xi} W_s; L^2(\Pi)\| \|U'; L^2(\Pi)\| \leq \\ &\leq \frac{\lambda \sqrt{M_1}}{\sqrt{\lambda + \mu}} \|W_s; L^2(\Pi)\| + \mu \|\nabla_{\xi} W_s; L^2(\Pi)\| \leq \\ &\leq \frac{T}{\sqrt{\mu - M_1 \pi^{-2}}} \left(\pi \frac{\lambda \sqrt{M_1}}{\sqrt{\lambda + \mu}} + \mu \right)\end{aligned}$$

не приводят к нужному выводу, поскольку постоянная Ламе μ строго меньше мажоранты в финальной оценке

$$\begin{aligned}\mu \|\nabla_{\xi} W_s; L^2(\Pi)\|^2 - M_1 \|W_s; L^2(\Pi)\|^2 &\leq \\ &\leq \frac{1}{\mu - M_1 \pi^{-2}} \left(\mu + \pi \frac{\lambda \sqrt{M_1}}{\sqrt{\lambda + \mu}} \right)^2\end{aligned}$$

Как и в скалярной задаче для несколько иной геометрии [12], при помощи классической леммы о “почти собственных” числах и векторах (см. первоисточник [22]), обеспеченной спектральным разложением резольвенты [20, гл. 6, §1], проверяется, что при указанных ограничениях для любого целого $k \in \mathbb{Z}$ найдутся такие положительные величины h_k, c_k и собственное число $\Lambda_{N_k(h)}^h$ задачи (1.4)–(1.6), что верна оценка

$$\begin{aligned} \left| \Lambda_{N_k(h)}^h - M_1 h^{-2} - A h^{-1} - \beta_k \right| \leq \\ \leq c_k h^{1/2} \text{ при } h \in (0, h_k] \end{aligned} \quad (5.21)$$

Коэффициенты A и β_k взяты из формул (5.9) и (5.18)–(5.20). Несмотря на то, что собственное число $\beta_k = \beta_{-k}$ при $k \in N$ двукратное, номера $N_k(h)$ и $N_{-k}(h)$ членов последовательности (1.10) различны. Вместе с тем неизвестно, как эти номера зависят от параметра h , поскольку по причине отсутствия детальной информации о собственной паре $\{M_1; U_{(1)}\}$, в частности, о знаке коэффициента (5.20), не удалось доказать обычное утверждение о сходимости: предельный переход

$$\Lambda_k^h - M_1 h^{-2} - A h^{-1} \rightarrow \Lambda_k \text{ при } h \rightarrow +0 \quad (5.22)$$

дает какое-то собственное число $\hat{\Lambda}_k$ дифференциального уравнения (5.15).

При $B > 0$ упорядоченная по возрастанию последовательность $\{\beta_m\}_{m \in N}$ собственных чисел (5.19) монотонно возрастающая, и поэтому из (непроверенного) результата (5.22) можно вывести, что $N_0(h) = 1$ и $N_{\pm m}(h) = 2m, 2m + 1$ при $m \in \mathbb{N}$ (собственные числа β_0 и β_m простое и двукратное соответственно). Если же $B < 0$ и последовательность $\{\beta_m\}_{m \in N}$ монотонно убывающая, то индексы $N_{\pm k}(h)$ сложным образом зависят от h , т.е. асимптотическое строение спектра (1.10) оказывается серьезно запутанным.

6. Цилиндрическая прокладка с сечением произвольной формы. Если кривизна κ контура $\partial\omega$ переменная, то соблюсти условие разрешимости задачи (5.4) путем выбора постоянного коэффициента A во втором члене разложения (5.1) не удастся. Уточним требование (iii) из разд. 1 следующим образом:

$$\begin{aligned} \kappa(s) = \kappa_0 - m s^2 + O(|s|^3) \\ m \neq 0, m \kappa(s) < m \kappa_0 \text{ при } s \neq 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

При этом случай $m > 0$ отвечает строгому глобальному максимуму, а случаи $m < 0$ — такому же минимуму.

Реализуя асимптотическую процедуру [12], в дополнение к заменам (2.3) введем на контуре $\partial\omega$ растянутую координату

$$\tau = h^{-1/4} s \quad (6.2)$$

и модифицируем асимптотические разложения собственных пар задачи (1.4) — (1.6)

$$\Lambda^h = h^{-2} M_1 + h^{-1} A + h^{-1/2} \beta + \dots \quad (6.3)$$

$$u^h(x) = U_{(1)}(\eta, \zeta)v(\tau) + \\ + h^{3/4}W^h(\eta, \zeta, \tau; v) + h^{3/2}Z^h(\eta, \zeta, \tau; v) + \dots \quad (6.4)$$

Здесь v — функция на оси $\mathbb{R}$, подлежащая определению и затухающая на бесконечности с экспоненциальной скоростью. Сохраним выражение (5.9) для величины A , взяв постоянный коэффициент κ_0 из требования (6.2), но в соответствии с заменой (6.1) и аналогично формуле (5.3) положим

$$W^h(\eta, \zeta, \tau; v) = \left(h^{1/4}v(\tau)W_n(\eta, \zeta), h^{1/4}v(\tau)W_z(\eta, \zeta), \partial_\tau v(\tau)W_s(\eta, \zeta) \right)$$

Компонента W_s определяется из прежней — однозначно разрешимой — задачи (5.4), (2.16), (2.17). При учете дополнительных невязок в системе дифференциальных уравнений в полуполосе Π и в краевом условии на ее торце ∂ .

$$h^{-1}(\kappa(s) - \kappa_0)F'(\xi) = \\ = h^{-1}ms^2F'(\xi) + \dots = h^{-1/2}m\tau^2F'(\xi) + \dots \\ (\kappa(s) - \kappa_0)G'(\xi) = \\ = ms^2G'(\xi) + \dots = h^{1/2}m\tau^2G'(\xi) + \dots$$

содержащих векторы (5.5), (5.7) и появившихся в результате подстановки $\kappa(s) \mapsto \kappa_0$, согласно представлению (6.1), обнаруживаем, что правые части F'' и G'' задачи вида (5.4), (2.16), (2.17) для слагаемого $Z' = (Z_1, Z_2)$ разложения (6.4) определены равенствами, отличающимися от указанных формулами (5.12)

$$F''(\xi, \tau) = -(\mu\partial_\tau^2 v(\tau) + \beta v(\tau))U_{(1)}'(\xi) + \\ + m\tau^2 F'(\xi)v(\tau) - (\lambda + \mu)\partial_\tau^2 v(\tau)\nabla_\xi W_s(\xi) \\ G''(\zeta, \tau) = m\tau^2 G'(\xi)v(\tau) - \\ - \mu\partial_\tau^2 v(\tau)W_s(0, \zeta), \quad G_z'(\zeta, \tau) = 0$$

Теперь прежние выкладки (5.8), (5.9) и (5.14), (5.16) придают условию разрешимости задачи для вектор-функции Z' из разложения (6.4) вид обыкновенного дифференциального уравнения гармонического осциллятора [9]

$$-B\partial_\tau^2 v(\tau) + Am\tau^2 v(\tau) = \beta v(\tau); \tau \in R \quad (6.5)$$

с коэффициентами из формул (5.20), (5.10) и (6.1).

Для того чтобы обеспечить нужные свойства собственных пар уравнения (6.5), опять приходится разбирать разные случаи. Именно при $B > 0$ приходится предположить, что $m > 0$ и в точке $s = 0$ реализуется максимум кривизны κ , но при $B < 0$ требуется отрицательный коэффициент m в соотношении (6.1), обеспечивающий минимум кривизны. В указанных ситуациях собственные числа уравнения (6.5) приобретают вид

$$\beta_k = (2k-1)\text{sign } \mathbf{B} \sqrt{\frac{|\mathbf{A}m|}{|\mathbf{B}|}}; k \in N \quad (6.6)$$

Здесь фигурирует знак $\text{sign } \mathbf{B} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ выражения (5.20). Как и в разд. 5, в случае $\mathbf{B} > 0$ собственные числа (6.6) образуют монотонно возрастающую положительную последовательность, но в случае $\mathbf{B} < 0$ последовательность отрицательная и монотонно убывающая. В итоге комментарии к оценке точности асимптотического приближения

$$\begin{aligned} \left| \Lambda_{N_k(h)}^h - M_1 h^{-2} - A h^{-1} - h^{-1/2} \beta_k \right| \leq \\ \leq c_k h^{-1/4} \text{ при } h \in (0, h_k] \end{aligned} \quad (6.7)$$

справедливой при любом индексе $k \in \mathbb{N}$ и некоторых положительных величинах c_k, h_k , повторят дословно комментарии к оценке (5.21) в разд. 5.

7. Упругая прокладка переменной толщины. Рассмотрим пластину (1.1) переменной толщины $hH(y)$ и уточним требование (i) из разд. 1 следующим образом:

$$\begin{aligned} H(y) = H_0 - q(y) + O(|y|^3) \\ H(y) < H_0 \text{ при } y = (y_1, y_2) \in \dot{\omega} = \omega \setminus O \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} q(y) = q_{11}y_1^2 + 2q_{12}y_1y_2 + q_{22}y_2^2 \\ q_{11}, q_{22} > 0, q_{12}^2 < q_{11}q_{22} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Собственные пары задачи (1.4) — (1.6) ищем в виде

$$\Lambda^h = h^{-2} M_{\dagger} H_0^{-2} + h^{-1} \beta + \dots \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} u^h(x) = \sum_{i=1,2} \left(v_i(\eta) \sin\left(\frac{\pi \zeta}{H(y)}\right) + h V_i(\zeta, \eta) \right) e_{(i)} + \\ + \sqrt{h} V_3(\zeta, y) e_{(3)} \nabla_{\eta} v(\eta) + \dots \end{aligned} \quad (7.4)$$

Как и ранее, многоточие замещает младшие асимптотические члены, $e_{(j)}$ — орты x_j и $\zeta = h^{-1}z$ — растянутая поперечная координата. Вместе с тем новая система растянутых продольных координат имеет вид

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) := h^{-1/2}y \quad (7.5)$$

Число β и вектор-функции $v = (v_1, v_2)$, $V' = (V_1, V_2)$ подлежат определению, а V_3 — найденное по прежнему правилу (3.4) выражение

$$V_3(\zeta, y) = \frac{H(y)}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi\zeta}{H(y)}\right) - \cos\left(\frac{\pi\alpha\zeta}{H(y)}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1 + \cos(\pi\alpha)}{\sin\pi\alpha} \sin\left(\frac{\pi\alpha\zeta}{hH(y)}\right) \right) \quad (7.6)$$

Подставим разложения (7.3) и (7.4) в систему (1.4) и просуммируем множители при h^{-2} , $h^{-3/2}$ и h^{-1} в образовавшейся невязке. Заметим, что

$$\begin{aligned} & -\left(\mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\pi^2\mu}{h^2 H_0^2}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{hH(y)}\right) = \\ & = \frac{\pi^2\mu}{h^2} \left(\frac{1}{H(y)^2} - \frac{1}{H_0^2}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{hH(y)}\right) = \\ & = \frac{\pi^2\mu}{h^2} \left(\frac{2q(y)}{H_0^3} + O(|y|^3)\right) \sin\left(\frac{\pi z}{hH(y)}\right) = \\ & = \frac{\pi^2\mu}{h^2} \left(2\frac{q(\eta)}{H_0^3} + O(\sqrt{h}|\eta|^3)\right) \sin\left(\frac{\pi z}{hH(y)}\right) \\ & \sqrt{h}(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla_y V_3\left(\frac{\zeta}{hH(y)}\right) \nabla_\eta v(\eta) = \\ & = \frac{1}{h}(\lambda + \mu) \left(\frac{1}{H_0} + O(h^2|\eta|^2)\right) \times \\ & \times \partial_\zeta V_3\left(\frac{\zeta}{hH(y)}\right) \nabla_\eta \nabla_\eta v(\eta) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Итак, при учете множителей при h^{-1} в выражениях (7.7), а также выбора числа $M_\dagger = \pi^2\mu$ и функции (7.6), удовлетворяющей уравнению (3.3) на отрезке $(0, H(y)) \ni \zeta$, обнаружим, что главные члены невязки уничтожаются, а вектор-функцию $V' = (V_1, V_2)$ нужно искать из задачи Дирихле

$$\begin{aligned} & -\mu H_0^{-2} \partial_\zeta^2 V'(\zeta, \eta) - M_\dagger H_0^{-2} V'(\zeta, \eta) = \\ & = F'(\zeta, \eta) := \left(\begin{aligned} & \beta v(\eta) + \mu \Delta_\eta v(\eta) + (\lambda + \mu) \times \\ & \times \nabla_\eta \nabla_\eta v(\eta) - 2\mu \frac{\pi^2}{H_0^3} q(\eta) v(\eta) \end{aligned} \right) + \\ & + (\lambda + \mu) H_0^{-1} \partial_\zeta V_3(\zeta) \nabla_\eta \nabla_\eta v(\eta); \zeta \in (0, H_0) \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$V'(0, \eta) = V'(1, \eta) = 0$$

Поскольку $M_{\dagger}H_0^{-2}$ — простое собственное число, при помощи выкладок из разд. 3, преобразуем единственное условие разрешимости задачи (7.8)

$$\int_0^{H_0} \sin\left(\frac{\pi}{H_0}\zeta\right) F'(\zeta, \eta) d\zeta = 0$$

в пару дифференциальных уравнений на плоскости для компонент вектора $v = (v_1, v_2)$

$$-\mu\Delta_{\eta}v(\eta) + \mu Q(\eta)v(\eta) = \beta v(\eta); \eta \in \mathbb{R}^2 \quad (7.9)$$

При этом в соответствии с формулами (7.1)

$$Q(\eta) := 2\pi^2 H_0^{-3} q(\eta) \geq c_q |\eta|^2; c_q > 0 \quad (7.10)$$

Уравнение (7.9) в частных производных вполне аналогично обыкновенному дифференциальному уравнению гармонического осциллятора (6.5). Для удобства читателя приведем исследование спектра задачи (7.9), вариационная постановка которой

$$\begin{aligned} B(v, \psi) &:= \mu(\nabla_{\eta} v, \nabla_{\eta} \psi)_{\mathbb{R}^2} + b(\nabla_{\eta} v, \nabla_{\eta} \psi)_{\mathbb{R}^2} + \\ &+ \mu(Qv, \psi)_{\mathbb{R}^2} = \beta(v, \psi)_{\mathbb{R}^2}, \psi \in W(\mathbb{R}^2) \end{aligned} \quad (7.11)$$

осуществляется на пространстве $W(\mathbb{R}^2)$, полученном пополнением линейного множества $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ гладких финитных вектор-функций по весовой норме

$$\|v; W(\mathbb{R}^2)\| = \left(\|\nabla_{\eta} v; L^2(\mathbb{R}^2)\|^2 + \|\rho v; L^2(\mathbb{R}^2)\|^2 \right)^{1/2} \quad (7.12)$$

Из-за присутствия в норме (7.12) растущего множителя $\rho = |\eta|$ вложение $W(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ компактно, а значит, спектр задачи (7.11) является дискретным и образует положительную монотонную неограниченную последовательность (3.8). Соответствующие собственные вектор-функции $\omega_{(m)} \in W(\mathbb{R}^2)$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(w_{(m)}, w_{(n)})_{\mathbb{R}^2} = \delta_{m,n}; m, n \in \mathbb{N}$$

При малом положительном показателе δ проверим включения

$$e^{\delta \rho^2} \nabla_{\eta} v_{(m)} \in L^2(\mathbb{R}^2)^{2 \times 2}; \rho e^{\delta \rho^2} v_{(m)} \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$$

С этой целью введем непрерывную кусочно-гладкую весовую функцию

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_R^{\delta}(\eta) &= e^{\delta \rho^2} \text{ при } \rho \leq R \text{ и } \mathcal{R}_R^{\delta}(\eta) = \\ &= e^{\delta R^2} \text{ при } \rho > R \end{aligned} \quad (7.13)$$

Подставим в интегральное тождество (7.11) пробную вектор-функцию $\psi = \mathcal{R}_R^{\delta} V_{(m)R}^{\delta}$, где $V_{(m)R}^{\delta} = \mathcal{R}_R^{\delta} v_{(m)}$. Поскольку весовой множитель (7.13) постоянен вне круга $\mathbb{B}_R \ni \eta$,

произведение $(\mathcal{R}_R^\delta)^2 v_{(m)}$ попадает в пространство $W(\mathbb{R}^2)$. Добавив в левую и правую части полученного равенства величину $K \|V_{(m)R}^\delta; L^2(\mathbb{B}_1)\|^2$ с некоторым коэффициентом $K > 0$, после простых преобразований получим формулу

$$\begin{aligned} & \left(\mu \| \nabla_\eta V_{(m)R}^\delta; L^2(\mathbb{R}^2) \|^2 + \| \sqrt{Q} V_{(m)R}^\delta; L^2(\mathbb{R}^2) \|^2 + K \| V_{(m)R}^\delta; L^2(\mathbb{B}_1) \|^2 \right) - \\ & - \left(\mu \| V_{(m)R}^\delta \mathcal{R}_R^{-\delta} \nabla_\eta \mathcal{R}_R^\delta; L^2(\mathbb{R}^2) \|^2 + \beta_m \| V_{(m)R}^\delta; L^2(\mathbb{R}^2) \|^2 \right) = \\ & = K \| V_{(m)R}^\delta; L^2(\mathbb{B}_1) \|^2 \leq K e^{2\delta} \| v_{(m)}; L^2(\mathbb{B}_1) \|^2 \leq K e^{2\delta} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Рассмотрим разность $I_R^\delta - I_R^{\delta-}$ из левой части формулы (7.14). Согласно неравенствам (7.10) и

$$\mathcal{R}_R^{-\delta}(\eta) |\nabla_\eta \mathcal{R}_R^\delta(\eta)| \leq 2\delta\rho,$$

обнаружим, что $I_R^\delta \geq 2I_R^{\delta-}$ при малом $\delta := \delta_m > 0$ и большом $K := K_m > 0$. В итоге приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_R^{\delta_m} \nabla_\eta v_{(m)}; L^2(\mathbb{R}^2)^2 + \rho \mathcal{R}_R^{\delta_m} v_{(m)}; L^2(\mathbb{R}^2)^2 \leq \\ & \leq \left(\nabla_\eta V_{(m)R}^{\delta_m}; L^2(\mathbb{R}^2)^2 + \rho V_{(m)R}^{\delta_m}; L^2(\mathbb{R}^2)^2 \right) \leq C_m \end{aligned} \quad (7.15)$$

Левая часть соотношения (7.15) монотонно возрастает при увеличении параметра R , т.е. предельный переход при $R \rightarrow +\infty$ и определение (7.13) дают желанную оценку

$$\| e^{\delta_m \rho^2} \nabla_\eta v_{(m)}; L^2(\mathbb{R}^2) \|^2 + \| e^{\delta_m \rho^2} v_{(m)}; L^2(\mathbb{R}^2) \|^2 \leq C_m \quad (7.16)$$

Решение эллиптической системы дифференциальных уравнений (7.9) бесконечно дифференцируемо всюду на плоскости, и известные приемы [22] предоставляют весовые гильберовские (поточечные) оценки собственных вектор-функций, которые тем самым вместе со всеми своими производными исчезают на бесконечности с экспоненциальной скоростью. Показатель δ_m в оценке (7.16) зависит от собственного числа β_m .

Схема обоснований асимптотических формул в аналогичных скалярных задачах [24–30] приспособляется и к векторной задаче теории упругости. В результате для каждого натурального $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные величины h_k и c_k , что члены последовательностей (1.10) и (3.8) собственных чисел задач (1.4) — (1.6) и (7.11) соответственно связаны неравенством

$$\begin{aligned} & \left| \Lambda_k^h - h^{-2} \pi^2 \mu H_0^{-2} - h^{-1} \beta_k \right| \leq \\ & \leq c_k h^{-1/2} \text{ при } h \in (0, h_k] \end{aligned} \quad (7.17)$$

Обратим внимание на важное отличие формулы (7.17) от оценок (5.21) и (6.7): индексы собственных чисел Λ_k^h и β_k совпадают, так как нетрудно проверить похожую на предельный переход (5.22) сходимость

$$h(\Lambda_k^h - h^{-2}\pi^2\mu H_0^{-2}) \rightarrow \hat{\beta}_k$$

к какому-то собственному числу $\hat{\beta}_k$ системы уравнений (7.9).

Предложенные асимптотические конструкции годятся и для локальных строгих максимумов профильной функции H пластины (1.1), однако в аналогичной (7.17) оценке номер собственного числа $\Lambda_{N_k(h)}^h$ в последовательности (1.10) отличается от номера m члена последовательности (3.8) собственных чисел системы (7.9), причем индекс $N_k(h)$ неограниченно возрастает при $h \rightarrow +0$, так как начальные члены последовательности (1.10) приобретают разложения (7.3) с глобальным максимумом H_0 функции H .

Поскольку по предположению максимум (7.1) достигается во внутренней точке $O \in \omega$ и собственные вектор-функции затухают экспоненциально при удалении от нее, асимптотическая формула (7.17) малочувствительна к краевым условиям на боковой поверхности Γ_H^h , удаленной от O , в частности, формула (7.17) сохраняется и при условии Дирихле (1.11). Более того, если глобальный строгий максимум профильной функции H реализуется в точке O на границе $\partial\omega$, то вне зависимости от кривизны $\kappa(O)$ предельная задача для собственных пар $\{\beta_m; v_{(m)}\}$ в представлениях (7.1) и (7.3) получается сужением системы уравнений (7.9) на полуплоскость и постановки условий Неймана или Дирихле на ее границе, однако все общие свойства собственных пар краевых задач такие же, как у собственных пар вариационной задачи (7.11).

8. Замечания.

1. Краевые условия в двумерной модели пластины. Даже в случае боковой поверхности Γ^h , свободной от внешних воздействий, в среднечастотном диапазоне спектра задачи (1.4) — (1.6) возникают асимптотические серии собственных чисел, порожденные двумерной задачей на продольном сечении ω . При этом формальный вывод самой системы (3.5) не претерпевает изменений, однако вопрос о постановке краевых условий на границе сечения ω остается открытым, так как неизвестно, имеется или нет у задачи (2.9), (2.16), (2.17) пороговый резонанс. Дело в том, что согласно общим результатам [31, 32] и [19, гл. 16] искомые краевые условия назначаются обязательно при учете явления пограничного слоя. Так, именно отсутствие какого-либо порогового резонанса в задачах Дирихле для дифференциальных уравнений (2.9) и (2.10) повлекло за собой краевое условие (3.7) в смещениях. В скалярной смешанной краевой задаче (2.10), (2.11) есть простой правильный пороговый резонанс, и поэтому одно из краевых условий для системы (3.5) сомнений не вызывает

$$\sigma_{ns}^*(v; y) = 0; y \in \partial\omega \quad (8.1)$$

Если правильный пороговый резонанс присутствует и в задаче (2.9), (2.16), (2.17), то второе краевое принимает вид

$$\sigma_{nn}^*(v; y) = 0; y \in \partial\omega, \quad (8.2)$$

но при отсутствии такого резонанса — вид

$$v_n(y) = 0; y \in \partial\omega \quad (8.3)$$

Здесь v_n — нормальная компонента вектора смещений $v = (v_1, v_2)$, а компоненты $\sigma_{nn}^*(v)$ и $\sigma_{ns}^*(v)$ вектора нормальных напряжений на границе $\partial\omega$, как обычно, вычисляются по декартовым компонентам тензора напряжений

$$\sigma_{jk}^*(v) = \mu(\partial_k v_j + \partial_j v_k) + \lambda_* \delta_{j,k}(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2) \\ j, k = 1, 2$$

Пояснить указанные выводы можно при помощи метода сращиваемых асимптотических разложений [17, 18, 19, гл. 2]. Если у задачи (2.9), (2.16), (2.17) есть почти стоячая волна (2.21) с коэффициентом $K_{\dagger} \neq 0$, то главный член внешнего асимптотического разложения собственной вектор-функции (3.2)

$$h^{-1} \left(\begin{array}{c} v_n(n, s) e_{(n)} + \\ + v_s(n, s) e_{(s)} + 0 e_{(z)} \end{array} \right) \Big|_{n=0} \sin(\pi h^{-1} z)$$

удается срастить с линейной комбинацией, представляющей собой внутреннее — приемлемое около кромки пластины — разложение

$$h^{-1} v_n(0, s) K_{\dagger}^{-1} U_{\dagger} \left(h^{-1} n, h^{-1} z \right) + \\ + h^{-1} v_s(0, s) e_{(s)} \sin(\pi \zeta) \quad (8.4)$$

Таким образом, на следы $v_n(0, s)$ и $v_s(0, s)$ компонент вектора v на контуре $\partial\omega$ ограничения накладывать не нужно, и согласно общим результатам [31–33] возникают парные краевые условия Неймана (8.1) и (8.2). Если же ограниченное решение (2.21) отсутствует или коэффициент $K_{\dagger}$ в нем равен нулю, то из линейной комбинации (8.4) приходится изъять первое слагаемое, а значит, процедура сращивания аннулирует компоненту v_n на $\partial\omega$, т.е. приводит к частичному условию Дирихле (8.3).

Подчеркнем, что для каждого собственного числа β_k системы (3.5) с краевыми условиями (8.1) и (8.2) или (8.3) найдется собственное число $\Lambda_{N_k(h)}$ задачи (1.4) — (1.6), расположенное в среднечастотном диапазоне спектра и удовлетворяющее неравенству

$$\left| \Lambda_{N_k(h)}^h - \mu \pi^2 h^{-2} - \beta_k \right| \leq c_k h^{\frac{1}{2}} \\ \text{при } h \in (0, h_k] \text{ и некотором } h_k > 0 \quad (8.5)$$

Существенное различие между оценками (3.9) и (8.5) состоит в том, что первая включает число Λ_m^h , имеющее тот же номер m , что и β_m , но во второй номер $N_k(h)$ не совпадает с k и, более того, этот номер неограниченно возрастает при уменьшении относительной толщины пластины. Причина понятна: асимптотические серии собственных чисел, найденные в разд. 5 и 6, расположены ниже точки $h^{-2} M_{\dagger}$, причем по доказанному кратность спектра (1.7) на интервале $(0, h^{-2} M_{\dagger})$ стремится к бесконечности при $h \rightarrow +0$.

2. Многосвязные сечения и негладкие контуры. В разд. 5 знак постоянной кривизны не играет роли, т.е. результат сохраняется и для сечения ω в виде круга с несколькими

круговыми отверстиями (рис. 3а). Кривизна границ отверстий отрицательная, т.е. коэффициент (5.9) в разложении (5.1) собственных чисел задачи (1.4) — (1.6) становится положительным, и следовательно, соответствующие асимптотические серии в спектре расположены выше основной серии, найденной в разд. 5 для внешней окружности. Таким образом, как и в формуле (8.5), номер собственных чисел $\Lambda_{N_k}^h(h)$ из неравенств вида (5.21) для собственных чисел предельных обыкновенных уравнений на внутренних окружностях зависит от малого параметра h .

На границе яйцевидной области на рис. 3б есть только по одной точке максимума и минимума кривизны и асимптотические результаты верны в представленном в разд. 6 виде. Однако для эллипса на рис. 3в таких точек уже по паре, и поэтому в оценках (5.21) точности приближения следует учесть две серии собственных чисел, т.е. каждое собственное число в последовательности (1.10) — двукратное.

Конструкции из разд. 6 годятся и для локальных максимумов кривизны. Например, у эллиптического кольца на рис. 3г есть две пары точек максимумов положительной и отрицательной кривизны. Во второй паре максимум локальный, и в случае $B > 0$ порожденные им серии располагаются ниже основных потому, что величина (5.9) становится положительной при отрицательной кривизне. В случае $B < 0$ приходится иметь дело с двумя парами точек минимумов кривизны, но выводы вполне аналогичны. Оценка погрешности (6.7) сохраняется вместе с комментариями о номерах собственных чисел $\Lambda_{N_k}^h(h)$ в последовательности (1.10).

Граница $\partial\omega$ сечения пластины на рис. 4а состоит из двух полуокружностей и двух прямолинейных отрезков. На каждой из этих частей кривизна постоянна, и потому применим подход из разд. 5, однако непонятно, какие условия сопряжения следует назначить в концевых точках • полуокружностей и отрезков. Точно так же в случае

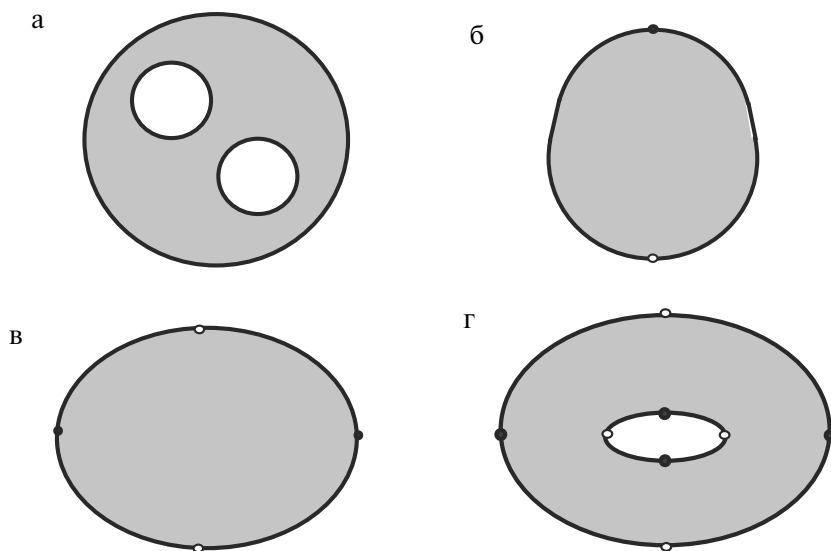


Рис. 3. Круглая пластина с вырезанными кругами (а), яйцевидная область (б), эллипс (в), эллиптическое кольцо (г). Точки глобальных и локальных максимумов и минимумов кривизны указаны метками • и ○ соответственно.

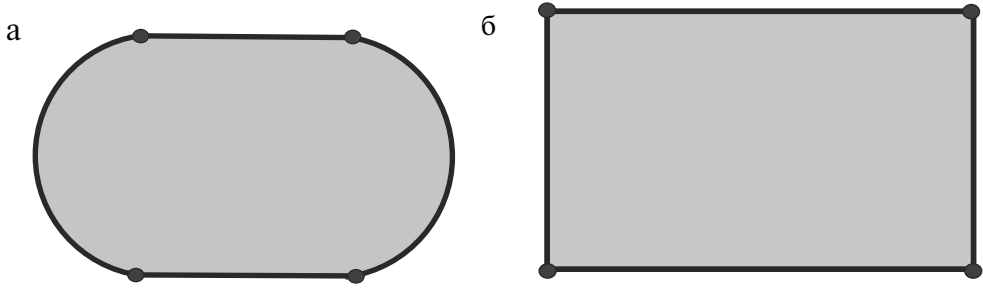


Рис. 4. Составной контур — пара полуокружностей и пара прямых отрезков (а). Угловые точки на контуре (б), точки скачков кривизны контура (а) указаны меткой •.

прямоугольного сечения остался открытым вопрос о постановке условий сопряжения или краевых условий в угловых точках •.

3. Нестрогие экстремумы. При нестрогом глобальном или локальном максимуме соотношения (7.2) для пластины (1.1) переменной толщины $hH(y)$ заменяются соотношениями

$$\begin{aligned} q(ty) &= t^{2p} q(y) \\ p > 1, \quad q(y) &\geq q_0 |y|^{2p} \\ q_0 &> 0, \end{aligned} \quad (8.6)$$

а в формуле Тейлора (7.1) остаток становится равным $O(|y|^{2p+1})$. В этом случае выкладки и рассуждения сохраняются в целом, но вместо замены (7.5) приходится делать замену $y \mapsto \eta = h^{-\kappa} y$ при $\kappa = 1 / (1 + p)$ и вместо слагаемого $h^{-1}\beta$ поместить в разложение (7.3) слагаемое $h^{-2\kappa}\beta$. Свойства предельной системы (7.12) с новым весовым множителем (7.10), содержащим функцию (8.6), сохраняются полностью.

В случае цилиндрической пластины $\Omega^h = \omega \times (0, h)$ в формуле (6.1) для нестрогих экстремумов кривизны к границе продольного сечения нужны замены $ms^2 \mapsto m|s|^{2p}$ и $O(|s|^3) \mapsto O(|s|^{2p})$; здесь $p > 1$. При этом коэффициент растяжения (6.2) координаты на контуре $\partial\omega$ становится равным $h^{-\frac{1}{2(1+p)}}$, а последнее слагаемое в представлении (6.3) собственного числа задачи (1.4) — (1.6) превращается в $h^{-\frac{1}{(1+p)}}\beta$. Собственные пары $\{\beta_m; v_m\}$ возникающего предельного уравнения

$$-B\partial_\tau^2 v(\tau) + A m \tau^{2p} v(\tau) = \beta v(\tau); \quad \tau \in \mathbb{R}$$

сохраняют основные свойства собственных пар уравнения гармонического осциллятора (6.5) (ср. выкладки и рассуждения из разд. 7).

4. Искривленная кромка пластины. Если кромка пластины (1.1) искривлена (рис. 5а), т.е. определена формулой

$$\Gamma_H^h = \left\{ x \in N_d \times (0, h) : h^{-1}n < \begin{matrix} < H(h^{-1}z); z \in (0, h) \end{matrix} \right\}$$

с неотрицательной профильной функцией $H \in C^\infty[0, 1]$, то для задачи Дирихле (1.4), (1.5), (1.11) результаты из разд. 3 не претерпевают никаких изменений. В случае смешанной краевой задачи (1.4) — (1.6) асимптотическое строение спектра (1.7) существенно зависит от свойств задачи (2.9), (2.16), (2.17) в полуполосе с искривленным торцом

$$\Pi_H^\bullet = \{\xi : \xi_1 < H(\xi_2), \xi_2 \in (0, 1)\} \quad (8.7)$$

Именно в зависимости от того, происходит или нет захват упругой волны полуполосой (8.7), нужно пользоваться тем или иным из изложенных подходов к асимптотическому анализу. Результаты спектрального анализа плоской задачи теории упругости в полуполосе $\Pi_H^\bullet$ можно найти в статьях [14, 15].

5. *Выступы за края штампов.* При $t > 0$ и $H = 1$ пластина (рис. 5б)

$$\Omega^h(t) = \Omega^h \cup \{x \in N_d \times (0, h) : z \in (0, h), n < ht\}$$

шире поверхностей штампов (1.2), и поэтому краевое условие (1.6) переносится на поверхность $\partial\Omega^h(t)$. Изменяются и задачи о пограничном слое: уравнения (2.9) и (2.10) ставятся на полуполосе $\Pi(t) = (-\infty, t) \times (0, 1)$ (рис. 5в), краевые условия Дирихле (2.16) и (2.11) сохраняются полностью, но краевые условия Неймана (2.17) и (2.12) распространяются на ломаную $\mathfrak{W}_\bullet(t) = \{\xi \in \partial\Pi(t) : \xi_1 > 0\}$. Доказано [13–15], что кратности дискретных спектров обеих задач, векторной и скалярной, неограниченно возрастают при $t \rightarrow +\infty$. Это обстоятельство тиражирует асимптотические конструкции из разд. 5 и 6, которые, в частности, характеризуются локализацией собственных вектор-функций в малой окрестности множества $\Omega^h(t)$, и позволяет

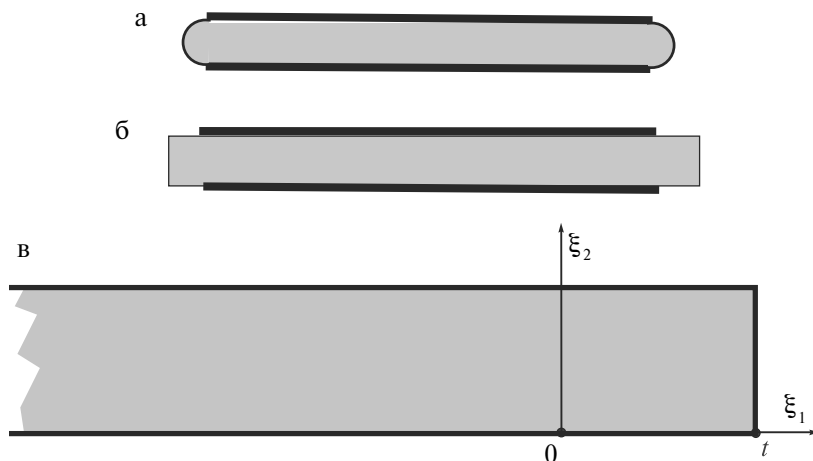


Рис. 5. Пластины с закругленной поверхностью (а), выступающая за кромки штампов, обозначенных полуштриховыми линиями (б), полуполоса, служащая для описания пограничного слоя (в).

найти множество асимптотических серий собственных чисел выше основной серии. Вместе с тем известно [11], что приращение кратности происходит за счет отщепления собственных чисел от края (2.13) непрерывного спектра в результате возникновения пороговых резонансов для неограниченной монотонной положительной последовательности $\{t_j\}_{j \in N}$ значений параметра t . Поскольку при $t \neq t_j$ пороговый резонанс отсутствует, двумерной моделью служит задача Дирихле (3.5), (3.7), однако в случае $t = t_j$ согласно разд. 8, 1 двумерная система уравнений теории упругости

снабжается краевыми условиями иных типов в зависимости от качества порогового резонанса. Процесс перехода от одних краевых условий к другим в зависимости от времениподобного параметра $t - t_j$ требует отдельного исследования.

Еще один открытый вопрос связан с описанием процесса отслоения поверхности прокладки от штампов, когда на участках $N_{a_0 t} \cap \Sigma^0$ и $N_{a_1 t} \cap \Sigma_0^1$ оснований (1.2) при малом t фиксированных положительных a_0, a_1 вместо условий (1.6) выставляются односторонние связи (условия Синьорини). В рамках механики трещин задачи об отслоении пластины допускают разнообразные постановки.

6. *Несжимаемый материал.* Для того чтобы осуществить предельный переход $\nu \rightarrow 1/2$ к несжимаемой цилиндрической прокладке Ω^h , введем аналог гидростатического давления p^h по формуле

$$(1 - 2\nu)p^h(x) = -\nabla_x u^h(x) \quad (8.8)$$

и перепишем систему (1.4), умноженную на μ^{-1} , в виде

$$-\Delta_x u^h(x) + \nabla_x \cdot p^h(x) = B^h u^h(x); x \in \Omega^h \quad (8.9)$$

Здесь $B^h = \mu^{-1} \Lambda^h$ — новый спектральный параметр. При $\nu = 1/2$ соотношение (8.8) превращается в дивергентное уравнение

$$-\nabla_x u^h(x) = 0; x \in \Omega^h \quad (8.10)$$

Полученная система уравнений Стокса (8.9), (8.10) остается эллиптической по Дуглису–Ниренбергу [34]. Однако спектральная задача (1.5), (1.11), (8.9), (8.10) отличается от задачи о пленочном течении несжимаемой жидкости, так как в ней собственные числа B^h приобретают иное содержание [35]. Вариационная постановка задачи Дирихле для системы уравнений Стокса

$$\begin{aligned} & \left(\nabla_x u^h, \nabla_x \psi^h \right)_{\Omega^h} = \\ & = B^h \left(u^h, \psi^h \right)_{\Omega^h}; \psi^h \in H_{\nabla}^1(\Omega^h; \partial\Omega^h)^3 \end{aligned} \quad (8.11)$$

осуществляется на пространстве Соболева $H_{\nabla}^1(\Omega^h; \partial\Omega^h)^3$ соленоидальных (удовлетворяющих соотношению (8.10)) вектор-функций, обращающихся в нуль на поверхности $\partial\Omega^h$ (в гидромеханике — условие прилипания [35]). При этом определение (8.8) показывает, что среднее давление p^h по области Ω^h равно нулю, т.е. система (8.9), (8.10) должна быть снабжена дополнительным условием

$$\int_{\Omega^h} p^h(x) dx = 0 \quad (8.12)$$

В итоге постоянное “давление” $p^h = \text{const}$ и нулевой вектор смещений” $u^h = 0$ не образуют собственную вектор-функцию при любом $B^h \in C$, и, следовательно, задача Дирихле (1.5), (1.11), (8.9), (8.10), (8.12) обладает дискретным спектром $\{B_m^h\}_{m \in N}$ (последовательность вида (1.10)), а соответствующие собственные вектор-

функции $(u_{(m)}^h, p_{(m)}^h) \in H_0^1(\Omega^h; \partial\Omega^h)^3 \times L^2(\Omega^h)$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки (1.12).

Асимптотическое разложение

$$B^h = \frac{\pi^2}{h^2} + \beta + \dots \quad (8.13)$$

собственных чисел задачи Дирихле для системы Стокса дополним разложениями

$$u_i^h(x) = \frac{1}{h} v_i(y) \sin(\pi\zeta) + \dots; \quad i = 1, 2, u_3^h(x) = \dots \quad (8.14)$$

$$p^h(x) = \frac{1}{h^2} q(y) + \dots \quad (8.15)$$

Подставив формулы (8.13)–(8.15) в систему дифференциальных уравнений (8.9), (8.10), обнаруживаем, что, как и в разд. 3, младшие асимптотические члены (для краткости не указанные в асимптотических разложениях) удастся построить лишь в том случае, если выполнены соотношения

$$\int_0^1 \sin(\pi\zeta) \begin{pmatrix} \sin(\pi\zeta) (\Delta_y v(y) + \beta v(y)) - \\ -\nabla_y q(y) \end{pmatrix} dy = 0 \Rightarrow$$

$$-\Delta_y v(y) + \frac{4}{\pi} \nabla_y q(y) = \beta v(y); \quad y \in \omega \quad (8.16)$$

$$-\nabla_y v(y) = 0; \quad y \in \omega \quad (8.17)$$

Итак, для вектора продольных смещений $v = (v_1, v_2)$ и «давления» q получена двумерная система уравнений Стокса, которую замкнем условиями Дирихле

$$v(y) = 0; \quad y \in \partial\omega \quad (8.18)$$

Последовательность (3.8) собственных чисел задачи (8.16)–(8.18) конкретизирует поправочный член разложения (8.13), а соответствующие собственные вектор-функции $\{(v_{(m)}, q_m)\}_{m \in N} \in H_0^1(\omega; \partial\omega)^2 \times L^2(\omega)$ — поправочные члены разложений (8.14), (8.15). Место для уравнения

Из формулы (3.6) вытекает, в частности, что для коэффициента Пуассона ν_* в предельной системе (3.5) справедливо соотношение

$$v_* \rightarrow \frac{1}{2} - 0 \text{ при } v \rightarrow \frac{1}{2} - 0 \quad (8.19)$$

Таким образом, в случае несжимаемого материала пластины предельная система Стокса (8.16), (8.17) может быть получена из предельной системы Ламе (3.5) для слабосжимаемого материала при помощи предельного перехода (8.19) по прежнему правилу, указанному в начале пункта для пространственной задачи.

Аналогичные предельные переходы доступны и в задаче Дирихле (2.9), (2.20) или смешанной краевой задачи (2.9), (2.16), (2.17) об упругой полуполосе (1.12). Так, в задаче Дирихле для двумерной системы Стокса в полуполосе Π точечный спектр пуст и пороговый резонанс отсутствует. Обсуждать смешанную краевую задачу для уравнений Стокса не будем, так как неполные результаты из разд. 2 и 5, 6 также легко приспособляются к ней.

Построены [36–38] двумерные асимптотические модели динамики упругих волн в бесконечных слоях из мало- и несжимаемых материалов. Такие модели указывают предельные системы дифференциальных уравнений, однако в случае тонких ограниченных пластин для постановки краевых условий дополнительно требуется исследование явления пограничного слоя около их кромок, как раз и проделанное в данной статье.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 22–11–00046).

Автор чрезвычайно благодарен анонимным рецензентам, чьи замечания позволили устранить арифметические ошибки и улучшить изложение материала работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
3. Шойхет Б.А. Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // ПММ. 1973. Т. 37. № 5. С. 913–924.
4. *Ciarlet P.G.* Mathematical Elasticity, II: Theory of Plates. Studies in Mathematics and Its Applications. V. 27. Amsterdam: SIAM, 1997.
5. *Le Dret H.* Problemes variationnels dans les multi-domaines modélisation des jonctions et applications. Paris: Masson, 1991.
6. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. книга, 2002.
7. *Panasenko G.* Multi-Scale Modelling for Structures and Composites. Dordrecht: Springer, 2005.
8. *Назаров С.А.* Двумерные асимптотические модели тонких цилиндрических упругих прокладок // Дифф. ур-я. 2022. Т. 58. № 12. С. 1666–1682.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1974.
10. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
11. *Назаров С.А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
12. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* О собственных функциях, локализованных около кромок тонкой области // в сб: Пробл. матем. анализа. Вып. 19. Новосибирск: Науч. книга, 1999. С. 105–148.
13. *Назаров С.А.* Дискретный спектр коленчатых квантовых и упругих волноводов // ЖВММФ. 2016. Т. 56. № 5. С. 879–895.
14. *Назаров С.А.* Собственные колебания упругой полуполосы при различном расположении участков фиксации ее краев // Акуст. ж. 2023. Т. 69. № 4. С. 338–409.

15. *Назаров С.А.* Упругие волны, захваченные полубесконечной полосой с заземленными боковыми сторонами и искривленным или изломанным торцом // ПММ. 2023. Т. 87. № 2. С. 265–279.
16. *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten // Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 1943. Bd. 53. Abt. 1. S. 57–65.
17. *Ван Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967. 310 с.
18. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
19. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. 1 & 2 Berlin: Akademie, 1991.
20. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
21. *Leis R.* Initial boundary value problems of mathematical physics. Stuttgart: B.G. Teubner, 1986.
22. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
23. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr. 1977. Bd. 77. S. 25–82.
24. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of narrow periodic waveguides // Russ. J. Math. Phys. 2008. V. 15. № 2. P. 238–242.
25. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip // Israel J. Math. 2009. V. 170. P. 337–354.
26. *Borisov D., Freitas P.* Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire. 2009. V. 26. № 2. P. 547–560.
27. *Borisov D., Freitas P.* Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in $\mathbb{R}^d$ // J. Funct. Anal. 2010. V. 258. № 3. P. 893–912.
28. *Назаров С.А.* Околовершинная локализация собственных функций задачи Дирихле в тонких многогранниках // Сиб. матем. ж. 2013. Т. 54. № 3. С. 655–672.
29. *Nazarov S.A., Perez E., Taskinen J.* Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains // Trans. Amer. Math. Soc. 2016. V. 368. № 7. P. 4787–4829.
30. *Gómez D., Nazarov S.A., Pérez-Martínez M.-E.* Localization effects for Dirichlet problems in domains surrounded by thin stiff and heavy bands // J. Diff. Eqns. 2021. V. 270. P. 1160–1195.
31. *Назаров С.А.* Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестн. ЛГУ. Сер. I. 1982. Вып. 2 (№ 7). С. 65–68.
32. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.
33. *Назаров С.А.* Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 5. С. 1–92.
34. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II // Commun. on Pure & Appl. Math. 1962. V. 17. № 1. P. 3–92.
35. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.
36. *Pichugin A.V., Rogerson G.A.* A two-dimensional model for extensional motion of a pre-stressed incompressible elastic layer near cut-off frequencies // IMA J. Appl. Math. 2001. V. 66. P. 357–385.
37. *Pichugin A.V., Rogerson G.A.* An asymptotic membrane-like theory for long-wave motion in a pre-stressed elastic plate // Proc. R. Soc. London A. 2002. V. 458. P. 1447–1468.
38. *Kaplanov Y.D., Nolde Y.V.* Long-wave vibrations of a nearly incompressible isotropic plate with fixed faces // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2002. V. 55. № 3. P. 345–356.

Localization of Natural Oscillations of Thin Elastic Gaskets

S. A. Nazarov^{a, #}

^a*Institute of Mechanical Engineering Problems, RAS, Saint-Petersburg, Russia*

[#]*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

We study natural oscillations of thin homogeneous isotropic gaskets of constant or variable thickness whose bases are rigidly fixed. It is shown that the traditional two-dimensional model, namely the plane problem of the elasticity theory in the longitudinal section with the Dirichlet condition at the boundary, gives correct results for eigenfrequencies of the thin spatial solid only for the plate of a constant thickness with clamped lateral surface. In other cases the asymptotic analysis provides another models of reduced dimension, in particular, ordinary differential equations, while modes of natural oscillations enjoy concentration near the lateral side or some points on the boundary.

Keywords: thin homogeneous isotropic plate, gasket between rigid stamps, dimension reduction, localization of natural oscillations

REFERENCES

1. *Ladyzhenskaya O.A.* The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Appl. Math. Sci., vol. 49. N.Y.: Springer, 1985.
2. *Fichera G.* Existence Theorems in Elasticity. Berlin: Springer, 1972.
3. *Shoikhet B.A.* On asymptotically exact equations of thin plates of complex structure // JAMM, 1973, vol. 37, no. 5, pp. 867–877.
4. *Ciarlet P.G.* Mathematical Elasticity. II: Theory of Plates. Studies in Mathematics and Its Applications. Vol. 27. Amsterdam: SIAM, 1997.
5. *Le Dret H.* Problemes variationnels dans les multi-domaines modélisation des jonctions et applications. Paris: Masson, 1991.
6. *Nazarov S.A.* Asymptotic Theory of Thin Plates and Rods. Vol.1. Dimension Reduction and Integral Estimates. Novosibirsk: Nauch. Kniga, 2002.
7. *Panasenko G.* Multi-Scale Modelling for Structures and Composites. Dordrecht: Springer, 2005.
8. *Nazarov S.A.* Two-dimensional asymptotic models of thin cylindrical elastic gaskets // Diff. Eqns., 2022, vol. 58, no.12, pp. 1651–1667.
9. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory. Oxford: Pergamon, 1963.
10. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys., 2007, vol. 273, no. 2, pp. 533–559.
11. *Nazarov S.A.* Threshold resonances and virtual levels in the spectrum of cylindrical and periodic waveguides // Math. Izv., 2020, vol. 84, no. 6, pp. 1105–1180.
12. *Kamotskii I.V., Nazarov S.A.* On eigenfunctions localized in a neighborhood of the lateral surface of a thin domain // J. Math. Sci., 2000, vol. 101, no. 2, pp. 2941–2974.
13. *Nazarov S.A.* Discrete spectrum of cranked quantum and elastic waveguides // Comput. Math.&Math. Phys., 2016, vol. 56, no. 5, pp. 864–880.
14. *Nazarov S.A.* Natural oscillations of elastic semi-strip for different distribution of the fixation parts of the edge // Acoust. Phys., 2023, vol. 69, no. 4, pp. 424–435.
15. *Nazarov S.A.* Elastic waves trapped by a semi-strip with fixed lateral sides and curved or broken butt-end // Mech. Solids, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 172–183.
16. *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten // Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1943, bd. 53, abt. 1, s. 57–65.
17. *Van-Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.: Acad. Press, 1964.
18. *Il'in A.M.* Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1992.
19. *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domains. Vol. 1, 2. Basel: Birkhäuser, 2000.
20. *Birman M.S., Solomyak M.Z.* Spectral Theory and Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. Dordrecht: Reidel, 1987.

21. *Leis R.* Initial Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Stuttgart: B.G. Teubner, 1986.
22. *Visik M.I., Ljusternik L.A.* Regular degeneration and boundary layer of linear differential equations with small parameter // Amer. Math. Soc. Transl., 1962, vol. 20, pp. 239–364.
23. *Maz'ya V.G., Plamenevskii B.A.* Estimates in L_p and in Hölder classes and the Miranda–Agmon maximum principle for solutions to elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary // Amer. Math. Soc. Transl. (Ser. 2), 1984, vol. 123, pp. 1–56.
24. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of narrow periodic waveguides // Russ. J. Math. Phys., 2008, vol. 15, no. 2, pp. 238–242.
25. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip // Israel J. Math., 2009, vol. 170, pp. 337–354.
26. *Borisov D., Freitas P.* Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire, 2009, vol. 26, no. 2, pp. 547–560.
27. *Borisov D., Freitas P.* Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in $\mathbb{R}^d$ // J. Funct. Anal., 2010, vol. 258, no. 3, pp. 893–912.
28. *Nazarov S.A.* The localization for eigenfunctions of the Dirichlet problem in thin polyhedra near the vertices // Sib. Math. J., 2013, vol. 54, no. 3, pp. 517–532.
29. *Nazarov S.A., Perez E., Taskinen J.* Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains // Trans. Amer. Math. Soc., 2016, vol. 368, no. 7, pp. 4787–4829.
30. *Gómez D., Nazarov S.A., Pérez-Martínez M.-E.* Localization effects for Dirichlet problems in domains surrounded by thin stiff and heavy bands // J. Diff. Eqns., 2021, vol. 270, pp. 1160–1195.
31. *Nazarov S.A.* The structure of solutions of elliptic boundary value problems in slender domains // Vestn. Leningr. Univ. Math., 1983, vol. 15, pp. 99–104.
32. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc., 2008, vol. 97, no. 3, pp. 718–752.
33. *Nazarov S.A.* A general scheme for averaging self-adjoint elliptic systems in multidimensional domains, including thin domains // St. Petersburg Math. J., 1996, vol. 7, no. 5, pp. 681–748.
34. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II // Commun. on Pure and Appl. Math., 1962, V. 17, no. 1, pp. 35–92.
35. *Ladyzhenskaya O.A.* The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. N.Y.: Gordon&Breach, 1969.
36. *Pichugin A.V., Rogerson G.A.* A two-dimensional model for extensional motion of a pre-stressed incompressible elastic layer near cut-off frequencies // IMA J. Appl. Math., 2001, vol. 66, pp. 357–385.
37. *Pichugin A.V., Rogerson G.A.* An asymptotic membrane-like theory for long-wave motion in a pre-stressed elastic plate // Proc. R. Soc. London A, 2002, vol. 458, pp. 1447–1468.
38. *Kaplunov Y.D., Nolde Y.V.* Long-wave vibrations of a nearly incompressible isotropic plate with fixed faces // Quart. J. Mech. Appl. Math., 2002, vol. 55, no. 3, pp. 345–356.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРОЧНЕНИЯ ПОЛЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЗАГОТОВОК С ПОМОЩЬЮ КОМБИНАЦИИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО И ТЕМПЕРАТУРНОГО АВТОФРЕТИРОВАНИЯ

© 2024 г. А. Н. Прокудин^{1,*}¹Институт машиноведения и металлургии Хабаровского ФИЦ ДВО РАН,

Комсомольск-на-Амуре, Россия

*e-mail: sunbeam_85@mail.ru

Поступила в редакцию 06.10.2023 г.

После доработки 21.01.2024 г.

Принята к публикации 25.01.2024 г.

Исследуется распределение остаточных и эксплуатационных напряжений в полый сферической заготовке, предварительно упрочненной с помощью комбинации гидравлического и температурного автофретирования. Постановка задачи основана на теории малых упругопластических деформаций, условия пластичности Треска или Мизеса, ассоциированном законе течения и законе линейного изотропного упрочнения. При разгрузке материал сферы может проявлять эффект Баушингера. Все механические и теплофизические параметры считаются независимыми от температуры. Найдены точные аналитические решения для стадии нагрузки и разгрузки, включая повторное пластическое течение. Установлены значения технологических параметров, при которых эффект упрочнения достигается вблизи внутренней поверхности сферы. Анализ полученных результатов показал, что использование положительного градиента температуры позволяет повысить абсолютную величину остаточных напряжений на внутренней поверхности сферы. С другой стороны, с помощью отрицательного градиента можно добиться снижения эксплуатационных напряжений в сфере.

Ключевые слова: автофретирование, сфера, упругопластические деформации, температурные напряжения, малые деформации, линейное изотропное упрочнение, эффект Баушингера

DOI: 10.31857/S0032823524010091 EDN: YUEIPQ

1. Введение. Технология автофретирования [1, 2] предназначена для упрочнения полых деталей цилиндрической и сферической формы и обычно состоит из одного цикла нагрузки-разгрузки. На первой стадии заготовка нагружается с тем расчетом, чтобы некоторая ее часть вблизи внутренней поверхности или вся заготовка в целом перешла в пластическое состояние. В ходе разгрузки в окрестности внутренней поверхности заготовки формируется поле остаточных напряжений, причем тангенциальные напряжения являются сжимающими, что положительно влияет на прочностные характеристики детали. Кроме повышения диапазона рабочих нагрузок, заметно улучшаются трещиностойкость, сопротивление коррозии и долговременная прочность. В зависимости от природы нагрузки различают несколько видов автофретирования: гидравлическое [3], взрывное [4], температурное [5], ротационное [6] и автофретирование протяжкой [7]. Подробный обзор

теоретических и экспериментальных работ, посвященных автофретированию, опубликован в [1, 2].

Помимо перечисленных разновидностей автофретирования [3–7] предложен ряд комбинированных методов [8, 9], в которых основное нагружающее усилие дополняется действием температурного градиента. С помощью конечно-элементного анализа установлено [8], что комбинация гидравлического и температурного автофретирования существенно увеличивает максимальное рабочее давление в полый цилиндрической трубе по сравнению с чисто гидравлическим методом. Как следствие, присутствие температурного градиента позволяет достичь одинакового уровня упрочнения заготовки при использовании меньшего давления. Следует отметить, что выраженный положительный эффект достигается даже при достаточно умеренной величине температурного градиента. Аналогичные выводы получены при численном моделировании комбинации ротационного и температурного автофретирования [9]: температурный градиент позволяет снизить скорость вращения заготовки при сохранении степени упрочнения. Кроме того, комбинированный метод позволяет сформировать после разгрузки сжимающие осевые напряжения вблизи внутренней поверхности цилиндра [9] в то время, как при ротационном автофретировании эти напряжения всегда являются растягивающими [10].

Основная масса работ в области автофретирования посвящена изучению деталей цилиндрической геометрии. Автофретирование деталей сферической формы рассматривается значительно реже, несмотря на их широкое применение в машиностроении. Изучалось [11] гидравлическое автофретирование полый сферы с учетом изотропного упрочнения и эффекта Баушингера; в ряде частных случаев авторами получены аналитические решения для напряженно-деформированного состояния сферы в ходе нагрузки и после разгрузки. Работа [12] посвящена оптимизации процесса гидравлического автофретирования полый сферы с целью минимизации эксплуатационных напряжений при известном рабочем давлении. Повторное автофретирование сферических заготовок изучалось в [13]. Было установлено, что второй цикл нагрузки–разгрузки позволяет повысить уровень остаточных сжимающих напряжений и максимальное рабочее давление. Более сложные модели упругопластических материалов, включающие нелинейное изотропное упрочнение, использовались [14, 15] для расчета процесса автофретирования. Достаточно близкое отношение к теме настоящей статьи имеет работа [16], в которой рассматривается полая сфера под действием внутреннего и внешнего давления. Авторами [16] получено приближенное аналитическое решение для произвольных условия текучести и законов изотропного упрочнения на стадии нагрузки/разгрузки. Рассматривалось [17] влияние повреждаемости материала на распределение остаточных напряжений в сфере в результате гидравлического автофретирования. Задача восстановления поля остаточных напряжений после упрочнения сферы при наличии ограниченных экспериментальных данных поставлена и решена в [18]. Авторы [19] использовали градиентную теорию пластичности для оценки влияния размерных эффектов на процесс автофретирования полый сферической заготовки.

Разумеется, для упрочнения сферических деталей кроме гидравлического [11–19] может использоваться и температурное автофретирование. Упругопластический анализ полый сферы из идеального материала под действием температурного градиента для стадий нагрузки и разгрузки представлен в [20]. Схожая проблема также рассматривалась для линейно [21] и нелинейно упрочняемого [22] материала. Задача оптимизации толщины сферической оболочки при сохранении ее несущей способности с помощью температурного автофретирования рассматривалась в [23, 24]. Исследовалось [25] термоупругопластическое деформирование многослойного шара при последовательном присоединении к его внешней поверхности предварительно разогретых слоев. Необратимое деформирование полого сферического слоя в ус-

ловиях вязкоупругопластического течения изучалось в работах [26–29]. Авторы [30] исследовали влияние, которое оказывает направление температурного градиента на упругопластический отклик и распределение остаточных напряжений в сфере.

Приведенный выше обзор показывает, что автофретирование деталей сферической формы привлекает значительное внимание исследователей. В то же время следует отметить, что возможности упрочнения сферических заготовок с помощью комбинации гидравлического и температурного автофретирования ранее не изучались. Настоящая работа призвана заполнить этот пробел. Предполагается, что традиционный процесс гидравлического автофретирования дополняется действием стационарного температурного градиента. Материал сферы деформируется в соответствии с законом линейного изотропного упрочнения. Кроме того, в ходе разгрузки может возникнуть повторное пластическое течение, для расчета которого в модель упрочнения включен эффект Баушингера.

2. Постановка задачи. Рассматривается полая сфера, внутренний и внешний радиусы которой равны r_{in} и r_{out} соответственно. На стадии нагрузки в сфере присутствует неоднородное стационарное температурное поле, вызванное разностью температур на внутренней и внешней поверхностях. К внутренней поверхности сферы приложено давление, которое монотонно возрастает с течением времени от 0 до некоторого P_a . При разгрузке температурное поле в сфере однородно, а внутреннее давление медленно убывает до нуля. Предполагается, что в ходе эксплуатации сферическая деталь нагружается только внутренним давлением. Все механические и теплофизические параметры материала считаются независимыми от температуры.

Для решения используется сферическая система координат (r, θ, φ) , и предположение, что состояние сферической симметрии сохраняется в течение всего процесса. При таких допущениях u_r является единственным ненулевым перемещением. Для удобства введены следующие безразмерные величины

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{r_{in}}{r_{out}}, \beta = \frac{r}{r_{out}}, \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_t}, \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_t}, \bar{P} = \frac{P}{\sigma_t}, \bar{u} = \frac{E}{\sigma_t} \frac{u_r}{r_{out}} \\ \bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{E}{\sigma_t} \varepsilon_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{E}{\sigma_t} \varepsilon_{ij}^e, \bar{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{E}{\sigma_t} \varepsilon_{ij}^p, \bar{T} = \frac{T}{T_0} - 1, \bar{\alpha} = \frac{E}{\sigma_t} T_0 \alpha, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где σ_{ij} — напряжения, σ_t, σ_y — начальный/актуальный предел текучести при одноосном растяжении, P — давление, приложенное к внутренней поверхности сферы, E — модуль Юнга, $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p$ — полные, упругие и пластические деформации соответственно, T — температура, T_0 — отсчетная температура, α — коэффициент линейного теплового расширения. Далее в тексте статьи, если не сказано иное, используются переменные (2.1), а знак подчеркивания для краткости опущен.

В силу сформулированных выше допущений касательные напряжения в сфере равны нулю, а единственное уравнение равновесия имеет вид

$$\sigma'_{rr} + 2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\beta^{-1} = 0, \quad (2.2)$$

здесь и далее штрих обозначает производную по координате β .

Предполагается, что внутреннее давление и температурный градиент не слишком высоки и геометрически-линейная теория справедлива с необходимой степенью точности. Тогда кинематические соотношения запишутся следующим образом

$$\varepsilon_{rr} = u', \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = u\beta^{-1} \quad (2.3)$$

Полные деформации представляют собой сумму упругих, пластических и температурных деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{rr}^t \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^t, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^t\end{aligned}\quad (2.4)$$

Закон Гука связывает напряжения и обратимые деформации в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\ &\times \left((1-\nu)\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}^e - (1+\nu)\alpha T \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\ &\times \left(\nu\varepsilon_{rr}^e + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}^e - (1+\nu)\alpha T \right),\end{aligned}\quad (2.5)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Условия пластичности Треска и Мизеса сводятся к условию

$$|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| = \sigma_y, \quad (2.6)$$

в котором предел текучести σ_y определяется линейным законом изотропного упрочнения [31]

$$\sigma_y = 1 + H\varepsilon_{eq}^p, \quad (2.7)$$

где ε_{eq}^p — эквивалентная пластическая деформация.

Далее в статье используются следующие дополнительные ограничения на параметры задачи: $\delta \geq \frac{1}{2}$, $\nu > 0$, $H \geq 0$. Кроме того, предполагается, что действия только температурного градиента недостаточно для начала пластического течения в сфере.

Приращения пластических деформаций вычисляются в соответствии с ассоциированным законом течения

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}}, \quad (2.8)$$

где $d\varepsilon_{ij}^p$ — приращения пластических деформаций, $d\lambda$ — положительный множитель, f — пластический потенциал, соответствующий условию (2.6).

Приращение эквивалентной пластической деформации $d\varepsilon_{eq}^p$ определяется законом

$$\sigma_y d\varepsilon_{eq}^p = \sigma_{rr} d\varepsilon_{rr}^p + \sigma_{\theta\theta} d\varepsilon_{\theta\theta}^p + \sigma_{\varphi\varphi} d\varepsilon_{\varphi\varphi}^p \quad (2.9)$$

Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_{rr}(\delta) = -P, \quad \sigma_{rr}(1) = 0 \quad (2.10)$$

В свою очередь, граничные условия по температуре задаются следующим образом

$$T(\delta) = T_{in}, \quad T(1) = T_{out}, \quad (2.11)$$

где T_{in} и T_{out} — температура внутренней и внешней поверхности сферы.

Решая стационарное уравнение теплопроводности с учетом граничных условий (2.11), нетрудно получить распределение температуры

$$T(\beta) = T_{in} + \frac{\delta}{1-\delta}(\delta^{-1} - \beta^{-1})\Delta, \quad (2.12)$$

где $\Delta = T_{out} - T_{in}$.

3. Упругое равновесие и начало пластического течения. Рассмотрим напряженное состояние сферы до начала пластического течения ($\varepsilon_{ij}^p = 0$). Соотношения (2.5) преобразуются к форме:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\ &\times \left((1-\nu)u' + 2\nu u\beta^{-1} - (1+\nu)\alpha T \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\ &\times \left(\nu u' + u\beta^{-1} - (1+\nu)\alpha T \right) \end{aligned}$$

Уравнение равновесия (2.2) с учетом предыдущих соотношений запишется следующим образом

$$u'' + 2u'\beta^{-1} - 2u\beta^{-2} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T'$$

Решение полученного выше уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{2}d_1\beta^{-2} + (1-2\nu)d_2\beta + \alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}J(\beta)\beta^{-2} \\ \sigma_{rr} &= -\frac{d_1}{\beta^3} + d_2 - \frac{2\alpha}{1-\nu}J(\beta)\beta^{-3} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{d_1}{2\beta^3} + d_2 + \\ &+ \frac{\alpha}{1-\nu}J(\beta)\beta^{-3} - \frac{\alpha}{1-\nu}T(\beta) \\ J(\beta) &= \int T\beta^2 d\beta = \frac{2\beta - 3\delta}{6(1-\delta)}\Delta\beta^2 + \frac{T_{in}}{3}\beta^3, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где d_1, d_2 — константы интегрирования.

Из граничных условий (2.10) следует

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\delta^3}{1 - \delta^3} P + \frac{\alpha \delta^3}{(1 - \delta^3)(1 - \nu)} \Delta \\
 d_2 &= \frac{\delta^3}{1 - \delta^3} P + \\
 &+ \frac{\alpha(2 + \delta)}{3(1 + \delta + \delta^2)(1 - \nu)} \Delta + \frac{2\alpha}{3(1 - \nu)} T_{in}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Итоговое распределение напряжений в сфере до наступления пластического течения следует из (3.1) и (3.2)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -\frac{\delta^3(1 - \beta^3)}{\beta^3(1 - \delta^3)} P + \\
 &+ \alpha \delta \frac{(1 - \beta)(\beta - \delta)(\beta + \delta + \beta\delta)}{\beta^3(1 - \delta^3)(1 - \nu)} \Delta \\
 \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\delta^3(1 + 2\beta^3)}{2\beta^3(1 - \delta^3)} P + \\
 &+ \alpha \delta \frac{(\delta^2 + (1 + \delta + \delta^2)\beta^2 - 2(1 + \delta)\beta^3)}{2\beta^3(1 - \delta^3)(1 - \nu)} \Delta
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Поскольку эксплуатационной нагрузкой для сферы принято внутреннее давление, то для достижения эффекта упрочнения необходимо выполнение следующих условий: пластическое деформирование происходит вблизи внутренней поверхности сферы, а напряжения в пластической области удовлетворяют неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$. Если оба этих условия справедливы, то после разгрузки на месте пластической области формируется поле напряжений такое, что $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$, и поскольку в разгруженном состоянии $\sigma_{rr}(\delta) = 0$, то остаточные напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ будут сжимающими. Однако известно [32], что в зависимости от параметров задачи δ, ν, P, Δ в сфере возможно появление одной или двух пластических областей, соответствующих разным формам условия пластичности (2.6). Далее необходимо определить условия, при которых пластическое течение в сфере зарождается на поверхности $\beta = \delta$ и в соответствии с условием $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$.

Вначале найдем значение температурного градиента Δ_0 , соответствующее началу пластического течения, в отсутствии внутреннего давления ($P = 0$). Рассмотрим разность напряжений (3.3)

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{\alpha \delta (3\delta^2 \beta^{-3} - (1 + \delta + \delta^2) \beta^{-1})}{2(1 - \delta^3)(1 - \nu)} \Delta \tag{3.4}$$

Используя стандартные методы математического анализа, нетрудно показать, что знак производной от разности (3.4) противоположен знаку температурного градиен-

та Δ , и указанная производная имеет нулевое значение в некоторой точке $\beta^* \in [\delta, 1]$, только если $\delta < \frac{1}{16}(1 + \sqrt{33}) \approx 0.42$. Также нетрудно убедиться, что модуль разности напряжений (3.16) достигает максимума на внутренней поверхности сферы $\beta = \delta$. Отсюда найдем абсолютное значение градиента, соответствующее началу течения

$$\Delta_0 = \frac{2(1 + \delta + \delta^2)(1 - \nu)}{\alpha(2 + \delta)} \quad (3.5)$$

Заметим, что если $\Delta > 0$, то течение начинается в соответствии с условием $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$, а в противном случае — при условии $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 1$, но точка ($\beta = \delta$), в которой начинается пластическое течение, не меняется. Далее предполагаем, что действия только температурного градиента недостаточно для зарождения пластического течения в сфере, откуда следует ограничение на температурный градиент

$$|\Delta| < \Delta_0 \quad (3.6)$$

Рассмотрим общий случай $P > 0$. Поле напряжений представляет собой сумму механических напряжений, вызванных действием внутреннего давления, и температурных напряжений. Нетрудно убедиться, что механические напряжения всегда удовлетворяют неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$, а максимум разности $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ достигается на внутренней поверхности сферы. С другой стороны, температурные напряжения в сфере удовлетворяют неравенствам $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$ и $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$. Очевидно, что с увеличением внутреннего давления P область $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$ уменьшается, как и величина разности $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ в ней. Поэтому при выполнении неравенства (3.6) началу пластического течения всегда будет соответствовать условие $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$. Если $\Delta > 0$, то максимум и температурной, и механической составляющей разности напряжений $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ достигается на внутренней поверхности сферы, где и начнется пластическое течение. Из (3.3) найдем внутреннее давление, соответствующее началу течения

$$P_0 = \frac{2}{3}(1 - \delta^3) - \alpha \frac{(1 - \delta)(2 + \delta)}{3(1 - \nu)} \Delta \quad (3.7)$$

Если $\Delta < 0$, то в общем случае разность $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ может достигать максимума как на внутренней или внешней поверхности, так и внутри сферы. Найдем условия, при которых пластическое течение будет начинаться на внутренней поверхности сферы. Рассмотрим величину $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ при $P = P_0$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})|_{P=P_0} = \\ &= \frac{\delta^3}{\beta^3} - \frac{\alpha\delta}{2(1 - \delta)(1 - \nu)} \frac{\beta^2 - \delta^2}{\beta^3} \Delta \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы предыдущее выражение монотонно убывало с увеличением координаты β . Найдем производную

$$\begin{aligned} \sigma'_0 &= \frac{\alpha\delta\Delta}{2(1 - \delta)(1 - \nu)} \beta^{-2} - \\ &- \frac{3\delta^3(\alpha\Delta + 2(1 - \delta)(1 - \nu))}{2(1 - \delta)(1 - \nu)} \beta^{-4} \end{aligned}$$

После преобразований условие $\sigma'_0 < 0$ сводится к цепочке неравенств

$$\begin{aligned}\Delta &> \frac{6(1-\delta)(1-\nu)}{\alpha(\beta^2 - 3\delta^2)}\delta^2 \geq \\ &\geq -\frac{3(1-\delta)(1-\nu)}{\alpha},\end{aligned}$$

откуда окончательно

$$\Delta > -\frac{3(1-\delta)(1-\nu)}{\alpha} \quad (3.8)$$

Подведем итог: если ограничения (3.6) и (3.8) на температурный градиент выполняются, то пластическое течение в сфере начинается на ее внутренней поверхности ($\beta = \delta$) при условии пластичности $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$, а соответствующее давление P_0 определяется выражением (3.7).

4. Уругопластическое деформирование. Сфера состоит из внутренней пластической и внешней упругой областей, граница между которыми обозначена как β_{ep} . В пластической области справедливо неравенство $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} > \sigma_{rr}$. Из сферической симметрии и законов (2.8), (2.9) следует

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\phi\phi}^p, \quad \varepsilon_{rr}^p = -2\varepsilon_{\theta\theta}^p, \quad \varepsilon_{eq}^p = -\varepsilon_{rr}^p = 2\varepsilon_{\theta\theta}^p$$

Отсюда закон Гука (2.5) с учетом (2.3) примет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{(1-\nu)u' + 2\nu u\beta^{-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{eq}^p}{1+\nu} - \frac{\alpha T}{1-2\nu} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} &= \frac{\nu u' + u\beta^{-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \\ &- \frac{\varepsilon_{eq}^p}{1+\nu} - \frac{\alpha T}{1-2\nu}\end{aligned}$$

Уравнение равновесия (2.2) с учетом вышеприведенных соотношений запишется следующим образом

$$\begin{aligned}u'' + 2u'\beta^{-1} - 2u\beta^{-2} &= \\ &= \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T' - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(3\varepsilon_{eq}^p \beta^{-1} + \varepsilon_{eq}^{p'} \right)\end{aligned}$$

Общее решение полученного выше уравнения и распределение напряжений в пластической области имеют вид

$$\begin{aligned}u &= \frac{1+\nu}{2} c_1 \beta^{-2} + (1-2\nu) c_2 \beta + \\ &+ \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} J(\beta) \beta^{-2} - \frac{1-2\nu}{1-\nu} Y(\beta) \beta\end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -c_1\beta^{-3} + c_2 - 2\alpha \frac{J(\beta)}{1-\nu}\beta^{-3} - \frac{Y(\beta)}{1-\nu} \\
\sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{c_1}{2}\beta^{-3} + c_2 - \frac{\alpha T}{1-\nu} + \\
&+ \alpha \frac{J(\beta)}{1-\nu}\beta^{-3} - \frac{\varepsilon_{eq}^p}{2(1-\nu)} - \frac{Y(\beta)}{1-\nu} \\
Y(\beta) &= \int \varepsilon_{eq}^p \beta^{-1} d\beta,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где c_1, c_2 — константы интегрирования.

Далее преобразуем условие пластичности $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_y$ с помощью (2.7) и (4.1) и в результате получим уравнение относительно эквивалентной пластической деформации

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}c_1\beta^{-3} - \frac{\alpha T}{1-\nu} + 3\alpha \frac{J(\beta)}{1-\nu}\beta^{-3} - \\
- \frac{\varepsilon_{eq}^p}{2(1-\nu)} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p,
\end{aligned}$$

решение которого представлено ниже

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{eq}^p &= \left(\begin{aligned} &-2(1-\nu) + 3(1-\nu)c_1\beta^{-3} + \\ &+ 6\alpha\beta^{-3}J(\beta) - 2\alpha T(\beta) \end{aligned} \right) \times \\
&\times (1 + 2H(1-\nu))^{-1}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Решение (4.1) и (4.2) справедливо для любого температурного распределения (разумеется, в пластической области должно выполняться неравенство $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$). С помощью известного температурного распределения (2.12) найдем функцию $Y(\beta)$

$$\begin{aligned}
Y(\beta) &= - \left(\begin{aligned} &(1-\nu)(2\ln\beta + c_1\beta^{-3}) - \\ &- \alpha \frac{\delta}{1-\delta} \Delta\beta^{-1} \end{aligned} \right) \times \\
&\times (1 + 2H(1-\nu))^{-1}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Константы c_1, c_2 в пластической области могут быть найдены из следующих соображений. Во-первых, на внутренней поверхности сферы должно выполняться первое из граничных условий (2.10). Во-вторых, пластические деформации на упругопластической границе равны нулю. Решение системы уравнений $\sigma_{rr}^{pl}(\delta) = -P$, $\varepsilon_{eq}^p(\beta_{ep}) = 0$ относительно c_1, c_2 имеет вид

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{3}\beta_{ep}^2 \left(2\beta_{ep} + \frac{\alpha\delta}{(1-\delta)(1-\nu)}\Delta \right) \\
c_2 &= -P + \frac{2\alpha(1-H(1-\nu)(1-\delta^{-2}\beta_{ep}^2))}{3(1-\nu)(1-\delta)(1+2H(1-\nu))}\Delta + \\
&+ \frac{4H(1-\nu)\delta^{-3}\beta_{ep}^3 - 6\ln\delta}{3(1+2H(1-\nu))} + \frac{2\alpha T_{in}}{3(1-\nu)}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Окончательно распределение напряжений и пластических деформаций в пластической области с учетом (4.1)–(4.4) примет вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -P + \frac{4H(1-\nu)\beta_{ep}^3(\delta^{-3} - \beta^{-3}) - 6\ln(\delta\beta^{-1})}{3(1+2H(1-\nu))} - \\
 &\quad - \frac{2H\alpha\Delta(3(1-\delta\beta^{-1}) + \beta_{ep}^2(\delta\beta^{-3} - \delta^{-2}))}{3(1-\delta)(1+2H(1-\nu))} \\
 \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= -P + \frac{3+2H(1-\nu)\beta_{ep}^3(2\delta^{-3} + \beta^{-3}) - 6\ln(\delta\beta^{-1})}{3(1+2H(1-\nu))} - \\
 &\quad - \frac{H\alpha\Delta(3(2-\delta\beta^{-1}) - \beta_{ep}^2(2\delta^{-2} + \delta\beta^{-3}))}{3(1-\delta)(1+2H(1-\nu))} \\
 \varepsilon_{eq}^p &= \frac{\alpha\delta\Delta}{(1-\delta)(1+2H(1-\nu))}(\beta_{ep}^2\beta^{-3} - \beta^{-1}) + \frac{2(1-\nu)}{1+2H(1-\nu)}(\beta_{ep}^3\beta^{-3} - 1)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

В упругой области решение (3.1) остается справедливым, а константы d_1, d_2 определяются из условий $\sigma_{\theta\theta}^{el}(\beta_{ep}) - \sigma_{rr}^{el}(\beta_{ep}) = 1$, $\sigma_{rr}^{el}(1) = 0$. Первое условие обеспечивает выполнение условия пластичности (2.6) на упругопластической границе, а второе соответствует второму из граничных условий (2.10). Решая данную систему условий, найдем

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{1}{3} \left[2\beta_{ep}^3 + \frac{\alpha\delta\beta_{ep}^2}{(1-\delta)(1-\nu)}\Delta \right] \\
 d_2 &= \frac{1}{3} \left[2\beta_{ep}^3 + \alpha \frac{2 - (3 - \beta_{ep}^2)\delta}{(1-\delta)(1-\nu)}\Delta + \frac{2\alpha}{1-\nu}T_{in} \right]
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

В итоге из (3.1) и (4.6) следует распределение напряжений в упругой области

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{2}{3}\beta_{ep}^3(1 - \beta^{-3}) + \frac{\alpha\delta\Delta}{3(1-\delta)(1-\nu)} \times \\
 &\quad \times (\beta_{ep}^2(1 - \beta^{-3}) - 3(1 - \beta^{-1})) \\
 \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3}\beta_{ep}^3(2 + \beta^{-3}) + \frac{\alpha\delta\Delta}{6(1-\delta)(1-\nu)} \times \\
 &\quad \times (\beta_{ep}^2(2 + \beta^{-3}) - 3(2 - \beta^{-1}))
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Координата β_{ep} определяется из условия непрерывности перемещения на упругопластической границе $u^{pl}(\beta_{ep}) = u^{el}(\beta_{ep})$, где верхние индексы “pl” и “el” обозначают пластическую и упругую области соответственно. Данное уравнение является трансцендентным и может быть решено численными методами. Кроме того,

из уравнения следует полезная зависимость внутреннего давления от координаты упругопластической границы

$$P = -\frac{\alpha\Delta\left[2\delta\beta_{ep}^{-1} + 6H(1-\delta)(1-\nu) - 3\delta + \left(\delta - 2H(\delta^{-2} - \delta)(1-\nu)\right)\beta_{ep}^2\right]}{3(1-\nu)(1-\delta)(1+2H(1-\nu))} + \frac{2 - \left(2 + 4H(1-\delta^{-3})(1-\nu)\right)\beta_{ep}^3 - 6\ln(\delta\beta_{ep}^{-1})}{3(1+2H(1-\nu))}, \quad (4.8)$$

из которой, в свою очередь, можно найти предельное давление P_1 , соответствующее полному переходу сферы в пластическое состояние

$$P_1 = \frac{2}{1+2H(1-\nu)} \times \left[\frac{2H}{3\delta^3}(1-\delta^3)(1-\nu) - \ln\delta + \frac{H\alpha}{3\delta^2}(1-\delta)(1+2\delta)\Delta \right] \quad (4.9)$$

Интересно отметить, что в частном случае $H = 0$ (идеальный упругопластический материал) предельное давление (4.9) является функцией только геометрического параметра δ .

С увеличением внутреннего давления P в упругой области возможно зарождение и второй пластической области. Однако, повторяя рассуждения из предыдущего раздела, нетрудно доказать, что при выполнении ограничений (3.6) и (3.8) на температурный градиент пластическое течение будет происходить только в одной области.

5. Остаточные напряжения и повторное пластическое течение. В ходе разгрузки с тела вначале снимается температурный градиент, после чего внутреннее давление P медленно снижается от P_a до нуля. В силу того, что действия только температурного градиента недостаточно для зарождения пластического течения в сфере, то его снятие приводит к незначительному снижению напряжений в соответствии с упругим законом. Далее подробно рассматривается снижение внутреннего давления.

Первоначально сфера вновь ведет себя как упругое тело, но уже с накопленными пластическими деформациями. Кроме того, при определенных условиях в сфере возможно повторное пластическое течение. В дальнейших рассуждениях механические параметры материала ν, E, H предполагаются независимыми от накопленной пластической деформации. Вначале рассмотрим упругую составляющую разгрузки. Введем следующие обозначения

$$\hat{\beta}_{ep} = \beta_{ep}(P = P_a), \quad \hat{\epsilon}_{ij}^p = \epsilon_{ij}^p(P = P_a),$$

где $\hat{\beta}_{ep}$ — максимальная координата упругопластической границы, $\hat{\epsilon}_{eq}^p$ — пластические деформации, накопленные в процессе нагрузки. С помощью третьего из соотношений (4.5) найдем

$$\hat{\epsilon}_{eq}^p = \frac{1}{1+2H(1-\nu)} \times \left[\frac{\alpha\delta\Delta}{1-\delta}(\hat{\beta}_{ep}^2\beta^{-3} - \beta^{-1}) + 2(1-\nu)(\hat{\beta}_{ep}^3\beta^{-3} - 1) \right]$$

Давление P_a , необходимое для продвижения области пластического течения до точки $\hat{\beta}_{ep}$, определяется с помощью (4.8).

Сфера состоит из двух областей: во внутренней области $\beta \in [\delta, \hat{\beta}_{ep}]$ происходило пластическое течение, а во внешней $\beta \in [\hat{\beta}_{ep}, 1]$ деформирование было чисто упругим. Разделение деформаций (2.4) во внутренней области примет вид

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \hat{\varepsilon}_{rr}^p, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^p, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \hat{\varepsilon}_{zz}^p \quad (5.1)$$

Физические соотношения (2.5) с учетом (5.1) запишутся как

$$\sigma_{rr} = \frac{(1-\nu)u' + 2\nu u\beta^{-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{\hat{\varepsilon}_{eq}^p}{1+\nu}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\nu u' + u\beta^{-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\hat{\varepsilon}_{eq}^p}{1+\nu}$$

Далее уравнение равновесия (2.2) с учетом предыдущих соотношений преобразуется к форме

$$u'' + 2u'\beta^{-1} - 2u\beta^{-2} = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(3\hat{\varepsilon}_{eq}^p\beta^{-1} + \hat{\varepsilon}_{eq}^{p'} \right)$$

Из решения предыдущего уравнения следует

$$u = \frac{1+\nu}{2}d_3\beta^{-2} + (1-2\nu)d_4\beta - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\hat{Y}(\beta)\beta$$

$$\sigma_{rr} = -d_3\beta^{-3} + d_4 - \frac{\hat{Y}(\beta)}{1-\nu}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{d_3}{2}\beta^{-3} + d_4 - \frac{\hat{\varepsilon}_{eq}^p}{2(1-\nu)} - \frac{\hat{Y}(\beta)}{1-\nu} \quad (5.2)$$

$$\hat{Y}(\beta) = -\frac{\alpha\delta\Delta\left(\hat{\beta}_{ep}^2\beta^{-3} - 3\beta^{-1}\right)}{3(1-\delta)(1+2H(1-\nu))} -$$

$$-\frac{2(1-\nu)\left(\hat{\beta}_{ep}^3\beta^{-3} + 3\ln\beta\right)}{3(1+2H(1-\nu))}$$

где d_3, d_4 — константы интегрирования.

Во внешней области $\beta \in [\hat{\beta}_{ep}, 1]$ решение имеет вид

$$u = \frac{1+\nu}{2}d_5\beta^{-2} + (1-2\nu)d_6\beta$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{d_5}{\beta^3} + d_6 \quad (5.3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{d_5}{2\beta^3} + d_6$$

В (5.2) и (5.3) d_3, d_4, d_5, d_6 — константы интегрирования, которые вычисляются из граничных условий (2.10) и условий непрерывности в точке $\beta = \hat{\beta}_{ep}$ вида $u^{unl \cap pl}(\hat{\beta}_{ep}) = u^{unl \cap el}(\hat{\beta}_{ep})$, $\sigma_{rr}^{unl \cap pl}(\hat{\beta}_{ep}) = \sigma_{rr}^{unl \cap el}(\hat{\beta}_{ep})$, где верхний индекс «unl» обозначает область упругой разгрузки. Решая перечисленные уравнения, найдем

$$\begin{aligned}
 d_3 = d_5 = d_6 &= \frac{\delta^3}{1 - \delta^3} P + \\
 &+ \frac{\alpha \delta (\hat{\beta}_{ep} - \delta)^2 \left(1 + 2\delta \hat{\beta}_{ep}^{-1} \right)}{C} \Delta + \\
 &+ \frac{2 \left(\hat{\beta}_{ep}^3 - \delta^3 + 3\delta^3 \ln \left(\delta \hat{\beta}_{ep}^{-1} \right) \right)}{D} \\
 d_4 &= \frac{\delta^3}{1 - \delta^3} P + \frac{\alpha \delta \left(2\hat{\beta}_{ep}^{-1} + \left(\hat{\beta}_{ep}^2 - 3\delta^2 \right) \right)}{C} \Delta - \\
 &- \frac{2 \left(1 - \hat{\beta}_{ep}^3 + 3 \ln \hat{\beta}_{ep} - 3\delta^3 \ln \delta \right)}{D} \\
 C &= 3(1 - \delta)^2 (1 + \delta + \delta^2) (1 + 2H(1 - \nu)) (1 - \nu) \\
 D &= 3(1 - \delta^3) (1 + 2H(1 - \nu))
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Соотношения (5.2)—(5.4) описывают упругую разгрузку сферы. Однако при достаточной большой толщине сферы или высоком давлении автофретирования P_a в ходе разгрузки возможно повторное (или обратное) пластическое течение. Также известно, что многие конструкционные материалы в той или иной степени проявляют эффект Баушингера, заключающийся в снижении предела текучести при сжатии после предварительного пластического деформирования на растяжение (и наоборот). Повторное пластическое течение и эффект Баушингера в совокупности значительно снижают абсолютную величину остаточных напряжений. Для количественной оценки эффекта Баушингера обычно вводят коэффициент k_{bef} , равный отношению предела текучести σ_c при сжатии к пределу текучести σ_t на растяжение. Данный коэффициент в первую очередь зависит от величины пластической деформации, накопленной при нагрузке. Экспериментальные исследования ряда материалов выявили характерную зависимость, согласно которой с увеличением пластической деформации коэффициент k_{bef} достаточно быстро стремится к некоторому предельному значению [33—35]. В рассматриваемой задаче повторное пластическое течение будет происходить в относительно небольшой области (по сравнению с областью течения при нагрузке) вблизи внутренней поверхности сферы, где накопленные пластические деформации максимальны. Поэтому коэффициент k_{bef} для простоты принимается постоянной величиной, независимой от накопленной пластической деформации.

Введем вторичные пластические деформации ε_{ij}^{sp} , которые можно рассматривать в качестве величины снижения пластических деформаций, накопленных в процессе разгрузки. Тогда разделение деформаций запишется следующим образом

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{rr}^e + \hat{\varepsilon}_{rr}^p + \varepsilon_{rr}^{sp} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^e + \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^{sp} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{sp}\end{aligned}\quad (5.5)$$

В области повторного течения справедливо неравенство $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$, а условие пластичности (2.6) примет вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = k_{bef} + H\varepsilon_{eq}^{sp}; \quad k_{bef} = \frac{\sigma_c}{\sigma_t}, \quad (5.6)$$

где ε_{eq}^{sp} — эквивалентная вторичная пластическая деформация.

Из (5.2), (5.4) и (5.6) найдем давление, при котором на внутренней поверхности зарождается повторное пластическое течение

$$\begin{aligned}P_2 &= -\frac{2}{3}(1 - \delta^3)k_{bef} - \\ &\frac{\alpha \left(2 \left(\hat{\beta}_{ep}^{-1} - 1 \right) + \delta \left(\hat{\beta}_{ep}^2 - \delta^2 \right) \right)}{3(1 - \delta)(1 + 2H(1 - \nu))(1 - \nu)} \Delta - \\ &- 2 \frac{\left(\hat{\beta}_{ep}^3 - \delta^3 + 3 \ln \left(\delta \hat{\beta}_{ep}^{-1} \right) \right)}{3 + 6H(1 - \nu)}\end{aligned}$$

Разумеется, предыдущее выражение имеет смысл только, если $P_2 > 0$, в противном случае разгрузка является упругой. Введем величину P_{sp} , равную минимальному давлению P_a , при котором в ходе разгрузки возникнет повторное течение. В общем случае зависимость P_{sp} задачи не может быть выражена аналитически. При известных значениях параметров уравнение $P_2 = 0$ (повторное течение начинается в момент полного снятия нагрузки) решается численно относительно $\hat{\beta}_{ep}$, далее P_{sp} вычисляется с помощью зависимости (4.8).

Из условия (5.6) найдем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta\theta}^{sp} &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^{sp} \\ \varepsilon_{rr}^{sp} &= -2\varepsilon_{\theta\theta}^{sp} \\ \varepsilon_{eq}^{sp} &= \varepsilon_{rr}^{sp} = -2\varepsilon_{\theta\theta}^{sp}\end{aligned}$$

По аналогии с тем, как это было сделано в разд. 4, преобразуем уравнение равновесия (2.2) к виду, в котором независимым является перемещение

$$u'' + 2u'\beta^{-1} - 2u\beta^{-2} = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(3\hat{\varepsilon}_{eq}^p \beta^{-1} + \hat{\varepsilon}_{eq}^{p'} - 3\varepsilon_{eq}^{sp} \beta^{-1} - \varepsilon_{eq}^{sp'} \right)$$

Решая полученное уравнение, найдем

$$\begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{2} c_3 \beta^{-2} + (1-2\nu) c_4 \beta - \\ &\quad - \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\hat{Y}(\beta) - S(\beta)) \beta \\ \sigma_{rr} &= -c_3 \beta^{-3} + c_4 + \frac{S(\beta) - \hat{Y}(\beta)}{1-\nu} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{c_3}{2} \beta^{-3} + c_4 - \\ &\quad - \frac{\hat{\varepsilon}_{eq}^p - \varepsilon_{eq}^{sp}}{2(1-\nu)} - \frac{S(\beta) - \hat{Y}(\beta)}{1-\nu} \\ S(\beta) &= \int \varepsilon_{eq}^{sp} \beta^{-1} d\beta, \end{aligned} \tag{5.7}$$

где c_3, c_4 — константы интегрирования.

Из условия пластичности (5.6) с учетом (5.7) следует

$$\hat{\varepsilon}_{eq}^{sp} = \frac{\varepsilon_{eq}^p - (1-\nu) \left(2k_{bef} + 3c_3 \beta^{-3} \right)}{1 + 2H(1-\nu)} \tag{5.8}$$

Соотношения (5.7) — (5.8) описывают напряженно-деформированное состояние в области повторного пластического течения. В упругой области остаются справедливыми решения (5.2) и (5.3). Граница между областями обозначается как β_{esp} . Константы интегрирования $c_3, c_4, d_3, d_4, d_5, d_6$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{sp}(\delta) &= 0 \\ \varepsilon_{eq}^{sp}(\beta_{esp}) &= 0 \\ \sigma_{rr}^{unl \cap pl}(\beta_{esp}) - \sigma_{\theta\theta}^{unl \cap pl}(\beta_{esp}) &= k_{bef} \\ u^{unl \cap pl}(\hat{\beta}_{ep}) &= u^{unl \cap el}(\hat{\beta}_{ep}) \\ \sigma_{rr}^{unl \cap pl}(\hat{\beta}_{ep}) &= \sigma_{rr}^{unl \cap el}(\hat{\beta}_{ep}) \\ \sigma_{rr}^{unl \cap el}(1) &= 0, \end{aligned} \tag{5.9}$$

где индекс «sp» обозначает область повторного течения. Упругопластическая граница β_{esp} вычисляется из решения нелинейного уравнения $u^{sp}(\beta_{esp}) = u^{unl \cap pl}(\beta_{esp})$ с учетом решения системы (5.9).

6. Эксплуатационные напряжения. Введем обозначения

$$\hat{\beta}_{esp} = \beta_{esp} (P = 0)$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^{sp} = \varepsilon_{ij}^{sp} (P = 0)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^p = \hat{\varepsilon}_{ij}^p + \hat{\varepsilon}_{ij}^{sp},$$

где $\hat{\beta}_{esp}$ — максимальная координата границы β_{esp} , $\hat{\varepsilon}_{eq}^{sp}$ — вторичные пластические деформации, накопленные при разгрузке, $\bar{\varepsilon}_{ij}^p$ — остаточные пластические деформации, накопленные в ходе автофреттирования.

Разделение деформаций запишется в виде:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \bar{\varepsilon}_{rr}^p$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^p, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^p$$

В ходе эксплуатации сфера находится под действием внутреннего давления и граничные условия (2.10) имеют вид

$$\sigma_{rr}(\delta) = -P_w, \quad \sigma_{rr}(1) = 0, \quad (6.1)$$

где P_w — рабочее давление.

Если $P_2 \leq 0$, то $\bar{\varepsilon}_{ij}^p = \hat{\varepsilon}_{ij}^p$ и рабочие напряжения определяются соотношениями (5.2) — (5.4) с учетом того, что $P = P_w$. Если же $P_2 > 0$ (в ходе разгрузки происходило повторное пластическое течение), то в области $[\delta, \hat{\beta}_{esp}]$ решение запишется следующим образом

$$u = \frac{1+\nu}{2} d_7 \beta^{-2} + (1-2\nu) d_8 \beta - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \bar{Y}(\beta) \beta$$

$$\sigma_{rr} = -d_7 \beta^{-3} + d_8 - \frac{\bar{Y}(\beta)}{1-\nu}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{d_7}{2} \beta^{-3} + d_8 - \frac{\bar{\varepsilon}_{eq}^p}{2(1-\nu)} - \frac{\bar{Y}(\beta)}{1-\nu},$$

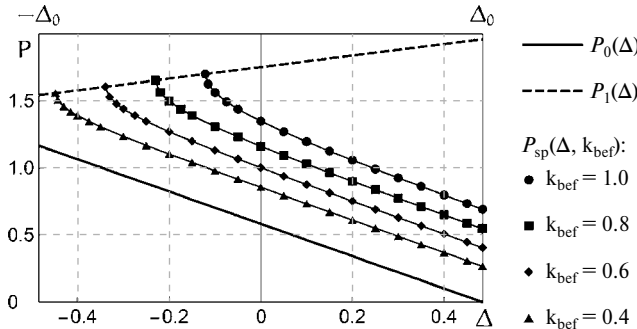


Рис. 1. Зависимости давления P_0 и P_1 от градиента температуры Δ .

где d_7, d_8 — константы интегрирования, $\bar{\varepsilon}_{eq}^p = \hat{\varepsilon}_{eq}^p + \hat{\varepsilon}_{eq}^{sp}$, $\bar{Y}(\beta) = \int \bar{\varepsilon}_{eq}^p \beta^{-1} d\beta$. В области $[\hat{\beta}_{esp}, \hat{\beta}_{ep}]$ справедливо решение (5.2), а в области $[\hat{\beta}_{ep}, 1]$ — решение (5.3). Константы интегрирования $d_3, d_4, \dots, d_8$ определяются с помощью граничных условий (6.1) и условий непрерывности радиального напряжения и перемещения в точках $\hat{\beta}_{esp}$ и $\hat{\beta}_{ep}$.

7. Результаты. В качестве примера рассматривается алюминиевый сплав со следующими параметрами $\nu = 0.33$, $E = 66$ ГПа, $H = 6.195$ ГПа, $\alpha = 2.32 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ [36]. Отсчетная температура принята равной $T_0 = 300 \text{ K}$. Безразмерные характеристики материала принимают значения $\bar{H} = 0.094$, $\bar{\alpha} = 1.938$. Геометрический параметр выбран равным $\delta = 1/2$. Следствием ограничений (18) и (20) на температурный градиент является неравенство

$$\Delta_{\min} < \Delta < \Delta_{\max}$$

$$\Delta_{\max} = -\Delta_{\min} = \Delta_0 \approx 0.484$$

Зависимости предельного давления P_0 , соответствующего началу течения (3.7), и давления P_1 , при котором вся сфера переходит в пластическое состояние (4.9), от градиента температуры изображены на рис. 1. Интересно отметить, что увеличение температурного градиента в сфере приводит к значительному увеличению диапазона возможных значений технологического давления P_a . В то же время при отрицательных и высоких по модулю значениях градиента сфера относительно быстро переходит в пластическое состояние. Следовательно, чем выше температурный градиент, тем более высокие значения пластических деформаций в окрестности внутренней поверхности могут быть достигнуты в ходе нагрузки, и тем выше абсолютная величина остаточных сжимающих напряжений после разгрузки. Однако данное заключение в полной мере справедливо только для чисто упругой разгрузки. На рис. 1 также представлены зависимости давления P_{sp} от градиента температуры для нескольких

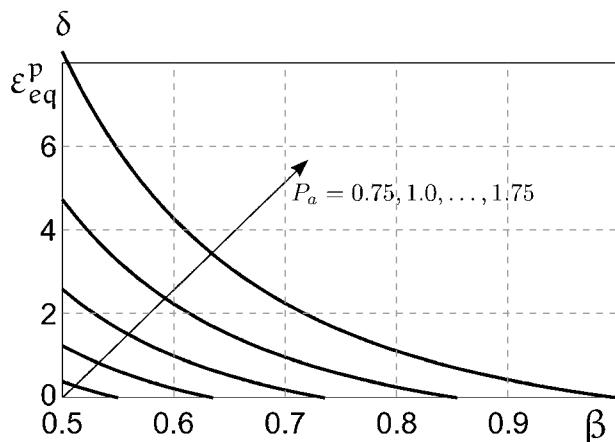


Рис. 2. Распределение эквивалентных пластических деформаций в сфере для $P_a = 0.75, 1.0, \dots, 1.75$ при $\Delta = 0$.

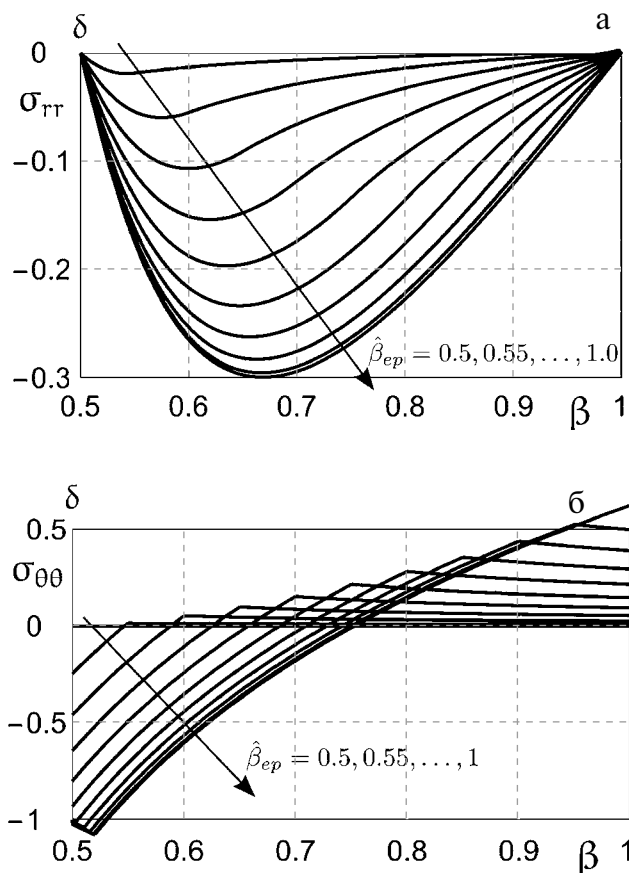


Рис. 3. Остаточное радиальное (а) и тангенциальное (б) напряжение в сфере для $\hat{\beta}_{ep} = 0.5, 0.55, \dots, 1$ при $\Delta = 0$ и $k_{bef} = 1$.

значений параметра k_{bef} . Видно, что эффект Баушингера существенно ограничивает область параметров (Δ, P_a) , при которых разгрузка является чисто упругой, что в особенности характерно для положительных значений температурного градиента. При отрицательном градиенте возможно достичь упругой разгрузки даже при очень выраженном эффекте Баушингера.

На рис. 2 представлено распределение эквивалентных пластических деформаций (4.5) в сфере в зависимости от величины рабочего давления P_a . Температурный градиент принят равным нулю. Для выбранных значений параметров имеем $P_0 \approx 0.58, P_1 \approx 1.75$. Видим, что увеличение внутреннего давления приводит к росту пластических деформаций в сфере, который особенно выражен вблизи ее внутренней поверхности. Далее не будем подробно останавливаться на процессе нагрузки и перейдем к анализу остаточных и эксплуатационных напряжений в сфере.

На рис. 3 представлены типичные зависимости радиального и тангенциального остаточных напряжений от координаты упругопластической границы $\hat{\beta}_{ep}$ в ходе нагрузки; градиент температуры в ходе нагрузки принят равным нулю ($\Delta = 0$), а эф-

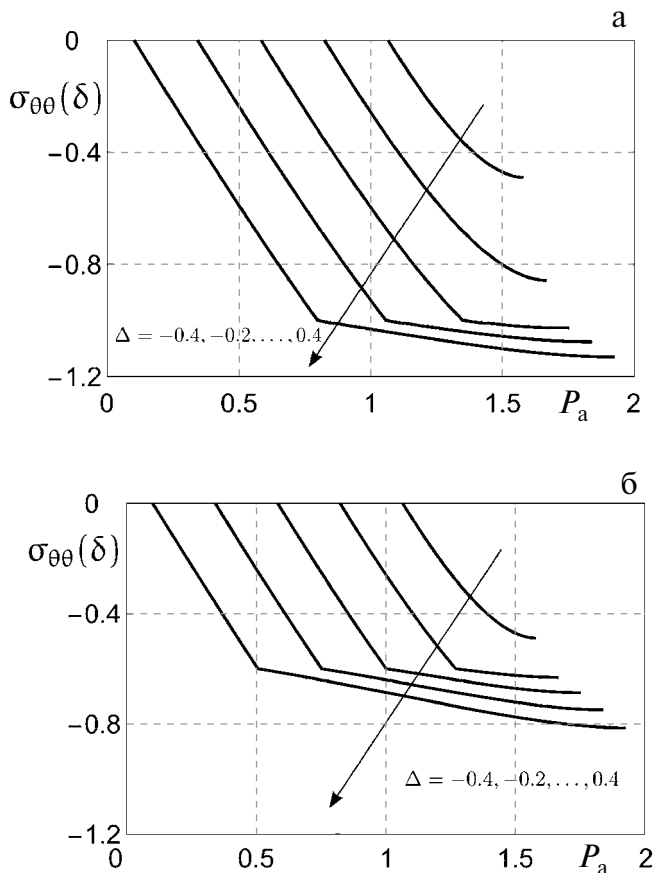


Рис. 4. Эксплуатационное тангенциальное — а и эквивалентное — б напряжение в сфере

для $\hat{\beta}_{ep} = 0.5, 0.55, \dots, 1.0$ при $\Delta = 0$, $k_{bef} = 1.0$, $P_w = 0.5$.

фekt Баушингера не рассматривается ($k_{bef} = 1.0$). Видно, что с увеличением области пластического деформирования абсолютная величина остаточных напряжений также растет, однако при значениях технологического давления $P_a \geq P_{sp}$ (при выбранных значениях параметров $P_{sp} \approx 1.35$, а соответствующая координата границы $\hat{\beta}_{ep} \approx 0.78$) тангенциальное напряжение на внутренней поверхности сферы стабилизируется и далее с ростом давления меняется незначительно. Данная закономерность объясняется повторным пластическим течением в окрестности внутренней поверхности при значениях давления. Очевидно, что чем сильнее выражен эффект Баушингера (т.е. чем меньше k_{bef}), тем меньше величина давления P_{sp} , и тем ниже абсолютная величина напряжений вблизи внутренней поверхности сферы. Также следует отметить, что повторное течение и эффект Баушингера влияют на величину тангенциальных напряжений лишь в небольшой области вблизи внутренней поверхности сферы, а в ее оставшейся части остаточные напряжения продолжают расти (по модулю). В частности, заметно увеличиваются растягивающие остаточные напряжения на внешней поверхности сферы, что является нежелательным эффектом.

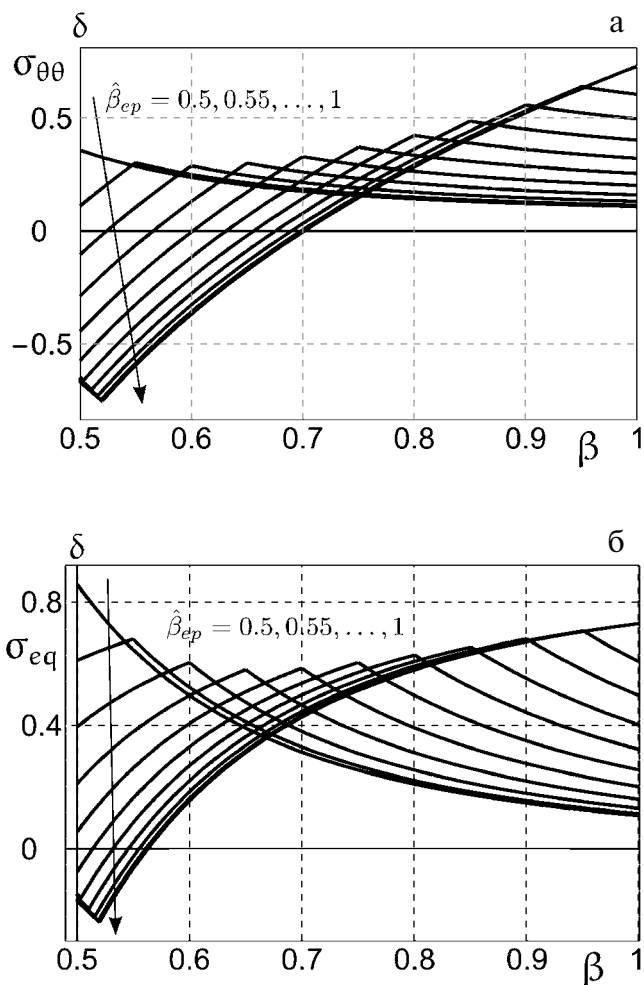


Рис. 5. Максимальное тангенциальное — а и эквивалентное — б напряжение в сфере в зависимости от технологического давления P_a и градиента температуры Δ для $k_{bef} = 1$ и $P_w = 0.5$.

Таким образом, использование высоких значений технологического давления $P_a \geq P_{sp}$ не только практически не имеет положительного эффекта, но может и ухудшать эксплуатационные характеристики детали.

На рис. 4 представлены зависимости остаточного тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}(\delta)$ от давления P_a и температурного градиента Δ . Из рис. 4а видно, что присутствие даже небольшого по величине температурного градиента способно значительно повысить уровень сжимающих остаточных напряжений. В частности, при $P_a \leq 1.0$ градиент $\Delta = 0.2$ позволяет увеличить абсолютную величину тангенциального напряжения практически на 40% от предела текучести по сравнению с изотермическим случаем. Однако если у материала сферы достаточно ярко выражен эффект Баушингера (рис. 4б), то положительное влияние температурного градиента выражено значительно слабее, а существенное увеличение $|\sigma_{\theta\theta}(\delta)|$ имеет место в более узком диапазоне технологического давления.

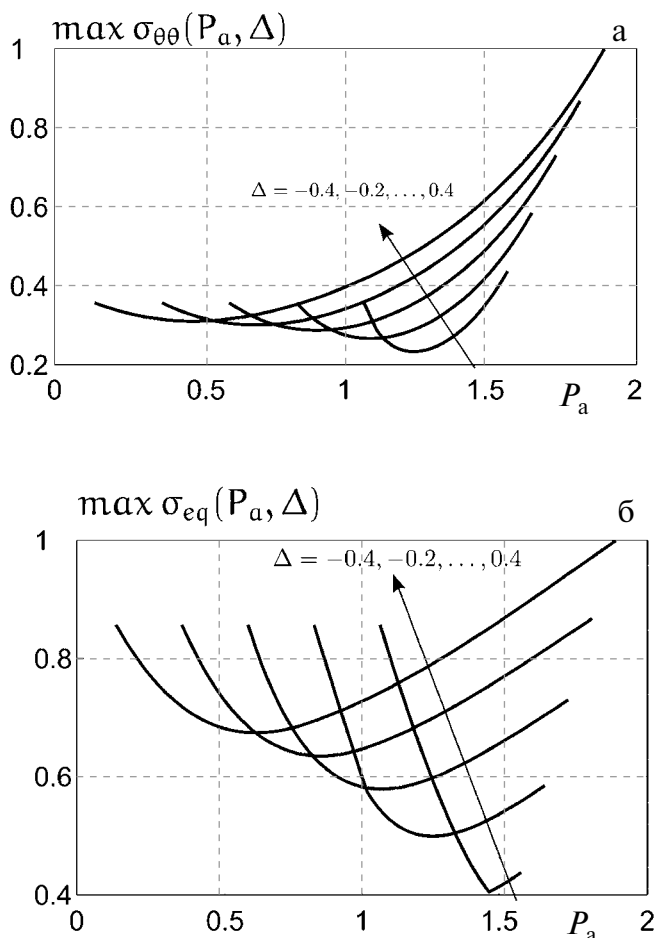


Рис. 6. Максимальное тангенциальное (а) и эквивалентное (б) напряжение в сфере в зависимости от технологического давления P_a и градиента температуры Δ для $k_{bef} = 1$ и $P_w = 0.5$.

Типичные распределения тангенциального и эквивалентного эксплуатационного напряжения в сфере для различных значений координаты упругопластической границы $\hat{\beta}_{ep}$ представлены на рис. 5; градиент температуры в ходе нагрузки принят равным нулю ($\Delta = 0$), эффект Баушингера не рассматривается ($k_{bef} = 1.0$). Выбранное рабочее давление равняется $P_w = 0.5$. Под эквивалентным напряжением подразумевается разность $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$. Графики для $\hat{\beta}_{ep} = 0.5$ соответствуют неупрочненной сфере. Интересно отметить, что у каждого из графиков на рис. 5 есть заметный пик, соответствующий максимальному значению напряжения. В свою очередь, зависимость максимального рабочего напряжения (как тангенциального, так и эквивалентного) от координаты упругопластической границы $\hat{\beta}_{ep}$ имеет ярко выраженный U-образный вид. Низкие значения $\hat{\beta}_{ep}$ несущественно снижают напряжения в ходе эксплуатации, а высокие приводят к значительному росту растягивающих напряжений на внешней поверхности сферы. Из рис. 5 видно, что

процесс автофретирования может быть оптимизирован с целью минимизации тангенциального или эквивалентного рабочего напряжения в сфере. При этом соответствующие оптимальные значения $\hat{\beta}_{ep}$ различны.

На рис. 6 представлены огибающие графиков тангенциальных и эквивалентных эксплуатационных напряжений для нескольких значений температурного градиента Δ . Для большей наглядности в качестве независимого параметра вместо $\hat{\beta}_{ep}$ используется рабочее давление P_a . Левая точка каждого из графиков на рис. 6 соответствует неупрочненной сфере. Видим, что оптимальное значение технологического давления P_a существенно зависит от величины температурного градиента. Если целью оптимизации является снижение тангенциальных напряжений, то использование положительного градиента позволяет заметно снизить рабочее давление P_a при небольшом росте рабочих напряжений (рис. 6а, графики для $\Delta = 0.0, 0.2, 0.4$). В то же время отрицательный градиент температуры позволяет снизить тангенциальное напряжение в ходе эксплуатации по сравнению с чисто гидравлическим автофретированием, однако для достижения этого эффекта требуется более высокое давление P_a (рис. 6а, графики для $\Delta = 0.0, -0.2, -0.4$). Аналогичные выводы можно получить, если в качестве целевой функции используется эквивалентное рабочее напряжение. Положительный градиент температуры позволяет уменьшить технологическое давление P_a , при этом напряжения в процессе эксплуатации возрастают достаточно заметно (рис. 6б, графики для $\Delta = 0.0, 0.2, 0.4$), но остаются значительно ниже напряжений в неупрочненной сфере. С другой стороны, отрицательным градиентом можно добиться существенного снижения напряжений в сфере (до 30% при $\Delta = -0.4$). Как видно из рис. 6б, данного положительного эффекта можно добиться и при небольшом увеличении P_a . Более того, градиент может быть подобран таким образом, что эксплуатационные напряжения в результате снизятся даже при использовании неизменного P_a ($\Delta = 0$). Также интересно отметить, что использование достаточно большого отрицательного градиента может привести к тому, что в ходе эксплуатации эквивалентное напряжение будет даже ниже рабочего давления P_w (рис. 6б, графики для $\Delta = -0.2, -0.4$).

Заключение. В работе рассмотрено упрочнение полых сферических заготовок с помощью комбинации гидравлического и температурного автофретирования. Получены точные аналитические решения для напряженно-деформированного состояния сферы в ходе нагрузки и разгрузки, включая повторное пластическое течение, а также в процессе эксплуатации после предварительного упрочнения. Основные выводы приведены ниже.

1. Присутствие температурного градиента существенно влияет на остаточные и эксплуатационные напряжения в сфере по сравнению с чисто гидравлическим автофретированием. Диапазон технологического давления и его оптимальное значение также заметно меняются в зависимости от приложенного температурного градиента.

2. Положительный градиент расширяет диапазон технологического давления и приводит к повышению абсолютной величины остаточных напряжений в окрестности внутренней поверхности сферы и увеличению максимума эксплуатационных напряжений. Кроме того, использование положительного градиента позволяет существенно снизить давление в процессе автофретирования при некотором увеличении уровня эксплуатационных напряжений, которые тем не менее заметно ниже напряжений в неупрочненной сфере.

3. Отрицательный градиент температуры сужает диапазон технологического давления, а также приводит к уменьшению абсолютной величины остаточных

сжимающих напряжений вблизи внутренней поверхности и снижению эксплуатационных напряжений. Данное заключение, как и вывод № 2, в полной мере справедливо только для оптимального технологического давления. Оптимизацией технологических параметров можно добиться значительного снижения эксплуатационных напряжений в сфере по сравнению с чисто гидравлическим методом. Однако для достижения этого эффекта может потребоваться увеличение технологического давления.

Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dixit U.S., Kamal S.M., Shufen R.* Autofrettage Processes: Technology and Modelling. Boca Raton: CRC Press, 2019. 276 p.
2. *Shufen R., Dixit U.S.* A review of theoretical and experimental research on various autofrettage processes // *J. Pressure Vessel Technol.* 2018. V. 140. № 5. P. 050802.
3. *Jacob L.* La Résistance et L'équilibre Élastique des Tubes Frettés // *Memorial de L'artillerie Navale.* 1907. V. 1. P. 43–155.
4. *Zhan R., Tao C., Han L., Huang Y., Han D.* The residual stress and its influence on the fatigue strength induced by explosive autofrettage // *Explos. Shock Waves.* 2005. V. 25. № 3. P. 239–243.
5. *Kamal S.M., Dixit U.S.* Feasibility study of thermal autofrettage of thick-walled cylinders // *J. Pressure Vessel Technol.* 2015. V. 137. № 6. P. 061207.
6. *Zare H.R., Darijani H.* A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders // *Mater. Des.* 2016. V. 105. P. 366–374.
7. *Davidson T.E., Barton C.S., Reiner A.N., Kendall D.P.* New approach to the autofrettage of high-strength cylinders // *Exp. Mech.* 1962. V. 2. № 2. P. 33–40.
8. *Shufen R., Dixit U.S.* A finite element method study of combined hydraulic and thermal autofrettage process // *J. Pressure Vessel Technol.* 2017. V. 139. № 4. P. 041204.
9. *Shufen R., Singh N.P., Dixit U.S.* Thermally assisted rotational autofrettage of long cylinders with free ends // *J. Pressure Vessel Technol.* 2023. V. 145. № 5. P. 051303.
10. *Shufen R., Dixit U.S.* Effect of length in rotational autofrettage of long cylinders with free ends // *Proc. Inst. Mech. Eng., Pt. C.* 2022. V. 236. № 6. P. 2981–2994.
11. *Adibi-Asl R., Livieri P.* Analytical approach in autofrettaged spherical pressure vessels considering the Bauschinger effect // *J. Pressure Vessel Technol.* 2007. V. 129. № 3. P. 411–419.
12. *Kargarnovin M.H., Darijani H., Naghdabadi R.* Evaluation of the optimum pre-stressing pressure and wall thickness determination of thick-walled spherical vessels under internal pressure // *J. Frankl. Inst.* 2007. V. 344. № 5. P. 439–451.
13. *Parker A.P., Huang X.* Autofrettage and reautofrettage of a spherical pressure vessel // *J. Pressure Vessel Technol.* 2007. V. 129. № 1. P. 83–88.
14. *Perl M., Perry J.* The beneficial contribution of realistic autofrettage to the load-carrying capacity of thick-walled spherical pressure vessels // *J. Pressure Vessel Technol.* 2010. V. 132. № 1. P. 011204.
15. *Maleki M., Farrahi G.H., Haghpahan Jahromi B., Hosseinian E.* Residual stress analysis of autofrettaged thick-walled spherical pressure vessel // *Int. J. Press. Vessels Pip.* 2010. V. 87. № 7. P. 396–401.
16. *Alexandrov S., Pirumov A., Jeng Y.-R.* Expansion/contraction of a spherical elastic/plastic shell revisited // *Contin. Mech. Thermodyn.* 2015. V. 27. № 3. P. 483–494.
17. *Altenbach H., Lvov G., Naumenko K., Okorokov V.* Consideration of damage in the analysis of autofrettage of thick-walled pressure vessels // *Proc. Inst. Mech. Eng. Pt. C.* 2016. V. 230. № 20. P. 3585–3593.
18. *Ali Faghidian S.* Analytical approach for inverse reconstruction of eigenstrains and residual stresses in autofrettaged spherical pressure vessels // *J. Pressure Vessel Technol.* 2017. V. 139. № 4. P. 041202.
19. *Wen J.-F., Gao X.-L., Xuan F.-Z., Tu S.-T.* Autofrettage and shakedown analyses of an internally pressurized thick-walled spherical shell based on two strain gradient plasticity solutions // *Acta Mech.* 2017. V. 228. № 1. P. 89–105.

20. *Johnson W., Mellor P.B.* Elastic-plastic behaviour of thick-walled spheres of non-work-hardening material subject to a steady-state radial temperature gradient // *Int. J. Mech. Sci.* 1962. V. 4. № 2. P. 147–158.
21. *Śloderbach Z., Pajak J.* Analysis of thick-walled elastic-plastic sphere subjected to temperature gradient // *J. Therm. Stress.* 2013. V. 36. № 10. P. 1077–1095.
22. *Orçan Y., Gamer U.* The elastic-plastic spherical shell with nonlinear hardening subject to a radial temperature gradient // *Acta Mech.* 1994. V. 102. № 1. P. 183–198.
23. *Kargarnovin M.H., Rezai Zarei A., Darijani H.* Wall thickness optimization of thick-walled spherical vessel using thermo-elasto-plastic concept // *Int. J. Press. Vessels Pip.* 2005. V. 82. № 5. P. 379–385.
24. *Darijani H., Kargarnovin M.H., Naghdabadi R.* Design of spherical vessels under steady-state thermal loading using thermo-elasto-plastic concept // *Int. J. Press. Vessels Pip.* 2009. V. 86. № 2. P. 143–152.
25. *Мурашкин Е.В., Дац Е.П.* Термоупругопластическое деформирование многослойного шара // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 5. С. 30–36.
26. *Ковтаниук Л.В.* Необратимое деформирование и последующая разгрузка сферического упруговязкопластического слоя // *ПМТФ.* 2013. Т. 54. № 1. С. 170–178.
27. *Буренин А.А., Ковтаниук Л.В., Терлецкий И.А.* О необратимом деформировании и последующей разгрузке сферического вязкоупругопластического слоя // *Изв. РАН. МТТ.* 2014. № 3. С. 44–55.
28. *Бажин А.А., Буренин А.А., Мурашкин Е.В.* К моделированию процесса накопления больших необратимых деформаций в условиях пластического течения и ползучести // *ПММ.* 2016. Т. 80. № 2. С. 254–264.
29. *Буренин А.А., Панченко Г.Л., Ковтаниук Л.В., Галимзянова К.Н.* О согласовании механизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжатии // *Докл. РАН.* 2018. Т. 482. № 4. С. 403–406.
30. *Kholdi M., Rahimi G., Loghman A., Ashrafi H., Arefi M.* Analysis of thick-walled spherical shells subjected to various temperature gradients: thermo-elasto-plastic and residual stress studies // *Int. J. Appl. Mech.* 2021. V. 13. № 09. P. 2150105.
31. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
32. *Alexandrov S., Jeng Y.-R.* An elastic/plastic solution for a hollow sphere subject to thermo-mechanical loading considering temperature dependent material properties // *Int. J. Solids Struct.* 2020. V. 200–201. P. 23–33.
33. *Perry J., Perl M., Shneck R., Haroush S.* The influence of the Bauschinger effect on the yield stress, Young's modulus, and Poisson's ratio of a gun barrel steel // *J. Pressure Vessel Technol.* 2005. V. 128. № 2. P. 179–184.
34. *Shim W.S., Kim J.H., Lee Y.S., Cha K.U., Hong S.K.* A study on hydraulic autofrettage of thick-walled cylinders incorporating Bauschinger effect // *Exp. Mech.* 2010. V. 50. № 5. P. 621–626.
35. *Weiss M., Kupke A., Manach P.Y., Galdos L., Hodgson P.D.* On the Bauschinger effect in dual phase steel at high levels of strain // *Mater. Sci. Eng. A.* 2015. V. 643. P. 127–136.
36. *Meng Q., Zhao J., Mu Z., Zhai R., Yu G.* Springback prediction of multiple reciprocating bending based on different hardening models // *J. Manuf. Process.* 2022. V. 76. P. 251–263.

Strengthening of Hollow Spheres Using Combined Method of Hydraulic and Thermal Autofrettage

A.N. Prokudin^{a, #}

^a*Institute of Machinery and Metallurgy, Khabarovsk FRC, FEB RAS,
Komsomolsk-on-Amur, Russia*

[#]*e-mail: sunbeam_85@mail.ru*

The distributions of residual and working stresses in hollow spheres pre-strengthened using a combination of hydraulic and thermal autofrettage are investigated. The analysis is based on the theory of infinitesimal elastoplastic strains, the Tresca or von Mises yield condition,

the associated flow rule and the linear isotropic hardening law. During unloading, the sphere material may exhibit the Bauschinger effect. All mechanical and thermophysical parameters are assumed to be independent of temperature. Exact analytical solutions are found for both loading and unloading stages including secondary plastic flow. The values of technological parameters are established at which the strengthening effect is achieved near the inner surface of the sphere. Analysis of the results shows that the use of a positive temperature gradient makes it possible to increase the absolute value of residual stresses on the inner surface of the sphere. On the other hand, with the help of a negative gradient it is possible to reduce working stresses in the sphere.

Keywords: autofrettage, sphere, elastoplastic strains, thermal stresses, infinitesimal strains, linear isotropic hardening, Bauschinger effect

REFERENCES

1. *Dixit U.S., Kamal S.M., Shufen R.* Autofrettage Processes: Technology and Modelling. Boca Raton: CRC Press, 2019. 276 p.
2. *Shufen R., Dixit U.S.* A review of theoretical and experimental research on various autofrettage processes // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2018, vol. 140, no. 5, pp. 050802.
3. *Jacob L.* La Résistance et L'équilibre Élastique des Tubes Frettés // *Memorial de L'artillerie Navale*, 1907, vol. 1, pp. 43–155.
4. *Zhan R., Tao C., Han L., Huang Y., Han D.* The residual stress and its influence on the fatigue strength induced by explosive autofrettage // *Explos. Shock Waves*, 2005, vol. 25, no. 3, pp. 239–243.
5. *Kamal S.M., Dixit U.S.* Feasibility study of thermal autofrettage of thick-walled cylinders // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2015, vol. 137, no. 6, pp. 061207.
6. *Zare H.R., Darijani H.* A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders // *Mater. Des.*, 2016, vol. 105, pp. 366–374.
7. *Davidson T.E., Barton C.S., Reiner A.N., Kendall D.P.* New approach to the autofrettage of high-strength cylinders // *Exp. Mech.*, 1962, vol. 2, no. 2, pp. 33–40.
8. *Shufen R., Dixit U.S.* A finite element method study of combined hydraulic and thermal autofrettage process // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2017, vol. 139, no. 4, pp. 041204.
9. *Shufen R., Singh N.P., Dixit U.S.* Thermally assisted rotational autofrettage of long cylinders with free ends // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2023, vol. 145, no. 5, pp. 051303.
10. *Shufen R., Dixit U.S.* Effect of length in rotational autofrettage of long cylinders with free ends // *Proc. Inst. Mech. Eng., Pt. C*, 2022, vol. 236, no. 6, pp. 2981–2994.
11. *Adibi-Asl R., Livieri P.* 2007. Analytical approach in autofrettaged spherical pressure vessels considering the Bauschinger effect // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2007, vol. 129, no. 3, pp. 411–419.
12. *Kargarnovin M.H., Darijani H., Naghdabadi R.* Evaluation of the optimum pre-stressing pressure and wall thickness determination of thick-walled spherical vessels under internal pressure // *J. Frankl. Inst.*, 2007, vol. 344, no. 5, pp. 439–451.
13. *Parker A.P., Huang X.* Autofrettage and reautofrettage of a spherical pressure vessel // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2007, vol. 129, no. 1, pp. 83–88.
14. *Perl M., Perry J.* The beneficial contribution of realistic autofrettage to the load-carrying capacity of thick-walled spherical pressure vessels // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2010, vol. 132, no. 1, pp. 011204.
15. *Maleki M., Farrahi G.H., Haghpanah Jahromi B., Hosseinian E.* Residual stress analysis of autofrettaged thick-walled spherical pressure vessel // *Int. J. Press. Vessels Pip.*, 2010, vol. 87, no. 7, pp. 396–401.
16. *Alexandrov S., Pirumov A., Jeng Y.-R.* Expansion/contraction of a spherical elastic/plastic shell revisited // *Contin. Mech. Thermodyn.*, 2015, vol. 27, no. 3, pp. 483–494.
17. *Altenbach H., Lvov G., Naumenko K., Okorokov V.* Consideration of damage in the analysis of autofrettage of thick-walled pressure vessels // *Proc. Inst. Mech. Eng., Pt. C*, 2016, vol. 230, no. 20, pp. 3585–3593.
18. *Ali Faghidian S.* Analytical approach for inverse reconstruction of eigenstrains and residual stresses in autofrettaged spherical pressure vessels // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2017, vol. 139, no. 4, pp. 041202.

19. Wen J.-F., Gao X.-L., Xuan F.-Z., Tu S.-T. Autofrettage and shakedown analyses of an internally pressurized thick-walled spherical shell based on two strain gradient plasticity solutions // *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, no. 1, pp. 89–105.
20. Johnson W., Mellor P.B. Elastic-plastic behaviour of thick-walled spheres of non-work-hardening material subject to a steady-state radial temperature gradient // *Int. J. Mech. Sci.*, 1962, vol. 4, no. 2, pp. 147–158.
21. Šloderbach Z., Pajak J. Analysis of thick-walled elastic-plastic sphere subjected to temperature gradient // *J. Therm. Stress.*, 2013, vol. 36, no. 10, pp. 1077–1095.
22. Orçan Y., Gamer U. The elastic-plastic spherical shell with nonlinear hardening subject to a radial temperature gradient // *Acta Mech.*, 1994, vol. 102, no. 1, pp. 183–198.
23. Kargarnovin M.H., Rezai Zarei A., Darijani H. Wall thickness optimization of thick-walled spherical vessel using thermo-elasto-plastic concept // *Int. J. Press. Vessels Pip.*, 2005, vol. 82, no. 5, pp. 379–385.
24. Darijani H., Kargarnovin M. H., Naghdabadi R. Design of spherical vessels under steady-state thermal loading using thermo-elasto-plastic concept // *Int. J. Press. Vessels Pip.*, 2009, vol. 86, no. 2, pp. 143–152.
25. Murashkin E.V., Dats E.P. Thermoelastoplastic deformation of a multilayer ball // *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, no. 5, pp. 495–500.
26. Kovtanyuk L.V. Irreversible deformation and subsequent unloading of a spherical elastovisco-plastic layer // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 1, pp. 148–155.
27. Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Terletskii I.A. Irreversible deformation with subsequent unloading of a spherical viscoelastoplastic layer // *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 3, pp. 270–279.
28. Bazhin A.A., Burenin A.A., Murashkin E.V. Simulation of the process of the accumulation of large irreversible deformations under plastic flow and creep conditions // *JAMM*, 2016, vol. 80, no. 2, pp. 182–189.
29. Burenin A.A., Galimzyanova K.N., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L. Matching growth mechanisms of irreversible deformation of a hollow sphere under uniform compression // *Dokl. Phys.*, 2018, vol. 63, no. 10, pp. 407–410.
30. Kholdi M., Rahimi G., Loghman A., Ashrafi H., Arefi M. Analysis of thick-walled spherical shells subjected to various temperature gradients: thermo-elasto-plastic and residual stress studies // *Int. J. Appl. Mech.*, 2021, vol. 13, no. 09, pp. 2150105.
31. Ivlev D.D., Bykovcev G.I. *Theory of Hardening Plastic Solid*. Moscow: Nauka, 1971. 232 p. (in Russian)
32. Alexandrov S., Jeng Y.-R. An elastic/plastic solution for a hollow sphere subject to thermo-mechanical loading considering temperature dependent material properties // *Int. J. Solids Struct.*, 2020, vol. 200–201, pp. 23–33.
33. Perry J., Perl M., Shneck R., Haroush S. The influence of the Bauschinger effect on the yield stress, Young's modulus, and Poisson's ratio of a gun barrel steel // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2005, vol. 128, no. 2, pp. 179–184.
34. Shim W.S., Kim J.H., Lee Y.S., Cha K.U., Hong S.K. A study on hydraulic autofrettage of thick-walled cylinders incorporating Bauschinger effect // *Exp. Mech.*, 2010, vol. 50, no. 5, pp. 621–626.
35. Weiss M., Kupke A., Manach P.Y., Galdos L., Hodgson P.D. On the Bauschinger effect in dual phase steel at high levels of strain // *Mater. Sci. Eng. A*, 2015, vol. 643, pp. 127–136.
36. Meng Q., Zhao J., Mu Z., Zhai R., Yu G. Springback prediction of multiple reciprocating bending based on different hardening models // *J. Manuf. Process.*, 2022, vol. 76, pp. 251–263.